Cours de mathématiques

TOME VI

TOPOLOGIE

Mathématiques générales

France ∼ 2024

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Table des matières

1 Espaces vectoriels normés **9**

1.1 Normes 9

1.2 Limites 9

1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie 9

1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass 10

1.3.2 Boules et hypercubes 10

1.4 Applications continues 11

1.4.1 Formes linéaires 11

1.4.2 Projections scalaires 12

1.4.3 Projections vectorielles 12

1.5 Suites et séries de fonctions 13

1.5.1 Convergence simple 13

1.6 Convexité 13

1.6.1 Jauge d'un convexe 13

1.6.2 Convexes et applications 15

1.6.3 Points extrémaux 16

2 Espaces métriques **19**

2.1 Distances 19

2.1.1 Définition d'une distance 19

2.1.2 Distance issue d'une norme 20

2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties 20

2.1.3.1 Définition 20

2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie 20

2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances 24

2.1.4 Équivalence de distances 26

2.2 Boules 27

2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées 27

2.2.2 Premières propriétés 27

2.2.3 Propriétés géométriques 27

2.3 Limites 28

2.3.1 Limites de suites . . . 28
2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence . . . 29
2.3.1.1.1 Théorèmes de convergence grossière des suites . . . 30
2.4 Compacité . . . 32
2.4.1 Suites à valeurs dans un compact . . . 32
2.5 Complétude . . . 33
2.5.1 Suites de Cauchy . . . 33
2.5.2 Espaces complets . . . 33
2.5.3 Théorie de Baire dans le cas complet . . . 34

3 Topologie générale 39
3.1 Définitions de base d'une topologie . . . 39
3.1.1 Ouverts et fermés . . . 39
3.1.2 Voisinages . . . 40
3.1.3 Comparaison de topologies . . . 40
3.1.3.1 Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble . . . 40
3.1.3.2 Topologie minimale . . . 41
3.1.4 Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité . . . 41
3.1.4.1 Base d'ouverts . . . 41
3.1.4.2 Base de voisinages . . . 42
3.1.4.3 Axiomes de dénombrabilité . . . 43
3.1.4.4 Séparabilité . . . 43
3.1.5 Adhérence, intérieur, frontière . . . 44
3.1.5.1 Frontière ou bord . . . 44
3.1.5.2 Points limites, points d'accumulation, isolation . . . 44
3.1.5.3 Densité . . . 44
3.1.5.4 Adhérence et intérieur dans le produit . . . 44
3.1.5.5 Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence . . . 45
3.1.6 Applications continues . . . 46
3.1.6.1 Continuité globale . . . 46
3.1.6.2 Continuité en un point . . . 47
3.1.6.3 Homéomorphismes . . . 47
3.1.7 Irréductibilité d'un espace topologique . . . 48
3.2 Constructions de topologies . . . 50
3.2.1 Topologie engendrée . . . 50
3.2.2 Topologie initiale . . . 51
3.2.3 Topologie induite . . . 52
3.2.4 Topologie finale . . . 53
3.2.5 Topologie faible . . . 54
3.2.6 Topologie somme . . . 54

3.2.7 Topologie produit . . . 55
3.2.7.1 Cas fini . . . 55
3.2.7.2 Cas général . . . 56
3.2.7.3 Convergences . . . 57
3.2.8 Topologie quotient . . . 58
3.2.8.1 Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient . . 58
3.2.8.2 Séparation des quotients . . . 60
3.2.8.3 Autres propriétés des quotients . . . 63
3.2.8.4 Fenêtre : espaces projectifs . . . 63
3.2.9 Quotient d'une topologie par une action de groupes . . . 66
3.3 Constructions d'espaces topologiques . . . 67
3.3.1 Prérequis : boules, sphères, tores, rubans . . . 67
3.3.1.1 Boules, sphères . . . 67
3.3.1.2 Tore . . . 68
3.3.1.3 Ruban de Möbius . . . 69
3.3.1.4 Bouteille de Klein . . . 69
3.3.1.5 Peignes . . . 69
3.3.2 Cylindres . . . 70
3.3.3 Cônes . . . 70
3.3.4 Suspensions, doubles cônes . . . 72
3.3.5 Écrasements . . . 73
3.3.6 Recollements, bouquets . . . 73
3.3.7 Joints . . . 77
3.4 Propriétés topologiques classiques . . . 77
3.4.1 Le caddie de contre-exemples . . . 77
3.4.1.1 Droite de Sorgenfrey . . . 77
3.4.1.2 Plan de Sorgenfrey . . . 77
3.4.1.3 Droite de Michael . . . 77
3.4.2 Séparation . . . 77
3.4.2.1 Autres axiomes de séparation . . . 79
3.4.3 Dénombrabilité . . . 79
3.4.4 Métrisabilité . . . 79
3.4.4.1 Produits d'espaces métrisables . . . 80
3.4.5 Compacité . . . 80
3.4.5.1 Compacts, quasi-compacts et applications continues . . . 81
3.4.5.2 Applications propres . . . 82
3.4.5.3 Produit d'espaces compacts . . . 82
3.4.5.4 Locale compacité . . . 84
3.4.5.5 Compactification d'Alexandrov . . . 85
3.4.5.6 Séquentielle compacité . . . 85

