

COURS DE MATHÉMATIQUES

---

TOME VII  
**CALCUL DIFFÉRENTIEL**

---

Mathématiques générales  
France ~ 2025  
*Écrit et réalisé par Louis Lascaud*



# Table des matières

<b>1 Différentiabilité</b>	<b>9</b>
1.1 Applications différentiables . . . . .	9
1.1.1 Rappels sur les applications linéaires continues . . . . .	9
1.1.2 Définition . . . . .	9
1.1.3 Classes de régularité . . . . .	9
1.2 Grands théorèmes du calcul différentiel . . . . .	10
1.2.1 Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale . . . . .	10
1.2.2 Théorème des fonctions implicites . . . . .	10
1.2.3 Quelques lemmes du calcul différentiel . . . . .	10
1.2.4 Théorème des extrema liés et multiplicateurs de Lagrange . . . . .	11
1.2.5 Théorème du rang constant . . . . .	11
1.2.5.1 Normalisation des applications de rang constant . . . . .	11
1.2.5.2 Immersion, submersion. Formes canoniques de rang . . . . .	13
<b>2 Analyse vectorielle</b>	<b>15</b>
2.1 Courbes paramétrées . . . . .	15
2.1.1 Définition . . . . .	15
2.1.2 Longueur d'une courbe . . . . .	15
2.1.3 Régularité et paramétrisation . . . . .	16
2.1.4 Allure d'une courbe plane . . . . .	16
2.1.5 Courbes gauches . . . . .	18
2.2 Champs vectoriels . . . . .	18
2.2.1 Équations différentielles définies par un champ de vecteurs . . . . .	18
2.2.2 Opérateurs de champs vectoriels . . . . .	18
2.2.3 Point de vue dual : les formes différentielles sur l'espace euclidien . . . . .	18
<b>3 Géométrie et topologie différentielles</b>	<b>19</b>
3.1 Sous-variétés de l'espace euclidien . . . . .	19
3.1.1 Définitions . . . . .	20
3.1.2 Espace tangent en un point à une sous-variété . . . . .	25
3.1.3 Fibré tangent . . . . .	27
3.1.4 Fibré co-tangent . . . . .	27

3.1.5	Notion de transversalité . . . . .	27
3.1.6	Applications différentiables sur des sous-variétés . . . . .	28
3.1.7	Calcul d'extrema . . . . .	30
3.1.8	Difféomorphismes entre sous-variétés . . . . .	31
3.1.9	Cartes locales, atlas . . . . .	32
3.1.10	Généralisation des théorèmes fondamentaux . . . . .	34
3.2	Variétés différentielles . . . . .	35
3.2.1	Notion de variété topologique . . . . .	35
3.2.2	Notion de variété différentielle . . . . .	40
3.2.3	Applications différentiables sur des variétés différentielles . . . . .	43
3.2.4	Opérations sur les variétés . . . . .	45
3.2.4.1	Sous-variété d'une variété différentielle . . . . .	45
3.2.4.2	Somme disjointe de variété . . . . .	46
3.2.5	Orientabilité des variétés . . . . .	47
3.2.6	Variétés à bord . . . . .	48
3.2.7	Feuilletage . . . . .	50
3.2.8	Points réguliers, points critiques . . . . .	51
3.2.9	Espace tangent en un point à une variété . . . . .	52
3.2.10	Difféomorphisme, immersion, submersion sur une variété différentielle et adaptation des grands théorèmes à leur cas . . . . .	54
3.2.10.1	Théorèmes fondamentaux de la géométrie différentielle . . . . .	54
3.2.10.2	Plongement des variétés . . . . .	55
3.2.11	Fibré tangent à une variété différentielle . . . . .	55
3.2.12	Fibration, fibrés vectoriel . . . . .	57
3.2.13	Quelques constructions de variétés différentielles : actions de groupe et revêtements . . . . .	61
3.2.14	Fonctions plateaux et partition de l'unité . . . . .	64
3.2.15	Plongement d'une variété compacte dans un espace euclidien . . . . .	66
3.3	Champs de vecteurs . . . . .	67
3.3.1	Définition des champs de vecteurs . . . . .	68
3.3.2	Opérations sur les champs de vecteurs . . . . .	69
3.3.3	Dérivations sur une variété et description de l'algèbre des dérivations par rapport aux champs . . . . .	70
3.3.4	Restriction d'une dérivation à un ouvert . . . . .	72
3.3.5	Image par un difféomorphisme d'un champ de vecteurs ou d'une dérivation . . . . .	72
3.3.6	Constructions de champs de vecteurs . . . . .	73
3.3.7	Crochet de Lie de champs de vecteurs . . . . .	74
3.3.8	Flot d'un champ de vecteurs . . . . .	75
3.3.8.1	Équation différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	75
3.3.8.2	Image par un difféomorphisme... encore . . . . .	77

3.3.8.3	Flot d'un champ de vecteurs sur une variété . . . . .	77
3.3.8.4	Une application : dilatation des lignes de niveau . . . . .	79
3.3.8.5	Redressement d'un champ de vecteurs . . . . .	79
3.3.8.6	Image d'un champ de vecteurs par un flot . . . . .	80
3.3.8.7	Théorème du redressement . . . . .	80
3.4	Formes différentielles . . . . .	80
3.4.1	Définition des formes différentielles . . . . .	80
3.4.1.1	Formes différentielles sur les espaces euclidiens . . . . .	80
3.4.1.2	Formes différentielles sur les variétés . . . . .	81
3.4.1.3	Image réciproque d'une forme par une application . . . . .	82
3.4.1.4	Dualité formes différentielles-champs de vecteurs . . . . .	82
3.4.2	Cohomologie de de Rham . . . . .	82
3.4.2.1	Produit extérieur de formes différentielles . . . . .	82
3.4.2.2	Expression des formes différentielles en coordonnées locales . . . . .	83
3.4.2.3	Complexe de de Rham sur une variété . . . . .	83
3.4.3	Intégration des formes différentielles . . . . .	86
3.5	Groupes de Lie . . . . .	88
3.5.1	Définition, premiers exemples . . . . .	88
3.5.2	Translations à gauche & à droite, champ de vecteurs invariants . . . . .	88
3.5.3	Flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche et sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie . . . . .	90
3.5.4	Algèbre de Lie . . . . .	91
3.5.5	Quelques calculs d'applications linéaires tangentes . . . . .	91
3.5.6	Actions d'un groupe de Lie sur lui-même et sur son algèbre . . . . .	92
3.5.6.1	Définitions . . . . .	92
3.5.7	Application exponentielle . . . . .	93
3.5.8	Dérivée de Lie d'une fonction . . . . .	96
3.5.9	Compléments . . . . .	97
3.6	Géométrie riemannienne . . . . .	97
3.6.1	Métriques . . . . .	97
3.6.1.1	Opérations sur les métriques riemanniennes . . . . .	99
3.6.2	Connexions . . . . .	99
3.6.3	Géodésiques . . . . .	99
3.6.4	Transport parallèle . . . . .	99
3.6.5	Courbure . . . . .	99
3.6.6	Holonomie . . . . .	99
3.6.6.1	Théorème d'Ambrose-Singer . . . . .	99
3.6.6.2	Théorie de jauge . . . . .	99
3.6.6.3	Théorème de réduction d'holonomie de berger . . . . .	99
3.6.7	Équations d'Einstein . . . . .	99

3.7	Géométrie différentielle complexe et atlas holomorphes . . . . .	99
3.7.1	Définition et remarques élémentaires . . . . .	99
3.7.2	Construction de variétés complexes . . . . .	104
3.7.2.1	Sous-variétés complexes . . . . .	104
3.7.2.2	Produit de variétés complexes . . . . .	104
3.7.2.3	Construction d'une variété complexe par submersion . . . . .	104
3.7.2.4	Quotient d'une variété complexe par une action de groupe . . . . .	105
3.7.3	Espace tangent complexe . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Surfaces de Riemann</b>	<b>107</b>
4.1	Préliminaires . . . . .	107
4.1.1	Définition et premiers constats . . . . .	107
4.1.2	Corps des fonctions méromorphes . . . . .	115
4.1.2.1	Premières propriétés . . . . .	115
4.1.2.2	Diviseurs . . . . .	119
4.2	Quelques surfaces de Riemann classiques . . . . .	124
4.2.1	Étude de la sphère de Riemann . . . . .	124
4.2.1.1	Corps des fonctions méromorphes de $\mathbb{CP}^1$ . . . . .	124
4.2.1.2	Théorèmes fondamentaux des surfaces de Riemann : une première approche dans le cas de la droite projective complexe . . . . .	125
4.2.2	Étude du cylindre infini . . . . .	127
4.2.3	Étude des courbes elliptiques complexes . . . . .	130
4.2.3.1	Fonctions elliptiques . . . . .	131
4.2.3.2	Construction des fonctions elliptiques sur $E_\tau$ . . . . .	133
4.2.3.3	Fonction de Weierstrass . . . . .	134
4.2.3.4	Théorèmes fondamentaux des surfaces de Riemann : approche dans le cas des courbes elliptiques . . . . .	138
4.2.3.5	Fonction de Jacobi sur le tore . . . . .	141
4.2.3.6	Diviseurs sur un tore complexe . . . . .	142
4.2.3.7	Description du corps des fonctions méromorphes sur $E_\tau$ . . . . .	142
4.3	Un peu de topologie algébrique pour appréhender les surfaces de Riemann . . . . .	145
4.3.1	Considérations topologiques sur les surfaces . . . . .	145
4.3.1.1	Classification des surfaces topologiques compactes . . . . .	145
4.3.1.2	Combinatoire des surfaces topologiques . . . . .	146
4.3.1.3	Revêtements holomorphes entre surfaces de Riemann . . . . .	150
4.3.2	Revêtements ramifiés . . . . .	151
4.3.3	Théorème d'existence d'une surface de Riemann . . . . .	154
4.3.4	Corps des fonctions méromorphes et revêtements ramifiés . . . . .	156
4.3.5	Application : étude des surfaces hyperelliptiques . . . . .	160
4.3.5.1	Première approche des courbes hyperelliptiques complexes . . . . .	160

4.3.5.2	Surfaces de Riemann hyperelliptiques et revêtements ramifiés . . . . .	161
4.3.6	Théorème de Belyi . . . . .	163
4.4	Surfaces de Riemann vues comme quotients . . . . .	163
4.4.1	Le théorème d'uniformisation . . . . .	163
4.4.2	Groupe des automorphismes d'une surface de Riemann . . . . .	164
4.4.2.1	Description des groupes d'automorphismes d'une surface de Riemann . . . . .	164
4.4.2.2	Classes de conjugaison des groupes d'automorphismes d'une surface de Riemann . . . . .	165
4.4.2.3	Quotients du plan complexe . . . . .	165
4.4.2.4	Quotients de $\Delta$ et groupes fuchsiens . . . . .	165
4.4.2.5	Retour sur le tore : réseaux et surfaces de Riemann . . . . .	165
4.5	Courbes algébriques et surfaces de Riemann compactes . . . . .	165
4.5.1	Rappels pratiques sur les courbes algébriques planes et construction de surfaces de Riemann par elles . . . . .	165
4.5.2	Étude des courbes algébriques projectives en tant que surfaces de Riemann . . . . .	168
4.5.2.1	Plongement des courbes projectives complexes . . . . .	168
4.5.2.2	Intersection de courbes projectives complexes : escale au théorème de Bézout . . . . .	170
4.5.3	Courbes algébriques et revêtements ramifiés . . . . .	171
4.6	Diviseurs et fibrés en droites associés à une SR . . . . .	173
4.7	Théorie de Hodge . . . . .	177
4.7.0.1	Rappels de rappels . . . . .	177
4.7.1	Rappels : formes holomorphes sur des surfaces de Riemann . . . . .	177
4.7.2	1-formes méromorphes sur une surface de Riemann . . . . .	178
4.7.3	Homologie et cohomologie de de Rham . . . . .	179
4.7.4	Fonctions harmoniques et théorème de décomposition de Hodge . . . . .	181
4.7.5	Théorèmes conséquences de la théorie de Hodge . . . . .	183
4.7.5.1	Existence d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann . . . . .	183
4.7.5.2	Différentielle holomorphe et existence d'une différentielle abélienne . . . . .	184
4.7.5.3	Théorème de Riemann-Roch et conséquences . . . . .	184
4.7.5.4	Plongement des surfaces de Riemann dans l'espace projectif . . . . .	186
4.7.5.5	Relations bilinéaires de Riemann . . . . .	187
4.7.5.6	Preuve du théorème de Riemann-Roch . . . . .	191
4.7.5.7	Théorème d'Abel-Jacobi . . . . .	191
4.7.5.8	Cohomologie des faisceaux sur une SR . . . . .	191



# Chapitre 1

## Différentiabilité

### Résumé

On pose les bases du calcul différentiel, qui généralise l'opération de dérivation dans le cas des fonctions à plusieurs variables. Le cadre naturel pour un tel discours est celui des espaces vectoriels normés. Dans la majorité des cas, c'est la dimension finie qui prime pour l'intuition géométrique ; dans certains cas plus fins encore (gradient, orientation, etc.), il faudra s'imaginer l'espace à trois dimensions.

### 1.1 Applications différentiables

Dans tout le chapitre, nous considérons :

- $\mathbb{K}$  un corps commutatif dont nous notons les lois comme habituellement ;
- $E, F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Leurs lois, encore une fois notées comme habituellement, ne sont pourtant pas forcément les mêmes ;
- une norme  $\|\cdot\|_E$  sur  $E$  et une norme  $\|\cdot\|_F$  sur  $F$ . Par paresse, nous les notons parfois toutes deux  $\|\cdot\|$ , mais uniquement lorsque les choses sont claires ;
- un ouvert  $U \subseteq E$  ;
- un point  $a \in U$  ;
- $f : U \rightarrow F$  une application quelconque.

#### 1.1.1 Rappels sur les applications linéaires continues

#### 1.1.2 Définition

#### 1.1.3 Classes de régularité

##### Définition. (*Fonction lisse*)

Une fonction  $f$  est dite *lisse* si elle est  $C^\infty$ .

## 1.2 Grands théorèmes du calcul différentiel

### 1.2.1 Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale

**Remarque importante.** Le théorème d'inversion locale reste vrai en remplaçant l'espace de départ et l'espace d'arrivée par des espaces de Banach.

**Corollaire. (*Théorème d'application ouverte différentiel*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . On suppose que pour tout  $x \in U$ ,  $df_x$  est inversible. Alors  $f$  est une application ouverte.

▷ Soit  $V$  un ouvert de  $U$ . Montrons que  $f(V)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit donc  $t \in f(V)$  et  $x \in V$  tel que  $f(x) = t$ . Puisque  $df_x$  est inversible, par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert  $\Omega$  contenant  $x$  et contenu dans  $U$  et un ouvert  $\Omega'$  contenant  $t$  tel que  $f$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $\Omega'$ . En particulier,  $f(\Omega) = \Omega'$ . Puisque  $\Omega \cap V \subseteq \Omega$ ,  $f(\Omega \cap V)$  est un ouvert de  $\Omega'$ , car  $f$  est un difféomorphisme sur  $\Omega$ . Posons  $W = f(\Omega \cap V)$ . Alors  $W$  contient  $t$ , est un ouvert de  $\Omega'$  donc un ouvert, car  $\Omega'$  est ouvert, et clairement  $W \subseteq f(V)$ , d'où le résultat. ■

### 1.2.2 Théorème des fonctions implicites

### 1.2.3 Quelques lemmes du calcul différentiel

**Théorème. (*Lemme d'Hadamard*)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^p$  avec  $p \geq 1$  et  $U$  un ouvert étoilé en  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ . Alors il existe des fonctions  $g_1, \dots, g_n$  de classe  $C^{p-1}$  telles que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g_i(x)$ .

▷ D'après le second théorème fondamental de l'analyse,  $f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(a + t(x-a)) dt$ . Mais par dérivation des fonctions composées,  $\frac{d}{dt} f(a + t(x-a)) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))$ . Le résultat s'ensuit, avec  $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a)) dt$ , qui est  $C^{p-1}$  en vertu de la règle de Leibniz. ■

**Remarques.**

1. On a nécessairement  $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  en observant la preuve.
2. Les fonctions  $g_i$  ne sont pas nécessairement uniques.

**Propriété. (*Régularité des fonctions d'accroissement*)**

Pour tout fonction lisse  $f$  telle que  $f(0) = 0$ ,  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est bien définie et lisse.

▷ Il suffit d'appliquer le lemme d'Hadamard en 0 pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  au rang  $n+1$ , pour montrer que  $f$  est  $C^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

### 1.2.4 Théorème des extrema liés et multiplicateurs de Lagrange

Ce troisième théorème est un théorème d'**OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE**.

### 1.2.5 Théorème du rang constant

Le théorème du rang constant est un quatrième théorème important du calcul différentiel, qui ne vient qu'à cette place parce qu'il sert en premier lieu à démontrer l'équivalence des définitions de sous-variétés de l'espace euclidien, grâce à l'existence de formes normales qu'il induit.

Soient fixés dans cette partie  $n, m \in \mathbb{N}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Définition. (*Rang d'une application en un point*)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable. Le *rang* de  $f$  en  $a \in U$  ( $f$  n'a aucune raison d'être linéaire !) est le rang de l'application linéaire  $(df(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .

Remarquons que le rang ne peut qu'augmenter au voisinage d'un point.

#### Propriété. (*Croissance locale du rang différentiel*)

Si  $f$  est  $C^1$  et  $a \in U$ , alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$ ,  $V \subseteq U$  tel que

$$\forall x \in V, \quad \text{rg}(df(x)) \geq \text{rg}(df(a)).$$

▷ En effet, le rang d'une matrice  $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  est la taille maximale des sous-matrices carrées extraites de  $A$  qui sont inversibles. Ici  $J(f)(a) \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ . Il existe donc une sous-matrice de taille  $r$  inversible  $B(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i \in I_r \subseteq \{1, \dots, m\}, j \in J_r \subseteq \{1, \dots, n\}}$ . L'application  $\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathfrak{M}_r(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & B(x) \end{array}$

et donc son déterminant est continu. Par suite, il existe  $U' \subseteq U$  contenant  $a$  tel que pour tout  $x \in U'$ ,  $\det(B(x)) \neq 0$ , i.e.  $Jf(x)$  est de rang  $\geq r$ . ■

#### 1.2.5.1 Normalisation des applications de rang constant

On rappelle ce théorème d'algèbre linéaire : si  $C \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  est de rang  $r$ , il y a  $P \in GL_m(\mathbb{R}), Q \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $PCQ = J_r$  la matrice  $Diag(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  où 1 a la multiplicité  $r$ . On essaie de raffiner ce théorème dans le cas d'une application différentiable, grâce à la définition précédente de rang, en imposant que *le changement de base soit un difféomorphisme*.

**Théorème. (*Théorème du rang constant*)**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application de classe  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que pour tout  $x \in U$ ,  $\text{rg}(df(x)) = r$ . Alors pour tout  $x_0 \in U$ ,

- il existe un voisinage  $U_{x_0} \subseteq U$  de  $x_0$  et un voisinage  $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^m$  un voisinage de  $f(x_0)$ ,
- il existe  $U'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi : U' \rightarrow U_{x_0}$  un  $C^k$ -difféomorphisme,
- il existe  $V'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $\psi : V_{f(x_0)} \rightarrow V'$  un  $C^k$ -difféomorphisme

tels que :

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

avec les notations évidentes.

Certains auteurs parlent de *subimmersion*; en fait, d'immersion lorsque la différentielle est injective, et de submersion lorsqu'elle est surjective, d'où le terme.

▷ On considère  $J(f)(x_0)$  de rang  $r$ . Quitte à considérer  $P_1, f, P_2$  où  $P_1, P_2$  sont des matrices de permutations. On peut supposer que  $A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r}$  soit inversible. On considère l'application  $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $x \mapsto (f^1(x), \dots, f^r(x), x_{r+1}, \dots, x_n)$ . Alors  $H$  est de classe  $C^k$ . On a  $J(H)(x_0) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$  où  $A$  est une matrice carré de taille  $r$ . Or  $J(H)(x_0)$  est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, donc il existe  $U_{x_0} \subseteq U$  un voisinage de  $x_0$  tel que  $H|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \rightarrow H(U_{x_0}) = U'$  est un  $C^k$ -difféomorphisme. Soit  $\phi = (H|_{U_{x_0}})^{-1}$ . Alors  $\phi : U' \rightarrow U_{x_0}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme tel que  $f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (f^1 \circ \phi, \dots, f^r \circ \phi, f^{r+1}, \dots, f^n)$ . Ainsi  $H \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) = (f^1 \circ \phi(x), \dots, f^r \circ \phi(x), f^{r+1}(x), \dots, f^n(x))$  puis  $f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x), \dots, g_n(x))$ , d'où  $J(f \circ \phi)(x) = J(f)(\phi(x)) \cdot J(\phi)(x)$  pour tout  $x \in U'$ , où  $J(f)(\phi(x))$  est de rang  $r$  et  $J(\phi)(x)$  est inversible.

Ainsi pour tout  $x \in U'$ ,  $\text{rg}(J(f \circ \phi)) = r$ . Donc  $J(f \circ \phi) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{i \geq r+1, h \geq r+1}$ . Alors pour tout  $i \geq r+1$ , pour tout  $kj \geq r+1$ ,  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$  pour tout  $x \in U'$ : c'est là que l'hypothèse sur le rang est cruciale. Par suite,  $g_{r+1}, \dots, g_n$  ne dépendent pas de  $x_{r+1}, \dots, x_n$ .

Soit pour  $(z_1, \dots, z_m)$  au voisinage de  $f(x_0)$ , la fonction  $\psi(z_1, \dots, z_m) = (z_1, \dots, z_r, z_{r+1} - g_{r+1}(z_1, \dots, z_r), \dots, z_m - g_m(z_1, \dots, z_r))$ . On a alors  $J(\psi)(z) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & I_{n-r} \end{pmatrix}$ , donc  $J(\psi)(z)$  est inversible en  $z = f(x_0)$ . On applique encore le théorème d'inversion locale à  $\psi$ , donc il existe un ouvert  $V_{f(x_0)}$  contenant  $f(x_0)$  tel que  $\psi|_{V_{f(x_0)}} : V_{f(x_0)} \rightarrow V'$  est un difféomorphisme, et d'après les formules précédentes,  $\psi \circ f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . ■

Ce théorème est remarquable; c'est, comme annoncé, un théorème de normalisation. En effet, à changement de variables près, les applications de rang  $r$  sont de la forme précédente:  $x \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .

On signale des cas particuliers qui seront largement utiles dans la suite, et notamment en géométrie différentielle.

### 1.2.5.2 Immersion, submersion. Formes canoniques de rang

#### Définition. (*Immersion*)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$ . On dit que c'est une *immersion* en  $x_0 \in U$  si  $df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  est injective. Il faut en particulier  $n \leq m$ .

Si  $df(x_0)$  est injective, alors il y a un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $df(x)$  est injective, *i.e.* sur lequel  $f$  est de rang constant, égal à  $n$  par le théorème du rang.

Dans le cas des immersions, on a une version légèrement plus forte que le théorème du rang constant, en cela que l'on a besoin d'un changement de variables qu'à l'arrivée.

#### Théorème. (*Forme canonique des immersions*)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$ , avec  $0 \in U$  (on peut énoncer une version largement plus générale, mais paraphrasée). On suppose  $df(0)$  injective. Alors il existe  $U' \subseteq U$  un ouvert,  $0 \in U'$  et  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  un ouvert contenant  $f(0)$  et  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$  un  $C^k$ -difféomorphisme tel que  $\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$  pour tous  $(x_1, \dots, x_n) \in U'$ .

▷ On reprend la preuve du théorème du rang constant. Ici  $r = n$  et  $H(x_1, \dots, x_n) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$ , car  $H$  est une partie de  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . On a introduit  $\phi = (H|_{U_{x_0}})^{-1}$ . Alors  $f \circ \phi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n, g_{n+1}(y), \dots, g_m(y))$  et  $\psi \circ f \circ \phi(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0)$ . Ceci donne  $\psi \circ f(z_1, \dots, z_n) = (f^1(z_1, \dots, z_n), \dots, f^n(z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0))$ . On compose à gauche par  $\phi \times id_{\mathbb{R}^{m-n}}$ . Alors  $\phi \times id_{\mathbb{R}^{m-n}} \circ f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots, 0)$ . ■

On énonce le résultat analogue pour les submersions.

#### Définition. (*Submersion*)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$ . On dit que c'est une *submersion* en  $x_0 \in U$  si  $df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  est surjective. Il faut en particulier  $m \leq n$ .

Si  $f$  est une submersion en  $x_0 \in U$ , il y a un voisinage  $V$  de  $x_0$  contenu dans  $U$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $f$  est une submersion en  $x$ . Ainsi  $f$  est de rang constant sur  $V$ , égal à  $m$  par définition du rang.

#### Théorème. (*Forme canonique des submersions*)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$ . On suppose que  $f$  est une submersion en  $x_0$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $U_{x_0} \subseteq U$ , un ouvert  $U' \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\phi : U' \rightarrow U_{x_0}$  un  $C^k$ -difféomorphisme tel que  $\forall x \in U' \quad f \circ \phi(x) = (x_1, \dots, x_m)$ .

▷ C'est beaucoup plus rapide : c'est le cas  $r = m$  du théorème du rang constant, où alors  $\psi = id_{\mathbb{R}^m}$ . ■

On remarquera le lien heuristique avec ces propositions à la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par inversibilités latérales, pour des applications quelconques entre ensembles.

# Chapitre 2

## Analyse vectorielle

### 2.1 Courbes paramétrées

#### 2.1.1 Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $a < b \in \mathbb{R}$ .

**Définition.** (*Courbe paramétrée*)

Une *courbe paramétrée* de  $\mathbb{R}^n$  est une application continue d'une intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition.** (*Équivalence de courbes paramétrées*)

Deux courbes paramétrées sont *équivalentes* si elles sont égales à *reparamétrisation i.e.* homéomorphisme de l'intervalle de définition près.

#### 2.1.2 Longueur d'une courbe

**Définition.** (*Longueur d'une courbe paramétrée*)

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. La *longueur* de  $\gamma$  est la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales dont les sommets sont sur la courbe :

$$\ell(\gamma) = \text{long}(\gamma) = \sup_{a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b} \sum_{j=1}^n \|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne.

**Théorème.** (*Longueur d'une courbe  $C^1$* )

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée  $C^1$ . Alors

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Propriété. (*Invariance de la longueur par équivalence*)**

Deux courbes équivalentes ont la même longueur.

▷ C'est le théorème de changement de variables! ■

**2.1.3 Régularité et paramétrisation****Définition. (*Paramétrisation par la longueur d'arc*)**

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée dérivable. Elle est dite *paramétrée par la longueur d'arc*, ou *par l'abscisse curviline*, si  $\|\gamma'(t)\| = 1$  pour tout  $t \in [a,b]$ .

**Interprétation**

Une courbe paramétrée par la longueur d'arc est parcourue à vitesse constante. ☒

**Propriété. (*Paramétrisation des courbes régulières*)**

Toute courbe régulière admet un (re)paramétrage par la longueur d'arc, unique à une translation près et au sens de parcours près.

**Fait. (*Direction normale à la courbe*)**

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. Si  $t_0 \in [a,b]$  est régulier, alors  $\gamma'(t_0)$  donne la direction de la normale à  $\gamma$  en  $t_0$ .

**Fait. (*Direction tangente à la courbe*)**

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée. Si  $t_0 \in [a,b]$  est birégulier, alors  $\gamma''(t_0)$  donne la direction de la tangente à  $\gamma$  en  $t_0$ .

**2.1.4 Allure d'une courbe plane****Définition. (*Courbure d'une courbe paramétrée*)**

Soit  $\gamma$  une courbe plane  $C^2$  paramétrée par la longueur d'arc. On appelle *courbure* la quantité  $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$ .

Le *centre de courbure* est le point  $P(t) = \gamma(t) + \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|^2}$ .

**Théorème. (*Formule de la courbure*)**

Soit  $\gamma$  une courbe  $C^2$  (non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc). On a :

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

où l'on note  $x \wedge y = x_1y_2 - x_2y_1$ .

**Exemples. (*Courbures d'une courbe*)**

1. La courbure d'une droite est nulle.
2. La courbure d'un cercle de rayon  $R$  est  $\frac{1}{R}$ . En particulier, la courbure du cercle unité est constante égale à 1.

Intuitivement, un bout d'un cercle de rayon très grand semble être presque plat.

Par l'exercice suivant, on a donc la courbure de n'importe quel cercle du plan.

**Exercice 1 (*Invariance de la courbure par translation*)**

Montrer qu'une courbe  $C^2$  translatée d'une autre a la même courbure. Est-elle invariante par homothétie ?

Réciproquement :

**Propriété. (*Caractérisation des courbures nulles*)**

Toute courbe régulière de classe  $C^2$  qui est de courbure nulle est un bout de droite.

**Propriété. (*Caractérisation des courbures constantes*)**

Toute courbe régulière de classe  $C^2$  qui est de courbure constante **strictement positive** est un bout de cercle.

**Définition. (*Cercle osculateur*)**

Le *cercle osculateur* à une courbe paramétrée  $\gamma$  en un point  $t$  est le cercle dont le centre est le centre de courbure  $P_\gamma(t)$  de  $\gamma$  en  $t$  et la rayon est l'inverse  $\frac{1}{\kappa_\gamma(t)}$  de la courbure de  $\gamma$  en  $t$ .

**Propriétés. (*Allure du cercle osculateur*)**

Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée  $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \in [a,b]$ . On note  $C = C(t)$  le cercle osculateur en  $t$ .

- (i)  $C$  passe par  $\gamma(t)$  ;
- (ii) le centre de  $C$  est sur la normale à la courbe en  $t$ , du même côté que  $\gamma''(t_0)$  ;

(iii) la distance du centre de  $C$  à  $\gamma(t)$  est  $\frac{1}{\kappa(t)}$ .

Le cercle osculateur est donc celui qui épouse le mieux la forme de la courbe, au sens suivant :

#### Théorème. (*Pertinence du cercle osculateur*)

Soit  $\gamma$  une courbe  $C^2$  et  $t_0$  birégulier. Si  $t_1 < t_2 < t_3$  tendent vers  $t_0$ , alors le cercle interpolateur de  $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)$  tend vers le cercle osculateur en  $\gamma(t_0)$  au sens que la position du centre et la longueur du rayon convergent.

### 2.1.5 Courbes gauches

On peut définir l'analogue du cercle osculateur en trois dimensions :

#### Définition. (*Plan osculateur*)

Soit  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Le *plan osculateur* de  $\gamma$  en  $t \in [a,b]$  est le plan engendré par  $\gamma'(t)$  et  $\gamma''(t)$  passant par  $\gamma'(t)$ .

On peut alors définir *courbure* et *cercle osculateur d'une courbe gauche* qui sera contenu dans le plan osculateur par définition.

#### Définition. (*Torsion d'une courbe gauche*)

Soit  $\gamma$  une courbe gauche. Soit  $t \in [a,b]$ . La torsion de  $\gamma$  en  $t$  est la quantité

$$\theta(t) = -\frac{\det(\gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

#### Théorème. (*Pertinence de la torsion*)

La torsion d'une courbe est nulle, si et seulement si, elle est plane.

## 2.2 Champs vectoriels

### 2.2.1 Équations différentielles définies par un champ de vecteurs

### 2.2.2 Opérateurs de champs vectoriels

### 2.2.3 Point de vue dual : les formes différentielles sur l'espace euclidien

# Chapitre 3

## Géométrie et topologie différentielles

### Résumé

La géométrie différentielle explique comment faire du calcul différentiel sur des variétés abstraites sur des espaces topologiques qui a priori ne se plongent pas dans l'espace euclidien. Une fois cette description faite, on dispose des outils du calcul différentiel dans ces espaces, notamment la recherche d'extrema ou les équations différentielles. Cette partie du calcul différentiel s'appelle la topologie différentielle. Sur une variété topologique ou différentielle, on peut souvent ajouter une structure, telle qu'une métrique riemannienne, ou d'autres choses encore. On a là affaire à de la géométrie différentielle.



### 3.1 Sous-variétés de l'espace euclidien

On souhaite, avant de définir les variétés abstraites, s'intéresser à une généralisation attendue du calcul différentiel de base : on voudrait définir la notion de différentiabilité sur une classe de parties de  $\mathbb{R}$  plus large que sa topologie, c'est-à-dire ses ouverts.

**Exercice 1**

Soit  $n$  un entier naturel. Pourquoi est-il illusoire d'espérer définir la notion d'application différentiable sur toute partie de  $\mathbb{R}^n$  ?

▷ Éléments de réponse.

Pour  $n = 1$  d'abord, peut-on définir la dérivabilité sur  $\mathbb{Q}$  ?

Soit  $n$  un entier naturel.

### 3.1.1 Définitions

#### Définition-propriété. (*Sous-variété de $\mathbb{R}^n$* )

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une partie de l'espace euclidien canonique de dimension  $n$ . Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. (*Submersion/par équation*) Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une application de classe  $C^p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  telle que  $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$  est surjective, i.e.  $f$  est une submersion en  $x$ , et  $U \cap M = f^{-1}(f(x))$ , autrement dit,  $U \cap M$  est donné par  $n - k$  équations indépendantes. Il faut et suffit en fait de trouver  $f$  une  $C^k$ -submersion en  $x$  telle que  $M \cap U = f^{-1}(0)$ , ou  $M \cap U = f^{-1}(a)$  pour n'importe quel  $a$  fixé<sup>a</sup>.
2. (*Graphe*) Pour tout  $x \in M$ , quitte à faire une permutation des coordonnées, il y a une décomposition dite *identification linéaire*  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  et si  $x = (x_1, x_2)$ ,  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $x_1 \in U_1$  un ouvert et  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $x_2 \in U_2$  un ouvert et  $\varphi_x : U_1 \rightarrow U_2$  de classe  $C^p$  est tel que  $M \cap (U_1 \times U_2) = \text{Graphe}(\varphi_x) = \{(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2, y_2 = \varphi_x(y_1)\}$ .
3. (*Redressement local/par coordonnée rectifiante*) Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\psi : U_x \rightarrow V$  un  $C^p$ -difféomorphisme tel que  $\psi(x) = 0$  et  $\psi(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ .  $\psi$  est alors appelé *redressement local* en  $x$ , voire carte locale en  $x$ . De même que précédemment, on peut remplacer 0 par un  $a$  fixé sans problème par translation.
4. (*Paramétrisation locale, immersion*) Pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un ouvert  $O_\Omega$  de  $\mathbb{R}^k$ ,  $0 \in \Omega$  et  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^p$  tels que  $g(0) = x$ ,  $g$  est un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $M \cap U$  et  $dg(0)$  est injective, i.e.  $g$  est une immersion en 0 ; même remarque pour changer 0 en  $a$ .

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit de  $M$  que c'est une *sous-variété* de  $\mathbb{R}^n$ , de dimension  $k$ , et de classe  $C^p$ , où  $k \leq n$  et  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

On dit aussi qu'un point  $x \in M$  partie de  $\mathbb{R}^n$  est *lisse* s'il vérifie l'une des conditions précédentes ; dans ce cas, une sous-variété est un ensemble lisse.

On dit que la sous-variété est *lisse* si elle est de classe  $C^\infty$  ; conventions qui, parfois, se recoupent peu fortuitement.

<sup>a</sup> Car les translations sont différentiables.

▷

(2)  $\implies$  (1) : soient  $U_1$  un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ ,  $U_2$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-k}$  et  $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$  de classe  $C^p$ . On note  $Gr(\varphi) = \{(y_1, y_2), y_2 = \varphi(y_1)\}$ . Soit  $f : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  définie par  $(x_1, x_2) \mapsto x_2 - \varphi(x_1)$  de classe  $C^p$  également, où alors  $f^{-1}(0) = Gr(\varphi)$ . On a bien :  $df(x)(h_1, h_2) = h_2 - d\varphi(x_1)(h_1)$  surjectif.

(1)  $\implies$  (2) : pour  $x \in M$ , prenons  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  avec  $df(x)$  de rang  $n - k$ . Quitte à faire une permutation sur les coordonnées, on peut supposer que les  $n - k$  dernières colonnes de  $J(f)(x)$  sont indépendantes. On a alors une décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  et  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  avec  $\partial_2 f(x)$  inversible. Le théorème des fonctions implicites dit pour  $x = (x_1, x_2)$  et  $f(x) = 0$  que  $f^{-1}(0)$  est au voisinage de  $x$  le graphe d'une application  $C^p$ .

(3)  $\implies$  (1) : soit  $\phi : U \longrightarrow V$  un redressement local différentiable,  $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ . On a  $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Soit  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  définie par  $x \mapsto (\phi^{k+1}(x), \dots, \phi^n(x))$  de classe  $C^p$ . Alors  $M \cap U = f^{-1}(0)$ . Alors  $Jf(x)$  est une matrice extraite (en prenant les dernières colonnes) de  $J\phi(x)$ , qui est inversible : ces dernières colonnes sont linéaires indépendantes. D'où  $J(f)(x)$  surjective.

(2)  $\implies$  (4) : lorsqu'on a un graphe, on a une paramétrisation sous-jacente. On suppose que  $M \cap U$  est un graphe de  $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$  de classe  $C^p$  et  $U = U_1 \times U_2$ . On considère  $g : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$  définie par  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  de classe  $C^p$ . Alors  $g$  une immersion,  $g$  est bijection sur  $Gr(\varphi)$  est c'est bien un homéomorphisme car  $g$  est la première projection.

(4)  $\rightarrow$  (3) : soit  $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une paramétrisation locale, avec  $dg(0)$  injective. On a  $g(\Omega) = U \cap M$  où  $g$  est un homéomorphisme. On veut un redressement. On peut penser à la forme canonique des immersions. Il existe un ouvert  $\Omega' \subseteq \Omega$ ,  $0 \in \Omega'$  et  $\psi : U_x \longrightarrow \psi(U_x)$  un  $C^p$ -difféomorphisme tel que  $\psi \circ g(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ . Or  $g(\Omega')$  est un ouvert de  $U \cap M$  dont de la forme  $U' \cap M$ . Posons  $V' = \psi(U')$ . On a  $\psi(U' \cap M) = \psi \circ g(\Omega') = \Omega' \times \{0\} \subseteq V' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Pour avoir une égalité comme dans la formulation attendue, on va « réduire »  $V'$ . Soit  $W = V' \cap (\Omega' \times \mathbb{R}^{n-k})$  un voisinage ouvert de 0. On a  $\Omega' \times \{0\} \subseteq W \subseteq \Omega' \times \mathbb{R}^{n-k}$  et  $\Omega' \times \{0\} \subseteq W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subseteq \Omega' \times \{0\}$ . D'où  $W \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \Omega' \times \{0\}$ . On prend finalement  $\phi^{-1}(W) = U''$  et  $\phi(U'' \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . ■

Les définitions que nous avons donné de sous-variété en font une *notion locale*, en deux sens : elle est définie en un point, et de plus (à vérifier), localement, la variété se comporte toujours de la même manière.

### Exemples. (*Sous-variétés de l'espace euclidien*)

1. (*Exemple fondamental : la sphère*) Prenons  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$  la sphère de rayon 1. Par suite, la sphère est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

Elle est définie par la fonction  $f(x) = \sum x_i^2$  clairement de classe  $C^\infty$ . De plus,  $df(x)(h) = 2\langle x, h \rangle$ .

Si  $x \neq 0$ ,  $df(x)$  est une forme linéaire non nulle, donc surjective. Ainsi  $S^{n-1} = f^{-1}(1)$  (*voir la méthode suivante pour une généralisation*).

2. (*Exemple triviaux*) Un singleton, un ouvert est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  (*voir remarque ci-dessous*).

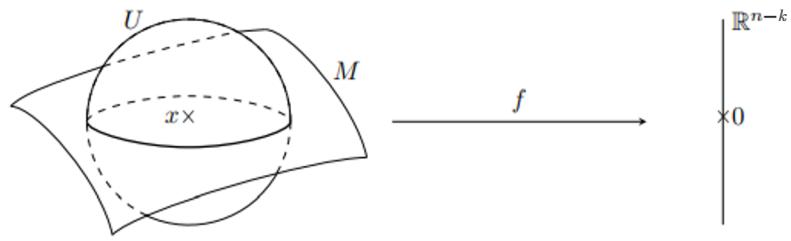


FIGURE 3.1.1 : *Définition par submersion, illustration.* —  
Sur le dessin, l'entier  $p$  correspond à l'entier  $k$  de la preuve !

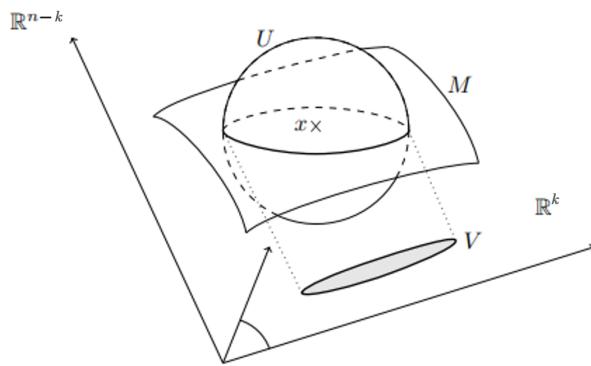


FIGURE 3.1.2 : *Définition par graphe, illustration.* —  
Sur le dessin, l'entier  $p$  correspond à l'entier  $k$  de la preuve, et  $U_1 = V, U_2 = U$ .

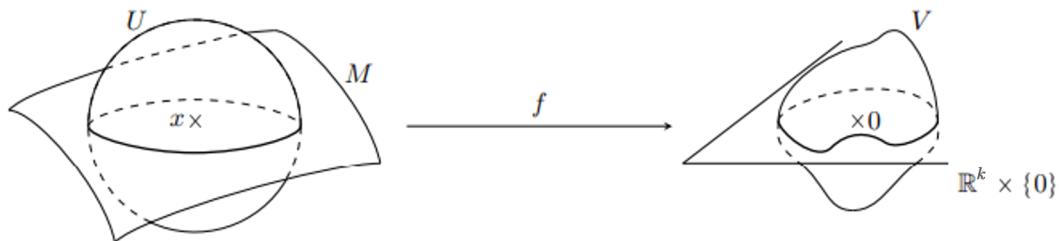


FIGURE 3.1.3 : *Définition par redressement, illustration.* —  
Sur le dessin, l'entier  $p$  correspond à l'entier  $k$  de la preuve !

- 3. (*Sous-variétés linéaires*) Tout sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  est trivialement une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , grâce à ses équations paramétriques qui sont linéaires.
- 4. (*Courbes, surfaces*) Un cercle, un ellipse, une parabole, une hyperbole du plan, sont toutes des sous-variétés différentielles de l'espace euclidien. La notion intuitive de courbe, de surface, etc., sans coupure ni rebroussement, correspond à celle de sous-variété.

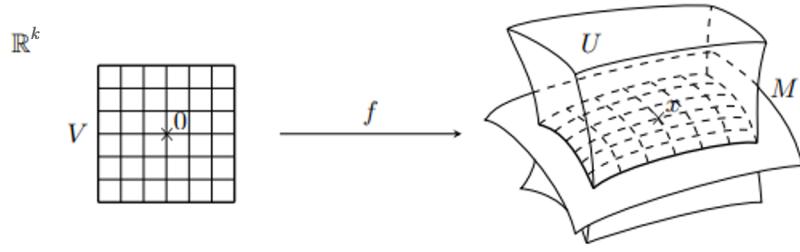


FIGURE 3.1.4 : *Définition par paramétrage, illustration.* —  
Sur le dessin, l'entier  $p$  correspond à l'entier  $k$  de la preuve !

5. (*Problème des points multiples*) La réunion d'un plan et d'une droite de l'espace se coupant en un seul point n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . La réunion de deux droites sécantes, un serpent qui se mord la queue, le graphe de la valeur absolue... ne sont pas des sous-variétés de l'espace. Ceci vient de problèmes topologiques dus à la présence de points multiples au voisinage desquels l'espace n'a pas le même groupe fondamental qu'une boule de  $\mathbb{R}^n$ .
6. (*Sous-variétés matricielles*) Le groupe orthogonal est un ensemble défini par une équation globale. On a  $\mathcal{O}(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), {}^t M \cdot M = Id\}$ . C'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Soit  $f$  l'application  $M \mapsto {}^t M M$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même. On peut la co-restrindre à  $S_n(\mathbb{R})$ ; montrons que c'est une submersion. La différentielle de cette application est  $df(M)(H) = {}^t MH + {}^t HM = {}^t MH + {}^t({}^t MH)$ . Calculons le rang de  $df(M)$  si  $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On a  $\text{Ker}(df(M)) = \{H, M^T H \in A_n(\mathbb{R})\}$ . Comme  ${}^t M = M^{-1}$  est inversible, ce noyau a la dimension de  $A_n(\mathbb{R})$ . Par le théorème du rang,  $f$  ainsi corestreinte est une submersion.

→ *Notation.* Souvent, on note génériquement grâce à un exposant la dimension d'une variété. Ainsi, une variété  $M$  de dimension  $n$  se notera souvent  $M = M^n$  sans parler de la puissance  $n$ -ième cartésienne... Ce que l'on tient sûrement des physiciens.

#### Méthode. (*Définir une sous-variété par une forme submersive*)

Soit  $A$  une partie de l'espace euclidien définie par une équation  $f(x_1, \dots, x_n) = a$  où  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  est  $C^p$ , alors pour tout  $x \in A$ ,  $df_x$  est une forme linéaire. Elle est surjective si et seulement si elle est non nulle. Il s'agit donc de chercher les points critiques de  $f$ . Ainsi, si  $a$  n'est pas valeur critique (c'est-à-dire, valeur de  $f$  en un point critique),  $f^{-1}(a) = A$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $a$  est valeur critique, on ne peut pas conclure.

#### Remarques.

1. Les sous-variétés de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ou, autrement dit, de codimension nulle,

sont les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

Il est clair que tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  en est une sous-variété de dimension  $n$  en prenant l'identité et  $k = n$  dans n'importe quelle caractérisation. Réciproquement, si  $M$  est une sous-variété de dimension  $n$ , alors chacun de ses points admet dans  $M$  un voisinage localement homéomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^n$ , et donc il existe une boule centrée en chacun de ses points incluse dans  $M$ , donc  $M$  est ouverte.

2. Les sous-variétés de dimension 0 sont les points, que l'on appelle dans ce contexte *points isolés*. Il est possible qu'il y ait plusieurs points, d'où le terme en fait.  
Immédiat.
3. On appelle *courbes* les sous-variétés de dimension 1 ; *surfaces*, les sous-variétés de dimension 2.
4. **Pour ceux qui connaissent la suite :** ainsi, les sous-variétés de dimension  $n$  ne donnent aucune information supplémentaire par rapport au calcul différentiel classique. Pour les sous-variétés de dimension inférieure, il s'agit de se ramener à des espaces euclidiens de dimension inférieure à *déformation lisse près*. Remarquons d'ailleurs que toute boule ouverte étant difféomorphe à l'espace vectoriel normé dans lequel elle se trouve, il est en quelque sorte équivalent de faire du calcul différentiel sur un ouvert et sur l'espace entier. Enfin, avec la dimension nulle, on obtient la possibilité de faire du calcul différentiel sur des points. Rien d'extravagant : toutes les fonctions sont  $C^\infty$ , de différentielles nulles (le vérifier), car constantes sur chaque point. Mais c'est quelque chose que l'on n'avait pas le droit de faire avec le calcul différentiel usuel.
5. Il y a unicité de la dimension et de la régularité maximale en un point. La deuxième vient immédiatement ; pour l'unicité de la dimension, il faudra se rendre compte (*voir section suivante*) que  $k$  est égal à la dimension de l'espace tangent  $T_a M$  en n'importe quel point  $a \in M$ . Si  $M$  est connexe non vide, alors il y a unicité de la dimension de  $M$ .

Soit  $x \in M$ . On utilise la définition par redressement local et quitte à prendre l'intersection de deux ouverts, on considère les difféomorphismes  $\varphi_1, \varphi_2$  associés aux pseudo-dimensions  $k_1, k_2$ . Alors  $d_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$  induit un isomorphisme linéaire entre  $\mathbb{R}^{k_1}$  et  $\mathbb{R}^{k_2}$ , d'où l'égalité par le théorème de Brouwer.

Soit  $x$  un point de  $M$  de dimension  $k$ . On introduit l'ensemble  $D_k$  des points de  $M$  de dimension  $k$ . C'est un ouvert de  $M$ , puisque si  $\varphi$  est un redressement local en  $x$  défini sur l'ouvert  $U$ , alors  $\varphi - \varphi(x')$  est un redressement local en tout point  $x'$  de  $U$ . De plus,  $D_k$  est fermé puisque  $D_k = M \setminus \bigcup_{j \neq k} D_j$ . Par connexité,  $D_k = M$ .

6. Il s'ensuit une remarque purement formelle : selon notre définition de sous-variété, la réunion d'une droite et d'un point est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Si l'on avait défini une sous-variété (de dimension  $k$ ) de la même manière en imposant le  $k$  fixé à chaque définition équivalente, ce ne serait pas le cas. La bénignité de ce fait est obtenu par la preuve précédente : les définitions sont équivalentes sur les composantes connexes.

**Propriété. (*Produit de sous-variétés*)**

Soient  $M_1, M_2$  sous-variétés de classe  $C^p$  de  $\mathbb{R}^{n_1}$  et  $\mathbb{R}^{n_2}$ , de dimensions  $k_1$  et  $k_2$ . Alors  $M_1 \times M_2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$  de classe  $C^p$ . De plus,  $\dim(M_1 \times M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$ .

▷ Par submersion. Soit  $(a,b) \in M_1 \times M_2$ . Il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^{n_1}$  contenant  $a$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n_1-k_1}$  de classe  $C^p$  une submersion en  $a$  telle que  $M_1 \cap U = f^{-1}(f(a))$ . De même, il existe  $V$  de  $\mathbb{R}^{n_2}$  contenant  $b$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n_2-k_2}$  de classe  $C^p$  avec  $M_2 \cap V = g^{-1}(g(b))$ . Soit  $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{n_1-k_1} \times \mathbb{R}^{n_2-k_2}$  de classe  $C^p$  définie par  $(x,y) \mapsto (f(x),g(y))$ . On a  $(M_1 \times M_2) \cap (U \times V) = (M_1 \cap U) \times (M_2 \cap V) = f^{-1}(f(a)) \times g^{-1}(g(b)) = F^{-1}(f(a),g(b))$ . Vérifions que  $F$  est une submersion en  $(a,b)$ . Sa jacobienne est diagonale par blocs :  $JF(a,b) = \begin{pmatrix} Jf(a) & 0 \\ 0 & Jg(a) \end{pmatrix}$ . Elle est de rang  $n_1 - k_1 + n_2 - k_2$ . Ceci conclut la preuve de la propriété. ■

**3.1.2 Espace tangent en un point à une sous-variété****Définition. (*Courbe tracée sur une surface*)**

Soit  $M$  une partie de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in M$ . Une courbe de classe  $C^p$  passant par  $a$ , tracée sur  $M$  (ou *le long de*  $M$ ) est une application  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^p$  tel que  $\gamma(0) = a$  et  $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \gamma(t) \in M$ .

**Définition. (*Vecteur tangent à une partie en un point*)**

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $k$ . Soit  $a \in M$ . Un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  est *tangent à  $M$  au point  $a$*  s'il existe une courbe  $\gamma$  tracée sur  $M$ , passant par  $a$ , dérivable en 0, telle que  $\gamma'(0) = v$ .

Pour une variété de classe  $C^p$ , on impose que  $\gamma$  soit  $C^1$  sur son ensemble de définition.

*Remarque.* Cette définition diffère très légèrement de la notion de vecteur tangent à un autre en un point du calcul différentiel général, à réviser.

**Définition. (*Espace tangent à une sous-variété en un point*)**

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété. On appelle *espace tangent à  $M$  au point  $a$* , et l'on note  $T_a M$ , l'ensemble des vecteurs  $v \in \mathbb{R}^n$  tangents à  $M$  en  $a$ .

**Théorème. (*Structure de l'espace tangent à une sous-variété en un point*)**

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$  en  $a \in M$ ,  $T_a M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , de dimension  $k = \dim_a(M)$ .

En bonus, pour chaque façon de définir  $M$  au voisinage de  $a$ , il est caractérisé ainsi :

1. (*Submersion*) Pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une submersion en  $a$  avec  $M \cap U = f^{-1}(f(a))$ , alors  $T_a M = \text{Ker}(df(a))$ .
2. (*Redressement local*) Pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $\psi : U \rightarrow V$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C^p$  difféomorphisme avec  $\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . On a  $T_a M = d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ .
3. (*Paramétrisation locale*) Pour  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^k$ ,  $0 \in \Omega$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $g(0) = a$  une immersion en 0 et un homéomorphisme sur un voisinage de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :  $T_a M = dg(0)(\mathbb{R}^k) = \text{Im}(dg(0))$ .
4. (*Graphe*) Pour  $M \cap (U_1 \times U_2) = \text{Graphe}(\varphi)$ ,  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$   $C^p$ ,  $a = (a_1, a_2) \in U_1 \times U_2$ , alors  $T_a M = \text{Graphe}(d\varphi(a_1))$ .

▷ On se place dans le deuxième cadre, plus commode. Soit  $\gamma$  une courbe  $C^1$  tracée sur  $M$  passant par  $a$ . Alors pour  $|t|$  assez petit,  $\gamma(t) \in U \cap M$ , et l'on peut poser  $\tilde{\gamma}(t) = \psi \circ \gamma(t)$  de  $]-\varepsilon', \varepsilon'[$  dans  $V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Alors  $\tilde{\gamma}$  est différentiable en 0 et  $\tilde{\gamma}'(0) = d\psi(\gamma(t))(\gamma'(0)) = d\psi(a)(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ . Ainsi, pour tout  $v \in T_a M$ ,  $d\psi(a)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ , soit  $v \in d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Montrons que  $T_a M = d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ ; il suffit d'avoir l'inclusion réciproque. Soit  $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ , et  $c(t) = tw$ . Pour  $|t|$  assez petit,  $c(t) \in V(\mathbb{R}^k \times \{0\})$  ouvert, donc  $\psi(c(t)) = \gamma(t)$  est une courbe de classe  $C^p$ , passant par  $a$  tracée sur  $M$ . De plus,  $\gamma'(0) = d\psi^{-1}(c(0))(c'(0)) = d\psi^{-1}(0)(w)$ . Or  $\psi^{-1} \circ \psi = id$  et  $\psi(a) = 0$ , d'où  $d\psi^{-1}(\psi(a)).d\psi(a) = id$ , d'où  $d\psi^{-1}(0) = d\psi(a)^{-1}$ , soit  $\gamma'(0) = d\psi(a)^{-1}(w)$ , d'où le résultat par image réciproque d'une application linéaire. La dimension vient immédiatement par cette caractérisation.

Montrons la première caractérisation. Soit  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tracée sur  $M$  passant par  $a$ , avec  $M \cap U = f^{-1}(f(a))$ . Alors pour tout  $t$ ,  $f(\gamma(t)) = f(a)$  est constante. La fonction  $f \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en 0, avec  $df(a)(\gamma'(0)) = 0$ . Ainsi, pour tout  $v \in T_a M$ ,  $df(a)(v) = 0$ . Ainsi  $T_a M \subseteq \text{Ker}(df(a))$ , tous deux de dimension  $k$ , d'où l'égalité.

Soit  $\omega \in \mathbb{R}^k$ , pour  $|t|$  assez petit,  $tw \in \Omega$ . Posons  $\gamma(t) = g(tw) \in M \cap U$  avec  $\gamma(0) = g(0) = a$ . Alors  $\gamma'(0) = dg(0)(\omega) \in T_a M$  existe, ainsi  $\text{Im}(dg(0)) \subseteq T_a M$  d'où l'égalité par égalité des dimensions.

Pour la caractérisation avec le graphe local, c'est laissé en exercice. ■

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Retrouver à la main que tout vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est tangent à tout point d'un ouvert fixé de  $\mathbb{R}^n$ .

#### ▷ Éléments de réponse.

On le sait, car un ouvert est de codimension nulle. Retrouvons-le. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \in U$  et  $w \in \mathbb{R}^n$ . Montrons que  $w$  est tangent à  $U$  en  $u$ . Il suffit de considérer le chemin  $c(t) = wt + u$  qui vérifie :  $c(0) = u$ ,  $c'(0) = w$ , et dans  $U$  pour  $t$  assez petit, car  $u$  est intérieur à  $U$ .

→ *Convention.* Pour certains, l'espace tangent à une sous-variété en un point n'est pas un espace vectoriel mais un espace affine de même direction et passant par le point en question. Nous nous autorisons à changer de définition quand il nous souhaite. De plus, cette deuxième définition annonce la notion suivante.

### 3.1.3 Fibré tangent

#### Définition. (*Fibré tangent à une sous-variété*)

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $k$ , de classe  $C^p$ . On note  $TM = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a M = \{(a, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, a \in M, v \in T_a M\}$  réunion disjointe, le *fibré tangent* à  $M$ . On introduit alors l'application  $M : TM \rightarrow M$  définie par  $(a, v) \mapsto a$ .

#### Théorème. (*Structure du fibré tangent*)

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $k$ , de classe  $C^p$ . Alors  $TM$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $2k$ .

▷ Soit  $(a, v) \in TM$ . On utilise la définition par submersion. Il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $a$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une submersion en  $a$  telle que  $U \cap M = f^{-1}(f(a))$ . Alors  $TM \cap (U \times \mathbb{R}^n) = \{(b, w) \in U \times \mathbb{R}^n, f(b) = f(a), w \in T_b M = \text{Ker}(df(b))\}$ . On considère l'application de  $U \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ , notons là  $F$ , qui à  $(x, w)$  fait correspondre  $(f(x), df(x)(w))$ , de classe  $C^{p-1}$ . Alors  $F^{-1}(f(a), 0) = \{(b, w) \in U \times \mathbb{R}^n, b \in M \cap U, w \in T_b M\} = TM \cap (U \times \mathbb{R}^n)$ . Montrons que  $F$  est une submersion en  $(x, v)$  (en fait, en tout point par linéarité). Alors la matrice triangulaire par blocs  $JF(a, 0) = \begin{pmatrix} Jf(a) & 0 \\ * & Jf(a) \end{pmatrix}$  est de rang  $n - k + n - k = 2n - 2k$ . ■

→ *Notation.* On a introduit l'application de projection  $\Pi : TM \rightarrow M$  qui à  $(a, v) \mapsto a$ . C'est la restriction à  $TM$  de l'application première projection de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Elle est donc  $C^p$ .

### 3.1.4 Fibré co-tangent

### 3.1.5 Notion de transversalité

#### Définition. (*Sous-variété transverse*)

Soient  $M_1, M_2$  des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in M_1 \cap M_2$ . On dit que  $M_1$  et  $M_2$  sont *transverses* en  $x$  si leur intersection est vide ou :

$$T_x M_1 + T_x M_2 = \mathbb{R}^n.$$

#### Exemples. (*Sous-variétés transverses*)

1. Deux courbes sécantes sont transverses dans le plan.
2. Plus généralement, deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$  sont transverses si et seulement si leurs hyperplans tangents ne sont pas parallèles.

**Théorème. (*Intersection de sous-variétés transverses*)**

Soient  $M_1, M_2$  deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , de classe  $C^p$ . On suppose que  $M_1$  et  $M_2$  sont transverses en tout point  $x \in M_1 \cap M_2$ . Alors  $M_1 \cap M_2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^p$ , de dimension  $\dim(M_1) + \dim(M_2) - n$ . De plus pour tout  $x \in M_1 \cap M_2$ ,  $T_x(M_1 \cap M_2) = (T_x M_1) \cap (T_x M_2)$ .

▷ On utilise la définition par submersion. Moralement,  $U_1 \cap U_2$  sera définie par la réunion des équations définissant les deux sous-variétés. Soit  $x \in M_1 \cap M_2$ . Il existe un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U_i$  pour  $i = 1, 2$  tel que  $U_i \cap M_i = f_i^{-1}(f_i(x))$  où  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-k_i}$ ,  $k_i = \dim(M_i)$ , est une submersion en  $x$ . Soit  $F : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k_1} \times \mathbb{R}^{n-k_2}$  qui à  $y \mapsto (f_1(y), f_2(y))$ . Alors  $F$  est de classe  $C^p$ , et  $F^{-1}(f_1(x), f_2(x)) = f_1^{-1}(f_1(x)) \cap f_2^{-1}(f_2(x)) = M_1 \cap M_2 \cap U_1 \cap U_2$ . Montrons que  $F$  est submersion en  $x$ . On calcule :  $dF(y)(h) = (df_1(y)(h), df_2(y)(h))$ , d'où  $\text{Ker}(dF(y)) = \text{Ker}(df_1(y)) \cap \text{Ker}(df_2(y))$ , d'où  $\text{rg}(dF(y)) = n - \dim(\text{Ker}(df_1(y)) \cap \text{Ker}(df_2(y)))$ . D'après la formule de Grassmann, puisqu'ici  $\text{Ker}(df_i(y)) = T_y M_i$ , on a  $\text{rg}(dF(y)) = n - (\dim(T_y M_1) + \dim(T_y M_2) - \dim(T_y M_1 + T_y M_2)) = (n - \dim(T_y M_1) + (n - \dim(T_y M_2)) = n - k_1 + n - k_2$  par hypothèse, ce dernier terme étant  $n$ . D'où  $F$  submersion. La propriété pour l'intersection vient de la preuve. ■

### 3.1.6 Applications différentiables sur des sous-variétés

**Définition. (*Application différentiable sur une sous-variété*)**

Soient  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  des sous-variétés de classe  $C^k$ . Soit  $f : M \rightarrow N \subseteq \mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est *différentiable* (resp. de classe  $C^p$ ,  $p \leq k$ ) en  $a \in M$  s'il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $a \in U$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable (resp. de classe  $C^p$ ) telle que  $f|_{U \cap M} = F|_{U \cap M}$  avec  $F(U \cap M) \subseteq N$ ; on dit alors que  $F$  est un *prolongement local* au voisinage de  $a$  de l'application  $f$ .

On dit que  $f$  est *différentiable* (resp. de classe  $C^p$ ) si elle l'est en tout point.



La fonction  $F$  peut changer selon le point. (Mais ce n'est pas obligatoire bien sûr.)



La notion de caractère  $C^p$ ,  $C^\infty$  est ici donc **locale** !

→ *Convention.* Dans la suite, on énoncera systématiquement les résultats pour la classe  $C^p$  pour  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Il va de soi qu'ils restent vrai en remplaçant toujours cette condition par *différentiable*, si tant est que l'on ne change pas d'âne au milieu du gué.

*Remarque.* Il y a peu d'intérêt, mais c'est faisable, de définir la régularité des fonctions sur des variétés qui ne sont pas assez régulières. Elle est souvent infirmée par le théorème, vu plus

tard, de lecture dans les cartes, mais pas toujours, voir des applications constantes par exemple. Par contre, si  $U$  est une variété de classe  $C^k$  mais pas de classe  $C^{k+1}$ , alors  $\text{id}_U$  n'est pas de classe  $C^{k+1}$ , et c'est dommage.

### Définition. (*Différentielle d'une application sur une sous-variété*)

Soit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  de classe  $C^p$  en  $a \in M_1$ ,  $M_1$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n_1}$ ,  $M_2$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n_2}$ . On appelle *différentielle de  $f$  en  $a$*  ou *dérivée* ou encore *jacobienne*, et l'on note  $df(a)$ , ou comme d'habitude, l'application  $T_a M_1 \rightarrow T_{f(a)} M_2$  définie ainsi : si  $v \in T_a M_1$ ,  $v = \gamma'(0)$  où  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma$  une courbe tracée sur  $M$  passant par  $a$ , alors  $f \circ \gamma$  est une courbe tracée sur  $M_2$  passant par  $f(a)$  et l'on pose  $df(a)(v) = (f \circ \gamma)'(0)$ , autrement dit  $df(a) = dF(a)|_{T_a M_1}$ .

Ceci a un sens et se vérifie, c'est-à-dire que cette valeur est indépendante du chemin choisi. En effet, le fait que  $f$  soit  $C^p$  en  $a$  signifie qu'il existe un prolongement local  $F$  de  $f$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^{n_1}$  contenant  $a$ , avec donc :  $F|_{U \cap M_1} = f|_{U \cap M_2}$ . Ainsi  $F \circ \gamma = f \circ \gamma$  sur un intervalle  $]-\varepsilon', \varepsilon[$  assez petit, car par continuité de  $\gamma$  en zéro,  $\gamma(]-\varepsilon', \varepsilon[) \subset U$  pour tout  $\varepsilon < \varepsilon'$  certain. Mais  $F \circ \gamma$  est dérivable au sens usuel en zéro, avec par dérivation des fonctions composées  $(F \circ \gamma)'(0) = dF(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dF(a)(v) = dF_{T_a M_1}(a)(v) := df(a)(v)$  et ceci ne dépend que de  $v = \gamma'(0)$  et non du chemin  $\gamma$ .

De plus, cela ne dépend pas du choix du prolongement local  $F$ , car si  $G$  est un autre prolongement local sur un ouvert  $V$  contenant  $a$  sur  $U \cap V$ ,  $F = G = f$  pour  $|t|$  assez petit, d'où  $F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) = G(\gamma(t))$ , donc les dérivées au voisinage de zéro de  $t \mapsto F(\gamma(t))$  et  $t \mapsto G(\gamma(t))$  seront toutes deux les dérives de la même fonction  $t \mapsto f(\gamma(t))$  donnée par  $df(a)(\gamma'(0)) = dF(a)(\gamma'(0)) = dG(a)(\gamma'(0))$  où  $df(a) \in \mathcal{L}(T_a M_1, T_{f(a)} M_2)$ , où  $dF(a), dG(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2})$ .

