Formes différentielles, cohomologie de de Rham

Convention : « lisse » = de la régularité voulue.

- **Formes différentielles**

Classes de degré	Sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$	Sur une variété M de dimension n
0-formes différentielles $\Omega^0(U), \Omega^0(M)$	Fonctions lisses de U dans $\mathbb{R}$ *De la forme :* $\alpha = \sum_i \alpha_i e_i$ où $(e_i)_i$ base de $\mathbb{R}^n$, $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ lisses	Sections lisses du fibré trivial = fonctions lisses de M dans $\mathbb{R}$ *Forme locale issue de la définition de la lissité sur M lue dans les cartes.*
1-formes différentielles $\Omega^1(U), \Omega^1(M)$	Fonctions lisses de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ *De la forme*[1] *:* $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$, $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ lisses	Sections lisses du fibré cotangent $\coprod_{x\in M} T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in T_x^*M$, *ie* « champ de formes linéaires sur les espaces tangents » *Forme locale : $\alpha_U = \sum_i \alpha_i dx_i$ (voir à gauche) dans carte (U, ϕ_U) de sorte que $\alpha_U = \psi^*(\alpha_V)$ où ψ est la fonction de transition $\phi_U \circ \phi_V^{-1}$ pour tous ouverts*
2-formes différentielles $\Omega^2(U), \Omega^2(M)$	Fonctions lisses de U dans $Bil.Alt(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *De la forme :* $\alpha = \sum_{i<j} \alpha_i (dx_i \wedge dy_j)$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$, $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ lisses. Remarque : $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.	Sections lisses du fibré périodique $\coprod_{x\in M} \Lambda^2 T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in Bil.Alt(T_xM, \mathbb{R})$ *Forme locale : comme précédemment*
k-formes différentielles Espace $\Omega^k(U), \Omega^k(M)$	Fonctions lisses de U dans $\mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ (formes k-linéaires alternées) *De la forme :* $\alpha = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})$ où $(dx_i)_i$ base de $(\mathbb{R}^n)^*$, $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$ lisses. Remarque : $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ est alternée (évidemment !).	Sections lisses du fibré des formes k-alternées $\coprod_{x\in M} \Lambda^k T_x^*M$ = fonctions lisses $x \in M \mapsto f(x) \in \Lambda^k T_x^*M$ les formes k-alternées **sur le fibré tangent T_xM** *Forme locale : comme précédemment*
$\Omega(U), \Omega(M)$	Somme directe des $\Omega^k(U), \Omega^k(M)$	

- **Pullback $\phi^*(\omega)(u) = \omega(\phi(u)) \circ d\phi(u)$**

Formule-clef : si $\omega = a_1 dy_1 + \dots + a_n dy_n$, $\phi^*\omega = \left[\sum_i a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}\right] dx_1 + \dots + \left[\sum_i a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n}\right] dx_n$ (bases quelconques)

[1] Les formes linéaires coordonnées, sont leurs propres différentielles.

- ## Graduation
  - ✓ d est la différentielle sur $\Omega^0(U), \Omega^0(M)$
  - ✓ $\deg(d\alpha) = \deg(\alpha) + 1$
  - ✓ d linéaire
  - ✓ $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta)$
  - ✓ $d \circ d = 0$ (toute forme exacte $(\exists f \;\; \alpha = df)$ est fermée $(d\alpha = 0)$)
  - ✓ d commute avec l'image inverse

- ## Intégration

Par déf. : γ paramétré sur M. $\int_\gamma \omega = \int_{D_\gamma} \gamma' . \omega \circ \gamma$

Stokes : $\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$ (note : en degré 1, c'est le TFA)

- ## Cohomologie

Raison : le lemme de Poincaré (*sur un ouvert étoilé, toute forme fermée est exacte)* n'est pas toujours vrai.

X variété, $d_k = d : \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$. Cycles $F^k(X) = \ker d_k$ (formes de degré k fermées). Bords $d(\Omega^{k-1})$ (formes de degré k exactes). Espaces (de cohomologie) (de de Rham) $H^k(X) \coloneqq F^k(X)/d\Omega^{k-1}(X)$.

$$0 \to \Omega^0(X) \to \Omega^1(X) \to \Omega^2(X) \to \cdots$$

- ❖ $H^0(X, \mathbb{R})$ = {fonctions loc. cstes} $\simeq \mathbb{R}^c$ où c est le nb de CC de X.
- ❖ Si U étoilé, $H^p(U) = 0$ *pour* $p \geq 1$.
- ❖ $H^{>\dim X}(X) = 0$.
- ❖ Si M est C^∞, compacte, connexe, orientable de dim n, $\dim H^n(X) = 1$.
- ❖ Si M est $C\infty$, connexe de dim n, mais pas compacte/orientable, $H^n(X) = 0$.
- ❖ $H^k(S^n) = 0$ pour $0 < k < n$.