3.4.5.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass 85
3.4.5.6.2 Généralisations 85
3.4.5.7 Dénombrabilité à l'infini 86
3.4.5.8 Paracompacité 87
3.4.5.9 Théorème de la cornemuse 88
3.4.6 Complétude 88
3.4.7 Convexité 88
3.4.8 Connexité par arcs 89
3.4.9 Connexité 92
3.4.9.1 Définition 92
3.4.9.2 Opérations sur les connexes 94
3.4.9.3 Connexes et applications 97
3.4.9.4 Composantes connexes 98
3.4.9.5 Totale discontinuité 99
3.4.9.6 Lien avec la connexité par arcs 100
3.4.9.7 Locale connexité et locale connexité par arcs 103
3.4.10 Connexité simple 107
3.4.11 Discrétion 107
3.5 Exemples classiques de topologie 108
3.5.1 Topologies cofinies 108
3.5.1.1 Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$ 108
3.5.1.2 Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ 108
3.5.2 Topologie de Zariski 108

4 Topologie algébrique 111
4.1 Groupes topologiques 111
4.1.1 Définition 111
4.1.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe 114
4.1.3 Propriétés des groupes topologiques 115
4.1.3.1 Groupes compacts 115
4.1.4 Groupes séparés 116
4.1.5 Groupes topologiques distingués 117
4.2 Espaces cellulaires 117
4.2.1 Attachements cellulaires 117
4.2.2 CW-complexe, espace cellulaire 121
4.2.2.1 Définition générale 121
4.2.2.2 CW-complexe fini, espace cellulaire fini 122
4.3 Homotopie et groupe fondamental 124
4.3.1 Point de vue catégorique de la topologie 124
4.3.2 Applications homotopes 124

4.3.3 Espaces contractiles . . . 129
4.3.4 Homotopie et recollement de cellules . . . 130
4.3.5 Le groupe fondamental . . . 135
4.3.5.1 Bagage théorique pour la construction du GF . . . 135
4.3.5.2 Définition . . . 136
4.3.5.3 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique . . . 138
4.3.5.4 Théorème du cône . . . 142
4.3.5.5 Lien avec la connexité simple . . . 142
4.4 Revêtements . . . 142
4.4.1 Définitions fondamentales . . . 143
4.4.2 Le groupe fondamental du cercle . . . 145
4.4.3 Relèvement . . . 146
4.4.4 Degré d'une application . . . 146
4.4.5 Applications et conséquences en Analyse . . . 146
4.4.5.1 Préservation des bords . . . 146
4.4.5.2 Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine . 146
4.4.5.3 Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue . . . 146
4.4.5.4 Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon . . . 146
4.4.6 Théorie des revêtements . . . 146
4.5 Théorème de Van Kampen . . . 146
4.5.1 Version faible du théorème de Van Kampfen . . . 147
4.5.2 Théorème de Van Kampen général . . . 148
4.5.2.1 Somme amalgamée dans une catégorie . . . 149
4.5.2.2 Le théorème de Van Kampen fort . . . 150
4.5.3 Conséquence sur la théorie des revêtements . . . 154
4.5.3.1 Morphismes de revêtements . . . 154
4.5.3.2 Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications . . . 155
4.5.3.3 Monodromie . . . 156
4.5.3.4 Revêtements galoisiens . . . 157
4.6 Notions introductives d'algèbre homologique . . . 160
4.6.1 Complexe de modules . . . 160
4.6.1.1 Définitions . . . 160
4.6.1.2 Δ-complexe . . . 161
4.6.1.3 Complexes simpliciaux . . . 166
4.6.2 Homologie singulière . . . 167

5 Exercices **169**

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Résumé

Les espaces vectoriels normés sont un cadre agréable pour une introduction à la topologie, classiquement dispensée en mathématiques spéciales, mais on comprend rapidement qu'ils sont en grande partie sans nouveauté par rapport aux espaces métriques, eux-mêmes qui se reformulent presque entièrement dans un vocabulaire topologique pur. Cependant, deux pans de la théorie se dégagent nettement : l'intérêt de la dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Riesz, et d'autre part, la gratuité de certains comportements des boules qui permettent une géométrie intuitive.