On dispose de la propriété suivante, transposition de la *chain rule*, qui permet tous les calculs de différentielles qu'on aime.

### Théorème. (*Composition des différentielles sur une sous-variété*)

Soient  $f : M_1 \rightarrow M_2$ ,  $g : M_2 \rightarrow M_3$ ,  $M_1, M_2, M_3$  des sous-variétés d'espaces euclidiens. On suppose  $f$  différentiable en  $a$  (resp.  $C^p$ ),  $g$  différentiable en  $f(a)$  (resp.  $C^p$ ), alors  $g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$  est différentiable en  $a$  (resp.  $C^p$ ), et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) : T_a M_1 \rightarrow T_{g \circ f(a)} M_3.$$

▷ On prend  $F$  un prolongement local de  $f$  sur  $U \ni a$  et  $G$  un prolongement local de  $g$  sur  $V \ni f(a)$ , quitte à restreindre à  $F(U) \subseteq V$ . ■

### 3.1.7 Calcul d'extrema

#### Définition. (*Extremum local*)

Soit  $M$  un espace topologique,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a un *maximum* (resp. un *minimum*) *local* en un point  $a \in M$  tel qu'il existe  $U$  un voisinage ouvert de  $a$  tel que  $f|_U$  possède en  $a$  un maximum (resp. un minimum).

Un *extrémum local* est un maximum local ou un minimum local.

#### Théorème. (*Théorème de Fermat sur les sous-variétés*)

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Si en  $a \in M$ ,  $f$  possède un extrémum local, alors  $df(a) = 0$  où l'on rappelle  $df(a) : T_a M \rightarrow \mathbb{R}$ .

▷ Soit  $v \in T_a M$ . Il existe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  une courbe passant par  $a$  telle que  $\gamma'(0) = v$ . Alors  $df(a)(v) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \Big|_{t=0}$ . On considère  $f \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $a$  est un extrémum local, il existe une ouvert  $U$  de  $M$  tel que  $f|_U$  a un extrémum en  $a$ . On peut prendre  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\gamma(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq U$ . Alors  $f \circ \gamma$  possède un extrémum en  $t = 0$ . Le théorème de Rolle dit :  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ , i.e.  $df(a)(\gamma'(0)) = df(a)(v) = 0$ . Si on pense en terme d'un prolongement local de  $F$  au voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $df(a) = dF(a)|_{T_a M} = 0$ . ■

Notons que ce théorème, contrairement à la définition ci-dessus, n'aurait aucun sens si l'on ne se plaçait pas sur une sous-variété de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , et seulement sur une partie.

On peut également faire de l'optimisation sous contraintes.

#### Théorème. (*Généralisation du théorème des extrema liés*)

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U = V \cap M$  un ouvert de  $M$ , où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ ,  $a \in U$ . On suppose que sur  $U$ ,  $M$  est donnée par une submersion  $g = (g_1, \dots, g_{n-k})$   $C^p$  de  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  avec  $M \cap V = g^{-1}(0)$  et que sur  $U$ ,  $f$  est la restriction d'une application  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ . Si  $a$  est un extrémum local pour  $f$ , alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$  telle que  $dF(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_{n-k} dg_{n-k}(a)$ . Les  $\lambda_i$  correspondent aux *multiplicateurs de Lagrange*.

▷ Si  $a$  est un extrémum local, soit  $df(a) = 10$ , soit  $dF(a)|_{T_a M} = 0$ , on a vu que  $T_a M = \text{Ker}(dg(a)) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \text{Ker}(dg_i(a))$ . Or  $dg(a) = (dg_1(a), \dots, dg_{n-k}(a))$  et l'on sait ici que les  $dg_i(a)$  sont indépendantes. Ainsi  $\bigcap_{i=1}^{n-k} \text{Ker}(dg_i(a)) \subseteq \text{Ker}(dF(a))$ , d'où par un résultat classique d'algèbre linéaire :  $dF(a) \in \text{Vect}(dg_i(a))$ . ■

**Application. (*Réduction des matrices symétriques*)**

On considère  $M = S^{n-1}$  la sphère unité dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ; c'est une sous-variété donnée par la submersion  $g(x) = \sum x_i^2 = \langle x, x \rangle$ . Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , symétrique. On introduit la fonction  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  qui à  $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ ;  $f = F|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^\infty$ . Par compacité de  $S^{n-1}$ ,  $f$  possède des extrémas. Soit  $a \in S^{n-1}$  extrémum. Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $dF(a) = \lambda dg(a)$ . Or  $dg(a)(h) = 2 \langle a, h \rangle$ , d'où  $dF(a)(h) = 2 \langle Aa, h \rangle$ , d'où  $Aa = \lambda a$  d'où l'existence d'un vecteur propre pour  $A$ . Le reste suit avec la preuve usuelle.

**3.1.8 Difféomorphismes entre sous-variétés****Définition. (*Difféomorphisme entre sous-variétés*)**

Avec les notations évidentes :

1.  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un  $C^p$ -difféomorphisme si  $f$  est  $C^p$ , bijective et  $f^{-1}$  est  $C^p$ .
2.  $f$  est un  $C^p$ -difféomorphisme local en  $a \in M$ , il existe  $U$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $M_1$  tel que  $f(U)$  soit un voisinage ouvert de  $f(a)$  dans  $M_2$  et  $f : U \rightarrow f(U)$  soit un  $C^p$ -difféomorphisme.
3.  $f$  est un difféomorphisme local si c'est un difféomorphisme local en chaque point.

*Remarque.* On voit que tout difféomorphisme est un homéomorphisme.

**Propriété. (*Les difféomorphismes préservent la dimension*)**

Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un difféomorphisme local en  $a$ , alors  $df(a) : T_a M_1 \rightarrow T_{f(a)} M_2$  est un isomorphisme d'espace vectoriel et  $df(a)^{-1} = df^{-1}(f(a))$ . En particulier  $\dim M_1 = \dim M_2$ .

**Théorème. (*Image par un difféomorphisme d'une sous-variété*)**

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ,  $U, V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme. On suppose  $U \cap M \neq \emptyset$ . Alors  $\phi(U \cap M)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et si  $a \in U \cap M$ ,  $T_{\phi(a)}(\phi(U \cap M)) = d\phi(a)(T_a M)$ .

▷ On utilise la caractérisation par paramétrisation locale pour avoir directement l'identité sur les espaces tangents. Si  $a \in U \cap M$ ,  $b = \phi(a)$ , on veut une paramétrisation locale de  $\phi(U \cap M)$  au voisinage de  $b$ . Pour  $a$  dans  $M$ , il existe  $W$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega$  un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^k$ , où  $k = \dim(M)$  par la remarque précédente, et  $g : \Omega \rightarrow W$  une immersion, avec  $g(0) = a$  telle que  $g$  induit un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $g(\Omega) = W \cap M$ . Pour  $\phi : U \rightarrow V$ , on regarde  $\phi|_{U \cap W} : U \cap W \rightarrow V$  : c'est un difféomorphisme sur un ouvert  $V'$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\Omega' = g^{-1}(U \cap W)$  est un ouvert  $\subseteq \Omega$ . On regarde  $\phi \circ g : \Omega' \rightarrow V'$ ,  $\phi \circ g(0) = \phi(a) = b$ ; c'est une immersion. C'est un homéomorphisme sur son image.  $\phi \circ g(\Omega') = \phi(U \cap W \cap M)$ ,  $g(\Omega') = U \cap W \cap M$ . Ainsi  $\phi \circ g(\Omega') = \phi(U \cap W \cap (U \cap M)) = \phi(U \cap M) \cap V'$ , i.e.  $\phi \circ g$  est une paramétrisation de  $\phi(U \cap M)$  et le théorème est démontré. ■

**Définition. (*Plongement topologique*)**

Un *plongement (topologique)*  $p : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme sur son image.

**Définition. (*Plongement (différentiel, lisse)*)**

Un *plongement (différentiel, différentiable, lisse)*  $p : X \rightarrow Y$  entre deux variétés différentiables est un difféomorphisme sur son image.

**Lemme**

Un plongement différentiel est exactement un plongement topologique différentiable qui soit une immersion.

▷ Par inversion locale. ■

**Exercice 3 (*Quid des immersions injectives*)**

1. Donner un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.
2. Montrer que, dans le cas d'un domaine compact, les immersions injectifs sont exactement les plongements différentiels.

**3.1.9 Cartes locales, atlas**

Cette section permet de cerner mieux la nature abstraite des objets que l'on manipule.

**Définition. (*Carte locale*)**

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété  $C^p$  et  $\dim(M) = k$ , soit  $a \in M$ . Une *carte locale* de  $M$  au voisinage de  $a$  est un couple  $(U, \varphi)$  avec  $U$  ouvert de  $M$  contenant  $a$  et  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$  un difféomorphisme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ .

On dit de plus que la carte est (*centrée*) en  $a$  si  $\varphi(a) = 0$ .

L'idée fondamentale est qu'**au voisinage de chaque point, une variété ressemble à un ouvert de l'espace euclidien**, au sens des difféomorphismes. En effet, la propriété suivante assure que les cartes locales existent toujours pour les sous-variétés.

**Propriété. (*Construction de cartes locales sur des sous-variétés*)**

On reprend les notations précédentes.

1. Supposons que  $M$  est donnée au voisinage de  $a$  par redressement local : il y a  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \in V$ ,  $\phi : U \longrightarrow V$  un  $C^p$ -difféomorphisme tel que  $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Soit  $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$  la projection sur le premier

facteur de la décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Alors  $\psi = \Pi \circ \phi : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^k$  de classe  $C^p$  et  $\psi|_{U \cap M}$  est une carte locale.

2. Supposons  $M$  donnée par paramétrisation locale au voisinage de  $a$ . On a  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ ,  $0 \in \Omega$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  et  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une immersion avec  $\phi(0) = a$  un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $\phi(\Omega) = U \cap M$ . Alors il existe  $U' \subseteq U$  ouvert contenant  $a$  tel que  $\phi^{-1} : U' \cap M \rightarrow \mathbb{R}^k$  est une carte locale.

En particulier, toute variété admet des cartes locales en tout point, en particulier, un atlas. (C'est ce qui permet de définir la notion générale de variété en mathématiques.)

▷ L'application  $\Pi_{|\mathbb{R}^k \times \{0\}} : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^k$  est bijective, d'inverse  $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ . Alors  $\phi^{-1} \circ i$  est l'inverse de  $\psi$ .

Il faut que quitte à restreindre  $\phi^{-1}$  à un sous-ouvert de  $U \cap M$ , elle soit  $C^p$ . Puisque  $\phi$  est une immersion, on utilise sa forme canonique. Il existe  $\Omega' \subseteq \Omega$  un ouvert,  $U' \subseteq U$  un ouvert et  $\theta : U' \rightarrow V$  un difféomorphisme tel que  $\theta \circ \phi(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ ,  $x \in \Omega'$ . Soit  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  la projection sur les  $k$  premières coordonnées. Alors  $\Pi \circ \theta \circ \phi(x) = x$  pour tout  $x \in \Omega'$ . Ainsi  $\phi^{-1} = \Pi \circ \theta$  sur  $\phi(\Omega')$  ouvert de  $U \cap M$ , donc de la forme  $U' \cap M$  donc de classe  $C^p$  car  $\theta$  est  $C^p$ . ■

Seulement, il n'est pas toujours aisés de les construire.

### Exemple fondamental. (*Cartes locales : cas de la sphère. Projections stéréographiques*)

Soit  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  la sphère unité. On considère les projections stéréographiques sur le plan équatorial par rapport respectivement aux pôles nord et sud :  $\phi_N(M) = \mathbb{R}^n \cap (NM)$  de  $S^n \setminus \{N\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , donnée par

$$\phi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

et  $\phi_S(M) = \mathbb{R}^n \cap (SM)$  de  $S^n \setminus \{S\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , donnée par

$$\phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Alors  $\phi_N, \phi_S$  sont des cartes locales : elles sont  $C^\infty$ , bijectives, de réciproques :

$$\phi_N^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right)$$

et

$$\phi_S^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, -\frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Une application concrète de la notion de cartes est que l'on peut lire la régularité sur les cartes locales.

**Lemme. (Isotropie de la lecture dans les cartes locales)**

Soit  $M_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$  une sous-variété  $C^p$  de dimension  $k_i$  pour  $i = 1, 2$ . On suppose que l'application  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est différentiable (resp.  $C^p$ ) en  $a \in M$ . S'il existe une carte locale  $(U, \phi)$  en  $a$  ( $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$ ) et  $q = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  est différentiable en  $\phi(a)$  (resp.  $C^p$  au voisinage de  $\phi(a)$ ), alors pour toute autre carte locale  $(U', \varphi')$ ,  $f \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U') \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  différentiable en  $a$ .

**Définition. (Atlas)**

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété. Un *atlas* de  $M$  est une famille  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de cartes locales telles que  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

**Exemple. (Atlas : cas de la sphère)**

L'exemple précédent convient, car  $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$ .

On peut reformuler le théorème suivant en termes d'atlas.

**Théorème. (Caractérisation de la différentiabilité grâce à un atlas)**

Soit  $M_i$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n_i}$ , pour  $i = 1, 2$  et  $(U_j, \varphi_j)_{j \in J}$  un atlas de  $M_1$ . Alors  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est différentiable (resp.  $C^p$ ) ssi pour tout  $j$ ,  $f \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j) \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$  est différentiable (resp.  $C^p$ ) (au sens connu).

**Application. (Prolongement  $C^\infty$  d'un polynôme au compactifié d'Alexandrov)**

Soit  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale explicitement donnée par  $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ .

On a  $\hat{\mathbb{C}} = S^2$ . On veut prolonger  $P$  à  $S^2$  en utilisant les projections stéréographiques. On identifie  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  le plan équatorial.

Ici,  $\phi_N(z, t) = \frac{z}{1-t}$ ,  $\phi_S(z, t) = \frac{z}{1+t}$  et  $\phi_N^{-1}(z) = \left( \frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$ ,  $\phi_S^{-1}(z) = \left( \frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right)$ . Remarquons que  $\phi_N \circ \phi_S^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ .

On définit l'application  $f : S^2 \rightarrow S^2$  sur  $S^2 \setminus \{N\}$  définie par  $f = \phi_N^{-1} \circ P \circ \phi_N$  et  $f(N) = N$ . Cette application  $f$  est  $C^\infty$  : il suffit de voir que  $f \circ \phi_N^{-1}$  et  $f \circ \phi_S^{-1}$  sont  $C^\infty$ , ce qui est donc clair d'après le remarque.

**3.1.10 Généralisation des théorèmes fondamentaux**

On peut généraliser aux sous-variétés les théorèmes d'inversion locale et globale.

**Théorème. (*Inversion locale, inversion globale*)**

Soit  $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\dim(M_1) = k$ ;  $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\dim(M_2) = k$ . Soit  $f : M_1 \longrightarrow M_2$   $C^p$ .

1. Soit  $a \in M_1$ , tel que  $df(a) : T_a M_1 \longrightarrow T_{f(a)} M_2$  soit un isomorphisme linéaire. Alors  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $a$ .
2. Si pour tout  $a \in M_1$ ,  $df(a) : T_a M_1 \longrightarrow T_{f(a)} M_2$  est un isomorphisme, alors  $f$  est un  $C^p$ -difféomorphisme local, et si de plus  $f$  est injective,  $f$  est un  $C^p$ -difféomorphisme de  $M_1$  sur son image.

▷ On utilise des cartes locales et on se ramène au résultat classique entre ouverts de  $\mathbb{R}^k$ . ■

## 3.2 Variétés différentielles

**N**OUS allons maintenant généraliser la notion de variété en topologie qui ne se plonge pas forcément dans l'espace euclidien. L'idée est de reprendre la notion de carte locale pour paramétriser l'espace topologique localement et permettre le calcul différentiel sur l'image de la carte.

### 3.2.1 Notion de variété topologique

**Définition. (*Variété topologique*)**

Une *variété topologique (sans bord)* ( $C^0$ ) est un espace topologique séparé (parfois paracompact), à base dénombrable, tel que tout point  $x$  possède un voisinage  $U \ni x$  homéomorphe par  $\varphi$  à un ouvert d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Un tel voisinage d'un point  $x$  est dit *voisinage euclidien* de  $x$  ou encore *voisinage de coordonnées* selon la terminologie anglaise. Le couple  $(U, \varphi)$  ou plus simplement  $U$  est appelé *ouvert de carte*,  $\varphi$  est une *carte (locale)* et le triplet  $(U, \varphi(U), \varphi)$  est appelé *paramétrisation locale*.

**VOC** Un voisinage euclidien d'un point est appelé un *ouvert euclidien* et un homéomorphisme d'une variété sur un voisinage euclidien est un *homéomorphisme euclidien*.

**Exercice 4 (Reformulation forte des variétés topologiques)**

Montrer que, dans la définition de variété topologique, on peut remplacer « tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert d'un  $\mathbb{R}^k$  » par « tout point possède un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^k$  ».

▷ Éléments de réponse.

$\mathbb{R}^k$  est bien sûr un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . Réciproquement, supposons que  $x \in M$  notre variété topologique ait un voisinage homéomorphe par  $\varphi$  à  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . Soit  $B$  une boule de rayon  $\rho$  contenue dans  $U$  centrée en

$\varphi(x)$ ,  $U$  étant ouvert. Alors  $\varphi^{-1}(B)$  est un voisinage de  $x$  homéomorphe par  $\varphi$  à une boule ouverte, elle-même homéomorphe à la boule unité de  $\mathbb{R}^k$  qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^k$ .

### Exercice 5 (*Indépendance des axiomes des variétés topologiques*)

Trouver un espace topologique :

1. séparé, à base dénombrable mais ayant un point n'admettant aucun de voisinage homéomorphe à un espace euclidien ;
2. tel que tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert d'un espace euclidien, séparé mais pas à base dénombrable ;
3. tel que tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert d'un espace euclidien, à base dénombrable mais pas séparé.

▷ Éléments de réponse.

1. La croix  $([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,1])$  est séparée à base dénombrable. Ce n'est pas une variété différentiable : aucun voisinage pointé de  $(0,0)$  n'est connexe, argument que nous aurons l'occasion de détailler par la suite.
2. La somme disjointe topologique indexée par  $\mathbb{R}$  de copies de  $\mathbb{R}$  est séparée, mais n'est pas à base dénombrable : chaque copie de  $\mathbb{R}$  dans cette somme est un ouvert et leur famille est une famille indénombrable d'ouverts deux à deux disjoints dans cette somme.
3. La droite réelle à deux origines est à base dénombrable et localement homéomorphe à la droite réelle ; pourtant, elle n'est pas séparée.

### Remarques.

1. Toute variété topologique est donc localement compacte, localement connexe par arcs, et donc connexe si et seulement si elle est connexe par arcs ; ou encore, les composantes connexes et connexes par arcs coïncident. Elle est aussi localement simplement connexe. Sur chaque composante connexe, elle est aussi localement métrisable et donc à base dénombrable de voisinages. Enfin, chaque composante connexe est  $\sigma$ -compacte.
2. Une variété topologique est donc paracompacte si et seulement si chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini, ce que l'on a montré dans le cours de TOPOLOGIE GÉNÉRALE, section COMPACITÉ. En particulier, d'après l'exercice suivant, c'est vrai dès que l'on considère une variété connexe.
3. On peut montrer (mais c'est dur) que toute variété topologique paracompacte est métrisable. Ainsi, on s'autorise, habité par des âmes de physicien, à démontrer dans la pratique seulement la séparabilité au lieu de l'existence d'une base dénombrable.
4. Toute variété est à base dénombrable, donc de Lindelöf. Ainsi, **toute variété**

**topologique admet un atlas dénombrable<sup>1</sup>.**

En particulier, toute variété topologique non vide a la puissance du continu.

En effet, si elle est non vide, elle admet un point ayant un voisinage homéomorphe donc en bijection avec un ouvert non vide d'un espace euclidien, qui a donc la puissance du continu. Elle a donc au moins la puissance du continu. D'autre part, par le point précédent, elle admet un recouvrement dénombrable par des ouverts homéomorphes à des ouverts non vides d'espaces euclidiens, donc son cardinal est au plus  $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ . On conclut par antisymétrie de la cardinalité.

5. L'unique variété topologique de dimension  $n$  à une seule carte est  $\mathbb{R}^n$  à homéomorphisme près.

On n'a rien dit.

6. De même que pour les sous-variétés, il y a unicité de la dimension en un point pour une variété topologique générale grâce au théorème de Brouwer : quitte à considérer l'intersection de deux voisinages, on obtiendrait un homéomorphisme entre la boule unité de  $\mathbb{R}^{k_1}$  et la boule unité de  $\mathbb{R}^{k_2}$ .

Si de plus l'espace topologique est connexe, il y a unicité de la dimension de la variété topologique (la preuve est la même que dans le cas différentiel : on considère pour voisinage du point  $a$ , la restriction du voisinage de la définition à un ouvert contenant ce point qui est alors voisinage de chacun de ses points). En particulier, la dimension est constante sur chaque composante connexe.

Ainsi, une variété topologique est une réunion de variétés topologiques de dimension donnée de dimensions non nécessairement égales. Une variété de dimension constante en ses points est dite *pure*.

7. On définit également la notion de *variété topologie dénombrable à l'infini* : c'est une variété topologique  $\sigma$ -compacte. On montre qu'une variété topologique est dénombrable à l'infini, si et seulement si, elle a un nombre dénombrable de composantes connexes, ou encore, si elle est à base dénombrable de voisinages.

### Exercice 6

Soit  $X$  un espace topologique localement euclidien. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est séparé et à base dénombrable ;
- (ii)  $X$  est séparé et  $\sigma$ -compact ;
- (iii)  $X$  est séparé et dénombrable à l'infini ;
- (iv)  $X$  est métrisable et séparable ;
- (v)  $X$  est homéomorphe à un sous-espace de  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

---

<sup>1</sup> En fait... toute variété topologique connexe admet un atlas fini, et on peut même majorer le nombre minimal de cartes nécessaires en fonction de la dimension.

**Corollaire. (*Métrisabilité des variétés*)**

Toute variété topologique est métrisable.

▷ Le théorème de métrisation d'Urysohn donne que tout espace séparé, à base dénombrable et régulier est métrisable. Or une variété est régulière, car complètement régulière, car localement compacte. Ainsi, une variété est métrisable. ■

**Exemples. (*Variétés topologiques*)**

1. Une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$  est une variété topologique.

Cela vient des cartes locales qui sont des difféomorphismes  $C^p$ , donc a fortiori bicontinues.

2. (*Exemple fondamental : l'espace projectif*) L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1}/(u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* v = \lambda u)$  est une variété topologique.

On sait en effet que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , muni de la topologie quotient, est compact donc séparé. Potons pour  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $V_i = \{v = (v_1, \dots, v_{n+1}), v_i \neq 0\}$  ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , et  $U_i = p(V_i)$  où  $p$  est la projection canonique. Alors l'application de  $U_i$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui à  $[v_1, \dots, v_{n+1}] \mapsto (\frac{v_1}{v_i}, \dots, \frac{\hat{v}_i}{v_i}, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_i})$  est un homéomorphisme, en effet, sa réciproque est  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto [t_1, \dots, t_{i-1}, 1, \dots, t_n]$ . Les  $V_i$  recouvrent  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est une variété topologique de dimension  $n$ . On conseille au lecteur de montrer l'injectivité et la surjectivité de ces applications indépendamment de ce qu'elles sont réciproques afin de se refamiliariser avec l'espace projectif.

Comme on sait, pour  $n \geq 2$ , l'espace projectif ne se plonge pas dans un espace euclidien. Pourtant, c'est une variété topologique, et l'on va pouvoir y faire du calcul différentiel.

3. On montrera que les espaces topologiques usuels de la topologie algébrique, à savoir le tore, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein, sont des variétés topologiques.

**Exercice 7**

Une variété  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est-elle une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ? Est-elle une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  pour un  $N \in \mathbb{N}$  (toujours pour la même structure)? **Pour ceux qui sont déjà allés plus loin :** si  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est une variété qui se plonge par un plongement différentielle, est-ce une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ?

**Propriété. (*Stabilité topologique de la notion de variété*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques homéomorphes. Alors  $X$  est une variété topologique si et seulement si  $Y$  est une variété topologique. De plus, s'ils sont connexes, ils ont la même dimension.

**Définition. (*Carte locale sur une variété topologique*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$ . Une *carte locale* est un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\varphi$  un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ .

**Définition. (*Atlas d'une variété topologique*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$ . Un *atlas* de  $M$  est une famille  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de cartes locales de  $M$  telles que  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ .

**Définition. (*Changement de cartes*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$  et  $(U, \varphi), (V, \psi)$  deux cartes locales avec  $U \cap V \neq \emptyset$ . L'application  $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$  est appelée *application de changement de cartes*.

Il est clair que c'est un homéomorphisme.

**Exemples. (*Cartes locales, atlas topologiques*)**

1. Les projections stéréographiques  $\varphi_N, \varphi_S$  de  $S^n$  définissent des cartes locales.
2. Dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , les  $(U_i, \varphi_i)$  pour  $1 \leq i \leq n+1$  comme définies précédemment forment un atlas.

**Définition. (*Atlas, cartes compatibles*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$ .

1. Deux cartes  $(U, \varphi), (V, \psi)$  sont dites  $C^p$ -compatibles si soit  $U \cap V = \emptyset$ , soit l'application de changement de cartes  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est un  $C^p$ -difféomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{R}^k$ .
2. Un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  est dit de classe  $C^p$ , ou compatible, si toutes ses cartes sont deux à deux  $C^p$ -compatibles. Parfois, on parle simplement d'atlas.

Deux atlas sont dits compatibles s'ils sont tous deux de classe  $C^p$  et si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre, autrement dit, si leur réunion est un atlas (de classe  $C^p$ , compatible).

À partir de maintenant, on dira *atlas* pour *atlas compatible (avec lui-même)*, ou encore *atlas de classe  $C^p$* .

**Définition. (*Atlas maximal*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$ . Un atlas de classe  $C^p$  est dit maximal si toute carte  $C^p$ -compatible avec toutes les  $(U_i, \varphi_i)$  est déjà dans l'atlas.

### Remarques.

1. Comme dit plus haut, si l'on a deux atlas de classe  $C^p$  tel que toute carte de l'un est  $C^p$ -compatible avec toute carte de l'autre, alors leur réunion est un atlas de classe  $C^p$ .
2. On peut définir une relation d'équivalence, définie par la compatibilité, sur l'ensemble des atlas d'une variété différentielle. Il n'est pas tout à fait évident que cette relation est transitive, et l'on pousse le lecteur à l'écrire proprement par clarté d'esprit.
3. Dans chaque classe d'équivalence, on peut privilégier un représentant donné par un atlas maximal, comme le précise le corollaire suivant du fait initial.

### Corollaire

Tout atlas est contenu dans un unique atlas maximal.

▷ Il suffit de prendre la réunion de tous les atlas compatibles avec lui. Cet ensemble d'atlas est bien sûr un ensemble. ■

*Remarque.* Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  et  $V \subseteq U$  un ouvert alors  $(V, \varphi|_V)$  est une carte  $C^p$ -compatible avec.

### Heuristique

Plus la variété est connexe, plus il y a besoin de compatibilité entre cartes (à méditer!).

Ces définitions permettent d'introduire la notion suivante.

### 3.2.2 Notion de variété différentielle

#### Définition. (*Variété différentielle*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $k$ . Une structure de *variété différentielle* de classe  $C^p$  sur  $M$  est la donnée d'un atlas maximal de cartes  $C^p$ -compatibles. On dit que la variété topologique a une structure différentielle.

**Remarque importante.** Pour se donner une telle structure, il suffit de se donner un atlas (pas nécessairement maximal) de cartes  $C^p$ -compatibles.



Un ensemble est une variété topologique si on peut le munir d'une structure de variété topologique. Une variété différentielle est la donnée d'une structure différentielle sur une variété topologique, ce qui est assez fondamentalement différent d'un point de vue définitoire.

**VOC** Une variété *lisse* est par définition une variété de classe  $C^\infty$ . Cependant, le mot *lisse* est parfois un terme générique pour parler de la régularité souhaitée implicitement, et donc souvent  $C^1$ .

### Principe. (*Notion générale de variété*)



En générale, une *variété truc*  $M$  est un certain espace, souvent seulement topologique (ou truc), muni de *cartes locales* qui forment un *atlas*, i.e. un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $I$  avec des applications bijectives  $\varphi_i : U_i \rightarrow E_i$  ou souvent  $E_i = \mathbb{R}^n$  (ou truc) et souvent  $E_i$  est indépendant de  $i$ , et l'on impose la condition truc sur les *fonctions de transition* ou *changements de cartes*, au sens suivant : pour tous  $i, j \in I$  tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq E_i \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq E_j$  est truc. Par exemples :

- ★ pour une *variété topologique*, on impose que les cartes soient des homéomorphismes et les changements de cartes soient continus ;
- ★ pour une *variété différentielle/différentiable de classe p*, on impose que les cartes soient des homéomorphismes et les changements de cartes soient différentiables de classe  $C^p$  ;
- ★ pour une *variété analytique*, on impose que les cartes soient des homéomorphismes et les changements de cartes soient analytiques ;
- ★ pour une *variété complexe*, on impose que les cartes soient des homéomorphismes, que les  $E_i$  soient de la forme  $\mathbb{C}^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et les changements de cartes soient holomorphes ;
- ★ pour une *variété de Banach*, on impose que les cartes soient des homéomorphismes, que les  $E_i$  soient des espaces de Banach et les changements de cartes soient continus ;
- ★ pour une *variété algébrique*, on impose que  $K$  soit un corps,  $M \subseteq K^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et que les cartes et les changements de cartes soient polynomiales.

Cette notion se décline bien sûr à toutes les situations imaginables.

### Exemples. (*Variétés différentiables*)

1. Les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , grâce aux cartes locales via paramétrage ou redressement, sont des variétés différentielles.
2. En particulier, la sphère  $S^n$  avec  $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ ,  $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$  les projections stéréo admet une structure  $C^\infty$ , car  $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$ .
3. L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  muni de l'atlas  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  est une variété différentielle : le changement de cartes  $\varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  est  $C^\infty$ .

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto \left( \frac{y_1}{y_j}, \dots, \underset{i^{\text{e position}}}{\frac{1}{y_j}}, \dots, \frac{\hat{y}_j}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

### Propriété. (*Atlas sur une variété compacte*)

Toute variété compacte admet un atlas fini.

▷ Immédiat par la propriété de Borel-Lebesgue. ■

**Observation. (*Créer une variété différentielle sur un ensemble*)**

Soit  $X$  un ensemble. On peut le munir d'une structure  $C^r$  en se donnant un recouvrement  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  avec  $I$  dénombrable où  $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$  et des applications  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha)$  bijectives, où l'on suppose que pour tous  $\alpha, \beta$  tels que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  est un  $C^r$ -difféomorphisme.

▷ Il suffit de mettre sur  $X$  la topologie dont les ouverts sont les  $U \subseteq X$  tels que  $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$  est ouvert pour tout  $\alpha \in I$ . C'est bien une topologie et les  $\varphi_\alpha$  sont des homéomorphismes. De plus, si  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$ , on a soit  $p, q$  dans des cartes différentes, soit  $p, q$  sont dans un même ouvert de carte, donc la topologie de  $X$  est séparée. La dénombrabilité de  $I$  assure que  $X$  est dénombrable à l'infini. ■

**Exercice 8**

Trouver une variété différentiable qui n'est  $C^1$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Le graphe  $\Gamma$  de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$  est une variété différentielle de dimension 1 dont un atlas est donné par  $\{f\}$ . Il est clair que cette structure n'est pas  $C^1$ .

Il est illusoire de vouloir que  $\Gamma$  n'admette aucune structure  $C^1$ . En effet,  $f$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$  qui admet une structure lisse. Par transport de structure,  $\Gamma$  également.

On mentionne des résultats importants de la culture mathématique qui sont centraux en topologie différentielle pour adultes et qu'il est bon de savoir pour ne pas se poser des questions inutiles.

**Remarques.**

1. Toute variété différentiable est topologique.
2. (*Théorème de lissité des structures différentielles*) Un théorème dû à Whitney énonce le fait surprenant : si  $X$  possède un atlas  $C^1$ , il existe un atlas  $C^\infty$  qui est compatible. Plus précisément : soient  $k_1 \leq k_2 \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$ . Toute variété de classe  $C^{k_1}$  est  $C^{k_1}$ -difféomorphe à une variété de classe  $C^{k_1}$  (*où l'on définir les difféomorphismes plus tard sur les variétés*). De plus, si deux variétés de classe  $C^{k_2}$  sont  $C^{k_1}$ -difféomorphes, elles sont  $C^{k_2}$ -difféomorphes.
3. Il existe des variétés topologiques *i.e.*  $C^0$  qui n'ont pas de structure  $C^1$ -compatible et même pas de structure différentielle.
4. Il peut exister plusieurs structures  $C^\infty$  non compatibles sur une même topologie. C'est le cas de la sphère  $S^7$ , grâce à une description due à Milnor. On parle de *structures exotiques*.
5. Plus étonnant, toute variété  $C^\infty$  admet une structure  $C^\omega$ -compatible.

6. Une variété topologique de dimension 3 possède une unique structure différentielle. En dimension 4, l'unicité et l'existence sont remises en question. Il existe une infinité non dénombrable de structures non isomorphes sur  $\mathbb{R}^4$  dits  $\mathbb{R}^4$  *exotiques*.

### 3.2.3 Applications différentiables sur des variétés différentielles

**Définition.** (*Application de classe  $C^p$  sur une variété différentielle*)

Soient  $M, N$  variétés différentielles de classe  $C^p$ . Une application  $f : M \rightarrow N$  est dite de classe  $C^p$  si elle est continue et pour tout  $a \in M$ , il y a une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$ , i.e.  $a \in U$ , une carte  $(V, \psi)$  en  $f(a)$  telle que l'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  est de classe  $C^p$ .

$$\begin{array}{ccc} a \in U \cap f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & V \ni (f(a)) \\ \varphi \downarrow \varphi^{-1} & & \downarrow \psi \\ \varphi(U \cap f^{-1}(V)) & \longrightarrow & \varphi(V) \end{array}$$

L'application  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$  est appelée *application lue dans les cartes*.

#### Remarques.

- Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer  $f : U \rightarrow V$  (on utilise d'ailleurs la continuité de  $f$  pour avoir  $f^{-1}(V)$  ouvert), et ainsi seulement dire dans la définition : il y a deux cartes [...] avec  $f(U) \subseteq V$ . Le diagramme devient alors :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \text{ } C^p]{} & \psi(V). \end{array}$$

- Grâce à la définition de variété différentielle (choix d'un atlas (compatible)), ceci ne dépend pas du choix des cartes  $(U, \varphi)$  et  $a$  et  $(V, \psi)$  en  $f(a)$ , explicitement : pour d'autres cartes  $(U', \varphi')$  en  $a$  et  $(V', \psi')$  en  $f(a)$ ,  $f(U') \subseteq V'$ ,  $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U') \rightarrow \psi'(V')$  sur  $U \cap U'$ ,  $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = \psi' \circ \psi'^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$ . Comme  $\varphi \circ \varphi'^{-1}$  sur  $\varphi'(U \cap U')$  et  $\psi' \circ \psi^{-1}$  sur  $\psi(V \cap V')$  sont  $C^p$ , alors  $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$  l'est aussi. Ainsi, une application continue  $f : M \rightarrow N$  est  $C^p$  si et seulement si l'application lue dans tous les couples de cartes est  $C^p$  (et il n'y a pas besoin d'avoir un atlas maximal).

**Propriété. (Composition d'applications entre variétés différentielles)**

Soient  $M, N, P$  des variétés différentielles de classe  $C^p$ . Soient  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow P$  des applications de classe  $C^p$ . Alors  $g \circ f$  est de classe  $C^p$ .

▷ Soit  $a \in M$ , on dispose de  $f(a) \in N$ ,  $g \circ f(a) \in P$ ,  $(U, \varphi)$  carte en  $a$ ,  $(V, \psi)$  carte en  $f(a)$ ,  $(W, \xi)$  carte en  $g \circ f(a)$ ,  $f(U) \subseteq V, g(V) \subseteq W$ ,

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi]{\simeq_1} & \psi(V) & \xrightarrow[\xi \circ g \circ \psi]{\simeq_1} & \xi(W) \end{array}$$

Ainsi  $\xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$  est  $C^p$  par composée. ■

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété  $C^p$  de dimension  $k$ ; on a vu que c'était une variété différentielle. On dispose a priori de deux notions d'applications  $C^p$  entre sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ :

- celle ci-dessus,
- celle donnée par l'existence d'un prolongement local.

**Proposition**

Ces deux notions sont les mêmes.

▷ S'il existe un prolongement local, alors il y a caractère  $C^p$  au sens ci-dessus. On peut tracer :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \longrightarrow & \psi(V) \end{array}$$

Mais  $U$  est un ouvert de  $M$ , donc s'écrit  $U = M \cap U'$ , avec  $U'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et par hypothèse il existe  $F : U'' \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^p$  sur l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$   $U'' \supseteq U$  et  $F|_U = f$ . Alors  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi \circ F \circ \varphi'$  est donc de caractère  $C^p$  au sens des variétés différentielles.

Inversement, si  $f$  est  $C^p$  au sens ci-dessus. On prend pour carte en  $a$  une carte donnée par redressement  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $W$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . On sait  $f \circ \varphi^{-1}$  définie sur  $\varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$  et  $C^p$ . Soit  $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \{0\}$  la projection; alors  $g = f \circ \varphi^{-1} \circ \Pi$  est définie sur  $\varphi(W)$  et est  $C^p$ . On considère  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; alors  $F = (f \circ \varphi^{-1} \circ \Pi) \circ \varphi$  est  $C^p$ . Pour  $x \in W \cap M$ ,  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ,  $\Pi \circ \varphi(x) = \varphi(x)$ ,  $F(x) = f(x)$ . ■



Souvent, on utilise des cartes centrées, i.e.  $(U, \varphi)$  carte en  $a$  avec  $\varphi(a) = 0$ .

**Exemples. (*Applications entre variétés différentielles*)**

1. Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $k$  et de classe  $C^p$ . Soit  $U \subseteq M$  un ouvert. Alors  $U$  est une variété différentielle de dimension  $k$  et de classe  $C^p$ . En effet, si  $(U_i, \varphi_i)$  est un atlas de  $M$ , on prend les  $(U \cap U_i, \varphi_i|_{U \cap U_i})$ .
2. (*Produit de variétés différentielles*) Si  $M, N$  sont des variétés différentielles de classe  $C^p$  et de dimension  $k$  et  $l$  respectivement. Alors  $M \times N$  est une variété différentielle de classe  $C^p$ , de dimension  $k + l$ , et les projections  $M \times N \rightarrow M$ ,  $M \times N \rightarrow N$  sont des applications de classe  $C^p$ .

En effet, soit  $(U_i, \varphi_i)$  atlas de  $M$  et  $(V_j, \psi_j)$  atlas de  $N$ ; alors  $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$  est un ouvert de  $M \times N$  pour la topologie produit. On introduit  $\varphi \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$  qui sont des homéomorphismes sur  $\varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ . Les changements de carte  $(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i) \times (\psi_j^{-1} \circ \psi_j')$  est un  $C^p$  difféomorphisme, car les composantes le sont.

**Définition. (*Difféomorphismes*)**

Soient  $M, N$  deux variétés différentielles de classe  $C^p$ . Soit  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$ .

1. On dit que  $f$  est un difféomorphisme si  $f$  est bijective et  $f^{-1} : N \rightarrow M$  est de classe  $C^p$ .
2. On dit que  $f$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $a$  s'il existe un ouvert  $U \ni a$  tel que  $f|_U$  est un difféomorphisme sur son image.
3. Si  $f$  est un difféomorphisme local si c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de  $M$ .

### 3.2.4 Opérations sur les variétés

#### 3.2.4.1 Sous-variété d'une variété différentielle

**Définition. (*Sous-variété différentielle*)**

Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^p$ , de dimension  $k$ . On dit que  $P \subseteq M$  est une *sous-variété (différentielle)* de  $M$  si pour tout  $a \in P$ , il y a une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$  telle que  $\varphi(U \cap P)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^k$ , i.e. il y a une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$  telle que  $\varphi(U \cap P) = V \times (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^k$  où  $\varphi(U) = V$ .

*Remarque.* Si  $(U, \varphi)$  est une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , et  $\psi$  un difféomorphisme, alors  $(U, \psi \circ \varphi)$  est une carte.

**Proposition**

Une sous-variété d'une variété différentielle est une variété est une variété différentielle.

**Exercice 9** (*Caractérisation des sous-variétés différentiables*)

Soient  $M$  une variété de dimension  $n$  et soit  $N \subseteq M$ . Soit  $d \in \mathbb{N}$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $N$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $d$  ;
- (ii) pour tout  $x \in N$ , il existe un voisinage  $U \subseteq M$  de  $x$  et un difféomorphisme  $f = (f_1, \dots, f_n)$  défini sur  $U$  tel que  $U \cap N = \{y \in U \mid f_{d+1}(y), \dots, f_n(y) = 0\}$  ;
- (iii) pour tout  $x \in N$ , il existe un voisinage  $V \subseteq M$  de  $x$  et une application différentiable  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  tel que  $\text{rg Jac}_x(g) = n - k$  et  $V \cap N = \{y \in V \mid g(y) = 0\}$  ;
- (iv) pour tout  $x \in N$ , il existe un voisinage  $W \subseteq M$  de  $x$ , un ouvert  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^k$  et une application différentiable  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\text{rg Jac}_x(h) = k$  et  $W \cap N = h(\Omega)$ .

**Propriété.** (*Variété ouverte*)

Tout ouvert d'une variété topologique en est une sous-variété, et en particulier c'est une variété topologique.

▷ Immédiat. ■

**Contre-exemple.** (*Fermé qui n'est pas une sous-variété*)

La réunion de deux droites sécantes est un fermé qui n'est pas une sous-variété, à cause de son point double en la sécante. □



Il existe bien sûr des sous-variétés fermées, tel le cercle dans le plan... Qui ne sont alors pas des ouverts non triviaux, puisqu'une variété est connexe.

**3.2.4.2 Somme disjointe de variété****Définition.** (*Réunion disjointe de variétés*)

Soient  $(M_i)_{i \in I}$  des variétés topologiques, respectivement différentiables de classe  $C^p, p \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ , où  $I$  est un ensemble. Alors  $M = \coprod_{i \in I} M_i$  est une variété topologique, respectivement différentiable de classe  $C^p$  et pour tout  $i \in I$ ,  $M_i$  est une sous-variété de  $M$ .

### 3.2.5 Orientabilité des variétés

#### Définition. (*Fonction de transition préservant l'orientation*)

Soient  $M$  une variété différentiable et  $\varphi, \psi$  deux cartes sur  $M$ . On dit que la fonction de transition  $f_{\varphi, \psi} = \varphi^{-1} \circ \psi$  préserve l'orientation de  $M$  si son déterminant jacobien est positif.

#### Définition. (*Atlas orienté*)

Soit  $M$  une variété différentiable. Un *atlas orienté* sur  $M$  est un atlas sur  $M$  dont toutes les fonctions de transition préservent l'orientation.

On dit que  $M$  est *orientable* si elle admet un atlas orienté. Si  $M$  est orientable, une *orientation* de  $M$  est un atlas orienté maximal parmi les atlas orientés.

*Remarque.* Dans le cas  $n = 0$  des points, on préfère dire, mais c'est pareil, qu'une orientation de  $M$  est une fonction  $M \rightarrow \{\pm 1\}$ .

#### Exemples. (*Orientation des variétés*)

1. Les sphères  $S^n$  sont orientables.
2. Les tores  $\mathbb{T}^n$  sont orientables.
3. Le ruban de Möbius  $\mathbb{M}$  n'est pas orientable.
4. Le plan projectif réel  $\mathbb{RP}^2$  n'est pas orientable.

Plus généralement,  $\mathbb{RP}^n$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair.

5. La bouteille de Klein  $\mathcal{K}$  n'est pas orientable.
6. Toute variété complexe est orientable en tant que variété réelle.

En particulier,  $\mathbb{CP}^n$  est orientable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a alors une preuve de ce que  $\mathbb{CP}^n \not\simeq \mathbb{RP}^{2n}$ .

7. On a aussi une notion d'orientation des variétés topologiques données par l'homologie singulière relative et le théorème d'excision. Avec cette définition, toute variété différentielle orientable est orientable, et la réciproque est vraie dès que la variété est  $C^1$ .

On démontrera :

#### Proposition

#### Admis

Une variété différentiable de dimension  $n$  est orientable si et seulement si elle admet une  $n$ -forme différentielle non nulle.

### 3.2.6 Variétés à bord

#### Définition. (*Variété à bord*)

Une variété (*topologique*) à *bord* est un espace topologique séparé, à base dénombrable, tel que tout point admette un voisinage homéomorphe à un ouvert du demi-espace  $\mathbb{H}_n^+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n \geq 0\}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Reformulation pratique. (*Point de vue pratique des variétés à bord*)

Une variété à bord de dimension  $n \in N$  est un espace topologique séparé, à base dénombrable, tel que tout point admette un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ou à  $\mathbb{H}_n^+$ .

**Remarque importante.** En dimension  $n > 0$ , un point peut à la fois admettre un voisinage  $U$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et un autre  $V$  homéomorphe à  $\mathbb{H}_n^+$ . Cependant, c'est impossible si l'image de ce point dans la carte prise est sur le bord du demi-espace. En effet, on aurait  $U \setminus \varphi(x) \simeq V \setminus \psi(x)$ , mais  $V \setminus \psi(x)$  est contractile, d'où  $H_n(V, V \setminus \{\varphi(x)\}) = 0$  mais  $H_n(U, U \setminus \{\psi(x)\}) = \mathbb{Z}$  par le théorème d'excision de l'homologie singulière des espaces topologiques.

#### Définition. (*Intérieur, bord*)

Soit  $M$  une variété à bord. On note  $\text{Int}(M)$  l'ensemble des points de  $M$  admettant un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  et on l'appelle parfois l'*intérieur de  $M$* .

On note  $\partial M$  le complémentaire dans  $M$  de  $\text{Int}(M)$  et on l'appelle *bord de  $M$* .

On en déduit :

#### Propriété

Soit  $M$  une variété à bord de dimension  $n$ . Soit  $x \in M$  dans l'ouvert de carte  $(U, \varphi)$ . Si  $\varphi(x) \in \partial \mathbb{H}_n^+ = \{(x_1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ , alors pour tout ouvert de carte  $(U', \varphi')$  contenant  $x$ ,  $\varphi'(x) \in \partial \mathbb{H}_n^+$ . De plus,  $x \in \partial M$  si et seulement si  $\varphi(x) \in \partial \mathbb{H}_n^+$  pour au moins une carte  $\varphi$  (et donc pour toutes).

#### Reformulation pratique. (*Bord d'une variété*)

Le bord d'une variété à bord est l'ensemble de ses points n'admettant aucun voisinage euclidien homéomorphe à un ouvert d'un espace euclidien entier.

*Remarque.* Pour toute variété à bord  $M$  de dimension non nulle,  $\text{Int}(M) \sqcup \partial M = M$  et  $\text{Int}(M) \cap \partial M = \emptyset$ .



Cela ne pose aucun problème d'appeler  $\partial M$  bord. En effet, le bord topologique de  $M$  comme pour tout espace topologique est vide !

### Proposition

Soit  $M$  une variété à bord.

1.  $\text{Int}(M)$  est un ouvert de  $M$ .
2.  $\partial M$  est la frontière de  $\text{Int}(M)$  dans  $M$ , en particulier le bord de  $M$  est fermée dans  $M$ .

▷ Successivement :

1. C'est clair : si  $x$  admet un voisinage euclidien, tout point de ce voisinage euclidien aussi, et ce même.
2. Par la remarque précédente, il suffit de montrer que  $\overline{\text{Int}(M)} = M$ . Soit donc  $x \in M$ . Soit  $U$  un ouvert contenant  $x$ . Soit  $(U', \varphi)$  une carte de lecture de  $x$ . L'image de  $U' \cap U$  contient un point qui n'est pas dans le bord d'un demi-espace. Alors  $\varphi(U' \cap U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , donc ne peut être inclus dans  $\mathbb{H}_n^+$ . L'image réciproque de tout point hors de ce bord d'espace, est dans  $U \cap \text{Int}(M) \neq \emptyset$ . ■

### Fait. ( $\text{À bord} \implies \text{sans bord}$ )

Toute variété (sans bord) est une variété à bord. Plus précisément, une variété à bord  $M$  est sans bord si et seulement si  $\partial M = \emptyset$ .

Découle immédiatement de la définition.

**VOC** Pour opposer les deux définitions, on parle de variété topologique *quelconque*, *sans bord*. Une variété compacte sans bord est dite *fermée*. Une variété *ouverte* est a contrario une variété sans bord dont chaque composante connexe est non compacte.

### Propriété. (*Intérieur d'une variété à bord*)

Soit  $M$  une variété à bord de dimension  $n$ . Alors  $\text{Int}(M)$  est une variété sans bord de dimension  $n$ .

▷ C'est immédiat par définition de l'intérieur et des variétés à bord. ■

### Théorème. (*Structure du bord d'une variété à bord*)

Soit  $M$  une variété à bord de dimension  $n > 0$ . Alors  $\partial M$  est une variété sans bord de dimension  $n - 1$ , avec donc  $\partial(\partial M) = \emptyset$ .

▷ Soit  $x \in \partial M$ . On projette le voisinage ouvert dans le demi-espace sur le bord de ce demi-espace, ce qui est encore un voisinage (relatif) de l'image de  $x$  puisque qui contient encore l'image de  $x$  par la carte, par hypothèse de définition du bord. Formellement, soit  $U \ni x$  un ouvert homéomorphe par  $\varphi$  à  $V$  ouvert de  $\mathbb{H}_n^+$  avec  $\varphi(x) \in \partial\mathbb{H}_n^+$ . On pose  $U' = V \cap \partial\mathbb{H}_n^+$  homéomorphe à  $V \cap \partial\mathbb{H}_n^+$  par une restriction et corestriction de  $\varphi$ . Puisque  $V$  est ouvert dans  $\mathbb{H}_n^+$ ,  $V \cap \partial\mathbb{H}_n^+$  est un ouvert de  $\partial\mathbb{H}_n^+ \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ . Alors  $(U', \tilde{\varphi})$  est une  $\partial M$ -carte pour lire  $x$ . ■

*Remarque.* Les variétés et les variétés à bord de dimension nulle sont les mêmes, et ce sont les points.

### Exemples. (*Variétés à bord*)

1. La boule  $B^n$  est une variété à bord de dimension  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , dont le bord est  $S^{n-1}$ .
2. Un cylindre est une variété à bord de deux composantes connexes constituées des cercles  $\{t = 0\}$  et  $\{t = 1\}$ .
3. Le tore solide  $\mathbb{T}^n$  est une variété à bord pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , dont le bord est le tore  $\mathbb{T}^n$ .
4. Le carré (plein) est une variété à bord dont le bord est homéomorphe (et, en fait, difféomorphe avec la bonne structure différentielle) à  $S^1$ . Ce carré solide est en tout cas homéomorphe à  $D^2$ .

### Définition. (*Sous-variété à bord*)

Soit  $M$  une variété à bord. Une *sous-variété propre*  $N$  (*à bord*) de  $M$  est une variété topologique telle que l'inclusion canonique  $N \hookrightarrow M$  soit une application propre au sens des compacts, si  $\partial N = N \cap \partial M$  et  $N$  et  $\partial M$  sont transverses dans  $M$  en tout point de  $\partial N$ .

### Définition. (*Variété différentiable à bord*)

Pour une variété différentielle à bord, les applications différentiables définies dans des cartes à bord doivent admettre des prolongements lisses. Autrement dit, si  $U$  ou  $V = \mathbb{H}_n^+$ , une application différentiable  $\varphi : U \rightarrow V$  est (mais ce n'est pas une nouveauté, et c'est la définition dans les cas des sous-varités euclidiennes) s'il existe  $\tilde{U}$  voisinage ouvert de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\tilde{V}$  voisinage ouvert de  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  différentiable telle que  $\varphi$  soit la restriction de  $\tilde{\varphi}$ .

*Remarque.* On peut donc sans problème définir l'espace tangent aussi aux points du bord.

### 3.2.7 Feuilletage

#### Définition. (*Feuilltage*)

Un *feuilletage* ou *foliation* sur une variété  $M$  de dimension  $n$  est un atlas *feuilleté*, autrement dit une famille de cartes locales  $(U, f_U)$ , où  $f_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de sorte que les changements de cartes  $U, V$  préservent cette décomposition : pour tout  $a$ ,  $f_U \circ f_V^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{a\}) = \mathbb{R}^k \times b(a)$ .

Quand une variété est feuilletée, dans chaque ouvert de carte, on appelle *feuille (locale)* d'un

point  $x$  l'ensemble des  $f_U^{-1}(R^k \times a)$  où  $f_U(x) = (*, a)$ . Comme les changements de cartes préservent les feuilles locales, on peut recoller les feuilles locales pour obtenir des *feuilles*, sous-entendu globales, qui sont des sous-variétés immergées, mais pas nécessairement plongées, car elles peuvent être denses.

### 3.2.8 Points réguliers, points critiques

**Définition. (*Point régulier, point critique, valeur régulière*)**

Soient  $M, N$  des variétés de classe  $C^p$  et de même dimension. Soit  $f : M \rightarrow N$ .

1. Un point  $a \in M$  est dit *régulier*, s'il y a un ouvert  $U \ni a$  tel que  $f|_U$  est un difféomorphisme sur son image.
2. Un point qui n'est pas régulier est dit *point critique*.
3. Un point  $b \in N$  est dit *valeur régulière* si pour tout  $a \in f^{-1}(b)$ ,  $a$  est un point régulier. Par convention, si  $b \notin f(M)$ , on dit bien que c'est une valeur régulière.

Cette notion est une particularisation de la notion générale de point critique en calcul différentiel.

**Théorème. (*Fibres d'une valeur régulière dans le cas compact*)**

Soient  $M, N$  deux variétés différentielles de classe  $C^p$  et de même dimension. On suppose  $M$  compacte. Soit  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$ . Soit  $y \in N$  une valeur régulière. Alors  $f^{-1}(y)$  est de cardinal fini et il existe  $V$  un voisinage de  $y$  dans  $N$  tel que pour tout  $z \in V$ ,  $\text{card}(f^{-1}(z)) = \text{card}(f^{-1}(y))$ .

▷ Si  $y \notin f(M)$ ,  $|f^{-1}(y)| = 0$ . Or  $M$  est compacte, donc  $f(M)$  est compacte, donc fermée dans  $N$  séparée. Donc  $N \setminus f(M)$  est un ouvert qui contient  $y$ . Si maintenant  $y$  est valeur régulier avec  $y \in f(M)$ . Pour tout  $x \in f^{-1}(y)$ ,  $x$  point régulier, il existe un ouvert  $U_x$  contenant  $x$  tel que  $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$  un difféomorphisme qui à  $x \mapsto y$ . Ceci dit que  $f^{-1}(y)$  est un sous-espace topologique de  $M$  dont tous les points sont isolés :  $U_x \cap f^{-1}(y) = \{x\}$ . Mais  $f^{-1}(y)$  est fermé, donc compact, car  $M$  est compact. Or, un ensemble discret et compact est fini, d'où le premier point.

Montrons que le cardinal de la fibre est localement constant. Quitte à les restreindre, on peut supposer  $U_{x_1}, \dots, U_{x_p}$  deux à deux disjoints. Ainsi  $f(U_{x_1}), \dots, f(U_{x_p})$  sont des ouverts de  $N$ , donc leur intersection est un ouvert de  $N$  contenant  $y$ . En outre,  $M \setminus \bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$  est un fermé de  $M$ , donc compact.

Ainsi  $f(M \setminus \bigcup_{i=1}^p U_{x_i})$  est un compact de  $N$ , donc fermé. Ainsi,  $N \setminus f(M \setminus \bigcup_{i=1}^p U_{x_i})$  est un ouvert de  $N$  contenant  $y$ . On prend  $V = f(U_{x_1}) \cap \dots \cap f(U_{x_p}) \cap (N \setminus f(M \setminus \bigcup_{i=1}^p U_{x_i}))$  ouvert contenant  $y$ . Si  $z \in V$ , alors il n'a pas d'antécédent ailleurs que dans  $\bigcup_{i=1}^p U_{x_i}$  et il en a exactement un dans chaque  $U_{x_i}$ , d'où  $|f^{-1}(z)| = p$ . ■

### Curiosité. (*Application : démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss*)

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non constant. Alors il induit une application surjective de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

▷ On veut utiliser le théorème précédent ; pour cela, il faut se ramener au cas compact. Pour cela, on utilise le prolongement de  $P$  en une application  $C^\infty$  de  $S^2 \rightarrow S^2$ , notée  $f$ , telle que  $f(N) = N$  et  $f = \varphi_N^{-1} \circ P \circ \varphi_N$ , où  $S^2$  est compacte. Soit  $a \in S^2$ ,  $a \neq N$ . Si  $\varphi_N(a)$  n'est pas un zéro de  $P'$ , alors  $a$  est un point régulier de  $f$ .  $\varphi_N, \varphi_N^{-1}$  sont des difféomorphismes. Si  $P'(z) \neq 0$ ,  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et le théorème d'inversion locale dit que c'est un difféomorphisme local en  $z$ . On cherche les valeurs critiques de  $f$ . Il n'y en a qu'un nombre fini, car  $P'$  n'a qu'un nombre fini de zéros : c'est un polynôme non nul. Soit donc  $C$  l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ . On sait que sur  $S^2 \setminus C$ ,  $y \mapsto |f^{-1}(y)|$  est localement constante. Mais  $S^2 \setminus C$  est connexe par arcs, car  $C$  est fini, donc cette application est constante. Donc cette valeur est la même pour toutes les valeurs régulières. En particulier le nombre d'antécédents d'un point de  $C$  n'est jamais 0. ■

Et voilà une preuve du théorème fondamental de l'algèbre grâce aux outils de la géométrie différentielle (et une de plus!).

### 3.2.9 Espace tangent en un point à une variété

Soit  $a \in M$ , une variété différentielle de classe  $C^p$ . On considère des courbes  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tracées sur  $M$  avec  $\gamma(0) = a$  de classe  $C^1$ , c'est-à-dire qu'il y a une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$  (avec  $\varphi(a) = 0$ ) tel que  $\varphi \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \varphi(U)$  soit  $C^1$  au sens usuel.

On introduit une relation d'équivalence sur les courbes tracées sur  $M$  et passant par  $a$  : on dit que  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$  (centrée) tel que  $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ .



Ceci ne dépend pas du choix de la carte  $(U, \varphi)$  en  $a$ . Si  $(V, \psi)$  est une autre carte  $(\psi \circ \gamma_1) = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)$ , alors  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  est  $C^p$  au sens usuel. Alors  $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})(0) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$ . On a ainsi une relation d'équivalence.

### Définition. (*Espace tangent à une variété différentielle*)

L'espace tangent  $T_a M$  est l'ensemble des classes d'équivalence de courbes tangentes en  $a$  pour la relation définie ci-dessus<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Les lecteurs les plus attentifs ne seront pas surpris que, dans le cas des variétés abstraites, on ne puisse construire l'espace tangent de manière plus convaincante.

### Théorème. (*Structure de l'espace tangent à une variété différentielle*)

Pour tout  $a \in M$ ,  $T_a M$  est un espace vectoriel de dimension  $\dim(T_a M) = k = \dim(M)$ .

▷ Munissons  $T_a M$  d'une structure d'espace vectoriel. Soit  $(U, \varphi)$  une carte en  $a$ . On a une application  $\theta_\varphi : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^k$  qui à  $v \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$  avec  $\gamma$  une courbe dont  $v$  est la classe. Peu importe  $\varphi$  grâce à la remarque précédente. On a ainsi une application injective. Montrons que  $\theta_\varphi$  est bijective. Soit  $w \in \mathbb{R}^k$ . Alors  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  ouvert qui à  $a \mapsto 0$  vérifie, pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \quad tw \in \varphi(U)$  et  $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tw) \in U \subseteq M$ .  $\gamma$  est  $C^1$ , car  $\varphi \circ \gamma(t) = tw$  et l'on a  $(\varphi \circ \gamma)'(0) = w$ . Ainsi, on transporte la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{R}^k$  à  $T_a M$  ainsi : pour  $v, v' \in T_a M$ ,  $\theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(v) + \theta_\varphi(v')) := v + v'$ . Ceci ne dépend pas du choix de la carte  $(U, \varphi)$  si on prend  $(V, \psi)$  et  $\theta_\psi$ . On a  $\theta_\psi = d(\psi \circ \varphi^{-1})(0) \cdot \theta_\varphi$ , puis :  $\theta_\psi^{-1}(\theta_\psi(v) + \theta_\psi(v')) = \theta_\varphi^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})(0))^{-1} d(\psi \circ \varphi(0) \theta_\varphi(v) + \theta_\varphi(v'))$ . Ainsi, cette définition est intrinsèque. ■

### Remarques.

1. (« L'information d'une variété est contenue dans n'importe lequel de ses ouverts »)

Soit  $U$  un ouvert de  $M$ . Alors  $T_a U = T_a M$ , une remarque qui devrait rappeler des souvenirs aux amateurs de géométrie algébrique.

2. (Espace tangent d'un produit.) Soient  $M, N$  des variétés et  $a \in M$ ,  $b \in N$ .  $T_{(a,b)}(M \times N) = T_a M \times T_b N$ .

Grâce à la notion d'espace tangent, on peut définir la différentielle d'une application  $C^p$  (oui, que maintenant !).

### Définition. (Différentielle d'une application sur variété différentielle)

Soient  $M, N$  deux variétés de classe  $C^p$  et  $f : M \rightarrow N$   $C^p$ . On veut définir une application linéaire  $T_a f : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$ . Soit  $\gamma_1$  une courbe tracée sur  $M$ , passant par  $a$ ; alors  $f \circ \gamma_1 = c_1$  une courbe tracée sur  $N$  passant par  $f(a)$ . Si  $(U, \varphi)$  est une carte en  $a$ ,  $(V, \psi)$  une carte en  $f(a)$  avec  $f(U) \subseteq V$ . Alors l'application en bas :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi \circ f \circ \varphi^{-1}]{} & \varphi(V) \end{array}$$

est  $C^p$  au sens usuel, avec  $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ .

Par construction, on a  $\varphi \circ \varphi_1$  qui est  $C^1$  au sens usuel. Alors  $c_1 = f \circ \gamma_1 = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_1)$ . Dans ce cas  $\psi \circ c_1 = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_1)$  est bien  $C^1$  par composition de classe  $C^p$  et de classe  $C^1$ .

$$\begin{array}{ccc} T_a M & \xrightarrow{\theta_\varphi} & \mathbb{R}^k \\ T_a f \downarrow & & \downarrow \\ T_{f(a)} M & \xrightarrow[\theta_\psi]{} & \mathbb{R}^l \end{array}$$

On pose la différentielle de  $f$  :  $[T_a f = \theta_{\psi^{-1}} \circ d_0(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_\varphi]$ . On parle aussi d'*application linéaire tangente* en  $a$ . Alors  $T_a f$  est clairement une application linéaire qui

ne dépend pas du choix des cartes effectué pour les calculer.

Cette définition est cohérente, car  $(\psi \circ c_1)'(0) = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)(\varphi \circ \gamma_1)'(0)$ .

*Remarque.*  $T_a f$  sera injective, resp. surjective, resp. bijective, ssi  $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)$  l'est.

### Théorème. (*Composition des différentielles sur une variété différentielle*)

Soient  $M, N, P$  des variétés différentielles et  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$ ,  $g : N \rightarrow P$  de classe  $C^p$ . Soit  $a \in M$ . Alors  $T_a(g \circ f) = T_{f(a)}(g) \circ T_a(f)$ .

▷ Soient  $(U, \varphi)$  une carte en  $a$ ,  $(V, \psi)$  une carte en  $f(a)$ ,  $(W, \xi)$  en  $g(f(a))$ . Alors  $g \circ f = g \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ f$ , et  $T_a(g \circ f)\theta_\xi^{-1}d(\xi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)\theta_\varphi = \theta_\xi^{-1}d(\xi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \varphi \circ f)(0)\theta_\varphi$ . ■

## 3.2.10 Difféomorphisme, immersion, submersion sur une variété différentielle et adaptation des grands théorèmes à leur cas

### 3.2.10.1 Théorèmes fondamentaux de la géométrie différentielle

En se plaçant dans des cartes, on obtient :

### Théorème. (*Théorèmes fondamentaux sur les variétés différentielles*)

Soient  $M, N$  des variétés  $C^p$ ,  $\dim(M) = k$ ,  $\dim(N) = l$  et  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$ . Soit  $a \in M$ .

1. (*Inversion locale*) Si l'application tangente  $T_a f : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors il existe un ouvert  $U$  de  $M$ ,  $a \in U$  tel que  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  soit un difféomorphisme.
2. (*Immersion, submersion*) Si  $T_a f : T_a M \rightarrow T_{f(a)} N$  est injective (on dit encore que  $f$  est une immersion en  $a$ ), il existe des cartes  $(U, \varphi)$  en  $a$  et  $(V, \psi)$  en  $f(a)$  telles que si  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \varphi(U)$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ .  
Si  $T_a f$  est surjective (on dit encore que  $f$  est une submersion en  $a$ ), alors il existe des cartes  $(U, \varphi)$  en  $a$  et  $(V, \psi)$  en  $f(a)$  telles que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \varphi(U)$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_l)$ ,  $l \leq k$ .

