# Opérades

## 1 Notions introductives

### 1.1 Définitions et exemples

**Définition.** *(Catégorie monoïdale symétrique)* Catégorie $\mathcal{M}$ munie d'un bifoncteur produit tensoriel $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, d'une unité $I \in \mathcal{M}$, d'un isomorphisme naturel $\alpha$ dit associateur de $(-\otimes-)\otimes-$ vers $-\otimes(-\otimes-)$ **Exemples.** Ens munie du produit cartésien, Top munie du produit cartésien et de la topologie produit, $R$-Mod munie du produit tensoriel $\otimes_R$, $dg$-$R$-Mod de même, $Ch(R)$ munie du produit tensoriel de complexes de chaînes.
**Définition.** *(Opérade)* Un opérade $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{M}$ est une collection d'objets $(\mathcal{P}(r))_{r\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ dont les éléments $p \in \mathcal{P}(r)$ représentent des opérations $r$-aire à une seule sortie. De plus, on a des produits... Les opérades se représentent plutôt bien avec des arbres.
**Fait.** Un opérade se définit aussi par présentation par $\mathcal{P} = \mathcal{F}(M)/(R)$ où $\mathcal{F}$ est l'opérade libre qui collecte toutes les compositions formelles d'opérations génératrices, $M$ la collection qui collecte les opérations génératrices et $R$ l'idéal généré par les relations génératrices entre les composées de relations génératrices.
**Exemples.**

1. Ass $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\mu(x_1,x_2) \oplus \mathbb{K}\mu(x_2,x_1))/(\mu_1 \circ_1 \mu - \mu \circ_2 \mu)$ (*i.e.* $(\mu(\mu(x_1,x_2),x_3)) - \mu(x_1,\mu(x_2,x_3))$ où $\mu$ est le produit. Alors $\mathrm{Ass}(r) = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathfrak{S}_r} \mathbb{K}X_{i_1}\ldots X_{i_r}$ (les variables ne commutant pas !).
2. Com $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\mu(x_1,x_2))/(\mu_1 \circ_1 \mu - \mu \circ_2 \mu)$. Alors $\mathrm{Com}(r) = \mathbb{K}X_1\ldots X_r$.
3. Lie $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\lambda(x_1,x_2))/(\lambda(\lambda(x_1,x_2),x_3) - \lambda(\lambda(x_1,x_3),x_2) - \lambda(x_1,\lambda(x_2,x_3)))$ (*i.e.* $\lambda \circ_1 \lambda - (23).\lambda \circ_1 \lambda - \lambda \circ_2 \lambda$) où $\lambda$ est le crochet. Alors $\mathrm{Lie}(r) = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathfrak{S}_r, i_1=1} \mathbb{K}[\ldots[X_{i_1}X_{i_2}]X_{i_3}]\ldots X_{i_r}]$ les polynôme de Lie à $r$ variables de chaque degré relatif 1.

**Définition.** L'*opérade des $n$-disques/cubes* est donné par $C_n(r) \in$ Top l'espace dont les éléments sont les $r$-tuples $(c_1,\ldots,c_r)$ de plongements rectilignes qui ne se reocupent pas de petits $n$-cubes $c_i : I^n \hookrightarrow I^n, (t_1,\ldots,t_n) \mapsto (a_1,\ldots,a_n) + (\lambda t_1,\ldots,\lambda t_n)$. Le produit de composition est donné par $C_n(k) \times C_n(l) \to C_n(k+l)$.
Un $E_n$-*opérade* dans Top est un opérade homotopiquement équivalent à $C_n$. L'idée est que $\underline{c} \in C_n(r)$ donne une oépration $\mu_{\underline{c}} : \Omega^n X \times \Omega^n X \to \Omega^n X$.
**Théorème.** *(May-Boardman-Vogt)* Si $Y \in \mathrm{Top}_*$ est connexe et $C_n \circlearrowright Y$, il existe $X \in \mathrm{Top}_*$ tel que $Y \sim \Omega^n X$.
**Définition.** *(Calcul des plongements de Goodwillie-Weiss)* $\mathrm{Plong}_c(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.
**Théorème.** *(Boavida-Weiss)* $\overline{\mathrm{Plong}_c}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \sim \Omega^{m-1}\mathrm{Hom}(E_m,E_n)$ pour $n-m \geqslant 3$. D'où une description combinatoire de $\mathrm{Hom}(E_m,E_n)$.