1.1 Normes

Exemples. *(Normes classiques, normes usuelles)*

1.

1.2 Limites

1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition. *(Normes non équivalentes en dimension finie)*

Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.

▷ En exercice. ■

Propriété. *(Compacité locale des evn de dimension finie)*

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.

Remarque. En dimension infinie, on peut quand même trouver des parties compactes non comprises dans un sous-espace de dimension finie. Elle sont données, par exemple, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, par le théorème d'Ascoli qui permet d'établir la compacité de familles libres de fonctions.

Propriété. ***(Théorème d'Heine-Borel)***

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

C'est en fait une équivalence !

Propriété. ***(Fermeture des sous-espaces vectoriels de dimension finie)***

Soit K un corps complet pour sa valuation. Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension quelconque et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé dans E.

C'est faux si K n'est pas complet ! En effet, on peut considérer K comme un K-ev de dimension 1. Il se plonge dans son complété qui est un ev et il est dense dedans donc non fermé.

1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Propriété. ***(Convergence des suites bornées par les valeurs d'adhérence)***

Dans un espace de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 1 *(Contre-exemples)*

Les hypothèses précédentes sont essentielles.

1. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de bornitude.
2. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de dimension.

▷ **Éléments de réponse.**

Pour le premier cas, la suite définie par $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$ doit convenir. Pour le second cas, on peut considérer $(1 - \sin(n\pi/2))X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée qui ne converge pas mais admet 0 pour seule valeur d'adhérence.

1.3.2 Boules et hypercubes

Lemme. ***(Toute boule contient un hypercube)***

Soit n un entier naturel. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque. Alors toute boule ouverte non vide ni réduite à un point de $\mathbb{R}^n$ contient strictement un hypercube fermé ni vide ni réduit à un point et de même centre.

▷ Supposons d'abord que $\mathbb{R}^n$ soit muni de sa topologie usuelle. On utilise l'intuition donnée dans le plan de ce que dans un cercle de rayon 1, on peut inscrire un carré de côté $\sqrt{2}$. Soit donc $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On pose $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{n}]a_i - \frac{\sqrt{2}}{4}r, a_i + \frac{\sqrt{2}}{4}r[$. Alors $\mathcal{H}$ est un hypercube et convient.

Pour passer au cas général, on utilise l'équivalence des normes en dimension finie. ■

1.4 Applications continues

1.4.1 Formes linéaires

Propriété. ***(Caractérisation de la discontinuité des formes linéaires)***

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit f une forme $\mathbb{K}$-linéaire non nulle de E. Alors f est discontinue si et seulement si son noyau est dense dans E.

▷ D'après le théorème précédent, une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. De plus, si elle n'est pas nulle, son noyau est un hyperplan de E. Or un hyperplan est fermé ou dense, ces deux conditions s'excluant mutuellement, car le seul fermé dense est l'espace lui-même, qui n'est pas un hyperplan. Ainsi, f est non continue, si et seulement si, $\mathrm{Ker}(f)$ est dense. ■

On peut caractériser la réalisation de la distance au noyau d'une forme linéaire linéaire continue de la manière suivante.

Proposition. ***(Réalisation de la distance à un hyperplan fermé)***

Soit E un espace vectoriel normé et $\phi \in E'$. Alors la distance de $u \in E \setminus \mathrm{Ker}\phi$ à $\mathrm{Ker}\phi$ est atteinte si et seulement si la norme de ϕ est atteinte (sur la sphère unité), c'est-à-dire s'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\phi(x)| = \|\phi\|$.