On peut généraliser le théorème d'inversion locale en passant des points locaux aux sous-variétés compactes :

### Théorème. (*Théorème de la fonction inverse généralisé*)

Si  $f : N \rightarrow A$  entre variétés est lisse et est bijective sur une sous-variété compacte  $M \subseteq N$ , alors si  $df_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} A$  est un difféomorphisme linéaire en tout  $x \in M$ ,  $f$  envoie un voisinage de  $M$  dans  $N$  sur un voisinage de  $f(M)$  dans  $A$ .

▷ Simple exercice pour passer du fini au compact. ■

### 3.2.10.2 Plongement des variétés

#### Définition. (*Plongement différentiel*)

Soit  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$  avec les hypothèses précédentes. On dit que  $f$  est un *plongement* si  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$  et si  $f$  est un difféomorphisme de  $M$  sur  $f(N)$ .

#### Définition. (*Point critique, valeur critique*)

On dit que  $a \in M$  est *point critique* de  $f$  si  $T_a f$  n'est pas surjective, i.e.  $\text{rg}(T_a f) < l = \dim(N)$ . On dit que  $b \in N$  est *valeur critique* si c'est l'image d'au moins un point critique.

#### Théorème. (*Immersion injective sur un compact*)

Soient  $M, N$  des variétés différentielles de classe  $C^p$ ,  $f : M \rightarrow N$ . On suppose  $M$  compacte. On suppose que  $f$  est une immersion injective. Alors  $f$  est un plongement.

▷ Par hypothèse,  $f$  est bijective continue donc c'est un homéomorphisme de  $f$  sur  $f(M)$ . Montrons que  $f(M)$  est une sous-variété de dimension  $k = \dim(M)$  de  $N$ . Pour donnée une carte  $(V, \psi)$  de  $N$ , on veut voir  $\psi(V \cap f(M))$  sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^l$  et pour cela obtenir  $\varphi(U \cap f(M)) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . Soit  $b = f(a)$ . Par forme canonique des immersions, il y a une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$ ,  $(V, \psi)$  en  $b$  avec  $f(U) \subseteq V$  telle que pour tout  $x(x_1, \dots, x_k) \in \varphi(U)$ ,  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ .  $f$  étant un homéomorphisme sur  $f(M)$ , on peut réduire le domaine de carte  $V$  pour que  $\psi(f(M) \cap V) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . ■

#### Théorème. (*Caractérisation des sous-variétés par submersion*)

Soit  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^p$ . Si  $f$  est une submersion, alors pour tout  $b \in N$ ,  $f^{-1}(b)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k - l$ .

### 3.2.11 Fibré tangent à une variété différentielle

#### Théorème. (*Structure du fibré tangent*)

Soit  $M$  une variété de classe  $C^p$ , de dimension  $k$ . Alors le *fibré tangent*  $TM = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a M$  est muni d'une structure de variété différentielle, dite *variété tangente*.

▷ On veut déjà munir  $TM$  d'une structure de variété topologique. Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ . Soit  $TU = \bigcup_{a \in U} \{a\} \times T_a M$ . On a une application bijective  $\phi : TU \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$ , qui à

$(a,v) \mapsto (\varphi(a), \theta_{\varphi(v)})$ ,  $v \in T_a M$ ,  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^k$  ouvert de  $\mathbb{R}^{2k}$ . On peut munir  $TU$  d'une topologie en décrétant que  $\phi$  doit être un homéomorphisme, i.e.  $W \subseteq TU$  ouvert  $\iff \phi(W)$  ouvert de  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^k$ . On considère un atlas  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$ . Pour tout  $i$ , on dispose de  $TU_i$ ,  $\phi_i : TU_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$  muni de la topologie ci-dessus. Comme les  $U_i$  recouvrent  $M$ , les  $TU_i$  recouvrent  $TM$ . On opère donc un *recollement de topologies* : on munit  $TM$  d'une topologie par :  $W \subseteq TM$  est ouvert si et seulement si pour tout  $i$ ,  $W \cap TU_i$  est un ouvert de  $TU_i$ , soit pour tout  $i$ ,  $\phi_i(W \cap TU_i)$  ouvert de  $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$ . Grâce aux changements de cartes, les topologies sur  $TU_i \cap TU_j = T(U_i \cap U_j)$  induites par celles de  $TU_i$  et  $TU_j$  coïncident.

On dispose de  $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  un  $C^p$ -difféomorphisme et donc de sa différentielle  $d\varphi_{ij}(0) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$  un isomorphisme linéaire. On construit :  $\phi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$  qui à  $(x,v) \mapsto (\varphi_{ij}(x), d\varphi_{ij}(x)(v))$ . En posant  $\phi_i : TU_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$  qui à  $(a,v) \mapsto (\varphi_i(a), \theta_{\varphi_i}(v) = T_x \varphi_i(v))$ , on a  $\boxed{\phi_j = \phi_{ij} \circ \phi_i}$ .

On a donc muni  $TM$  d'une structure de variété topologique, avec les cartes  $(TU_i, \phi_i)$  et donc les changements de cartes  $\phi_{i,j} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}$  qui à  $(x,w) \mapsto (\varphi_{ij}(x), d\varphi_{ij}(x)(w))$ .

Montrons que les  $(TU_i, \phi_i)$  forment un atlas de  $C^{p-1}$  sur  $TM$ , d'où la structure de variété  $C^{p-1}$  sur  $TM$ , et que de plus  $\Pi : TM \longrightarrow M$  qui à  $(a,v) \mapsto a$  est  $C^{p-1}$ . Il s'agit de voir que les changements de cartes  $\phi_{ij}$  sont des  $C^{p-1}$ -difféomorphismes. Comme ce sont des homéomorphismes, il suffit de voir que ce sont des difféomorphismes locaux. Or  $J\phi_{ij}(x,w) = \begin{pmatrix} J\varphi_{ij}(x) & 0 \\ * & J\varphi_{ij}(x) \end{pmatrix}$ . Comme les  $\varphi_{ij}$  sont des difféomorphismes,  $J\phi_{ij}(x,w)$  est inversible. Lue dans les cartes,  $\Pi$  est la première projection. ■

### Remarques.

1. Par définition, si  $M$  est une variété différentielle de dimension  $k$ ,  $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^k$ , autrement dit le fibré tangent est un sous-fibré, en un sens à préciser, du fibré trivial, ce qui est intéressant. En particulier, si  $M$  est une variété de dimension  $n$ ,  $TM \subseteq R^{n+k}$ .
2. (*Interprétation de  $\theta_\varphi : T_a M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$* ) Cette application est  $C^p$  car  $\varphi \circ \varphi^{-1} = id : U \longrightarrow U$  et  $\theta_\varphi = d\varphi(a)$ .
3. (*Cette topologie est bien séparée.*) Soient  $(a,v), (b,w) \in TM$ ,  $(a,v) \neq (b,w)$ . Si  $a = b$ ,  $v \neq w$ , si pour  $i$  fixé,  $a \in U_i$ ,  $\theta_{\varphi_i}(a) \neq \theta_{\varphi_i}(b)$ , d'où des ouverts de  $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$  qui séparent  $\phi_i(a,v)$  et  $\phi_i(b,w)$  et alors  $\phi_i^{-1}$  de ces ouverts séparent. Si  $a \neq b$  mais  $a$  et  $b$  dans un même  $U_i$ , idem. Si  $a \neq b$  dans des  $U_i$  disjoints, c'est vite vu.

### Fait. (*Fonction induite sur le fibré tangent*)

Soit  $f : M \rightarrow N$  une fonction différentiable entre variétés. Elle induit une fonction différentiable :

$$df : TM \rightarrow TN$$

donnée par  $df(x,v) = (f(x), df_x(v))$  pour tous  $x \in M$ ,  $v \in T_x M$ .

**Définition. (*Fibré cotangent*)**

Soit  $M$  une variété différentielle. L'*espace cotangent* de  $M$  en  $m \in M$  est par définition  $(T_m^*M = T_mM)^*$  le dual de l'espace tangent. Le *fibré tangent* est alors la somme disjointe des espaces cotangents sur  $m \in M$ .

**Remarque importante.** Le fibré cotangent est lui aussi muni d'une structure de variété par transport. En effet,  $T_mM^* \simeq T_mM$  en dimension finie par un difféomorphisme bilinéaire.

**3.2.12 Fibration, fibrés vectoriel**

À mi-chemin du faisceau (topologie ensembliste) et du revêtement (topologie algébrique), la géométrie différentielle a la fibration.

**Définition. (*Fibration, base d'une fibration, espace total et fibre type*)**

Soient  $E, B, F$  des variétés différentielles de classe  $C^p$ . Une *fibration (localement triviale)* de *base*  $B$ , *espace total*  $E$  et *fibre de type*  $F$  est la donnée d'un morphisme surjectif  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^p$  tel que pour tout  $b \in B$ , il existe un ouvert  $U = U_b \ni b$ , parfois dit *trivialisant*, tel qu'il y a un  $C^p$ -difféomorphisme  $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F, \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ U & & \end{array}$$

soit  $pr_1 \circ \phi = p$ , autrement dit,  $p$  coïncide avec la première coordonnée de  $\phi$ . On dit donc aussi que  $p$  est une application *localement triviale*. On note  $p : E \xrightarrow{F} B$ . Remarquons que  $p$  est une application ouverte.

**Remarques.**

1. Pour tout  $b \in B$ , la *fibre*  $F_b := p^{-1}(b)$  (qui parfois partage son nom, avec malheur, avec la fibre type) est difféomorphe à  $F$ . En effet, immédiatement,  $\phi|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \simeq \{b\} \times F \simeq F$  (par un difféomorphisme).
2. Autrement dit, pour tout  $e \in E$ ,  $p(e) = pr_1(\phi(e))$  et  $e \in p^{-1}(b) \iff \phi(e) \in pr_1^{-1}(b) \simeq F$ .
3. Remarquons que l'on peut parfois définir la fibration avec une fibre type variant selon l'ouvert trivialisant. Dans ce cas, la remarque précédente vaut (avec  $F = F(b)$ ), et l'on a :  $F(b) \simeq F(b')$  au sens des difféomorphismes dès que  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ . En effet, le type d'homéomorphisme, et en particulier le cardinal, des fibres est localement constant sur la base.
4. L'application  $p$  est toujours une submersion. En effet, le fait d'être une submersion est une propriété locale, disons en  $x$ ; restreignons  $p$  au-dessus d'un ouvert trivialisant

contenant  $b = p(x)$ . Or, en notant  $\psi(x) = (b, u)$ , le foncteur tangent transforme le diagramme définitionnel en :

$$\begin{array}{ccc} T_x p^{-1}(U) & \xrightarrow{T_x \psi} & T_b U \times T_u F \\ T_x p \downarrow & & \swarrow T_{(b,u)} pr_1 \\ T_b U & & \end{array}$$

dont  $T_x p$  est surjective.

5. (*Les revêtements sont les fibrations à fibres discrètes.*) En effet, soit  $\pi : E \longrightarrow B$  un revêtement. Pour tout  $b \in B$ ,  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \pi^{-1}(b)} V_\alpha$  tel que  $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \simeq U_b$  et donc  $\pi^{-1}(b) = F$  a la topologie discrète. Ainsi  $\phi : \pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  par  $x \in V_a \mapsto (\pi|_{V_\alpha}, \alpha)$ . Réciproquement, si l'on a  $E \longrightarrow B \supseteq U_b \ni b$  et  $\pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$  via  $\phi$ ,  $F$  discret, on peut supposer  $U_b$  connexe par la connexité locale des variétés topologiques. Ainsi  $\pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  par  $\phi$  de sorte que  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{f \in F} \pi^{-1}(U_b \times \{f\})$  et  $\pi|_{\pi^{-1}(U_b \times \{f\})} : \pi^{-1}(U_b \times \{f\}) \simeq U_b$ .

### Définition. (*Morphisme de fibrations*)

Soient  $(E, B, F)$  et  $(E', B, F')$  des fibrations de base  $B$ . Un *morphisme de fibrations* (de base  $B$ ) est une application  $C^p$  :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \longrightarrow & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

telle que  $p' \circ f = p$ . Ainsi, pour tout  $b \in B$ ,  $f$  envoie  $p^{-1}(b)$  dans  $p'^{-1}(b)$ .

Si de plus  $f$  est un difféomorphisme,  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et l'on dit que  $f$  est un *isomorphisme de fibrations*.

### Exemples. (*Fibrations*)

1. (*Fibration triviale*) Soient  $B, F$  deux variétés et  $E = B \times F$ . Alors pour  $p = pr_1 : E \longrightarrow B$ , pour tout  $b \in B$ ,  $pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$ .

**Par définition, une fibration quelconque est localement isomorphe à une fibration triviale.**

2. L'application  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est une fibration de fibre de type  $\mathbb{R}^\times$ . En effet, on a introduit les ouverts  $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  avec les  $U_i = p(V_i)$  formant un atlas.

$$\begin{array}{ccccc} V_i = p^{-1}(U_i) : (v_1, \dots, v_{n+1}) = \underline{v} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & U_i \times \mathbb{R}^k : (p(\underline{v}), v_i) & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & U_i : [(v_1, \dots, v_{n+1})] = [(\frac{v_1}{v_i}, \dots, 1, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_i})] & & & \end{array}$$

3. L'application  $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$  qui à  $t \mapsto e^{it}$  est une fibration de type  $2\pi\mathbb{Z}$ . On constate l'analogie avec la théorie des revêtements topologiques (*que nous explorerons ci-après*).

### Définition. (*Fibré vectoriel*)

Un *fibré vectoriel* de classe  $C^p$  est une fibration  $(E, B, F)$  de classe  $C^p$  telle que  $F$  est un espace vectoriel, les fibres  $p^{-1}(b)$  sont des espaces vectoriels et les difféomorphismes  $\phi$  de trivialisation locale

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F, \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ U & & \end{array}$$

induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels entre les  $p^{-1}(b)$  et  $F$ .

Par définition, le *rang* du fibré vectoriel est la dimension de  $F$ .

### Exemples. (*Fibrés vectoriels*)

1. (*Fibré trivial*) Donné par  $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ .
2. (*Fibré tangent*) Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^p$ . Alors  $TM \longrightarrow M$  est un fibré vectoriel  $C^{p-1}$ , de rang  $\dim(M)$ .

En effet, on considère l'atlas de  $TM$  construit à partir d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \\ U_i & & \end{array}$$

où l'on prend  $(\varphi_i^{-1} \times id) \circ \varphi_i$ .

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{R}^k \\ \searrow p & & \swarrow pr_1 \\ U_i & & \end{array}$$

3. Soit  $G = GL_n(\mathbb{R})$  ou  $SL_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $TG$  est trivialisable :  $TG \longrightarrow G \times T_{id}G$  grâce à  $(g, v) \mapsto (g, g^{-1}v)$ .

### Définition. (*Fibré trivialisable*)

Un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe à un fibré trivial.

### Définition. (*Variété parallélisable*)

Une variété différentielle est *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable.

On introduit une notion cruciale.

**Définition. (*Section d'une fibration*)**

Soit  $(E, B, F)$  une fibration selon la définition précédente. Une *section* est une application  $s : B \rightarrow E$  de classe  $C^p$  telle que  $p \circ s = id_B$ , autrement dit, c'est une section différentielle de la fibration.

Heuristiquement, il s'agit de choisir un élément dans la fibre de façon  $C^p$ .

**Exemple. (*Section d'une fibration triviale*)**

Pour une fibration triviale,  $s(b) = (b, f)$  où  $f \in F$  est quelconque ; on obtient  $B \rightarrow B \times F$ .

**Exemple. (*Le fibré vectoriel tautologique sur l'espace projectif*)**

Soit  $E = \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in [x]\}$  et  $\Pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la restriction de la première projection. Alors  $E$  est une sous-variété de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\Pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}$ .

On considère l'atlas  $(U_i, \phi_i)$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  habituel, d'où un atlas  $U_i \times \mathbb{R}^{n+1}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  donnée par les  $\phi_i \times id$ . On veut voir que  $(\phi_i \times id)(U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  est une sous-variété. Prenons  $[y] = [y_1, \dots, y_{n+1}] \in U_i$ , avec  $y_i \neq 0$ . Alors  $\phi_i([y]) = (\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$  sans le  $i$ -ième terme. Alors  $(\phi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) = \{(z, v), v_k = v_i z_k, k \leq i + 1, v_k = v_i z_{k-1}, k \geq i + 1\}$  avec  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ . C'est donné par  $n$  équations, *i.e.* par une application  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Comme les différentielles de ces  $n$  équations sont linéairement indépendantes,  $F$  est une submersion et l'on a donc une sous-variété. Ainsi  $E$  est une variété et  $\dim(E) = n + 1$ , avec  $\Pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $[x]$ ,  $\Pi^{-1}([x]) = \mathbb{R}x$  une droite vectorielle. On obtient une trivialisation locale sur  $\Pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}$  donnée sur  $U_i \times \mathbb{R}$  par  $[(u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_{n+1})], t) \mapsto ([u], (tu_1, \dots, t, \dots, tu_{n+1}))$ .

**Exercice 10 (Fibré normal)**

Si  $M$  est une variété différentielle, on appelle *espace normal* à  $M$  en  $m \in M$  l'espace  $N_m M := (T_m M)^\perp$ .

1. Démontrer que si  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  avec  $n \in \mathbb{N}$  donnée par  $f^{-1}(0)$  où  $f = (f_1, \dots, f_{n-p}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  est une submersion, alors  $N_m M = \text{Vect}(\nabla f_1(m), \dots, \nabla f_{n-p}(m))$ .
2. Démontrer que le *fibré normal*  $NM := \bigsqcup_{m \in M} \{m\} \times N_m M$  est une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^{k-1}$ .
3. Démontrer que  $p : NM \rightarrow M, p(m, v) = m$  est un fibré vectoriel de rang  $n - p$  sur  $M$ .
4. Montrer que le fibré normal à la sphère unité est trivialisable.

**Exercice 11 (Fibré conormal)**

Le fibré conormal d'une variété différentielle  $M$  est la réunion disjointe des espaces duals de ses espaces normaux en chaque point. Il est muni, comme d'habitude, d'une structure différentielle par transport. Donner la dimension et la régularité a priori du fibré conormal.

### 3.2.13 Quelques constructions de variétés différentielles : actions de groupe et revêtements

Soit  $M$  une variété topologique et différentielle,  $G$  une groupe agissant sur  $M$  par homéomorphisme ou difféomorphisme,  $G$  muni de la topologie discrète. On considère les orbites  $G \cdot m = \{g \cdot m, g \in G\}$  pour  $m \in M$  et  $M/G$  l'ensemble des orbites. On dispose d'une projection  $p : M \longrightarrow M/G$ ; on munit de  $M/G$  de la topologie quotient au sens où  $Y$  est un ouvert de  $M/G$  si et seulement si  $p^{-1}(Y)$  est un ouvert de  $M$ . Dans ce cas,  $f : M/G \longrightarrow X$  un espace topologique est continue si et seulement si  $f \circ p : M \longrightarrow X$  est continue. Notons qu'ici,  $p$  est une application ouverte. En effet,  $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$  est ouvert par action par homéomorphismes.

Mentionnons :

**Propriété. (Dimension d'une variété de revêtement)**

Soit  $E \rightarrow B$  un revêtement entre deux variétés topologiques. Alors  $\dim(E) = \dim(B)$ .

▷ Il suffit d'appliquer l'invariance du domaine à des sous-ouverts d'ouverts trivialisants bien choisis. ■

**Propriété. (Dimension d'une variété de revêtement)**

Soit  $E \rightarrow B$  un revêtement entre deux variétés topologiques. Alors  $\dim(E) = \dim(B)$ .

▷ Il suffit d'appliquer l'invariance du domaine à des sous-ouverts d'ouverts trivialisants bien choisis. ■

Dans toute la suite, les espaces topologiques considérés seront séparés, localement compacts (tout point admet une base de voisinage compact ou, ce qui est équivalent, admet un voisinage relativement compact).

**Définition. (Action propre)**

Supposons  $M$  localement compact. L'action de  $G$  sur  $M$  est *propre* si pour tous  $K, L$  compacts de  $M$ , il n'y a qu'un nombre fini de  $g \in G$  tels que  $g \cdot K \cap L \neq \emptyset$ .

On rappelle qu'une action est libre, ou sans point fixe, si elle agit sans point fixe autre que le neutre.

### Propriété. (*Transmission de la locale compacité aux orbites*)

Soit  $M$  un espace topologique séparé et localement compact, où  $G$  agit proprement. Alors  $M/G$  est séparé et localement compact.

On rappelle la preuve.

#### Preuve.

▷ On considère  $p : M \longrightarrow M/G$ . Montrons que  $M/G$  est séparé. Soient  $\alpha \neq \beta$  dans  $M/G$ . Soient  $a, b \in M$  avec  $p(a) = \alpha$  et  $p(b) = \beta$ ,  $a \neq b$ .  $M$  est séparé, soient  $U, V$  deux voisinages compacts de  $a, b$  les séparant. Il n'y a qu'un nombre fini de  $g \in G$  tels que  $gV \cap U \neq \emptyset$ . Soient  $g_1, \dots, g_p$  ces éléments. Alors  $g_1V, \dots, g_pV$  sont des voisinages de  $g_i b \neq a$ . Il existe  $V_i$  un voisinage compact de  $g_i b$ ,  $U_i$  idem de  $a$  tels que  $V_i \cap U_i = \emptyset$ . Soit  $U' = U \cap U_1 \cap \dots \cap U_p$  voisinage de  $a$ ;  $V' = V \cap g_1^{-1}V_1 \cap \dots \cap g_p^{-1}V_p$  voisinage de  $b$ . On a : pour tous  $g, g' \in G$ ,  $gU' \cap g'V' = \emptyset$ , d'où  $p(U') \cap p(V') = \emptyset$ . Montrons que  $M/G$  est localement compact. Soit  $\alpha \in M/G$ , et  $a \in M$  tel que  $p(a) = \alpha$ . Soit  $U$  un voisinage compact de  $a$ . Alors  $p(U)$  est compact et un voisinage de  $\alpha$ , car  $p$  est ouverte. ■

De plus :

### Proposition. (*Structure de variété topologique donnée par une action propre*)

Soit  $M$  un espace topologique séparé et localement compact, où  $G$  agit proprement et librement. Alors tout point de  $M$  possède un voisinage  $U$  tel que les  $g \cdot U$  sont deux à deux disjoints.

On introduit la notion de revêtement en topologie différentielle. Elle est semblable à celle de la topologie.

### Définition. (*Revêtement différentiel*)

Soient  $E, B$  des variétés de classe  $C^p$ . Soit  $p : E \longrightarrow B$  une application surjective et de classe  $C^p$ . On dit que  $(E, B, p)$  est un revêtement si pour tout  $b \in B$ , il y a un ouvert *trivialisant*  $U \ni b$  tel que la *fibre*  $p^{-1}(U)$  est une réunion d'ouverts  $V_i, i \in I$ , les *feuilles*, deux à deux disjoints, et *bien revêtus*, soit tels que  $p_{V_i} : V_i \longrightarrow U$  est un  $C^p$ -difféomorphisme. En particulier,  $p$  est ouverte.

*Remarque.* Un revêtement est toujours un difféomorphisme local. La réciproque est fausse. Par contre, un difféomorphisme global est un revêtement, à un seul feuillet.

**Exemples. (*Revêtements différentiels*)**

1. (*Revêtement trivial*) Soit  $B$  un variété et  $F$  un ensemble discret. Soit  $pr_1 : B \times F \longrightarrow B$ . Localement, on est dans cette situation avec  $F = I$  :

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\simeq U \times I \\ V_i &\longmapsto U \times \{i\} \\ x &\longmapsto (p(x), i). \end{aligned}$$

2. Pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$  est un revêtement différentiel à  $n$  feuillets.
3. La projection canonique  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  fournit un revêtement à deux feuillets pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme on va le voir.
4. De même, la projection canonique  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par  $\mathbb{Z}^2$ . Plus généralement, la projection canonique  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par  $\mathbb{Z}^n$ .
5. Si  $K$  est la bouteille de Klein, on a un revêtement  $\mathbb{T}^2 \rightarrow K$  à deux feuillets.
6. On en déduit un revêtement  $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$  à fibre dénombrable.
7. L'application  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2i\pi t}$  est un revêtement à fibres dénombrables.
8. L'application exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^z$  définit un revêtement holomorphe. Chaque fibre ici est infinie dénombrable :  $\pi^{-1}(p(x)) = x + 2i\pi\mathbb{Z}$ .

On rappelle :

**Théorème. (*Revêtement par une action proprement libre*)**

Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact  $M$ . Alors  $p : M \longrightarrow M/G$  est un revêtement (topologique).

Nous avons maintenant :

**Théorème. (*Théorème de la variété quotient*)**

Soit  $M$  un variété de classe  $C^p$  et  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur  $M$  localement compacte. Alors il y a une unique structure de variété sur  $M/G$  tel que  $p : M \longrightarrow M/G$  est un revêtement de classe  $C^p$ .

▷ Pour la version topologique, on utilise un voisinage  $V$  donné par la proposition précédente de  $a \in p^{-1}(\alpha)$  pour  $\alpha \in M/G$ . Alors  $U = p(V)$  est un ouvert de  $M/G$ . Alors  $p^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$  et  $V_g = g \cdot V$ . On a bien  $p_g : g \cdot V \longrightarrow U$  un homéomorphisme. Traitons le cas qui nous intéresse où  $M$  est un variété. Il faut munir  $M/G$  d'un atlas de cartes  $C^p$ -compatibles. Si on a un ouvert  $U \subseteq M/G$ ,

montrons que  $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$ ,  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  un difféomorphisme avec  $(p|_{V_i})^{-1} : U \rightarrow V_i$ . Pour montrer cela, on a deux outils : les cartes locales et les trivialisations locales. On part d'un atlas  $(W_i, \xi_i)$  de  $M$ . On munit  $M/G$  d'un atlas ainsi : pour  $\alpha \in M/G$ ,  $U$  ouvert de  $M/G$  avec  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$  et quitte à restreindre, on peut supposer  $V_i$  domaine de carte.

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\phi_i} & \mathbb{R}^k \\ p|_{V_i} \uparrow \downarrow & & \\ U & & \end{array}$$

$\phi_U : \phi_i \circ (p|_{V_i})^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  un homéomorphisme sur son image (on a une variété topologique). On regarde les changements de carte  $\phi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  définie par  $\phi_U = \phi \circ (p|_V)^{-1}$  et  $\phi_{U'} : U' \rightarrow \mathbb{R}^k$  définie par  $\phi_{U'} = \phi' \circ (p|_{V'})^{-1}$  sur  $\phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$  : c'est  $\phi' \circ \phi^{-1} = \phi' \circ [p|_{V'}^{-1} \circ p|_V] \circ \phi^{-1}$ . Tout revient à voir que les  $(p|_{V'})^{-1} \circ (p|_V) : V \rightarrow V'$  sont  $C^p$  au-dessus de  $U \cap U'$ . On prend  $V_1 \subseteq V$ ,  $p(V_1) = U \cap U'$ ,  $V_2 \subseteq V'$ ,  $p(V_2) = U \cap U'$ . Soit  $f = (p|_{U'})^{-1} \circ (p|_{V_1}) : V_1 \rightarrow V_2$ . C'est l'application qui à tout  $m \in V_1$  associe l'unique élément de  $V_2$  qui est dans son orbite, soit  $f(m) = h.m$  où  $h$  est un unique élément de  $G$  vérifiant cette relation.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\quad} & V_2 \\ \searrow p|_{V_1} & & \swarrow p|_{V_2} \\ & U \cap U' & \end{array}$$

Les  $k.V_2$ ,  $k \in G$  sont deux à deux disjoints donc  $f$  envoie un voisinage de  $m$  dans ce même  $V_2$  et pas dans  $k.V_2$ ,  $k \neq e$  et sur ce voisinage  $W : \forall x \in W \quad f(x) = h.x$ . ■

#### Exemples. (*D'autres revêtements différentiels*)

1. Pour  $M = S^n$  et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agissant par  $x \mapsto -x$ , donc librement. Alors  $M/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Alors  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un revêtement (*à deux feuillets*) de classe  $C^\infty$ .

#### 3.2.14 Fonctions plateaux et partition de l'unité

##### Définition. (*Support d'une fonction sur une variété*)

Soient  $M$  une variété et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^p$ . Le *support de  $f$*  est l'adhérence de  $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ .

##### Définition. (*Fonction plateau sur une variété*)

Soit  $M$  une variété de classe  $C^\infty$ . Une *fonction plateau* sur  $M$  est une fonction  $C^\infty$   $f : M \rightarrow [0,1]$  tel qu'il existe  $U, V$  ouverts de  $M$  relativement compacts avec  $\overline{V} \subseteq U$ ,  $f|_V = 1$  et  $\text{supp}(f) \subseteq U$ .

### Heuristique

Les fonctions plateaux sont utiles pour prolonger à  $M$  certaines fonctions à support dans un ouvert.

### Proposition. (*Prolongement conjoint de fonctions sur des ouverts*)

Soient  $M$  une variété,  $U, V$  des ouverts de  $M$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  qui coïncident sur  $U \cap V$ . Alors elles se prolongent en une fonction  $C^\infty$  sur  $U \cup V$ .

### Exemple

Typiquement, si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est à support dans un ouvert  $V \subseteq U$ , sur  $W = \text{supp}(f)^c$ ,  $f$  est nulle, donc on peut la prolonger à  $M$ .

### Théorème. (*Existence de fonctions plateaux*)

1. *(Cas de  $\mathbb{R}^n$ )* Soient  $B_1 \subseteq B_2$  deux boules ouvertes de  $\mathbb{R}^n$ , de même centre et de rayons respectifs  $r > R$ . Alors il y a une fonction plateau  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$  telle que  $\text{supp}(f) \subseteq B_2$  et  $f|_{B_1} = 1$ .
2. *(Cas des variétés)* Soit  $M$  une variété,  $U$  un ouvert de  $M$  et  $a \in U$ . Alors il existe un ouvert  $V$  d'adhérence compacte  $\overline{V} \subseteq U$  avec  $a \in V$  et une fonction plateau  $f$  telle que  $f|_V = 1$  et  $\text{supp}(f) \subseteq U$ .
3. *(Cas des variétés, cas compact)* Soit  $M$  une variété,  $K \subseteq M$  compact,  $U$  ouvert avec  $K \subseteq U$ . Alors il existe une fonction plateau  $f$  sur  $M$  telle que  $\text{supp}(f) \subseteq U$  et  $f|_K = 1$ .

▷ Pour le premier point

- a) La fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x})$  pour  $x > 0$  et 0 sinon est de classe  $C^\infty$ . On le sait depuis les petites classes.
- b) Soit  $a > 0$ . Alors  $g(x) = \exp(\frac{-1}{a^2-x^2})$  pour  $|x| < a$ , 0 sinon est  $C^\infty$ . Elle est à support compact. La primitive  $h_a(t) = \int_{-\infty}^t g_a(x)dx / \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx$  est dans  $[0,1]$ , nulle pour  $t \leq -a$  et égale à 1 pour  $t \geq a$ . Pour  $b > a$ ,  $h_a(b-t) \in [0,1]$ ,  $b-t \leq -a$ , i.e.  $t \geq a+b$  nulle, et  $b-t \geq a$ , i.e.  $t \leq b-a$  qui vaut 1.
- c) On pose, pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\phi(x) = h_a(b - \|x\|^2)$  avec  $r_1^2 = b - a$  et  $r_2^2 = b + a$ .

Généralisons maintenant aux variétés. Soit  $(W, \varphi)$  une carte de  $M$  en  $a$ ,  $W \subseteq U$ ,  $\varphi(a) = 0$ . On a  $\varphi(W)$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on peut donc trouver deux boules  $B_1 \subseteq B_2$  centrées en 0 et  $f$  une fonction plateau telle que  $\text{supp}(f) \subseteq B_2$  avec  $f|_{B_1} = 1$ . On considère alors  $f \circ \varphi : W \rightarrow [0,1]$ .  $V = \varphi^{-1}(B_1) \subseteq \varphi^{-1}(B_2) = U$  et  $a \in \overline{V} \subseteq U$ . C'est une fonction plateau, qui n'est définie que sur  $W$ . On peut la prolonger en une fonction  $C^\infty$  sur  $M$  grâce à la fonction nulle et le tour est joué.

Soit  $K$  un compact. Pour tout  $a \in K$ , on prend une carte en  $a$ , d'où comme ci-dessus des voisinages  $V_a \subseteq U_a$  avec  $\overline{V_a} \subseteq U_a$  et des fonctions plateaux  $f_a$  telles que  $\text{supp}(f_a) \subseteq U_a$  et  $f_a|_{V_a} = 1$ . Du recouvrement ouvert  $(V_a)_{a \in K}$ , on extrait un recouvrement fini d'où  $a_1, \dots, a_p$  avec  $V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_p} = K$  et  $f_{a_i}$

vaut 1 sur  $a_i$ . L'idée dès lors et de faire l'analogie avec les fonctions caractéristiques. On écrit  $K = \bigcup V_{a_i}$ , puis  $K^c = \bigcap V_{a_i}^c$  et  $\chi_{K^c} = \prod_{i=1}^p \chi_{V_{a_i}^c}$ , puis  $1 - \chi_K = \prod(1 - \chi_{V_{a_i}})$ . On pose  $f = 1 - \prod_{i=1}^p (1 - f_{a_i})$  qui est  $C^\infty$  à valeurs dans  $[0,1]$ . Si  $x \notin \bigcup U_{a_i}$ ,  $f(a_i)(x) = 0$  pour tout  $i$  d'où  $f(x) = 0$ . Ainsi  $\text{supp}(f) \subseteq \overline{\bigcup U_{a_i}}$  d'où qu'il est compact. Si  $x \in K$ , il existe  $i$ ,  $f_{a_i}(x) = 1$  et  $f(x) = 1$ . ■

### Définition. (*Partition de l'unité*)

Soit  $M$  une variété différentielle et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement est la donnée de fonctions  $C^\infty p_i : M \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\text{supp}(p_i) \subseteq U_i$  et  $\sum p_i = 1$ .

### Heuristique

Ces notions permettent généralement le passage du local au global.

### Proposition. (*Existence de partitions de l'unité dans le cas compact*)

Si  $M$  est compacte et  $I$  est fini, alors il existe une partition de l'unité subordonnée.

▷ On prend, grâce au lemme de la partie suivante, un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in I}$  avec  $\overline{V_i} \subseteq U_i$  et des fonctions plateaux  $f_i$  avec  $\text{supp}(f_i) \subseteq U_i$  et  $f_i|_{V_i} = 1$ . On a, si  $f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x)$ ,  $\forall i \quad f(x) > 0$ , car il existe  $i_0$  tel que  $x \in V_{i_0}$  et alors  $f_{i_0}(x) = 1$ . On prend donc  $p_i(x) = \frac{f_i(x)}{f(x)}$ . ■

### 3.2.15 Plongement d'une variété compacte dans un espace euclidien

Le problème topologique correspondant est simple.

#### Lemme

Toute variété topologique compacte se plonge dans un espace euclidien.

▷ Soit  $M$  une variété compacte. Soit  $n = \dim(M)$ . Soient  $m$  boules fermées dont les intérieurs recouvrent  $M$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $M = \bigcup_{i=1}^m D_i$ ,  $D_i$  les boules fermées correspondantes. Pour tout  $i$ , on considère  $f_i : M \rightarrow S^n$  où l'on envoie le complémentaire de  $\overset{\circ}{D}_i$  sur un point. On obtient une application  $f : M \rightarrow (S^n)^m \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  en posant  $N = nm$  qui est injective et un plongement en tant que composée de deux plongements, par compacité de  $M$ . ■

En termes différentiels, c'est plus subtil.

#### Lemme. (*Recouvrement d'un compact par des fermés sur une variété*)

Soit  $M$  une variété compacte,  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert fini de  $M$ . Alors il y a un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in I}$  avec le même ensemble d'indices  $I$  avec  $\overline{V_i} \subseteq U_i$ .

**Théorème. (*Théorème de plongement des variétés compactes*)**

Toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien.

▷ Soit  $M$  une variété différentielle compacte de dimension  $k$ . On veut trouver un entier naturel  $n$  tel que  $M$  se plonge dans  $\mathbb{R}^n$ . On a vu que sur une variété compacte, un plongement est exactement une immersion injective. On considère un atlas de  $M$ , dont on extrait un sous-recouvrement fini  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ,  $I = [\![1, p]\!]$  fini. On veut prolonger les  $\varphi_i$  à  $M$ . On considère les  $V_i$  donnés par le lemme et pour  $\overline{V}_i \subseteq U_i$ , on prend une fonction plateau  $f_i$  avec  $\text{supp}(f_i) \subseteq U_i$  et  $f_i|_{V_i} = 1$ . Alors, pour tout  $i$ , la fonction  $\psi = f_i \varphi_i$  se prolonger en une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ . Soit  $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{np+p}$ ,  $x \mapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x), f_1(x), \dots, f_p(x))$ . La fonction  $F$  est  $C^\infty$ , car ses composantes le sont. Montrons l'injectivité de  $F$ . Soient  $x, y \in M$  tels que  $F(x) = F(y)$ . Comme les  $V_i$  forment un recouvrement de  $M$ , il existe  $i$  tel que  $x \in V_i$ . Alors  $f_i(x) = 1 = f_i(y)$ . On a aussi  $\psi_i(x) = \psi_i(y)$ . Ainsi  $\varphi_i(x)f_i(x) = \varphi_i(y)f_i(y)$ , soit  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ , mais  $\varphi_i$  est bijective, d'où  $x = y$ . Il faut maintenant que je m'assure que  $F$  est une immersion. Il faut donc vérifier qu'en tout point, son application linéaire tangente est une application linéaire injective. Par composition,  $T_x f = (T_x \psi_1, \dots, T_x \psi_p, \dots, T_x f_1, \dots, T_x f_p)$ . Si  $x \in V_i$ , alors sur  $V_i$ ,  $\psi_x = \varphi_i$ ; sur  $V_i$ ,  $T_x \psi_i = T_x \varphi_i$  et  $T_x \varphi_i : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme, d'où l'injectivité de  $T_x F$ . ■

Généraliser le théorème de plongement

Hassler WHITNEY a montré, et ce n'est pas impossible de le refaire, que toute variété compacte de dimension  $n$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Cette valeur  $2n$  peut être diminuée bien sûr, car  $S^n$  se plonge toujours dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , mais la constante est optimale en ce que dans le cas de l'espace projectif, la constante est optimale, et un exemple suffit.

John NASH, défié par un camarade de Princeton, a démontré en 1956, après deux années de travail, que toute variété riemannienne peut être plongée de manière isométrique dans un espace euclidien.

### 3.3 Champs de vecteurs

DANS toute cette section, les variétés différentielles considérées seront supposées  $C^\infty$ . On prend  $M$  une variété et  $X$  un champ de vecteurs (que l'on peut penser comme un opérateur différentiel d'ordre 1), soit  $X : M \longrightarrow TM$  de classe  $C^\infty$  tel que  $p \circ X(m) = m$ . On verra comment, étant donné  $X$ , on peut trouver des courbes de classe  $C^\infty$   $c : I \longrightarrow M$  telles que pour tout  $t \in I$ ,  $c'(t) = X(c(t)) \in T_{c(t)}M$ .

### 3.3.1 Définition des champs de vecteurs

#### Définition. (*Champ de vecteurs*)

Soit  $M$  une variété et  $TM$  son fibré tangent. Une section lisse de  $(TM, M)$  est appelée *champ de vecteurs* (sur  $M$ ).

Autrement dit, un champ de vecteurs d'une variété différentielle  $M$  est une fonction différentiable associant à chaque point  $x$  de la variété  $M$  un vecteur tangent en ce point :  $V : M \rightarrow TM$  qui à  $x \mapsto (x, V_x)$  où  $V_x \in T_x M$  l'espace tangent à  $M$  en  $x$ , c'est-à-dire, il existe une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  tracée sur  $M$  avec  $\gamma(0) = x$  et  $C^1$  au sens des variétés différentiables ; on prend alors  $\tilde{V}_x$  sa classe modulo l'égalité de la dérivée en zéro de l'application lue dans n'importe quelle carte.

#### Fait. (*Donnée d'un champ de vecteurs*)

Si  $M$  est une variété et  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas différentiel sur  $M$ , se donner un champ de vecteurs sur  $M$  revient à se donner  $(X_i)_{i \in I}$  avec chaque  $X_i \in C^\infty(U_i, \mathbb{R}^n)$  tel que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , pour tout  $x$  dans cette intersection,  $X_i(x) = d_{\varphi_j(x)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(X_j(x))$ .

*Remarque.* L'ensemble des champs de vecteurs  $\Gamma(TM)$  est un  $C^\infty(M)$ -module.

#### Exemples. (*Champs de vecteurs*)

1. Un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est donné d'un vecteur en tout point de  $U$  par  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui soit une application différentiable.
2. Si  $n = 2m+1$  est impaire, en notant  $v = (s_0, t_0, \dots, s_m, t_m)$ ,  $X(v) = (-t_0, s_0, \dots, -t_m, s_m)$  est un champ de vecteurs tangents à  $S^n$  qui est  $C^\infty$ , car polynomial.
3. Si  $m \geq 0$ ,  $X(x) = \frac{m}{r}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})$  où  $r = \|x\|$  est un champ de vecteurs sur  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , dit *champ de gravité* d'un objet de masse  $m$ .

#### Exemple fondamental. (*Champ de vecteurs d'un fibré trivialisable*)

Soit  $(E, B, F)$  un fibré vectoriel trivialisable. Fixons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ . Posons  $s_i : B \rightarrow E$  qui à  $b \mapsto \phi^{-1}(b, e_i)$ . C'est une section, et l'on a pour tout  $b$ ,  $(s_1(b), \dots, s_n(b))$  qui est une base de  $p^{-1}(b)$ .

#### Proposition

Soit  $(E, B, F)$  un fibré vectoriel,  $\dim(F) = n$ , tel qu'il existe  $n$  sections  $s_1, \dots, s_n$  telles que pour tout  $b$ ,  $(s_1(b), \dots, s_n(b))$  base de  $p^{-1}(b)$ . Alors le fibré est trivialisable.

▷ On construit  $\psi : B \times F \rightarrow E$ . Fixons une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $F$  tel que  $v \in F$ ,  $v = \sum v_i e_i$ . Alors  $\psi : (b, v) \mapsto \sum_{i=1}^n v_i s_i(b)$  est un morphisme de fibrés vectoriels, et un isomorphisme sur les fibres.

Comme  $E$  est fibré, il est localement trivial. Soit  $U$  un ouvert de  $B$ ,  $b \in U$  tel que  $\phi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  avec une section  $s_i : U \rightarrow p^{-1}(U)$ , d'où  $\phi_U \circ s_i : U \rightarrow U \times F$ . Ainsi,  $\phi_U \circ s_i(b) = (b, S_i^U(b))$  où  $S_i^U : U \rightarrow F$ . Or  $(S_1^U(b), \dots, S_n^U(b))$  est une base de  $F$ . Soit  $S^U(b)$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans  $(e_1, \dots, e_n)$ . Les applications  $S^U : U \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  sont  $C^p$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  dans lui-même est  $C^\infty$  donc  $S^U(\cdot)^{-1} : U \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  de classe  $C^p$ , qui à  $b \mapsto S^U(b)^{-1}$  est  $C^p$ . On a  $(id \times S^U(\cdot)^{-1}) \circ \phi_U \circ \psi(b, v) = (b, v)$ , car  $\phi_U \circ \psi(b, v) = (b, \sum v_i S_i^U(b))$ . Ainsi,  $(id \times S^U(\cdot)^{-1}) \circ \phi_U$  est l'inverse de  $\psi$  sur le domaine considéré, donc  $\psi$  est un difféomorphisme local. ■

### 3.3.2 Opérations sur les champs de vecteurs

**Définition.** (*Push-forward d'un champ de vecteurs*)

Soient  $M, N$  deux variétés différentielles. Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme. Soit  $X \in \Gamma(TM)$ . On définit le *push-forward* de  $X$  par  $\varphi_*(X)(y) = d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi(X(\varphi^{-1}(y))) \in \Gamma(TN)$ .

**Définition.** (*Pull-back d'un champ de vecteurs*)

Soient  $M, N$  deux variétés différentielles. Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme. Soit  $Y \in \Gamma(TN)$ . On définit le *pull-back* de  $Y$  par  $\varphi^*(Y)(x) = d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(Y(\varphi(x))) \in \Gamma(TM)$ .

**Remarque importante.** Avec les notations précédentes, les diagrammes pour ces deux constructions sont respectivement

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Diagramme pour le push-forward:} & \\
 & \begin{array}{c}
 \text{Top row: } (\varphi^{-1}(y), X[\varphi^{-1}(y)]) \in T_{\varphi^{-1}(y)}M \xrightarrow{d_{\varphi^{-1}(y)}} T_{y=\varphi(\varphi^{-1}(y))}N \\
 \text{Middle row: } TM \xrightarrow{d\varphi} TN \quad \exists d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi(X(\varphi^{-1}(y)))
 \end{array} & \\
 & \begin{array}{c}
 \text{Bottom row: } M \xrightleftharpoons[\varphi^{-1}]{\varphi} N \quad \exists y
 \end{array} & \\
 & \begin{array}{ccc}
 \varphi^{-1}(y) \in M & \xrightarrow{\pi_M} & \varphi^{-1}(y) \in N \\
 \uparrow & & \downarrow \varphi^{-1} \\
 & \varphi \xrightarrow{\quad} & \\
 & \varphi^{-1} \xleftarrow{\quad} & 
 \end{array} & 
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Diagramme pour le pull-back:} & \\
 & \begin{array}{c}
 \text{Top row: } d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(Y(\varphi(x))) \in T_{\varphi(x)}M \xrightarrow{d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}} T_{x=\varphi^{-1}(\varphi(x))}N \\
 \text{Middle row: } TM \xleftarrow{d\varphi^{-1}} TN \quad \exists (\varphi(x), Y[\varphi(x)])
 \end{array} & \\
 & \begin{array}{c}
 \text{Bottom row: } M \xrightleftharpoons[\varphi^{-1}]{\varphi} N \quad \exists \varphi(x)
 \end{array} & \\
 & \begin{array}{ccc}
 x \in M & \xrightarrow{\pi_M} & \varphi(x) \in N \\
 \uparrow & & \downarrow Y \\
 & \varphi \xleftarrow{\quad} & \\
 & \varphi^{-1} \xrightarrow{\quad} & 
 \end{array} & 
 \end{array}$$

ce qui montre au passage que l'on a bien affaire à des champs de vecteurs. De plus, on pourra retenir que **le pushforward tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et le pullback tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre**.

### 3.3.3 Dérivations sur une variété et description de l'algèbre des dérivations par rapport aux champs

**Définition.** (*Dérivation sur une algèbre*)

Soit  $A$  une algèbre (associative, unitaire), typiquement,  $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ . Une *dérivation* sur  $A$  est une application linéaire  $D : A \rightarrow A$  tel que pour tous  $a, b \in A$ ,  $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ . Canoniquement, pour  $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ , on parle de *dérivation sur  $M$* .

On note  $\text{Der}(A)$  l'ensemble des dérivations de  $A$ .

**Remarques.**

1.  $D(1) = 0$ , car  $D(1^2) = D(1) = 1.D(1) + D(1).1 = 2D(1)$ .
2. Si  $A = \mathcal{C}^\infty(M)$  comme suggéré, on en déduit  $D$  (application constante) = 0.

**Proposition**

$\text{Der}(A)$  est un espace vectoriel.



Par contre, si  $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ , en général,  $D_1 \circ D_2 \notin A$ !

**Proposition.** (*Crochet de dualité de dérivations*)

Si  $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ ,  $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Der}(A)$ .

▷ Simple calcul. ■

**Proposition.** (*Champ de vecteurs et dérivations*)

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  et  $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ . Tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  détermine une dérivation  $D_X$  de  $A$  donnée si  $f \in A$  par

$$D_X(f)(x) = T_x f(X(x)) \in \mathbb{R}$$

(car  $T_x f : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $T_x f$  est l'application linéaire tangente de  $f$ , définie pour tout  $v \in T_x M$  par  $T_x f(v) = \frac{d}{dt} f(c(t))$  où  $c : I \rightarrow M$  avec  $c'(0) = v$ ). On a  $D_X(f) \in A$ .

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(N) & \xrightarrow{g \mapsto g \circ \phi} & C^\infty(M) \\ \phi_*(D) \downarrow & & \downarrow D \\ C^\infty(N) & \xleftarrow[h \mapsto h \circ \phi^{-1}]{} & C^\infty(M) \end{array}$$

▷ On traite d'abord le cas d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Un champ de vecteurs sur  $U$  est donné par une application  $C^\infty X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , car  $TU = U \times \mathbb{R}^n$ . Fixons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $X(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x)e_i$ . Alors pour  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T_x f(X(x)) = df(x)(X(x)) = \text{somme } i = 1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)X_i(x)$ . C'est bien  $C^\infty$ . Ainsi  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  est la dérivation correspondant au champ de vecteurs constant  $x \mapsto e_i$ .

Dans le cas d'une variété  $M$ ,  $C^\infty$  est une notion locale, donc on peut se placer dans un domaine de carte  $(U, \varphi)$ . Soit  $X$  un champ de vecteurs.

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longleftarrow & TU & \simeq & U \times \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \\ x & \longleftarrow & (x, \xi) & \longmapsto & (x, T_x \varphi(\xi)) & \xrightarrow{pr_2} & T_x \varphi(x) \end{array}$$

L'application  $pr_2 \circ \phi \circ X$  est une application  $C^\infty$  par composition, donc  $x \mapsto T_x \varphi(X(x))$  est  $C^\infty$ . Or  $f$  est  $C^\infty$ , sa restriction à  $U$  également, donc on a que l'application lue dans la carte  $(U, \varphi)$  donnée par  $\varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $z \mapsto f \circ \varphi^{-1}(z)$  est  $C^\infty$ . Ainsi,  $T_x f(X(x)) = T_x f \circ T_{\varphi(x)} \varphi^{-1} \circ T_x \varphi(X(x))$ , car  $T_{\varphi(x)} \varphi^{-1} \circ T_x \varphi = x$ . Or le premier terme égale  $T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})$  où  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^\infty$  donc  $z \mapsto T_z(f \circ \varphi^{-1})$  de  $\varphi(U) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est  $C^\infty$ . Le dernier terme est déjà réglé. ■

On voit maintenant que toute dérivation provient d'un champ de vecteurs.

**Théorème. (*Correspondance entre champs de vecteurs et dérivations*)**

L'application  $X \mapsto D_X$  est une application linéaire bijective entre l'espace vectoriel  $\chi(M)$  des champs de vecteurs et celui  $\text{Der}(C^\infty(M))$  des dérivations.

Cette application est clairement linéaire. Montrons la bijectivité. Commençons par le cas d'un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ . L'injectivité vient de ce que, si  $X(x) = \sum X_i(x).e_i$ , si  $D_X = 0$ ,  $X = 0$ . En effet, si  $X \neq 0$ , il existe  $a \in U$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $X_i(a) \neq 0$ , donc  $(D_X f)(a) = \sum_{i=1}^n X_i(a) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  où  $f$  est la restriction à  $U$  de la fonction  $x \mapsto x_i$  la  $i$ -ième coordonnée. Démontrons la surjectivité. Soit  $D$  une dérivation. On cherche  $X \in \chi(U)$  tel que pour tout  $f$ , pour tout  $x$ ,  $D(f)(x) = \sum X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ . Fixons  $x_0 \in U$  convexe. D'après le lemme de Hadamard,  $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})h_i(x)$  avec les  $h_i \in C^\infty(U)$  et même  $h_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ . Soient  $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x \mapsto x_i - x_{0,i}$ , avec donc  $g_i(x_0) = 0$ . Alors  $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(x)$ . Alors  $(Df)(x) = \sum_{i=1}^n [D(g_i)(x)h_i(x) + g_i(x)Dh_i(x)]$ , d'où  $(Df)(x_0) = \sum_{i=1}^n D(g_i)(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ . Ainsi  $Df$  sur  $U$  coïncide avec  $D_X$  où  $X(y) = \sum_{i=1}^n D(g_i)(y)e_i$ . ■

### 3.3.4 Restriction d'une dérivation à un ouvert

**Proposition.** (*Restriction des dérivation*)

Soit  $D$  une dérivation sur  $M$ .

1. Soit  $U$  un ouvert de  $M$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  telles que  $f|_U = g|_U$ . Alors  $D(f)|_U = D(g)|_U$ .
2. Pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , il existe une unique dérivation  $D_U$  sur  $U$  telle que si  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f|_U \in C^\infty(U)$  et alors  $D(f)|_U = D_U(f|_U)$ .

▷ Par soustraction, on se ramène à : si  $f|_U = 0$ ,  $D(f)|_U = 0$ , c'est-à-dire, pour tout  $x \in U$ ,  $D(f)(x) = 0$ . Soit donc  $x \in U$ . Il existe  $V$  un ouvert dont l'adhérence est un compact inclus dans  $U$  et  $x \in V$ , il existe également une fonction plateau  $g$  dont le support est inclus dans  $U$  et valant 1 sur  $V$ . Alors  $fg = 0$  au sens du produit donc  $D(fg) = 0 = D(f)g + fD(g)$  en  $x$ . En particulier, en  $x$ ,  $0 = D(f)(x).g(x) + f(x)D(g)(x) = (Df)(x)$ , car  $f(x) = 0$ .

Soit  $f \in C^\infty(U)$ . Soit  $x \in U$ . Quid de  $D_U(f)(x)$ ? On prend  $V \subseteq U$  et  $g$  une fonction plateau comme ci-dessus. Alors la fonction  $fg$  se prolonge par 0 en une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ . On dispose de  $D(fg) \in C^\infty(M)$ . On pose, pour  $y \in V$ ,  $D_U(f)(y) = D(fg)(y)$ . Ceci ne dépend pas du choix de  $g$  grâce au premier point. Sa valeur en  $x$  ne dépend pas du choix de  $v$ . ■

### 3.3.5 Image par un difféomorphisme d'un champ de vecteurs ou d'une dérivation

Soient  $M, N$  deux variétés. Soit  $\phi : M \longrightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ .  $\phi$  induit un morphisme d'algèbre  $\phi^* : C^\infty(N) \longrightarrow C^\infty(M)$  via  $g \mapsto g \circ \phi$ . Si de plus  $\phi$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme, on a aussi  $(\phi^{-1})^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(N)$ . On les utilise ainsi pour transporter dérivations sur  $M$  en dérivations sur  $N$ .

**Définition.** (*Transport de dérivation*)

Avec les notations précédentes, soit  $D \in \text{Der}(C^\infty(M))$ . Alors  $\phi_*(D)$  donnée par :

$$\phi_*(D)(g) = (\phi^{-1})^* \circ D(\phi^*(g))$$

soit

$$\phi_*(D)(g)(y) = D(g \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$$

est dans  $\text{Der}(C^\infty(N))$ .

*Remarque.* Pour des champs de vecteurs,

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\phi} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

et si  $X \in \chi(M)$ ,  $\phi_*(X) = T\phi(X \circ \varphi^{-1})$ , soit  $\phi_*(X)(y) = T_{\varphi^{-1}(y)}(X(\varphi^{-1}(y)))$ .

Avec les définitions ci-dessus,  $D_{\phi_*(X)} = \varphi_*(D_X)$ .

▷ En effet,  $D_{\phi_*(X)}(g)(y) = T_y g(\phi_*(X)(y)) = T_y g \circ T_{\varphi^{-1}(y)}(X(\varphi^{-1}(y))) = T_{\varphi^{-1}(y)}(g \circ \varphi^{-1})(X(\varphi^{-1}(y)))$  pour  $g \in C^\infty(N)$ . Pour  $\phi_*(D_X)(g)(y) = D_X(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(y)) = T_{\varphi^{-1}(y)}(g \circ \varphi)(X(\varphi^{-1}(y)))$ , d'où l'identité. ■

On peut donc reprendre la preuve du théorème :

### Preuve.

▷ Montrons l'injectivité dans le cas général. Soit  $X \in \chi(M)$  tel que  $D_X = 0$ . Si  $a \in M$  avec  $X(a) \neq 0$ , soit  $(U, \varphi)$  une carte en  $a$ ,  $\varphi(a) = 0$ .  $T_a \varphi(X(a)) \neq 0$  avec  $T_a \varphi : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donc pour au moins l'une des coordonnées,  $T_a \varphi^i(X(a)) = D_x(\varphi^i)(a) \neq 0$ . Ce n'est pas encore une contradiction, car  $\varphi^i$  n'est définie que sur  $U$  et pas sur  $M$  tout entier. Soit  $V \subseteq U$ , avec  $\bar{V}$  compact,  $a \in V$  et  $g$  une fonction plateau à support dans  $V$ . On considère  $g\varphi^i$  qui se prolonge en une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ .  $D_X(g\varphi^i)(a) = D_x(g)(a)\varphi^i(a) + g(a)D_x\varphi^i(a) = D_x\varphi^i(a) \neq 0$ .

Montrons maintenant la surjectivité. Soit  $D$  une dérivation sur  $C^\infty(M)$ . On cherche  $X$  tel que  $D = D_X$ . Soit  $(U_i, \varphi_i)$  des cartes d'un atlas d'où des  $D_{U_i}$ , puis  $\varphi_i(D_{U_i})$  dérivations sur l'ouvert  $\varphi_{i*}(U_i)$  d'où  $X_i \in \chi(\varphi_i(U_i))$  tel que  $D_{X_i} = \varphi_{i*}(D_{U_i})$ , puis  $\varphi_i^{-1}_*(X_i) = Y_i$  champ de vecteur sur  $U_i$ . Question : existe-t-il  $Y \in \chi(M)$  tel que  $Y|_{U_i} = Y_i$ . Il faut vérifier que les  $Y_i$  et  $Y_j$  coïncident sur  $U_i \cap U_j$ . Pour cela,  $\varphi_{i*}(Y_i) = X_i$  sur  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  et  $\varphi_{j*}(Y_j) = X_j$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ . ■

### Proposition. (*Comportement du transport de dérivation par composition*)

Soient  $M, N, P$  trois variétés différentielles. Soient  $\phi : M \rightarrow N$  et  $\psi : N \rightarrow P$  des difféomorphismes. Alors  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ , sur  $\chi(M)$  ou sur  $\text{Der}(M)$ .

▷ On le vérifie bien sur le diagramme, ou pour les courageux, par le calcul. ■

On retiendra en somme le lien fondamental : pour  $X \in \chi(M)$ ,

$$D_{\phi_*(X)} = \phi_*(D_X).$$

### 3.3.6 Constructions de champs de vecteurs

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ . Soit  $X \in \chi(M)$ . On a vu : si  $(U, \varphi)$  est une carte locale, alors l'application lue dans les cartes est un champs de vecteur  $Y$  sur  $U$ ,  $Y = \varphi_*(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} TU & \longrightarrow & \varphi(U) \times \mathbb{R}^k \\ (x, \xi) & \longmapsto & (\varphi(x), T_x \varphi(\xi)) \\ X \swarrow & & \uparrow Y \\ U & & \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k \end{array}$$

Si on a un atlas  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$ , on obtient ainsi des champs de vecteurs  $Y_i = \phi_{i*}(X|_{U_i})$  sur  $\varphi_i(U_i)$  ayant la compatibilité sur  $\phi_i(U_i \cap U_j)$ ,  $Y_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})_*(Y_j)$ .

Inversement :

#### Proposition. (*Recollement de champs de vecteurs*)

Soit  $M$  une variété,  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de  $M$  et pour tout  $i \in I$ ,  $Y_i$  un champ de vecteurs sur l'ouvert  $\varphi_i(U_i)$ . On suppose : si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors sur  $\phi_i(U_i \cap U_j)$ ,  $Y_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})_*(Y_j)$ . Alors il existe un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  tel que  $\phi_{i*}(X|_{U_i}) = Y_i$ .

▷ En effet,  $X_i = \phi_i^{-1}_*(Y_i)$  est un champ de vecteurs sur  $U_i$  et la condition dit exactement que  $X_i|_{U_i \cap U_j} = X_j|_{U_i \cap U_j}$ . ■

### 3.3.7 Crochet de Lie de champs de vecteurs

#### Définition. (*Crochet de Lie de champs de vecteurs*)

Soient  $X, Y \in \chi(M)$ . Soient  $D_X$  et  $D_Y$  les dérivations correspondantes. Le *crochet de Lie de  $X$  et  $Y$* , noté  $[X, Y]$ , est le champ de vecteurs associé à la dérivation  $[D_X, D_Y] = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X : D_{[X, Y]} = [D_X, D_Y]$ .

#### Exemple. (*Crochet de Lie de champs d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$* )

Sur  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$  avec  $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ ,  $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$ ,  $Z = [X, Y] = \sum Z_i e_i$ . On a :

$$Z_j = \sum_{i=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}).$$

En effet,  $D_X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $D_Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $D_X \circ D_Y(g) = D_X \left( \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n X_i \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ . On utilise le théorème de Schwartz pour conclure.

Comme tout crochet de Lie, celui des champs de vecteurs n'est pas associatif, mais vérifie :

#### Propriété. (*Identité de Jacobi pour les champs de vecteurs*)

Soient  $X, Y, Z \in \chi(M)$ . On a :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

▷ La vérification est immédiate en passant par les dérivations ! ■

**Propriété. (*Dualité et crochet de Lie de champs de vecteurs*)**

Soient  $X, Y \in \chi(M)$ ,  $\phi : M \longrightarrow N$  un difféomorphisme. Alors

$$\phi_*( [X, Y] ) = [\phi_*(X), \phi_*(Y)].$$

▷ De même. ■

### 3.3.8 Flot d'un champ de vecteurs

#### 3.3.8.1 Équation différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X$  un champ de vecteurs, i.e.  $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$ . On cherche des courbes  $c : I \longrightarrow U$  de classe  $C^\infty$ , avec  $I$  un intervalle ouvert contenant 0, telles que pour tout  $t \in I$ ,  $c'(t) = X(c(t))$  avec une *condition initiale*  $c(0) = x_0$  où l'on s'est fixé un  $x_0 \in U$ .

**Théorème. (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*)**

Avec  $X$  et  $x_0$  comme ci-dessus, il existe  $I$  intervalle ouvert  $\ni 0$ ,  $c : I \longrightarrow U$   $C^\infty$  tels que  $c'(t) = X(c(t))$  pour tout  $t \in I$ ,  $c(0) = x_0$ . De plus, deux telles solutions coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.

Ceci permet, pour  $x_0 \in U$  donné, de considérer la solution maximale issue de  $x_0$ , i.e.  $c_{x_0} : I_{x_0} \longrightarrow U$  où  $I_{x_0}$  est un intervalle maximal pour les  $c$ ,  $c(0) = x_0$ .

**Théorème. (*Flot d'un champ de vecteurs sur un ouvert*)**

Soit  $\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times U$ . Alors  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times U$  et l'application  $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $(t, x) \mapsto c_x(t)$  est  $C^\infty$ .

**Définition. (*Flot d'un champ de vecteurs sur un ouvert*)**

Cette application  $\phi$  est appelée le *flot de  $X$* .

*Remarque.* Puisque  $\Omega$  est ouvert, pour tout  $x \in U$ , il existe  $\varepsilon > 0$  et  $V$  voisinage ouvert de  $x$  tel que  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \times V \subseteq \Omega$ , i.e.  $\forall y \in V \quad ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subseteq I_y$  intervalle fixe valable pour tous les  $y$  de  $V$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $V_t = \{x \in Y \mid (t, x) \in \Omega\}$  ouvert. Alors  $x \in V_t \iff t \in I_x$  et l'on a une application  $V_t \longrightarrow U$ ,  $x \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = c_x(t)$ .

*Motivation.*

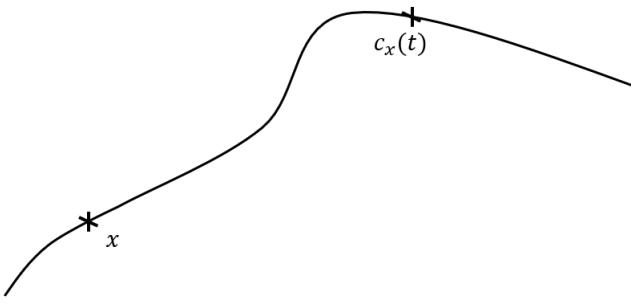


FIGURE 3.3.1 : Théorème de Cauchy-Lipschitz et flot. —  
On réapplique l'existence en  $c_x(t)$ .

### Proposition

- (1) Soit  $x \in U$ ,  $t \in I_x$ . Alors  $I_{\phi_t(x)} = I_{c_x(t)} = I_x - t$  translaté.
- (2)  $t + s \in I_x \iff s \in I_{\phi_t(x)}$  et  $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$ . Ainsi  $\phi_t$  est un difféomorphisme de  $V_t$  sur son image.

▷ Pour le premier point, supposons  $I_x = ]-a, b[$  avec  $a, b > 0$ , éventuellement infinis, par exemple  $0 < t < b$ . Posons  $d(s) = c_x(t + s)$  défini sur  $[-a - t, b - t]$ ,  $d(0) = c_x(t)$ . Alors  $d'(s) = \frac{d}{ds}c_x(t + s) = c'_x(t + s) = X(c_x(t + s)) = X(d(s))$ . Ainsi  $d$  est une solution de l'équation différentielle issue de  $c_x(t) = \phi_t(x)$ . Ceci donne  $I_x - t = ]-a - t, b - t[ \subseteq I_{\phi_t(x)}$ . La solution maximale issue de  $\phi_t(x)$  est  $s \mapsto \phi_s(\phi_t(x))$ . En particulier,  $d(s) = \phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$  pour  $s \in I_x - t$ . En particulier, pour  $s = -t$ ,  $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_0(x) = x$ . Ainsi,  $\phi_t$  est un difféomorphisme sur  $V_t$ . Ensuite, on refait comme ci-dessus avec  $(-t, \phi_t(x))$  au lieu de  $(t, x)$ . On obtient  $I_{\phi_t(x)} + t \subseteq I_x$ . ■

**VOC** Dans la preuve ci-dessus, on dit que  $(\phi_t)$  est un *groupe local à un paramètre*.

### Définition. (*Champ de vecteurs complet*)

On dit que le champ de vecteurs  $X$  est *complet* si pour tout  $x \in U$ ,  $I_x = \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on dispose du difféomorphisme  $\phi_t$  ( $V_t = U \quad \forall t$ ) et  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre de difféomorphismes, *i.e.* on a un morphisme de groupes de  $(\mathbb{R}, +)$  dans Difféo qui à  $t \mapsto \phi_t$ .

