Feuille d'exercices 3
Analyse

☆☆☆☆☆ **Exercice 1** (Des maths en voiture). On fait le trajet de Magnac-Bourg à Limoges, soit environ 30 kilomètres. Calculer combien de temps l'on gagne à rouler à 130 à l'heure au lieu de 120.

Suites numériques

☆☆☆☆☆ **Exercice 2** (Une formule utile). Soit u une suite arithmétique de raison r. Montrer que pour tous entiers naturels k,p, $u_p = u_k + (p-k)r$. Énoncer une formule similaire pour une suite géométrique.

☆☆☆☆☆ **Exercice 3** (Monotonie des suites à raison). Discuter de la monotonie des suites arithmétiques et géométriques.

☆☆☆☆☆ **Exercice 4** (Suites arithmético-géométriques). Soit u une suite de premier terme nul et définie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = au_n + b$ où a,b sont deux constantes réelles avec $a,b > 0$. Donner le sens de variation de la suite u.

☆☆☆☆☆ **Exercice 5** (Suite de Fibonacci). On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Justifier sans formaliser que F est bien définie.
2. Donner le signe des termes de F.
3. Quel est le sens de variation de F ?
4. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $F_n \geqslant n$.
5. En déduire par simple comparaison que la suite (F_n) tend vers $+\infty$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 6** (Somme des premiers termes d'une suite géométrique). Une bulle de savon initialement de la taille d'une bille d'un centimètre de diamètre double de volume toutes les minutes parce que je la gonfle avec une paille. Néanmoins, à chaque minute, à cause de déperditions tierces, je dois insuffler le volume identique à celui obtenu en air pour obtenir ce résultat. Au bout d'une heure, combien de litres d'air aurai-je expiré de mes poumons ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 7** (Utilisation d'une suite auxiliaire). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.

1. Calculer u_3.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

3. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et en déduire v_n en fonction de n.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

Limites

☆☆☆☆☆ **Exercice 8** (Calculs de limites). Donner le comportement asymptotique (*i.e.* la limite si la suite converge, sinon, caractériser la divergence : vers un infini ou « sans limite ») des suites suivantes :

1. $u_n = n^2 + 1$;
2. $u_n = -n + 3$;
3. $u_n = \frac{1}{n}$;
4. $u_n = \frac{-1}{n}$;
5. $u_n = \pi - \frac{1}{n}$;
6. $u_n = \sqrt{n}$;
7. $u_n = 2^n$;
8. $u_n = 2^n/n$;
9. $u_n = (\frac{1}{5})^n$;
10. $u_n = \frac{n}{n+1}$.
11. $u_n = e^n$;
12. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$;
13. $u_n = (-1)^n$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 9** (Modélisation des rebonds d'une balle). Une balle rebondit sur le sol en avançant sur une ligne droite. On suppose qu'à chaque rebond, l'énergie de la balle est réduite de moitié et que la portée est diminuée d'un tiers.

1. Montrer que la balle s'approche indéfiniment du sol.
2. Si l'on suppose seulement qu'à chaque étape, la portée de la balle diminue, peut-on arriver à la même conclusion ? Donner un contre-exemple numérique.

☆☆☆☆☆ **Exercice 10** (Loi de Newton). On réchauffe une barre de cuivre, initialement placée dans un réfrigérateur à $T_0 = 5°C$, dans une pièce dont la température ambiante est $T_\infty = 20°C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la température de la barre en degrés Celsius au bout de la n-ième minute. Selon les lois de la thermique, $T_{n+1} - T_n = k(T_n - T_\infty)$ où k est un coefficient dépendant uniquement du cuivre, avec ici $k = -0{,}2$.

1. Montrer que (T_n) est arithmético-géométrique.

2. Calculer T_{25} grâce au logiciel algorithmique de la calculatrice autorisée au baccalauréat.
3. À l'aide d'un graphe, calculer la limite de (T_n).

Exercice 11 (Une suite de variables aléatoires). Donner la limite de la suite des espérances $(E(X_n))_{n\in Ns}$ où pour tout $n \neq 0$, la suite X_n suit une loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(\frac{1}{n^2},n)$.

Exercice 12 (Limites de fonctions). Avec une définition intuitive, quelles sont les limites en $+\infty$, $-\infty$ de la fonction inverse ? En 0 par les valeurs supérieures, en 0 par les valeurs inférieures ? Expliquer pour l'inverse de zéro n'est pas ∞.

Fonctions de la variable réelle

Exercice 13 (Des maths en tête). En faisant tous les calculs de tête, décrire les variations du trinôme : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$.