▷ Notons $H = \mathrm{Ker}\phi$. Soit $u \in E$. Remarquons d'abord que $d(u,H) = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|}$. On procède par double inégalité. D'une part, $|\phi(u)| = |\phi(u-h)| \leqslant \|\phi\|\,|u-h| \quad \forall h \in H$ d'où $\frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} \leqslant d(u,H)$. Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieur, il existe un vecteur unitaire s tel que $|\phi(s)| \geqslant \|\phi\| - \varepsilon > 0$. En prenant $h = u - \frac{\phi(u)}{\phi(s)}s$, on obtient $d(u,H) \leqslant \|u-h\| = \frac{|\phi(u)|}{|\phi(s)|} \leqslant \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|-\varepsilon}$ et l'on conclut par $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Concluons. Soit $u \in E \setminus H$. Si $d(u,H)$ est atteinte en un certain point $z \in E$, alors $z \neq u$, car $u \notin H$, et l'on a $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|\phi(u-z)|}{\|\phi\|}$. Ainsi, puisque $\|u-z\| \neq 0$, $\|\phi\| = \frac{|\phi(u-z)|}{\|u-z\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$ en posant $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut toujours avoir $\|\phi\| = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, avec bien $\|x\| = 1$. De plus, si la norme de ϕ est atteinte, il existe x de norme 1 tel que $|\phi(x)| = \|\phi\|$. On a en particulier, sauf cas trivial ϕ nulle, $E = \mathrm{Ker}\phi \oplus \mathbb{K}x$ donc $u = z + \lambda x$ où $z \in \mathrm{Ker}\phi$. Par égalité de normes, on a $\lambda = \|u-z\|$. Ainsi $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$ puis $\phi(\frac{u-z}{\|u-z\|}) = \phi\frac{u}{\|u-z\|} = \phi(x) = \|\phi\|$. Ainsi, il existe $z \in H$ tel que $\|u-z\| = \frac{|\phi(u)|}{\|phid\|} = d(u,H)$ par le lemme. ■

Remarque importante. Remarquons la dichotomie du résultat précédent : soit toutes les distances des points hors du noyau au noyau sont atteintes, soit aucune ne l'est.

1.4.2 Projections scalaires

Théorème. *(Continuité des projections en dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normé et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $n \in \mathbb{N}$ une base de E. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. On note p la projection selon la composante sur e_{i_0}. Alors p est continue.

▷ On sait que p est une forme linéaire. Or toute application linéaire partant d'un espace de dimension finie est continue, donc p est continue. ■

En dimension infinie, c'est facilement faux comme le montre le contre-exemple suivant.

Contre-exemple. *(Projection discontinue en dimension infinie)*

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ d'une base algébrique, forcément indénombrable, car la famille $x \longmapsto e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est libre. De cette base on extrait une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0,1]$. Il est de dimension dénombrable ; soit donc e un vecteur de la base d'origine qui n'est pans cette extraction. Le noyau de la projection sur e contient l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est dense dans E, donc le noyau de cette projection est dense, en particulier il n'est pas fermé, donc elle n'est pas continue, et voilà. □

Exercice 2

Est-ce que, plus généralement, un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si toutes les projections scalaires contre une base donnée sont continues ?

1.4.3 Projections vectorielles

Corollaire. *(Décomposition selon une projection continue)*

Soit p la projection sur la droite vectorielle engendrée par e_{i_0} dont on suppose qu'elle est continue. Alors il existe un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(p)$ fermé dans E, donc une décomposition de E en deux sous-espaces fermés.

▷ On pose $q = 1 - p$. On sait que q est une projection, de plus, $pq = p(1-p) = p - p^2 = 0$ au sens de la composition. D'après le lemme des noyaux, puisque X et $X - 1$ sont premiers entre eux, $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = E$. Or $\mathrm{Ker}(p)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, car p est continue, et q est également continue par opérations usuelles donc $\mathrm{Ker}(q)$ est également fermé dans E, ce qui termine la preuve. ■

Remarque. Le supplémentaire obtenu est bien la projection sur $\mathrm{Vect}(e_i, i \in I \setminus \{i_0\})$, ce qui est commode dans la pratique la base ayant été fixée.

Exercice 3

Vérifier explicitement le fait précédent.

1.5 Suites et séries de fonctions

1.5.1 Convergence simple

Propriété. ***(Limite simple d'applications linéaires)***

Soient E un espace vectoriel et F un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E,F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors $f \in L(E,F)$.

▷ C'est conséquence directe de la linéarité de la limite en un point. ■

1.6 Convexité

DANS toute cette section, on se limite aux espaces vectoriels normés E **sur un sur-corps valué de** $\mathbb{R}$. En vérité, toutes les interprétations géométriques des résultats, qui sont la règle, se font sur la restriction des théorèmes aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.6.1 Jauge d'un convexe

Voilà une notion dont la principale application est la preuve du théorème de Hahn-Banach géométrique.

Définition. ***(Jauge d'un convexe)***

Soit $C \subseteq E$ un convexe contenant 0_E. La *jauge* p de C est l'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $p(x) = \inf \{t \geqslant 0, x \in tC\}$.

Remarque. Si $t \in I_x$, pour tout $s \geqslant t$, $s \in I_x$. En effet, si $t \neq 0$, $t \in I_x \iff x/t \in C \iff [0,x/t]_E \subseteq C \iff \forall s \geqslant t \quad x/s \in C \iff \forall s \geqslant t \quad s \in I_x$.