On cherche à décrire les opérations inverses.

### Proposition

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$  ouvert contenant  $\{0\} \times U$  et  $h : \Omega \rightarrow U$  de classe  $C^\infty$  tel que  $h(0, x) = x$  et  $h(s, h(t, x)) = h(s + t, x)$  dès que les deux membres sont définis. On pose, pour  $x \in Y$ ,  $X(x) = \frac{d}{dt}h(t, x) \Big|_{t=0}$ . Alors  $X$  est un champ de vecteurs sur  $U$ , appelé *générateur infinitésimal* de  $h$ , et le flot de  $X$  est donné par  $h$ .

▷  $t \mapsto c_x(t) = h(t,x)$  définie pour  $t$  assez petit est une courbe  $C^\infty$  issue de  $x$ . De plus,  $\frac{d}{dt}c_x(t) = \frac{d}{ds}c_x(t+s)|_{s=0} = \frac{d}{ds}h(t+s,x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}h(s, h(t,x))|_{s=0} = X(h(t,x))$ . ■

### 3.3.8.2 Image par un difféomorphisme... encore

**Propriété.** (*Image d'un flot par un difféomorphisme*)

Soient  $U, V$  ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow V$  un difféomorphisme. Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $U$ , d'où l'on tire  $f_*(X)$  un champ de vecteurs sur  $V$ . Soit  $(\varphi_t)_t$  le groupe local à un paramètre associé à  $X$ ,  $(\psi_t)$  le groupe local à un paramètre associé à  $f_*(X)$ . Alors  $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ .

▷ Soit  $y \in V$ . Il faut voir que  $t \mapsto f \circ \varphi_t(f^{-1}(y))$  est la courbe intégrale issue de  $y$  pour le champ  $f_*(X)$ . Or  $\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(f^{-1}(y)))|_{t=0} = T_{\varphi_0(f^{-1}(y))}f(X(f^{-1}(y))) = f_*(X)(y)$ . ■

### 3.3.8.3 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété

**Définition.** (*Équation différentielle sur une variété*)

Soit  $M$  une variété,  $X : M \rightarrow TM$  un champ de vecteurs et  $a \in M$ . Une solution de l'équation différentielle sur  $M$  définie par  $X$  est un couple  $(I, c)$  où  $I$  est un intervalle ouvert,  $0 \in I$  et  $c : I \rightarrow M$  est  $C^\infty$  avec  $c(0) = a$  et  $c'(t) = X(c(t))$ . (Cette équation a bien un sens puisque  $c'(t)$  est dans  $T_{c(t)}M$  par définition de l'application linéaire tangente et le champ de vecteurs est à valeurs dans le fibré tangent.) C'est appelé *courbe intégrale* de  $X$ .

En se plaçant dans des cartes locales, on montre :

**Théorème.** (*Théorème de Cauchy-Lipschitz sur des variétés*)

Soit  $M$  une variété,  $X : M \rightarrow TM$  et  $a \in M$ . Alors :

- (1) Il existe un intervalle ouvert  $I \ni 0$  et une solution  $c : I \rightarrow M$  avec  $c(0) = a$ .
- (2) Si  $c_1 : I_1 \rightarrow M$  est une autre solution avec de même  $c_1(0) = a$ , alors  $c_1$  et  $c$  coïncident sur  $I \cap I_1$ .

Ainsi, on dispose de la notion de solution maximale issue d'un point  $a$  et pour  $a \in M$ , de l'intervalle maximal  $I_a$ .

**Définition.** (*Flot d'un champ de vecteurs sur une variété*)

On définit  $\Omega = \bigcup_{a \in M} I_a \times \{a\} \subseteq \mathbb{R} \times M$ , ouvert et  $\phi : \Omega \rightarrow M$  qui à  $(t, a) \mapsto c_a(t) = \phi_t(a) = \phi(t, a)$  qui est de classe  $C^\infty$ .

### Lemme. (*Uniformité du flot sur les compacts*)

On reprend les notations ci-dessus.

Soit  $K \subseteq M$  compact. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  et  $U$  un ouvert de  $M$  contenant  $K$  tels que  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \times U \subseteq \Omega$  et  $\phi$  est  $C^\infty$  sur  $]-\varepsilon, \varepsilon[$ .

▷ Soit  $a \in K$ . Il existe  $\varepsilon_a > 0$  et  $U_a$  un ouvert de  $M$  contenant  $a$  tel que  $]-\varepsilon_a, \varepsilon_a[ \times U_a \subseteq \Omega$ . Les  $(U_a)_{a \in K}$  forment un recouvrement ouvert de  $K$ , d'où un recouvrement fini  $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_p} \supseteq K$ . Alors  $U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_p}$  ouvert convient et  $\varepsilon = \min(\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_p})$  convient. ■

### Théorème. (*Complétude des champs de vecteurs compact*)

Soit  $M$  une variété compacte. Alors tout champ de vecteurs sur  $M$  est complet.

En particulier, pour tout  $X \in \chi(M)$ , on dispose d'un groupe à un paramètre  $(\varphi_t^\times)_{t \in \mathbb{R}}$  de difféomorphisme de  $M$ .

▷ D'après le lemme, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in M$ ,  $]-2\varepsilon, 2\varepsilon[ \subseteq I_x$ . On veut que pour tout  $x \in M$ ,  $I_x = \mathbb{R}$ . Soit  $a \in M$ ,  $I_a \neq \mathbb{R}$ , par exemple  $I_a = ]-\alpha, \beta[$ ,  $\beta < +\infty$  et  $t = \beta - \varepsilon$ . Considérons  $c_a(t)$ . On sait que pour tout  $\delta < \varepsilon$ ,  $\phi(s, c_a(t))$  est défini et  $\phi(s, \phi_t(a)) = \phi(s+t, a)$  avec  $s+t < \beta$ . Ainsi, on peut prolonger  $u \mapsto \phi(u, a)$  au delà de  $\beta$  via  $\phi(u-t, c_a(t))$ , ce qui contredit la maximalité. ■

Légèrement plus généralement.

### Propriété. (*Complétude des champs de vecteurs à support compact*)

Soit  $M$  une variété et  $X \in \chi(M)$  à support compact. Alors  $X$  est complet.

▷ On suppose qu'il existe  $K$  compact tel que  $X(m) = 0$  si  $m \notin K$ . Si  $m \notin K$ , la courbe constante  $t \mapsto m$  est solution, d'où, si  $x \in K$ , la courbe  $c_x$  reste dans  $K$  et on ramené au théorème précédent. ■

### Propriété. (*Théorème des bouts pour les variétés*)

Soit  $M$  une variété,  $X \in \chi(M)$ ,  $\phi : \Omega \longrightarrow M$  son flot. Soit  $K \subseteq M$  compact. On suppose que  $m \in M$  est tel que  $I_m \cap [0, +\infty[ = ]0, b[$  avec  $b < +\infty$ . Alors il existe  $t_K \in ]0, b[$  tel que pour tout  $t \in ]t_K, b[$ ,  $\phi(t, m) \notin K$ .

▷ D'après le lemme, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ ,  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \subseteq I_x$ . On peut prendre  $\varepsilon < b$  sans problème. On pose  $t_K = b - \varepsilon > 0$ . Si  $t \in ]t_K, b[$ ,  $I_{\phi_t(m)} = I_m - t = [0, b - t]$  où  $b - t < b - t_K = \varepsilon$ . On n'a pas  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \subseteq I_{\phi_t(m)}$ , donc  $\phi_t(m) \notin K$ . ■

### 3.3.8.4 Une application : dilatation des lignes de niveau

#### Théorème

Soit  $M$  une variété différentielle compacte et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $M^a = \{x \in M | f(x) \leq a\}$ . Supposons  $a < b$  tel que  $f^{-1}([a,b])$  ne contient pas de points critiques de  $f$ . Alors il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de  $M$  qui envoie  $M^a$  sur  $M^b$ .

▷ Pour tout  $x \in f^{-1}([a,b])$ ,  $T_x f \neq 0$ . On sait également que  $M$  compacte peut être vue comme une sous-variété d'un certain  $\mathbb{R}^N$ . On a  $T_x f \in (T_x M)^*$  et si  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $T_x M \subseteq \mathbb{R}^N$ . On munit  $\mathbb{R}^N$ , et donc chaque  $T_x M$  d'une structure euclidienne, d'où le gradient de  $f : \delta f(x) \in T_x M$  défini par : pour tout  $v \in T_x M$ ,  $\langle \delta f(x), v \rangle = T_x f(v)$ . On dispose ainsi d'un champ de vecteurs  $x \mapsto \delta f(x)$  sur  $M$ . Soit  $K = f^{-1}([a,b])$  compact, car fermé dans  $M$ . Posons  $U = \{x | \delta f(x) \neq 0\}$  ouvert contenant  $K$ . Soit donc  $g$  une fonction plateau avec  $g = 1$  sur  $K$ , à support dans  $U$ . On pose pour  $x \in M$  :  $\chi(x) = g(x) \cdot \frac{\delta f(x)}{\|\delta f(x)\|^2}$ . Soit  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  le groupe à une paramètre donné par le flot de  $X$ ,  $M$  étant compacte. Posons  $t \mapsto f(\phi_t(x)) = h(t)$  et  $h'(t) = T_{\phi_t} f(\chi(\phi_t(x))) = \left\langle \delta f(\phi_t(x)), g(\phi_t(x)) \frac{\delta f(\phi_t(x))}{\|\delta f(\phi_t(x))\|^2} \right\rangle = g(\phi_t(x)) \in [0,1]$ . Si  $\phi_t(x) \in K$ , i.e. si  $f(\phi_t(x)) \in [a,b]$ , alors  $h'(t) = 1$ . De plus,  $h(t) - h(a) = \int_a^t h'(s) ds = t - a$ , i.e.  $\phi_{b-a}$  envoie  $M^a$  sur  $M^b$ . ■

### 3.3.8.5 Redressement d'un champ de vecteurs

#### Propriété

Soit  $M$  une variété,  $X$  un champ de vecteurs et  $a \in M$  tel que  $X(a) \neq 0$ . Alors il existe une carte  $(U, \varphi)$  en  $a$  telle que le champ  $X$  lu dans la carte est constant, i.e.  $\varphi_*(X|_U)$  soit constant sur l'ouvert  $\varphi(U)$ .

▷ Dans le cas d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on peut supposer  $a = 0$ ,  $X(0) = (X^1(0), \dots, X^n(0))$  et l'on peut supposer  $X^1(0) \neq 0$ . On veut trouver un difféomorphisme  $G$  défini sur un voisinage ouvert de 0 tel que  $G_*(X) = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Soit  $(\phi_t)$  le groupe local associé à  $X$ . (L'intérêt est que les courbes intégrales de  $e_1$  sont  $\varphi_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$ .) Heuristiquement, dans le cas d'un champ constant, on peut utiliser les variables comme paramètres.) On fabrique, à partir de  $X$ , un difféomorphisme :  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui à  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \varphi_t(0, x_2, \dots, x_n)$ .  $F$  est un difféomorphisme local au voisinage de zéro. On considère  $dF(0)$ . Sa jacobienne en zéro est la matrice compagnon dont la première colonne est  $X(0)$ . Son déterminant est donc  $X^1(0) \neq 0$ . Par le théorème d'inversion locale pour les sous-variétés,  $F$  est un difféomorphisme local. Prenons  $G = F^{-1}$  sur les voisinages obtenus ci-dessus. Quel est  $G_*(X)$ ? On sait que c'est le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre obtenu à partir de celui de  $X$  en conjuguant par  $G$ , i.e.  $t \mapsto F^{-1} \circ \varphi_t \circ F$ . Pour  $x \in U$ ,  $\frac{d}{dt} F^{-1} \circ \varphi_t \circ F(x) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F^{-1} \circ \phi_t \circ \phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n) \Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{d}{dt} F^{-1}(\phi_{t+x_1}(0, x_2, \dots, x_n))}_{F(t+x_1, x_2, \dots, x_n)} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (x_1 + t, x_2, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0)$ . ■

### 3.3.8.6 Image d'un champ de vecteurs par un flot

#### Proposition

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur une variété  $M$ ,  $\phi_t$  son flot. Alors  $(\phi_t)_*(X) = X$ .

▷  $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x))$ , d'où la formule  $(\phi_t)_*(X)(x) = T_{\phi_t^{-1}(x)}\phi_t(X(\phi_t^{-1}(x)))$ . On a  $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = \frac{d}{ds}\phi_{t+s}(x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}\phi_t \circ \phi_s(x) = T_x\phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x))$  où  $X(x) = T_{\phi_t(x)}\phi_t^{-1}(X(\phi_t(x)))$ . ■

On donne la formule générale que l'on admettra.

#### Proposition

Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs et  $\phi_t^X, \phi_t^Y$  leurs groupes locaux à un paramètre. Alors  $\frac{d}{dt}(\phi_t^X)_*(Y)|_{t=0} = [X, Y]$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Cette fois, on passe par les dérivations :  $D_{[X, Y]} = D_X D_Y - D_Y D_X$ . ■

### 3.3.8.7 Théorème du redressement

## 3.4 Formes différentielles

### 3.4.1 Définition des formes différentielles

#### 3.4.1.1 Formes différentielles sur les espaces euclidiens

##### Méthode. (*Extension lisse des formes différentielles*)

Considérons l'exemple suivant :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lisse telle que  $df \neq 0$  quand  $f = 0$ ,  $\alpha := \frac{dx}{\partial f}$  la 1-forme définie sur la sous-variété  $P = \{f = 0, \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\}$ . On veut montrer que  $\alpha$  s'étend en une 1-forme lisse sur  $\{f = 0\} \supseteq P$ .

L'idée est d'introduire une sorte de domaine complémentaire  $P' = N \cap \{pddtxf \neq 0\}$  à  $P$  de sorte que par hypothèse  $N = P \cup P'$ . On veut alors définir une forme  $\beta$  sur  $P'$  telle que  $\alpha$  et  $\beta$  coïncident sur l'intersection  $P \cap P'$ .

Par symétrie, il est naturel d'essayer  $\beta = -\frac{dy}{\partial f}$ .

Ici dans ce cas particulier, l'argument est le suivant : pour tout  $p \in P \cap P'$ , un vecteur tangent à  $N$  en  $p$  s'écrit  $X = c(p)(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x})$  et par construction  $\alpha(X)(p) = \beta(X)(p) = c(p)$ , d'où  $\alpha = \beta$  sur  $P \cap P'$ .

### 3.4.1.2 Formes différentielles sur les variétés

**Définition. (1-forme différentielle sur une variété)**

Soit  $M$  une variété et  $T^*M$  son fibré cotangent. Une section lisse de  $(T^*M, M)$  est appelée *1-forme différentielle* (sur  $M$ ).

**Définition. (1-forme différentielle sur une variété)**

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Soit  $M$  une variété et  $T^*M$  son fibré cotangent. Une section lisse de  $(\Lambda^p T^*M, M)$  est appelée *p-forme différentielle* (sur  $M$ ).

Classes de degré	Sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$	Sur une variété $M$ de dimension $n$
0-formes différentielles $\Omega^0(U), \Omega^0(M)$	Fonctions lisses de $U$ dans $\mathbb{R}$ De la forme : $\alpha = \sum_i \alpha_i e_i$ où $(e_i)_i$ base de $\mathbb{R}^n$ , $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ lisses	Sections lisses du fibré trivial = fonctions lisses de $M$ dans $\mathbb{R}$ Forme locale issue de la définition de la lissité sur $M$ lire dans les cartes.
1-formes différentielles $\Omega^1(U), \Omega^1(M)$	Fonctions lisses de $U$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ De la forme (les formes linéaires coordonnées, sont leurs propres différentielles) : $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$ , $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ lisses	Sections lisses du fibré cotangent $\coprod_{x \in M} T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in T_x^*M$ , ie « champ de formes linéaires sur les espaces tangents » Forme locale : $\alpha_U = \sum_i \alpha_i dx_i$ (voir à gauche) dans carte $(U, \phi_U)$ de sorte que $\alpha_U = \psi^*(\alpha_V)$ où $\psi$ est la fonction de transition $\phi_U \circ \phi_V^{-1}$ pour tous ouverts
2-formes différentielles $\Omega^2(U), \Omega^2(M)$	Fonctions lisses de $U$ dans $Bil. Alt(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ De la forme : $\alpha = \sum_{i < j} \alpha_i (dx_i \wedge dy_j)$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$ , $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ lisses. Remarque : $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ .	Sections lisses du fibré périodique $\coprod_{x \in M} \Lambda^2 T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in Bil. Alt(T_x^*M, \mathbb{R})$ Forme locale : comme précédemment
$k$ -formes différentielles Espace $\Omega^k(U), \Omega^k(M)$	Fonctions lisses de $U$ dans $\mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ (formes $k$ -linéaires alternées) De la forme : $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$ , $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ lisses. Remarque : $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ est alternée (évidemment !).	Sections lisses du fibré des formes $k$ -alternées $\coprod_{x \in M} \Lambda^k T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in \Lambda^k T_x^*M$ les formes $k$ -alternées sur le fibré tangent $T_x M$ Forme locale : comme précédemment
$\Omega(U), \Omega(M)$	Somme directe des $\Omega^k(U), \Omega^k(M)$	

TABLE 3.1 : *Formes différentielles*. —

### 3.4.1.3 Image réciproque d'une forme par une application

**Définition.** (*Image réciproque d'une 1-forme par une application*)

Si  $M, N$  sont deux variétés différentielles et  $\varphi : M \rightarrow N$  une application différentiable.

Si  $\omega$  est une 1-forme différentielle sur  $N$ , l'*image réciproque de  $\omega$  par  $\varphi$*  est la 1-forme différentielle  $\varphi^*\omega$  définie sur  $M$  par  $\varphi^*\omega(p) = (\omega \circ \varphi)(p)[d\varphi_p]$  en tout  $p \in M$ .

**Mnémonik :** de façon plus visuelle, si  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  et si l'on pose  $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ ,

alors  $\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^n (\omega_i \circ \varphi) dx_i$  où  $dx_i$  est la différentielle de  $x_i(p)$ .

**Reformulation pratique.** (*Théorème des fonctions composées*)

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi).$$

**Proposition.** (*Contravariance de l'image réciproque des 1-formes*)

Si  $\varphi : M \rightarrow M'$  et  $\psi : M' \rightarrow M''$  sont différentiables,  $M, M', M''$  des variétés différentielles, alors  $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ .

### 3.4.1.4 Dualité formes différentielles-champs de vecteurs

## 3.4.2 Cohomologie de de Rham

### 3.4.2.1 Produit extérieur de formes différentielles

→ *Notation.* Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On note  $A^p(V)$  l'espace des  $p$ -formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel réel  $V$  fixé.

**Définition.** (*Produit extérieur*)

Soient  $p, q \in \mathbb{N}$ . On note  $\omega \wedge \eta$  le *produit extérieur* de  $\omega$  et  $A^p(V)$  et  $\eta \in A^q(V)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , défini sur  $\mathbb{R}^{p+q}$  par

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}, \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ ET } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)} \varepsilon(\sigma) \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}).$$

Les permutations prises dans cette somme sont exactement les *battages*.

**Propriétés.** (*Propriétés calculatoires du produit extérieur*)

1. Le produit extérieur est associatif.
2. Le produit extérieur est anticommutatif.
3. La forme nulle est absorbante pour le produit extérieur.

**Fait.** (*Dimension de l'espace des p-formes multilinéaires alternées*)

Soit  $V$  un espace vectoriel réel. Si  $\dim(V) = n$ , on a  $\dim(A^p(V)) = \binom{n}{p}$  et si  $(a_1, \dots, a_n)$  est une base de  $V^*$ , alors  $\{a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$  est une base de  $A^p(V)$ .

### 3.4.2.2 Expression des formes différentieles en coordonnées locales

**Reformulation pratique.** (*Formes différentielles*)

Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Une  $p$ -forme différentielle sur une variété différentielle  $M$  de classe  $C^r$  est une application différentiable de classe  $C^r$  qui associe à tout point  $x \in M$  une forme  $\omega_x \in A^p(T_x(M))$ .

**Fait.** (*Forme différentielle en coordonnées locales*)

Soient  $M$  une variété différentielle et  $x \in M$ . En *coordonnées locales*  $x_1, \dots, x_n$  au voisinage d'un point  $x$  (expression purement conventionnelle), l'espace cotangent  $T_x^*(M)$  a une base  $dx_1, \dots, dx_n$ , où  $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_i^j$ . Ici,  $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) \Big|_x$  est donné par  $D_{v_i}$  où  $v_i(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ . Pour toute  $p$ -forme différentielle  $\omega$  sur  $M$ , au voisinage de  $x$ , on a :

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

où  $f_{i_1, \dots, i_p}$  est lisse.

### 3.4.2.3 Complexe de de Rham sur une variété

→ *Notation.* On note  $\Omega^p(M)$  l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles sur  $M$ . On pose  $\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M)$ , espace vectoriel gradué muni d'un produit extérieur (point par point) qui en fait une algèbre graduée.

**Définition.** (*Dérivée extérieure*)

Soit  $M$  une variété différentielle.

Si  $f \in \Omega^0(M)$ , on pose que la 1-forme différentielle  $df$  est la différentielle de  $f$  :  $df(X) = X(f)$  pour tout champ de vecteurs  $X$  de  $M$ . On a

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

au voisinage de  $x$ .

Si maintenant  $p \in \mathbb{N}$  et  $\omega \in \Omega^p(M)$  et  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ , alors on pose  $d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ .

Par linéarité, on obtient la *dérivée extérieure* ou simplement *différentielle*

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

qui est donc un morphisme gradué sur la suite  $(\Omega^p(M))_{p \in \mathbb{N}}$ . On note parfois  $d_p = d|_{\Omega^p(M)}$ .

### Propriétés. (*Propriétés de graduation de la différentielle des formes*)

Soit  $M$  une variété différentielle.

1. Par définition, pour tout forme  $\alpha$  sur  $M$ ,  $\deg(d\alpha) = \deg(\alpha) + 1$ .
2.  $d$  est linéaire.
3.  $d$  commute à l'image inverse.

### Proposition. (*Formule de Leibniz pour les formes différentielles*)

Soit  $M$  une variété différentielle. Soient  $p, q \in \mathbb{N}$ . Si  $\omega \in \Omega^p(M)$  et  $\eta \in \Omega^q(M)$ , on a  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$ .

### Définition. (*Forme différentielle fermée*)

Soit  $M$  une variété différentielle. Une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  est *fermée* si sa différentielle  $d\alpha = 0$  est nulle.

### Définition. (*Forme différentielle exacte*)

Soit  $M$  une variété différentielle. Une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  est *exacte* s'il existe une forme différentielle  $\omega$  telle que  $d\omega = \alpha$ .

### Proposition. (*Complexe de de Rham*)

Soit  $M$  une variété différentielle. Alors  $(\Omega^p(M), d)$  représenté par

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \Omega^2(X) \longrightarrow \dots$$

est un complexe, i.e.  $d \circ d = 0$ .

Autrement dit, toute forme différentielle exacte est fermée.

### Lemme. (*Lemme de Poincaré*)

Sur un ouvert étoilé, toute forme différentielle fermée est exacte.

Ceci n'étant pas vrai en général, on introduit l'indicateur suivant.

→ *Notation.* Soit  $X$  une variété différentiable. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note parfois  $F^p(X)$  l'espace des  $k$ -cycles qui sont les formes fermées de degré  $k$  et  $d(\Omega^{k-1})$  les  $k$ -bords qui sont les formes exactes

de degré  $k$ .

### Définition. (*Groupes de cohomologie de de Rham*)

Soit  $M$  une variété différentielle. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $H_{\Omega}^p(M)$ , ou plus simplement  $H^p(M)$ , le  $p$ -ième groupe de cohomologie de de Rham de  $M$ , défini par

$$H^p(M) = \text{Ker}(d_p)/\text{Im}(d_{p-1})$$

pour  $p \neq 0$  et  $H^0(M) = \text{Ker}(d_0)$  qui n'est autre que le  $p$ -ième groupe de cohomologie du complexe de cochaînes de de Rham.

*Remarque.* Il représente donc le défaut d'exactitude des  $p$ -formes différentielles sur  $M$  à celles qui sont fermées près.

### Proposition

Soit  $M$  une variété différentielle. Soient  $p,q \in \mathbb{N}$ . La différentielle induit une application bilinéaire

$$H_{\Omega}^p(M) \times H_{\Omega}^q(M) \rightarrow H_{\Omega}^{p+q}(M)$$

donnée pour  $\omega \in \Omega^p(M)$  et  $\eta \in \Omega^q(M)$  par  $([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$ .

▷ Découle de la formule de Leibniz pour les formes. ■

### Corollaire

L'algèbre  $H_{\Omega}^{\bullet}(M)$  est graduée, associative et anti-commutative.

### Fait. (*Application induite en cohomologie de de Rham*)

Soient  $M, N$  deux variétés différentielles et  $\theta : M \rightarrow N$  une application lisse. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a l'application  $\theta^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  définie par

$$\theta^*(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(\theta_*(X_1), \dots, \theta_*(X_p))$$

où  $X_1, \dots, X_p$  sont des vecteurs tangents à  $M$  en  $x \in M$ . En particulier, si  $f : M \rightarrow R$  est une fonction,  $\theta^*(f) = f \circ \theta$  est un pushout. Ici  $\theta_*(X) = (f = X(f \circ \theta))$  pour tout vecteur tangent  $X$  à  $M$  en  $x$ . On a  $\theta^*(fdx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) = (f \circ \theta)d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_p \circ \theta)$ .

L'application  $\theta^*$  induit un morphisme  $H_{\Omega}^{\bullet}(N) \rightarrow H_{\Omega}^{\bullet}(M)$  d'algèbres graduées.

On énonce en vrac quelques propriétés de base et les premiers calculs de la cohomologie de de Rham :

**Proposition. (Cohomologie de de Rham à coefficients réels en degré nul)**

Soit  $M$  une variété différentielle. Alors  $H^0(M; \mathbb{R}) = \{\text{fonctions localement constantes}\} \simeq \mathbb{R}^c$  où  $c$  est le nombre quelconque de composantes connexes de  $M$ .

**Lemme. (Lemme de Poincaré en termes de cohomologie de de Rham)**

Si  $U$  est un ouvert étoilé de l'espace euclidien,  $H^p(U) = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition. (Majoration de la cohomologie de de Rham)**

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Alors pour tout entier  $k > n$ ,  $H^k(M) = 0$ .

**Théorème**

Soit  $M$  une variété connexe  $C^\infty$  compacte et orientable. Alors  $\dim(H^n(M)) = 1$ .

**Fait**

Si  $M$  est une variété connexe  $C^\infty$  de dimension  $n$  non compacte ou non orientable, alors  $H^n(M) = 0$ .

D'où :

**Corollaire**

Une variété différentiable de dimension  $n$  est orientable si et seulement si elle admet une  $n$ -forme différentielle non nulle.

**Proposition. (Cohomologie de de Rham des sphères)**

Soient  $0 < k < n$  deux entiers. Alors  $H^k(S^n) = 0$ .

### 3.4.3 Intégration des formes différentielles

**Définition. (Support d'une forme différentielle)**

Soit  $M$  une forme différentielle. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Le *support* d'une forme  $\omega \in \Omega^p(M)$  est l'adhérence de l'ensemble  $\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}$ .

**Exercice 12**

Montrer que si  $\omega$  est une  $n$ -forme différentielle,  $n \in \mathbb{N}$ , sur un ouvert  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  à support compact, on peut étendre  $\omega$  à  $\mathbb{R}^n$  avec son support dans un cube.

**Définition.** (*Intégrale d'une forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$* )

Si  $\omega = f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \wedge \dots \wedge x_n$  est une  $n$ -forme différentielle sur un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  où  $f$  est à support compact,  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\int_W \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

**Théorème.** (*Formule de changement de variables pour les formes dans  $\mathbb{R}^n$* )

Avec les notations précédentes, si  $W' \subseteq \mathbb{R}^n$  est un ouvert et  $\theta : W' \rightarrow W$  est un difféomorphisme, alors  $\theta^*(\omega) = (f \circ \theta)d(x_1 \circ \theta) \wedge \dots \wedge d(x_n \circ \theta)$  et

$$\int_{W'} \theta^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^*(\omega) = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega.$$

**Lemme.** (*Intégrale d'une forme différentielle contenue sur une variété*)

Soit  $M$  une variété différentielle orientée de dimension  $n$ . Soit  $(U, \varphi)$  un ouvert de carte de  $M$ . Soit  $\omega \in \Omega^n(M)$  une  $n$ -forme dont le support est contenu dans  $U$ . On peut poser

$$\int_M (\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

▷ On vérifie que le résultat ne dépend pas du choix d'une carte locale de l'atlas orienté. ■

**Définition-propriété.** (*Intégrale d'une forme différentielle sur une variété*)

Soit  $M$  une variété différentielle orientée de dimension  $n$ . Pour une forme arbitraire  $\omega \in \Omega^n(M)$ , on procède par une partition de l'unité, i.e. une famille  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions lisses de sorte que le support de  $f_i$  pour tout  $i$  est contenu dans le domaine de définition  $U_i$  d'une carte locale et  $(U_i)_{i \in I}$  forment un recouvrement localement fini de  $M$ , avec de plus  $\sum_{i \in I} f_i = 1$ . On sait qu'il existe de telles partitions de l'unité. Par définition, tout compact  $K \subseteq M$  touche un nombre fini d'ouverts  $U_i$ . On pose

$$\int \omega = \sum_i \int f_i \omega.$$

▷ Cette définition ne dépend pas de la partition de l'unité choisie. Si  $(g_j)_{j \in J}$  en est une autre, on a  $\sum_{i \in I, j \in J} f_i g_j = 1$ , donc

$$\sum_{i \in I} \int f_i \omega = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int f_i g_j \omega = \sum_{j \in J} \int g_j \omega$$

d'où l'équivocité de  $\int \omega$ . ■

**Théorème**

Si  $\theta : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme de variétés différentiables orientées qui préserve l'orientation, on a

$$\int_N \omega = \int_M \theta^* \omega$$

pour tout  $n$ -forme  $\omega \in \Omega^n(N)$  à support compact,  $n \in \mathbb{N}$ .

## 3.5 Groupes de Lie

Dans la suite, toutes les variétés seront supposées  $C^\infty$ .

### 3.5.1 Définition, premiers exemples

#### Définition. (*Groupe de Lie*)

Un *groupe de Lie*  $G$  est une variété  $C^\infty$  munie d'une structure de groupe telle que les applications  $m: G \times G \rightarrow G$  et  $\text{inv}: G \rightarrow G$  sont  $C^\infty$ .

$$(x,y) \mapsto xy \quad x \mapsto x^{-1}$$

#### Définition. (*Morphisme de groupes de Lie*)

Un *morphisme (de Lie)* entre deux groupes de Lie est un morphisme entre ces groupes qui soit une application de classe  $C^\infty$ .

#### Définition. (*Sous-groupe de Lie*)

Un *sous-groupe de Lie* d'un groupe de Lie est un sous-groupe de ce groupe qui en est aussi une sous-variété.

#### Exemples. (*Groupes de Lie*)

1.  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie.
2.  $SL_n(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie.
3.  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C}), \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), SU_n(\mathbb{C})$ , sont des groupes de Lie.

### 3.5.2 Translations à gauche & à droite, champ de vecteurs invariants

#### Définition. (*Translations latérales dans un groupe de Lie*)

Soit  $G$  un groupe de Lie. Pour  $g \in G$ , les applications  $L_g: G \rightarrow G$  et  $h \mapsto gh$

$R_g : G \rightarrow G$  sont  $C^\infty$  et sont des difféomorphismes, appelées translations à gauche  
 $h \mapsto hg$   
et à droite par  $g$ .

### Proposition

On a :  $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$ ,  $R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$ .

### Proposition

On a :  $L_g R_h = R_h L_g$ .

### Définition. (*Champ de vecteurs invariant*)

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $G$  est dit *invariant à gauche*, respectivement *à droite*, si pour tout  $g \in (L_g)_*(X) = X$ , respectivement  $(R_g)_*(X) = X$ . Ceci s'écrit :  $X(gh) = T_h L_g(X(h))$ . Ainsi,  $X$  est complètement déterminé par sa valeur  $X(e)$  en l'élément neutre  $[X(g) = T_e L_g(X(e))]$ .

→ *Notation.* Notons  $\mathcal{G} = T_e G$ .

### Proposition

L'application  $X \mapsto X(e) \in \mathcal{G}$  est un isomorphisme de l'espace des champs de vecteurs invariants à  $g$  avec  $\mathcal{G}$ .

▷ Soit  $\mathfrak{X}(G)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $G$  et  $\mathfrak{X}(G)^{\text{inv}}$  le sous-ensemble de ceux invariants à  $g$ . Alors l'application  $X \mapsto X(e)$  de  $\mathfrak{X}(G)^{\text{inv}}$  sur  $\mathcal{G}$  est linéaire injective grâce à ce qui précède. De plus, elle est surjective : si  $v \in \mathcal{G}$ , on pose  $X(g) = T_e L_g(v) \in T_g G$ . Il est bien invariant à gauche :  $X(gh) = T_e L_{gh}(v)$  grâce à  $L_{gh} = L_g \circ L_h$  et  $T_e(L_{gh}) = T_h L_g \circ T_e L_h$ . Il faut encore s'assurer que  $g \mapsto X(g)$  est bien  $C^\infty$ . ■

On en déduit :

### Proposition

Tout groupe de Lie est une variété parallélisable.

▷ Il faut trouver, si  $n = \dim(G)$ ,  $n$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_n$  sur  $G$  tels que  $(X_1(g), \dots, X_n(g))$  soit une base de  $T_g G$ . On a  $\dim(T_e G) = n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathcal{G} = T_e G$ . On considère les champs invariants à  $g$  associés :  $X_k(g) = T_e L_g(e_k)$  : c'est une famille libre, car  $T_e L_g : T_e G = T_g G$  est inversible. Ainsi  $TG \simeq G \times \mathcal{G}$  par  $(g, T_e L_g(v)) \longleftrightarrow (g, v)$ . ■

**Proposition. (*Invariance du crochet de Lie*)**

Le crochet  $[X,Y]$  de deux champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) est encore invariant à gauche (resp. à droite).

▷ On a vu que si  $\varphi$  est un difféomorphisme,  $\varphi_*( [X,Y] ) = [ \varphi_*(X), \varphi_*(Y) ]$ . ■

### 3.5.3 Flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche et sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie

**Définition. (*Sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie*)**

Un *sous-groupe à un paramètre* d'un groupe de Lie  $G$  est un morphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $G$ .

**Exemple**

Pour  $G = GL_n(\mathbb{R})$ , tout groupe à un paramètre est de la forme  $t \mapsto \exp(tA)$  pour une  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque importante.** Si  $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$  est un sous-groupe à un paramètre de  $G$ , on lui associe un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $G$  :  $\phi_t(g) = g \cdot f(t)$ , i.e.  $\phi(t) = R_{f(t)}$ .

**Théorème**

1. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow G$  est un sous-groupe à un paramètre, alors le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre de difféomorphisme  $\phi_t(g) = g \cdot f(t)$  est un champ de vecteurs invariant à gauche.
2. Inversement, si  $X$  est un champ de vecteurs invariant à gauche, le groupe à un paramètre de difféomorphisme est défini sur  $\mathbb{R} \times G$  et il est donné par un sous-groupe à un paramètre de  $G$ , i.e.  $\phi_t^\times(g) = g \cdot f_X(t)$  où  $f_X(t)$  est un sous-groupe à un paramètre de  $G$ ,  $f_X(t) = \phi_t^\times(e)$ .

▷ Pour le premier point,  $\phi_t(g) = g \cdot f(t)$ . On sait que le générateur infinitésimal est donné grâce à  $\frac{d}{dt}\phi_t(g) = X(\phi_t(g))$ . Or  $\frac{d}{dt}(gf(t)) = \frac{d}{dt}L_g(f(t)) = T_{f(t)}L_g(f'(t))$ . En  $t = 0$ ,  $X(g) = T_eL_g(f'(0))$ . C'est exactement la forme des champs invariants à gauche.

Inversement, soit  $X$  un champ de vecteurs invariants à  $g$ . On regarde son flot. Il est défini sur  $I_e \times G$ , i.e. pour tout  $g \in G$ ,  $I_e \subseteq I_g$ , et il est donné par  $(t, g) \mapsto g \cdot \phi_t(e)$  où  $\phi_t(e)$  est une courbe issue de  $g$ , dans  $G$ . c'est-à-dire que l'on a  $\phi_t(g) = g \cdot \phi_t(e)$ . Pour le voir, comme en  $t = 0$ , ces deux courbes valent  $g$ , il suffit de voir qu'elles satisfont à la même équation différentielle  $\frac{d}{dt}(g \cdot \phi_t(e)) = \frac{d}{ds}(g \cdot \phi_{s+t}(e))|_{s=0} = \frac{d}{ds}(g \cdot \phi_s \circ \phi_t(e))|_{s=0} = T_{\phi_t(e)}L_gX(\phi_t(e)) = X(g \cdot \phi_t(e))$ , car  $X$  est invariant à  $g$ . Par ailleurs, par définition,  $\frac{d}{dt}\phi_t(g) = X(\phi_t(g))$ , d'où, pour  $t \in I_e$ ,  $\phi_t(g) = g \cdot \phi_t(e)$ . En particulier, pour tout  $g \in G$ ,

$I_e \subseteq I_g$ . On a vu, de façon générale,  $I_{\phi_t(e)} = I_e - t$  d'où  $I_e \subseteq Ie - t$  pour tout  $t \in I_e$ ,  $I_e + t \subseteq I_e$ , d'où  $I_e = \mathbb{R}$ . ■

### 3.5.4 Algèbre de Lie

#### Définition. (*Algèbre de Lie*)

C'est un espace vectoriel  $\mathcal{G}$  muni d'un application bilinéaire  $[.,.] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$  qui est alternée/antisymétrique et satisfait à l'*identité de Jacobi* :

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}, \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

#### Définition. (*Sous-algèbre de Lie*)

Une sous-algèbre de Lie est un sev stable par  $[.,.]$ .

#### Définition. (*Morphisme d'algèbre de Lie*)

Un morphisme d'algèbre de Lie est une application  $f : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$  linéaire telle que  $f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$ .

#### Exemples. (*Algèbres de Lie*)

1. Soit  $A$  une algèbre associative. Pour tous  $X, Y \in A$ ,  $[XY] = XY - YX$  convient.
2. Soit  $A$  une algèbre, alors l'algèbre de ses dérivations  $\text{Der}(A)$  muni du crochet de Lie déjà rencontré, convient.
3. Soit  $M$  une variété. Alors  $\mathfrak{X}(G)$  est une algèbre de Lie
4. Soit  $G$  un groupe de Lie. Alors  $\mathcal{G}$  est une algèbre de Lie.

### 3.5.5 Quelques calculs d'applications linéaires tangentes

#### Exemple. (*Différentielle de la multiplication*)

On considère  $m : G \times G \longrightarrow G$ . Calculons  $T_{(e,e)}m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ . Soient  $t \mapsto a(t)$ ,  $t \mapsto b(t)$  courbes dans  $G$  issues de  $e$ .  $a'(0), b'(0) \in \mathcal{G}$ . Ainsi  $T_{(e,e)}(m)(a'(0), b'(0)) = a'(0) + b'(0)$ . En effet,  $m(a(t), b(t)) = c(t) = a(t)b(t)$  et l'on calcul  $\frac{d}{dt}m(a(t), b(t)) \Big|_{t=0}$ . De façon générale,  $T_{(e,e)}m(u, v) = T_{(e,e)}m(u, 0) + T_{(e,e)}m(0, v)$ , car  $(u, v) = (u, 0) + (0, v)$  et  $T_{(e,e)}m(a'(0), 0) = \frac{d}{dt}m(a(t), e) = \frac{d}{dt}(a(t)) \Big|_{t=0} = a'(0)$ .

Calculons maintenant  $T_{(g,e)}m : T_g G \times T_e G \longrightarrow T_g G$  qui à  $(v, w) \mapsto v + T_e L_g(w)$ . Si  $t \mapsto c(t)$  est une courbe issue de  $g$ , alors  $c(t) = g.a(t)$  où  $t \mapsto a(t)$  est issue de  $e$ ,  $c'(0) = v$ . Soit  $t \mapsto b(t)$  une courbe issue de  $e$ ,  $b'(0) = w$ . Alors  $\frac{d}{dt}c(t)b(t)|_{t=0} = ddttg(a(t)b(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(L_g(a(t)b(t))) \Big|_{t=0} = T_e L_g(\frac{d}{dt}(a(t)b(t))) = T_e L_g(a'(0) + b'(0)) = c'(0) + T_e L_g(b'(0)) = v + T_e L_g(w)$ .

Maintenant, soit  $t \mapsto a(t)$  une courbe issue de  $e$ . Le vecteur tangent en  $g$  à la courbe  $t \mapsto a(t)ga(t)^{-1}$  est  $T_e R_g(a'(0)) = T_e L_g(a'(0))$ . En effet,  $a(t)ga(t)^{-1} = m(a(t)g, a(t)^{-1})$  et  $\frac{d}{dt}(a(t)^{-1}) \Big|_{t=0} = a'(0)$ . On a ainsi la composée  $t \mapsto (a(t)g, a(t)^{-1})$  de dérivée  $(T_e R_g(a'(0)), -a'(0))$  avec  $m$ , où il faut prendre la différentielle en  $(g, e)$ . On obtient ainsi  $T_e R_g(a'(0)) + T_e L_g(-a'(0))$ .

Un dernier fait utile. Soient  $x, g \in G$ . Le vecteur tangent en  $xg$  à la courbe  $t \mapsto xa(t)ga(t)^{-1} = L_x(a(t)ga(t)^{-1})$  est  $T_g L_x(T_e R_g(a'(0)) - T_e L_g(a'(0))) = T_x R_g T_e L_x(a'(0)) - T_e(L_{xg})(a'(0))$ .

### 3.5.6 Actions d'un groupe de Lie sur lui-même et sur son algèbre

#### 3.5.6.1 Définitions

**Proposition.** (*Régularité de la conjugaison*)

Dans un groupe de Lie, les automorphismes intérieurs sont des applications  $C^\infty$ . Ce sont donc des difféomorphismes.

▷ En effet, ils s'expriment sous la forme  $L_g R_{g^{-1}}$  pour les  $g \in G$ . ■

**Définition.** (*Représentation adjointe dans un groupe de Lie*)

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $g \in G$ . On appelle  $\text{Ad}(g) : T_e G \longrightarrow T_e G$  la différentielle en  $e$  de la conjugaison par  $g$ .

**Remarque importante.** Cherchons  $\text{Ad}(g)(X)$ . Soit  $t \mapsto a(t)$  une courbe issue de  $e$  avec  $a'(0) = X$ . Alors  $\text{Ad}g(X) = \frac{d}{dt}(g.a(t)g^{-1}) \Big|_{t=0}$ . On dispose maintenant d'une application  $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{End}(T_e G)$ . Elle est  $C^\infty$ , car différentielle d'une application  $C^\infty$ .

**Définition.** (*Adjonction dans un groupe de Lie*)

La différentielle de  $\text{Ad}$  en  $e$  est notée  $T_e \text{Ad} = \text{ad} : \mathcal{G} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{G})$ .

**Proposition.** (*Adjoint du produit*)

Soient  $g_1, g_2 \in G$ . Alors  $\text{Ad}(g_1 g_2) = \text{Ad}(g_1) \circ \text{Ad}(g_2)$ .

▷  $\text{Ad}(g_1 g_2)(X) = \frac{d}{dt}(g_1 \underbrace{g_2 a(t)g_2^{-1}}_{b(t)} g_1^{-1}) = \text{Ad}(g_1) \left( \frac{d}{dt} b(t) \right) = \text{Ad}g_1(\text{Ad}(g_2)(X))$ . ■

Concrètement,  $X, Y \in \mathcal{G} = T_e G$  et  $\text{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt}(\text{Ad}(a(t))(Y)) \Big|_{t=0}$ . Pour  $t \mapsto b(t)$  courbe issue de  $e$  avec  $b'(0) = Y$  et  $t \mapsto a(t)$  courbe issue de  $e$  avec  $a'(0) = X$ ,

$$\text{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{ds} a(t) b(s) a(t)^{-1} \right) \Big|_{s=0, t=0}.$$

On a aussi :  $\forall X, Y \in \mathcal{G} \quad \text{ad}(X)(Y) \in \mathcal{G}$ .

On dispose aussi du crochet, via identification de  $\mathcal{G}$  avec champs de vecteurs invariants à gauche.

### Théorème. (*Lien adjonction-crochet*)

Pour tous  $X, Y \in \mathcal{G}$ ,  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ .

▷  $[X, Y]$  est l'élément de  $\mathcal{G}$  associé au champ de vecteurs invariant à  $g$   $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ , i.e. à la dérivation  $D_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} = D_{\tilde{X}}D_{\tilde{Y}} - D_{\tilde{Y}}D_{\tilde{X}}$ . Il faut donc considérer la dérivation associé au champ de vecteurs invariants à gauche  $\text{ad}(\tilde{X})(Y)$ . On rappelle que  $D_{\tilde{X}}f(x) = T_x f(\tilde{X}(x)) = T_x f(T_e L_x(X)) = T_e(f \circ L_x)(X) = \frac{d}{dt}f(x.a(t))|_{t=0}$  où  $a(t)$  est une courbe issue de  $e$ ,  $a'(0) = X$ . En particulier,  $D_{\text{ad}\tilde{X}(Y)}f(x) = T_x f(T_e L_x(\text{ad}(X)(Y)))$ . On considère  $a, b$  chemins pointés en  $X, Y$  et  $(t, s) \mapsto f(x, a(t)b(s)a(t)^{-1})$  de classe  $C^\infty$ . Alors  $\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{ds} f(xa(t)b(s)a(t)^{-1}) \right) = \frac{d}{dt} (T_x f T_e L_x \text{Ad}(a(t))(Y))|_{t=0} = T_x f T_e L_x \text{ad}(X)(Y)$ . D'après le théorème de Schwarz, c'est aussi  $\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} (f(xa(t))b(s)a(t)^{-1})|_{t=0, s=0}$ . Or  $\frac{d}{dt} f(xa(t))b(s)a(t)^{-1} = T_{xb(s)}f(T_x R_{b(s)}T_e L_x(X)) - T_{xb(s)}f T_e L_{xb(s)}(X)$ . Le deuxième terme se récrit  $T_{xb(s)}f T_e L_{xb(s)}(X) = T_{xb(s)}f(\tilde{X}(xb(s))) = D_{\tilde{X}}f(xb(s))$ , et  $\frac{d}{ds} (D_{\tilde{X}}f)(xb(s))|_{s=0} = D_{\tilde{Y}}(D_{\tilde{X}}f)(x)$ . Pour le premier terme, on veut  $\frac{d}{ds} (T_{xb(s)}f T_x R_{b(s)}T_e L_x(X)) = \frac{d}{ds} \left( \frac{d}{dt} f(xa(t))b(s)|_{t=0} \right)|_{s=0} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{ds} f(xa(t))b(s)|_{s=0} \right)|_{t=0} = D_{\tilde{Y}}f(x(a(t)))|_{t=0} = D_{\tilde{X}}D_{\tilde{Y}}f(x)$ . ■

### Exemples. (*Algèbre des groupes de Lie matriciels*)

1. Pour le groupe de Lie  $G = SL_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{G} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ .
2. Pour  $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{G} = \{M, {}^t M = -M\}$ .
3. Pour  $G = SU_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{G} = \{M \in M_n(\mathbb{C}), M^* = -M, \text{tr}(M) = 0\}$ .

### 3.5.7 Application exponentielle

L'application exponentielle, de même que dans la théorie des équations différentielles, permet de faire le lien entre algèbre de Lie et groupe de Lie.

Soit  $G$  un groupe de Lie,  $\mathcal{G} = T_e G$ . Soit  $X \in \mathcal{G}$ ,  $\tilde{X}$  champ de vecteurs invariant à gauche, dont on sait qu'il est complet. Le groupe à un paramètre de difféomorphismes associé à  $\tilde{X}$  est de la forme  $\phi_t^{\tilde{X}}(g) = g\phi_t^{\tilde{X}}(d)$ . De plus,  $t \mapsto \phi_t^{\tilde{X}}(e)$  est un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie.

### Définition. (*Exponentielle dans un groupe de Lie*)

On définit :

$$\begin{aligned} \exp: \quad \mathcal{G} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \phi_1^{\tilde{X}}(e) \end{aligned} .$$

**Exemple**

Pour  $G = GL(n, \mathbb{R})$ ,  $\phi_t^{\tilde{X}}(g) = g\phi_t^{\tilde{X}}(I)$ , d'où  $\frac{d}{dt}\phi_t^{\tilde{X}}(g) = \phi_t^{\tilde{X}}(g)X$ .

On a donc à résoudre une équation différentielle linéaire.

On peut décrire la forme des sous-groupes à un paramètre des groupes de Lie, au moyen de l'exponentielle.

**Proposition. (*Forme des sous-groupes paramétrés de Lie*)**

Les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie  $G$  sont de la forme  $t \mapsto \exp(tX)$  pour un  $X \in \mathcal{G}$ .

▷ On sait a priori qu'ils sont  $t \mapsto \phi_t^{\tilde{X}}(e)$ . Il suffit de dire que c'est  $\exp(tX) = \phi_1^{t\tilde{X}}(e)$ . ■

**Lemme**

Pour  $X \in \mathcal{G}$ ,  $\phi_{st}^{\tilde{X}}(e) = \phi_t^{s\tilde{X}}(e)$ .

▷ En effet, fixons  $s$ , et considérons les courbes  $t \mapsto \phi_t^{s\tilde{X}}(e)$  et  $t \mapsto \phi_{st}^{\tilde{X}}(e)$  qui valent  $e$  en  $t = 0$ . Ce sont des sous-groupes à un paramètre de  $G$ . Il suffit de voir qu'elles ont mêmes générateurs infinitésimaux. ■

**Proposition. (*L'exponentielle est un difféomorphisme local en 0*)**

$\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$  est un difféomorphisme local en 0 et  $T_0 \exp : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  est *id*.

▷  $T_0 \exp(X) = \frac{d}{dt} \exp(0 + tX) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(tX) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi_1^{t\tilde{X}}(e) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi_t^{\tilde{X}}(e) \Big|_{t=0} = X$ . ■

**Propriété. (*Composition de l'exponentielle par un morphisme*)**

Soient  $G, H$  deux groupes de Lie d'algèbres de Lie respectives  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ . Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes de Lie. Alors pour tout  $X \in \mathcal{G}$ ,  $f(\exp_G(X)) = \exp_H(T_e f(X))$ . Autrement dit,

$$f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f$$

▷ On considère les sous-groupes à un paramètre de  $H$ . Ils sont donnés par  $t \mapsto f(\exp_G(tX))$  et  $t \mapsto \exp_H(T_e f(tX))$ . Montrons qu'ils ont même générateur.  $\frac{d}{dt} f(\exp_G(tX)) \Big|_{t=0} = T_e f(\frac{d}{dt} \exp_G(tX) \Big|_{t=0}) = T_e f(X)$ . ■

**Application. (*Exponentielle d'un sous-groupe d'un groupe de Lie*)**

Si  $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ , alors  $\exp_G = \exp_{GL_n(\mathbb{R})}|_{\mathcal{G}}$ .

**Application. (*Conjuguée de l'exponentielle*)**

On a, pour  $g \in G$ ,  $\text{Ad}(g) = \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  et  $\text{Ad}(g) = T_e i(g)$ . Ainsi  $\exp(\text{Ad}g(X)) = i(g) \exp(X)$ , d'où

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g))(X).$$

**Application. (*Exponentielle de l'adjoint*)**

$\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathcal{G})$ ,  $T_e \text{Ad} = \text{ad}$ . Ainsi,  $\exp(\text{ad}(X)) = \text{Ad}(\exp(X))$ ,  $\text{ad}(X) \in \text{End}(\mathcal{G})$ .

**Proposition. (*Algèbre par l'exponentielle*)**

Soit  $G$  un sous-groupe de Lie de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Alors  $\mathcal{G} = \{X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(tX) \in G\}$ .

**Proposition. (*Tangente d'un morphisme de Lie*)**

Soient  $G, H$  deux groupes de Lie d'algèbres de Lie  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ . Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes de Lie. Alors  $T_e f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  est un morphisme d'algèbre de Lie, c'est-à-dire :  $T_e f([X, Y]) = [T_e f(X), T_e f(Y)]$ , soit  $T_e f(\text{ad}(X)(Y)) = \text{ad}(T_e f(X))(T_e f(Y))$ .

▷ Pour tous  $g \in G$ ,  $X \in \mathcal{G}$ ,  $f(g \exp(tX) g^{-1}) = f(g)f(\exp(X)) = f(g)^{-1}$ . On prend la dérivée en  $t = 0$ . Alors  $T_e f \circ \text{Ad}(g)(Y) = \text{Ad}f(g) \circ T_e f(Y)$ . On prend  $g = \exp(sX)$ ,  $X \in \mathcal{G}$ . Alors  $\frac{d}{ds} T_e f \text{Ad}(\exp(sX)(Y))|_{s=0} = T_e f(\text{ad}(X)(Y)) = \frac{d}{ds} \text{Ad}(f(\exp(sX)))(T_e f(Y))|_{s=0} \text{ad}(T_e f(X))(T_e f(Y))$ . ■

L'application exponentielle n'est pas toujours injective, ni surjective. D'ailleurs, l'image d'un connexe étant connexe, il ne faut pas rêver : on ne peut avoir de résultat de surjectivité que sur des groupes de Lie connexes.

**Proposition. (*Surjectivité de l'exponentielle de Lie*)**

Soit  $G$  un groupe de Lie connexe. Soit  $V$  un voisinage de 0 dans  $\mathcal{G}$  sur lequel  $\exp$  est un difféomorphisme. Alors  $G$  est engendré par  $\exp(V)$ .

▷ Soit  $W = \exp(V) \subseteq G$ , voisinage ouvert de  $e$ .  $W^{-1}$  également. Le groupe engendré par  $\exp(V)$  est le sous-ensemble de  $G$  formé des produits d'éléments de  $W$  et de  $W^{-1}$ ; c'est un sous-groupe  $H$  de  $G$ . Montrons que  $H$  est un ouvert fermé. Par fait général, le produit fini d'ouverts est ouvert dans un groupe topologique, donc  $H$  est ouvert.  $H$  est alors automatiquement fermé dans un groupe topologique. Comme  $G$  est connexe,  $G = H$ . ■

On peut démontrer le fait intéressant suivant qui permet de passer du continu au  $C^\infty$  :

**Théorème. (*Paramétrisation des morphismes continus*)**

Soit  $G$  un groupe de Lie. Alors tout morphisme  $\underline{G}$  de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $G$  est  $C^\infty$  et donc un sous-groupe à un paramètre.

On utilise le fait suivant :

**Proposition. (*Unicité de la racine carrée*)**

Munissons  $\mathcal{G}$  d'une norme. Soit  $B(0,2r)$ ,  $r > 0$ , sur laquelle  $\exp$  est un difféomorphisme et  $V = \exp(B(0,r))$ . Alors pour tout  $g \in V$ ,  $g$  possède une unique racine carrée dans  $V$ .

▷ Dans l'image de l'exponentielle, posséder une racine carrée n'a rien d'exceptionnel. Si  $g \in V$ , toute racine carrée s'écrit  $\exp(Y)$  pour  $Y \in V$  unique. ■

**Preuve.**

▷ On va utiliser la densité des dyadiques dans  $\mathbb{R}$ . On se place sur  $V = \exp(B(0,M))$  où l'on a une racine carrée unique. Soit  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$  non trivial : il existe  $a > 0$  tel que  $f(a) \neq e$ . On peut supposer  $a$  arbitrairement petit, en fait tel que  $f([-a,a]) \subseteq V$ . On a  $f(\frac{a}{n}) = f(a) = f(\text{frac})^n$  d'où  $f(\frac{a}{n}) \neq e$ . En particulier,  $f(a) = \exp(aX)$  pour un unique  $X$  avec  $aX \in B(0,r)$ , alors par unicité de la racine carrée,  $f(\frac{a}{2}) = \exp(\frac{a}{2}X)$  et  $f(\frac{a}{2^n}) = \exp(\frac{a}{2^n}X)$  puis pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(\frac{k}{2^n}a) = \exp(\frac{ka}{2^n}X)$  et par densité, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(ta) = \exp(taX)$  et pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $f(s) = \exp(sX)$ . ■

**Théorème. (*Théorème de Cartan*)**

Soit  $G$  un groupe de Lie. Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Alors  $H$  est un sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie  $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall t \quad \exp(tX) \in H\}$ .

### 3.5.8 Dérivée de Lie d'une fonction

**Définition. (*Dérivée de Lie d'une fonction*)**

La *dérivée de Lie d'une fonction*  $f$  le long d'un champ de vecteurs  $Y$  est  $L_Y f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_{t,Y,x} - x}{t}$  où  $\alpha_{t,Y,x} = x + e^{tY}$  est le flot de  $Y$  avec point de départ  $t$ .

**Proposition. (*Expression de la dérivée de Lie en coordonnées locales*)**

Si  $X = \sum_j X_j \partial_j$ ,  $L_X(f) = \sum_j X_j \frac{\partial f}{\partial x^j}$ .

### 3.5.9 Compléments

#### Théorème. (*Orbites d'un groupe de Lie*)

Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur une variété lisse  $M$ . Alors les orbites de  $M$  sous l'action de  $G$  sont des variétés lisses immérgeées.

⊕ (*Idée de la preuve.*) Pour tout  $p \in M$ , le sous-groupe d'isotropie  $G_p$  est fermé dans  $G$ . Le quotient  $G/G_p$  a une unique structure de variété et  $G$  agit transitivement sur  $G/G_p$ . L'application d'orbitage  $\mathcal{O}_p : G \rightarrow M$  donnée par  $\mathcal{O}_p(g) = g \circ p$  descend lissement sur le quotient pour donner une application lisse  $F_p : G/G_p \rightarrow M$  qui est une bijection de  $G/G_p$  sur l'orbite  $G \circ p$ . L'application  $F_p$  est équivariante relativement aux actions de  $G$  sur  $G/G_p$  et  $M$ , donc a rang constant. Puisque c'est une injection de rang constant,  $F_p$  est une immersion lisse, donc son image  $G \circ p$  est une variété lisse immérgeée dans  $M$ . ■

#### Corollaire

Soit  $G$  un groupe de Lie agissant transitivement sur une variété lisse  $M$ . Pour tout  $p \in M$ ,  $G/G_p \longrightarrow M$  est un difféomorphisme.

$$g \longmapsto g \cdot p$$

## 3.6 Géométrie riemannienne

### 3.6.1 Métriques

#### Exercice 13 (Une métrique dissymétrique ?)

La métrique donnée par

$$\mu = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

sur le demi-plan  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ , est-elle bien symétrique ?

▷ Éléments de réponse.

Oui ! Cette forme signifie exactement que l'on considère  $\frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$ . Elle n'est pas symétrique en échangeant  $x$  et  $y$ , mais qu'importe ; la symétrie du tenseur signifie que

$$\frac{1}{y^2} \textcolor{blue}{dx} \otimes \textcolor{red}{dx} + \frac{1}{y^2} \textcolor{blue}{dy} \otimes \textcolor{red}{dy}$$

doit être égal à

$$\frac{1}{y^2} \textcolor{red}{dx} \otimes \textcolor{blue}{dx} + \frac{1}{y^2} \textcolor{red}{dy} \otimes \textcolor{blue}{dy}$$

ce qui est le cas, car la couleur n'est qu'une notation...

Un exemple de tenseur non symétrique serait  $dx \otimes dy$ , ce que l'on pourrait rendre symétrique en écrivant par exemple  $dx \otimes dy + dy \otimes dx$ , ce qui devrait rappeler des souvenirs aux commutatifs-algébristes.

**Définition-propriété. (*Normes des vecteurs tangents induite par une métrique*)**

Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne. Alors pour tout  $x \in M$ , la quantité

$$\|v\|_x = \sqrt{g_x(v,v)}$$

définit une norme sur  $T_x M \ni v$ .

**Définition. (*Longueur d'une courbe sur une variété*)**

Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée lisse par morceaux sur une variété riemannienne  $(M,g)$ . On note normalement les normes induites par  $g$ . On définit la *longueur* de  $\gamma$  par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

**Définition-propriété. (*Distance induite par une métrique riemannienne*)**

Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne. La quantité  $d_g : M \times M \rightarrow [0,\infty[$  définie pour tous  $p,q \in M$  par

$$d_g(p,q) = \inf\{L(\gamma), \gamma \text{ courbe admissible de } p \text{ à } q\}$$

où une courbe paramétrée  $C^1$  par morceaux  $\gamma$  sur  $M$  est dite *admissible* si sa vitesse  $\gamma'$  n'est jamais nulle, définit une distance sur  $M$ .

**Fait**

Soit  $(M,g)$  une variété riemannienne connexe. La topologie métrique induite par  $d_g$  sur  $M$  coïncide avec la topologie de  $M$ .



En général,  $d_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas différentiable, même sur des exemples simples comme l'ellipsoïde.

**Exercice 14**

Montrer qu'une variété riemannienne compacte admet toujours des points singuliers pour la distance.

**Théorème. (*Existence d'une métrique riemannienne en milieu paracompact*)**

Toute variété topologique paracompacte admet une métrique riemannienne.

▷ On utilise des partitions de l'unité. ■

**Corollaire**

Toute variété topologique paracompacte est métrisable.

**3.6.1.1 Opérations sur les métriques riemanniennes****3.6.2 Connexions****3.6.3 Géodésiques****Reformulation pratique. (*Définition métrique des géodésiques*)**

On appelle *géodésique* un chemin dont la longueur minimise la distance entre deux points pour la métrique. Autrement dit, c'est un chemin en lequel la distance induite par la métrique riemannienne est atteinte.

**Théorème. (*Existence des géodésiques*)**

Sur une variété riemannienne munie d'une connexion affine, les géodésiques existent et sont uniques.

**3.6.4 Transport parallèle****3.6.5 Courbure****3.6.6 Holonomie****3.6.6.1 Théorème d'Ambrose-Singer****3.6.6.2 Théorie de jauge****3.6.6.3 Théorème de réduction d'holonomie de Berger****3.6.7 Équations d'Einstein****3.7 Géométrie différentielle complexe et atlas holomorphes****3.7.1 Définition et remarques élémentaires**

On commence par un rappel :

**Définition. (*Fonction holomorphe à plusieurs variables*)**

Soient  $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ . Soit  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  continue. Supposons  $F = (F_1, \dots, F_n)$ . On dit que  $F$  est *holomorphe* si  $\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(z) = 0$  pour tous  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, z \in \mathbb{C}^n$ , autrement dit, si chaque composante de  $F$  est holomorphe vis-à-vis de chacune des variables. Cette définition vaut pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  également.

**Exercice 15**

Montrer que  $\mathbb{R}^2$  et le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  sont difféomorphes.

**Définition. (*Variété analytique complexe*)**

Soit  $M$  une variété topologique. On dit que  $M$  est une *variété complexe (analytique)* de dimension  $n$  s'il existe un recouvrement  $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ,  $A$  un ensemble complexe et des *cartes holomorphes*  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  telles que  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  soit un biholomorphisme pour tous  $\alpha, \beta \in A$ . L'ensemble des cartes (et éventuellement des ouverts  $U_\alpha$ )  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  est un *atlas holomorphe* ou *complexe* ou *complexe-analytique*, souvent pris maximal.

**Remarques.**

1. Les variétés différentielles sont souvent munies d'autres structures, par exemple, une métrique riemannienne, qui connaissent alors des invariants locaux, dans ce cas la courbure, qui permet de distinguer arbitrairement des voisinages. Certaines autres structures, au contraire, ne sont pas distinguées par des invariants locaux, et c'est le cas des variétés complexes.
2. On rappelle qu'une variété topologique est supposé séparée et à base dénombrable. Toute variété complexe est donc localement compacte, localement connexe par arcs, et donc connexe si et seulement si elle est connexe par arcs ; ou encore, les composantes connexes et connexes par arcs coïncident. Elle est aussi localement simplement connexe. Sur chaque composante connexe, elle est aussi localement métrisable et donc à base dénombrable de voisinages. Enfin, chaque composante connexe est  $\sigma$ -compacte. Une variété complexe est donc paracompacte si et seulement si chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini. On peut montrer que toute variété complexe paracompacte est métrisable. Ainsi, on s'autorise démontrer dans la pratique seulement la séparabilité au lieu de l'existence d'une base dénombrable. On définit également la notion de *variété analytique dénombrable à l'infini* : c'est une variété complexe  $\sigma$ -compacte. On montre qu'une variété complexe est dénombrable à l'infini, si et seulement si, elle a un nombre dénombrable de composantes connexes, ou encore, si elle est à base dénombrable de voisinages.

