Mathématiques

VINGT ET UN THÉORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

MP

Lycée Gay-Lussac, Limoges

1 Première année

Exercice 1. *(Développement décimal illimité propre d'un réel).*

1. Quelle est la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ d'après le programme ? En déduire l'existence et l'unicité de la partie entière. De même, pour la partie fractionnaire.

On appelle *développement décimal illimité* d'un réel x, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de chiffres telle que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

2. Montrer que 0,999999... = 1.
3. Montrer que tout réel décimal possède au moins deux développements décimaux illimités.

On appelle *développement décimal illimité propre* d'un réel x, un développement décimal illimité de x non stationnaire à 9.

4. Justifier qu'il suffit de montrer le résultat d'existence et d'unicité du développement décimal illimité propre dans $[0,1[$ pour conclure dans $\mathbb{R}$.
5. Démontrons le résultat par analyse et synthèse. Pour l'analyse, récupérer les termes de la suite à partir de a_1 : comment faire apparaître, en base dix, la première décimale avant la virgule ? On aura soin de vérifier que la somme apparaissant est bien une partie fractionnaire.
6. Pour la synthèse, bien définir par récurrence forte la suite des décimales de x. Démontrer successivement que : c'est bien un développement décimal illimité de x (au sens que la série définie ci-dessus converge vers x), ce sont des chiffres, cette suite n'est pas stationnaire à 9 (en raisonnant ici par l'absurde).
7. Démontrer que tout décimal possède exactement deux développement décimaux illimités, l'un propre, et l'autre impropre. Que dire pour un réel quelconque ?
8. (**Approfondissement**.) Montrer qu'un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal illimité propre est périodique.

Exercice 2. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass).* Soit (u_n) une suite réelle bornée. Nous voulons montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, celui que l'on énonce en mathématiques supérieures.

Méthode par dichotomie

1. Montrer que l'image de la suite est contenue dans un segment $[a, b]$. Ses bornes sont-elles nécessairement atteintes ?
2. Procéder à la dichotomie itérée, de sorte qu'à chaque étape, une infinité d'éléments de la suite soient contenus dans la moitié de segment choisie. On s'attachera à ce que ce soit toujours possible.
3. Rappeler le théorème des suites adjacentes. En déduire une suite extraite de u et qui converge. Qu'avons-nous utilisé en raisonnant ainsi ? On aura montré que les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts, ce qui constitue le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

Méthode issue du lemme des pics

On utilise le principe des immeubles avec vue sur la mer. Autrement dit, les éléments de la suite sont des immeubles, et la mer est située à l'infini. Lorsqu'un immeuble est plus grand (au sens de l'ordre strict sur les réels) que tous ceux qui sont devant lui en regardant vers la mer, il a vue sur la mer.

1. Montrer le lemme des pics : *de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone.* Disjoindre deux cas, selon qu'une infinité d'immeubles aient vue sur la mer ou non.

2. Conclure. Ce que nous avons utilisé dans la méthode précédente était-il nécessaire ?

Exercice 3. *(Théorème des bornes atteintes).* On sait démontrer que toute fonction réelle définie sur un segment et continue est bornée et atteint ses bornes. On peut utiliser ce qu'on sait du cours de topologie, que l'image continue d'un compact est compacte, mais on préfère démontrer le théorème avec des moyens élémentaires.

1. Quelle propriété caractérise justement les compacts selon le cours de deuxième année ?

2. Montrons d'abord que la fonction est bornée. Raisonner par contraposée en niant la propriété de majoration, sans perte de généralité.

3. En déduire que cette fonction admet une borne supérieure.

4. Par l'absurde, supposons que la borne supérieure ne soit pas atteinte. Considérer $g = \frac{1}{\sup(f)-f}$. Montrer que g n'est pas majorée en utilisant la caractérisation de la borne supérieure. Conclure.

Exercice 4. *(Théorème de l'injection continue).* On cherche à démontrer que toute fonction réelle injective continue sur un intervalle est strictement monotone. (C'est très utile lorsqu'on étudie les homéomorphismes de $\mathbb{R}$: ils sont strictement monotones.)

1. Démontrer la pseudo-réciproque, évidente, de cette proposition : toute fonction strictement croissante d'un ensemble totalement ordonné dans un ensemble ordonné est injective.

2. Montrer que l'hypothèse de connexité est nécessaire.

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et injective. Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $x < y$. On peut supposer $f(x) < f(y)$ sans perte de généralité.