Propriété. ***(Définition de la jauge)***

p est bien définie.

▷ Soit $x \in E$ et $I_x = \{t \geqslant 0, x \in tC\}$. Si t est non nul, on l'écrit $x/t \in C$. Comme C est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E,r) \subseteq C$ puisque $0 \in C$. Donc si $x \in E$ est non nul, $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in C$ c'est-à-dire que $x \in \frac{2\|x\|}{r}C \qquad (\star)$. Donc $I_x \neq \emptyset$. Puisque $I_x \subseteq [0,+\infty)$, donc $p(x)$ est bien définie. ■

Propriété. ***(Jauge en zéro)***

$p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

▷ Clair et clair. ■

Propriété. ***(Sous-additivité, homogénéité positive)***

p vérifie les hypothèses du théorème analytique de Hahn-Banach réel.

▷ p est positivement homogène. En effet, $p(x) = \inf\{t \geqslant 0, x \in tC\}$. Soit $\lambda > 0$. Alors pour tout $x \in E$, $\lambda x \in \lambda t C \iff x \in tC$. Donc $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. ■

▷ Montrons que la jauge d'un convexe vérifie l'inégalité triangulaire (exercice classique de L2). Soient $x,y \in E$ non nuls. Soient $\varepsilon > 0$, alors $p(x)+\varepsilon \in I_x$ et $p(y)+\varepsilon \in Iy$, c'est-à-dire $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Alors comme C est convexe,

$$\frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\frac{y}{p(y)+\varepsilon} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C,$$

donc $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$. Donc $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$. ■

Propriété. ***(Identification du convexe par la jauge)***

$C = \{x \in E, p(x) < 1\}$.

▷ Montrons que $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$. Si $x \in C$ non nul, comme C est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subseteq C$. Soit $\lambda = \frac{\|x\|+\frac{1}{2}}{\|x\|} > 1$. Alors $\lambda x = x + \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(x,l) \subseteq C$. Donc $\frac{1}{\lambda} \in Ix$ donc $p(x) = \inf(Ix) < 1$. On a montré que $C \subseteq \{x, p(x) < 1\}$. Réciproquement, si $p(x) < 1$, $I_x \supseteq [1,+\infty[$, donc $x \in C$. ■

Propriété. ***(Majoration de la jauge)***

Il existe M tel que $p \leqslant M \|\cdot\|$.

▷ La relation $(\star)$ donne $p(x) \leqslant M\|x\|$ pour $M = \frac{2}{r}$. ■

Propriété. ***(Continuité de la jauge)***

p est lipschitzienne.

▷ Conséquence de la majoration précédente. ■

Propriété. ***(Norme issue d'une jauge)***

La jauge d'un convexe compact symétrique par rapport à l'origine définit une norme dont la boule unité est ce convexe.

Théorème. ***(Homéomorphie des convexes)***

Tous les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes, pour $n \in \mathbb{N}$.

▷ On montre que C est homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$ en utilisant la fonction $x \mapsto \frac{j(x)}{\|x\|}x$, bijection bicontinue de C sur la boule unité. ■

Corollaire. ***(Boules et point)***

Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à un point.

Heuristique

La jauge d'un convexe permet de le déterminer dans l'espace.

1.6.2 Convexes et applications

Exercice 4

L'image d'un convexe par une application continue est-elle nécessairement convexe.

▷ **Éléments de réponse.**

Clairement pas. Pourtant, d'après les valeurs intermédiaires, un exemple de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ne suffit pas. On peut considérer simplement l'image de $[-\pi, \pi]$ par l'exponentielle imaginaire, qui est la sphère du plan d'Argand-Cauchy, qui n'a rien de convexe, en cela que deux points distincts formeront toujours une corde sortant de la sphère.

Propriété. ***(Image d'un convexe par une application linéaire)***

Soient E,F deux espaces vectoriels réels. Soit C un convexe de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $f(C)$ est convexe.

1.6.3 Points extrémaux

Définition. ***(Point extrémal)***

Soit A une partie de E. On dit que $c \in A$ est *extrémal* (dans A), ou que c est un *point extrême* de A, si $A \setminus \{c\}$ est convexe.

Remarque. Cette définition n'a d'intérêt que si A est déjà connexe, mais elle n'est pas dépourvue de sens dans le cas général néanmoins.

Exercice 5

Trouver une partie non convexe du plan et exhiber l'un de ses points extrémaux.

▷ **Éléments de réponse.**

Prendre une boule et un point hors de la boule. Ce n'est pas une partie convexe du plan. Pourtant, le point hors de la boule est extrémal, car si on le retire, on obtient une boule, convexe.