3. On a défini pour ne pas s'embêter les variétés complexes « à dimension fixe ». De même que pour les variétés différentielles, on aurait pu être plus général (et a priori  $n$  dépend de  $a \in A$ ). Il y a unicité de la dimension en un point pour une variété complexe générale grâce au théorème de Brouwer, en considérant  $C \simeq R^2$  : quitte à considérer l'intersection de deux voisinages, on obtiendrait un homéomorphisme entre la boule unité de  $\mathbb{R}^{1k_1}$  et la boule unité de  $\mathbb{R}^{2k_2}$ . Si de plus l'espace topologique considéré est connexe, il y a unicité de la dimension de la variété complexe (la preuve est la même que dans le cas différentiel). En particulier, la dimension d'une variété complexe est constante sur chaque composante connexe.
4. Contrairement au cas réel, inutile de se poser vraiment des questions de régularité : un atlas holomorphe automatiquement analytique par le théorème de Cauchy à plusieurs variables. Ne nous leurrons pas : les fonctions holomorphes sur des variétés différentielles vont voir leur nombre considérablement réduit par ce fait apparemment (mais un peu trop) accommodant.
5. Un ensemble est une variété complexe si on peut le munir d'une structure de variété analytique complexe. C'est la seule notion qui nous intéresse ici : il est clair qu'une variété topologique abstraite complexe n'est autre qu'une variété topologique réelle de dimension paire (*voir ci-dessous*).

### Exemples. (*Variétés complexes*)

1. Tout ouvert de  $\mathbb{C}^n$  est une variété complexe.
2. Les variétés complexes de dimension 1 sont les *surfaces de Riemann*, auxquelles nous dédions une étude à part.
3. En singeant le cas de l'espace projectif réel, on montre que le  $n$ -ième *espace projectif complexe*  $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}^n\mathbb{C} := \mathbb{C}^{n+1}/(x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad x = \lambda y)$  est une variété complexe de dimension  $n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . C'est une variété compacte et l'on a une surjection continue donnée par la projection canonique de la sphère  $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{CP}^n$ .

### Propriété. (*Atlas complexe sur une variété compacte*)

Toute variété complexe compacte admet un atlas fini.

▷ Même preuve que dans le cas réel. ■

### Fait. (*Variétés complexes vues comme des variétés réelles*)

Toute variété complexe est canoniquement une variété différentielle (réelle), et donc topologique, de dimension paire en chaque point, et de plus orientable.

On procède aux identifications topologiques  $C^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Cette identification est compatible avec le

calcul différentiel, puisqu'une fonction de transition holomorphe est en particulier différentiable. De plus, le déterminant jacobien d'une fonction de transition holomorphe  $f$  est toujours positif en raison des conditions de Cauchy-Riemann :  $\det \text{Jac}(f) = |f'(1)|^2 > 0$  d'où l'orientabilité d'une variété complexe vue comme variété réelle.

### Remarques.

1. La réciproque est une question intéressante, loin d'être automatique. Considérons  $S^{2n}$  la sphère de dimension réelle  $2n$ . Est-elle munie d'une structure différentielle complexe = holomorphe ? (Remarquons que pour  $n$  impair, il n'y a clairement pas de structure complexe.) On montre très difficilement que pour  $n \geq 2$ , il n'existe pas de structure complexe sauf pour  $n = 3$ , c'est-à-dire  $S^6$ , nombre pour lequel c'est un problème ouvert !
2. Plus généralement, la détermination des structures complexes sur une surface réelle fixée revient à l'étude des *espaces de modules* ou de l'*espace de Teichmüller* qui les paramètre à l'action des homéomorphismes isotopes à l'identité près.

### Heuristique

La structure de variété complexe est bien plus rigide que celle de variété réelle. L'étude des variétés complexes compactes est bien plus proche de celle des variétés algébriques que celle des variétés différentielles.

### Définition. (*Fonction holomorphe sur une variété complexe*)

Soient  $M, N$  deux variétés complexes de dimensions respectives  $n$  et  $m$ . Une application continue  $f : M \rightarrow N$  est dite *holomorphe* si toutes les applications  $f$  lue dans les cartes le sont.

Plus précisément, soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue entre deux variétés différentielles complexes.  $f$  est holomorphe si et seulement si pour toutes cartes  $\varphi : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  de  $M$  et  $\psi : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^m$  de  $N$  telles que  $f(U_\alpha) \subseteq U_\beta$ , l'application  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U_\alpha) \rightarrow \varphi(U_\beta)$  est holomorphe (selon la définition de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^m$ ).

### Définition. (*Biholomorphismes*)

Une fonction bijective holomorphe de réciproque holomorphe entre deux variétés complexes est dite *conforme* ou *biholomorphe*. On dit aussi que c'est un *biholomorphisme*.

### Fait

Les biholomorphismes sont les isomorphismes dans la catégorie des variétés complexes.

**Définition. (*Fonction méromorphe sur une variété complexe*)**

Soient  $M, N$  deux variétés complexes de dimensions respectives  $n$  et  $m$ . Une application continue  $f : M \rightarrow N$  est dite *méromorphe* si toutes les applications  $f$  lue dans les cartes le sont.

Plus précisément, soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue entre deux variétés différentielles complexes.  $f$  est méromorphe si et seulement si pour toutes cartes  $\varphi : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$  de  $M$  et  $\psi : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}^m$  de  $N$  telles que  $f(U_\alpha) \subseteq U_\beta$ , l'application  $\varphi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(U_\alpha) \rightarrow \varphi(U_\beta)$  est méromorphe (selon la définition de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{C}^m$ , toutes les normes sur  $\mathbb{C}^m$  étant équivalentes).

**Propriété. (*Formes holomorphes sur une variété compacte*)**

Toute fonction holomorphe d'une variété complexe compacte connexe dans  $\mathbb{C}$  est constante.

▷ C'est une conséquence du principe du maximum (à plusieurs variables). Soit  $f$  une telle fonction. Sur tout ouvert  $U$  de carte  $\varphi$  de la variété  $X$ ,  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe. Or  $\varphi(U)$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}^m$ , car  $X$  est connexe et localement connexe. Puisque  $f$  atteint son maximum, par compacité de  $X$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  également. Elle est donc constante sur  $U$ . Comme  $X$  est connexe, les ouverts de carte s'intersectent donc  $f$  est constante sur  $X$ . ■

**Preuve.**

▷ (*Autre argument*) Plus simplement, il est clair qu'une fonction holomorphe non constante sur une variété complexe connexe est ouverte en généralisant le théorème connu de l'analyse complexe avec les cartes. Par suite, l'image de  $X$  par  $f$  serait un ouvert compact non vide de  $\mathbb{C}$ , mais ça n'existe pas. ■

**Corollaire. (*Pas de théorème de plongement des variétés complexes*)**

Une variété complexe compacte ne se plonge pas nécessairement dans un certain  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ Si c'était le cas, les fonctions coordonnées de  $\mathbb{C}^n$  permettraient de fournir des fonctions holomorphes non constantes. En prenant une variété complexe compacte connexe telle que  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  de dimension non nulle, on conclut. ■

**Définition. (*Variété de Stein*)**

Une variété complexe est dite *de Stein* si elle peut se plonger dans un certain  $\mathbb{C}^N$  pour un  $N \in \mathbb{N}$ .

*Remarque.* D'après ce qui précède, une variété complexe compacte de dimension  $\geq 1$  n'est jamais de Stein.

**Exercice 16**

Montrer que le groupe des biholomorphismes de  $\mathbb{CP}^n$  dans lui-même s'identifie à  $PGL_{n+1}(\mathbb{C})$ .

**3.7.2 Construction de variétés complexes****3.7.2.1 Sous-variétés complexes****Propriété. (*Sous-variété complexe*)**

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$ . Soit  $N$  une partie de  $M$  telle que pour tout point  $p \in N$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  contenant  $p$  telle que  $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{C}^m$  où  $m$  est un entier naturel. Alors  $N$  est une variété complexe de dimension  $m$  en ce point.

**3.7.2.2 Produit de variétés complexes****Propriété. (*Produit de variétés complexes*)**

Le produit cartésien de deux variétés complexes est une variété complexe.

**3.7.2.3 Construction d'une variété complexe par submersion****Propriété. (*Construction d'une variété complexe par submersion*)**

L'image inverse de toute valeur non critique d'une fonction holomorphe est une sous-variété complexe du départ.

**Exercice 17**

La fonction  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \mapsto |z_1|^2 + |z_2|^2$  est une submersion et  $f^{-1}(1) = S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ , donc  $S^3$  de dimension 3 impaire est une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}^2$ . Quelle est l'erreur dans l'affirmation précédente ?

▷ Éléments de réponse.

L'application  $z \mapsto |z|^2$  n'est pas holomorphe !

### 3.7.2.4 Quotient d'une variété complexe par une action de groupe

**Propriété.** (*Quotient d'une variété complexe par une action*)

Soit  $X$  une variété différentielle complexe. Soit  $G$  un groupe agissant sur  $X$ . On suppose que l'action de  $G$  est continue, libre et proprement discontinue. Alors il existe une unique structure naturelle de variété complexe sur  $X/G$ , de sorte que la projection  $p : X \rightarrow X/G$  soit un revêtement holomorphe de  $X/G$ .

### 3.7.3 Espace tangent complexe

**Définition.** (*Espace tangent complexe*)

Si  $M$  est une variété complexe de dimension  $n$  en  $m \in M$ , l'*espace tangent* à  $M$  en  $m$ , noté  $T_m M$ , est l'ensemble des germes de fonctions au voisinage de  $m$  quotienté par la même relation d'équivalence que dans le cas réel.

*Remarque.* Ainsi, de même que dans le cas réel,  $T_m M$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On note souvent  $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$  une base.

**Définition.** (*Espace cotangent complexe*)

Si  $M$  est une variété complexe de dimension  $n$  en  $m \in M$ , l'*espace cotangent* à  $M$  en  $m$ , noté  $T_m^* M$ , est par définition l'espace dual  $(T_m M)^*$ .

*Remarque.* Ainsi  $T_m^* M$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . On note souvent  $(dz_1, \dots, dz_n)$  une base.



# Chapitre 4

## Surfaces de Riemann

### Résumé

En géométrie différentielle et géométrie analytique complexe, une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1, ce qui en fait un bon objet d'étude avant de s'intéresser aux variétés complexes de dimension supérieure : en effet, les fonctions holomorphes lues dans les cartes sont des fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  et il s'agit alors de mobiliser l'analyse complexe en une seule variable. Cette notion a été introduite par Bernhard RIEMANN pour prendre en compte les singularités et les complications topologiques qui accompagnent certains prolongements analytiques de fonctions holomorphes. Par oubli de structure, une surface de Riemann se présente comme une variété différentielle réelle de dimension 2, d'où le nom de surface. Réciproquement, toute surface réelle orientable peut être munie d'une structure complexe, autrement dit être regardée comme une surface de Riemann, ce qui est précisé par le fameux théorème d'uniformisation ; par suite, la surface de Riemann est l'objet parfait pour constituer un bagage d'exemples en topologie algébrique une fois les premières définitions acquises. L'étude des surfaces de Riemann est à la croisée de nombreux domaines mathématiques dont, outre la géométrie différentielle, la théorie des nombres, la topologie algébrique, la géométrie algébrique, les équations aux dérivées partielles... dont elle est une illustration.

### 4.1 Préliminaires

CÉ cours est la suite de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE COMPLEXE ET ATLAS HOLOMORPHES.

#### 4.1.1 Définition et premiers constats

**Définition. (*Surface de Riemann*)**

Une *surface de Riemann* ou *SR* est une variété complexe de dimension 1. On suppose, sauf contexte contraire, que  $X$  est connexe.

### Remarques.

1. Ainsi, une surface de Riemann est canoniquement munie d'une structure différentielle réelle de dimension 2, autrement dit c'est un cas particulier de surface topologique. De plus (*voir la partie de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE COMPLEXE*), cette variété réelle est orientable. On démontrera un jour que réciproquement toute surface réelle orientable possède une structure de surface de Riemann. Ceci nous conforte dans l'idée d'imaginer une surface de Riemann comme, assez simplement, une variété à deux dimensions.
2. Sur une surface de Riemann, le second axiome de dénombrabilité des variétés holomorphes est automatique selon un théorème dû à RADÓ. Il suffira alors, dans la pratique, de vérifier la séparation de l'espace en jeu pour parler de surface de Riemann.
3. Les fonctions de transition sur une surface de Riemann sont des fonctions holomorphes/analytiques de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . On peut donc y appliquer la théorie de l'analyse complexe à une seule variable, ce qui est engageant.

### Exercice 1 (Version simple du théorème de Radó)

Soit  $S$  un espace topologique compact localement homéomorphe à  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $S$  est à base dénombrable.

### Exemples. (Surfaces de Riemann de base)

1. (*Sous-surfaces de Riemann du plan complexe*) Le plan d'Argand-Cauchy est une surface de Riemann.

L'identité de  $\mathbb{C}$  définit un atlas complexe à une seule carte.

Tout ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  est également une surface de Riemann, munie d'un atlas à une seule carte ( $\Omega$  connexe si l'on impose que les surfaces de Riemann doivent être connexes). Malheureusement, on n'a là qu'un seul exemple en plus de  $\mathbb{C}$  lui-même : on comprend aisément que deux ouverts stricts de  $\mathbb{C}$  sont grossièrement les mêmes, on dira qu'ils sont biholomorphes. C'est le théorème de représentation conforme de Riemann qui assure que tout ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  est biholomorphe au disque unité. On verra que les fonctions holomorphes et méromorphes sur  $\mathbb{C}$  ou  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  en tant que surfaces de Riemann sont celles de l'analyse complexe.

2. Souvent, on considère les cas particuliers suivants. Le *disque unité* (*de Poincaré*)  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z| < 1\}$  est ainsi une surface de Riemann. De même, le *demi-plan complexe supérieur* ou *demi-plan de Poincaré*  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  est une surface de Riemann. On montre directement que  $\Delta$  et  $\mathbb{H}$  sont biholomorphes.

En effet, il suffit de considérer  $\Delta \longrightarrow \mathbb{H}$ .

$$z \longmapsto i \frac{1+z}{1-z}$$

3. Tout ouvert d'une surface de Riemann  $X$  est une sous-variété complexe de  $X$  de codimension nulle, donc c'est encore une surface de Riemann, ce qui est pratique pour construire ce que l'on appelle des *sous-surfaces de Riemann*.
4. (*Sphère de Riemann*) On peut considérer des surfaces de Riemann qui ne se plongent pas dans  $\mathbb{R}^2$ . La *droite projective complexe*  $\mathbb{CP}^1$ , aussi notée  $\overline{\mathbb{C}}$ , que l'on peut décrire comme le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{C}$  (on rappelle : via des projections stéréographiques), est une surface de Riemann, dite *sphère de Riemann*. Explicitons un atlas : on considère l'ouvert  $U_1 = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ , de carte  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi_1(z) = \frac{1}{z}$  en convenant  $\varphi_1(\infty) = 0$ , et l'ouvert  $U_2 = \mathbb{C}$ , de carte  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z$ . On a par convention fixé 0 au pôle Sud,  $\infty$  au pôle Nord de la sphère. On n'a pas grand chose à vérifier :  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$  est bien un biholomorphisme<sup>a</sup>.

En fait, cette structure est l'unique structure complexe définissable sur  $S^2$ . On montrera, par le théorème d'uniformisation, que toute surface de Riemann distincte de  $\mathbb{C}$  et  $\Delta$ , compacte et simplement connexe est biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ , et même que toute surface de Riemann est un quotient de l'une de ces trois surfaces.

Cet exemple est d'une symétrie remarquable. De plus, il a le plus gros groupe d'automorphisme comme on l'étudiera assez tôt. Notons aussi que la sphère de Riemann contient  $\mathbb{C}$  et donc  $\Delta$  et  $\mathbb{H}$ .

On rappelle d'autre part que la sphère de Riemann ne se plonge dans aucun  $\mathbb{C}^n$ .

5. Comme on l'a vu,  $\mathbb{CP}^n$  est une variété complexe mais pas une surface de Riemann pour  $n \geq 2$ . Par contre, on montrera que toute surface de Riemann compacte se plonge dans un espace projectif complexe. À l'inverse, toute surface de Riemann non compacte se plonge dans un certain  $\mathbb{C}^N$  (mais ces plongements ne valent plus pour des variétés complexes!).
6. (*Surface de Riemann donnée comme variété algébrique lisse*)  $V = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z,w) = 0\}$  où  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $(\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w}) \neq (0,0)$  en aucun point, est une surface de Riemann éventuellement non connexe.

Soit  $(z_0, w_0) \in V$ , et on suppose sans perte de généralité que  $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$ . Alors  $\varphi : U_{z_0} \rightarrow V$  définie par le théorème des fonctions implicites à deux variables est holomorphe de sorte que  $(z, \varphi(z)) \in V$ . Même chose pour  $(z_1, w_1) \in V$  avec  $\frac{\partial F}{\partial z}(z_1, w_1) \neq 0$  et  $\varphi_1 : U_{w_1} \rightarrow V$ . Dans l'intersection de ces deux ouverts de cartes,  $\varphi_{z_1, w_1}^{-1} \circ \varphi_{z_0, w_0}(z) = \varphi_1^{-1}(z, \varphi(z)) = z$  est holomorphe.

---

<sup>a</sup> On peut définir la sphère de Riemann d'une autre façon équivalente. On note  $S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$  que l'on recouvre par les deux ouverts  $S^2 \setminus N$  et  $S^2 \setminus S$  où  $N = (0,0,1)$  et  $S = (0,0,-1)$ . On définit les projections  $\varphi_N : S^2 \setminus N \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  et  $\varphi_S : S^2 \setminus S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ .

$P = (X,Y,Z)$	$\longmapsto$	$\frac{X+iY}{1-Z}$	$P = (X,Y,Z)$	$\longmapsto$	$\frac{X-iY}{1+Z}$
---------------	---------------	--------------------	---------------	---------------	--------------------

L'identité  $\varphi_N = \frac{1}{\varphi_S}$  sur  $S^2 \setminus \{N,S\}$  permet de conclure.

Citons encore un autre atlas complexe sur  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , cette fois défini directement par la géométrie (complexe) projective. On rappelle que  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/Cs$ . En prenant les ouverts  $U_1 = \{[z:w], w \neq 0\}$  et  $U_2 = \{[z:w], z \neq 0\}$  et les cartes  $\varphi_0([z:w]) = z/w$ ,  $\varphi_1([z:w]) = w/z$ , on a clairement un atlas

holomorphe et de plus  $[z : w] \mapsto \begin{cases} \frac{z}{w} & \text{si } w \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$  est un biholomorphisme de  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ce qui garantit que les deux structures présentées sont équivalentes. De plus, ce dernier atlas est symétrique en les coordonnées projectives, ce qui est doux.

*Remarque.* Tous les exemples précédents se plongent facilement dans  $\mathbb{R}^3$ . En fait, c'est toujours possible : on peut montrer, mais cela requiert la connaissance de théorèmes de classification des années 1960, qu'une surface topologique orientable se plonge toujours dans  $\mathbb{R}^3$ .

On peut définir comme sur toute variété complexe la notion d'

### Définition. (*Application holomorphe entre surfaces de Riemann*)

Soient  $X, Y$  deux surfaces de Riemann. Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite *holomorphe* si elle est holomorphe de  $X$  sur  $Y$  en tant que variétés complexes.

Plus précisément, soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux surfaces de Riemann. Alors  $f$  est holomorphe si et seulement si pour toutes cartes  $\varphi : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$  de  $M$  et  $\psi : U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$  de  $N$  telles que  $f(U_\alpha) \subseteq U_\beta$ , l'application  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U_\alpha) \rightarrow \varphi(U_\beta)$  est holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

#### Fait

Toute fonction holomorphe entre surfaces de Riemann est  $C^\infty$ .

### Propriétés. (*Ordre d'un zéro d'une fonction méromorphe sur une SR*)

Soient  $X$  une surface de Riemann,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe.

1. On dit que  $f$  admet un *zéro* d'ordre  $n$  en  $p \in X$  si et seulement si pour une carte  $U \ni p$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  a un zéro d'ordre  $n$  en  $\varphi(p)$ . Le caractère zéro ou non est indépendant du choix de la carte.
2. De même, l'ordre d'un zéro ne dépend pas de la carte choisie.

▷ Ceci vient de ce que les changements de carte sont des biholomorphismes. ■

→ *Notation.* L'ordre d'un zéro  $z$  d'une fonction holomorphe sur une surface de Riemann à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est noté  $\text{ord}_z(f)$ .

Cependant, la notion d'*holomorphie pure* est sans grand intérêt, comme on l'a déjà remarqué dans le cas général des variétés complexes. L'exercice suivant démontre un énoncé de type « boule chevelue ».

#### Exercice 2

Soient  $X$  une surface de Riemann compacte et  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. Montrer que  $\varphi$  est constante.

▷ La démonstration est la même que dans le cas général des variétés complexes. ■

Certaines propriétés utiles de l'analyse complexe peuvent se généraliser toutefois.

### Propriété. (*Biholomorphismes entre surfaces de Riemann*)

Toute bijection holomorphe entre surfaces de Riemann est un biholomorphisme.

▷ On peut appliquer le théorème d'inversion locale dans  $\mathbb{C}$ . ■

### Propriété. (*Singularité effaçable sur une surface de Riemann*)

Soient  $U$  un ouvert d'une surface de Riemann  $X$  et  $x$  un point de  $U$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $U \setminus \{x\}$ , bornée sur un voisinage de  $x$ . Alors  $f$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U$ .

▷ Considérons directement et sans problème que notre surface de Riemann est  $U = X$ . Soit  $(V, \varphi)$  une carte centrée en  $x$ , i.e.  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $\varphi(x) = 0$ . On a donc  $f \circ \varphi^{-1}$  une fonction holomorphe sur au moins sur un disque épointé  $\varepsilon\Delta$  avec  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème de prolongement de Riemann connu en analyse complexe, quitte à post-composer encore par une carte, on peut prolonger  $f \circ \varphi^{-1}$  sur  $\varepsilon\Delta$ . En posant  $f(x) = f \circ \varphi^{-1}(0)$ , on obtient donc une fonction holomorphe sur  $U$ . ■

**VOC** Par abus, on appellera également cette propriété *théorème de prolongement de Riemann*.

### Exercice 3 (*Biholomorphisme entre sous-surfaces cofinies*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann compactes. Soient  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$  et  $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq Y$  deux ensembles finis de points,  $m, n \in \mathbb{N}$ . Montrer que tout biholomorphisme de  $X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$  vers  $Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$  peut s'étendre à un biholomorphisme de  $X$  vers  $Y$ . En déduire que si  $X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$  et  $Y \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$  sont biholomorphes, alors  $m = n$ .

▷ Éléments de réponse.

En se débrouillant bien, autour de chaque  $y_i$ , on peut exhiber une carte  $(\varphi_i, D_i)$ ,  $D_i$  relativement compact, telle<sup>1</sup> que  $\varphi_i(D_i) = \Delta$  et  $D_i \cap D_j = \emptyset$  dès que  $i \neq j$ . Soit  $\varphi$  notre biholomorphisme. Notons  $K = \varphi^{-1}(Y \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_n))$  qui est fermé dans  $X$ , donc compacte. Réciproquement,  $\varphi(\underbrace{X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}}_{X'} \setminus K)$  est inclus dans  $D_1 \cup \dots \cup D_n$ , et

$X'$  est une surface de Riemann en tant qu'ouvert d'une surface de Riemann. Par le théorème de prolongement itéré à un nombre fini de points, donc isolés, on peut étendre  $\varphi|_{X'}$  à  $\tilde{f} : X' \rightarrow D_1 \cup \dots \cup D_n$ . On recolle  $\tilde{f}$  et  $\varphi$  définies sur des ouverts et coïncidant sur l'intersection pour obtenir  $\tilde{\varphi} : X \rightarrow Y$ , une extension de  $\varphi$ . On peut faire la même chose avec  $\varphi^{-1}$  que l'on étend à  $\psi$  holomorphe. Alors assez clairement (ou fastidieusement 😊)  $\psi \circ \varphi$  et  $\varphi \circ \psi$  sont extensions des identités, donc  $\psi$  et  $\varphi$  sont biholomorphismes réciproques entre  $X$  et  $Y$ .

Le deuxième point aurait pu se montrer via le groupe fondamental.

<sup>1</sup> On peut prendre  $\Delta$  : en effet,  $D_i$  est relativement compacte et le théorème d'uniformisation de Riemann assure que tout ouvert simplement connexe borné du plan complexe est biholomorphe à  $\mathbb{C}$ . Puisqu'une variété complexe est localement simplement connexe, on peut donc se ramener à ce cas.

**Exercice 4 (Atlas holomorphe sur une sous-surface cofinie)**

Soit  $S$  une surface topologique compacte et soient  $p_1, \dots, p_n \in S, n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $S \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  soit muni d'un atlas holomorphe. Montrer qu'il existe au plus un atlas holomorphe maximal sur  $S$  compatible avec l'atlas de  $S \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ . Existe-t-il toujours un tel atlas holomorphe maximal sur  $S$  ?

▷ **Éléments de réponse.**

Par l'exercice précédent, si  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  sont deux atlas holomorphes maximaux sur  $S$ , l'identité  $\varphi : S \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow S \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  avec  $\mathcal{A}_1$  comme premier atlas et  $\mathcal{A}_2$  comme deuxième atlas s'étend en un biholomorphisme  $\tilde{\varphi} : (S, \mathcal{A}_1) \rightarrow (S, \mathcal{A}_2)$ , dont on déduit  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ .

Considérons  $S^2 \setminus N$  qui est biholomorphe à  $\mathbb{C}$ . Or l'atlas sur la sphère de Riemann n'est pas compatible avec la structure de  $\mathbb{C}$ .

**Propriété. (Théorème d'identité)**

Soient  $X$  une surface de Riemann,  $U$  un ouvert connexe de  $X$  et  $D \subseteq U$  un sous-ensemble possédant un point d'accumulation sur  $U$ . Soient  $f, g$  deux fonctions holomorphes sur  $U$ . Si  $f$  et  $g$  coïncident sur  $D$ , alors  $f = g$ .

▷ On commence par choisir un ouvert de carte  $U'$  tel que  $U' \cap D$  possède un point d'accumulation. Dans cette carte locale, on applique le théorème des zéros isolés de l'analyse complexe, ce qui donne que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $U \cap U'$ . Ainsi  $f$  et  $g$  coïncident localement sur  $U$ . Par connexité de  $U$ , elles coïncident sur  $U$ . ■

*Remarque.* Ce théorème des zéros isolés pour les surfaces de Riemann, s'appliquera sans souci aux fonctions méromorphes, à garder en tête dès à présent.

**Heuristique**

Comme on se souvient peut-être, les singularités ou les zéros d'une fonction holomorphe à plusieurs variables ne sont quasi jamais isolées ! En dimension 1, *i.e.* sur une surface de Riemann, ce phénomène n'apparaît pas puisque l'on se ramène toujours à l'analyse complexe (à une variable). On comprend donc que nombreux de résultats qui suivent seront significativement oblitérés par l'augmentation de dimension, autrement dit sont propres aux surfaces de Riemann, variétés complexes de dimension 1.

**Définition. (Isomorphisme de surfaces de Riemann)**

Deux surfaces de Riemann sont *isomorphes* (*en tant que surfaces de Riemann*) ou *biholomorphes* ou *biholomorphiquement équivalentes* s'il existe un biholomorphisme entre les deux, *i.e.* une bijection holomorphe de réciproque holomorphe.

Sur une surface de Riemann, nous allons utiliser dans la section suivante la notion d'application méromorphe (en fait, seulement de *fonction complexe méromorphe*), bien plus riche que celle de fonction holomorphe.

Avant cela, citons un lemme de normalisation formidablement riche de conséquence, permettant de ramener dans nombre de cas l'étude des fonctions holomorphes à l'analyse complexe. En effet, les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  sont la somme d'une série entière, autrement dit elles sont associées à une suite numérique qui est un invariant dénombrable. Ce n'est plus le cas sur une surface de Riemann, mais on peut essayer de s'en approcher.

**Lemme. (*Forme locale d'une application entre surfaces de Riemann*)**

Soit  $\phi : X \rightarrow Y$  une application holomorphe entre surfaces de Riemann, et  $\varphi(x_0) = y_0$  où  $x_0 \in X$ . Alors il existe des cartes  $\phi_x$  et  $\phi_y$  centrées telles que  $\phi_y \circ \phi \circ \phi_x^{-1}(z) = z^n$  pour tout  $z$  dans l'ouvert de  $\varphi_x$ , avec  $n \geq 1$ .

En particulier, si  $n = 1$ , on a une condition suffisante pour que  $\phi$  soit un biholomorphisme local.

▷ On choisit des cartes centrées en  $y_0$  et  $x_0$ , respectivement  $\phi_y$  et  $\phi'_x$ . Par définition,  $\phi_y \circ \phi \circ \phi_x^{-1}(w) = h(w)$  où  $h$  est une fonction holomorphe sur l'ouvert  $\varphi'_x(U_x)$  contenant 0 à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telle que  $\phi_y \circ \phi \circ \phi_x^{-1}(0) = 0$ . En utilisant la forme locale des applications holomorphes sur  $\mathbb{C}$ , on peut écrire  $h(w) = w^n g(w)$  avec un certain  $n \geq 1$  et  $g(0) \neq 0$ . On convoque ensuite la propriété de racine  $n$ -ième d'une fonction holomorphe non nulle qui nous donne une fonction  $F(w)$  telle que  $F^n(w) = g(w)$  donnée par  $F(w) = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Log}(g)(w)}$ , de sorte  $z^n = w^n g(w) = w^n F(w)^n$ . Posons donc  $\psi : w \mapsto wF(w)$ .

$$\begin{array}{ccc} x_0 \odot & \xrightarrow{\varphi} & \odot y_0 \\ \varphi_x \downarrow & & \downarrow \varphi_y \\ 0 \odot & \xrightarrow[h:w \mapsto w^n g(w)]{} & \odot 0 \\ \downarrow & & \swarrow \\ z = wF(w) \odot & & \end{array}$$

Alors  $\phi_X = \psi \circ \phi'_X$  est la carte cherchée. En effet, la composition  $\phi_y \circ \phi \circ \phi_x$  envoie  $z = wF(w)$  sur  $h(w) = w^n g(w) = z^n$ , ce que l'on voulait. ■

**VOC** On suppose  $n \geq 2$ , i.e.  $\phi$  n'est pas un biholomorphisme local en  $z$ . On dit que  $x_0$  est un *point de ramification* de  $\varphi$  et  $y_0$  en est un *point de branchement*, mais parfois ces deux notions sont confondues, à juste droit. Le nombre  $n$  étant clairement unique, on l'appelle *degré de ramification* ou plus simplement *multiplicité* de la fonction méromorphe  $f$  en  $x_0$ . Dans le lemme, les applications  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont appelées *coordonnées locales* en  $x$ .

**Exercice 5**

Soient  $X, Y$  deux surfaces de Riemann compactes. Soit  $y \in Y$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe telle que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  où  $k \in \mathbb{N}$ ; on a toujours  $f^{-1}(y)$  fini. Montrer qu'il existe un voisinage  $D$  de  $y$  et des voisinages  $D_1, \dots, D_k$  respectivement de  $x_1, \dots, x_k$  tels qu'il existe un biholomorphisme centré  $\psi : \Delta \rightarrow D$ , i.e.  $\psi(0) = y$ , et des biholomorphismes centrés  $\varphi_i : \Delta \rightarrow D_i$ , i.e.  $\varphi_i(0) = x_i$ , de sorte que  $f^{-1}(D) = D_1 \sqcup \dots \sqcup D_k$  et  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi_i(z) = z^{n_i}$  pour tout  $z \in \Delta$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , avec  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $n_i \geq 1$ .

On retrouve par exemple :

**Conséquence. (*Théorème de l'application ouverte sur des SR*)**

Toute fonction holomorphe non constante entre surfaces de Riemann est ouverte.

▷ Puisque les fonctions puissances sont ouvertes ■

**Conséquence. (*Principe du maximum sur une surface de Riemann*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann. Si une fonction  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe est non constante, elle n'atteint pas son maximum.

▷ On a déjà vu que le principe du maximum sur une variété complexe pouvait découler du théorème de l'application ouverte correspondant. ■

On aura les conséquences usuelles du principe du maximum. Et même :

**Conséquence. (*Théorème de Liouville*)**

Toute fonction bornée holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est constante.

▷ La fonction  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est, à changement de point de vue près, définie de  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  et bornée par hypothèse. Par le théorème de prolongement de Riemann, on obtient une fonction holomorphe  $\tilde{F} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ . En particulier,  $\tilde{F}$  est continue sur un compact, et elle devrait donc atteindre son maximum, ce qui contredit le principe précédent. ■

Ou encore :

**Conséquence. (*Surjectivité des fonctions holomorphes sur une SR compacte*)**

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une fonction holomorphe non constante où  $X$  est une surface de Riemann compacte et  $Y$  une surface de Riemann. Alors  $\varphi$  est surjective. En particulier,  $Y$  est compacte.

En particulier, si  $X$  est une SR compacte et  $Y$  une SR non compacte,  $\text{Hom}_{SR}(X, Y) = \{\text{constantes}\}$ .

$\triangleright \varphi(X)$  est un ouvert, car  $\varphi$  est ouverte, et un fermé, car compact, car  $\varphi$  est continue et  $X$  est compacte, de  $Y$ . Or  $Y$  est connexe par hypothèse tacite sur les surfaces de Riemann. Donc  $\varphi(X) = Y$ .

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement quelconque de  $Y$ . Les ouverts  $\varphi^{-1}(U_i), i \in I$  recouvrent  $X$  d'où un sous-recouvrement fini  $(\varphi^{-1}(U_i))_{i \in I'}$ . Or  $\varphi \circ \varphi^{-1}(U_i) = U_i$  et  $\varphi$  est surjective donc  $(U_i)_{i \in I'}$  recouvre  $Y$ . Ainsi  $Y$  est compacte. ■

## 4.1.2 Corps des fonctions méromorphes

### 4.1.2.1 Premières propriétés

**Définition.** (*Fonction méromorphe sur une surface de Riemann*)

Soit  $X$  une surface de Riemann. Une *fonction méromorphe* sur  $X$  est une fonction  $F : X \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$  où  $D \subseteq X$  est un sous-ensemble discret et fermé, telle que la précomposition  $F \circ \varphi^{-1}$  avec chaque carte de  $X$  est une fonction méromorphe, et tels que  $f$  tend vers l'infini pour tout  $p$  dans  $D$ . Les éléments de  $D = D(F)$  sont appelés *diviseurs* ou (après la proposition suivante) *pôles* de  $F$ . On appelle *pôles* ou (après la proposition suivante) *diviseurs* de  $F$  les points qui lus dans des cartes sont des pôles.

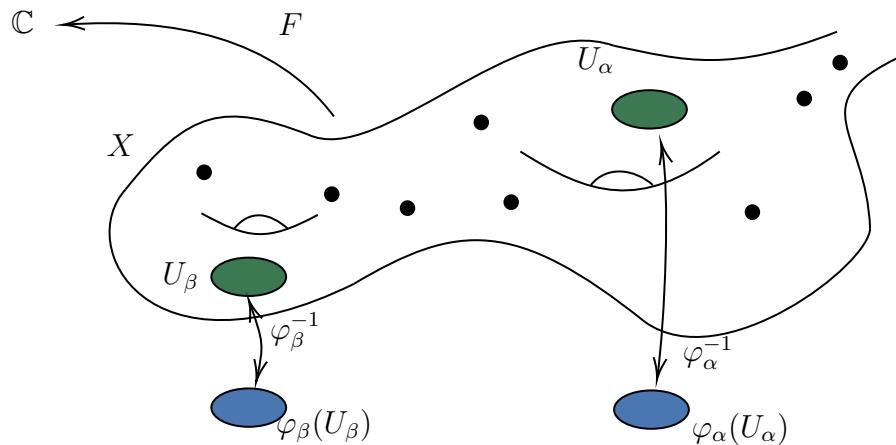


FIGURE 4.1.1 : *Fonction méromorphe sur une surface de Riemann*. —

Les points noirs sont les diviseurs de  $F$ , sur lesquels  $F$  n'est pas définie. Sur les ouverts  $U_\alpha, U_\beta$ , la fonction lue dans les cartes est méromorphe, avec donc un ensemble discret fermé de pôles sur  $\mathbb{C}$  sur cet ouvert.

On a deux types de singularités a priori sur une fonction méromorphe : les diviseurs et les pôles lus dans les cartes. Précisons ce fait.

### Propriétés. (*Ordre d'un pôle d'une fonction méromorphe sur une SR*)

Soient  $X$  une surface de Riemann,  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe,  $D$  l'ensemble de ses diviseurs.

1. Il n'y aucun problème pour définir les zéros d'une fonction méromorphe de la même manière que pour une fonction holomorphe, sur exactement  $f$  restreinte à  $X \setminus D$ .
2. On dit que  $f$  admet un *pôle* d'ordre  $n$  en  $p \in X \setminus D$  si et seulement si pour une carte  $U \ni p$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  a un pôle d'ordre  $n$  en  $\varphi(p)$ . Le caractère pôle ou non ne dépend pas de la carte choisie.
3. De même, l'ordre des pôles ne dépend pas de la carte choisie.
4. Les pôles d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann sont encore isolés.
5. Au voisinage d'un pôle,  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \infty$ , ce qui a un sens par le point précédent.
6. Même remarque au voisinage d'un diviseur.
7. L'ensemble  $\{\text{pôles}\} \cup \{\text{diviseurs}\}$  est un fermé de  $X$  constitué de points isolés. En particulier, **une fonction méromorphe sur  $X$  est exactement la donnée  $D \subseteq X$  fermé discret, et  $f : X \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe avec  $\lim_{z \rightarrow p} f(z) = \infty$  pour tout  $p \in D$ .**

Par suite, on peut réunir diviseurs et pôles lus dans les cartes en une seule famille, dite *diviseurs* ou *pôles* indifféremment.

▷ L'invariance de la propriété de pôle et de leurs ordres vient encore de ce que les changements de carte sont des biholomorphismes. Même remarque pour la limite d'une fonction méromorphe au voisinage d'un pôle. Quant aux diviseurs, c'est dans la définition ! L'isolation des pôles est due à l'ouverture des ouverts de carte. Enfin,  $\{\text{pôles}\} \cup \{\text{diviseurs}\}$  est isolé, car  $\{\text{pôles}\}$  l'est et ce sont deux ensembles disjoints. ■

→ *Convention.* On préférera le terme de pôles à celui de diviseurs qui désignera une notion autre.

→ *Notation.* L'ordre d'un pôle ou d'un zéro  $z$  d'une fonction méromorphe  $f$  non nulle sur une surface de Riemann est noté  $\text{ord}_x(f)$ , avec la convention  $\geq 0$  dans le cas d'un zéro et  $\leq 0$  dans le cas d'un pôle, ce que nous vérifierons d'abord sur des exemples. L'ordre nul correspond au cas où la fonction est définie et non nulle en un point. Si  $f = 0$ , on pose enfin  $\text{ord}_p(f) = \infty$  pour tout  $p \in X$ .

### Reformulation pratique. (*Ramification des fonctions méromorphes*)

Soit  $f$  une fonction méromorphe sur une surface de Riemann  $X$ . Soit  $p \in X$ . Alors  $p$  est un point de ramification de  $f$  si et seulement si  $|\text{ord}_p(f)| \geq 2$  et alors le degré de  $f$  en  $p$  est  $|\text{ord}_p(f)|$ . Avec la convention  $\infty$ , on étend donc la définition de la ramification des fonctions holomorphes.

Le point de vue suivant est fondamental.

**Propriété.** (*Prolongement d'une fonction méromorphe grâce à  $\mathbb{CP}^1$* ) 

Soit  $X$  une surface de Riemann et  $F \in \mathcal{M}(X)$ . Soit  $D$  l'ensemble des diviseurs de  $F$ . On définit une extension de  $F$  quant à la fois à la source et au but  $\tilde{F} : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  en posant  $\tilde{F}(p) = \infty$  pour tout  $p \in D$ . Alors  $\tilde{F}$  est une application holomorphe.

Réiproquement, si  $g : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est holomorphe non constante en  $\infty$ , alors la fonction  $g|_{g^{-1}(\mathbb{C})}$  est une fonction méromorphe sur  $X$ .

▷ Il faut et suffit d'observer que  $\tilde{F}$  est holomorphe sur un voisinage d'un point quelconque  $p \in D$ . On remarque que pour un tel point  $p$ , on a  $\lim_{z \rightarrow p} F(z) = \infty$ . Ainsi, sur un voisinage de  $p$ , l'image de  $F$  ne contient pas 0. En se rappelant que  $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la carte  $\varphi : C \setminus \{0\} \cup \{\infty\} \rightarrow C$  qui à  $w \rightarrow \frac{1}{w}$  est seule à considérer pour  $p$  et nous donne bien que  $F$  est holomorphe.

Réiproquement,  $g^{-1}(\mathbb{C})$  est bien fermé, et discret par le théorème d'identité. ■

**Mnémonik :** on se rappellera qu'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann  $X$  est une application non constante en  $\infty$  de  $X$  dans  $\mathbb{CP}^1$ . Schématiquement :

$$\mathcal{M}(X) \hat{=} \{\text{fonctions } f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1 \text{ holomorphes}\} \setminus \{\infty\}.$$

Remarquer que cela n'aurait pas de sens d'identifier un quotient de fonctions holomorphes avec une application à valeurs dans  $\mathbb{CP}^1$  si l'on est en dimension  $> 1$ .

→ *Notation.* Soit  $X$  une surface de Riemann. On note  $\mathcal{M}(X)$  l'ensemble des fonctions méromorphes sur  $X$ .

**Corollaire.** (*Structure de l'ensemble des fonctions méromorphes*)

Si  $X$  est une surface de Riemann connexe, alors  $\mathcal{M}(X)$  est un corps.

▷ Il suffit d'adopter ce point de vue et de remarquer que l'inverse dans  $\mathbb{CP}^1$  d'une fonction non constante en  $\infty$  est une fonction non nulle et réciproquement. ■

*Remarque.* Si  $X$  est une surface de Riemann connexe compacte, on peut montrer que  $\mathcal{M}(X)$  est un corps de degré de transcendance sur  $\mathbb{C}$  égal à 1. (Et même, toute extension transcendante de  $\mathbb{C}$  de degré 1 est le corps des fonctions méromorphes d'une certaine surface de Riemann !)

**Exercice 6** (*Valuation d'ordre sur le corps des fonctions méromorphes*)

Montrer que l'ordre en un point fixé définit une valuation sur le corps  $\mathcal{M}(X)$ , en particulier c'est un corps topologique.

Dans le cas des surfaces de Riemann compactes, on a une simplification notable :

### Proposition

Une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte n'a qu'un nombre fini de pôles.

▷ L'ensemble des pôles d'une fonction méromorphe est par hypothèse discret et fermé, donc fermé dans un compact, donc compact. Or un compact discret est fini. ■

Démontrons :

#### Propriété. (*Théorème de Rouché sur une surface de Riemann*)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Alors le nombre de zéros comptés avec multiplicité d'une fonction méromorphe non nulle sur  $X$  égale le nombre de ses pôles comptés avec multiplicité.

▷ Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  une fonction méromorphe, dont on déduit une fonction holomorphe encore notée  $f$  de  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Traitons le cas où  $f$  n'est pas constante, autrement c'est évident. Soient  $x, y$  tels que  $f(x) = y$ . On rappelle qu'en coordonnées locales bien choisies autour de  $x$  et  $y$ , on a  $f(z) = z^k$  où  $k = v_x$  est le degré de ramification de  $f$  en  $x$ . L'ensemble  $f^{-1}(y)$  est un fermé de  $X$ , discret puisque  $f$  n'est pas constante, donc fini, car  $X$  est compact. Définissons donc  $d(y) = \sum_{f(x)=y} v_x$ .

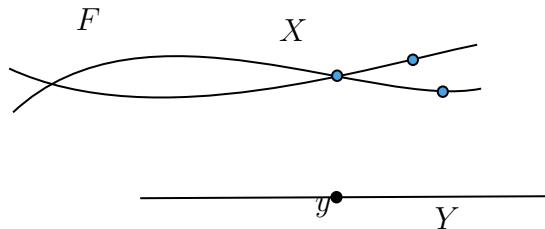
Alors  $d$  est une fonction localement constante. En effet, soit  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Choisissons une carte  $U$  en  $x$  et des cartes  $V_i$  autour des  $x_i$ , avec  $f(V_i) \subseteq U$ . Quitte à remplacer  $U$  par  $\cap_i f(V_i)$  par  $V_i \cap f^{-1}(\cap_i f(V_i))$ , on peut supposer que  $f(V_i) = U$  pour tout  $i$ , puisque  $f$  est ouverte. Enfin, on peut supposer que  $f^{-1}(U) = \cup_i V_i$  en remplaçant  $U$  par  $U \setminus f(X \setminus \cup_i V_i)$  et en intersectant  $V_i$  avec la préimage du nouveau  $U$ , car  $f$  est de plus fermée, car  $X$  est compact. Puisque localement  $f$  est une fonction puissance, en réduisant  $U$  puis l'intersectant aux  $V_i$ , on peut enfin supposer que pour tout  $y \neq y' \in U$ ,  $y'$  a exactement  $v_{x_j}$  préimages dans  $V_j$ , et donc dans  $U$ .

Par connexité de  $Y$ , elle est constante. En particulier,  $d(0) = d(\infty)$ , ce qui est ce que l'on recherchait. Cette preuve prendra tout son sens avec la théorie des revêtements ramifiés, développée plus tard dans cette étude. ■

On peut définir plus généralement :

#### Définition-propriété. (*Degré d'une fonction méromorphe en un point*)

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann compacte. Alors il existe  $n = \deg_f(y) = d_f(y) \in \mathbb{N}^*$ , le *degré* de  $F$ , tel que pour tout  $y \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $\sum_{x \in F^{-1}(y)} m_x F = n$  où  $m_x$  note la multiplicité de  $f$  en  $x$ . C'est donc le nombre d'antécédents comptés avec multiplicité.

FIGURE 4.1.2 : *Degré d'une fonction méromorphe.* —

*Remarque.* On rappelle pour la multiplicité  $m_y f$  qu'en  $y = 0$ , on retrouve l'ordre d'un zéro de  $f$ . En  $y = \infty$ , on retrouve l'opposé de l'ordre d'un pôle de  $f$  (la multiplicité étant toujours positive et  $z \mapsto \frac{1}{z}$  étant un biholomorphisme).

La proposition rappelle que les fibres sont de cardinal constant sur un compact connexe.

#### Corollaire. (*Constance du degré*)

Le degré d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte connexe est constant.

Si  $X$  n'est pas connexe, il est constant sur chaque composante connexe.

En général, étant donnée une surface de Riemann  $X$ , on se posera les questions suivantes :

- ★ quel est le corps des fonctions méromorphes sur  $X$ ? En particulier, y en a-t-il des non constantes (théorème d'uniformisation, constaté d'abord sur des exemples) ?
- ★ Que vaut la somme des ordres des pôles et des zéros, selon le signe, d'une fonction méromorphe donnée (théorèmes de Rouché) ?
- ★ En leur imposant un lieu fini de diviseurs et un ordre maximal à chaque pôle, quelle structure quantitativement, en fait, quelle dimension, a ce sous-ensemble des fonctions méromorphes (théorèmes de Riemann-Roch) ?
- ★ Étant donné un ensemble convenant de pôles et de zéros, puis-je construire une fonction méromorphe ayant exactement ces pôles et ces zéros ou sous quelles conditions sur cet ensemble (théorèmes d'Abel) ?
- ★ Peut-on calculer un élément primitif de l'extension  $\mathcal{M}(X)/\mathbb{C}$ ?

Nous allons illustrer ces questions sur des exemples relativement simples ( $\mathbb{CP}^1$ , courbes elliptiques) avant de démontrer des résultats généraux et cruciaux.

#### 4.1.2.2 Diviseurs

Dans cette section, on considère  $X$  une surface de Riemann compacte connexe.

### Définition. (*Groupe des diviseurs*)

On note  $\text{Div}(X)$  le groupe abélien libre engendré par  $X$ . Un élément de  $\text{Div}(X)$  sera donc de la forme  $\sum_{i=1}^k n_i[p_i]$  avec  $k$  un entier naturel,  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $p_i \in X$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $[p]$  désignant l'image de  $p$  dans  $\text{Div}(X)$  par  $p \mapsto 1.p$ . Les éléments de  $\text{Div}(X)$  seront appelés *diviseurs (méromorphes) (de  $X$ )*.

Le *degré* d'un diviseur  $\sum_{i=1}^k n_i[p_i]$  est l'entier  $\sum_{i=1}^k n_i$ .

### Topologie sur le groupe des diviseurs

Le groupe  $\text{Div}(X)$  engendré par les points de  $X$ , possède une structure naturelle d'espace topologique en identifiant un diviseur  $n_1[p_1] + \dots + n_k[p_k]$  à la mesure  $\sum_{i=1}^k n_i \delta_{p_i}$  et en considérant la topologie faible dans l'espace des mesures finies.

→ *Notation.* L'ensemble des diviseurs ayant intuitivement « le même nombre de zéros et de pôles » se note  $\text{Div}^0(X) = \{D \in \text{Div}(X) \mid \deg(D) = 0\}$ . C'est un sous-groupe, car pour  $f, g \in \text{Div}(X)$ , on constate sans trop d'effort que  $\deg(f + g) = \deg(f) + \deg(g)$ .

### Fait

On a l'isomorphisme de groupes :  $\text{Div}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \times \text{Div}^0(X)$ .

En effet, on a une suite exacte  $0 \longrightarrow \text{Div}^0(X) \longrightarrow \text{Div}(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$  dont une section est donnée par  $n \mapsto n[p_0]$  où  $p_0 \in X$  est fixé,  $X$  étant non vide. Puisque tous les groupes sont abéliens, on a  $\text{Div}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Div}^0(X) \times \mathbb{Z}$ , donnée explicitement par  $D \mapsto (D - \deg(D)[p_0], \deg(D))$ .

### Définition. (*Diviseur principal*)

Soit  $f \in \mathcal{M}(X)^*$ . On appelle *diviseur principal associé à  $f$* , l'élément de  $\text{Div}(X)$  noté  $\text{div}(f)$  ou  $(f)$  défini par  $\text{div}(f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(f)[p]$ . Autrement dit, si  $(z_1, \dots, z_n)$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  sont respectivement les zéros et les pôles de  $f$  comptés avec leur multiplicité, alors  $\text{div}(f)$  est la somme formelle  $\sum_{i=1}^n z_i - \sum_{j=1}^m w_j$ .

On note  $\text{Princ}(X) \subseteq \text{Div}(X)$  l'ensemble des diviseurs principaux de  $X$ .

*Remarque.* Cette définition n'a de sens que parce que  $X$  est compacte et donc  $f$  non nulle n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles.

Remarquons également que  $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$  pour toutes  $f, g \in \mathcal{M}(X)^*$ , par les propriétés correspondantes vis-à-vis des ordres.

**Fait**

$\text{Princ}(X)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Div}(X)$ .

En effet, c'est l'image à valeurs dans un groupe abélien du morphisme :

$$\begin{aligned} \text{div}: \quad \mathcal{M}(X)^* &\longrightarrow \text{Div}(X) \\ f &\longmapsto \sum_{x \in p} \text{ord}_p(x)[p] \end{aligned}$$

**Propriété. (Degré d'un diviseur principal)**

Un diviseur principal est de degré nul.

▷ C'est la traduction du théorème de Rouché sur une surface compacte. ■

*Remarque.* En particulier,  $\text{Princ}(X)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Div}(X)$ .

**Propriété. (Identification des diviseurs principaux)**

Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X)^*$ . Si  $\text{div}(f_1) = \text{div}(f_2)$ , alors  $f_1 = \alpha f_2$  où  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

▷ En effet, on peut définir alors  $g = \frac{f_1}{f_2}$  qui est une fonction holomorphe de  $X$  dans  $\mathbb{CP}^1$ . Cette fonction n'a aucun pôle, car tous ses pôles  $p$  seraient de degré  $\deg_p(f_1) - \deg_p(f_2) = 0$  par identification des coefficients dans  $\text{div}(f_1) = \text{div}(f_2)$ . Ainsi,  $g$  est holomorphe de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ , donc constante égale à  $\alpha$ , car  $X$  est compacte. Par non-nullité de  $f_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ . ■



Un tel résultat quoique énonçable serait complètement faux dans  $\mathbb{C}$ . La compacité de  $X$  est donc cruciale.

**Définition. (Équivalence linéaire de diviseurs)**

Deux diviseurs  $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$  sont dits *linéairement équivalents* si leur différence  $D_1 - D_2 \in \text{Princ}(X)$  est un diviseur principal, autrement dit s'ils sont égaux dans le groupe  $\text{Div}(X)/\text{Princ}(X)$ .

*Remarque.* Grâce aux constantes non nulles, deux diviseurs égaux sont linéairement équivalents.

**Corollaire**

Si  $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$  sont linéairement équivalentes, alors ils ont même degré.

**Définition. (*Effectivité*)**

Soit  $D \in \text{Div}(X)$ . On dit que  $D$  est *effectif* ou *positif* si tous ses coefficients dans la base  $([p])_{p \in X}$  sont positifs ou nuls. On note :  $D \geq 0$ .

On note  $\text{Eff}(X)$  l'ensemble des diviseurs effectifs de  $X$ .

**Définition. (*Ordre sur les diviseurs*)**

Soient  $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ . Alors  $D_2$  est plus grand que  $D_1$ , et  $D_1$  est plus petit que  $D_2$ , et l'on note  $D_2 \geq D_1$ , ou  $D_1 \leq D_2$ , si  $D_2 - D_1 \geq 0$ , autrement dit, si leur différence est effective, ou encore, si pour tout  $p \in X$ , les coefficients  $n_p^{D_2} \geq n_p^{D_1}$ .

**Propriété. (*Effectivité et principauté*)**

Un diviseur principal est effectif si et seulement s'il associé à une fonction constante.

En particulier, le seul diviseur principal effectif est nul.

- ▷ En effet, un tel diviseur est issue d'une fonction méromorphe sans pôle, donc holomorphe, donc constante. ■

**Propriété. (*Décomposition positive-négative des diviseurs*)**

Tout diviseur  $D$  est la différence  $D_0 - D_\infty$  de deux diviseurs effectifs.

**Définition-propriété. (*Espace de niveau associé à un diviseur*)**

Pour  $D \in \text{Div}(X)$ , on regardera l'espace  $L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid f = 0 \text{ ou } \text{div}(f) + D \geq 0\}$ .

On notera  $\ell(D) = \dim_{\mathbb{C}}(L(D))$ .

- ▷ Il faut vérifier que l'on a bien affaire à un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. C'est le cas, car si  $\text{div}(f) + D$  a tous ses coefficients positifs et  $\text{div}(g) + D$  a tous ses coefficients positifs, alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{div}(\alpha f + g) + D$  a tous ses coefficients positifs par définition de l'addition des éléments de  $\text{Div}(X)$ . ■

**Interprétation**

Si  $D = n_1 p_1 + \dots + n_k p_k$  avec les  $n_k$  positifs, alors  $L(D)$  est l'ensemble des fonctions méromorphes de  $X$  nulles ou qui en chaque  $p_i$  ne sont pas un pôle d'ordre strictement supérieur à  $n_x$  et n'ont pas de singularités ou zéros hors des  $p_i$ . Il s'agit donc de majorer les ordres des pôles des fonctions de  $\mathcal{M}(X)$  en fixant les éventuels points de pôles.

La notion de diviseur permet de formaliser celle de fonction méromorphe abstraite, car sur une surface de Riemann, un diviseur n'est pas toujours principal, même s'il vérifie la condition de Rouché. Plus profondément, le conoyau du degré  $\text{Div}(X)/\text{Princ}(X)$  mesure l'incapacité de produire librement des fonctions méromorphes à singularités prescrites. ☐

**Propriété. (*Espace de niveau d'un diviseur principal*)**

Si  $f \in \mathcal{M}^*(x)$ ,  $L(\text{div}(f)) = \mathbb{C}\frac{1}{f}$  et  $\ell(\text{div}(f)) = 1$ .

▷ Soit  $g \in L(\text{div}(f))$  non nul, i.e.  $\text{div}(g) \geq -\text{div}(f)$ , soit  $\text{div}(fg) \geq 0$ . Autrement dit,  $gf$  est holomorphe, donc constante, donc  $gf = \alpha \in \mathbb{C}$ , d'où  $g = \alpha \cdot \frac{1}{f}$ . L'inclusion réciproque est claire par multiplicativité et la dimension est une conséquence directe. ■

Le calcul de la dimension de  $L(D)$  est ainsi un problème récurrent dans la théorie des surfaces de Riemann. On peut fournir déjà quelques remarques générales.

**Remarques.**

1. Si l'on a deux diviseurs ordonnés  $D' \leq D$ , les espaces de niveau le sont également :  $L(D') \subseteq L(D)$ .

En effet,  $-D' \geq -D$ , donc pour toute  $f \in \mathcal{M}(X)^*$ ,  $(f) \geq -D' \implies (f) \geq -D$ .

2. Deux diviseurs linéairement équivalents définissent des espaces de niveau isomorphes, et donc de même dimension.

Supposons  $D_2 = D_1 + \text{div}(g)$  où  $g \in \mathcal{M}(X)^*$ . Alors si  $f \in \mathcal{M}(X)$  est non nulle,  $f \in L(D_2) \iff \text{div}(f) + D_2 \geq 0 \iff \text{div}(f) + \text{div}(g) + D_1 \geq 0 \iff \text{div}(fg) + D_1 \geq 0 \iff fg \in L(D_1)$ . On conclut par ce que la multiplication par  $g$  est un isomorphisme linéaire.

3. L'espace de niveau associé à  $D$  est non nul si et seulement si  $D$  est linéairement équivalent à un diviseur positif.

Supposons  $D \sim \tilde{D}$  un diviseur positif, en particulier  $\ell(D) = \ell(\tilde{D})$ . On a  $1 \in L(\tilde{D})$ , car  $\text{div}(1) + \text{div}(\tilde{D}) = 0 + \text{div}\tilde{D} \geq 0$ . Réciproquement, si  $\ell(D) > 0$ , on peut considérer  $f \in \mathcal{M}(X)$  non nulle telle que  $\text{div}(f) + D \geq 0$ , et l'on pose  $\tilde{D} = \text{div}(f) + D \sim D$  et  $\tilde{D} \geq 0$ .

4. Si  $D = 0$ , on obtient  $L(D) = \{\text{constantes}\} \sim \mathbb{C}$  et  $\ell(D) = 1$ .

Encore une fois, comme  $X$  est compact,  $\text{div}(f) \geq 0 \implies f$  holomorphe  $\implies f = K$  pour une certaine  $K \in \mathbb{C}$ .

5. Si  $D \geq 0$ ,  $L(D)$  est de dimension finie et  $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$ . Cette borne est parfois atteinte, comme on le verra dans le cas de  $\mathbb{CP}^1$ .

En notant  $D = n_1 p_1 + \dots + n_k p_k$ , on a une famille génératrice donnée  $1, \frac{1}{z-p_1}, \dots, \frac{1}{(z-p_1)^{n_1}}, \dots, \frac{1}{z-p_k}, \dots, \frac{1}{(z-p_k)^{n_k}}$  en vertu du théorème de décomposition en éléments simples.

6. Si  $\deg(D) < 0$ ,  $L(D)$  est l'espace nul.

Puisque  $\text{ord}_{p_i}(f) \geq -n_i$  pour tout  $i \in [1, k]$  en reprenant les notations précédentes, on aurait  $\sum_{x \in X} \text{ord}_x(f) \geq \deg(D) > 0$ . Si  $f$  est non nulle, c'est impossible en vertu du théorème de Rouché pour les surfaces de Riemann compactes. Plus rapidement :  $\deg((f)) = 0 \not> -\deg(D) > 0$ .

7. La dimension de l'espace de niveau caractérise les diviseurs principaux parmi ceux de degré nul : si  $D \in \text{Div}^0(X)$ , on a  $D \in \text{Princ}(X) \iff \ell(D) \geq 1$ .

Si  $D = \text{div}(f)$ , alors  $L(D) = \mathbb{C}(\frac{1}{f})$ , d'où  $\dim(L(D)) = 1$ . Si maintenant  $\ell(D) \neq 0$ , il existe

$f \in \mathcal{M}(x)^*$  tel que  $\tilde{D} = \text{div}(f) + D \geq 0$  d'où  $\deg(\tilde{D}) \deg(D) = 0$ , car ils sont équivalents, mais  $\tilde{D}$  est effectif, d'où  $\tilde{D} = 0$  donc  $D = -\text{div}(f) = \text{div}(\frac{1}{f})$  est principal.

8. Si  $D \in \text{Div}^0(X)$ , on a  $\ell(D) = \ell(-D)$ .

Soit  $D$  de degré nul. Supposons  $\ell(D) \geq 1$ . Alors  $D$  est principal, donc  $D \sim -D$ , car  $D - (-D) = 2D$  qui est principal d'où le résultat. Supposons donc  $\ell(D) \leq 1$ , soit  $L(D) = \mathbb{C}g$  pour un certain  $g \in \mathcal{M}(X)$ , éventuellement nul. On a alors pour  $f$  non nulle,  $f \in L(-D) \iff \text{div}(f) \geq D \iff \text{div}(\frac{1}{f}) \geq -D \iff \frac{1}{f} \propto g$ . Ainsi si  $g$  est nulle,  $L(-D) = 0 = L(D)$ , et sinon,  $L(-D) = \mathbb{C}\frac{1}{g}$ , d'où  $L(-D) = 1$  et tous les cas ont été traités.

### Exercice 7

Soient  $D, E$  deux diviseurs tels que  $L(D - E)$  n'est pas nul. Montrer qu'il existe un diviseur  $\tilde{D}$  linéairement équivalent à  $D$  et supérieur à  $E$ .

▷ Éléments de réponse.

C'est immédiat en l'écrivant : on dispose par hypothèse de  $f \neq 0$  avec  $\text{div}(f) + D - E \geq 0$ , soit en posant  $\tilde{D} = \text{div}(f) + D \sim D$ ,  $\tilde{D} \geq E$ .

## 4.2 Quelques surfaces de Riemann classiques

### 4.2.1 Étude de la sphère de Riemann

**Propriété.** (*Fonctions holomorphes sur  $\mathbb{CP}^1$* )

Les fonctions holomorphes de  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  sont les fonctions constantes.

▷ En effet,  $\mathbb{CP}^1$  est compacte. ■

#### 4.2.1.1 Corps des fonctions méromorphes de $\mathbb{CP}^1$

*Remarque.* Une fonction méromorphe sur  $\mathbb{CP}^1$  n'est autre qu'une fonction holomorphe de  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ .

#### Exemple

La fonction  $\varphi: \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$  de définition évidente :  $\varphi(0) = \infty$  et  $\varphi(\infty) = 0$  est une fonction méromorphe de  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ .

La propriété suivante a déjà été vue dans un cadre plus général, mais on l'énonce à part.

**Conséquence. (*Théorème de Liouville sur  $\mathbb{CP}^1$* )**

Toute fonction holomorphe de  $\mathbb{CP}^1$  dans  $\mathbb{C}$  est constante.

La proposition suivante généralise le théorème de factorisation de Hadamard.

**Propriété. (*Description des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{CP}^1$* )**

Le corps des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann vaut  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) = \{\frac{p}{q} \mid p,q \text{ polynômes en un variable}, q \neq 0\}$  qui n'est autre que l'ensemble des fonctions rationnelles.

▷ Les fonctions rationnelles sont bien des fonctions méromorphes de  $\mathbb{CP}^1$ . Soit  $F \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ . Quitte à post-composer par la fonction inverse qui est dans  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ , on peut supposer que  $F$  n'a pas de pôle en  $\infty$ . Soit  $(z_i)_{i \in [\![1, N]\!]}, N \in \mathbb{N}$  la liste finie des pôles de  $F$ , car  $\mathbb{CP}^1$  est compacte, qui sont donc dans  $\mathbb{C} = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$ . Pour chaque  $z_i$ , on écrit la partie principale de  $F$  en  $z_i : P_{z_i} = \sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z - z_i)^{-n}$ . La fonction  $F - \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z - z_i)^{-n}$  est holomorphe grâce à la remarque initiale de cette section, donc constante par le théorème de Liouville sur  $\mathbb{CP}^1$ . Ainsi,  $F = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z - z_i)^{-n} + K$  qui est à réécriture peu agréable près un quotient de deux polynômes. ■

En particulier :

**Corollaire**

On a un isomorphisme de corps  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{C}(t)$ . En particulier,  $\deg \text{tr}(\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)/\mathbb{C}) = 1$ .

*Remarque. (Ordre d'une fonction méromorphe en l'infini)* Dans ce cas particulier, on peut observer que les zéros de  $F = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  sont les zéros de  $p$  et que les pôles de  $F$  sont les zéros de  $q$ . À l'infini maintenant, grâce à la carte  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ,  $F$  a un zéro ou un pôle, selon le signe, d'ordre, si  $\deg(p) = n$  et  $\deg(q) = m$ ,  $p, q$  sans facteurs communs,  $\text{ord}_\infty(F) = -(n - m)$ .

On peut également énoncer comme conséquence :

#### 4.2.1.2 Théorèmes fondamentaux des surfaces de Riemann : une première approche dans le cas de la droite projective complexe

**Théorème. (*Théorème d'Abel pour  $\mathbb{CP}^1$* )**

Soient  $n$  un entier naturel  $(z_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$  et  $(w_j)_{j \in [\![1, n]\!]}$  deux familles finies disjointes avec le même nombre d'éléments de  $\mathbb{CP}^1$ . Alors il existe une fonction rationnelle avec zéros exactement en les  $z_i$  et pôles exactement en les  $w_j$ , unique à un scalaire près. Autrement dit, il existe une fonction méromorphe de  $\mathbb{CP}^1$  ayant  $(z_i)_i$  pour zéros et  $(w_j)_j$  pour pôles.

