

Théorie générale des équations différentielles

Définitions Une équation différentielle est la donnée d'un **intervalle de définition** I , d'une fonction p fois dérivable, l'**ordre**, sur I notée y dite **inconnue** et d'une fonction dite **dynamique** ou **équation différentielle** $F : I \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($p + 1$) fois non indépendante de la dernière variable (parfois, F n'est pas définie partout). Une inconnue pour un même reste est une **solution** si $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(p)}(t)) = 0$ pour tout $t \in J$ où J est un sous-intervalle de I dit **intervalle de vie** de la solution (parfois, par abus, *de définition*).

Si $m = 1$, l'équation est **scalaire**. Si $m > 1$, l'équation différentielle est dite **système différentiel** de **taille** m .

Une **solution générale** est un paramétrage de l'ensemble des solutions. Une **solution particulière** ou **courbe intégrale** est un élément de la solution générale.

Elle est dite **normalisée** si l'on peut écrire $y^p(t)$ en fonction φ des autres dérivées de y et obtenir une équation équivalente (ce n'est pas toujours le cas). Elle est dite **autonome** si elle est normalisée et cette forme est de plus indépendante de la première variable.

Une équation est **linéaire** si la relation entre les dérivées de y et y est linéaire pour tout t fixé. La variable t peut intervenir à tout niveau, sans aucune condition de régularité. Elle vérifie le **principe de superposition**.

Méthode de réduction de l'ordre Toute équation différentielle d'ordre n peut être ramenée par changement de variable à une équation différentielle d'ordre n .

Maximalité Une solution (*i. e.* une fonction régulière, vérifiant l'équation par F et un intervalle de vie) est maximale si elle n'admet aucun

prolongement strict, au sens de l'intervalle de vie. Une solution est **globale** si son intervalle de vie est I .

Théorème (Zorn) : Toute équation différentielle **solvable** (= qui admet au moins une solution) admet une solution maximale.

Corollaire : **résoudre une équation différentielle** revient à déterminer ses solutions maximales.

Orbite Une **orbite** ou **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe paramétrée définie par une solution. Elles sont dites **maximales** si la solution choisie l'est. Le **portrait de phase** est la représentation des orbites maximales dans \mathbb{R}^m dit alors **espace des phases**. Le sens de parcours peut être indiqué par des flèches (si le temps est représenté, on parle de **portrait élargi**). Une orbite peut être réduite à un point. On peut y observer **attracteur**, **répulseur** ou **cycle limite**. Un **point d'équilibre** est une solution globale constante de la dynamique.

Intégrale première du mouvement C'est une fonction non constante η constante sur chaque solution. C'est une **préservation d'une quantité**. L'**ensemble de niveau** associé à η en λ est $\Gamma_\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^m, \eta(t, Y(t)) = \lambda \forall t \in I\}$. Étant donnée une intégrale première, toute orbite est incluse dans un ensemble de niveau.

Propriété : Pour le système $\begin{cases} x' = \varphi_1(x, y) \\ y' = \varphi_2(x, y) \end{cases}$, une intégrale première est solution de l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial \eta}{\partial x} \varphi_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \varphi_2 = 0$.

Champs de direction La représentation en presque chaque point (t, y) d'un treillis rectangulaire un vecteur de pente $\varphi(t, y)$ (cas scalaire) ou dans l'espace des phases \mathbb{R}^2 du champ de vecteur $\varphi(x, y)$ (cas système 2×2 autonome). Une solution se trace à partir d'un point en suivant le sens des vecteurs.

Problème de Cauchy Une **condition initiale** ou **finale** est un ensemble de relations du type $y^{(i)}(t_0) = y_0$ joints au système différentiel. Une **condition aux limites** est un ensemble de relations du type $\lim_{t \rightarrow a} y^{(i)}(t) = b$ joints au système.

Un **problème de Cauchy** d'ordre n est la donnée d'une équation normalisée d'ordre n et de n conditions initiales sur chacune des $y^{(i)}$, $i \leq n$. Il est trivialement équivalent à une **équation intégrale**.

On dit qu'une dynamique normalisée vérifie **CLL** (condition de Cauchy-Lipschitz locale) si elle est **localement lipschitzienne** quant à sa seconde variable. On dit qu'elle vérifie **CLG** si elle est **uniformément (globalement) lipschitzienne** en sa seconde variable. C'est le cas si elle est C^1 sur l'adhérence de l'intervalle de vie par rapport à sa deuxième variable. D'ailleurs CLL équivaut à ce que $\partial_y \varphi$ soit localement bornée.

Le **théorème de Cauchy-Lipschitz** dit : sous CLL, un problème de Cauchy admet une unique solution maximale dont la vie contient la condition initiale. De plus, sous CLG, il admet une unique solution « maximale qui est globale ».

Conséquences (sous les hypothèses de CLL) : deux courbes intégrales **ne se croisent pas**. Si la solution nulle est admise, toute autre solution *ne s'annule jamais*. Si I est ouvert, une solution maximale a pour intervalle de vie un intervalle ouvert.

Principe de majoration a priori, explosion en temps fini, critère de sortie de tout compact, théorème des bouts, théorème de l'alternative (formulations équivalentes) Si F est une dynamique sur $]a, b[\times U$, U ouvert de l'espace, b éventuellement infini, lipschitzienne quant à la seconde variable, et f une solution maximale de $y' = F(t, y)$ d'intervalle de vie $]c, d[$, alors si $d < b$, alors f sort de tout compact au voisinage de d . De même de l'autre côté.

Si $U = \mathbb{R}^n$, on obtient que $\lim_{t \rightarrow d} \|f(t)\| = +\infty$. On peut lui combiner à profit le lemme de Gronwall pour obtenir des solutions maximales : en effet, toute solution maximale bornée du problème de Cauchy, pour une

dynamique continue, est globale. De même si la dynamique est uniformément bornée.

Facteurs intégrants Exemple sur $y' + py = q$. En multipliant par m , $(my)' + (mp - m')y = mq$. En imposant $m' = mp$, c'est-à-dire $m = \exp(\int p)$ (le vérifier), on a $y = \frac{(\int qm)}{m}$.

Wronskien Soit $Y' = A(t)Y + B(t)$, V_1, \dots, V_n des solutions. On note : $W(t) : t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$. Elles forment une base des solutions de l'équation ssi $W(t)$ ne s'annule pas ssi $W(t)$ est non identiquement nul. De plus, une solution $Y(t)$ est donnée par $= \lambda_1(t)V_1(t) + \dots + \lambda_n(t)V_n(t)$ où :

$$\lambda'_i(t) = \frac{\det(V_1, \dots, V_{i-1}, B, V_{i+1}, \dots, V_n)}{W(t)}.$$

Formule de Duhamel On ne rappelle pas la définition de l'exponentielle de matrices. La solution du problème de Cauchy associé à $y' = Ay$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_t^{t_0} e^{(t-s)A}b(s)ds$.

Méthode de variation de la constante Ce principe consiste à chercher une équation différentielle de la même forme que la solution générale de l'équation homogène en remplaçant la constante par une fonction de la même régularité que les solutions, et à l'injecter dans la dynamique.

Lemme de Gronwall Soient f, g, y trois fonctions continues positives sur $[a, b]$ telles que pour tout t , $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds$. Alors pour tout t , $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds$.