Propriété. ***(Caractérisation des points extrémaux)***

Soit A un convexe. Un point $c \in A$ est extrémal, si et seulement si, pour tous $c_1, c_2 \in A$, $c = \frac{c_1+c_2}{2} \implies c_1 = c_2 = c$.

▷ Supposons que c soit le milieu de deux points distincts de A, distincts de c ; en effet, si $c_1 \neq c$, alors $c_2 \neq c$. Alors A privé de c ne peut être convexe, car alors on aurait un segment liant deux éléments de $A \setminus \{c\}$ dont le milieu n'est pas dans $A \setminus \{c\}$. Réciproquement, si A privé de c n'est pas convexe, alors il existe $a,b \in A$, $a,b \neq c$, tel qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $x \notin A \setminus \{c\}$. Remarquons que $a \neq b$. Puisque, A étant convexe, $x \in [a,b] \subseteq A$, on a $x = c$. Posons $\rho = \min(\|x-a\|, \|x-b\|)/2$ et $c_1 = \rho x + (1-\rho)a$, et $c_2 = \rho x + (1-\rho)b$. Puisque $x \neq a,b$, on a $\frac{c_1+c_2}{2} = x = c$ où ni c_1, ni c_2 n'égale c. ■

Exercice 6

Quels sont les points extrémaux d'un triangle ?

▷ **Éléments de réponse.**

Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets (et non sa frontière !).

Voilà un exemple géométrique précisant la conception géométrique du point extrémal :

La notion de point extrémal apparaît dans le théorème de Krein-Milman dont nous donnons une version élémentaire.

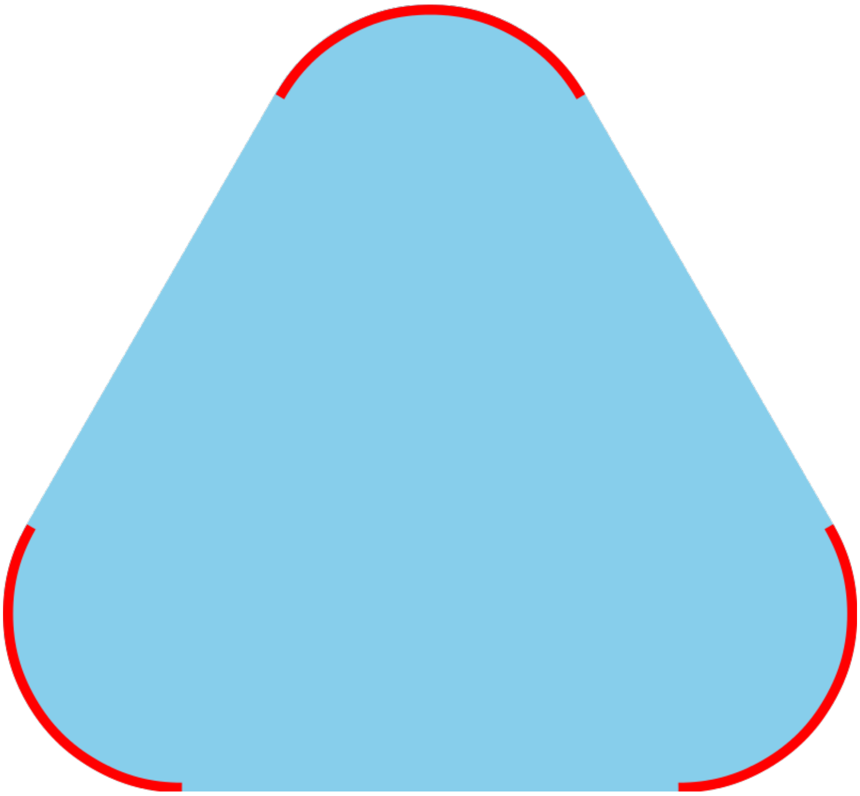


FIGURE 1.6.1 : *Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière.* — Les points extrémaux sont indiqués en surlignage rouge.

