| | **Actions en général** | **Conjugaison = automorphismes intérieurs** | **Translations à gauche** |
|---|---|---|---|
| Expression | $G \times E \to E$<br>$(g,x) \mapsto g.x$ | $G \times G \to G$<br>$(g,x) \mapsto gxg^{-1}$<br>ET $f_g$ est un **automorphisme** | $G \times G \to G$<br>$(g,x) \mapsto gx$<br>ET $f_g$ est une **bijection** **(mais pas un morphisme)** |
| Orbite d'un élément | Les $O_x = \Omega_x$<br>$= \{y \in E, \exists g \in G \ y = g.x\}$<br>partitionnent $E$<br>**(ne sont pas des sous-groupes** sauf cas trivial**)** | **Classe de conjugaison**<br>$C_x$ = ensemble des **conjugués** de $x$<br>(les $gxg^{-1}$ pour $g$ parcourant $G$) | Il n'existe qu'une seule orbite : on dit que l'action est **transitive** |
| Stabilisateur/Sous-groupe d'isotropie d'un élément | $G_x = St_x$<br>$= \{g \in G, g.x = x\}$<br>**(sous-groupe)** | **Centralisateur** de $x$ noté $Z_x = C(x) = C_G(x)$ : ensemble des éléments qui commutent avec $x$ | Tous triviaux par régularité (« l'action agit sans point fixe ») : on dit qu'elle est **libre**<br><br>Libre et transitive = **simplement transitive**<br><br>L'intersection de tous les stabilisateurs est réduite au neutre : on dit que l'action est **fidèle**. On en déduit le théorème de Cayley. |
| Stabilisateur d'une partie | $Stab(A)$<br>$= \{g \in G, gA = A\}$<br>**(a priori pas un sous-groupe)** | Centralisateur d'une partie : **définition alternative** comme l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de $x$ **(sous-groupe)**<br><br>$C(G) = Z(G)$ le centre de $G$ *(donc s.-g.* ***distingué****)* | Rien de spécial |
| Équation aux classes | Soit $T$ famille de représentants pour la partition par les orbites.<br>$card(E) = \sum_{x \in T} \frac{card(G)}{card(G_x)}$ | $card(G)$<br>$= card(Z(G))$<br>$+ \sum_{x \in T, x \notin Z(G)} \frac{card(G)}{card(Z_x)}$ | Aucun intérêt, il n'y a qu'une orbite |
| | | **Normalisateur** d'une partie $X$ : $N_G(X) = \{g \in G, gXg^{-1} = X\}$<br>• Sous groupe<br>• Si $X$ sous-groupe, plus grand sous-groupe dans lequel $X$ est normal<br>• $C(X)$ normal dans $N(X)$ | |