Exercice 14 (Comprendre l'intérêt pratique du sens de variation).

1. Montrer que pour tout réel positif x, $\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$.
2. Montrer que pour tout réel positif x, $e^{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}} \leqslant e^{\frac{1}{\sqrt{3x+2}}}$.
3. Montrer que pour tout réel $x \in [-1,0]$, $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \leqslant \frac{1}{3}(x+1)^3 - (x+1)^2 + x + 1$.

Exercice 15 (Sans se salir les mains). Montrer que la fonction $x \mapsto 2x^3 + 1$ est croissante.

Exercice 16 (Opérations sur les fonctions croissantes). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient u,v deux fonctions définies sur I et soit λ un nombre réel fixé

1. Montrer que $u + \lambda$ a les mêmes variations que u sur I.
2. Montrer que si u et v sont croissante sur I, alors $u + v$ est croissante sur I.
3. On suppose que u et v sont croissantes sur I. Montrer que si u et v sont positives sur I, alors uv est croissante sur I. Que dire si u est positive et v négative sur I ? Que peut-on dire dans le cas général ?
4. Montrer que si u ne s'annule pas, alors $\frac{1}{u}$ a des variations contraires à celles de u. Que peut-on dire si l'on suppose seulement que u est non nulle ?

Exercice 17 (Lien suite-fonction). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. On définit explicitement la suite u par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante également. Application : montrer que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 18 (Signe d'une homographie). Étudier le signe de $x \mapsto \frac{x-2}{-3x+8}$.

Exercice 19. Étudier, sans dériver, les variations de $x \mapsto \sqrt{\sqrt{x}}$.

Exercice 20 (Bijections réciproques et datation Rb-St). On admet que pour tout réel $y > 0$, l'équation $y = e^x$ admet une unique solution x et l'on note $x = f(y)$. La fonction f définie sur

$\mathbb{R}_+^*$ vérifie donc $e^{f(y)} = y$ pour tout $y > 0$. On admet également que pour tout réel x, $f(e^x) = x$. On dit que f est la bijection réciproque de exp sur $\mathbb{R}$, et que exp est la bijection réciproque de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que la fonction carré admet une bijection réciproque sur $\mathbb{R}_+$. Quelle est cette fonction ?

2. Montrer que la fonction inverse est sa propre bijection réciproque sur $\mathbb{R}^*$.

3. La fonction signe (qui vaut -1 sur $\mathbb{R}_-^*$, 0 en 0 et 1 en $\mathbb{R}_+^*$), admet-elle une bijection réciproque sur $\mathbb{R}$?

4. La fonction $x \mapsto x^3 - x$ admet-elle une bijection réciproque sur $\mathbb{R}$?

L'existence d'une bijection réciproque pour la fonction exponentielle provient de la continuité de son graphe et de sa stricte monotonie, et d'un théorème qui sera vu en Terminale.
On s'intéresse maintenant à la technique expérimentale de datation par Rubidium-Strontium. Lors de la formation d'une roche telle qu'un granite, du rubidium et du strontium sont intégrés dans les réseaux cristallins de certains minéraux (micas, feldspaths, par exemple). Chacun de ces éléments se présente sous plusieurs formes isotopiques : ${}^{85}\text{Rb}$ et ${}^{87}\text{Rb}$ d'une part, ${}^{88}\text{Sr}$, ${}^{87}\text{Sr}$, ${}^{86}\text{Sr}$ et ${}^{84}\text{Sr}$ d'autre part. L'isotope ${}^{87}\text{Rb}$, radioactif, se désintègre en donnant ${}^{87}\text{Sr}$ et un électron. Le couple Rb/Sr permet ainsi de dater des périodes supérieures à cent millions d'années. Cependant, on ne connaît pas la quantité initiale de ces éléments dans les minéraux de la roche à la fermeture du système, que ce soit celle de l'élément-père ou celle de l'élément-fils qui n'est a priori pas nulle au départ.
En notant P par quantité de ${}^{87}\text{Rb}$, F la quantité de ${}^{87}\text{Sr}$ et F_0 celle de ${}^{87}\text{Sr}_0$ c'est-à-dire au temps $t = 0$, on dispose des lois (dite de *désintégration radioactive*) $P(t) = P_0 e^{\lambda t)}$ et $F = F_0 + F'$ où $F' = P_0 - P$ soit $F' = P.(e^{\lambda t} - 1)$. On a ainsi l'équation ${}^{87}\text{Sr} = {}^{87}\text{Sr}_0 + {}^{87}\text{Rb}(e^{\lambda t} - 1)$. On a une seule équation pour les deux inconnues ${}^{87}\text{Sr}_0$ et t.
Pour la résoudre, il faut comprendre que deux minéraux ou deux roches cristallisant à partir d'un même magma intégreront dans leur réseau cristallin du strontium avec un rapport isotopique ${}^{87}\text{Sr}/{}^{86}\text{Sr}$ identique à celui du magma d'origine. On dit que ces échantillons sont cogénétiques. Et même si certains minéraux intégreront plus de strontium que d'autres (suivant la compatibilité de l'élément avec le réseau cristallin en question), tous auront le même rapport initial ${}^{87}\text{Sr}_0/{}^{86}\text{Sr}_0$. Par ailleurs, sachant que 86Sr n'est ni radioactif ni radiogénique, la quantité de cet isotope ne varie pas au cours du temps dans un système clos et ${}^{86}\text{Sr}_0 = {}^{86}\text{Sr}$. On peut donc l'utiliser pour déterminer un rapport comme dans le cas du carbone 14.
Si on divise toute l'équation par le nombre de l'isotope ${}^{86}\text{Sr}$, l'équation devient donc :