Théorème. ***(Théorème de Krein-Milman)***

Tout convexe compact en dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

▷ On procède par récurrence sur la dimension. En dimension nulle, il n'y a rien à faire : il n'y a que deux convexes, $\emptyset$ et $\{0\}$; c'est trivial dans les deux cas. Soit maintenant C un convexe compact dans un espace vectoriel normé réel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et supposons le théorème vrai pour tout convexe compact inclus dans un sous-espace de dimension $k < n$. Soit $m \in C$. Montrons que m s'exprime comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de A, et cela suffit, car l'enveloppe convexe des points extrémaux de A, est a fortiori incluse dans A, convexe. Soit D une droite quelconque passant par m, par exemple, $\mathbb{R}_-$. L'ensemble $C \cap D$ est alors un convexe inclus dans C. Puisque C et D sont fermés, $C \cap D$ est un compact en tant que fermé dans le compact C. C'est donc un convexe compact d'un espace de dimension 1. Il est donc de la forme $[a,b]$, où $a,b \in A$ et $m \in [a,b]$, naturellement. Or a,b sont sur la frontière du convexe C, car ils sont adhérents au complémentaire de C, autrement, on formerait une boule contenant un point de D dans C et non dans $[a,b]$, absurde. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc des hyperplans d'appuis H_a et H_b en ces points. Introduisons les convexes, par intersections de convexes, $C_a = C \cap H_a$ et $C_b = C \cap H_b$. On remarque alors que tout point extrémal de C_a est encore un point extrémal de C. En effet, étant donné un point extrémal c de C_a et $x,y \in C \setminus \{c\}$. Si l'un au moins des deux points x,y n'est pas dans H_a, vu le caractère séparant de cet hyperplan, tout le segment ouvert $]x,y[$ reste dans un seul demi-espace ouvert délimité par H_a et évite donc c. Si $x,y \in H_a$ maintenant, puisque $C_a \setminus \{c\}$ est convexe, $[x,y]$ évite c. Dans tous les cas,

$[x,y]$ est entièrement dans $C \setminus \{c\}$, d'où l'observation. Elle tient également pour le convexe C_b.

Les convexes C_a, C_b étant inclus dans des hyperplans de dimension $k-1$, on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi a est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de C_a, donc de C ; de même, b est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de C_b donc de C. Puisque m est barycentre à coefficients positifs de a et b, par associativité, le résultat est montré. ∎

Exercice 7

Donner un exemple graphique où, dans le théorème précédent, C_a ou C_b ne sont pas réduits à des points.

On retrouve le résultat suivant :

Corollaire. ***(Krein-Milman pour les polygones)***

Tout polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

Chapitre 2

Espaces métriques

Résumé

On donne quelques propriétés propres aux espaces métriques : notion de distance atteinte, propriétés des boules, complétude et théorie de Baire dans le cadre complet.

2.1 Distances

2.1.1 Définition d'une distance

Définition. ***(Majoration d'une distance)***

Soit (E,d) un espace métrique. Alors $(E, \min(1,d))$ est une distance.

▷ Preuve facile. ■

Exercice 8

Ces deux espaces sont-ils homéomorphes ?

Définition. ***(Distance de Manhattan)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On pose pour tous $x,y \in E$:

$$d(x,y) = \|x-y\| \text{ si } x,y \text{ sont colinéaires}, d(x,y) = \|x\| + \|y\| \text{ sinon.}$$

▷ Il suffit de disjoindre les cas. ■

2.1.2 Distance issue d'une norme

Définition. ***(Distance homogène)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ un corps valué. On dit qu'une distance d sur E est homogène si :

$$\forall x,y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y).$$

Propriété. ***(Homogénéité des distances)***

Toute distance sur un espace normé issue d'une norme est homogène.

Exercice 9

La distance de Manhattan associée à la norme euclidienne est-elle issue d'une norme ?

Méthode. ***(Montrer qu'une distance n'est pas issue d'une norme)***

Si une distance sur un espace normé n'est pas homogène en les scalaires, elle ne peut être issue d'une norme.

2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties

2.1.3.1 Définition

On note que la distance à une partie est toujours définie en tant que borne inférieure d'une famille minorée non vide de réels.

2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie

Soit (E,d) un espace métrique. On introduit le problème d'optimisation suivant :

Définition. ***(Distance à une partie atteinte)***

Soit A une partie non vide de E et x un point de E. On dit que la distance de x à A est *atteinte*, ou que x *réalise* la distance de x à A, s'il existe $y \in A$ tel que

$$d(x,y) = d(x,A) = \inf_{z \in A} d(x,z).$$

On remarque que l'hypothèse $y \in A$ est tout le fond de cette définition.

Exercice 10

Soit A une partie non vide d'un espace métrique E et $x \in E$. Existe-t-il toujours $y \in E$ tel que $d(x,A) = d(x,y)$? Que dire dans le cas d'un espace vectoriel normé ?

Notons également que le problème de réalisation de la distance n'a de sens que dans un espace métrique (qui dit distance...)

