# RÉVISIONS EN CALCUL

## I. Les ensembles de nombres

On se permet de faire la différence entre divers types de nombres : les nombres entiers, les nombres rationnels, les nombres irrationnels. On les regroupe dans des catégories appelés *ensembles de nombres.* On note les ensembles par des grandes lettres, par exemple $E$, et si l'on connaît les éléments de $E$, on le décrit de la manière suivante :

$$E = \{ x_1, x_2, x_3 \dots \}$$

où les nombres $x_1, x_2, x_3$, etc., sont les éléments de $E$. Cette manière de définir l'ensemble $E$ est appelée **définition par extension**.

Si, par contre, on connaît une propriété qui permet de caractériser les éléments de $E$, on utilise une **définition par compréhension**. Par exemple :

$E = \{ n \mid n\ est\ un\ entier\ se\ terminant\ par\ un\ 0, un\ 2, un\ 4, un\ 6\ ou\ un\ 8\}$

est la définition en compréhension de l'ensemble des entiers naturels pairs.

**Définition.** *(L'appartenance)*
On dit qu'un nombre $x$ appartient à l'ensemble $E$, si $E$ contient $x$ ou encore si $x$ est un élément de $E$. On note : $x \in E$.

**Définition.** *(L'inclusion)*
On dit qu'un ensemble $E$ est inclus dans un ensemble $G$ si tout élément de $E$ est en particulier un élément de $G$. On note : $E \subset G$.

### A. Les nombres entiers naturels

**Définition.** *(Nombre entier naturel)*
Les nombres entiers naturels sont les nombres entiers de la vie de tous les jours : 0,1,2,3,4 … jusqu'à l'infini. Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$. On a donc :

$$\mathbb{N} = \{0\,; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 \dots\}$$

C'est une définition en extension.

### B. Les nombres entiers relatifs

**Définition.** *(Nombre entier ou nombre entier relatif)*
Les nombres entiers relatifs sont les nombres entiers de la vie de tous les jours : 0,1,2,3,4 … jusqu'à l'infini, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{N}$, auxquels on ajoute leurs opposés : $-1, -2, -3, -4 \dots$ jusqu'à l'infini négatif. On le note $\mathbb{Z}$. On a donc :

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

où le symbole $\cup$ désigne la réunion de deux ensembles.

## C. Les nombres décimaux

**Définition.** *(Nombre décimal)*
Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent de façon que la suite de leurs décimales soit finie. Par exemple, 5,45789 est décimal, mais 0,3333333333... n'est pas décimal. Il se trouve que les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent comme le rapport d'un entier relatif sur une puissance de dix. On écrit :

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{k}{10^n} \middle| k \in \mathbb{Z} \, et \, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

En effet, prenons l'exemple de 5,45789. On compte le nombre de chiffres après la virgule : il y en a 5. Alors on peut écrire : $5{,}45789 = \frac{545789}{10^5}$.

## D. Les nombres rationnels, irrationnels et réels

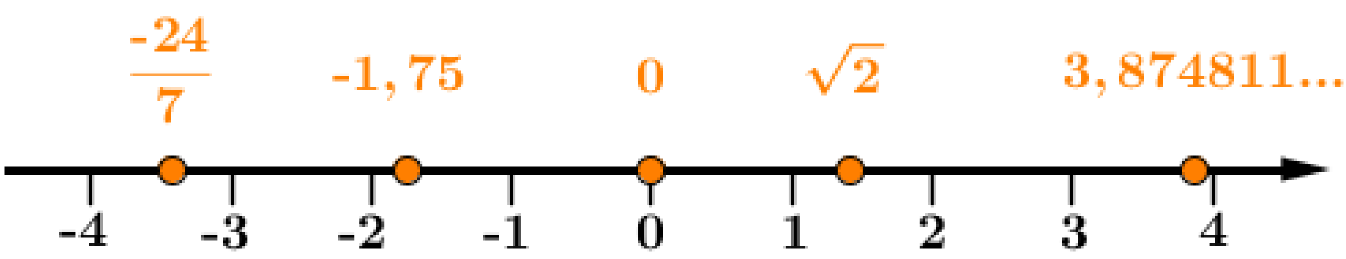
**Définition.** *(Nombre rationnel)*
Les nombres rationnels sont les nombres qui s'écrivent comme le rapport de deux entiers.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z} \, et \, q \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