3. Montrer que si $t \in I$ vérifie $x < t$, alors $f(x) < f(t)$ en considérant $g(t) = f(t)-f(x)$.

4. Montrer que si $t \in I$ vérifie $t < x$, alors $f(t) < f(x)$. Notons $m = \min\{g(t), g(y)\}$.

5. Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Démontrons que si $f(a) < f(b)$, alors la fonction f est strictement croissante. Pour cela, supposons qu'il existe $(x, y) \in I^2$, avec $x < y$ et $f(x) > f(y)$. Disjoindre les cas : $a \leqslant x$, $y \leqslant a$, et $x < a < y$.

6. Conclure.

Exercice 5. *(Formule de Stirling).*

1. On cherche d'abord à calculer les *intégrales de Wallis*, introduites dans ce qui suit. Montrer l'égalité, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.
2. Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 sur cette suite d'intégrales. Pourquoi ne pas la résoudre avec les outils du cours sur les suites à relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ?
3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} pour tout entier positif p.

   INDICATION Calculer I_0 et I_1.
4. Quel est le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. En déduire un équivalent du carré des intégrales de Wallis au voisinage de l'infini, puis de I_n elle-même.
7. Posons $v_n = \frac{e^n}{n^n}n!$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$. Vérifier que $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.
8. En déduire un développement asymptotique de $\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$. Rappeler le lien entre une suite et sa série.
9. En déduire que $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\dfrac{n^n}{e^n}$.
10. (**Approfondissement**.) En déduire que $\ln(n!) \sim n\ln(n)-n$, formule souvent utilisée en physique statistique.

Exercice 6. *(Théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier).* La démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass, qui établit la densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues sur un segment, est très classique, et fait également partie de ce document. Nous nous intéressons d'abord à un autre résultat de densité de fonctions, qui permet de construire l'intégrale de Riemann en première année.

1. Rappeler la définition de *fonction en escalier sur un segment*, *fonction continue par morceaux sur un segment*.
2. Montrer le *théorème de Heine*, qui énonce que toute fonction continue sur un segment est uniformément continue, et dont la démonstration est également non exigible en première année. De la même manière que le théorème des bornes atteintes, la démonstration par l'absurde repose sur la propriété de Bolzano-Weierstrass.
3. Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. On cherche à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que $|f - \varphi| < \varepsilon$. Quelle est la définition de cette dernière inégalité ? Expliquer en particulièrement l'adjectif *uniforme* du nom du théorème.
4. On commence par étudier le cas où f est continue. Fixer un pas inférieur à η, la constante dépendant de ε dans la définition de la continuité uniforme (aussi appelée ε-module) et construire explicitement une fonction en escalier φ convenant.
5. Généraliser le théorème aux fonctions seulement continues par morceaux sur le segment. Ceci constitue le théorème d'approximation uniforme demandé.
6. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

Montrer que $(\int_{[a,b]} \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une valeur ne dépendant pas de (φ_n). Qu'est-ce que cette limite ?

Exercice 7. *(Théorème d'approximation de Weierstrass).* Ce théorème d'approximation, trop peu utilisé par les candidats selon les rapports, apparaît particulièrement au cours des écrits (simplement parce qu'il est relativement fastidieux à écrire). De même que les intégrales de Wallis, il est conseillé de savoir le refaire par cœur.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On rappelle que, pour tout polynôme P, $P(X) = P$ (pourquoi ?).

Méthode classique

On pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(X) = 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} kB_{n,k}(X) = nX$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(X) = n(n-1)X^2$. En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} (X - \frac{k}{n})^2 B_{n,k}(X) = \frac{X(1-X)}{n}$.

Soit $x \in [0,1]$. On pose $V = \{k \in [\![0,n]\!] \mid |x - \frac{k}{n}| \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$ et W son complémentaire. Pour $U = V$ ou W, on pose $S_U(x) = \sum\limits_{k\in U} |x - \frac{k}{n}| B_{n,k}(x)$.

2. Majorer $S_V(x)$ par $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, et par $S_W(x)$ par $\frac{x(1-x)}{n^{2/3}}$ puis par $\frac{1}{4n^{2/3}}$.

3. En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} |x - \frac{k}{n}| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

On définit le *n-ième polynôme de Bernstein de f* comme $B_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_{n,k}$.

4. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

5. Conclure dans le cas où f est seulement continue sur $[0,1]$.

6. Conclure dans le cas général.

7. Que dire sur un intervalle quelconque ?

Méthode probabiliste

Cette méthode est notamment enseignée par le professeur de la MP2 à Louis-le-Grand, de formation probabiliste. Elle a le mérite d'être plus rapide, quoique plus insolite. L'idée d'utiliser la loi binomiale vient naturellement de l'expression des polynômes élémentaires de Bernstein, qui représentent la probabilité qu'une variable aléatoire suivant cette loi prenne la valeur X. Il s'agit alors de se placer sur un espace probabilisé quelconque sur lequel la suite définie ci-dessous est bien définie (il en existe au moins un d'après l'exercice 18). f est définie et continue sur le segment $[0,1]$.