$$\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}} = \frac{{}^{87}\text{Sr}_0}{{}^{86}\text{Sr}} + \frac{{}^{87}\text{Rb}}{{}^{86}\text{Sr}}(e^{\lambda t} - 1).$$

C'est une équation de droite de la forme $y = ax + b$ où $a = e^{\lambda t} - 1$ et $b = \frac{{}^{87}\text{Sr}_0}{{}^{86}\text{Sr}}$. Les quantités actuelles $\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}}$ et $\frac{{}^{87}\text{Rb}}{{}^{86}\text{Sr}}$ sont mesurées par spectrométrie de masse. On réalise plusieurs mesures, sur plusieurs échantillons de minéraux pour avoir suffisamment de couples de valeurs pour tracer un nuage de points et obtenir une droite de régression isochrone (*i.e.* le temps t est fixé). Sur ce graphe, on peut déterminer la pente a en calculant le taux d'accroissement entre deux valeurs d'abscisses lointaines ainsi que la constante b qui n'est autre que l'ordonnée à l'origine.

5. Montrer que le temps t écoulé depuis la date $t = 0$, et donc l'âge de la roche, est donné par la formule $t = \frac{f(a+1)}{\lambda}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 21** (Pour être plus malin que les autres)**.** Dresser le tableau de variations de $f : x \mapsto x^2 - 4$.

Dérivation

☆☆☆☆☆ **Exercice 22** (Rappels de cours)**.**

1. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle en un point de cet intervalle.

2. Quel lien fait-on naturellement avec la tangente à sa courbe ? Donner une équation de la tangente à un point $(x_0, f(x_0))$ de la courbe d'une fonction f suffisamment lisse en x_0 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

3. Expliquer pourquoi les fonctions nulles, constantes, affines... sont dérivables et exprimer leurs dérivées.

4. Que dire du nombre dérivé de la fonction racine carrée en zéro ? Expliciter analytiquement et graphiquement ce fait.

☆☆☆☆☆ **Exercice 23** (Existence de points anguleux)**.** Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 24** (La plus grosse de toutes les peaux de banane)**.** La fonction inverse est-elle croissante sur $\mathbb{R}^*$?

☆☆☆☆☆ **Exercice 25** (Dérivation d'une fonction puissance)**.** En dérivant la fonction carré, puis la fonction cube, etc., puis en dérivant la fonction inverse en l'exprimant sous la forme $\frac{1}{x} = x^{-1}$, ou encore la fonction racine carrée en l'exprimant sous la forme $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, conjecturer une formule donnant la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}^*$, respectivement $\mathbb{R}_+^*$) où n est un entier naturel (resp. un entier relatif, resp. un réel quelconque).

☆☆☆☆☆ **Exercice 26** (Calcul de dérivées)**.** Donner le domaine de définition $\mathscr{D}$, de dérivabilité $\mathscr{D}'$ et la dérivée sur $\mathscr{D}'$ des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 4x^3 - 3x^2 + x - 7$;

2. $x \mapsto \frac{1}{5-2x}$;

3. $x \mapsto \frac{4x-1}{7x+2}$;

4. $x \mapsto \frac{x}{x^2-3}$;

5. $x \mapsto 12\sqrt{x}$;

6. $x \mapsto x\sqrt{x}$;

7. $x \mapsto \frac{-1}{x} + \sqrt{2x}$;
8. $x \mapsto (2x-5)^4$;
9. $x \mapsto \sqrt{4x^2-3}$;
10. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$;
11. $x \mapsto \left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^3$;
12. $x \mapsto e^{2x+1}$;
13. $x \mapsto e^{x^2-1}$;
14. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$;
15. $x \mapsto e^{\frac{1}{2x}}$.