▷ On pose a priori  $f(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i}{z - w_i}$ , si  $z_i \neq \infty$  et  $w_i \neq \infty$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si pour un certain  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $z_i = \infty$ , on substitue le terme  $z - z_i$  par  $\frac{1}{z}$ , et si pour un certain  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $w_j = \infty$ , on substitue le terme  $z - w_j$  par  $z$ . Cette fonction  $f$  convient. Soit maintenant  $g$  une autre fonction vérifiant ces conditions. Alors puisque  $f$  et  $g$  ont les mêmes pôles,  $g/f$  est holomorphe sur tout  $\mathbb{CP}^1$ , donc constante, d'où  $g \propto f$ . ■

*Remarque.* Spécifier zéros et pôles d'une fonction méromorphe  $F$  permet de l'exhiber en tant que diviseur principal. Dans ce cas, on peut vérifier manuellement  $\sum_{x \in \mathbb{CP}^1} \text{ord}_x F = 0$ . En effet, si  $F(z) = \frac{(z-a_1)\dots(z-a_n)}{(z-b_1)\dots(z-b_n)}$ ,  $\text{ord}_{a_i} F = \#(\text{zéros de } p = a_i)$  et  $\text{ord}_{b_i} F = -\#(\text{zéros de } q = b_i)$ . Ainsi,  $\sum_{x \in \mathbb{C}} \text{ord}_x F = n - m + \text{ord}_\infty F = (n - m) - (n - m) = 0$ . Ainsi, on a revérifié que  $\deg(\text{div}(f)) = 0$ . On avait donc bien :

#### Propriété. (*Théorème de Rouché dans $\mathbb{CP}^1$* )

Soit  $F \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ . Alors le nombre de zéros de  $F$  égale le nombre de pôles de  $F$  en comptant la multiplicité.

#### Propriété. (*Théorème de Rouché dans $E_\tau$* )

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental  $P$ . Alors, dans l'intérieur de  $P$ , le nombre de zéros égale le nombre de pôles en comptant la multiplicité.

#### Exercice 8 (Questions bêtes)

1. La fonction  $f : \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}, z \mapsto z$  est-elle méromorphe sur  $\mathbb{CP}^1$ ? Si oui, quel est son diviseur associé?
2. Décrire explicitement  $L(k[\infty])$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Qu'obtient-on pour  $k \in \mathbb{Z}_-^*$ ?

#### ▷ Éléments de réponse.

1. Presque par définition,  $\{\infty\}$  est un pôle de  $f$  qui est donc bien holomorphe. En utilisant la carte  $z \mapsto \frac{1}{z}$  sur  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ , on trouve  $\text{ord}_\infty(f) = 1$ . Ainsi,  $\text{div}(f) = 1.[\infty]$ .
2. D'après les propositions précédentes, on doit trouver  $L(k[\infty]) = \mathbb{C}_k[X]$ . Si  $k < 0$  en particulier,  $L(k[\infty]) = 0$ .

#### Corollaire. (*Caractérisation des diviseurs principaux dans $\mathbb{CP}^1$* )

Si  $D \in \text{Div}(\mathbb{CP}^1)$ ,  $D$  est associé à une fonction méromorphe, i.e.  $D = \text{div}(F)$ , si et seulement si,  $\deg(D) = 0$ . Autrement dit,  $\text{Princ}_{\mathbb{CP}^1}(X) = \text{Div}_{\mathbb{CP}^1}^0(X)$ .

▷ Il est, par le théorème précédent, très facile de construire des fonctions méromorphes à zéros et pôles prescrits, et la construction d'un diviseur principal cherche justement à décrire les

fonctions méromorphes de pôles d'ordre au moins  $n_i$  aux points  $x_i \in X$ . ■



Ce ne sera pas vrai sur un surface de Riemann générale où l'on ne peut construire arbitrairement des fonctions méromorphes à zéros et pôles fixés aussi simplement, voire pas du tout.

Enfin, on s'intéresse à l'espace de niveau associé à un diviseur de  $\mathbb{CP}^1$ .

### Théorème. (*Théorème de Riemann-Roch pour $\mathbb{CP}^1$* )

Soit  $k$  un entier naturel. Si  $D = n_1z_1 + \dots + n_kz_k$  avec  $\deg(D) > 0$ , les  $z_i \in \mathbb{CP}^1$ , alors  $\dim(L_{\mathbb{CP}^1}(D)) = \deg(D) + 1$ .

▷ Traitons le cas où  $D = n_1z_1 + \dots + n_kz_k$  avec  $n_i > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ . L'idée est la suivante : une fonction de la forme  $F(z) = c + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{k,i}}{(z - w_i)^k}$  est dans  $L(D)$ . De plus, la seule façon d'obtenir des fonctions de  $L(D)$  est de prendre une telle fonction  $f$  et de varier les coefficients  $c_{k,i}$  et  $c$ . Ainsi, la dimension de l'espace  $L(D)$  égale le nombre de coefficients  $c_{k,i}$ , soit  $\deg(D) + \underbrace{1}_{\text{en comptant les constantes}}$ . En fait, il suffit de reprendre la preuve de la borne  $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$  de la théorie générale des diviseurs pour constater qu'elle est atteinte.

Pour passer au cas général, on se rend compte qu'avec un peu d'astuce et une écriture du type  $2[z] = [z] + [z]$ , si  $\deg(D) > 0$ , on peut écrire  $D = D_1 + D_2$  où  $D_1$  est strictement positif et  $D_2$  est de degré nul, donc principal dans  $\mathbb{CP}^1$ . Ainsi,  $D \sim D_1$  d'où le résultat. ■

#### Remarques.

1. En toute généralité :  $\dim(L(D)) = 0$  si  $\deg(D) < 0$ .
2. Avec le théorème,  $\dim(L(D)) = \deg(D) + 1$  si  $\deg(D) > 0$ .
3. En toute généralité :  $L(D) = \{\text{constantes}\}$  si  $D = 0$ .
4. Puisque les diviseurs de degré nul sont principaux, on a  $L(D) \simeq \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}g$  où  $\dim(L(D)) = 1$  si  $\deg(D) = 0$ ,  $D \neq 0$  où  $g \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ , avec  $\text{div}(g) = D$ .

## 4.2.2 Étude du cylindre infini

Le disque étant (*on le verra plus tard*) l'unique surface de Riemann simplement connexe ouverte dans  $\mathbb{C}$  bornée, à biholomorphisme près, on s'intéresse à d'autres ouverts de  $\mathbb{C}$  connexes non simplement connexes. L'étude des fonctions méromorphes sur le cylindre infini, qui n'est autre que  $\mathbb{C}^*$ , est une reformulation de celle des séries de fonctions holomorphes usuelles.

### Lemme. (*Cylindres finis*)

Soit  $r > 1$ . Le *cylindre* (*fini* si  $r < \infty$ ) ouvert  $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$  est une surface de Riemann.

▷ En effet, c'est un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ . ■

**Exercice 9 (Théorème de Schottky)**

1. Montrer que pour  $1 < r_1 < r_2$ ,  $C_{r_1}$  et  $C_{r_2}$  ne sont pas biholomorphes.
2. Soient  $\rho > \sigma > 0$  et  $A_{\sigma,\rho} = \{z \in \mathbb{C} \mid \sigma < |z| < \rho\}$ ,  $A$  pour *annulus*, « couronne » en anglais. En déduire que si  $\rho' > \sigma' > 0$ ,  $A_{\sigma,\rho}$  et  $A_{\sigma',\rho'}$  sont biholomorphes si et seulement si  $\frac{\rho}{\sigma} = \frac{\rho'}{\sigma'}$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On peut démontrer ce fait avec le théorème d'uniformisation, mais nul besoin. Il y a encore plusieurs façons de procéder ; en voilà une utilisant la formule de Green pour l'aire. Montrons que s'il existe une bijection holomorphe  $f : C_{r_1} \rightarrow C_{r_2}$ , alors  $r_2 \geq r_1$  ; par symétrie, ce sera suffisant. Quitte à composer par l'inversion, on peut supposer que  $|f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow 1} 1$ , car  $f$  est un homéomorphisme qui préserve les bords. Pour  $t \in ]1, r_1[$ , notons  $A(t)$  l'aire à l'intérieur de la courbe de Jordan  $f(S(0,t))$ . La formule citée, en notation complexe, permet de relier cette aire avec les coefficients de la série de Laurent  $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ ,  $f$  étant définie sur une couronne. Explicitement, on a  $A(t) = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} f(te^{i\theta}) \bar{f}(te^{i\theta}) d\theta = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 t^{2n}$ . Puisque  $A(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} \pi$ , on a  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 = 1$ . Ainsi,  $A(t) - \pi t^2 = \pi t^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 (t^{2n-2} - 1) \geq 0$ . Cette inégalité tient terme à terme. Ainsi  $A(r_1^-) \geq \pi r_1^2$ , d'où  $r_2 \geq r_1$ .
2. Le sens indirect est clair au moyen d'homothéties bien choisies. Quant à la réciproque : dans la preuve précédente, on peut commencer par normaliser en prenant  $\sigma = \sigma' = 1$ .

**Heuristique**

Cet exemple nous permet de constater que la biholomorphie est nettement plus forte que l'homéomorphie. Par le théorème d'uniformisation, on voit que l'exemple des cylindres est grossièrement le plus simple démonstrateur de ce fait.

**Définition. (*Cylindre infini*)**

On appelle *cylindre infini* la surface de Riemann connexe  $C_\infty = \mathbb{C}^*$ .

**Exercice 10**

Montrer que pour  $r \in ]1, \infty[$ ,  $C_r$  et  $C_\infty$  ne sont pas biholomorphes.

▷ Éléments de réponse.

C'est bien plus facile. Soit  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow C_r \subseteq \mathbb{C}$  une bijection holomorphe. Comme  $\varphi$  est bornée par  $r$ , le théorème de prolongement de Riemann (usuel) nous donne une application holomorphe  $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \rightarrow C_r \cup \{\tilde{\varphi}(0)\}$ . Mais  $\tilde{\varphi}$  est encore bornée, et entière, donc constante. En particulier,  $\varphi$  est constante, donc ce n'est pas une bijection sur  $C_r$ , contradiction.

*Remarque.* On peut décrire  $\mathbb{C}^*$  grâce au groupe des translations engendré par  $z \mapsto z + 1$ , autrement dit les  $z \mapsto z + n, n \in \mathbb{Z}$ , notons-le  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  agit sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/\Gamma$  au sens des

variétés différentielles complexes. Un biholomorphisme explicite est donné entre les deux par  $z \mapsto e^{2i\pi z}$ . À partir de ce constat, on peut déduire une description des fonctions méromorphes de  $\mathbb{C}^*$  : ce sont les fonctions méromorphes de  $\mathbb{C}$  périodiques vis-à-vis de la translation  $z \mapsto z + 1$ .

### Propriété. (*Fonctions holomorphes sur le disque infini*)

Les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}^*$  sont les séries convergentes de la forme  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^n$ , i.e. telles que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ .

*Remarque.* En termes de coordonnées, avec la remarque précédente, cela nous donne une fonction de la forme  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n z}$ .

### Méthode. (*Construire une fonction méromorphe sur le cylindre infini*)

Une façon générique pour obtenir une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  périodique de période 1 est de considérer une somme de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(z - n)$  où  $f$  est une fonction méromorphe quelconque. Attention toutefois, il faut s'assurer au cas par cas qu'une telle somme converge.

### Exemple. (*Une fonction méromorphe sur $C_\infty$* )

Par exemple, on a une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  donnée  $f : z \mapsto \frac{1}{z^2}$ . On obtient alors par la construction précédente la fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}^* : P(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}$  et les pôles de  $P$  sont donc en  $\mathbb{Z}$ .

En effet,  $P$  est normalement convergente sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . En effet, pour tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  contenu dans un disque de rayon  $R$ , pour tout  $n \geq 2R$ , on a  $|z - n| \geq n - |z| \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ , d'où  $|\frac{1}{(z - n)^2}| \leq \frac{4}{n^2}$ . Par le théorème de Montel, on conclut que  $P(z)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

On peut aussi obtenir  $P$  à partir d'un produit infini, ce qui permet de contrôler maintenant les zéros de la fonction. Posons  $S(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ , qui est bien défini.

En effet, ce produit est normalement convergent sur tout compact, puisque  $\sum \log(1 - \frac{z^2}{n^2})$  l'est. La dérivée logarithmique de  $S$  est  $Z(s) = \frac{S'(z)}{S(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$  qui converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Ainsi,  $Z'(s)$  est méromorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  et l'on vérifie que  $P(z) = -Z'(z)$ .

Observons que  $P(z)$  est définie sur le cylindre infini mais que ni  $Z$  ni  $S$  ne sont invariantes sous l'action de la translation  $z \mapsto z + 1$ .

Ainsi, l'étude des fonctions méromorphes sur certaines surfaces de Riemann classiques est une reformulation des propriétés de certaines fonctions complexes spéciales.

**Exercice 11 (Tant qu'à faire)**

Dans ce nouveau contexte, (re)trouver les identités suivantes :

1.  $P(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$  ;
2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  ;
3.  $Z(z) = \pi \cot(\pi z)$  ;
4.  $S(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$ .

**4.2.3 Étude des courbes elliptiques complexes****Exercice 12 (Généralité des tores complexes)**

Soit  $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$  un sous-groupe discret. Montrer que  $\Gamma$  est isomorphe soit à  $\{0\}$ , soit à  $\mathbb{Z}$ , soit à  $\mathbb{Z}^2$ . En déduire qu'il existe un unique atlas holomorphe maximal sur  $\mathbb{C}/\Gamma$  tel que l'application projection  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  soit un morphisme complexe.

La surface  $\mathbb{CP}^1$  consiste en une structure complexe sur la sphère. On peut également munir un tore d'une structure complexe, ce qui donne essor à la notion suivante :

**Définition. (Tore complexe associé à un réseau)**

On appelle *tore complexe associé à un réseau* ou *courbe elliptique* le quotient de  $\mathbb{C}$  par un sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$  de la forme d'un réseau  $\Lambda_{\omega_1, \omega_2} = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$  (groupe de translations du plan complexe) où  $\omega_1, \omega_2$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{C}$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ , autrement dit tels que  $\omega_2 \neq 0$  et  $\operatorname{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$ . Ainsi  $X = \mathbb{C}/\Lambda_{\omega_1, \omega_2}$ . On peut sans problème se restreindre aux  $\mathbb{C}$ -réseaux de la forme  $\omega_1 = 1$  et  $\omega_2 = \tau$  où  $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ . Dans ce cas, on note  $\Gamma_\tau = \Lambda_{1, \tau} = \Lambda_\tau$  et  $E_\tau = C/\Gamma_\tau$  le tore complexe associé, notation standard.

*Remarque.* On montrera que toute surface de Riemann compacte de genre 1 est biholomorphe à cette structure.

**Propriété**

Le tore  $E_\tau$  est homéomorphe à l'une des régions fondamentales de  $E_\tau$  recollée le long de ses bords d'une manière à expliciter.

→ *Convention.* Le domaine fondamental est le quadrilatère ouvert déterminé par les points  $0, 1, \tau$  et  $1 + \tau$ .

**Corollaire**

$E_\tau$  est une surface de Riemann.

▷ (*Autre façon de voir les choses*) On peut aussi remarquer qu'un sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$  agit naturellement, par homéomorphismes, librement et proprement discontinûment sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi le quotient de  $\mathbb{C}$  par cette action est une variété complexe. Reste à voir qu'elle est de dimension 1. ■



Une ellipse n'est pas une courbe elliptique.

On a toujours :

**Propriété. (*Fonctions holomorphes sur  $E_\tau$* )**

Soit  $\tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Les fonctions holomorphes de  $E_\tau \rightarrow \mathbb{C}$  sont les fonctions constantes.

▷ En effet,  $E_\tau$  est compacte. Détaillons-le : topologiquement parlant,  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  et  $E_\tau \simeq \mathbb{Z}^2$ . Toujours en terme topologique, on a donc  $E_\tau \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 = S^1 \times S^1$ , qui est bien compact. ■

**4.2.3.1 Fonctions elliptiques**

À partir de maintenant, on fixe un  $\tau \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ .

*Remarque.* Une fonction méromorphe sur  $E_\tau$  n'est autre, en vertu du théorème de factorisation, qu'une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  invariante sous l'action de  $\Gamma_\tau$ , autrement dit les fonctions méromorphes telles que  $f(z+1) = f(z)$  et  $f(z+\tau) = f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . On identifie alors dans le vocabulaire  $\mathcal{M}(E_\tau)$  avec l'ensemble de ces fonctions.

**VOC** Une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$  invariante sous l'action de  $\Gamma_\tau$  est appelée *fonction elliptique*.

Contrairement au cas de  $\mathbb{CP}^1$ , il n'y a rien d'évident qu'il existe une fonction méromorphe sur  $E_\tau$ . Par contre, on peut sous couvert d'existence énoncer quelques propriétés sur  $\mathcal{M}(E_\tau)$ .

**Proposition. (*Un premier constat : les résidus d'une fonction elliptique*)**

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles sur la frontière d'une région fondamentale<sup>a</sup>. Alors la somme des résidus par rapport aux pôles contenus dans n'importe quelle région fondamentale est nulle.

<sup>a</sup> Et donc de toutes par invariance.

<sup>b</sup> Important : cette condition est en fait bénigne. Puisque les pôles sont isolés, quitte à translater le réseau, on peut toujours supposer qu'il n'y en a pas sur  $\partial P$  où  $P$  est le domaine fondamental.

▷ On note  $P$  une telle région, disons le domaine fondamental, et  $\partial P_1, \partial P_2, \partial P_3, \partial P_4$  les quatre côtés de  $P$  parcourus dans le sens anti-horaire en commençant par  $[(0,0), (0,1)]$ . Par le théorème des résidus,  $\sum_{x \in P} \text{res}(F, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} F(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial P_1} F(z) dz + \int_{\partial P_2} F(z) dz + \int_{\partial P_3} F(z) dz + \int_{\partial P_4} F(z) dz \right)$ . L'invariance de l'intégrale par translation fait s'annuler ces quatre termes deux à deux, explicitement  $\int_{\partial P_1} F(z) dz = - \int_{\partial P_3} F(z) dz$  et  $\int_{\partial P_2} F(z) dz = - \int_{\partial P_4} F(z) dz$ , d'où  $\sum_{x \in P} \text{res}(F, x) = 0$ , ce qu'il fallait montrer. Noter que l'on a pu appliquer le théorème des résidus justement parce que le chemin  $\partial P$  ne passait sur aucun pôle. ■

### Corollaire

Une fonction elliptique ayant un unique pôle qui soit hors de la frontière des régions fondamentales, est d'ordre au moins 2 en ce pôle.

▷ En effet, on remarque qu'un pôle d'ordre 1 a nécessairement un résidu non nul. ■

**VOC** Parfois, on appelle *ordre* de la fonction elliptique  $f$  la somme des multiplicités des pôles de  $f$  dans le domaine fondamental.

Soyons plus précis. On retrouve un théorème de Rouché dans le cas du tore complexe.

### Lemme. (*Principe de l'argument dans $E_\tau$* )

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental  $P$ . Alors  $\#\text{zéros}_P - \#\text{pôles}_P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ .

▷ Il suffit d'appliquer le principe de l'argument à la fonction elliptique sur un tracé le long de la frontière d'une région fondamentale. ■

### Propriété. (*Théorème de Rouché dans $E_\tau$* )

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental  $P$ . Alors, dans l'intérieur de  $P$ , le nombre de zéros égale le nombre de pôles en comptant la multiplicité.

▷ Corollaire de la proposition précédente, appliquée à  $f'/f$ , encore méromorphe elliptique, grâce au lemme précédent qui relie  $\#\text{zéros}_P - \#\text{pôles}_P$  à une intégrale qui, par le théorème des résidus, vaut justement la somme des résidus. ■

On retrouve donc :

### Corollaire. (*Dénombrément des fibres d'une fonction elliptique*)

Soit  $f$  une fonction elliptique non constante. Soit  $c \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . L'équation  $f(z) = c$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  a le même nombre de solutions modulo  $\Gamma_\tau$  que le nombre de pôles de  $f$  dans le domaine fondamental.

**Lemme**

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental. Soient  $(a_i)_{i \in [1,n]}$  les zéros et  $(b_i)_{i \in [1,n]}$  les pôles de  $F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , qui soient contenus dans une région fondamentale  $\Omega$ . Alors  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \sum_{i=1}^n a_i - b_i$ .

▷ Même chose que pour le lemme précédent, la preuve est semblable à celle de l'analyse complexe. ■

**Proposition. (*Condition nécessaire au théorème d'Abel*)**

Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental  $P$ . Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles finies, *i.e.*  $I$  et  $J$  finis, et disjointes de points de  $\mathring{P}$  (avec éventuellement des répétitions). On suppose qu'il existe une fonction elliptique dont les zéros sont précisément les  $(a_i)$  et les pôles les  $(b_i)$ . Alors  $\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} b_j \in \Gamma_\tau$ .

▷ En utilisant les invariances de  $F$ , on a  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial P_1} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz + \underbrace{\int_{\partial P_2} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz}_{+} + \underbrace{\int_{\partial P_3} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz}_{+} + \int_{\partial P_4} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz \right) = -\tau \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_4} z \frac{F'(z)}{F(z)} dz = -\int_{\partial P_1} (z + \tau) \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \int_{\partial P_4} (z + 1) \frac{F'(z)}{F(z)} dz - \tau \iota_{\partial P_1}(F) - \iota_{\partial P_4}(F) \in \Gamma_\tau$  où  $\iota$  note l'indice, et l'on rappelle que  $\Gamma_\tau = \{n + m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Ainsi, par le lemme,  $\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} b_j \in \Gamma_\tau$ . ■

**4.2.3.2 Construction des fonctions elliptiques sur  $E_\tau$** **Méthode. (*Idée pour construire  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$* )**

On voit que  $\frac{1}{z^n} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En reprenant l'idée de l'étude du cylindre infini,  $F_n(z) = \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau} \frac{1}{(z - \gamma)^n}$  a des chances d'être méromorphe sur  $E_\tau$ , puisqu'elle est 1-périodique et  $\tau$ -périodique. Attention toutefois, il n'est pas clair que la série  $F_n(z)$  converge. Si la famille du sommande est sommable, on a par théorème la commutative convergence qui permet de bien définir la somme de cette série double infinie.

**Lemme**

$$\sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{|\gamma|^n} \text{ converge pour } n \geq 3.$$

▷ La famille à sommer étant positive, découpons-la. Soit  $\mathcal{P}_n = \{x + \tau y \mid \max |x|, |y| = n, x, y \in \mathbb{Z}\}$ . Sur le bord de  $\mathcal{P}_n$ , il y a  $8n$  points de  $\Lambda_\tau$ , à raison de  $2n$  sur chaque côté de ce parallélogramme.

De plus, si  $\lambda \in \mathcal{P}_n$ , alors  $|\lambda| \leq dn$  où  $d = \min\{|z|, z \in \mathcal{P}_1\}$ , car si  $\lambda \in \mathcal{P}_n$ , on a  $\lambda' = \frac{\lambda}{n} \in \mathcal{P}_1$ , donc  $|\lambda| = n|\lambda'| \geq nd$ . Ainsi, le sommande restreint à  $\mathcal{P}_n$  est majoré par  $\frac{8n}{(dn)^3}$ . Puisque  $\frac{1}{n^2}$  est sommable, on peut conclure. ■

### Propriété. (*Fonctions méromorphes « puissances »*)

La somme, à  $n$  fixé,  $F_n(z)$  est convergente en une fonction méromorphe  $F_n$  pour tout  $n \geq 3$ . De plus,  $F_n \in \mathcal{M}(E_\tau)$  a ses pôles en chaque point du réseau  $\Lambda_\tau$  et tous sont d'ordre  $n$ .

▷ On montre que cette série est uniformément convergente sur les compacts  $K \subseteq \mathbb{C}$ . On peut supposer que, excepté pour un nombre fini de  $\gamma \in \Lambda_\tau$ ,  $|\gamma| \geq 2|z|$  pour  $z \in K$ . Dans ce cas,  $|z - \gamma| \geq |\gamma| - |z| \geq |\gamma| - \frac{|\gamma|}{2} = \frac{|\gamma|}{2}$ . Ainsi pour tout  $z \in K$  et  $\gamma$  dans le complémentaire d'un sous-ensemble fini de  $\Lambda_\tau$ ,  $\sum_{\gamma} \frac{1}{|z - \gamma|^n} \leq 2^n \sum_{\gamma} \frac{1}{|\gamma|^3}$ . Par le lemme précédent, cette famille est convergente pour  $n > 2$ . La série est donc normalement convergente, donc uniformément convergente, donc convergente.

La fonction  $z \mapsto F_n(z)$  est alors elliptique par construction, et le lieu des pôles et leurs ordres se voient facilement. ■

Posons-nous la question :

### Exercice 13

Soit  $\tau$  fixé. Existe-t-il une fonction dans  $\mathcal{M}(E_\tau)$  avec un pôle d'ordre 1 à chaque point de  $\Lambda_\tau$  ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non, cela contredirait la condition sur la somme des résidus dans le domaine fondamental. Quitte à translater le réseau, on peut faire en sorte que cet unique pôle de  $f$  dans une région fondamentale Absurde, puisqu'il est d'ordre 1, et l'on a exclu cette configuration.

Le cas  $n = 2$  est donc critique. Existe-t-il une fonction de  $\mathcal{M}(E_\tau)$  avec un pôle d'ordre 2 à chaque point de  $\Lambda_\tau$ ? Cette fois, la réponse est positive ; ainsi, dans le lemme précédent, la condition  $n \geq 3$  n'est pas nécessaire, mais on ne peut utiliser les fonctions puissances données précédemment. Un bon exemple est donné par la

#### 4.2.3.3 Fonction de Weierstrass

##### Définition-propriété. (*Fonction de Weierstrass*)

La fonction («  $p$  ») de Weierstrass associé au réseau  $\Lambda_\tau$  est définie par :

$$\mathcal{P}(z) = \wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right).$$

▷ Montrons que cette série converge. Écrivons  $\left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| = \left| \frac{\gamma^2 - (z-\gamma)^2}{\gamma^2(z-\gamma)^2} \right| = \left| \frac{2z\gamma - z^2}{\gamma^2(z-\gamma)^2} \right|$ . Pour  $z \in K \subseteq \mathbb{C} \setminus \Lambda_\tau$  compact fixé, on a encore  $|\gamma| \geq 2|z|$ , d'où  $\left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| \leq \frac{4|z|^{\frac{5}{2}}|\gamma|}{|\gamma|^2|\gamma|^2} \leq \frac{10|z|}{|\gamma|} \leq \frac{C}{|\gamma|^3}$ , et donc la série définie par  $\mathcal{P}$  est normalement convergente. Ainsi,  $\wp$  est bien définie. ■

### Propriété. (*Propriété fondamentale de $\wp$* )

La fonction de Weierstrass est solution de l'équation  $\mathcal{P}'(z) = -2F_3(z)$ .

▷ La convergence normale permet de dériver terme à terme, et l'on obtient donc  $\mathcal{P}'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left( \frac{-2}{(z-\gamma)^3} \right) = -2 \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\gamma)^3} = -2F_3(z)$ . ■

→ Convention. On pose  $F_2 = \mathcal{P}$ .

### Propriétés. (*Construction de la fonction de Weierstrass associée à un réseau*)

Soit  $\wp = \wp_\tau$  la fonction de Weierstrass.

1.  $\wp$  est  $\Lambda_\tau$ -périodique.
2.  $\wp$  est méromorphe sur  $E_\tau$ .
3.  $\wp$  est paire.
4.  $\wp'$  est  $\Gamma_\tau$ -périodique.
5.  $\wp'$  est méromorphe sur  $E_\tau$ .
6.  $\wp'$  est impaire.
7.  $\wp$  n'a qu'un pôle, double et sans résidu, modulo  $\Lambda_\tau$ , situé en 0 par exemple.

▷ Successivement :

1. Ce n'est pas clair sous la forme dont  $\wp$  a été définie ! En revanche,  $\frac{d}{dz}(\wp(z+1) - \wp(z)) = 0$  puisque  $\wp'$  est périodique. Ainsi,  $z \mapsto \wp(z+1) - \wp(z)$  est constante sur l'ouvert connexe  $\mathbb{C} \setminus \Lambda_\tau$ . Or,  $\wp(-\frac{1}{2}) - \wp(-\frac{1}{2} + 1) = 0$ , car  $\wp$  est paire, donc  $z \mapsto \wp(z+1) - \wp(z)$  est nulle. De même,  $z \mapsto \wp(z+\tau) - \wp(z)$  est nulle, d'où la périodicité.
2. La forme donnée est bien celle que l'on peut donner d'une fonction méromorphe. Puisque elle est elliptique, elle est bien dans  $\mathcal{M}(E_\tau)$ .
3. En changeant  $z \mapsto -z$ , les termes de la somme se changent en  $\frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{(z+\gamma)^2} - \frac{1}{-\gamma^2}$  et l'égalité vient de la symétrie du réseau même privé de  $\{0\}$ .
4. Propriété des fonctions dérivées. On a en fait  $\mathcal{P}'(z) = -2F_3(z)$ .
5. Idem.
6. Idem.
7. Notons  $S(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2}$ . Pour  $\lambda \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}$  fixé,  $z \mapsto \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$  possède un unique pôle double en  $\lambda$ . Donc la somme  $S(z)$  a ses pôles en les points non nuls de  $\Lambda_\tau$ , et uniquement en ces points. Donc modulo  $\Lambda_\tau$ ,  $\wp$  a unique pôle d'ordre 2 (il a bien sûr un pôle d'ordre 2 en 0 à cause du terme initial). Comme  $S$  est holomorphe en 0, on a  $\text{res}_0(\wp) = \text{res}_0(z \mapsto \frac{1}{z^2}) = 0$ . Par périodicité,  $\text{res}_\lambda(\wp) = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}$ . ■

Intéressons-nous maintenant aux zéros de  $\wp'$ .

### Propriété. (Zéros de la dérivée de la fonction de Weierstrass)

Les zéros de  $\wp'$  dans le domaine fondamental sont  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\tau}{2}$  et  $\frac{1+\tau}{2}$ .

Autrement dit, les zéros de  $\wp'$  sont exactement en les  $\frac{1}{2}\mathbb{Z} + \frac{\tau}{2}\mathbb{Z}$ .

▷  $\wp$  a un unique pôle d'ordre 3 dans le domaine fondamental, elle a donc exactement trois zéros dans le domaine fondamental par la condition de Rouché.

La périodicité et l'imparité de  $\wp'$  permettent d'écrire :  $\wp'(-\frac{1}{2}) = -\wp'(\frac{1}{2}) = \wp'(-\frac{1}{2} + 1) = \wp'(\frac{1}{2})$ , d'où  $\wp'(demi) = 0$ . De même,  $\wp'(-\frac{\tau}{2}) = -\wp'(\frac{\tau}{2}) = \wp'(-\frac{\tau}{2} + \tau) = \wp'(\frac{\tau}{2})$ , d'où  $\wp'(\frac{\tau}{2}) = 0$ . Enfin encore,  $\wp'(-\frac{1+\tau}{2}) = -\wp'(\frac{1+\tau}{2}) = \wp'(-\frac{1+\tau}{2} + 1 + \tau) = \wp'(\frac{1+\tau}{2})$ , d'où  $\wp'(\frac{1+\tau}{2}) = 0$ , et on a tout. ■



$\wp'$  n'a pas de zéro en 0, bien qu'elle soit impaire, car 0 est un pôle pour  $\wp'$ .

Remarque.  $\deg(\wp) = 2$  et  $\deg(\wp') = 3$ .

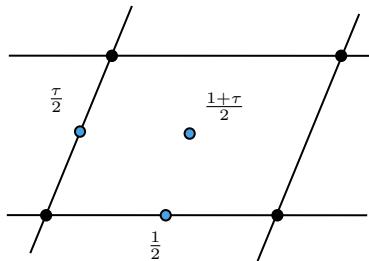


FIGURE 4.2.1 : Points remarquables du réseau de la fonction de Weierstrass. —  $\wp$  a un seul pôle, d'ordre 2, modulo le réseau. Quant à  $\wp'$ , elle a un seul pôle, d'ordre 3, modulo le réseau. Elle a trois zéros, tous simples, modulo le réseau. Quant aux zéros de  $\wp$ ... Il y en a deux, opposés par parité, d'expression compliquée.

### Curiosité. (Interprétation géométrique de la fonction de Weierstrass)

Topologiquement,  $E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$  est un tore. On peut interpréter la fonction de Weierstrass comme un revêtement de  $\mathbb{CP}^1$  :

$$\wp : E_\tau \rightarrow \mathbb{CP}^1.$$

On pourrait démontrer que la fonction de Weierstrass prend pour valeur chaque point de  $\mathbb{CP}^1$  exactement deux points, excepté pour 4 points : trois correspondent aux zéros de  $\wp'$  et ce sont donc  $\wp(\frac{1}{2})$ ,  $\wp(\frac{\tau}{2})$  et  $\wp(\frac{1+\tau}{2})$  et le dernier correspond à l'unique pôle de  $\wp$  et c'est donc  $\infty$ .

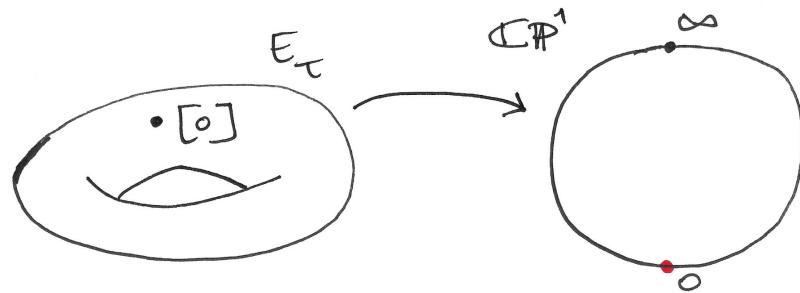
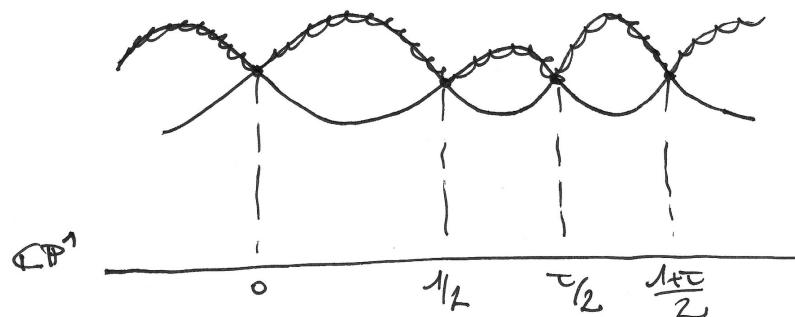
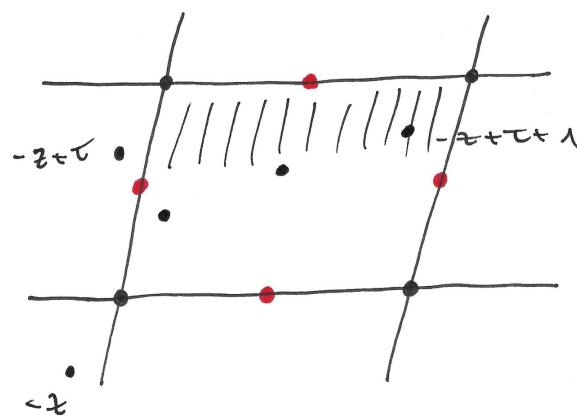


FIGURE 4.2.2 : Interprétation de la fonction de Weierstrass. —

FIGURE 4.2.3 : Interprétation de la fonction de Weierstrass. —  
Pôles de  $\wp$  et zéros de  $\wp'$  vus sur le revêtementFIGURE 4.2.4 : Interprétation de la fonction de Weierstrass. —  
Pôles de  $\wp$  et zéros de  $\wp'$  vus sur le réseau

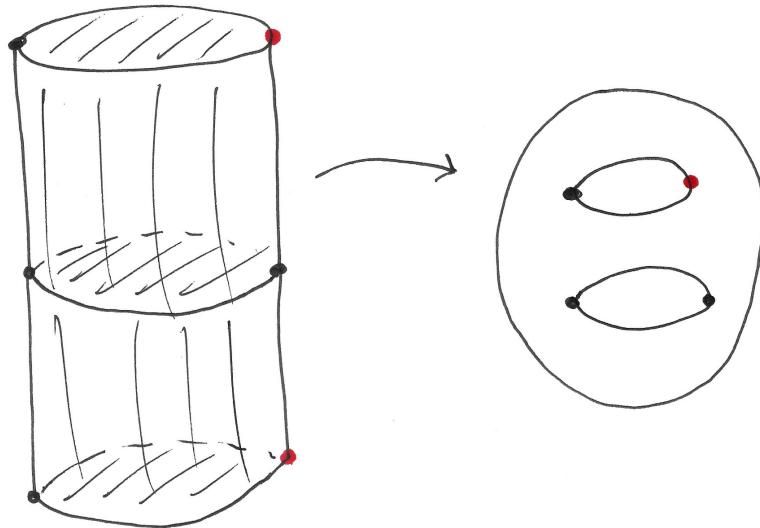


FIGURE 4.2.5 : Interprétation de la fonction de Weierstrass. —  
Pôles de  $\wp$  et zéros de  $\wp'$  : du réseau au tore

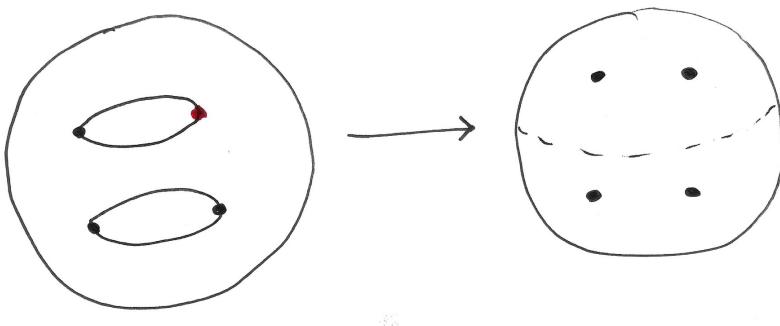


FIGURE 4.2.6 : Interprétation de la fonction de Weierstrass. —  
Pôles de  $\wp$  et zéros de  $\wp'$  : du tore à la sphère

#### 4.2.3.4 Théorèmes fondamentaux des surfaces de Riemann : approche dans le cas des courbes elliptiques

Le théorème le plus profond de cette section est le suivant. Il doit être mis en contraste avec la description des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{CP}^1$  qui est beaucoup plus libre.

##### Théorème. (*Théorème d'Abel sur $E_\tau$* )

Soient  $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  et  $(b_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  deux familles disjointes de points dans le domaine fondamental  $P$  avec le même cardinal  $n \geq 2$ . Il existe  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$  ayant exactement pour zéros exactement les  $(a_i)$  et pour pôles exactement les  $(b_j)$  SI ET SEULEMENT SI  $\sum a_i - \sum b_j \in$

$\Lambda_\tau$ .

▷ Le sens direct a déjà été vu. Traitons donc le sens réciproque. On définit la *fonction  $\sigma$  de Weierstrass*  $\sigma(z) = z \prod_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} (1 - \frac{z}{\gamma}) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma}}$ . Cette fonction est holomorphe et ses zéros sont précisément sur le réseau.

Elle n'est pas elliptique, mais son comportement par rapport au réseau est maîtrisable :  $\sigma(z + \gamma) = (-1)^{n_\gamma} \sigma(z) e^{\alpha_\gamma(z + \frac{\gamma}{2})}$  où  $n_\gamma$  et  $\alpha_\gamma$  ne dépendent que de  $\gamma \in \Lambda_\tau$ . Posons  $g(z) := \frac{\sigma(z-a_1) \dots \sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1) \dots \sigma(z-b_n)}$  qui est elle elliptique. En effet,  $g(z+1) = g(z)$  et  $g(z+\tau) = g(z)$ . Écrivons le premier pour exemple :

$$g(z+1) = \frac{\sigma(z-a_1+1) \dots \sigma(z-a_n+1)}{\sigma(z-b_1+1) \dots \sigma(z-b_n+1)} = \frac{\sigma(z-a_1) \dots \sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1) \dots \sigma(z-b_n)} \underbrace{\frac{e^{c(\sum_{i=1}^n (z-a_i) + \frac{1}{2})}}{e^{c(\sum_{i=1}^n (z-b_i) + \frac{1}{2})}}}_{e^{c(\sum_i (b_i - a_i))}}$$

mais  $\sum a_i - b_i = 0$  d'où la périodicité.

Montrons que ce produit infini est bien défini. On rappelle qu'un produit infini de fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$ ,  $\prod_n F_n(z)$  converge uniformément sur tout compact si pour tout compact  $K \subseteq \mathbb{C}$ ,  $\lim F_n(z) = 1$  uniformément sur  $K$  et il existe  $n_0$  tel que  $\sum_{n \geq n_0} \log(F_n(z))$  converge uniformément (la convergence normale suffit donc). Ainsi  $\left| \log(1 - \frac{z}{\gamma} e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma}}) \right| = \left| \log(1 - \frac{z}{\gamma}) + \frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma} \right|$  où le premier terme  $-\frac{z}{\gamma} - \frac{z^2}{2\gamma} - \frac{z^3}{3\gamma^3}$ . Pour  $z \in K$  un compact fixé,  $\left| \log(1 - \frac{1}{z}) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma}} \right| \leq \frac{c}{|\gamma|^3}$  converge. Ainsi  $\sigma(z)$  est bien définie. ■

**Mnémonik :** la répartition des pôles de  $g$  correspond au plus grand ordre des pôles prescrits  $(b_j)$ .

**Application. (Vérification du théorème d'Abel pour  $\wp'$ )**

On sait que  $\wp' \in \mathcal{M}(E_\tau)$  et ses zéros sont  $\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}$  et  $\frac{1+\tau}{2}$ . Son unique pôle 0 est du troisième ordre. Vérifions le théorème dans ce cas particulier :  $\sum_{i=1}^3 a_i - b_i = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \frac{1+\tau}{2} = 1 + \tau$  qui tombe bien dans  $\Lambda_\tau$ .

Étudions plus en détail la fonction  $\sigma$ .

**Définition. (Fonction  $\zeta$  de Weierstrass)**

On note  $\sigma$  la fonction  $\sigma$  de Weierstrass. On note  $\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log(\sigma(z))$  la *fonction  $\zeta$  de Weierstrass* qui est la dérivée logarithmique de la fonction  $\sigma$  de Weierstrass.



Toutes ces fonctions dépendent encore de  $\Lambda_\tau$ .

### Proposition

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{z - \gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}.$$

### Propriété. (*Propriété fondamentale de $\wp$* )

La fonction  $\zeta$  de Weierstrass vérifie l'équation  $\zeta'(z) = -\wp(z)$ .

$$\triangleright \text{ On a } \zeta(z) = \frac{1}{z} \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{z - \gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \text{ d'où } \zeta'(z) = -\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\right). \blacksquare$$

### Corollaire

$$\zeta \in \mathcal{M}(E_\tau).$$

Détaillons la loi de transformation de  $\sigma$  sous l'action de  $E_\tau$  grâce à sa dérivée logarithmique  $\zeta$ , de la même manière que l'on avait déterminé la loi de transformation de  $\wp$  à partir de  $F_3 \propto \wp'$ .

On a  $\zeta(z+1) - \zeta(z) = \eta_1 \in \mathbb{C}$  et  $\zeta(z+\tau) - \zeta(z) = \eta_2 \in \mathbb{C}$ , d'où  $\log(\sigma(z+1)) - \log(\sigma(z)) = \eta_1 z + c_1$  et  $\log(\sigma(z+\tau)) - \log(\sigma(z)) = \eta_2 z + c_2$ , d'où en prenant l'exponentielle  $\sigma(z+1) = \sigma(z)e^{\eta_1 z + c_1}$  et  $\sigma(z+\tau) = \sigma(z)e^{\eta_2 z + c_2}$ . Observons que  $\sigma$  est impaire :  $\sigma(z) = -\sigma(-z)$ , d'où  $\sigma(\frac{1}{2}) = \sigma(-\frac{1}{2}+1) = \sigma(-\frac{1}{2})e^{-\frac{\eta_1}{2} + c_1} = -\sigma(-\frac{1}{2})$ , d'où  $e^{\frac{\eta_1}{2}} = -e^{c_1}$ . Symétriquement, on obtient  $-e^{\frac{\eta_2}{2}} = e^{c_2}$ . On en déduit :

$$\sigma(z+1) = -\sigma(z)e^{\eta_1(z+\frac{1}{2})} \text{ et } \sigma(z+\tau) = -\sigma(z)e^{\eta_2(z+\frac{1}{2})}.$$

Les deux constantes  $\eta_1, \eta_2(\zeta(\tau))$  ne sont en fait pas indépendantes.

### Lemme. (*Formule de Legendre*)

$$\eta_1\tau - \eta_2 = 2\pi i.$$

$\triangleright$  La fonction  $\zeta$  a un unique pôle à l'intérieur d'un parallélogramme contenant l'origine en son intérieur. Par le théorème des résidus, en utilisant des notations déjà utilisées plus haut, on a  $2\pi i = \int_{\partial P} \zeta(z) dz = \int_{\partial P_1} \zeta(z) dz + \int_{\partial P_2} \zeta(z) dz + \int_{\partial P_3} \zeta(z) dz + \int_{\partial P_4} \zeta(z) dz = \int_{\partial P_1} \zeta(z) dz - \int_{\partial P_1} \zeta(z + \tau) dz + \int_{\partial P_2} \zeta(z) dz - \int_{\partial P_2} \zeta(z - 1) dz = \int_{\partial P_1} -\eta_2 dz + \int_{\partial P_2} \eta_1 dz = \eta_1\tau - \eta_2$ .  $\blacksquare$

En particulier :

### Lemme

Fixons  $N$  un entier naturel non nul. Soit  $(z_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une collection de  $N$  points du plan complexe. Alors la fonction  $g(z) = \sum_{i=1}^N a_i \zeta(z - z_i)$  est elliptique si et seulement si  $\sum_i^N a_i = 0$ .

▷ On utilise  $\zeta(z+1) - \zeta(z) = \eta_1$ . Alors  $g(z+1) = \sum_i^N a_i \zeta(z-z_i+1)$  et  $g(-z) = -\sum a_i \zeta(z-z_i)$  qui vaut  $-(\sum_i^N a_i) \eta_1$ . De même,  $g(z+\tau) - g(z) = (\sum_i^N a_i) \eta_2$  qui permet facilement de conclure. ■

On utilisera ce résultat dans le preuve du théorème de Riemann-Roch sur le tore.

Le théorème d'Abel pour le tore complexe s'énonce dans un contexte bien plus adapté à sa généralisation, pour lequel on introduit la

#### 4.2.3.5 Fonction de Jacobi sur le tore

##### Définition. (*Fonction d'Abel-Jacobi*)

On note la *fonction d'Abel-Jacobi*

$$\begin{aligned} J: \quad \text{Div}(E_\tau) &\longrightarrow E_\tau \\ z \in X = E_\tau &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

où  $[ \cdot ]$  note la projection  $\mathbb{C} \rightarrow E_\tau$  et l'expression de  $J$  se déduit par propriété universelle du groupe abélien libre engendré, en utilisant la structure additive sur  $E_\tau$ .

##### Reformulation pratique. (*Théorème d'Abel sur $E_\tau$* )

Soit  $D \in \text{Div}(E_\tau)$ . Alors  $D$  est principal sur  $E_\tau$  si et seulement si  $\deg(D) = 0$  et  $J(D) = [0]$ . Autrement dit,  $\text{Princ}(E_\tau) = \text{Div}^0(E_\tau) \cap \text{Ker}(J_{E_\tau})$ .

Encore dit autrement :

##### Fait

On a un isomorphisme de groupes  $\text{Div}^0(X)/\text{Princ}(X) \simeq C/\Gamma_\tau$ , et un isomorphisme de groupes  $\text{Div}(X)/\text{Princ}(X) \simeq \mathbb{Z} \times (C/\Gamma_\tau)$ .

Le premier isomorphisme est une réécriture de la reformulation précédente. Le deuxième isomorphisme vient de la suite exacte  $0 \longrightarrow \text{Div}^0(X)/\text{Princ}(X) \longrightarrow \text{Div}(X)/\text{Princ}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ .

Une conséquence importante du théorème d'Abel est alors la suivante :

##### Propriété

Tout diviseur de degré strictement positif dans  $E_\tau$  est équivalent à un diviseur effectif, qui, de plus, est supporté en un seul point.

▷ L'énoncé nous laisse guère de choix pour la forme de ce diviseur. Supposons que  $\deg(D) = d > 0$ . Posons  $D' = D - d[z]$  en fixant un  $[z] \in E_\tau$  tel que  $J(D') = [0]$ , c'est-à-dire  $[dz] = J(D)$ . Alors par le théorème d'Abel, il existe  $f \in \mathcal{M}(E_\tau)$  telle que  $(f) = D - d[z]$ , et alors  $D \sim d[z]$ , diviseur effectif. ■

#### 4.2.3.6 Diviseurs sur un tore complexe

**Théorème.** (*Théorème de Riemann-Roch pour  $E_\tau$* )

Soit  $D$  un diviseur sur  $E_\tau$ ,  $D = \sum_{i=1}^N n_i [z_i]$  avec les  $n_i \in \mathbb{Z}$  et les  $[z_i] \in E_\tau$  pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , où  $N \in \mathbb{N}$ . Alors

- (i) si  $\deg(D) < 0$ ,  $L(D) = \{0\}$  ;
- (ii) si  $\deg(D) > 0$ ,  $\dim(L(D)) = \deg(D)$  ;
- (iii) si  $\deg(D) = 0$ ,  $\begin{cases} \dim(L(D)) = 1 \text{ si } [\sum_i n_i z_i] = [0] \\ L(D) = \{0\} \text{ sinon.} \end{cases}$

▷ Le seul point spécifique aux fonctions elliptiques est le (ii). Supposons  $D = n_1 z_1 + \dots + n_N z_N$  et l'on a alors  $d = n_1 + \dots + n_N > 0$ . On peut supposer les  $n_i > 0$  d'après la propriété corollaire du théorème d'Abel. Construisons toutes les fonctions méromorphes avec des pôles d'ordre au moins  $n_i$  en  $z_i$ . Considérons en général  $F(z) = c + \sum_{i=1}^N \sum_{k=2}^{n_i} c_{1,i} F_k(z - z_i)$ . Les  $\zeta(z - z_i)$  ne sont pas des fonctions elliptiques, mais ce n'est pas un problème en vertu du lemme corollaire de la formule de Legendre. Le théorème suit : en effet, pour chaque  $i$  on peut choisir  $n_i$  coefficients du développement de Laurent et une contrainte est donnée par le lemme. La dimension de  $L(D) \{ F \in \mathcal{M}(E_\tau) \mid F = c + \sum_i a_i \zeta(z - z_i) + \sum_i \sum_{k=2}^{n_i} c_{1,i} F_k(z - z_j), c, c_j, c_{1,i}, \dots, c_{N,i} \in \mathbb{C}, a_1 + \dots + a_N = 0 \}$  est donc, en remarquant qu'il est isomorphe à  $V = \{F, c_{1,i} \in \mathbb{C}\}$ , celle de cet espace, soit  $\sum_i (n_i - 1) + 1 = \deg(D) - N + 1$ . ■

Constatons la puissance du théorème de Riemann-Roch :

**Application.** (*Calcul de l'espace des fonctions de pôle en 0 d'ordre  $\leq 2$* )

Par le théorème,  $\dim(L(2.[0])) = 2$ . On a donc par dimension :  $L(2.[0]) = \langle 1, \wp \rangle$ .

Pour comparer, remarquons que  $\dim(L(2.[0])) = 3$  dans  $\mathbb{CP}^1$ , où  $L(2.[0]) = \left\langle 1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2} \right\rangle$ .

On ira bien plus loin avec le dernier théorème de cette étude.

#### 4.2.3.7 Description du corps des fonctions méromorphes sur $E_\tau$

**Théorème.** (*Description du corps des fonctions méromorphes de  $E_\tau$* )

$$\mathcal{M}(E_\tau) = \mathbb{C}(\wp, \wp').$$

▷ Soit  $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$ , soit  $F : E_\tau \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Supposons d'abord que  $F$  est paire. Le degré de  $F$  est alors nécessairement pair. On peut par isolation choisir  $a, b \in \mathbb{CP}^1$  tels que  $F^{-1}(a)$  et  $F^{-1}(b)$  ont  $2n = \deg(F)$  points simples formant deux familles disjointes et dont aucun n'est un point de branchement de  $\wp$ , en particulier ni un zéro ni un pôle de  $\wp$ . Remarquons que  $f(z) = \frac{F(z) - F(a)}{F(z) - F(b)}$  a ses zéros précisément en  $F^{-1}(a) = \{\pm a_i\}$  et ses pôles précisément en  $F^{-1}(b) = \{\pm b_j\}$ . Maintenant, en posant  $g(z) = \frac{\prod_i \wp(z) - \wp(a_i)}{\prod_i \wp(z) - \wp(b_i)}$ , il existe une constante telle que  $g = cf$ , car  $g$  et  $f$  ont même zéros et pôles,

d'où  $F \in \mathbb{C}(\wp)$ . Si maintenant  $F$  est impaire, considérer  $\frac{F}{\wp'}$  qui est paire. Ainsi,  $F \in \mathbb{C}(\wp, \wp')$  dans les deux cas. Dans le cas général, il suffit de décomposer en parties paire et impaire  $F = F_1 + F_2$  et c'est terminé. ■

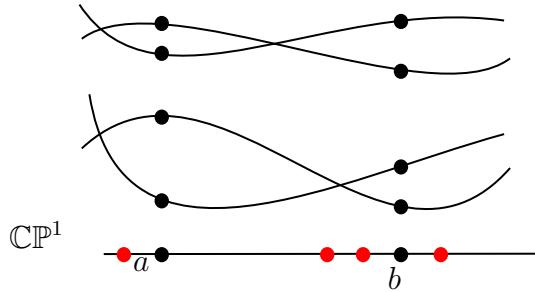


FIGURE 4.2.7 : Illustration de la preuve précédente.. —

*Remarque.* L'extension  $\mathbb{C}(\wp)/\mathbb{C}$  est purement transcendante et  $\mathbb{C}(\wp, \wp')/\mathbb{C}(\wp)$  est finie, ce que l'on illustre dans la relation de la proposition ci-dessous.

**Exercice 14 (Développement de Laurent de  $\zeta$  en l'origine)**

Montrer que  $\zeta(z) = \frac{1}{z} - G_4 z^3 - G_6 z^5 + \dots$  où  $G_n$  est la  $n$ -ième somme de Riemann sur  $\Lambda_\tau \setminus \{0\}$ .

**Proposition**

La fonction de Weierstrass satisfait l'équation :

$$\mathcal{P}'^2(z) = 4\mathcal{P}^3(z) - g_2(\tau)\mathcal{P}(z) - g_3(\tau)$$

pour  $g_2(\tau) = 60 \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^4}$  et  $g_3(\tau) = 140 \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^6}$  des fonctions modulaires.

▷ On garde la notation  $S(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ . On remarque que  $S$  est holomorphe en 0 avec  $S(0) = 0$ , donc, comme  $\wp$  est paire, au voisinage de 0,  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$ , avec même  $a_2 = \frac{S''(0)}{2} = 3 \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^4}$  et  $a_4 = \frac{S^{(4)}(0)}{24} = \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{5}{\gamma^6}$ . Ainsi, au voisinage de 0,  $\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots$  d'où  $\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \dots$  pour des coefficients  $b_2, b_4$  qu'il ne nous sert à rien d'expliciter.

Par ailleurs, on a aussi  $\wp(z)^3 = (\frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + 3a_2 z^2 + 3a_6 z^4 + \dots = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \dots$ . On obtient donc  $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a_2\wp(z) = 28a_4 + d_2 z^2 + d_4 z^4 + \dots$  où  $d_2, d_4 \in \mathbb{C}$ .

Remarquons enfin que  $z \mapsto \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a_2\wp(z) - 28a_4$  est holomorphe en 0, car DSE. Elle est elliptique, donc entière, donc constante. Puisqu'elle s'annule en zéro, elle est nulle. On renomme  $g_2 = 20a_2 = 60 \sum_{\Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^4}$  et  $g_3 = 28a_4 = 140 \sum_{\Lambda_\tau \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^6}$ . ■

### Heuristique

En écrivant  $t = \wp(z)$  et en considérant l'équation différentielle  $(\frac{dt}{dz})^2 = 4t^3 - g_2t - g_3$ , on comprend que l'inverse de la fonction  $\wp$  devrait être donné formellement par  $\int \frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} dt$ , mais ces intégrales ne sont pas bien définies en général, car la racine carré n'est pas univoquement définie sur  $\mathbb{C}$ . Pour tout chemin d'intégration qui ne passe en aucune racine, on peut définir l'intégrale ci-dessous par prolongement analytique de l'intégrande sur le chemin, mais l'intégrale peut différer selon le choix du chemin.

En fait, l'étude d'intégrales de la forme  $\int \frac{1}{\sqrt{p(t)}} dt$  est la motivation historique de la théorie des surfaces de Riemann. On peut penser aux fonctions elliptiques comme des généralisation des fonctions circulaires. Par exemple,  $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$  est la fonction arcsin et la fonction inverse de cette intégrale est une fonction périodique. Les fonctions elliptiques sont alors les fonctions inverses des intégrales ci-dessus avec  $p$  de degré 3, et elles ont la propriété remarquable d'être doublement périodique.

### Reformulation pratique

La fonction  $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$  prend ses valeurs dans la cubique  $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ .

*Remarque.* Par une condition classique, on sait que cette cubique est lisse si et seulement si  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ .

On pourra démontrer le théorème suivant :

### Théorème

Soient  $\tau$  un complexe de partie imaginaire strictement positive,  $\Lambda$  le réseau associé,  $\wp$  la fonction de Weierstrass issue de ce réseau et  $\mathcal{C}$  la cubique définie par elle. Alors  $\psi: \mathbb{C} \setminus \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^2$  induit une identification de  $(\mathbb{C} \setminus \Lambda)/\Lambda$  avec  $\mathcal{C}$  et également  $z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z))$  de  $\mathbb{C}/\Lambda$  avec la conique projective  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

On peut démontrer les théorèmes que nous avons éprouvé sur des exemples (description des surfaces de Riemann comme quotients, condition d'Abel, dimension de Riemann-Roch, structure du corps méromorphe, plongement des surfaces compactes dans un espace projectif) pour des surfaces de Riemann générales. Pour cela, nous aurons besoin d'outils issus de la topologie algébrique.

## 4.3 Un peu de topologie algébrique pour apprêhender les surfaces de Riemann

### 4.3.1 Considérations topologiques sur les surfaces

Les surfaces de Riemann sont en particulier des variétés topologiques réelles orientables de dimension 2, autrement dit, des surfaces (topologiques, réelles) orientables. De plus, une surface de Riemann est compacte si et seulement si la surface topologique sous-jacente l'est.

On a étudié la structure complexe de la sphère, et celle du tore ; il est temps de généraliser.

#### 4.3.1.1 Classification des surfaces topologiques compactes

##### Définition. (*Surface topologique*)

Une *surface topologique* est une variété topologique réelle de dimension 2.

##### Définition. (*Somme connexe de surfaces topologiques*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces topologiques. La *somme connexe* de  $X$  et  $Y$ , notée  $X \# Y$ , est la surface topologique obtenue en retirant un disque de chaque surface et en les recollant le long des bords de ces disques.

##### Théorème. (*Classification des surfaces compactes orientables*)

Les surfaces topologiques compactes connexes orientables sont, à homéomorphisme près, la sphère  $S^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  et les surfaces  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  dites *bouées à  $g$  trous* avec  $g$  termes où  $g \geq 2$  est le *genre* de la surface. En posant  $S^2$  la somme connexe vide, elles sont donc toutes décrites par  $\{\#_{i=1}^g \mathbb{T}^i \mid g \in \mathbb{N}\}$ , famille qui forme une transversale sur leur ensemble pour l'homéomorphie.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Ce théorème se démontre au moyen de l'outil de triangulation des surfaces compactes et du théorème de triangulation dû à RADÓ, objet de la section suivante. ■

##### Corollaire. (*Plongement des surfaces dans l'espace*)

Toute surface compacte orientable se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .

##### Corollaire. (*Plongement des surfaces de Riemann dans l'espace*)

Toute surface de Riemann compacte se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.3.1.2 Combinatoire des surfaces topologiques

#### Définition. (*Triangulation d'une surface compacte*)

Une *triangulation* d'une surface compacte  $X$  est une famille finie indexée par  $I$  d'homéomorphismes  $\varphi_i : \Delta \rightarrow \varphi_i(\Delta) \subseteq X$  en fixant  $\Delta$  le triangle du plan de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$  tel que pour  $i,j \in I$ ,  $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta)$  soit vide, un sommet ou une arête commune aux deux triangles. (En particulier, l'intérieur des triangles de la triangulation sont disjoints.) Une surface est dite *triangulable* ou *triangulée*, si elle admet une triangulation.

#### Proposition. (*Triangulation des surfaces compactes*)

Toute surface compacte est triangulable.

#### Remarques.

1. En fait, RADÓ a montré en 1924 que toute surface à base dénombrable (ça lui plaisait) est triangulable, avec un nombre quelconque de triangles. Il faut alors dans la définition de triangulation, imposer que tout point possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de triangles.
2. Le théorème de triangulation est vrai pour les variétés compactes de dimension 3 : il a été démontré par MOISE en 1952, mais en dimensions plus grandes, il est infirmé.
3. On peut alors redéfinir l'orientabilité d'une surface triangulée en disant qu'il existe une orientation sur chaque triangle *compatible*, *i.e.* induisant des orientations opposées sur les arêtes communes.
4. (*Relative unicité de la façon de trianguler*) On peut toujours passer d'une triangulation à une autre par déformation continue et un nombre fini d'étapes élémentaires parmi les suivantes : la création d'un sommet dans l'adhérence d'un triangle et la création de trois nouveaux triangles, et l'opération inverse ; le remplacement de l'arête commune de deux triangles adjacents par l'autre diagonale du quadrilatère qu'ils forment, ce que l'on appelle un *flip*.

#### Définition-propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une surface*)

Soit  $X$  une surface topologique triangulée par une certaine triangulation. On note  $\chi(X) = S - A + F \in \mathbb{Z}$  où  $S$  est le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces de la triangulation. Alors  $\chi(X)$  ne dépend pas du choix de la triangulation, et on appelle ce nombre la *caractéristique d'Euler* de  $X$ .

**Fait. (*Relation genre-caractéristique*)**

Soit  $X$  une surface orientable triangulée. Alors

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

où  $g(X)$  est le genre de  $X$ . Réciproquement,  $g(X) = 1 - \frac{\chi(X)}{2}$ .

Si  $X$  est non orientable, alors

$$\chi(X) = 2 - g(X).$$

Réciproquement,  $g(X) = 2 - \chi(X)$ .

**Mnémonik :** le genre est un entier positif ou nul, défini uniquement pour une surface topologique, tandis que la caractéristique d'Euler est un entier relatif pair  $\leq 2$  dans le cas d'une surface.

**Exemples. (*Caractéristiques d'Euler, genres*)**

1.  $\chi(S^2) = 2$  et  $g(S^2) = 0$ .
2.  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$  et  $g(\mathbb{T}^2) = 1$ .
3.  $\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = -2$  et  $g(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = 2$ .

**Propriété. (*Transport de la caractéristique via un recouvrement*)**

Soient  $X, Y$  deux surfaces,  $Y$  compacte. On suppose que  $Y$  est revêtue par  $X$  via un revêtement (topologique) à  $d$  feuillets,  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

**Application. (*Caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein*)**

On a un revêtement différentiel, en particulier topologique, du tore  $\mathbb{T}^2$  sur la bouteille de Klein  $K$  à deux feuillets. Ainsi,  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0 = 2\chi(K)$ , d'où

$$\chi(K) = 0$$

puis

$$g(K) = 2.$$

**Exercice 15**

Peut-on en déduire que  $K$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^2$  ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non. Le théorème de classification ne s'applique pas :  $K$  n'est pas orientable.

On décrit maintenant les groupes fondamentaux des surfaces topologiques.