1. Rappeler et démontrer la loi faible des grands nombres pour une suite de variables aléatoires (S_n) suivant respectivement les lois binomiales $(B(n,p))$, p étant un réel entre $[0,1]$.

2. Remarquer que cette convergence est uniforme en p.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que f est uniformément continue. Soit η un ε-module de continuité uniforme.

4. Soit la variable aléatoire $X_n = f(\frac{S_n}{n})$. Montrer que $\mathbb{E}[X_n] = B_n(f)(p)$.

5. Montrer qu'il existe un entier n_0 indépendant de p tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| > \eta) < \varepsilon$.
6. Écrire $|B_n(f)(p) - f(p)|$ et séparer la somme en comparant $|\frac{k}{n} - p|$ à η, Markov-vibes.
7. Majorer $|B_n(f)(p) - f(p)|$ par $\varepsilon + 2\varepsilon||f||_\infty$. Conclure pour f.
8. Terminer la preuve pour une fonction continue sur un segment quelconque.

Exercice 8. *(Théorème de d'Alembert-Gauss).* Le théorème de d'Alembert-Gauss énonce que le corps des complexes est algébriquement clos, autrement dit que tout polynôme non constant à coefficients complexes P est scindé, ou, ce qui est équivalent, qu'il admet au moins une racine. C'est cette dernière formulation que nous retenons.

1. Vérifier que z_0 est racine de P si et seulement $\inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$ est nul et atteint en z_0.
2. Vérifions d'abord que $\inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \alpha$ est nul. Montrer qu'il existe un disque centré en l'origine en dehors duquel le polynôme est au-dehors du disque centré en l'origine de rayon $\alpha + 1$.
3. Caractériser α séquentiellement. Conclure sur le premier point de la démonstration.
4. Pour le deuxième point, raisonnons par l'absurde avec $\alpha > 1$. Montrer qu'on ne perd pas de généralité en considérant que la racine z_0 est nulle et que $\alpha = 1$.
5. Le polynôme P, non constant, s'écrit : $P = 1 - a_q X^q + \sum\limits_{k=q+1}^{p} a^k X^k$. On introduit la forme trigonométrique de a_q et on étudie les complexes z d'argument opposé et divisé par q. Majorer $P(z)$ en module.
6. Supposons $|z| < \sqrt[q]{1/|a_q|}$. Majorer $|P(z)| - 1$ par une fonction polynomiale équivalente à $-|a_q||z|^q$ en 0.
7. Que dire ainsi de cette expression au voisinage de 0 ? Conclure.

Exercice 9. *(Théorème du produit matriciel par blocs).*

1. Considérer les matrices par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, où $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathfrak{M}_{n,l}(\mathbb{K}), C \in \mathfrak{M}_{m,p}(\mathbb{K}), D \in \mathfrak{M}_{m,l}(\mathbb{K})$. Se convaincre qu'une explicitation des coefficients du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ n'est pas envisageable.

La première matrice considérée, par exemple, représente une application linéaire u si l'on se place dans $\mathfrak{M}_{n+m,p+l}(\mathbb{K})$, d'un espace E de dimension $p+l$ que l'on décompose $E = E_1 \oplus E_2$, E_1 de dimension p, E_2 de dimension l, dans un espace $F = F_1 \oplus F_2$ de dimension $n+m$, $\dim(F_1) = n$, $\dim(F_2) = m$. On note π_A la projection sur un sous-espace A selon les décompositions précédentes. On considère pour les écritures une base adaptée de E, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_l)$ et une base adaptée de F, $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n, f'_1, ..., f'_m)$ aux décompositions précédentes.

2. Montrer que A est la matrice de $\pi_{F_1} \circ u \circ \pi_{E_1}$ et expliciter l'expression de l'application linéaire représentée pour les matrices B, C, D.
3. Écrire le résultat attendu sur les blocs pour le produit MN. On note u_M l'application linéaire canoniquement associée à M. Qu'est-ce que u_{MN} ? En se souvenant que $\pi_{E_1} + \pi_{E_2} = id_E$, démontrer le théorème dans notre cas.

4. Généraliser.
5. (**Approfondissement**.) Le théorème du produit matriciel par blocs est-il encore vrai dans un anneau intègre ? Dans un anneau commutatif quelconque ?