★★☆☆☆ **Exercice 27.** Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{5}{x^2-1}$.

★★☆☆☆ **Exercice 28** (Dérivée seconde et fonctions trigonométriques)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable sur I et que la fonction f' est également dérivable sur I. On dit que f est *deux fois dérivable* sur I et on note $f'' = (f')'$ la *dérivée seconde* de f.

1. Les fonctions polynômes sont-elles deux fois dérivables ?
2. Calculer la dérivée seconde de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.
3. Quelle est la dérivée seconde de la fonction exponentielle ? Et la dérivée troisième (dérivée de la dérivée seconde) ?

On admet que les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto cos(x)$ sont toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

4. Calculer les dérivées secondes des fonctions sinus et cosinus.
5. En déduire que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables « une infinité de fois » (rédiger proprement !).
6. Jusqu'à quel rang faut-il dériver la fonction sinus pour obtenir exactement la fonction sinus à nouveau ?

★★★☆☆ **Exercice 29.** Démontrer que dans le cas d'un polynôme dont le plus petit monôme est de degré plus grand que 2, la tangente au point d'abscisse nulle est horizontale.

★★★☆☆ **Exercice 30** (Méthode du champ de direction)**.** Trouver l'équation de la parabole passant par le point (2,13) du repère canonique du plan et admettant la droite d'équation $y = 3x - 1$ comme tangente en (0, - 1).

★★☆☆☆ **Exercice 31** (Positions relatives d'une courbe et de sa tangente)**.** Sans utiliser la notion de convexité, situer la tangente en -8 à $y = x^3 + 13x^2 - 1$ par rapport à cette courbe.

★★★★★ **Exercice 32** (Règle de dérivation des fonctions composées)**.** On souhaite démontrer, sous des hypothèses plus commodes, que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors en posant $h(x) = f(g(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $h'(x) = g'(x)f'(g(x))$.

1. Exprimer le taux d'accroissement entre les points a et b de h en fonction de a,b,f,g.

2. On suppose que $g(a) \neq g(b)$. Exprimer ce même taux d'accroissement en faisant apparaître sous forme d'un produit de facteurs le taux d'accroissement de g entre a et b.
3. Conclure.

On admet que plus généralement, si $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow K$ où I,J,K sont des intervalles de $\mathbb{R}$, si f est dérivable en $x \in I$ et g est dérivable en $f(x)$, alors h définie comme précédemment est dérivable en x.

On propose quelques applications.

4. Dériver $x \mapsto (x^4 + 3x^2 + 15)^6$.
5. Dériver $x \mapsto \exp()$.
6. Dériver $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 33** (Unicité de la fonction exponentielle). Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

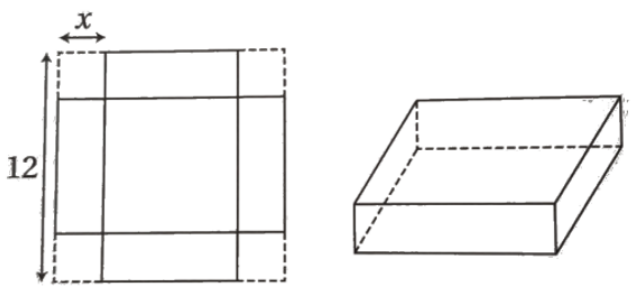
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$.
2. Montrer que f ne s'annule pas.s
3. En déduire que si g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, alors $f = g$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 34.** La fonction cube admet-elle un extremum en zéro ? Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle admette un extremum local.

☆☆☆☆☆ **Exercice 35** (Un problème d'optimisation).

1. Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

Soit un carré de côté 12. On découpe dans les quatre angles des carrés de côté x pour construire le patron d'un pavé droit sans couvercle, comme représenté ci-dessous.



2. Quelles sont les valeurs éventuellement prises par x ?
3. Montrer qu'il existe une valeur de x qui rende le volume du pavé maximal.

☆☆☆☆☆ **Exercice 36.** Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 4$. Étudier le signe de g.

   Indication Calculer $g(-1)$.

2. Dresser la table de variations de f.

3. Déterminer trois réels a,b,c tels que $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{D}$ où $\mathcal{D} : y = ax + b$.

5. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à $y = x + 3$.

6. Tracer $\mathcal{C}$,Dj et les tangentes obtenues dans les questions précédentes.