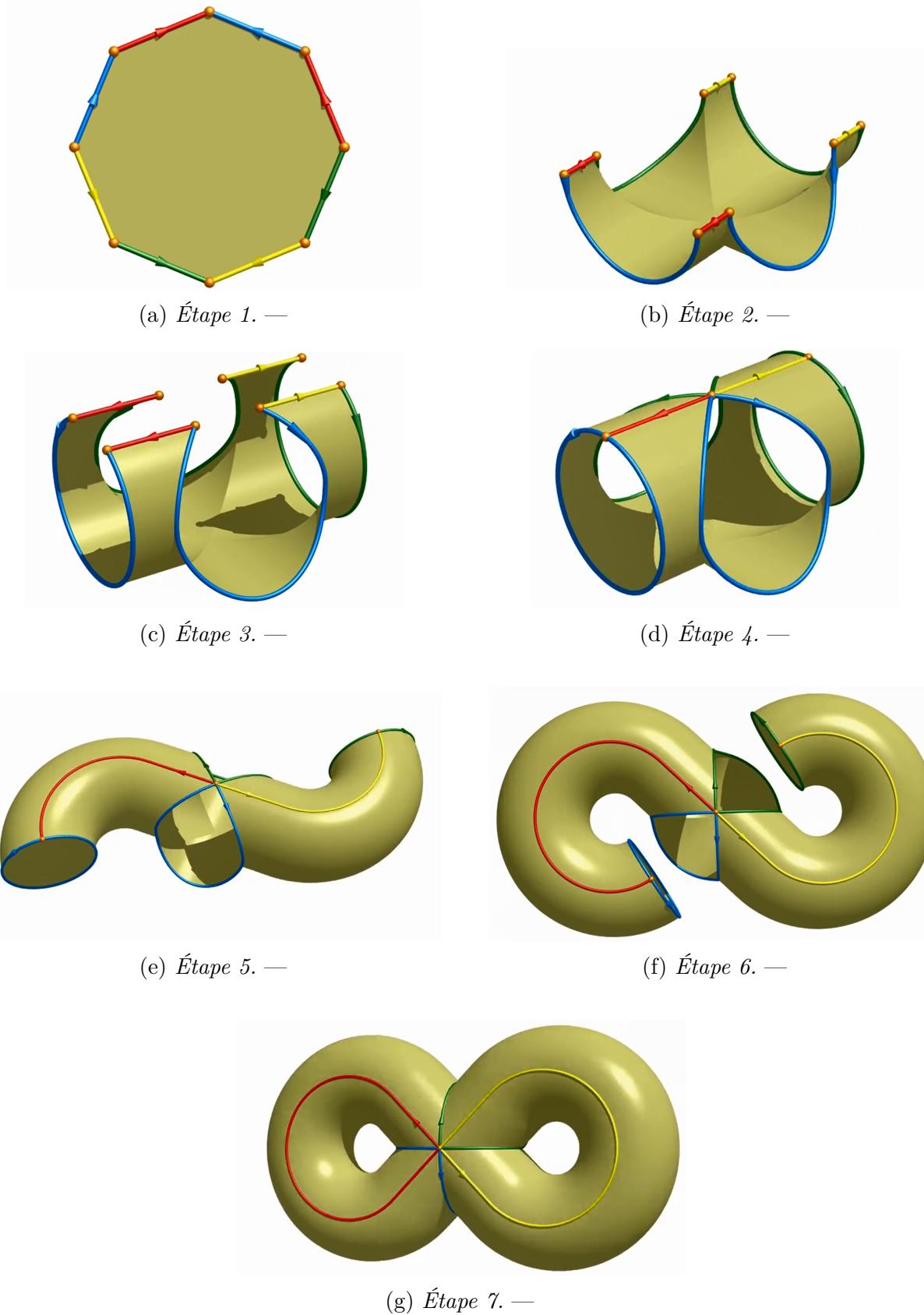
**Propriété. (*Groupe fondamental d'une surface compacte*)**

Soit  $X$  une surface orientable, compacte, connexe = connexe par arcs de genre  $g$ . Alors  $\pi_1(X)$  est présenté par  $2g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  et une relation  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  désigne le commutateur.

▷ Conséquence du théorème de Van-Kampen appliqué à la somme connexe  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ , avec  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid [\gamma_1, \gamma_2] \rangle$ . Pour le cas général, le groupe fondamental est invariant par homéomorphisme. ■

**Corollaire. (*Structure de CW-complexe d'une surface compacte*)**

Toute surface compacte connexe est munie d'une structure de *CW-complexe* dont le 2-squelette est un  $2g$ -gone, dit *polygone fondamental* de la surface.

FIGURE 4.3.1 : *Structure de CW-complexe de  $T \# T$ .* —

On s'intéresse maintenant aux interactions entre la structure complexe d'une surface topologique orientable et la structure topologique sous-jacente, au moyen des revêtements topologiques et holomorphes au sens des variétés complexes.

#### 4.3.1.3 Revêtements holomorphes entre surfaces de Riemann

Commençons par énoncer des propriétés relatives aux revêtements holomorphes en variétés complexes générales.

##### Lemme. (*Caractérisation des revêtements holomorphes*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement entre variétés complexes. On suppose que  $f$  est un biholomorphisme local (*autrement dit, que  $f$  n'est pas ramifié avec le vocabulaire de la section suivante*). Alors  $f$  est un revêtement si et seulement si  $f$  est propre.

▷ En effet,  $X$  est séparé. ■

##### Propriétés. (*Relèvement par rapport un revêtement holomorphe*)

Soit  $p : X \rightarrow Y$  un revêtement holomorphe entre variétés complexes.

1. Soit  $\gamma$  un chemin dans  $Y$  d'extrémité  $y_0 \in Y$ . Pour tout  $x_0 \in p^{-1}(Y)$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma}$  dans  $X$  tel que  $\gamma = p\tilde{\gamma}$ .
2. Soit  $H$  une homotopie dans  $Y$  entre  $\gamma$  et  $H(\cdot, 1)$ . Il existe une unique homotopie  $\tilde{H}$  dans  $X$  entre  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{H}(\cdot, 1)$  telle que  $H = p\tilde{H}$ .
3. Soient  $E \ni e$  une variété complexe connexe par arcs,  $f : E \rightarrow Y$  une application holomorphe et  $x_0 \in p^{-1}(f(e))$ . Alors  $f_*(\pi_1(E, e)) \subseteq p_*(\pi_1(X, x_0))$  si et seulement s'il existe une application  $\tilde{f} : E \rightarrow X$  de valeur  $x_0$  en  $e$  telle que  $f = p\tilde{f}$  et pour tout chemin dans  $E$  d'extremité  $e$ ,  $\tilde{f}\gamma$  est continue.
4. (*Équivalence des revêtements holomorphes*) Soient  $X_1, X_2, Y$  trois variétés complexes où  $Y$  est connexe par arcs. Soient  $p_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $p_2 : X_2 \rightarrow Y$  deux revêtements holomorphes tels que  $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ ,  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ . Alors il existe un biholomorphisme  $F : X_1 \longrightarrow X_2$  tel que  $p_2F = p_1$  et  $F(x_1) = x_2$  si et seulement si  $p_{1*}(\pi_1(X_1, x_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2, x_2))$ .

##### Exercice 16 (*Revêtement holomorphe d'un anneau par le demi-plan supérieur*)

Soit l'anneau  $A_r = \{w \mid r < |w| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$ . Posons un certain  $\lambda$  tel que  $r = \exp\left(\frac{-2\pi^2}{\log(\lambda)}\right)$ . Montrer que l'application  $z \mapsto \exp(2\pi i \frac{\log(z)}{\log(\lambda)})$  définit un revêtement holomorphe de  $A_r$  par  $\mathbb{H}$ , avec un groupe de revêtement engendré par la dilatation  $z \mapsto \lambda z$ .

**Exercice 17** (*Lemme de relèvement pour les revêtements universels holomorphes*)

Soit  $X$  une surface de Riemann simplement connexe. Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction holomorphe. Montrer qu'il existe une fonction  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\exp \circ \tilde{f} = f$ .

### 4.3.2 Revêtements ramifiés

La forme locale est applications holomorphes entre surfaces de Riemann nous pousse à adopter la terminologie suivante :

#### Définition. (*Revêtement ramifié, embranché*)

Une fonction  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre surfaces topologiques quelconques est un *revêtement ramifié*, ou *embranché*, s'il existe un fermé discret  $S \subseteq Y$ , dit *lieu d'embranchement*, tel que

- (i)  $\varphi|_{\varphi^{-1}(Y \setminus S)} : \varphi^{-1}(Y \setminus S) \rightarrow Y \setminus S$  est un revêtement holomorphe ;
- (ii) pour tout  $x_0 \in \varphi^{-1}(S)$ , il existe des coordonnées  $\varphi_{x_0}$  autour de  $x_0$  et  $\varphi_{y_0}$  autour de  $y_0$  de sorte que  $\varphi_{y_0} \circ \varphi \circ \varphi_{x_0}^{-1}(z) = z^n$  où  $n = m_{x_0}\varphi \geq 1$  est la *multiplicité* ou *ordre de ramification* de  $\varphi$  en  $x_0$ , où ici  $z = x + iy$  est une variable complexe obtenue à partir des coordonnées réelles  $(x, y)$  de variétés topologiques de dimension 2.

On note parfois  $V_{x_0}(\varphi) = V_{x_0} = n - 1$  l'*indice de ramification* de  $\varphi$  en  $x_0$ . C'est une terminologie que nous n'utiliserons pas ici.



On ne demande pas nécessairement à  $X$  et  $Y$  d'avoir une structure de surface de Riemann !

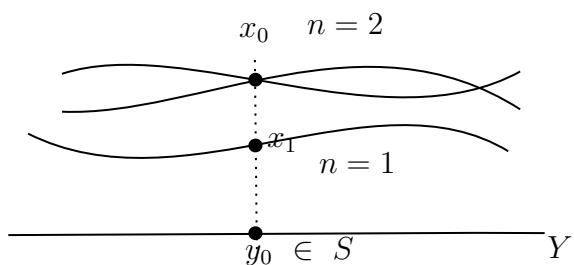


FIGURE 4.3.2 : *Revêtement ramifié*. —

De même que pour les fonctions méromorphes, on peut définir le

**Proposition. (*Degré d'un revêtement ramifié*)**

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un revêtement ramifié entre deux surfaces connexes  $X, Y$ . On suppose que  $\varphi$  est propre, c'est-à-dire que  $\varphi^{-1}(K) \subseteq X$  est compact pour tout  $K \subseteq Y$  compact. Alors il existe  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $y \in Y$ ,  $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} m_x \varphi = d$  où  $m_x \varphi$  est la multiplicité de  $\varphi$  en  $x$ .

**VOC** On appelle  $d$  le *degré du revêtement ramifié*  $\varphi$ .

→ *Convention.* On se passera librement dans la suite de supposer le revêtement ramifié propre, si l'on utilise son degré.

On a donc en particulier :

**Propriété. (*Holomorphe  $\Rightarrow$  revêtement ramifié*)**

Toute application holomorphe propre non constante entre deux surfaces de Riemann est un revêtement ramifié.

Elle est non ramifiée si et seulement si c'est un biholomorphisme local.

▷ En effet, l'ensemble des points de ramification est isolé par définition de la forme locale d'une fonction holomorphe. ■

**Corollaire. (*Holomorphe dans une compacte  $\Rightarrow$  finiment ramifiée*)**

Si  $f : X \rightarrow Y$  entre surfaces de Riemann où  $Y$  est compacte est holomorphe, non constante,  $f$  est finiment ramifiée

*Remarque.* Un revêtement ramifié de degré 1 entre surfaces de Riemann connexes est un biholomorphisme.

**Exemples. (*Applications ramifiées*)**

1. Considérons  $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $\varphi$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , donc c'est un revêtement ramifié de  $\mathbb{C}$ . Calculons de plus  $\varphi'$ . On a  $\varphi'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$  en tout  $z \neq 0$ . Ainsi,  $\varphi'(z) = 0 \iff z = \pm 1$ . Ainsi, en  $z \neq 1$ ,  $\varphi$  est un biholomorphisme local par le théorème d'inversion locale. En  $\pm 1$ ,  $\varphi$  est d'ordre de ramification 2 et vaut respectivement 2 et -2. On a alors  $S = \{\pm 1\}$ ,  $\varphi^{-1}(S) = \pm 1$ .
2. L'application  $z \mapsto (z^2 + 1)^2$  est ramifiée et ses points de ramification sont  $0, i$  et  $-i$ . Ses branchements sont en 0 et 1. L'image réciproque du branchement est alors  $\{-i, i, 0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$  qui contient strictement les points de ramification !

On peut définir dès à présent un nouveau type de diviseur :

**Définition. (*Diviseur de ramification*)**

Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  un revêtement ramifié propre entre surfaces de Riemann compactes. Le *diviseur de ramification* associé à  $\varphi$  est la somme formelle dans  $\text{Div}(Y)$  :

$$R_\varphi = \sum_i (n_i - 1)y_i$$

où les  $(y_i)_i$  sont les points de ramification de  $\varphi$  et  $n_i$  l'ordre de ramification de  $\varphi$  en  $y_i$  pour tout  $i$ .

Le principal intérêt de la notion de revêtement ramifié est le calcul pratique des caractéristiques d'une surface générale.

**Théorème. (*Formule de Riemann-Hurwitz*)**

Soient  $\varphi : X \rightarrow Y$  un revêtement ramifié propre de lieu d'embranchement  $S$  et de degré  $d \in \mathbb{N}^*$  entre surfaces compactes. Alors

$$\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in \varphi^{-1}(S)} (m_x \varphi - 1).$$

④ (*Idée de la preuve.*) On triangule  $Y$  avec des petits triangles tels que  $S$  est contenue dans l'ensemble des sommets de la triangulation et si  $\varphi(D)$  est un triangle dans  $Y$ , alors  $\varphi^{-1}(\varphi(D))$  est la réunion de triangles d'une triangulation de  $X$ , ce qui est possible si les triangles de la triangulation choisie sont assez petits, autrement dit si elle est assez fine. On a  $\chi(Y) = S_0 - A_0 + F_0$  et  $\chi(X) = S - A + F$  pour ces deux triangulations. Alors on peut calculer que  $A = dA_0$ ,  $F = dF_0$  et  $S = dS_0 - \sum_{x \in \varphi^{-1}(S)} (m_x \varphi - 1)$ , ce qui est cohérent avec ce que chaque point de ramification diminue en  $(o(y) - 1)$  le nombre dilaté de sommets de la triangulation originelle. ■

**Reformulation pratique. (*Formule de Riemann-Hurwitz*)**

Sous les mêmes hypothèses :

1.  $\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in \varphi^{-1}(S)} V_x,$
2.  $\chi(X) = d\chi(Y) - \deg(R_\varphi),$
3.  $\chi(X) = d(\chi(Y) - 1) + \text{card}(\text{ramifications}),$   

$$\sum_{x \in \varphi^{-1}(S)} V_x$$
4.  $g(X) = d(g(Y) - 1) + 1 + \frac{\sum_{x \in \varphi^{-1}(S)} V_x}{2}.$

*Remarque.* Si le revêtement n'est pas ramifié,  $S = \varphi^{-1}(S) = \emptyset$  et l'on retrouve  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

### Méthode. (*Calcul du genre d'une SR par un revêtement ramifié*)

Toute surface de Riemann compacte pourra être décrite comme un revêtement ramifié de  $\mathbb{CP}^1$  une fois que l'on saura qu'il existe toujours une fonction méromorphe sur une surface de Riemann.

On peut alors calculer la caractéristique puis le genre de la surface grâce à la formule de Riemann-Hurwitz.

### Exemple fondamental. (*Caractéristique de la sphère de Riemann*)

On a un revêtement ramifié  $\varphi : E_\tau \rightarrow \mathbb{CP}^1$  de degré 2. On peut calculer facilement  $\chi(E_\tau) = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$  qui est la caractéristique d'un tore. Par suite,  $\boxed{\chi(\mathbb{CP}^1) = 2}$ , sans surprise puisque  $\mathbb{CP}^1$  est topologique une 2-sphère. On en déduit sans surprise non plus  $g(\mathbb{CP}^1) = 0$  son genre.

### Propriété

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe propre entre surfaces de Riemann telles que  $g(X) < g(Y)$ . Alors  $f$  est constante.

▷ Raisonnons par contraposée. Par le théorème de Riemann-Hurwitz, si  $f$  est non constante, c'est un revêtement ramifié, de degré  $d \in \mathbb{N}$  et  $\chi(X) \leq \chi(Y)$ , d'où  $g(X) \geq g(Y)$ . ■

### Corollaire

Une surface de Riemann admettant une fonction méromorphe avec un unique pôle d'ordre 1 est biholomorphe à la sphère de Riemann.

▷ En effet, on a là une application holomorphe propre de  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  où  $X$  est notre surface de Riemann. Mais son degré  $d$  est 1 par hypothèse qu'il y ait un unique pôle d'ordre 1. Ainsi, cette application est non ramifiée, donc c'est un biholomorphisme. ■

### 4.3.3 Théorème d'existence d'une surface de Riemann

Les revêtements topologiques d'une surface de Riemann héritent d'une unique structure complexe rendant l'application de recouvrement holomorphe. On se rend compte alors que l'équivalence entre deux revêtements est alors un biholomorphisme, ce qui implique que la classification des revêtements à équivalence près est dans ce cas une classification des revêtements holomorphes à équivalence holomorphe près. Précisons.

**Lemme**

Soit  $D^* = \Delta \setminus \{0\}$  le disque épointé. Alors les recouvrements finis de  $D^*$  sont, à équivalence près, les  $\varphi^n : D^* \longrightarrow D^*$ .

$$z \longmapsto z^n$$

**Conséquence. (*Extension des revêtements ramifiés*)**

Un revêtement fini d'une surface de Riemann sauf en un ensemble isolé de points peut être étendu à un revêtement ramifié.

On précise cela dans le théorème suivant qui construit une surface de Riemann à partir d'un revêtement fini d'une surface de Riemann, souvent  $\mathbb{CP}^1$ , sauf en un ensemble isolé de points. Dans la version donnée, on peut le voir comme une propriété purement topologique sur l'existence d'une extension de revêtements de surfaces pointées.

**Théorème. (*Théorème d'existence de Riemann*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann. Soit  $S \subseteq X$  un ensemble fermé discret tel que  $X \setminus S$  soit connexe. Soit  $\varphi' : Y' \rightarrow X \setminus S$  un revêtement fini. Alors il existe une surface de Riemann  $Y \supseteq Y'$  et une application holomorphe propre  $\varphi : Y \rightarrow X$  prolongeant  $\varphi'$  telle que  $\varphi^{-1}(S) = Y \setminus Y'$  soit fermé discret dans  $Y$ .

En particulier,  $S$  est le lieu d'embranchement de  $\varphi$  et le théorème de Riemann-Hurwitz s'applique.

▷ À chaque  $s \in S$ , on peut choisir un disque  $D_s$  tel que  $D_s \cap S = \{s\}$  et une carte  $\varphi_s : D_s \rightarrow D$  où  $D$  est le disque unité centré en l'origine  $D = \Delta$ . Puisque  $\varphi'$  est un revêtement fini, on n'a qu'un nombre fini de composantes  $\varphi'_{|\varphi'^{-1}(D_s^*)}$  où  $D_s^* = D_s \setminus \{s\}$  pour tout  $s$ . Soit  $V'$  l'une des composantes. Puisque  $\varphi'_{|V'}$  est un revêtement fini du disque épointé, il existe une carte  $\psi' : V' \rightarrow D^*$  telle que  $\varphi_s \circ \varphi \circ \psi'^{-1} : D^* \rightarrow D^*$  telle que  $\varphi_s \circ \varphi \circ \psi'^{-1}(z) = z^k$  et l'on peut ajouter le point zéro à  $D^*$  pour obtenir une application holomorphe de  $D$  à  $D$ . Soit  $V$  l'ensemble obtenu en ajoutant un point abstrait à  $V'$  tel que  $\psi : V \rightarrow D$  soit un homéomorphisme et définisse une carte holomorphe. Alors  $\varphi|_V$  est, par construction, un revêtement holomorphe. En répétant cette procédure sur chaque composante, on obtient la surface de Riemann  $Y$  voulue. ■

Un espace total de  $X \setminus S$  est alors déterminé à équivalence près par sa monodromie (c'est-à-dire une représentation  $\rho$  de  $\pi_1(X \setminus S) \rightarrow \mathfrak{S}_d$  tel que l'image de  $\rho(\pi_1)$  agit transitivement). On déduit alors du théorème d'existence des propriétés topologiques des surfaces pointées.

**Corollaire. (*Groupe fondamental d'une surface orientable finiment pointée*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Si l'on pose  $X' = X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  où  $p_1, \dots, p_n$  est un ensemble fini de points de  $X$  et l'on suppose que  $X'$  est connexe par arcs, alors

$\pi_1(X') = \left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, h_1, \dots, h_n \mid h_1 \dots h_n \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle$ , groupe libre de rang  $2g + n - 1$  si  $n \neq 0$ .

**Exemple. (Groupe fondamental d'une surface orientable finiment pointée)**

On prend  $X = \mathbb{CP}^1$ . Alors  $\pi_1(\underbrace{X \setminus \{p_1, \dots, p_k\}}_{X'}, x_0) \simeq F_{k-1}$  le groupe libre de rang 3.

Il est clair que l'ensemble des lacets basés en  $x_0$  entourant chacun l'un des  $p_i$ , forme des générateurs du groupe de  $X'$ . On a donc une correspondance biunivoque entre les recouvrements de  $X$  à équivalence près et les sous-groupes de  $F_3$ , à préciser plus tard.

Citons aussi :

**Propriété. (Structure différentielle complexe par revêtement d'une surface)**

Soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  un revêtement où  $X$  est une surface de Riemann quelconque et  $Y$  une surface réelle. Alors il existe une unique structure complexe sur  $Y$  telle que  $\varphi$  soit holomorphe.

#### 4.3.4 Corps des fonctions méromorphes et revêtements ramifiés

**Fait. (Monomorphisme « pré-composition »)**

Soient  $\varphi : Y \rightarrow X$  un revêtement ramifié de surfaces de Riemann,  $\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(X)$  leurs corps de fonctions méromorphes respectifs. Alors  $\varphi^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(Y)$  est un monomorphisme.

$$F \mapsto F \circ \varphi$$

#### Théorème

Soit  $\varphi : Y \rightarrow X$  un revêtement ramifié de degré  $n$  entre deux surfaces de Riemann  $X$  et  $Y$ . Alors  $\varphi^*(\mathcal{M}(X)) \subseteq \mathcal{M}(Y)$  est une extension de corps algébrique de degré  $n$ .

▷ Pour  $F \in \mathcal{M}(Y)$ , on doit trouver un polynôme à coefficients dans  $\varphi^*(\mathcal{M}(X))$  tel que  $P(F) = 0$ , de degré  $\leq n$ . Soit  $S \subseteq X$  le lieu de branchement et images des pôles de  $F$ , de sorte que  $\varphi^{-1}(S) \rightarrow S$  est un revêtement holomorphe. On considère la restriction de  $F$  à la fonction méromorphe  $f \in \mathcal{M}(Y \setminus \varphi^{-1}(S))$ . Soient pour  $i \in I$  dans une fibre de revêtement,  $\varphi_i : U_i \rightarrow Y$  des biholomorphismes sur  $U$  définis sur les feuilles de  $U$ . On peut définir des fonctions méromorphes sur  $X \setminus S$  en prenant les fonctions symétriques élémentaires  $s_1, \dots, s_n$  des  $n$  fonctions  $f \circ \varphi_i^{-1} : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Par construction, on a  $\prod_{i=1}^n (w - \varphi^*(f \circ \varphi_i^{-1})) = w^n - \varphi^*(s_1)w^{n-1} + \dots + (-1)^n \varphi^*(s_n) = 0$ . En particulier,  $f$  satisfait une équation de degré  $n$  avec coefficients holomorphe sur  $\mathcal{M}(X \setminus S)$ .

On prétend que la fonction  $s_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  s'étend sur  $X$  en une fonction méromorphe, ce qui permet de conclure cette première partie de la preuve. On a deux cas :

1. si  $f$  est holomorphe, i.e. si  $s$  est un point de branchement de  $\varphi$  mais pas l'image d'un pôle de  $f$ , alors  $s_i$  est une fonction holomorphe bornée définie sur un voisinage ouvert épointé d'un point de  $S$  disons  $U_s \setminus \{s\}$ . Par le théorème de prolongement de Riemann,  $s_i$  peut être prolongée sur  $U_s$ .
2. Supposons maintenant que  $f$  est méromorphe en un point de  $\varphi'^{-1}s$ , i.e. que  $f$  a un pôle sur une fibre sur  $s$ . Considérons une carte  $z : U \rightarrow D$  centrée en  $s$ . Alors  $(\varphi^* z)^m f$  est holomorphe si  $m$  est assez grand, et donc les fonctions symétriques élémentaires de  $(\varphi^* z)^m f$  peuvent être étendues en fonctions holomorphes de la forme  $z^{m_i} s_i$ , donc les  $s_i$  peuvent être étendues en des fonctions méromorphes.

Donc l'extension est algébrique.

Soit  $f_0 \in \mathcal{M}(Y)$  un élément donc le polynôme minimal est de degré maximal  $n_0$ . Montrons que  $\mathcal{M}(X)(f_0) = \mathcal{M}(Y)$ , ce qui implique que le degré de l'extension est  $\leq n$  (et en particulier, on retrouve qu'elle est algébrique). En fait, si  $f \in \mathcal{M}(Y)$ , puisque  $\mathcal{M}(X)$  est de caractéristique nulle, le théorème de l'élément primitif donne  $\mathcal{M}(X)(f_0, f) = \mathcal{M}(X)(g)$ , d'où  $n_0 = \dim_{\mathcal{M}(X)}(\mathcal{M}(X))(f_0) \leq \dim_{\mathcal{M}(X)}(\mathcal{M}(X))(f_0, f) = \dim_{\mathcal{M}(X)}(\mathcal{M}(X)(g)) \leq n_0$  de sorte que  $\mathcal{M}(f_0) = \mathcal{M}(f_0, f)$ .

Pour pouvoir dire que le degré de l'extension est exactement  $n$ , il suffit d'admettre l'existence d'une fonction méromorphe, ce que nous montrerons indépendamment comme conséquence de la théorie de Hodge. ■

### Exemple

Dans le cas du tore, on a démontré à la main que  $\mathcal{M}(E_\tau) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$  et indépendamment  $\wp : E_\tau \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est un revêtement ramifié de degré 2. On avait de plus  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) = \mathbb{C}(z)$ . On en déduit par degré que  $\wp^*(\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)) = \mathbb{C}(\wp)$ , et l'on peut écrire la suite  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(\wp) \rightarrow \mathcal{M}(E_\tau)$  qui est donc une extension de degré 2 de  $\mathbb{C}(\wp)$ .

On rappelle aussi que  $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_4$ .

Inversons ce processus, qui est le cadre historique de l'étude des surfaces de Riemann : l'étude des équations algébriques de la forme  $w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$  où les  $a_i$  sont des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{CP}^1$ . L'idée est que la solution d'une telle équation est définie sur une surface de Riemann  $Y$  munie d'un revêtement ramifié  $Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . On énonce une théorème plus général en substituant  $\mathbb{CP}^1$  par une autre surface  $X$ .

### Théorème. (*Surface de Riemann associée à une équation*)

Soient  $X$  une surface de Riemann et  $P(w) = w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_n$  un polynôme irréductible dans  $\mathcal{M}(X)[w]$  de degré  $n$ . Alors il existe une surface de Riemann  $Y$ , un revêtement ramifié  $\varphi : Y \rightarrow X$  de degré  $n$  et une fonction méromorphe  $F \in \mathcal{M}(Y)$  telle que

$$\varphi^*(P)(F) = F^n + (\varphi^* a_1) F^{n-1} + \dots + \varphi^* a_n = 0.$$

On dit que  $Y$  est la *surface de Riemann associée à cette équation algébrique*.

▷ Puisque  $\mathcal{M}(X)$  est de caractéristique nulle, toutes ses extensions sont séparables. Ainsi, le polynôme irréductible  $P(w) \in \mathcal{M}(X)[w]$  est séparable. Ainsi, ses racines dans une clôture algébrique  $(\bar{\mathcal{M}}(X))$  sont toutes distinctes. On peut écrire sous forme développée  $P(w) = w^n - s_1 w^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$  où  $s_i$  sont des fonctions symétriques en les racines de  $P$ . Le discriminant de  $P$  s'écrit quant à lui  $\Delta_P = \prod_{i < j} (t_i - t_j)^2$  en notant  $t_i$  les racines de  $P$  dans une clôture algébrique. Le polynôme  $\Delta_P$  étant symétrique, c'est une combinaison algébrique des  $s_i$ , d'où  $\Delta_P \in \mathcal{M}(X)$ . Puisque  $P$  est irréductible, on a de plus  $\Delta_P$  non nul. Soit  $S = \{x \in X \mid \Delta_P(x) = 0 \text{ ou } x \text{ est un pôle de } \Delta_P\}$ . Définissons  $X' = X \setminus S$ . Soit  $Y' = \{(z,w) \in X \setminus S \times \mathbb{C} \mid P(w) = z\}$ . On a donc par le corollaire du théorème des fonctions implicites  $P$  un revêtement  $Y' \setminus X'$  de degré  $n$ . On étend ce revêtement à un revêtement ramifié  $Y \rightarrow X$  au moyen du théorème précédent.

La fonction méromorphe est définie ici comme une fonction holomorphe sur  $Y'$  par  $(z,w) \mapsto w$  puis par extension, avec un argument similaire au théorème précédent, à tout  $Y$ . Pour vérifier que  $Y$  est connexe, suppose  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$  une décomposition en composantes connexes, avec les  $\varphi_i : Y_i \rightarrow X$  des revêtements ramifiés. Pour tout  $\varphi_i$ , la fonction méromorphe  $F$  restreinte à  $Y_i$  définit un polynôme  $P_i(w) \in \mathcal{M}(X)$  tel que  $P(w) = P_1(w) \dots P_k(w)$ , ce qui contredit l'irréductibilité de  $P(w)$  ! ■

### Exemple. (*Surface de Riemann torique*)

Considérons la « fonction » multiforme non uniforme :

$$y = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

qui, par les théorèmes classiques d'analyse complexe, permet de définir de manière non unique une fonction holomorphe  $y = y(x)$  au voisinage de tout point  $x \notin \{1, j, j^2\}$ , fonction uniquement déterminée par la valeur de  $y$  en  $x$ , qui correspond à trois choix possibles. De même, pour tout  $y \notin \{1, j, j^2\}$ , on peut définir au voisinage de  $y$  une fonction  $x = x(y)$  telle que  $x = \sqrt[3]{1 - y^3}$ . Posons

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 + y^3 = 1\}.$$

Cet espace peut être muni d'une structure de variété réelle de dimension 2, et l'on voudrait lui donner une structure de surface de Riemann telle que les deux projections canonique  $p_i : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , soient holomorphes.

Pour ce faire, on a besoin de définir des coordonnées compatibles. En un point  $(x,y) \in X$  tel que  $y \neq 0$ , la remarque ci-dessus montre qu'il existe une fonction holomorphe  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un petit voisinage  $V$  de  $x$  telle que  $\varphi(x) = y$  et  $\varphi(t)^3 = 1 - t^3$ . Ainsi,  $p_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $p_1(x,y) = x$  induit un homéomorphisme d'un petit voisinage de  $(x,y)$  vers son image et dont l'inverse est donné par  $x \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x))$ . En un point tel que  $y = 0$ ,  $x \neq 0$  et l'on peut faire la même construction et écrire localement  $x = x(y)$  au voisinage de  $y$  de sorte que  $p_2$  fournit une carte locale. Reste à vérifier que les cartes locales ainsi définies sont bien compatibles. Les cartes définies à l'aide de  $p_1$  sont automatiquement

compatibles, car les changements de carte valent l'identité. Il reste à voir que  $p_1$  est compatible avec  $p_2$ , ce qui revient à dire que les fonctions  $x(y)$  et  $y(x)$  sont holomorphes, ce qui est bien sûr le cas. Les cartes étant par définition holomorphes,  $x = p_1$  est une application holomorphe sur  $X$  et la projection  $y = p_2$  définit une fonction holomorphe sur  $X$  telle que  $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ .

On peut étendre cette construction pour définir  $X$  au dessus de  $\mathbb{P}^1$ . En effet, définissons

$$X' = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^3 + y^3 = z^3\}$$

muni de la projection  $p : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui à  $[x : y : z] \mapsto [x : z]$ . Alors  $X$  s'identifie à  $X' = X \cup \{[-1 : 1 : 0], [-1 : j : 0], [-1 : j^2 : 0]\}$  et de la même manière que précédemment, on peut définir une structure de surface de Riemann sur  $X'$  étendant celle de  $X$  et pour laquelle  $p : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$  est un morphisme. Alors  $X'$  est un revêtement ramifié de degré 3 de la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , qui ramifie seulement au-dessus de 0, de préimage  $[0 : 1 : 0]$  et de multiplicité 3.

Mentionnons au passage qu'on peut construire sur  $X$  une forme différentielle holomorphe (*voir la section consacrée dans la suite*). Il faut la définir en  $x$  et en  $y$  localement et vérifier la condition de compatibilité. Au voisinage de  $(x,y)$  avec  $y \neq 0$ , on sait que  $y = y(x)$  et on définit  $\omega = \frac{dx}{y}$ . Au voisinage de  $(x,y) \in X$  où  $x \neq 0$  maintenant, on prend  $\omega = -\frac{ydy}{x^2}$ . La relation  $x^2dx + y^2dy = 0$  sur  $X$  implique que les deux expressions sont compatibles, ce qui définit une forme holomorphe  $\omega$  sur  $X$ , que l'on peut légitimement considérer comme la forme

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$$

sur  $\mathbb{C}$ . La forme  $\omega$  a alors 3 zéros d'ordre 1 sur  $X$  localisés en  $p_1^{-1}(0)$ . Près des points à l'infini ( $z = 0$ ), i.e.  $X' \setminus X$ , on a une coordonnée  $v = \frac{z}{x}$  de sorte que  $u = \frac{y}{x}$  est une fonction de  $v$  étant donné que  $u^3 = v^3 - 1$ . Alors on peut vérifier que la forme  $\omega$  se transforme en  $-\frac{dv}{uv}$ . Ainsi  $\omega$  s'étend en une forme méromorphe sur  $X'$  avec un pôle simple le long de ( $v = 0$ ), ce qui correspond à un pôle simple en chacun des trois points à l'infini.

On en déduit que  $\deg(\omega) = 0$ , ce qui est cohérent avec le titre de l'exemple 😊 !

Par conséquence :

**Théorème. (Surface de Riemann associée à une extension transcendante)**

Soit  $k$  une extension de  $\mathbb{C}$  de type fini de degré de transcendance 1. Alors il existe une surface de Riemann compacte  $X$  telle que  $\mathcal{M}(X) = k$ .

▷ Soit  $z \in k$  une générateur d'une extension purement transcendante, de sorte que  $k/\mathbb{C}(z)$  est une extension finie, disons de degré  $d$ . On peut l'écrire  $k = \mathbb{C}(z, f)$  en choisissant  $f \in k$  primitif. Par hypothèse,  $k = \mathbb{C}(z)[w]/P$  où  $P$  est le polynôme minimal de  $f$  dans  $\mathbb{C}(z)[w]$  de degré  $d$ . Or  $\mathbb{C}(z)$  peut être

identifié au corps des fonctions rationnelles sur  $X = \mathbb{CP}^1$ . Maintenant, on peut construire une surface de Riemann  $Y$  associée à  $P$  par le théorème précédent. Soit  $z \in \mathcal{M}(Y)$  non nule par le théorème d'existence par encore démontré. Puisque  $P$  est de degré  $d$  en  $w$ , on obtient que  $[\mathcal{M}(Y), \mathbb{C}(z)] = d = [k, \mathbb{C}(z)]$ , d'où  $k = \mathcal{M}(Y)$ . ■

#### Propriété. (*Correspondance galoisienne pour revêtements entre SR*)

On a avec les notations précédentes une correspondance entre les homomorphismes de corps  $k \xrightarrow{h} k'$  tels que  $h|_{\mathbb{C}} = id$  et les fonctions holomorphes  $X_k \xrightarrow{\varphi_n} X_{k'}$ .

On a même une correspondance entre les extensions galoisiennes et les recouvrements galoisiens.

En application, introduisons enfin les courbes hyperelliptiques, qui sont archétypales des surfaces de Riemann plus pour les bébés.

### 4.3.5 Application : étude des surfaces hyperelliptiques

#### 4.3.5.1 Première approche des courbes hyperelliptiques complexes

##### Exercice 18 (*Surface de Riemann quadrique*)

Soit  $Q : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une forme quadratique non dégénérée. Soit  $S = \{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{CP}^2 \mid Q(z_1, z_2, z_3) = 0\} \subseteq \mathbb{CP}^2$ . Montrer que  $S$  est une surface de Riemann biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

▷ Éléments de réponse.

Il suffit de vérifier que  $S$  est une sous-variété complexe de dimension 1 de  $\mathbb{CP}^1$ , i.e. autour de chaque point de  $S$ , on peut trouver une carte  $U \subseteq \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{C}^m$  telle que  $\varphi(S \cap U) \simeq (\mathbb{C}^n \times \{0\}) \cap \varphi(U)$ . La biholomorphie à  $\mathbb{CP}^1$  est une propriété connue de géométrie projective.

#### Définition-propriété. (*Courbe hyperelliptique*)

Soit  $P$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{C}[z]$  de racines  $a_1, \dots, a_k$  deux à deux distinctes avec  $k \geq 1$ , c'est-à-dire  $P(z) = (z - a_1) \dots (z - a_k)$ . La surface  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = P(z)\}$  est une surface de Riemann, dite *courbe hyperelliptique* sur  $\mathbb{C}$ .

▷ La structure de Riemanns sur  $X$  est celle héritée de celle de  $\mathbb{C}^2$  grâce au théorème des fonctions implicites. ■

**Définition. (*Compactification d'une courbe hyperelliptique*)**

Soit  $X$  une courbe hyperelliptique avec les notations précédentes. On note  $\overline{X}$  l'adhérence de  $X$  dans  $\mathbb{CP}^2$  vue grâce au plongement  $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2, (z,w) \mapsto [z,w,1]$ .

De façon équivalente, on considère l'homogénéisation du polynôme  $w^2 - P(z)$  et l'on pose si  $k \geq 2$  :  $\tilde{X} = \{[x,w,t] \in \mathbb{CP}^2 \mid w^2 t^{k-2} = (z - a_1 t) \dots (z - a_k t)\}$ .

**Propriété. (*Structure des courbes hyperelliptiques projectives*)**

$\overline{X}$  est une surface de Riemann si et seulement si  $k \leq 3$ . Si  $k \leq 2$ , on obtient une sphère.

**4.3.5.2 Surfaces de Riemann hyperelliptiques et revêtements ramifiés****Méthode. (*Ordre de ramification d'un revêtement ramifié*)**

On démontrera plus tard, section COURBES ALGÉBRIQUES ET REVÊTEMENTS RAMIFIÉS, la méthode de calcul suivante. Soit  $Y$  la surface de Riemann associée à l'équation  $w^n - f$  où  $f$  est un polynôme,  $p : Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  le revêtement ramifié canonique de degré  $n$ . Dans la suite, on ne verra en pratique que des surfaces hyperelliptiques définies par des polynômes de cette forme.

Les points de ramification/d'embranchement de  $p$  sont donnés par les racines de  $f'$ , dits *points de ramification à distance finie*, en prenant en plus en compte  $\infty$  :  $p$  est ramifiée en  $x \in Y$  si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) = 0$ , et elle peut très bien être *ramifiée en l'infini*. De plus, on a alors  $m_x(f) - 1 = \text{ord}_x(\frac{\partial f}{\partial z})$ .

La formulation suivante, en regard de l'interprétation de la fonction de Weierstrass, éclaire l'appellation d'hyperellipticité.

**Reformulation pratique. (*Surface hyperelliptique*)**

Une surface de Riemann  $X$  est hyperelliptique s'il existe un revêtement  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  de degré 2.

En particulier, si  $f(z) = (z - a_1) \dots (z - a_k) \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  où  $k \in \mathbb{N}$  et les  $a_i \in \mathbb{C}$  sont deux à deux distinctes, la fonction algébrique définie par  $P(z,w) = w^2 - f$  donne naissance à une surface de Riemann munie d'un revêtement ramifié  $p$  de degré 2.

**Corollaire**

Les courbes elliptiques sont hyperelliptiques.

**Fait. (*Points de ramification d'une surface hyperelliptique*)**

1. Si  $k$  est pair,  $p$  est ramifié en  $a_1, \dots, a_k$  d'où  $k$  points de ramification/branchement.
2. Si  $k$  est impair,  $p$  est ramifié en  $a_1, \dots, a_k, \infty$  d'où  $k + 1$  points de ramification/branchement.

**Application. (*Genre des surfaces de Riemann hyperelliptiques*)**

On prend  $P(w) = w^2 - (z - a_1)\dots(z - a_k)$  où  $k$  est un entier naturel et  $X = \mathbb{CP}^1$ . Le polynôme  $P(w)$  est bien irréductible dans  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ . Par le théorème, on a un revêtement  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  de degré 2 où  $Y = X_f$  est notre courbe hyperelliptique. Il est d'incide 2 en chaque  $a_i$ , et d'incide 2 en l'infini si  $k$  est impair, non ramifié en l'infini sinon.

Pour comprendre la topologie des courbes hyperelliptiques, utilisons la formule de Riemann-Hurwitz.

- ★ Si  $k$  est pair,  $\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{CP}^1) - \sum_i(m_{a_i}\varphi - 1) = 4 - k(2 - 1)$  soit  $\boxed{\chi(Y) = 4 - k}$ . Puisque  $2 - 2g(Y) = 4 - k$ , on a aussi  $\boxed{g(Y) = \frac{k}{2} - 1}$ .
- ★ Si  $k$  est impair maintenant,  $\chi(Y) = 2\chi(\mathbb{CP}^1) - \sum_i(m_{a_i}\varphi - 1) - (m_\infty\varphi - 1) = 4 - (k + 1)(2 - 1)$  puis  $\boxed{\chi(Y) = 3 - k}$ . De même,  $\boxed{g(Y) = \frac{k-1}{2}}$ .

Dans tous les cas,  $\boxed{\chi(Y) = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ . En particulier, pour  $k = 3$ , on obtient  $g(Y) = 1$ , i.e. une courbe elliptique.

**Exercice 19 (Une courbe hyperelliptique de coefficient constant inséparable)**

Quelle est la surface de Riemann définie par  $P(z,w) = w^2 - z^3$  sur  $\mathbb{CP}^1$  ?

## ▷ Éléments de réponse.

On a donc un revêtement ramifié de degré 2, de multiplicité 3 en 0. Par la formule de Riemann-Hurwitz,  $X_{z^3} = 4 - (3 - 1) = 2$  d'où  $g(X_{z^3}) = 0$ , autrement dit, c'est la sphère de Riemann.

**Exercice 20 (Courbes hyperhyperelliptiques)**

Déterminer la caractéristique de la surface de Riemann définie par  $P(z,w) = z^n + w^n - 1$  sur  $\mathbb{CP}^1$  (en fait, c'est une courbe de Fermat).

## ▷ Éléments de réponse.

On a là un revêtement ramifié de degré  $n$  : chaque racine de l'unité est ramifiée de multiplicité  $n$ . Le point à l'infini n'est pas un point de ramification.

### 4.3.6 Théorème de Belyi

**Définition.** (*Surface de Riemann définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$* )

On dit qu'une surface de Riemann est *définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$*  si elle est construite associée à un polynôme irréductible de  $\overline{\mathbb{Q}}[z,w]$ .

**Théorème.** (*Belyi*)

Une surface de Riemann compacte  $X$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  si et seulement s'il existe un revêtement holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  ramifié en trois points.

## 4.4 Surfaces de Riemann vues comme quotients

La propriété de structure différentielle complexe par revêtement d'une surface nous pousse à étudier les surfaces de Riemann comme quotients vis-à-vis de leurs espaces de revêtement. On commence par le théorème primordial de classification des surfaces de Riemann à biholomorphisme près.

### 4.4.1 Le théorème d'uniformisation

**Propriété.** (*Théorème de représentation conforme de Riemann*)

Tout ouvert du plan complexe simplement connexe est biholomorphe à  $\mathbb{C}$  ou à  $\Delta$ .

**Théorème.** (*Théorème d'uniformisation de Riemann*)

Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{CP}^1$  ou  $\Delta$ .

#### Uniformisation en dimension supérieure

Le problème de classification à biholomorphisme près des variétés complexes est un problème ouvert.

En dimension 2, on recense déjà  $\mathbb{C}^2$ ,  $\mathbb{CP}^2$ ,  $H_{\mathbb{C}}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ . La variété  $H_{\mathbb{C}}^2 = \Omega_0$  s'identifie à une sphère, mais une sphère ayant une verrue, même sans point anguleux, de taille  $\varepsilon$ , que l'on notera  $\Omega_{\varepsilon}$ , en général, ne sera pas biholomorphe à  $\Omega_0$ .

→ *Notation.* Dans ce cadre, on note souvent  $\Delta = H_{\mathbb{C}}^1$ .

*Remarque.* Toute surface de Riemann est quotient de l'une d'elles par l'action d'un sous-groupe discret de leur groupe d'automorphismes. Ceci motive l'étude des

## 4.4.2 Groupe des automorphismes d'une surface de Riemann

### 4.4.2.1 Description des groupes d'automorphismes d'une surface de Riemann

→ *Notation.* On note  $\text{Aut}(X)$  le sous-groupe de  $\mathcal{M}(X)^*$  formé des bijections. On l'appelle *groupe des automorphismes* de  $X$  ou *groupe des biholomorphismes* de  $X$ .

#### Propriété. (*Groupe des automorphismes de $\mathbb{CP}^1$* )

Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  des automorphismes de la sphère de Riemann est le groupe de Möbius  $PGL_2(\mathbb{C})$  agissant par homographie :  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$ .

▷ Nous aurons bientôt montré que  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  est l'ensemble des fractions rationnelles. Or on sait que l'ensemble des fractions rationnelles bijectives est l'ensemble des homographies. ■

#### Propriété. (*Groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$* )

Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  des automorphismes du plan complexe est le groupe affine  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  des transformations affines de  $\mathbb{C}$ .

▷ Un automorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}$  s'étend holomorphiquement à  $\mathbb{CP}^1$  en posant  $f(\infty) = \infty$  en un nouvel automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$ . C'est donc une homographie qui fixe l'infini, autrement dit une application affine, de la forme  $z \mapsto az + b$ . ■

#### Propriété. (*Groupe des automorphismes de $\Delta$* )

Le groupe  $\text{Aut}(\Delta)$  des automorphismes du disque de Poincaré est le groupe projectif unitaire  $PU(1,1)$  (aussi noté  $PSU(1,1)$ ) agissant par homographie.

▷ Découle du lemme de Schwarz. ■

#### Corollaire. (*Groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$* )

Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  des automorphismes du demi-plan de Poincaré est le groupe projectif unitaire  $PSL_2(\mathbb{R})$  agissant par homographie.

▷ L'isomorphisme canonique entre  $\Delta$  et  $\mathbb{H}$  se prolonge en un automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$ . Or les automorphismes de  $\Delta$  sont par ce que précède les automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  qui préservent  $\Delta$ , ainsi les automorphismes de  $\mathbb{H}$  sont les automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  qui préservent  $\mathbb{H}$ . En particulier, un tel automorphisme préserve le bord de  $\mathbb{H}$ , qui est  $\mathbb{RP}^1$ . On voit donc qu'ils sont donnés par l'action d'un élément de  $GL_2(\mathbb{R})$ . De plus, il faut pour préserver  $\mathbb{H}$  que le déterminant d'un tel élément soit positif. Quitte à renormaliser, ils sont donnés par l'action d'un élément de  $SL_2(\mathbb{R})$ . ■

Notons la diversité des transitivités de ces groupes d'automorphismes des exemples fondamentaux de surfaces de Riemann. En effet :

1. tout élément de  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  possède un point fixe, donc il n'y a pas de quotients non triviaux de  $\mathbb{CP}^1$  ;
2. les éléments de  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  sans point fixe sont les translations, et l'on retrouve les réseaux et le cylindre infini ;
3. le groupe  $\text{Aut}(\Delta) = \text{Aut}(\mathbb{H})$  a de la torsion, et n'agit pas librement, mais il existe un sous-groupe d'indice 6 agissant librement.

### Corollaire

Toute surface de Riemann revêtue par  $\mathbb{CP}^1$  est biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

▷ En effet, toute homographie complexe ayant un point fixe, il n'y a aucun sous-groupe de  $PSL_2(\mathbb{C})$  agissant librement sur  $\mathbb{CP}^1$ . ■

### Conséquence. (*Surfaces de Riemann de genre nul*)

Toute surface de Riemann de genre 0 est biholomorphe à la sphère de Riemann.

#### 4.4.2.2 Classes de conjugaison des groupes d'automorphismes d'une surface de Riemann

#### 4.4.2.3 Quotients du plan complexe

##### Théorème. (*Quotients du plan complexe*)

Une surface de Riemann est revêtue par le plan complexe si et seulement si elle est biholomorphe au plan d'Argand-Cauchy, au cylindre infini ou à un tore, *i.e.* une courbe elliptique.

#### 4.4.2.4 Quotients de $\Delta$ et groupes fuchsiens

#### 4.4.2.5 Retour sur le tore : réseaux et surfaces de Riemann

## 4.5 Courbes algébriques et surfaces de Riemann compactes

### 4.5.1 Rappels pratiques sur les courbes algébriques planes et construction de surfaces de Riemann par elles

**VOC** On rappelle que la *courbe plane algébrique affine complexe* définie par un polynôme non constant  $F \in \mathbb{C}[x,y]$  n'est autre que  $C = C_F = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ . On dit que  $C_F$  est *non*

*singulière* en  $z = (x,y) \in C_F$  si  $(\frac{\partial F}{\partial x}(z), \frac{\partial F}{\partial y}(z)) \neq (0,0)$ . On dit que  $C_F$  est *lisse* si elle n'a aucun point singulier.

On rappelle qu'une courbe plane algébrique affine complexe lisse est une surface de Riemann éventuellement non connexe.

### Théorème. (*Connexité des courbes algébriques complexes*)

Soit  $F \in \mathbb{C}[x,y]$ . Alors  $F$  est irréductible si et seulement si  $C_F$  est connexe. On dit alors que  $C_F$  est *irréductible*.

*Remarque.* Si  $F = F_1^n \dots F_k^n$  avec les  $F_i$ ,  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $k \in \mathbb{N}$  irréductibles, alors  $C_F = C_{F_1 \dots F_k}$ . On utilise là implicitement le Nullstellensatz.

**VOC** Le *degré* de la courbe  $C_F$  est le degré du *polynôme minimal*  $F_1 \dots, F_k$  où  $F = F_1^n \dots F_k^n$  avec les  $F_i$ ,  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $k \in \mathbb{N}$  irréductibles, i.e., si  $F(x,y) = \sum_{r,s} c_{r,s} x^r y^s$ ,  $\deg(C_F) = \max\{r+s \mid c_{r,s} \neq 0\}$ .

### Propriété. (*Structure complexe des courbes algébriques planes*)

Toute courbe algébrique affine complexe plane privée de l'ensemble de ses points singuliers est une variété complexe de dimension 1.

▷ On applique simplement le théorème des fonctions implicites comme on l'avait explicité au début de ce cours. ■

En un point singulier, on peut pousser l'analyse de la courbe en calcul le polynôme de Taylor centré en ce point.

### Définition. (*Ordre d'un point singulier*)

Soit  $F \in \mathbb{C}[x,y]$ . Par le théorème de Taylor, si  $(x_0, y_0)$  est singulier,  $F(x,y) = \sum_{m \geq 1} \sum_{i+j=m} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^m F}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) (x-x_0)^i (y-y_0)^j$ . Le plus petit entier  $m$  tel que  $\frac{\partial^m F}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \neq 0$  est appelé l'*ordre* de la singularité.

*Remarque.* La partie d'ordre  $m$ ,  $\sum_{i+j=m} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^m F}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) (x-x_0)^i (y-y_0)^j$  du développement de Taylor de  $F$  est un polynôme homogène de degré  $m$ .

### Propriété

Si  $P(x,y)$  est un polynôme homogène, il se factorise en  $P(x,y) = \prod_{i=1}^{\deg(P)} (a_i x - b_i y)$ .

**Définition. (*Nœud*)**

Un nœud est une singularité ordinaire, *i.e.* dont les facteurs linéaires de la décomposition du polynôme homogène associé à l'ordre sont deux à deux distincts, de degré 2.

**Exemple. (*Bonne définition des courbes hyperellitiques*)**

Si  $h(y)$  est un polynôme sans racines multiples, pour  $F(x,y) = x^2 - h(y)$ ,  $C_F$  est une surface de Riemann, car  $F$  est irréductible sans point singulier.

Si  $F$  est un carré parfait,  $C_F$  est singulière et n'est pas connexe.

Toutes ces notions s'appliquent mot à mot aux courbes planes projectives, définies par un polynôme homogène en trois variables.

**Méthode. (*Rappel : déshomogénéisation*)**

Soit  $F(x,y,z)$  un polynôme homogène non identiquement nul. Alors  $C_F \subseteq \mathbb{CP}^2$ . On définit  $P(x,y) = F(x,y,1)$ . La *partie affine* de  $C_F$  est  $C_P^A = C_F \cap \mathbb{C}^2$ .

Réciproquement, si  $P \in \mathbb{C}[x,y]$  est de degré  $d$ , on note  $C_P^A = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(x,y) = 0\}$ .

Définissons  $F(x,y,z) = z^d P(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$  qui est un polynôme homogène de degré  $d$ . La courbe  $C_F$  est la compactifiée de  $C_P^A$ , avec  $C_F = C_P^A \cup \Sigma$  où  $\Sigma = \{[x,y,0] \mid F(x,y,0) = 0\} \subseteq \mathbb{CP}^1$ .

Rappelons également qu'un polynôme homogène  $F$  tel que  $C_F \subseteq \mathbb{CP}^2$  soit lisse, est nécessairement irréductible.

**Lemme. (*Points singuliers affines et projectifs*)**

$[x_0, y_0, z_0]$  avec  $z_0 \neq 0$  est un point non singulier d'une courbe projective définie par  $F(x,y,z)$  si et seulement si  $(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0})$  est un point non singulier de la courbe affine définie par  $F(x,y,1)$ .

**Corollaire. (*Structure complexe des courbes projectives planes*)**

Toute courbe algébrique projective complexe plane privée de l'ensemble de ses points singuliers est une variété complexe de dimension 1.

▷ On sait qu'une courbe projective lisse est définie par un polynôme homogène irréductible ce qui implique que la courbe est connexe, ce qui n'est pas le cas dans le cas affine : pour  $f(x,y) = x(x-1)$ , la courbe affine  $C_f$  est lisse et réduite, car c'est la réunion de lignes parallèles. D'autre part, sa compactification  $C_F$  est donnée par la courbe algébrique  $\mathbb{CP}^2$  par  $F(x,y,z) = x(x-z)$ . ■

**Exemple. (*Une courbe hyperelliptique homogénéisée*)**

Soit  $g$  un entier plus grand que 1. Soient  $a_i$  des points deux à deux distincts de  $\mathbb{C}$  pour  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$ . Alors  $C = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x,y,z) = y^2 z^{2g-2} - (x - a_1 z) \dots (x - a_g z) = 0\}$ .

Alors l'unique point singulier de  $C$  est  $[0,1,0]$ .

### Exercice 21 (Une seule ligne projective en analyse complexe)

Montrer que toute ligne projective complexe, *i.e.* courbe de  $\mathbb{CP}^2$  définie par  $ax+by+cz=0$ , est biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

On peut également rappeler :

**VOC** Pour  $T \subseteq A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , on pose  $Z(T) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid F(x) = 0 \quad \forall F \in T\}$  et  $I(Z) = \{F \in A \mid F(x) = 0 \quad \forall x \in Z\}$ . On dit que  $Z$  est une variété affine (algébrique) (irréductible) si  $I(Z)$  est un idéal premier.

### Définition. (*Intersection complète lisse*)

Une *intersection complète lisse* est un ensemble  $C = \{x \in \mathbb{C}^n \mid F_1(x) = \dots = F_{n-1}(x) = 0\}$  ou idem avec  $\mathbb{CP}^n$  au lieu de  $\mathbb{C}^n$ , où les  $F_i$  sont des polynômes de  $\mathbb{C}^n$  ou respectivement de  $\mathbb{CP}^n$  tels que  $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j}$  de taille  $n \times n$  respectivement  $(n-1) \times n$  soit une matrice de rang maximal en tout point de  $C$ .

### Propriété. (*Structure complexe des intersections complètes lisses*)

Toute intersection complète lisse est une surface de Riemann compacte.



Toute courbe projective complexe n'est pas une intersection complète lisse. Cependant, tout plongement d'une surface de Riemann dans un espace projectif complexe est une intersection complète lisse.

## 4.5.2 Étude des courbes algébriques projectives en tant que surfaces de Riemann

### 4.5.2.1 Plongement des courbes projectives complexes

Soit  $X \subseteq \mathbb{CP}^n$  une courbe algébrique projective lisse, courbe au sens de la géométrie algébrique. Prenons la carte  $U_1 = \{[1, z_2, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n\}$ , de sorte qu'en coordonnées locales, sans perte de généralité,  $X \cap U = \{[1, h_2(z), \dots, h_{n+1}(z)] \mid z \in \Delta\}$ ,  $U \subseteq U_1$ , avec  $h'_i(0) \neq 0$  pour au moins un  $i$ . Rappelons pour former l'intuition que  $X$  dans  $\mathbb{CP}^n$  doit s'imaginer comme une surface topologique.

*Remarque.* Toute surface de Riemann plongée dans  $\mathbb{CP}^n$  est une courbe algébrique projective, par un théorème dû à Chow.

Montrons d'abord :

**Proposition.** (*Plongement des courbes projectives lisses dans le tesseract*)

Toute courbe algébrique projective lisse peut être plongée dans  $\mathbb{CP}^3$ .

En particulier, elle se plonge dans tout  $\mathbb{CP}^n$  pour  $n \geq 3$ .

▷ Toute courbe projective lisse est plongée dans un certain  $\mathbb{CP}^N$ . L'objet de la preuve est donc de descendre à  $\mathbb{CP}^3$  ce qui permet ensuite de remonter à n'importe quel  $\mathbb{CP}^n$ , avec même  $n \leq N$ , via les inclusions canoniques  $\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ . L'idée est de descendre de  $\mathbb{CP}^n$  à  $\mathbb{CP}^{n-1}$  grâce à l'inclusion canonique  $\mathbb{CP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ . Soit  $X \subseteq \mathbb{CP}^n$  une courbe algébrique projective lisse où  $n$  est un entier naturel quelconque. Nous allons montrer qu'il existe  $v \notin X$  tel que la projection de  $X$  basée en  $v$  est un plongement. C'est le cas par exemple pour  $\mathbb{CP}^{n-1} \subseteq \mathbb{CP}^n$  qui se plonge via  $\pi_n : \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}, [z_1, \dots, z_{n+1}] \mapsto [z_1, \dots, z_n]$  avec  $v = [0, \dots, 0, 1]$ . (Remarquons que dans  $\mathbb{CP}^n$ ,  $\mathbb{CP}^{n-1}$  s'identifie au point d'intersection des droites.) Définissons  $A = \{(x, y, z) \in X \times X \setminus \Delta_X \mid z \text{ appartient à une sécante de } X \text{ contenant } x, y\}$ , autrement dit  $z \in [x, y]$ . On rappelle qu'une sécante de  $X \subseteq \mathbb{CP}^n$  est une ligne contenant au moins deux points de  $X$ . Intuitivement, ce n'est pas une tangente, ni une ligne disjointe. Alors  $\dim_{\mathbb{C}}(A) = 3$ . Posons la projection  $p : A \rightarrow \mathbb{CP}^n$ . Si

$$(x, y, z) \longmapsto z$$

$n > 3$ , il existe  $v \notin p(A)$  avec  $B = \{(x, z) \in X \times \mathbb{CP}^n \mid z \in T_x(X)\}$  où  $T_x(X)$  est la tangente à  $X$  en  $x$ . On rappelle que si  $O = [1, 0, \dots, 0]$  et localement  $X \cap U = \{[1, h'_2(z), \dots, h'_{n+1}(z)]\}$ , la tangente à  $X$  en  $O$  est  $[\lambda(1, 0, \dots, 0) + \mu(0, h'_2(0), \dots, h'_{n+1}(0))]$ . Similairement, on obtient  $\dim_{\mathbb{C}}(B) = 2$ . Prenons  $v$  qui n'est pas dans l'union des tangentes. On conclut que la projection  $\pi_v : \mathbb{CP}^n \setminus \{v\} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}, z \mapsto \pi(z) = [\text{span}(\tilde{z}, \tilde{v}) \cap \tilde{L}]$  l'espace vectoriel engendré par  $\tilde{z}, \tilde{v}$  où  $L$  est cet hyperplan de  $\mathbb{CP}^n$  restreint à  $X$  est un plongement. ■

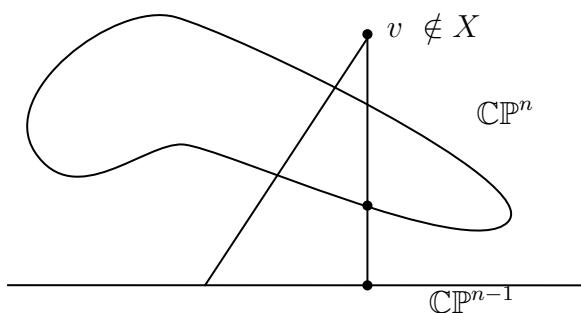


FIGURE 4.5.1 : *Plongement des courbes projectives complexes dans  $\mathbb{CP}^3$ .* — Idée de la preuve par plongement  $\mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ .

*Remarque.* Toute courbe algébrique projective lisse admet une immersion qui est un plongement excepté en un nombre fini de noeuds.

Nous verrons plus tard que toute surface de Riemann compacte se plonge dans  $\mathbb{CP}^n$ . Par cette proposition, elle se plongera donc dans  $\mathbb{CP}^3$ .



Le plongement dans  $\mathbb{CP}^2$  n'est pas toujours possible !

### 4.5.2.2 Intersection de courbes projectives complexes : escale au théorème de Bézout

Aisément :

**Propriété.** (*Fonctions méromorphes sur une courbe projective*)

Les fonctions méromorphes complexes sur les courbes projectives sont obtenues en prenant des quotients de polynômes homogènes de même degré.

**Définition.** (*Diviseur d'intersection*)

Soit  $X$  une courbe algébrique de  $\mathbb{CP}^n$  et  $F$  un polynôme homogène de degré  $d$  avec  $F|_X \neq 0$ . Le *diviseur d'intersection* de  $F$  dans  $X$  est la somme formelle  $\text{div}(F) = \sum n_p.p$  sur les points  $p \in X$  tels que  $F(p) = 0$  et  $n_p = \text{ord}_p(\frac{F}{H})$  où  $\deg H = \deg F$  et  $H(p) \neq 0$ .

*Remarque.* C'est bien défini, car si  $G(p) \neq 0$ ,  $\deg(G) = \deg(F)$ , et alors  $\text{ord}_p(\frac{F}{G}) = \text{ord}_p(\frac{F}{H} \frac{H}{G}) = \text{ord}_p(\frac{F}{H})$ .

**VOC** Dans le cas spécial  $\deg(F) = 1$ ,  $\text{div}(F)$  est appelé *diviseur hyperplan*.

**Fait.** (*À démontrer plus tard*)

Pour tout  $F \in \mathcal{M}(X)^*$ ,  $\deg(F) = 0$ .

**Lemme**

$\deg(\text{div}(F))$  dépend uniquement du degré de  $F$ .

▷ Supposons  $\deg(F_1) = \deg(F_2)$ . On a  $\frac{F_1}{F_2} \in \mathcal{M}(X)$ . Calculons :  $\deg(\text{div}(\frac{F_1}{F_2})) = \sum_p \text{ord}_p(\frac{F_1}{F_2}) = \sum_p \text{ord}_p(\frac{F_1}{H_p} \frac{H_p}{F_2})$  où  $H_p(p) \neq 0$ , et donc  $\deg(\text{div}(\frac{F_1}{F_2})) = \sum_p \text{ord}_p(\frac{F_1}{H_p}) + \underbrace{\sum_p \text{ord}_p(\frac{H_p}{F_2})}_{-\sum_p \text{ord}_p(\frac{F_2}{H_p})}$   $= \deg(\text{div}(F_1)) - \deg(\text{div}(F_2)) = 0$ . ■

On rappelle que  $\deg(X) = \deg(F)$  lorsque  $X = C_F$  courbe projective plane. On peut donc maintenant définir :

**Définition.** (*Degré d'une courbe projective plane lisse*)

Si  $X$  est une courbe algébrique plane lisse,  $\deg(X) := \deg(\text{div}(H))$  où  $H$  est un diviseur hyperplan de  $X$ .



Le degré dépend du choix de plongement de  $X$  dans  $\mathbb{CP}^n$ .

**Proposition**

Le degré d'une courbe algébrique plane lisse coïncide avec le degré du polynôme irréductible qui la définit.

**Théorème.** (*Formulation du théorème de Bézout en termes de diviseurs*)

Soit  $X$  un courbe algébrique projective lisse et  $F$  un polynôme homogène non identiquement nul. Alors  $\deg(\text{div}(F)) = \deg(X) \deg(F)$ .

▷ Notons  $\deg(F) = d$ . Alors  $\deg(\text{div}(F)) = \deg(\text{div}(H^d))$  où  $H$  est un polynôme de degré 1, qui égale  $\deg(d\text{div}(H)) = d \deg(\text{div}(H)) = d \deg(X)$  par définition. ■

**4.5.3 Courbes algébriques et revêtements ramifiés****Proposition**

Soit  $X$  une courbe algébrique affine plane lisse, définie par le polynôme  $F$ . Soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $(x,y) \mapsto x$  la projection. Alors  $\pi$  est ramifiée au point  $p \in X$  si et seulement si  $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$ . On a de plus  $m_p \pi = \text{ord}_p \frac{\partial F}{\partial y} + 1$ .

▷ Par le théorème des fonctions implicites, si  $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$ ,  $x$  est une coordonnée locale  $F(x,h(x))$  et si  $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$ , on a  $\frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0$ , car  $X$  est lisse. Ainsi, localement, dans tous les cas  $F(g(y),y) = 0$  par le théorème des fonctions implicites, d'où  $\pi(g(y),y) \rightarrow g(y)$ ; en coordonnées locales, la projection est  $y \mapsto g(y)$ . On a la multiplicité  $m_p(\pi) = \text{ord}_p(g') + 1$ . En utilisant  $F(g(y),y) = 0$ , on a  $\frac{\partial F}{\partial x}(g(y),y)g'(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(g(y),y) = 0$ . Comme  $\frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0$ ,  $\text{ord}_p(g'(y)) = \text{ord}_p \frac{\partial F}{\partial y}$ . ■

*Remarque.* Pour une courbe projective plane lisse  $X \subseteq \mathbb{CP}^2$  qui ne contient pas le point  $[0,1,0]$  et définie par le polynôme homogène  $F$ , on peut définir un revêtement ramifié  $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  en prenant la projection du point  $[0,1,0]$ , i.e.  $\pi : [x,y,z] \rightarrow [x,z]$ . On obtient donc facilement  $X$  comme un revêtement ramifié de  $\mathbb{CP}^1$ .