Exercice 10. *(Décomposition en produit de cycles à supports disjoints).*

1. Qu'est-ce qu'un cycle de $\mathfrak{S}_n$? Qu'est-ce que l'ordre d'un cycle ? Montrer que deux cycles à supports disjoints commutent. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit σ une permutation du groupe symétrique d'ordre n. On définit la relation $\mathcal{R}_\sigma$ par : $x\mathcal{R}_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \sigma^k(x)$. Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{R}_\sigma$? Montrer que c'est une relation d'équivalence.
3. Montrer que la classe d'équivalence d'un élément x s'écrit : $\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), ..., \sigma^{p-1}(x)\}$, où ces éléments sont deux à deux distincts, p est un entier naturel et $\sigma^p(x) = x$. On appelle cette classe *orbite* de x, selon le langage des actions de groupe.

Montrons par analyse et synthèse que toute permutation se décompose, de manière unique à l'ordre près des facteurs, en un produit de cycles à supports deux à disjoints.

4. Régler le cas de la permutation triviale.
5. Pour l'unicité, prendre un cycle donné et un élément non fixé par lui. Pourquoi est-ce toujours possible ? Montrer que cet élément a même image par ce cycle que par la permutation σ. En déduire l'expression du cycle choisi.
6. Pour l'existence, considérer les orbites de σ qui ne sont pas des singletons. Considérer les restrictions de σ à ces orbites. Justifier qu'on définit ainsi un nombre fini de cycles et qu'ils sont à supports deux à deux disjoints.
7. Pour conclure, montrer que σ est le produit de ces cycles : disjoindre le cas où l'on calcule l'image d'un élément du support de σ ou non.
8. En déduire la décomposition en transpositions deux à deux distinctes. Cette décomposition est-elle unique ? Que peut-on dire de deux décompositions d'une même permutation ?

Exercice 11. *(Existence et unicité du déterminant).*

1. Qu'est-ce qu'une application multilinéaire ? Montrer qu'une application multilinéaire n'est *a priori* pas linéaire, et réciproquement. Qu'est-ce qu'une forme n-linéaire alternée en dimension n ?
2. Pour fixer les idées, on se place sur la puissance cartésienne E^p d'un espace E de dimension n. Soient $u_1, ..., u_p$ des vecteurs de E et f une forme p-linéaire sur E. Si $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, montrer que
$$f(u_1, ..., u_p) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant n}\sum_{1\leqslant i_2\leqslant n} \cdots \sum_{1\leqslant i_p\leqslant n}\prod_{j=1}^{p} a_{i_j,j} f(e_{i_1}, ..., e_{i_p}).$$
3. Dans le cas $p = n$, montrer que l'on peut récrire l'expression précédente : $f(u_1, ..., u_p) = \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod\limits_{j=1}^{p} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(j),j} f(e_1, ..., e_n)$. Retrouver la formule de Leibniz.

4. On appelle *déterminant* dans la base $\mathbf{e}$ l'unique forme n-linéaire sur E dont l'image de la base est unitaire. Montrer l'unicité d'un tel objet, s'il existe, preuve exigible.

5. On cherche à en montrer l'existence, ce dont la preuve est non exigible. Introduire le déterminant avec la formule de Leibniz ; justifier que c'est une forme n-linéaire.

6. Quelle est l'image de la base par cette application ?

7. Il ne reste plus qu'à prouver le caractère alterné. Montrer que si τ est une transposition, $\sigma \longmapsto \sigma\tau$ est une bijection du groupe alterné sur son complémentaire. Que dire de $(\mathcal{A}_n, \complement_{\mathfrak{S}_n}\mathcal{A}_n)$?

8. Montrer que toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle au déterminant.

2 Deuxième année

Exercice 12. *(Théorème de Lagrange).* Soit $(G, \cdot)$ un groupe d'ordre fini. Soit H un sous-groupe de G.

1. Pourquoi peut-on dire de H qu'il est d'ordre fini ?

2. Démontrer les théorèmes au programme : si G est un groupe fini, tout élément est d'ordre fini, et si ce groupe est commutatif, alors cet ordre divise le cardinal du groupe.

3. Soit la relation définie sur G par $x \sim y$, si et seulement si, il existe $h \in H$ tel que $x = yh$. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence. On dit qu'on a considéré les *classes à gauche modulo H*, puisque $x \sim y$ si et seulement si $x \in yH$.

4. Que peut-on dire la famille des classes d'équivalence de cette relation ? Démontrer ce résultat de première année.

5. Montrer que, dans un groupe quelconque, l'application $h \longmapsto yh$ est une bijection de H sur yH.

6. En déduire le théorème de Lagrange dans sa forme générale : *l'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.* En déduire que l'ordre d'un élément d'un groupe fini divise toujours l'ordre du groupe. Pourquoi cette version est-elle plus faible que la précédente ? En déduire aussi que, dans tout groupe fini G, si $x \in G$, $x^{\mathrm{card}(G)} = 1$.