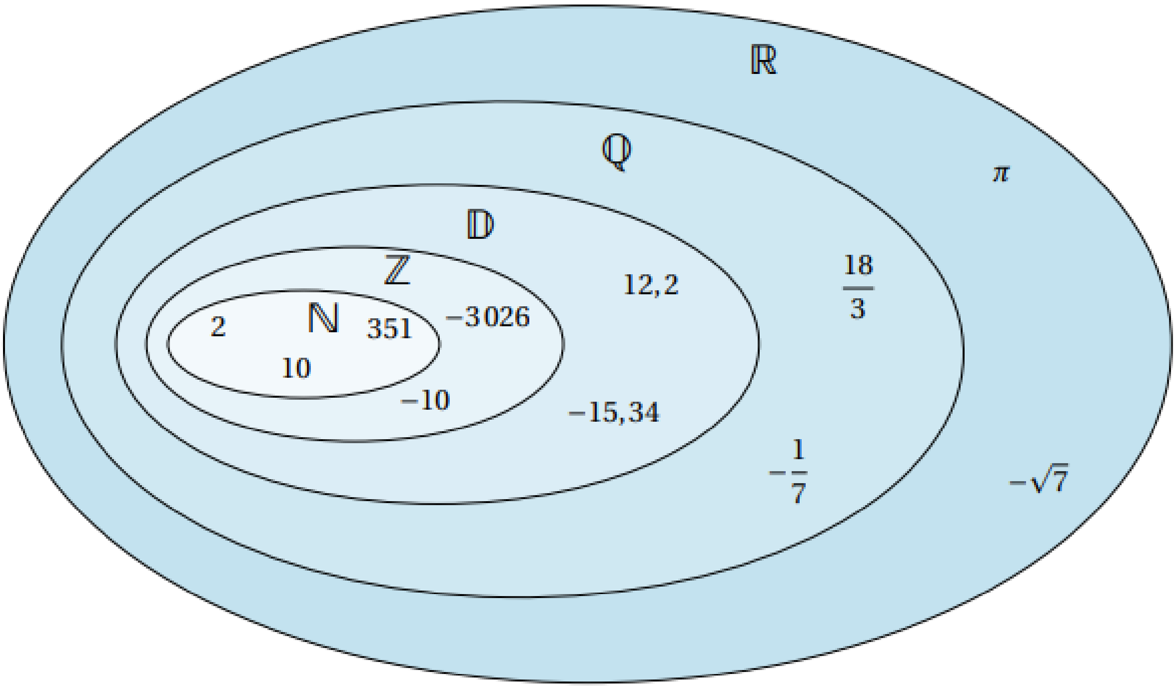
**Remarque.** Si l'on veut enlever zéro dans un ensemble de nombre, on y rajoute une étoile. Par exemple : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \ldots\}$

**Définition.** *(Nombre irrationnel)*
Les nombres irrationnels sont tous les nombres qui ne sont pas rationnels. En pratique, on en connaît beaucoup moins que les nombres rationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ et $\pi$ sont des nombres irrationnels. Il n'y a pas de notation spécifique pour cet ensemble de nombre.

**Définition.** *(Nombre réel)*
Les nombres réels sont les nombres rationnels ou irrationnels, c'est-à-dire tous les nombres que l'on connaît. On le note $\mathbb{R}$. Souvent, on le représente comme une droite, avec 0 au milieu, les nombres positifs à droite et les nombres négatifs à gauche.