On rappelle que, si  $\pi : X \rightarrow Y$  entre surfaces de Riemann compactes est un revêtement, alors par la formule de Riemann-Hurwitz,  $\chi(X) = \deg(\pi)\chi(Y) - \sum(m_p \pi - 1) = \chi(Y) \deg \pi - \deg R_\pi$  où le diviseur de ramification est  $R_\pi = \sum n_p p$  où  $p$  est un point de ramification et  $n_p = m_p \pi - 1$ .

**Proposition. (*Calcul du diviseur de ramification*)**

Soit  $X$  une courbe projective plane lisse définie par le polynôme homogène  $F$ . On suppose que  $[0,1,0] \notin X$ . Définissons  $\pi: X \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ . Alors  $R_\pi = \text{div}(\frac{\partial F}{\partial y})$ , sachant que

$$[x,y,z] \longmapsto [x,z]$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$  est un polynôme homogène. Explicitement, le coefficient d'un point de ramification  $p$  est  $m_p \pi - 1 = \text{ord}_p \frac{\partial F}{\partial y}$ .

▷ On a  $X = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x,y,z) = 0\}$ . Supposons que  $[0,1,0] \notin X$ . Alors  $\pi([x,y,z]) = [x,z]$ . Alors  $\text{div}(\frac{\partial F}{\partial y}) = R_\pi$ . Or par le théorème de Bézout,  $\deg(R_\pi) = \deg(\text{div}(\frac{\partial F}{\partial y})) \deg(\frac{\partial F}{\partial y})$ .  $\deg(X) = (d-1)d$  puisque  $\deg(X) = \deg(F)$  pour une courbe algébrique projective plane. ■

On peut réexpliciter avec le genre cette fois un calcul déjà fait en exercices.

**Application. (*Courbe de Fermat*)**

On pose  $C_d = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x,y,z) := x^d + y^d + z^d = 0\}$ . Clairement,  $C_d$  est lisse hors du point  $(0,0,0)$ , donc c'est une courbe algébrique projective plane. Considérons  $\pi: C_d \rightarrow \mathbb{CP}^1$  définie comme ci-dessus. On a  $R_\pi = \text{div}(\frac{\partial F}{\partial y})$ , soit ici  $\frac{\partial F}{\partial y} = dy^{d-1}$ . Les points

de ramification sont donnés par  $\begin{cases} x^d + z^d = 0 \\ y = 0. \end{cases}$  On a donc  $d$  points de ramification de multiplicité  $d$  à chaque point.

Par la formule de Riemann-Hurwitz,  $\chi(C_d) = d2 - \deg(R_\pi)$ , car  $\chi(\mathbb{CP}^1) = 2$ . Puisque  $\deg(R_\pi) = d(d-1)$ , on peut calculer le genre  $g$  de  $C_d$  :  $2 - 2g = 2d - d^2 + d$  d'où  $2g = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2)$  d'où  $\boxed{g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}}$ .

Le calcul de l'exemple précédent se transpose à n'importe quelle courbe projective lisse.

**Théorème. (*Formule de Plücker*)**

Soit  $X \subseteq \mathbb{CP}^2$  une courbe projective plane lisse de degré  $d$ . Alors

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

▷ Supposons que  $X = \{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 \mid p(x,y,z) = 0\}$  et considérons la projection  $\pi: [x,y,z] \rightarrow [x,z]$  comme précédemment, en supposant sans perte de généralité que  $[0,1,0] \notin X$ , de sorte que  $R_\pi = \text{div}(\frac{\partial p}{\partial y})$ . Alors par le théorème de Bézout,  $\deg(p) = d$  et  $\deg(\frac{\partial p}{\partial y}) = d-1$ , d'où  $\deg(R_\pi) = \deg(\text{div}(\frac{\partial p}{\partial y})) = \deg(p) \deg(\frac{\partial p}{\partial y}) = d(d-1)$ , d'où  $\chi(X) = d\chi(\mathbb{CP}^1) - d(d-1)$  et l'on conclut. ■

*Remarque.* Si  $X \subseteq \mathbb{CP}^2$  est algébrique avec  $\delta$  points de singularité ordinaires doubles,  $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ .

**Propriété.** (*Lien entre courbes projectives et surfaces associées à une équation*)

Soit  $P(x,y)$  un polynôme irréductible de degré  $d$  en  $y$ . On note  $\tilde{P}(x,y,z)$  son homogénéisé.

Soit  $V_P$  son lieu d'annulation. Soit  $Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  la surface de Riemann compacte associée à l'équation algébrique  $P$ . Alors  $Y$  contient  $V_P \setminus \Sigma$  où  $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid \deg(P(x, \cdot)) < d \text{ OU } \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0\}$  comme un sous-ensemble dense.

Par construction,  $Y$  est lisse tandis que  $V_{\tilde{P}}$  peut contenir des singularités. Cependant, l'inclusion  $V_P \setminus \Sigma \subseteq V_{\tilde{P}} \subseteq \mathbb{CP}^2$  s'étend en une surjection holomorphe  $Y \rightarrow V_{\tilde{P}}$ .

## 4.6 Diviseurs et fibrés en droites associés à une SR

**Définition.** (*Fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann*)

Soient  $E$  une variété complexe, dit *espace total du fibré*,  $X$  une surface de Riemann dite *base du fibré* et  $\pi : E \rightarrow X$  une application holomorphe. On dit que  $(E,X,\pi)$  est un *fibré vectoriel holomorphe* si :

1.  $\pi$  est *localement triviale*, i.e. pour tout  $x \in X$ , il existe  $U \ni x$  un voisinage ouvert tel que  $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}^n$  par un biholomorphe  $h_U$ , dit *trivialisation de  $E$  sur  $U$*  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  appelé le *rang* du fibré vectoriel, de sorte que  $p_U \circ h_U(e) = \pi(e)$  pour tout  $e \in \pi^{-1}(U)$  où  $p_U : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow U$  est la projection sur le premier facteur ;
2. pour tout  $x \in X$ , la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est un espace vectoriel et pour tout trivialisation  $h_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ , l'application  $q_U \circ h_{U|\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{C}^n$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels où  $q_U : U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est la projection sur le second facteur.

**VOC** Un *fibré en droites (holomorphe)* est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1.

**Remarques.**

1. (*Fonctions de transition*) Si  $U_1, U_2$  sont deux ouverts de carte de  $X$ , si  $\pi^{-1}(U_1) \simeq U_1 \times \mathbb{C}^n$  par  $h_i$  et  $\pi^{-1}(U_2) \simeq U_2 \times \mathbb{C}^n$  par  $h_j$  comme imposé dans la définition, alors  $h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$  s'écrit  $(x,v) \mapsto (x, g_{i,j}(x)v)$  où les  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  sont holomorphes, et appelées *fonctions de transitions*. Entre elles, on peut définir la multiplication des matrices.

Dans le cas du rang 1, on a les  $g_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

2. (*Condition de cocyles*) Les fonctions de transition vérifient une condition de cocycle : on a  $g_{i,j}g_{j,k} = g_{i,k}$  pour tous  $i,j,k$  tels que  $U_i \cap U_j \cap U_k = \emptyset$  et  $g_{i,i} = id$  pour tout  $i$  convenant.

3. (*Construction d'un fibré vectoriel holomorphe via les cocycles de transition*) Réciproquement, étant donnée une famille de fonctions de transition satisfaisant la condition de cocyles, on peut construire un fibré vectoriel holomorphe.

### Définition. (*Fibrés vectoriels équivalents*)

Fixons une base  $X$ , surface de Riemann qui ne bouge plus. Soient  $L_1$  un fibré en droites défini par  $(g_{ij}^1)_{i,j}$  et  $L_2$  un fibré en droites défini par  $(g_{ij}^2)_{i,j}$  pour  $i,j$  une famille d'indexation d'un atlas de  $X$ . On dit que  $L_1$  et  $L_2$  sont *équivalents* s'il existe des biholomorphismes  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $i \in I$  tels que  $g_{ij}^2 = \varphi_i g_{ij}^1 \varphi_j^{-1}$  pour tous  $i,j \in I$ .

De façon équivalente et plus générale,  $\pi_1 : E_1 \rightarrow X$ ,  $\pi_2 : E_2 \rightarrow X$  sont équivalents s'il existe  $\varphi$  biholomorphe telle que

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & id & \end{array}$$

commute.

### Exemples. (*Fibrés vectoriels holomorphes*)

1. Les revêtement non ramifié sont les « fibrés » où  $\mathbb{C}^n$  est remplacé par un espace topologique discret.
2. Le fibré trivial holomorphe n'est autre que  $X \times \mathbb{C}^n$ .
3. Soit  $X$  une surface de Riemann. Soit  $(U_i, z_i)_{i \in I}$  un atlas de  $X$ . On note  $T^{1,0}X = TX$  le fibré en droites défini par le cocycle  $g_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial z_j} := D(z_i \circ z_j^{-1}) : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$ , dit *fibré tangent holomorphe* à  $X$ .  
On a  $\frac{\partial F(z_i(z_j))}{\partial z_j} = \frac{\partial F(z_i)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z_j}$ . Posons  $a_i = g_{ij} a_j$ . Une trivialisation est donnée par  $(z_i, a_i \frac{\partial}{\partial z_i})$ .
4. De même, on note  $\Lambda_{1,0}X = T^*X$  le *fibré cotangent holomorphe* défini par le cocycle  $g_{ij} = \frac{\partial z_j}{\partial z_i}$ , i.e. en prenant les transposées cette fois des matrices jacobiniennes :  $g_{ij}^* = D(z_i \circ z_j^{-1})^*$ .  
Remarque : dans tous les cas,  $dz_j = \frac{\partial z_j}{\partial z_i} dz_i$ .
5. Prenons le cas de  $\mathbb{CP}^1$ , cartographiée par  $U_0 = \mathbb{C}$  et  $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$  grâce à la fonction de transition  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . La donnée d'un fibré en droites sur  $\mathbb{CP}^1$  est alors équivalente à  $g_{01} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ . On a la :

### Proposition. (*Classification des fibrés en droites de $\mathbb{CP}^1$* )

Les fibrés en droites complexes sur  $\mathbb{CP}^1$  sont classées à équivalence près par  $\mathbb{Z}$  via  $g_{01}(z) = z^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas particulier, on note  $\mathcal{O}(n)$ .

*Remarque.*  $g_{ij}(z) = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2}$ . Ainsi,  $\Lambda^{1,0}(\mathbb{CP}^1)$  est équivalent à  $\mathcal{O}(-2)$ .

#### Remarques.

1. Par un théorème de Birkhoff-Grothendieck, tout fibré factoriel holomorphe sur  $\mathbb{CP}^1$  est équivalent à  $\mathcal{O}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(n_k)$  où  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $k$  est le rang du fibré vectoriel.

2. L'ensemble des fibrés en droites sur une surface de Riemann  $X$  à équivalence près, est un groupe, dit *groupe de Picard*, noté  $\text{Pic}(X)$ . Observons  $(g_{ij}^1, \dots, g_{ij}^2) \mapsto g_{ij}^1 g_{ij}^2$ .

### Définition. (*Section d'un fibré en droites holomorphe*)

Une *section holomorphe* d'un fibré en droites défini par le cocycle  $(g_{ij})_{ij}$ , est une famille de fonctions holomorphes  $F_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $F_i = g_{ij} F_j$  pour tout  $z \in U_i \cap U_j$ .

*Remarque.* Si  $\pi : L \rightarrow X$  est un fibré en droites, alors une section  $s : X \rightarrow L$  est une application holomorphe telle que  $\pi \circ s = id$  sur  $X$ .

### Exemple

$L = X \times \mathbb{C}$  le fibré trivial en droites. Soit  $s : X \rightarrow L$  avec  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z &\longmapsto (z, F(z)) \\ \text{holomorphe. Si } X \text{ est compacte, } s \text{ est constante, i.e. } s(z) = (z, c) \text{ pour } c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

### Définition. (*Section méromorphe d'un fibré en droites holomorphe*)

Une *section méromorphe* d'un fibré en droites complexe défini par le cocycle  $(g_{ij})$  est une famille de fonctions méromorphes  $F_i \in \mathcal{M}(U_i)$  telle que  $F_i = g_{ij} F_j$ .

*Remarque.* Nous allons prouver qu'il existe  $i$  une section méromorphe pour tout fibré en droites sur une surface de Riemann.

### Exercice 22 (*Section holomorphe du fibré cotangent de $\mathbb{CP}^1$* )

On cherche les 0-sections holomorphes de  $\Lambda^{1,0}(\mathbb{CP}^1)$ . On rappelle  $g_{10}(z) = -\frac{1}{z^2}$ . Peut-on trouver une fonction holomorphe  $F_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F_1 : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $F_0(\frac{1}{z}) = -\frac{1}{z^2} F_1(z)$  ?

### Exemple

$E_\tau = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$  d'où  $\Lambda^{1,0}(E_\tau) = T^{1,0}(\mathbb{C})/\Gamma_\tau = E_\tau \times \mathbb{C}$  le fibré trivial. On a  $T^{1,0}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .

### Exemple

$D = \sum n_p p \in \text{Div}(X)$  donne  $[D]$  un fibré en droites. La surface contient les points  $p_1$  et  $p_2$  avec des ouverts les contenant  $U_1$  et  $U_2$ . Notons  $U_0 = X \setminus \{p_1, p_2\}$ . Alors  $g_{1,0} : U_1 \cap U_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$  et  $g_{2,0} : U_2 \cap U_0 \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Soit  $F_1$  méromorphe sur  $U$ , i.e. holomorphe sur  $U_1 \setminus \{p_1\}$ . On a  $\text{ord}_{p_1} F_1 = n_1$ , et  $g_{1,0} = F_1$  et  $g_{2,0} = F_2$ . On a ainsi  $\text{Div}(X) \rightarrow$  un fibré en droites.

### Théorème

Sur une surface de Riemann compacte, il existe une correspondance isomorphe entre les fibrés en droites à équivalence près et les diviseurs à équivalence près.

Autrement dit, pour  $X$  une SR compacte, on a

$$\text{Div}(X)/\text{Princ}(X) \simeq \text{Pic}(X).$$

\* (Idée de la preuve.) On a besoin d'un théorème d'existence d'une section méromorphe non nulle pour passer d'un fibré en droites  $L$  à un diviseur  $\text{div}(S)$  associé à  $L$ . Par contre, on peut montrer l'implication facile de la preuve.

Soit  $D = \sum_{i=1}^N n_i p_i$  un diviseur sur la surface  $X$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  et  $p_i \in X$  pour tout  $i \in [1, N]$ . Cosntruisons un cocycle convenant. Considérons des ouverts disjoints  $U_i$  dont chacun contient  $p_i$ . Posons  $U_0 = X \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$  et  $F_i \in \mathcal{M}(U_i)$  avec  $\text{ord}_{p_i} F_i = n_i$ ,  $F_i : U_i \setminus \{p_i\} \rightarrow \mathbb{C}^*$  sur  $U_0$ ,  $F_0 \equiv 1$ . Définissons maintenant  $g_{ij} = \frac{F_i}{F_j}$ . Observons que sur  $U_i \cap U_j$ ,  $\frac{F_i}{F_j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*$  est holomorphe.  $g_{ij}$  est un cocyle :  $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$  de sorte que le fibré en droites associé admet  $(F_i)$  comme section méromorphe. Une autre choix donne un fibré en droites équivalent. ■

### Définition. ()

Soit  $s = (F_i)$  une section méromorphe du fibré en droites définie par le cocycle  $(g_{ij})$ . Alors  $\text{ord}_p(s) = \text{ord}_p(F_i)$  pour  $U_i \ni p$ .

C'est bien défini, car  $\text{ord}_p(F_j) = \text{ord}_p(g_{ij}F_i) = \text{ord}_p(F_i)$ .

De même,  $\text{div}(s) = \sum \text{ord}_p(s).p$ .

*Remarque.* La section  $s = (F_i)$  construite ci-dessus est une section mromorphe telle que  $\text{div}(s) = D$ .

**VOC**  $\Lambda^{1,0}X$  le fibré cotangent holomorphe est appelé le fibré canonique.

### Théorème

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Soit  $\Omega^{1,0}(X)$  l'espace vectoriel de toutes les sections holomorphes de  $\Lambda^{1,0}(X)$ . Alors  $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^{1,0}(X)) = g(X)$ .

*Remarque.* Pour  $X = \mathbb{CP}^1$ , on retrouve l'exercice précédent.

**VOC** Un *diviseur canonique* est un diviseur défini par une forme holomorphe ou méromorphe :  $K = \text{div}(\omega) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p(\omega)p$  où si localement  $\omega = F(z)dz$ ,  $F$  holomorphe,  $\text{ord}_p\omega := \text{ord}_p F(z)$ .

## 4.7 Théorie de Hodge

### 4.7.0.1 Rappels de rappels

#### Définition. (1-forme holomorphe sur une surface de Riemann)

Soit  $X$  une surface de Riemann. Une (1-)forme (différentielle) holomorphe  $\omega : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction définie localement sur tout voisinage de coordonnées, telle que pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $X$ , en particulier  $\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$  par  $g_U(z)dz$  pour tout  $z \in \varphi(U)$ , où  $g_U : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe, avec la condition de compatibilité suivante : pour toute carte  $(V, \psi)$  de  $X$  telle que  $U \cap V \neq \emptyset$ , en notant  $w = \psi \circ \varphi^{-1}$ ,  $g_U(z) = g_V(w(z))w'(z)$  pour tout  $z \in U \cap V$ .



Les fonctions holomorphes définies sur une surface de Riemann compacte sont constantes, mais ce n'est pas le cas des formes holomorphes ! Elles forment un espace vectoriel complexe de dimension finie dont la dimension ne dépend que de la topologie de la surface  $X$ .

#### Exemples. (1-formes holomorphes sur une surface de Riemann)

1. La seule forme holomorphe sur  $\mathbb{CP}^1$  est la forme holomorphe triviale, i.e. identiquement nulle.

On utilise l'atlas canonique de  $\mathbb{CP}^1$  avec sur  $C_s$  la fonction de transition  $z \mapsto \frac{1}{z}$ . Ainsi,  $-\frac{1}{z^2}g_1(\frac{1}{z}) = g_2(z)$ . On obtient une équation fonctionnelle qui n'a qu'une solution holomorphe pour  $g_2$  définie sur  $\mathbb{C}$  et  $g_1$  définie sur  $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ , qui est nulle.

2. On pourra montrer que les formes holomorphes sur une courbe elliptique sont toutes multipliées de la forme constante  $dz$ .

On peut admettre :

#### Théorème. (Dimension de l'espace des 1-formes holomorphes sur une SR)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Alors  $\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda^1(X)) = g(X)$  le genre de la surface  $X$ .

EXAMPLE DEBUT DE PDF

### 4.7.1 Rappels : formes holomorphes sur des surfaces de Riemann

→ Notation. Soit  $X$  une surface de Riemann. On note  $\mathcal{E}(U)$  l'ensemble des sections du fibré cotangent  $T^*X$  sur l'ouvert  $U$  de  $X$ .

En coordonnées locales  $(x, y)$ ,  $\alpha \in \mathcal{E}^1(U)$  est une 1-forme différentielle que l'on peut donc écrire  $\varphi^{-1*}\alpha = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ . Ici,  $z = x + iy$  est une coordonnée complexe. Définissons

$dz = dx + idy$  et  $d\bar{z} = dx - idy$ . En particulier,  $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$  et  $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$ .

→ *Notation.* Notons  $\mathcal{E}^{1,0}(U)$  les 1-formes écrites localement comme  $\varphi^{-1}\alpha = F_1(x,y)dz$  et  $\mathcal{E}^{0,1}(U)$  celles écrites localement comme  $\varphi^{-1}\alpha = F_2(x,y)d\bar{z}$ . On a  $\mathcal{E}(U) = \mathcal{E}^{1,0}(U) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(U)$ .

Rappelons comment intégrer des formes différentielles. Soit  $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ . Soit  $\gamma : I \rightarrow X$  un chemin. Alors  $\int_\gamma \alpha$  est bien définie (pour le montrer, utiliser des partitions de l'unité et l'intégration locale).

Si maintenant  $\Lambda^2(X)$  est le fibré des 2-formes,  $\beta \in \mathcal{E}^2(U)$  est une section locale de  $\Lambda^2(U)$ . En coordonnées locales,  $\varphi^{-1}\beta = a(x,y)dx \wedge dy$ . De même,  $\int_\Omega \beta$  est bien définie (même idée).

Le théorème le plus important est dû à Stokes : si  $X$  est une surface orientée,  $\Omega \subseteq X$  un domaine de bord lisse  $\partial\Omega$ , si  $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ , alors si l'orientation de  $\partial\Omega$  est compatible avec celle de  $X$ , on a  $\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_\Omega (d\alpha)$ .

### 4.7.2 1-formes méromorphes sur une surface de Riemann

**VOC** Une 2-forme méromorphe sur une surface de Riemann  $X$  est une section méromorphe du fibré cotangent  $\Lambda^{1,0}(X)$ .

Dans la suite, on fixe  $X$  une surface de Riemann.

*Remarque.* Si  $\alpha$  est une section méromorphe de  $X$ , localement, on peut écrire  $\varphi^{-1}\alpha = a(z)dz$  où  $a$  est méromorphe.

**Définition. (Résidu d'une 1-forme méromorphe)**

Soit  $\alpha$  une 1-forme méromorphe. Le résidu de  $\alpha$  en  $p \in X$  est  $\text{res}_p(\alpha) = \text{res}_p(a)$ .

**Propriété. (Définition intrinsèque du résidu)**

Soit  $p \in U$  ouvert de  $X$  tel que  $\alpha$  n'a pas de pôle sur  $U \setminus \{p\}$ . Alors  $\text{res}_p \alpha = \frac{2\pi i}{\int_\gamma} \alpha$  où  $\gamma$  est un chemin ne tournant qu'une seule fois autour de  $p$ .

*Remarque.*  $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$  où en coordonnées locales  $\partial(a(z)dz + b(z)d\bar{z}) = \frac{\partial b(z)}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$  et  $\bar{\partial}(a(z)dz + b(z)d\bar{z}) = \frac{\partial a(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$ .

Ainsi si  $\alpha$  est holomorphe,  $\alpha(z) = a(z)dz$  en coordonnées locales, d'où  $d\alpha = 0 + 0 = 0$ .

▷ Montrons que cette définition est intrinsèque.  $\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = -(\int \bar{\gamma}_1 \alpha + \int_{\gamma_2} \alpha) = -\int_{\partial\Omega} \alpha = -\int_\Omega d\alpha = 0$  d'après la remarque précédente. ■

Notons que pour  $F \in \mathcal{M}(X)$ ,  $p \in X$ , pour une coordonnée locale centrée en  $p$ ,  $F \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n \geq k} c_n z^n$ , alors  $c_{-1}$  n'est pas bien défini.

On retrouve le résultat suivant :

### Proposition

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte et  $F \in \mathcal{M}(X)$ . Alors  $\deg(\operatorname{div}(F)) = 0$ .

▷ On construit la forme méromorphe  $\omega = \frac{dF}{F}$ , section méromorphe de  $\Lambda^{1,0}(X)$ . Alors  $\operatorname{res}_p(\omega) = \operatorname{res}_p\left(\frac{dF}{F}\right) = \operatorname{ord}_p F$ . En coordonnées locales,  $dF(z) = pddt z F(z) dz$ . Ainsi,  $\int_{\gamma} \frac{\partial F}{\partial z}(z) dz = \operatorname{ord}_p F(z)$ .

### Lemme

Soit  $\omega$  un 1-forme méromorphe sur  $X$ . Alors  $\sum_p \operatorname{res}_p(\omega) = 0$ .

▷ C'est le théorème de Stokes. Soient  $p_1, \dots, p_k$  les pôles de  $\omega$  et  $U_i \ni p_i$  des ouverts disjoints homéomorphes au disque. Soit  $\Omega = X \setminus \cup_i U_i$ . Alors  $0 = \int_{\Omega} d\omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial U_i} \omega = 2\pi i = \sum_{i=1}^k \operatorname{res}_{p_i} \omega$ . ■

### Fait

Les formes holomorphes sont fermées.

En effet, si  $\beta \in \Omega^{1,0}(X, \mathbb{C})$ ,  $d\beta = (\partial + \bar{\partial})\beta = 0$ . Localement,  $\beta = F(z)dz$ , d'où  $\partial\beta = \frac{dF}{dz}(z)dz \wedge dz = 0$ .

### 4.7.3 Homologie et cohomologie de de Rham

Soit  $X$  une surface compacte, dont pour l'instant on ne s'intéresse qu'à la structure réelle. On note respectivement  $\mathcal{E}^0(X), \mathcal{E}^1(X), \mathcal{E}^2(X)$  les espaces de 0-formes, 1-formes et 2-formes différentielles sur  $X$  qui sont respectivement les sections des fibrés trivial, cotangent et périodique. Le *complexe de de Rham* est le complexe court  $0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(X) \longrightarrow 0$  (on a bien  $d^2 = 0$ ).

On peut énoncer dans ce contexte :

#### Lemme. (*Lemme de Poincaré sur une surface topologique*)

Soit  $U$  un ouvert de  $X$  une surface compacte. Si  $\alpha \in \mathcal{E}^i(U)$  est une  $i$ -forme différentielle nulle, i.e.  $d\alpha = 0$  ou encore  $\alpha \in \operatorname{Ker}(d)$  où cette différentielle  $d$  est définie sur  $\mathcal{E}^i(U)$ , alors localement  $\alpha = d\beta$  où  $\beta \in \mathcal{E}^{i-1}(V)$  sur l'ouvert  $V \subseteq U \subseteq X$ .

**Définition. (*Groupes de cohomologie de de Rham sur une surface*)**

Soit  $X$  une surface compacte. On définit le  $i$ -ième groupe de cohomologie de de Rham de  $X$  par  $H^i(X, \mathbb{C}) = \frac{\text{Ker}(d : \mathcal{E}^i(X) \rightarrow \mathcal{E}^{i+1}(X))}{\text{Im}(d : \mathcal{E}^{i-1}(X) \rightarrow \mathcal{E}^i(X))}$ .

**Théorème**

Soit  $X$  une surface compacte orientable de genre  $g$ . Alors :

- (i)  $\dim(H^0(X, \mathbb{C})) = 1$  ;
- (ii)  $\dim(H^1(X, \mathbb{C})) = 2g$  ;
- (iii)  $\dim(H^2(X, \mathbb{C})) = 1$ .

▷ La seule information notable est dans (ii). On a  $H_1(X, \mathbb{C}) = H_1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ . Or  $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, p_0)/[\pi_1(X, p_0), \pi_1(X, p_0)] \simeq \frac{\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle}{\langle [a_i, b_i] \rangle} \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ . ■

*Remarque.* On a  $\dim(H_1(X, \mathbb{C})) = \dim(H^1(X, \mathbb{C}))$ .

On peut définir, à partir de là, une cohomologie prenant en compte la structure complexe, dit *complexe de Dolbeault* :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathcal{E}^{0,1}(X) \longrightarrow 0$$

où pour les fonctions lisses

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathcal{E}^{1,1}(X) \longrightarrow 0$$

où localement  $\mathcal{E}^{0,1}(U) = \{F(z)d\bar{z}, F \text{ lisse}\}$ ,  $\mathcal{E}^{1,0}(U) = \{g(z)dz, g \text{ lisse}\}$  et  $\mathcal{E}^{1,1}(U) = \{h(z)dz \wedge d\bar{z}, h \text{ lisse}\}$ . C'est le *type* des formes.

On définit alors :

**Définition. (*Groupes de cohomologie de Dolbeault sur une SR*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. On définit les groupes de cohomologie de Dolbeault de  $X$  par :

- (i)  $H^{0,0}(X, \mathbb{C}) = \text{Ker}(\bar{\partial}_1) = \mathcal{O}(X)$  est l'espace des fonctions holomorphes sur  $X$  ;
- (ii)  $H^{0,1}(X, \mathbb{C}) = \frac{\mathcal{E}^{0,1}}{\text{Im}(\bar{\partial}\mathcal{E}^0)}$  ;
- (iii)  $H^{1,0}(X, \mathbb{C}) = \text{Ker}(\bar{\partial}_2) = \Omega^{1,0}(X)$  l'espace des 1-formes holomorphes sur  $X$  ;
- (iv)  $H^{1,1}(X, \mathbb{C}) = \frac{\mathcal{E}^{1,1}}{\text{Im}(\bar{\partial}\mathcal{E}^{1,0})}$ .

**Remarque importante.** On obtient les deux complexes correspondants :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1}(X) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \Omega^{1,0}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{1,1}(X) \longrightarrow 0.$$

### Théorème

$H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,1}(X, \mathbb{C})$  et  $\dim(H^{1,0}(X, \mathbb{C})) = \dim(H^{0,1}(X, \mathbb{C})) = g$ .

En particulier, la dimension de l'espace des formes holomorphes sur  $X$  est  $\dim(\Omega^{1,0}(X)) = g$ .



#### 4.7.4 Fonctions harmoniques et théorème de décomposition de Hodge

Soit toujours  $X$  une surface de Riemann compacte fixée.

##### Définition. (*Opérateur \**)

On définit l'opérateur  $* : \mathcal{E}^1(X) \rightarrow \mathcal{E}^1(X)$  où si  $\alpha \in \mathcal{E}^1(X)$ ,  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  où  $\alpha_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$  et  $\alpha_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ , alors  $*\alpha := -i\alpha_1 + i\alpha_2$ .

*Remarque.* En coordonnées locales  $z = dx + idy$ , on a  $*dx = dy$  et  $*dy = -dx$ . On en déduit  $*dz = *(dx + idy) = dy - idx = -idz$  et similairement  $*d\bar{z} = id\bar{z}$ .



Dans le cas des structures complexes en dimension 2, l'opérateur  $*$  ne requiert pas de métrique riemannienne.

##### Théorème. (*Théorème de décomposition de Hodge*)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Alors

$$\mathcal{E}^1(X) = \underbrace{d\mathcal{E}^0(X)}_{\text{formes exactes}} \oplus \underbrace{(*d)\mathcal{E}^0(X)}_{\text{formes coexactes}} \oplus \underbrace{\Omega^{1,0}(X) \oplus \overline{\Omega^{1,0}(X)}}_{\text{formes harmoniques}}.$$

##### Définition. (*Opérateur $\Delta$* )

On définit l'opérateur  $\Delta : \mathcal{E}^0(X) \rightarrow \mathcal{E}^2(X)$  par  $\Delta F = d * dF$  pour toute  $F \in \mathcal{E}^0(X)$ .

##### Proposition. (*Calcul local de l'opérateur $\Delta$* )

En coordonnées locales, si  $F \in \mathcal{E}^0(X)$ , on a  $\Delta F = (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2})dx \wedge dy$ .

▷ On écrit  $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$  et on utilise les règles de calcul sur les 2-formes :  $*dF = \frac{\partial F}{\partial x}dy - \frac{\partial F}{\partial y}dx$ , d'où  $d * dF = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx \wedge dy - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy \wedge dx$  d'où le résultat par antisymétrique. ■

### Définition. (*Équation de Poisson dans le cadre des SR*)

L'équation de Poisson sur la surface de Riemann compacte  $X$  est l'équation d'icongne  $\varphi \in \mathcal{E}^0(X)$ ,  $\Delta\varphi = \rho$  où  $\rho \in \mathcal{E}^2(X)$  est fixée. Souvent, on considère  $\Delta\varphi = 0$ .

*Remarque.* Ce problème est très important. En effet, si  $\Delta\varphi = \rho$ , alors on peut calculer  $\int_X d * d\varphi = \int_X \rho = 0$ .

### Théorème. (*Solution de l'équation de Poisson sur une surface de Riemann*)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Pour toute 2-forme  $\rho \in \mathcal{E}^2(X)$  telle que  $\int_X \rho = 0$ , il existe  $\varphi \in \mathcal{E}^0(X)$  telle que  $\Delta\varphi = \rho$ .

▷ La preuve, fournie par WEYL en 1940, utilise des techniques des espaces de Hilbert. Pour utiliser le théorème de Riesz, on définit un opérateur représenté par la solution  $\varphi$ . Alors pour toutes  $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^0(X, \mathbb{C})$ ,  $\int \psi \Delta\varphi = \underbrace{\int d(\psi * d\varphi)}_{=0} - \int d\varphi \wedge *d\varphi = - \int d\psi \wedge *d\varphi$ .

### Définition. (*Opérateur $T$* )

On définit  $T_\rho(\psi) = \int \psi \rho \in \mathbb{R}$  ( $= \int d\psi \wedge *d\varphi$  si  $\varphi$  est une solution lisse).

On définit donc un espace de Hilbert munie de la métrique hermitienne  $\langle \psi, \varphi \rangle = \int d\psi \wedge *d\varphi$ . « En retirant les constantes de  $\mathcal{E}^0$  »,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une métrique : en effet, localement on calcule  $d\varphi \wedge *d\phi = ((\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2) dx \wedge dy$ . Comment faire ? En fixant une forme volume,  $\int_X v \neq 0$ , puisque  $\dim_{\mathbb{C}}(H^2(X, \mathbb{C})) = 1$ , si  $H = \{\psi \mid \int_X \psi dv = 0\}$ , alors on a une métrique ! La complétion de cette métrique  $H$  donne bien un Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Pour finir la preuve, montrons que  $T_\rho$  est borné afin d'appliquer le théorème de Riesz. On aura alors  $w \in H$  tel que  $T_\rho w = \langle w, \varphi \rangle$ . Il faudra ensuite montrer que  $w \in \mathcal{E}^0$ . Commençons par la bornitude. Si  $\int_X \rho = 0$ ,  $\rho = d\beta$  avec  $\beta \in \mathcal{E}^1(X)$ . On doit montrer que  $\left| \int_X (\psi \rho) \right|^2 \leq C \left| \int_X d\psi \wedge *d\varphi \right|$  pour tout  $\psi$  où  $C$  est une constante indépendante de  $\psi$ . Or  $|Intg_X(\psi \rho)|^2 = |Intg_X(\psi d\beta)|^2 = \left| \int_X d\psi \wedge \beta \right|^2 \leq \left| \int_X d\psi \wedge *d\varphi \right| \left| \int_X *d\varphi \wedge \beta \right|$  et l'on pose donc  $C = \left| \int_X *d\varphi \wedge \beta \right|$  et  $T_\rho$  est borné.

### Lemme. (*Lemme de Weyl*)

$w \in \mathcal{E}^0$ .

▷ C'est compliqué. ■

En effet, héhé... ■

On peut énoncer comme conséquences :

### Théorème

- ★  $H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \simeq H^2(X, \mathbb{C})$  ;
- ★  $H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{0,1}(X, \mathbb{C})$  ;
- ★  $H^1(X, \mathbb{C}) \simeq H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ .

▷ Montrons le troisième point.  $H^{1,0} = \Omega^{1,0}(X)$  l'ensemble des formes holomorphes sur  $X$  et  $H^{0,1} = \mathcal{E}^{0,1}(X)/\partial\mathcal{E}^0(X)$ . On a  $H^1(X, \mathbb{C}) = \text{Ker}(d : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2)/d\mathcal{E}^0(X, \mathbb{C})$ . Posons la fonction  $H^{1,0} \times H^{0,1} \longrightarrow H^1$ . Elle est bien définie. L'injectivité est facile ; montrons la surjectivité. Soit

$$([\beta_1, [\beta_2]]) \longmapsto [\beta_1 + \beta_2]$$

$[\beta] \in H^1$ . Alors  $d\beta = 0$  donc  $\beta = \beta_1 + \beta_2$  où  $\beta_1 \in \mathcal{E}^{1,0}$  et  $\beta_2 \in \mathcal{E}^{0,1}$ . Alors  $d(\beta_1 + \beta_2) = (\partial + \bar{\partial})(\beta_1 + \beta_2) = \bar{\partial}\beta_1 + \partial\beta_2 = 0$ , d'où  $\bar{\partial}\beta_1 = -\partial\beta_2$ . Trouvons  $F \in \mathcal{E}^0$  telle que  $\beta + dF = (\beta_1 + \partial F) + (\beta_2 + \bar{\partial}F)$  satisfasse :  $\bar{\partial}(\beta_1 + \partial F) = 0$ , et alors  $\beta_1 + \partial F \in \Omega^{1,0}$ . Résolvons donc  $\bar{\partial}\beta_1 + \bar{\partial}\partial F = 0$ . On calcule :  $-2i\bar{\partial}\partial F (= 2i\bar{\partial}\partial F) = d * dF$ . Ainsi,  $\Delta F = 2i\bar{\partial}\beta_1 := \rho$ . Vérifions que  $\int_X \rho = 0$ . On a  $\int_X \bar{\partial}\beta_1 = 0$ , car  $\beta_1 \in \mathcal{E}^{1,0}$ , soit  $\partial\beta_1 = 0$ , d'où  $\int d\beta_1 = 0$ . Par le théorème des solutions d'une équation de Poisson,  $F$  est solution et  $\beta_1 + \partial F \in \Omega^{1,0}$ . ■

## 4.7.5 Théorèmes conséquences de la théorie de Hodge

### 4.7.5.1 Existence d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann

#### Théorème. (*Existence d'une fonction méromorphe*)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  et  $p \in X$ . Alors, il existe  $F \in \mathcal{M}(X)$  une fonction méromorphe avec un pôle seulement en  $p_0$ , d'ordre au moins  $g+1$ . En particulier,  $\mathcal{M}(X) \neq \{\text{ constantes}\}$ .

▷ Soit  $\chi : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction plateau centrée en  $p$ , i.e.  $\chi = 1$  sur un voisinage de  $p$  et nulle sur le complémentaire d'un voisinage compact de  $p$ . Posons  $F_n = \frac{\chi}{z^n}$  en coordonnées locales. Définissons  $\alpha_n = \bar{\partial}(\frac{\chi}{z^n}) \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ . Si  $u \in \mathcal{E}^0$  est une solution de  $\bar{\partial}u = \alpha_n$ , alors  $\bar{\partial}(u - \frac{\chi}{z^n}) = 0$ , d'où  $u - \frac{\chi}{z^n} \in \mathcal{M}(X)$  avec un pôle d'ordre  $n$  en  $p$ . On a le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \longrightarrow 0.$$

Il existe une solution à cette équation si  $[\alpha_n] = 0$  dans  $H^{0,1}(X) = \mathcal{E}^{0,1}/\text{Im}(\bar{\partial})$ . Puisque  $\dim(H^{0,1}(X)) = g$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_{g+1} \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ , il existe  $\alpha \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{g+1} \rangle$  telle que  $[\alpha] = 0$ , d'où  $\bar{\partial}u = \alpha$  pour un certain  $u \in \mathcal{E}^0$ . On obtient donc une fonction méromorphe avec un pôle d'ordre au moins  $g+1$ . ■

#### Corollaire. (*Surfaces de Riemann vues comme un revêtement de $\mathbb{CP}^1$* )

Toute surface de Riemann est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann.

▷ En effet, un tel revêtement est donné par n'importe quelle fonction méromorphe. Attention, il peut être peu plaisant. ■

**VOC** Si il existe  $F \in \mathcal{M}(X)$  avec un seul pôle d'ordre au moins  $g$  en  $p$ , le point particulier  $p$  est appelé un *point de Weierstrass*.

Voici un autre théorème, qui porte sur les formes méromorphes.

### Théorème. (*Existence d'une forme méromorphe*)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Soit  $z_0 \in X$ . Soit  $n$  un entier plus grand que 2.

Il existe  $\omega$  une forme méromorphe sur  $X$  avec un unique pôle d'ordre  $n$ .

▷ Cette fois si, on pose  $\rho_n = \bar{\partial}(\frac{x}{z^n} dz) \in \mathcal{E}^{1,1}(X)$ . Si un certain  $\alpha$  satisfait  $\bar{\partial}\alpha = -\rho_n$ , alors  $\bar{\partial}(\alpha + \frac{x}{z^n} dz) = 0$ . On a donc  $0 \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{1,1}(X) \longrightarrow 0$ . Or  $\text{Ker}(\bar{\partial}) = \Omega^{1,0}(X)$ . Ainsi,  $\alpha + \frac{x}{z^n} dz \in \Omega^{1,0}(X \setminus \{z_0\})$ . Ainsi  $\alpha + \frac{x}{z^n} dz$  est une forme méromorphe ayant un pôle d'ordre  $n$ . Puisque  $\dim(H^{1,1}) = 1$ ,  $[\rho_1]$  et  $[\rho_2]$  sont linéairement dépendants. Par suite,  $\rho_1 \notin H^{1,1}(X)$ , autrement  $\alpha + \frac{x}{z^n} dz$  serait une forme méromorphe avec un unique pôle de résidu non nul, impossible. Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ , il existe une combinaison linéaire donnant une solution : les 1-formes méromorphes avec un pôle d'ordre  $n$ . ■

### Exercice 23 (Raffinement du théorème d'existence des formes méromorphes)

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Soient  $z_1, z_2 \in X$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Montrer qu'il existe  $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$  une forme méromorphe en coordonnées locales valant  $-\frac{1}{z}$  autour de  $z_1$  et  $\frac{1}{z}$  autour de  $z_2$ .

#### 4.7.5.2 Différentielle holomorphe et existence d'une différentielle abélienne

#### 4.7.5.3 Théorème de Riemann-Roch et conséquences

### Théorème. (*Théorème de Riemann-Roch*)



Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Soit  $K$  un diviseur canonique sur  $X$ . Soit  $D \in \text{Div}(X)$ . Alors

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) - g + 1.$$

Nous montrerons ce théorème plus tard (*dans la section PREUVE DU THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH*).

#### Remarques.

- (Signification de  $L(D)$  et  $L(K - D)$ ) On a nommément  $L(D) = \{F \in \mathcal{M}(X) \mid (F) \geq -D\} \cup \{0\}$  et  $L(K - D) = \{F \in \mathcal{M}(X) \mid (F) \geq D - K\} \cup \{0\}$ . Remarquons alors

que, si  $K = (\omega)$ ,  $(F) \geq D - K \iff (F\omega) \geq D$ , où  $F\omega$  est une forme méromorphe, de sorte que  $L(K - D) \simeq \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) \mid (\omega) \geq D\} \cup \{0\}$ , où  $\mathcal{M}^1(X)$  est l'ensemble des formes méromorphes sur  $X$ .

2. Cette formule est cohérente avec la dimension de  $L(K)$ .

En effet, pour le diviseur nul  $D = 0$ , on a  $\dim L(0) - \dim L(K) = -g + 1$ , et  $\dim(L(0)) = 1$ , puisque  $L(0)$  est l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $X$ , qui est  $\simeq \mathbb{C}$ . Ainsi  $\dim(L(K)) = g = \dim(H^{1,0}(X))$ , et l'on retrouve ce que l'on avait calculé par la théorie de Hodge.

3. On rappelle que si  $\deg(D) < 0$ , alors  $L(D) = \{0\}$ . En effet,  $0 = \deg(F) \geq \deg(-D) > 0$  pour toute fonction méromorphe  $F$ .
4. On déduit du théorème de Riemann-Roch que pour tout diviseur canonique  $K$ ,  
 $\deg(K) = -\chi(X)$ .

En effet, en appliquant le théorème à  $D = K$ , on obtient  $\dim(L(K)) - \dim(L(0)) = \deg(K) - g + 1$ , mais comme  $\dim(L(K)) = g$  par définition, on en déduit  $\deg(K) = 2g - 2 = -\chi(X)$ .

5. Prenons par exemple  $D = (g+1)p$  pour un certain  $p \in X$ . Alors  $L(D) = \{F \mid (F) \geq -(g+1)p \text{ ou } F = 0\}$ . C'est donc l'ensemble des fonctions méromorphes sur  $X$  ayant un pôle d'ordre au moins  $g+1$  en  $p$ . D'après le théorème,  $\dim(L(D)) = 2 + \dim(K - D) \geq 2$ . Ainsi, le théorème de Riemann-Roch contient le théorème d'existence d'une fonction méromorphe.
6. (*Lien Riemann-Roch/fibré en droites*) Rappelons nous que l'on a une correspondance des diviseurs donnés à équivalence près et les fibrés en droites de  $X$  donnés à équivalence près, concrétisée par  $D \mapsto [D]$ . On en déduit une correspondance  $L(D) \longrightarrow H^0([D])$  l'ensemble des sections holomorphes du fibré en droites de  $X$ , qui constitue une description beaucoup plus satisfaisante que celle de la définition de l'espace de niveau. À un diviseur  $D = \sum_i n_i p_i$ , on fait correspondre  $g_{ij} = \frac{F_i}{F_j}$  où  $\text{ord}_{p_i} F_i = n_i$ . Ainsi  $(F_i)$  définit une section méromorphe de  $[D]$ . Rappelons-nous que pour une section méromorphe  $(s_i)$ ,  $s_i = g_{ij} s_j$ , i.e. il faut vérifier  $F_i = g_{ij} F_j$ . D'autre part, si  $F \in L(D)$ ,  $(FF_i)$  est une section méromorphe de  $[D]$  :  $(FF_i) = g_{ij}(FF_j)$ . En effet,  $\text{div}(FF_i) = \text{div}(F) + \text{div}(F_i) = \text{div}(F) + n_i \geq 0$ .
7. (*Uniformisation en genre 0*) Montrons le théorème d'uniformisation de Riemann pour les surfaces de genre 0. Si  $g(X) = 0$ , alors on a un biholomorphisme  $X \simeq \mathbb{CP}^1$ . Montrer qu'il existe  $F \in \mathcal{M}(X)$  avec seulement un pôle d'ordre 1. Avec la bijection donnée, c'est immédiat.

8. (*Uniformisation en genre 1*) Soit  $X$  une surface de Riemann de genre  $g = 1$ . Soit  $K$  un diviseur canonique. (On rappelle que la fonction de Weierstrass  $\mathcal{P}$  a un unique pôle d'ordre 2.) On a  $\deg(K) = 2g - 2 = 0$ . Soit  $p \in X$ . On note  $p = [p]$ . Alors  $\ell(p) = \deg(p) - g + 1 + \ell(K - p) = 1 - g + 1 = 1$ , puisque  $\deg(K - p) = -1 < 0$ . (Remarquons que l'on sait que  $\ell(p) = 1$ , car si  $\ell(p) \geq 2$ , alors il existe  $F \in \mathcal{M}(X)$  avec un pôle simple en  $p$ , i.e.  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  de degré 1, contradiction.) De plus,  $\ell(2p) = \deg(2p) - 1 + 1 + \ell(K - 2p) = 2$ , car  $\ell(K - 2p) = 0$ . On rappelle que

$\ell(D) = \deg(D)$  pour  $D > 0$ . Ainsi, il existe  $x \in \mathcal{M}(X)$  d' $\text{ord}_p(x) = -2$ . De plus  $\ell(3p) = 3$ , avec  $1, x \in L(3p)$ . Il existe donc  $y \in L(3p)$  telle que  $\langle 1, x, y \rangle = \mathbb{L}(3p)$  et  $\text{ord}_p(y) = -3$ . Ensuite,  $L(4p) = \langle 1, x, y, x^2 \rangle$  puisque  $\ell(4p) = 4$ . Puisque  $\ell(5p) = 5$ ,  $L(5p) = \langle 1, x, y, x^2, xy \rangle$ . Enfin,  $\ell(6p) = 6$  donc  $L(6p) = \langle 1, x, y, x^2, xy, x^3, y^2 \rangle$ . Ainsi, à changement de base linéaire près, on a la relation  $y^2 = x^3 + g_2x + g_3$ .

### Corollaire. (*Inégalité de Riemann*)

Soient  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  et  $D \in \text{Div}(X)$ . Alors

$$\dim L(D) \geq \deg(D) - g + 1.$$

### Application. (*Calcul de la dimension de l'espace de niveau d'un diviseur assez grand*)

On reprend les notations précédentes. Soit  $D \in \text{Div}(X)$ . Si  $\deg(D) > 2g - 2 = -\chi(X)$ , alors on a l'égalité  $\dim(L(D)) = \deg(D) - g + 1$ .

En effet,  $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) < 2g - 2 + 2g - 2 = 0$ .

#### 4.7.5.4 Plongement des surfaces de Riemann dans l'espace projectif

##### Définition-propriété. (*Plongement canonique d'une surface de Riemann*)

Soit  $(\omega_i)_{i \in [1,g]}$  une base des formes différentielles holomorphes sur une surface de Riemann compacte  $X$  de genre  $g \geq 1$ . Écrivons  $\omega_i(z) = F_i(z)dz$  en coordonnées locales. L'application canonique

$$\begin{aligned} \phi_K: \quad X &\longrightarrow \mathbb{CP}^{g-1} \\ z &\longmapsto [F_1(z), \dots, F_g(z)] \end{aligned}$$

est bien définie.

▷ En effet,  $\phi_K(z)$  ne dépend pas de la coordonnée locale. En effet, si  $z(w)$  est un changement de coordonnées, i.e.  $\omega_i(z(w)) = (F_i(z(w)) \frac{dz}{dw}) dw$ ,  $\varphi_K(z(w)) = [F_1(z(w)) \frac{dz}{dw}, \dots, F_g(z(w)) \frac{dz}{dw}] = [F_1(z(w)), \dots, F_g(z(w))]$  et  $\varphi_K(z)$  ne dépend pas de la coordonnée locale.

Il faut également vérifier que le vecteur envoyé dans  $\mathbb{CP}^{g-1}$  n'est pas nul. Montrons que pour tout  $p \in X$ , il existe  $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$  telle que  $\omega(p) \neq 0$ . Si  $\omega(p) = 0$  pour toute  $\omega \in \Omega^{1,0}(X)$ , alors  $L(K - p) = L(K)$ . Or  $L(K - D) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) \mid (\omega) \geq D\}$ . Or  $L(K) = \Omega^{1,0}(X)$  donc  $L(K - p) = \{\omega \in \Omega^{1,0} \mid \text{ord}_p(\omega) \geq 1\}$ , i.e.  $\omega(p) = 0$ . Par le théorème de Riemann-Roch,  $\ell(p) - \ell(K - p) = 1 - g + 1 = \ell(p) - g = 1 - g + 1$ , d'où  $\ell(p) = 2$ , impossible. ■

**Lemme**

Si  $X$  est une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 1$ . Si  $\phi_K$  n'est pas injective, alors  $X$  est hyperelliptique.

▷ Si  $\phi_K(p) = \phi_K(q)$  pour deux points distincts  $p, q$  de  $X$ , alors  $\omega_i(p) = \lambda \omega_i(q)$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Remarquons que  $\text{div}(\omega) \geq p \iff \text{div}(\omega) \geq p + q$ , i.e.  $L(K - p) - q = L(K - p)$ . Or, par le théorème de Riemann-Roch,  $\ell(p) - \ell(K - p) = 1 - g + 1$  mais  $\ell(p) = 1$ , car  $X \not\simeq \mathbb{CP}^1$ , d'où  $\ell(K - p) = g - 1$ . De plus, toujours par Riemann-Roch,  $\ell(p + q) - \ell(K - p - q) = 2 - g + 1$ . En substituant  $\ell(K - p) = \ell(K - p - q)$  par la remarque faite,  $\ell(p + q) = 2 - g + 1 + g - 1 = 2$ . Ainsi  $L(p + q) \ni F \in \mathcal{M}(X)$ , donc  $F$  a seulement deux pôles simples. Ainsi,  $F : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est un revêtement ramifié de degré 2, donc  $X$  est hyperelliptique. ■

**Proposition**

Si  $X$  n'est pas hyperelliptique, alors  $\varphi_K$  est un plongement.

On utilise ensuite la propriété démontrée dans la section sur l'espace projectif permettant de baisser la dimension.

**4.7.5.5 Relations bilinéaires de Riemann**

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . On note  $\Delta$  son polygone fondamental, dont les classes sont, si  $\pi_1(X)$  est présenté par  $2g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  et une relation  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

**Définition. (Base canonique d'homologie d'une surface)**

On suppose que  $\pi_1(X)$  est présenté par  $2g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  et une relation  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ .

Les classes  $[a_i], [b_i] \in H_1(X, \mathbb{Z})$  sont appelées une *base canonique d'homologie* de  $H_1(X, \mathbb{Z})$ .

**Définition. (Période)**

Soit  $\varphi \in \mathcal{E}^1(X, \mathbb{C})$ . On note

$$A_i(\varphi) = \int_{a_i} \varphi$$

une *a-période* et

$$B_i(\varphi) = \int_{b_i} \varphi$$

une *b-période*.

Le vecteur période est  $(\mathbb{A}_1(\varphi), \dots, \mathbb{A}_g(\varphi), B_1(\varphi), \dots, B_g(\varphi)) \in \mathbb{C}^{2g}$ .

### Proposition

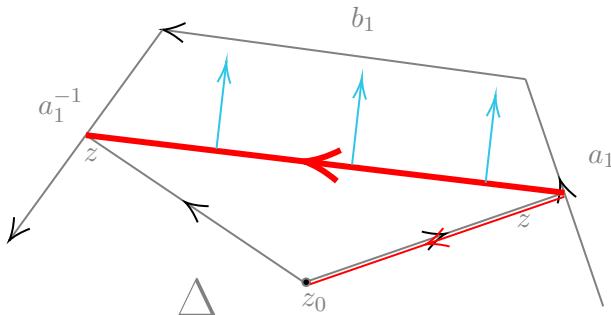
Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}^1(X, \mathbb{C})$  deux formes fermées. Alors

$$\int_X \varphi_1 \wedge \varphi_2 = P(\varphi_1) J^t P(\varphi_2)$$

$$\text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ D'après le théorème de Stokes,  $\int_{\Delta} \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \int_{\Delta} d(u\varphi_2)$  où  $u$  est défini par  $du = \varphi_1$ ; fixons  $z_0 \in \Delta$ , de sorte que  $u(z) = \int_{z_0}^z \varphi_1$  qui ne dépend pas du chemin d'intégration. Puisque  $d(u\varphi_2) = du \wedge \varphi_2 + ud\varphi_2$  et  $ud\varphi_2 = 0$ , on obtient  $\int_{\Delta} \varphi_1 \wedge \varphi_2 = \int_{\partial\Delta} u\varphi_2$  par le théorème de Stokes. De plus,  $\int_{\partial\Delta} u\varphi_2 = \sum_i (\int_{a_i} u\varphi_2 + \int_{b_i} u\varphi_2 - \int_{a_i} u\varphi_2 - \int_{b_i} u\varphi_2) = \sum_i (\int_{a_i} (u(z) - u(z'))\varphi_2 + \int_{b_i} (u(z) - u(z'))\varphi_2)$ .

Calculons ces différences. Par définition,  $u(z') = u(z) = \int_{z_0}^{z'} \varphi_1 - \int_{z_0}^z \varphi_1 = \int_z^{z'} \varphi_1 = \int_{b_i} \varphi_1$  par homotopie.



Pour conclure,  $\int_X \varphi_1 \wedge \varphi_2 = P(\varphi_1) J^t P(\varphi_2)$ . ■

*Remarque.* En observant la preuve précédent, on voit que  $\varphi_2$  n'a besoin d'être définie que sur un voisinage de  $\partial\Delta$ .

### Définition. (*Matrice période*)

Soit  $(\alpha_i)_{i \in [\![1,g]\!]}$  une base de l'espace des formes holomorphes sur  $X$  et  $([a_i], [b_i])_i$  une base canonique de l'homologie de  $X$ .

La *matrice période* de taille  $g \times 2g$ , est la matrice donnée grâce aux vecteurs périodes

$$\text{lignes : } \begin{pmatrix} P(\alpha_1) \\ \vdots \\ P(\alpha_g) \end{pmatrix}.$$

→ *Notation.* En notant  $P_i$  pour  $i \in [\![1,2g]\!]$  les vecteurs colonnes de la matrice période, on note  $\Lambda = \langle P_i, i \in [\![1,2g]\!] \rangle$  le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par les  $P_i$ .

**Proposition. (*Structure de  $\Lambda$* )**

$\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$  est un réseau.

▷ Ceci signifie que les  $P_i$  sont linéairement indépendants. On utilise le lemme donné dans la suite. ■

**Lemme**

Si  $\alpha \in \Omega^{1,0}(X, \mathbb{C})$  est une forme holomorphe telle que  $\int_{a_i} \alpha = \int_{b_i} \alpha = 0$  pour tous  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$ , alors  $\alpha = 0$ .

▷  $F(z) = \int_{z_0}^z \alpha$  où  $z_0 \in X$  est fixé est holomorphe sur  $X$ , donc  $F = 0$ , donc  $\alpha = 0$ . ■

**Définition. (*Variété jacobienne et fonction de Jacobi*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 1$ . Fixons une base canonique de l'homologie et une base de  $\Omega^{1,0}(X)$ .

1. La *variété jacobienne* sur  $X$  est le tore  $J(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ .
2. La *fonction jacobienne* ou *fonction de Jacobi*  $j_{z_0} : X \rightarrow J(X)$ , pour  $z_0 \in X$  fixé, à  $z$  fait correspondre  $\left[ \left( \int_{z_0}^z \alpha_1, \dots, \int_{z_0}^z \alpha_g \right) \right]$ . On appelle  $z_0$  le *point d'évaluation*.

**Remarques.**

1.  $j_{z_0} : X \rightarrow J(X)$  est un plongement.
2. Si le genre de  $X$  est 1,  $j_{z_0} : X \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  est un biholomorphisme.

Plus précisément,  $\alpha_1 = dz$  est une base de l'espaces des holomorphes, de périodes  $\int_0^\tau \alpha_1 = \tau$  et  $\int_0^1 \alpha_1 = 1$  et  $\Lambda = \{n.1 + m.\tau, n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ . Ainsi  $j_{z_0}$  réalise un homéomorphisme de  $X$  sur le tore qui se plonge dans  $\mathbb{CP}^N$ ; ainsi, on retrouve l'application canonique  $\varphi_K : X \rightarrow \mathbb{CP}^{g-1}$ .

**Théorème. (*Théorème des résidus sur une surface de Riemann*)**

Soit  $\varphi_1 \in \Omega^{1,0}(X)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{M}^1(X)$  une 1-forme méromorphe. Alors

$$2\pi i \text{Res}(u\varphi_2) = \sum_{i=1}^g (a_i(\varphi_1)b_i(\varphi_2) - b_i(\varphi_1)a_i(\varphi_2)).$$

▷ En effet,  $\varphi_2$  n'est pas singulière sur un voisinage de  $\partial\Delta$ . On a  $\int_X (\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \int_{\partial\Delta} (u\varphi_2)$  qui égale cette somme. Par le théorème de résidus connu, on trouve bien  $2\pi i \text{Res}(u\varphi_2)$ . ■

**Remarques.**

1. Si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Omega^{1,0}(X)$ ,  $\sum_{i=1}^g (a_i(\varphi_1)b_i(\varphi_2) - b_i(\varphi_1)a_i(\varphi_2)) = 0$ .

2.  $\int_X \varphi_1 \wedge \overline{\varphi_2} = \sum_{i=1}^g (a_i(\varphi_1)b_i(\overline{\varphi_2}) - b_i(\varphi_1)a_i(\overline{\varphi_2}))$ , d'où  $\varphi_2 = \varphi_1$ .

En particulier, pour  $\varphi_1 = \varphi_2$ , on trouve  $0 < i \int_X \varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} = i \sum_{i=1}^g (a_i(\varphi_1)b_i(\varphi_1) - b_i(\varphi_1)a_i(\varphi_1))$ . On rappelle que localement,  $\varphi = F(z)dz$ ,  $\overline{\varphi_1} = \overline{F_1(z)}d\bar{z}$ , d'où  $\varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} = -2i|F_1(z)|^2 dx dy$ .

**Théorème. (*Réduction de la matrice période*)**

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  de base d'homologie fixée. Alors il existe une base de  $\Omega^{1,0}(X)$  telle que la matrice période est de la forme  $(I_g, Z)$  où  $Z$  est symétrique et  $\text{Im}(Z) > 0$ .

▷ Remarquons que changer la base de  $\Omega$  via  $h \in M_{g \times g}$  change la matrice période  $\pi$  par  $\pi' = h\pi$ . On doit prouver que  $(\pi_{ij})_{1 \leq i,j \leq g}$ .

**Lemme**

Si  $\alpha \in \Omega^{1,0}(X)$  et  $\int_{a_i} \alpha = 0$  pour tout  $i$ , alors  $\alpha = 0$ .

▷ Ceci découle de la deuxième remarque donnée précédemment. ■

Posons une base de normalisée  $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, g \rrbracket}$ , les  $\alpha_i \in \Omega^{1,0}(X)$ , telle que  $\int_{a_i} \alpha_j = \delta_{i,j}$ . Alors  $0 = \int_X \alpha_i \wedge \alpha_j = \sum_k (a_k(\alpha_i)b_k(\alpha_j) - a_k(\alpha_j)b_k(\alpha_i))$  où  $a_k(\alpha_i) = \delta_{k,i}$  et  $a_k(\alpha_j) = \delta_{k,j}$ , d'où  $0 = b_i(\alpha_j) - b_j(\alpha_i)$ . En posant  $Z = (b_j(\alpha_i)) = \int_{b_j} \alpha_i$  qui est bien symétrique. ■

Une application pratique est donnée dans l'exercice suivant, qui permet de construire une forme méromorphe d'ordre fixé mais également de période fixée à la nulle.

**Exercice 24 (*Différentielles abéliennes normalisées de second type*)**

Il existe une unique forme méromorphe  $\omega_{z_0}^n$  avec un unique pôle en  $z_0$  tel qu'en coordonnées locales,  $\omega - \frac{dz}{z^n}$  est holomorphe et telle que  $\int_{a_i} \omega_{z_0}^n = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Découle rapidement du théorème précédent.

**Exercice 25** (*b-périodes des différentielles abéliennes normalisées de second type*)

Soit  $(\alpha_k)_k$  une base normalisée de  $\Omega^{1,0}(X)$ . Si  $\alpha_k(z) = F_k(z)dz$  en coordonnées locales centrées en  $z_0$ , alors  $\int_{b_k} \omega_{z_0}^n = 2\pi i \frac{F_k^{(n-k)}(z_0)}{(n-1)!}$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Découle de la forme de  $2\pi i \text{Res}(u\varphi_2)$ , pour  $\varphi_1 = \alpha_k$ ,  $u(z) = \int_{z_0}^z \alpha_k$ .

**4.7.5.6 Preuve du théorème de Riemann-Roch**

On montre le théorème de Riemann-Roch énoncé à la section sur-sur-précédente.

**Preuve.**

▷ On traite d'abord le cas où  $D = \sum_{i=1}^N l_i z_i$  avec les  $l_i \geq 0$ . On note encore  $L(D) = \{F \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(F) \geq -D\} \cup \{0\}$ . L'idée est d'observer que  $\partial = d : L(D) \rightarrow \mathcal{M}_0(X)$  où  $\mathcal{M}_0(X)$  est l'ensemble des formes méromorphes sans résidus, sans périodes et de pôles d'autre au plus  $l_i + 1$  en  $z_i$ . Puisque  $\text{Ker}(d) = \{F \mid dF = 0\} \simeq \mathbb{C}$ ,  $\dim(L(D)) = \dim(\mathcal{M}_0(D)) - 1$ . Définissons une fonction  $P_b$  de  $\mathbb{C}^{l_1+\dots+l_N} = \mathbb{C}^{\deg(D)} \rightarrow \mathbb{C}^g$ , avec  $\mathbb{C}^{\deg(D)} = \langle \omega_{z_i}^{n_i} \mid 2 \leq n_i \leq l_i + 1 \rangle \simeq \{\alpha \in \mathcal{M}^1(X) \mid \text{sans résidus, de pôles d'ordre au plus } l_i + 1 \text{ en } z_i\}$ , car  $\int_{b_k} \omega_{z_0}^n = 2\pi i \frac{F_k^{(n-k)}(z_0)}{(n-1)!}$  (et les  $a$ -périodes sont nulles). Soit  $\mathbb{C}^{\deg(D)} \ni \eta : (\int_{b_1} \eta, \dots, \int_{b_g} \eta)$ . Alors  $\dim(\mathcal{M}_0(D)) = \dim(\text{Ker}(P_b))$ . De plus,  $\text{Ker}(P_b) = \{(c_{2,1}, \dots, c_{l_1+2,1}, \dots, \dots, c_{l_N+1,N}) \in \mathbb{C}^{\deg(D)} \mid \int_{b_k} \sum_{i=1}^N \sum_{n=2}^{l_i+2} c_{n,i} \omega_{z_i}^n = 0 \quad \forall k \in [\![1,g]\!]\}$ . Dans le cas particulier  $N = 1$ , pour un point  $z_1$ ,  $D = lz_1$ , ce noyau s'écrit  $\{(c_2, \dots, c_{l+1}) \mid \int_{b_k} \sum c_n \omega_{z_1}^n = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n\}$ . On peut calculer le noyau de la transposée :  $\text{Ker}(P_b^t) = \{(a_1, \dots, a_g) \mid \sum a_k \frac{F_k^{(n-2)}(z_i)}{(n-1)!} = 0 \quad \forall n \in [\![2,l+1]\!]\} = L(K - D) \ni \alpha \in \mathcal{M}^1(X) \text{ où } \text{div}(\alpha) \geq D \text{ et } \text{ord}_{z_1} \alpha \geq l$ , ce qui signifie exactement  $\sum_{k=1}^g a_k F_k^{(n-2)}(z_1) = 0$  pour  $2 \leq n \leq l+1$ , avec  $\alpha = \sum a_k F_k(z)dz$  localement,  $\alpha_k$  base normalisée des formes holomorphes. Ceci prouve le théorème. ■

**4.7.5.7 Théorème d'Abel-Jacobi****4.7.5.8 Cohomologie des faisceaux sur une SR**



# Appendice