Exercice 13. *(Théorème de Cayley-Hamilton).*

Méthode algébrique

1. Claude écrit : $\chi_A(A) = \det(AI_n - A) = \det(A - A) = \det(O_n) = 0$. Où est l'erreur ?

2. On appelle *matrice compagnon*, une matrice de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

Déterminer le polynôme caractéristique d'une telle matrice.

3. On considère la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Quelles sont les images des vecteurs de base par A ? En déduire que $(A^k E_0)_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ est libre. Que peut-on en déduire sur le degré du polynôme minimal de A ?

4. Montrer que $\chi_A(A)E_0$ est nul. En déduire que $\mu_A = \chi_A$.

5. Montrer que, pour un vecteur x donné d'un espace vectoriel et un endomorphisme u donné, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de l'espace stable par cet endomorphisme et contenant ce vecteur. Donner son expression.

6. Montrer que, s'il est de dimension finie n, alors $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ en est une base.

7. En déduire que, pour tout X dans $\mathbb{R}^p$, $\chi_A(A)X = 0$ et conclure.

Méthode topologique

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication Une matrice dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes est automatiquement diagonalisable.

2. Soient M, N deux matrices. Justifier que l'application $(M, N) \longmapsto \chi_M(N)$ est dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_{2n^2}]$.

3. Conclure.

Exercice 14. *(Équivalence des normes en dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n **sur** $\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Qu'est-ce que la relation de domination sur les normes sur E ? Qu'est-ce que la relation d'équivalence des normes ?

2. Justifier que si N_1 est dominée par N_2, alors les propriétés topologiques ayant une caractérisation séquentielle pour N_2 sont conservées pour N_1.

3. On définit la norme infinie : $||x||_\infty = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |e_i^*(x)|$ en introduisant la base duale de $\mathbf{e}$. Vérifier que c'est une norme.

4. Soit N une norme sur E. Montrer que N est dominée par la norme infinie.

5. Montrer qu'en dimension finie, les fermés bornées sont compacts, pour n'importe quelle norme fixée.

6. Que dit la seconde inégalité triangulaire sur l'application norme ? Considérer $N(S(0,1))$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de la norme infinie.

7. En déduire que la relation d'équivalence est pleine sur l'ensemble des normes sur E.

8. (**Approfondissement**.) Le théorème est-il vrai pour un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

Exercice 15. *(Théorème de sommation par paquets).*

Premier théorème

1. Rappeler la définition d'une famille sommable de nombres.
2. Soient $(a_i)_{i\in I}$, I un ensemble, une famille de réels positifs. Soit J une partie de I. Montrer que si cette famille est sommable, $(a_j)_{j\in J}$ aussi et $\sum\limits_{j\in J} a_j \leqslant \sum\limits_{i\in I} a_i$.
3. Montrer que si I et J sont deux ensembles disjoints, alors la famille $(a_i)_{i\in I\cup J}$ est sommable si et seulement si $(a_i)_{i\in I}$ et $(a_j)_{j\in J}$ sont sommables, et que dans ce cas : $\sum\limits_{i\in I\cup J} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{j\in J} a_j$.
4. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un *partage* dénombrable de I, c'est-à-dire une partition à parties éventuellement vides et Λ et en bijection avec $\mathbb{N}$. Montrer que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme σ_λ et la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable[1], et que dans ce cas, $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum\limits_{i\in I_\lambda} a_i\right)$.

Second théorème

5. Montrer l'inégalité triangulaire suivante dans le cas où les a_k sont complexes : $|\sum\limits_{k\in I} a_k| \leqslant \sum\limits_{k\in I} |a_k|$.
6. Montrer que l'application somme est linéaire.
7. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un partage dénombrable de I. Montrer que si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, la famille $(a_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable de somme σ_λ et la famille $(\sigma_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est sommable, et qu'alors $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum\limits_{i\in I_\lambda} a_i\right)$.
8. Montrer que la réciproque, contrairement au premier théorème, est fausse.

Exercice 16. *(Théorème d'interversion des limites).*

1. Soient A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé, (f_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que la limite simple égale la limite uniforme.
2. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que pour tout n, f_n tende vers l_n en a. Quel symbole précisément permet de donner du sens à cet expression ?
3. Montrer que si f converge vers l en a, alors (l_n) converge vers l.
4. Montrer que si (l_n) converge vers l, alors f converge vers l en a.
5. Montrer maintenant que (l_n) est bornée.
6. Soit φ une extractrice qui la rende convergente (comment ?). Montrer que f tend vers l en a.
7. Conclure.