Les ensembles de nombre sont parfois inclus les uns dans les autres : par exemple, tout entier naturel est en particulier en entier relatif, ce qui veut dire que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. En fait, on a même : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.




## II. Calcul littéral

### A. Les développements par distributivité

$$a(b+c) = ab + ac$$
$$(a+b)c = ac + bc$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

### B. Les règles sur les fractions

1. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. **(On réduit au même dénominateur !)**

3. $Si\ a \neq 0,\ \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$.

# III. RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS

Une équation est une égalité dont un des symboles, souvent noté $x$ si c'est un réel quelconque, ou $n$ si c'est un entier naturel, est inconnue. Résoudre l'équation signifie déterminer les valeurs de l'inconnue telles que l'égalité soit vraie, ce que l'on fait souvent en isolant $x$ d'un côté de l'équation.

## A. Les règles générales sur les équations

1. On peut ajouter ou soustraite un même nombre des deux côtés de l'équation, et les deux égalités seront équivalentes. Par exemple :

$3x + 2 = 5 \iff 3x = 3$, en soustrayant 2 de chaque côté.

2. On peut multiplier par un même nombre **différent de 0** ou diviser par un même nombre **différent de 0** et les deux égalités seront équivalentes. Par exemple :

$3x = 3 \iff x = 1$, divisant par $3 \neq 0$ de chaque côté.

3. Si aucun des membres n'est égal à 0, on peut prendre l'inverse :

$$x = 5 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{5}.$$

## B. Les équations du premier degré

Ce sont celles où $x$ n'apparaît que à la puissance 1 (il n'y a pas de $x^2$ ni de $\sqrt{x}$). Pour les résoudre, il suffit d'appliquer les règles précédentes.

## C. Les équations du second degré

Ce sont celles où $x$ n'apparaît que à la puissance 1 ou à la puissance 2. Pour résoudre une équation du second degré :

1. On écrit l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $x$ est l'inconnue, $a, b, c$ des constantes, en utilisant les règles sur les équations. a est différent de 0, car sinon l'équation serait du premier degré.
2. On calcule le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>1^er^ cas :</u> si le discriminant est strictement négatif, alors l'équation n'a pas de solutions.

<u>2^e^ cas :</u> si le discriminant est nul, alors l'équation a un unique solution qui est $-\frac{b}{2a}$.

<u>3^e^ cas :</u> si le discriminant est strictement positif, alors l'équation a pour solutions les deux nombres : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

## D. Les règles générales sur les inéquations

1. On peut ajouter ou soustraite un même nombre des deux côtés de l'équation, et les deux égalités seront équivalentes. Par exemple :

$3x + 2 \leq 5 \iff 3x \leq 3$, en soustrayant 2 de chaque côté.

2. On peut multiplier par un même nombre **différent de 0 et positif** ou diviser par un même nombre **différent de 0 et positif** et les deux égalités seront équivalentes. Par exemple :

$3x \leq 3 \iff x \leq 1$, divisant par $3 > 0$ de chaque côté.

**Attention !** C'est faux si le nombre est négatif. Par exemple, $1 \leq 2$, mais en multipliant par $-1$, on obtient $-1 \leq -2$, ce qui est faux !

3. Si l'on multiplie par un nombre **différent de 0 et négatif**, alors l'inégalité est inversée. Par exemple :

$-3x \leq -3 \iff 3 \leq 3x$, en multipliant par $-1 < 0$ de chaque côté.

4. Si aucun des membres n'est égal à 0, qu'ils ont tous les deux le même signe, on peut prendre l'inverse, mais il faut aussi inverser l'inégalité :

$$0 < x \leq 5 \iff 0 < \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x}.$$

**Attention !** C'est faux si les deux nombres ne sont pas de même signe. Par exemple, $-3 \leq 2$, mais on n'a pas $\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3}$ !