Exercice 17. *(Théorème de convergence dominée).* Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout n, f_n soit continue par morceaux et intégrable sur I (c'est-à-dire que son intégrale impropre sur I converge

[1] On rappelle que le cours garantit qu'une série absolument convergente est invariante par permutation de ses termes (pourquoi d'ailleurs ?), ce qui permet de définir univoquement la somme d'une série correspondante en utilisant une bijection de Λ sur $\mathbb{N}$.

absolument), et que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f qui soit continue par morceaux sur I^2. On fait l'hypothèse, dite *de domination*, suivante :

$$\text{il existe une fonction } \varphi \text{ continue par morceaux, intégrable sur } I \text{ telle que} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Nous souhaitons démontrer que f est intégrable sur I **(i)** et que la suite numérique $\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ **(ii)**.

Préliminaire. Notion de complétude

Une suite (u_n) est de Cauchy, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \geqslant N \quad ||u_n - u_p|| \leqslant \varepsilon,$$

ou de façon équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall k \geqslant 0 \quad ||u_{n+k} - u_n|| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est en particulier une suite de Cauchy. Remarquer que ce théorème ne dépend d'aucune propriété de l'espace considéré : il est vrai dans n'importe quel ensemble muni d'une distance.

2. Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.

3. Démontrer que toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

4. Montrer que, dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy converge *(critère de Cauchy)*. Un espace vérifiant cette propriété est dit *complet* ; les espaces vectoriels normés complets sur $\mathbb{K}$ sont dits *espaces de Banach*. On peut vérifier que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie sont tous des espaces de Banach, et que tout espace compact est complet.

5. Montrer que, dans un espace vectoriel normé quelconque, toute suite décroissante de compacts non vides est d'intersection non vide *(théorème des compacts emboîtés)*.

Un encadrement intégral

Si I est un intervalle et E un ensemble qui convient, on note $\mathcal{C}_m(I, E)$ l'espace des fonctions continues par morceaux. Soit $S = [a, b]$ un segment réel et $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer qu'il existe deux fonctions continues f_- et f_+ de S dans $\mathbb{R}$ telles que $f_- \leqslant f \leqslant f_+$ et $\int_S f_- - \varepsilon < \int_S f < \int_S f_+ + \varepsilon$.

6. Montrer que, si f est continue, c'est évident.

7. Autrement, on note $x_1 < ... < x_n$ ses points de discontinuité. Montrer qu'il existe m et M tels que $m < \inf_{x\in S} f(x)$ et $M > \sup_{x\in S} f(x)$.

8. Montrer que $f_- = \min(f, \varphi_-)$ convient, où $\varphi_-(x) = m + (M - m)\frac{|x-x_i|}{\alpha}$ si $x \in [x_i - \alpha, x_i + \alpha] \cap S$, $\varphi_-(x) = M$ ailleurs, où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}\min(x_{i+1} - x_i)[$.

[2] Il n'est pas forcé que la limite simple d'une suite de continues par morceaux soit continue par morceaux, quoique la recherche d'un contre-exemple ne soit pas aisée.

9. Que prendre pour f_+ ?

Théorème d'échange série-intégrale

Soit (u_n) une suite de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ telle que (u_n) soit intégrable sur I pour tout n, et telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ sur I. On fait également l'hypothèse que la somme des normes 1 des u_n converge.

10. Montrer que, si les u_n et f sont continues, alors $\int_S ||f|| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_S ||u_n||$.

Indication Considérer les ensembles

$$K_n = \{x \in S \quad | \quad ||f(x)|| \geqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} ||u_k(x)||\}.$$

11. Adapter le raisonnement au cas général pour obtenir cette même majoration en utilisant le résultat de la partie précédente.

12. Montrer que $\displaystyle\int_I ||f|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_I ||u_n||$ et en déduire que f est intégrable sur I.

13. Montrer que $\displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$.

Conclusion

Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}_+)$ convergent simplement vers la fonction nulle. On fait l'hypothèse de domination sur les f_n.

14. Montrer que le maximum de deux fonctions continues par morceaux est continu par morceaux.

15. Si $n \in \mathbb{N}$, et si pour $p \geqslant n$, $f_{n,p} = \max(f_n, ..., f_p)$, montrer qu'il existe $p_n \geqslant n$ tel que $p_n \geqslant p_{n-1}$ et $|\int_I f_{n,p} - \int_I f_{n,p_n}| \leqslant \frac{1}{2^n}$ dès que $p \geqslant p_n$.

Indication Appliquer le théorème de la limite monotone à $(\int_I f_{n,p})_p$.

16. Posons $g_n = f_{n,p_n}$. Montrer que $|g_{n+1} - g_n| \leqslant 2(f_{n,p_{n+1}} - f_{n,p_n}) + g_n - g_{n+1}$.

17. Posons $u_n = g_n - g_{n+1}$. Montrer que $\sum_{k \geqslant n} u_k$ vérifie les hypothèses de la partie précédente. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = 0$.

18. En déduire la démonstration du théorème de convergence dominée.

19. Pour quel espace d'arrivée des fonctions, le théorème est-il vrai le plus généralement ?

Exercice 18. *(Lemme des coalitions).*

1. Définir successivement : *tribu*, *espace probabilisé*, *variable aléatoire réelle discrète*. Montrer que, si f est une fonction, $f(X)$ est une variable aléatoire ? En quelle mesure la loi d'une variable aléatoire est-elle une probabilité ?

2. Énoncer le lemme des coalitions. Quels sont les liens logiques entre l'indépendance deux à deux d'une famille d'événements et leur indépendance mutuelle ? Par défaut, pour des variables mutuelles indépendantes, on dira simplement « indépendantes ».

3. Caractériser l'indépendance mutuelle en termes d'événements, propriété directe du cours.

4. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $X_i(\Omega)$, montrer que les variables aléatoires $f_1(X_1), ..., f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

5. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes à valeurs respectivement dans des ensembles $E_1, ..., E_n$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Si f est une fonction définie sur $E_1 \times ... \times E_p$ et g définie sur $E_{p+1} \times ... \times E_n$, alors $f(X_1, ..., X_n)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

6. En déduire que si $(X_1, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes, k un entier naturel non nul et $I_1, ..., I_k$ des sous-ensembles non vides disjoints de $[\![1, n]\!]$, si pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, Y_j est une variable aléatoire fonction des variables X_i pour $i \in I_j$, alors les variables $Y_1, ..., Y_k$ sont indépendantes.

Voilà prouvé le lemme des coalitions. La présence de sa démonstration dans le programme est ambiguë ; par contre, la démonstration du théorème suivant, utilisé pour modéliser le jeu de pile ou face, en est clairement absente : *pour toute suite (P_n) de lois de probabilité discrètes, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes, indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi $\mathbb{P}_{X_n}$ soit P_n.* Nous n'en proposons pas de démonstration, qui ferait appel à la notion de mesure de Lebesgue.

Exercice 19. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire).* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Si v est un vecteur de E et u un endomorphisme, on note : $u(v) = u{\cdot}v$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, E)$. On souhaite démontrer que, pour tous $(t_0, x_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy d'inconnue $x \in \mathcal{C}^1(I, E)$:

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

possède une unique solution.

1. Justifier que l'on peut munir $\mathcal{L}(E)$ de n'importe quelle norme pour travailler.

2. Montrer que l'application $(u, x) \longmapsto u \cdot x$ est continue.

3. Montrer qu'il existe une constante k telle que

$$\forall (u, x) \in \mathcal{L}(E) \times E \quad ||u \cdot x|| \leqslant k||u||||x||.$$

Soit (z_n) une suite de fonctions continues sur I à valeurs dans E. On suppose qu'elles vérifient la relation de récurrence $z_{n+1}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u) \cdot z_n(u) \mathrm{d}u$. Soit K un segment inclus dans I.

4. Montrer qu'il existe une constante M telle que pour tout $u \in K$, $||z_0(u)|| \leqslant M$.

5. Montrer qu'il existe une constante α telle que pour tout $u \in K$, $||a(u)|| \leqslant \alpha$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in K$, $||z_n(t)|| \leqslant M \frac{(k\alpha|t-t_0|)^n}{n!}$.

7. En déduire que la série $\sum z_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

Montrons l'unicité dans le théorème.

8. Montrer que si $h : I \longrightarrow E$ est une fonction continue vérifiant, pour tout $t \in I$, $h(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(u) \cdot h(u) \mathrm{d}u$, h est identiquement nulle.

9. Conclure.

Enfin, pour montrer l'existence, on exprime une solution comme limite uniforme d'une suite de fonctions. Pour cela, on définit (w_n) par récurrence en posant $w_0 = x_0$ une fonction constante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout t, $w_{n+1}(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} (a(s) \cdot w_n(s) + b(s))\mathrm{d}s$.

10. Montrer que (w_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction continue φ.

INDICATION Considérer la série associée à la suite $w_{n+1} - w_n$.

11. Démontrer que φ est solution au problème de Cauchy initial.

12. En déduire le théorème de Cauchy-Lipschitz d'ordre n.

Exercice 20. *(Théorème fondamental de caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$).* Soit f une fonction de U, ouvert de E, dans F, où E, F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E et la norme infinie associée à $\mathcal{B}$. On fixe aussi une base $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_p)$ de F.

1. Qu'est-ce que la j-ième dérivée partielle de f en $a \in E$?

2. Qu'est-ce que le caractère $\mathcal{C}^1$, par définition, en calcul différentiel ?

3. Quel est le lien entre la différentielle en le vecteur a de f évaluée en v et la dérivée de f en a selon le vecteur v ?

4. Rappeler l'expression de la différentielle en dimension finie.

On souhaite démontrer le théorème suivant : *une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les n dérivées partielles de f existent et sont continues.*

5. Quel sens est évident ?

6. Soit $a \in U$. On suppose que toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues, et qu'elles sont nulles en a. Montrer qu'il existe un $\eta > 0$ tel que $||\partial_j f(x)|| \leqslant \varepsilon/n$ pour tout j, dans la boule fermée centrée en a de rayon η.

Soit h un vecteur de la boule centrée en l'origine de même rayon. On pose $s_k = a + \sum\limits_{i=0}^{k} e_i^*(h)e_i$.

7. Montrer que si $t \in [0, 1]$, $s_{k-1} + te_k^*(h)e_k$ est dans la boule fermée centrée en a de rayon η. On peut donc définir une fonction g_k de t, $\mathcal{C}^1$, telle que $g_k(t) = f(s_{k-1} + te_k^*(h)e_k)$.

8. Montrer que g_k' est bornée par $\frac{\varepsilon}{n}||h||$.

9. Appliquer l'inégalité des accroissements finis en $(0, 1)$ à g_k.

10. En déduire une majoration de $||f(a + h) - f(a)||$.

11. En déduire la différentiabilité de f en a et que $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Traitons maintenant le cas général. Posons $u : h \longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} e_j^*(h)\partial_j f(a)$.

12. Que dire des dérivées partielles de $g = f - u$?

13. Montrer que f est différentiable sur U.

14. Quelle est le nom et l'expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{d}f(a))$?

15. En déduire que $x \longmapsto \mathrm{Jac}(f)(x)$ est continue, puis conclure.

Exercice 21. *(Théorème d'équirépartition de l'énergie).* On considère un système thermodynamique de N particules évoluant selon le temps t, à l'équilibre avec un thermostat à la température T. On peut écrire son énergie sous la forme : $\mathrm{Em}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{p} E_j'(t)$ où les

$E_1, ..., E_n, E'_1, ..., E'_p$ sont des énergies. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le terme d'énergie E_i est quadratique, autrement dit, $E_i = K_i u_i^2$ où K est une constante non nulle est u_i une fonction du temps. Quitte à les changer de famille, on suppose que les E'_j sont non quadratiques. On ne considère plus désormais que les états instantanés.

Notons $\alpha_1, ..., \alpha_m$ les paramètres qui définissent l'état de la particule ; ces paramètres peuvent prendre toutes les valeurs et l'on fait l'hypothèse qu'ils sont deux à deux indépendants. Ces paramètres sont en nombre fini si l'on fait l'hypothèse que tout terme d'énergie dépend uniquement de ces paramètres ; en particulier, quitte à les permuter ou dilater, on suppose que $n \leqslant m$ et que $u_i = \alpha_i$. L'hypothèse d'indépendance s'écrit, dans le cas particulier du premier terme d'énergie quadratique : $\mathcal{E} = \mathrm{Em} = K_1\alpha_1^2 + f(\alpha_2, ..., \alpha_m)$ où f ne dépend pas de α_1.

1. Exprimer le nombre dN de particules du système considéré dont l'état instantané est dans le pavé $[\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1] \times ... \times [\alpha_m, \alpha_m + d\alpha_m]$ en se rappelant la première phrase de l'énoncé.

On définit la valeur moyenne de l'énergie par l'intégrale sur toutes les valeurs des paramètres de l'énergie, l'élément différentiel considéré étant dN, divisée par le nombre de particules.

2. Écrire, d'après la linéarité, l'expression $< K_1\alpha_1 >$.

3. En déduire que $< K_1\alpha_1 >= \dfrac{\displaystyle\int_{\alpha_1=-\infty}^{+\infty} K_1\alpha_1^2 e^{-\frac{K_1\alpha_1^2}{k_BT}}\,\mathrm{d}\alpha_1}{\displaystyle\int_{\alpha_1=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{K_1\alpha_1^2}{k_BT}}\,\mathrm{d}\alpha_1}$.

4. Intégrer par parties le numérateur. En déduire, en admettant que les valeurs moyennes des termes non quadratiques sont nulles, que $< \mathcal{E} >= n\frac{1}{2}k_BT$.

Table des matières