Si le point considéré appartient à la partie, alors la distance est trivialement atteinte en ce point et la notion n'a aucun intérêt. Sans autre condition supplémentaire, la distance d'un point à une partie n'a aucune raison d'être atteinte. On a même le fait général suivant :

Fait. ***(Distance à un ouvert)***

Dans un espace normé, la distance à un ouvert d'un point n'appartenant pas à cet ouvert, n'est jamais atteinte. Soit O un ouvert de E et $x \notin O$. Si O est vide, $d(x,O) = +\infty$ ne peut être atteinte par une distance (finie). Sinon, supposons que $d(x,O) = d(x,y)$ pour un certain $y \in O$. Par définition d'un ouvert il existe une boule $B(y,\rho)$, $\rho > 0$, incluse dans O. Alors le point $z = (1 - \frac{\rho/2}{d(x,y)})x + \frac{\rho/2}{d(x,y)}y$ est dans O et sa distance à x est strictement inférieure à $d(x,y)$, absurde.

Intuitivement, il faut des hypothèses de rigidité sur A pour que la distance soit atteinte : typiquement, fermeture, compacité, complétude. La distance à un compact est l'exemple le plus élémentaire de tous.

Propriété. ***(Distance à un compact)***

La distance d'un point à un compact non vide est atteinte.

$\triangleright$ Soit x un point de E et K un compact. Il s'agit de remarquer que l'application $x \longrightarrow d(x,y)$ est continue, ce qui découle de ce qu'elle est 1-lipschitzienne, par la seconde inégalité triangulaire. L'image continue d'un compact étant compacte, donc fermée, l'infimum $\inf_{z \in K} d(x,z)$ est un minimum, c'est-à-dire atteint. (On peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes qui est sensiblement la même chose.) ■

Par contre, la distance à un fermé peut facilement ne pas être atteinte.

Contre-exemple. ***(Distance à un fermé non atteinte : l'hyperbole polynomiale)***

Les propriétés suivantes montrent que, dans un espace vectoriel normé, on doit se placer en dimension infinie pour trouver un tel contre exemple.
Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie, la partie $A = \{(1 + \frac{1}{2^n})X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fermée : elle est discrète et les points ne peuvent s'accumuler qu'au voisinage de l'infini. La distance au polynôme nul est clairement nulle, mais évidemment jamais atteinte. □

On dispose pourtant du résultat suivant.

Proposition. ***(Distance à un fermé dans un espace métrique sympathique)***

On suppose que toutes les boules fermées de E sont compactes. Soit F un fermé de E et $x \in E$. Alors la distance à E est atteinte.

▷ La preuve est grosso modo la même que dans les espaces vectoriels de dimension finie, qui, par le théorème de Riesz, écopent de la propriété précédente. On laisse le soin au lecteur d'adapter la preuve ci-dessous, faite dans ce cas beaucoup plus pratique, mais foncièrement inchangée. ■

On s'intéresse donc au cas des espaces vectoriels normés, où les choses se déroulent un peu mieux. Soit donc E un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. On note d la distance issue de la norme.

Propriété. ***(Distance à un fermé de dimension finie)***

Soit F un fermé de E inclus dans un sous-espace de dimension finie. Soit $x \in E$. Alors la distance de x à E est atteinte.

▷ Classique. ■

Corollaire. ***(Distance à un sev de dimension finie)***

La distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie, est toujours atteinte.

▷ Puisque tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé dans E. ■

En dimension infinie, rien ne va plus, même si le sous-espace en question est fermé.

Contre-exemple. ***(Distance à un sous-espace vectoriel fermé non atteinte)***

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles de limite nulle muni de la norme infinie. La forme $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x_n$ est clairement linéaire, continue et non nulle ; son noyau est donc un hyperplan fermé de E. Pourtant, pour tout point $x \notin H$, la quantité $d(x,H)$ n'est pas atteinte.
Vérifions-le. Soit x quelconque, hors de H. Remarquons que $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$. En effet, pour tout $h \in H$, $|f(u-h)| \leqslant \|f\|\,|u-h|$ d'où $\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant d(x,H)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur unitaire s tel que $|f(s)| \geqslant \|f\| - \varepsilon > 0$. On a donc, en prenant $h = u - \frac{f(u)}{f(s)}s$, $d(u,H) \leqslant \|u-h\| \leqslant \frac{|f(u)|}{\|f\|-\varepsilon}$.
Par conséquence, si $d(x,H)$ est atteinte, alors f atteint sa norme sur la sphère. En effet, $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|f(u-z)|}{\|f\|}$. Or la norme de f est 2 en considérant les $(1,\ldots,1,0,\ldots)$. Seulement, f atteint sa norme seulement en $(1,\ldots) \notin E$. Par contraposée, $d(x,H)$ n'est pas atteinte. □

On rappelle en parallèle du cours sur les espaces de Hilbert que l'on dispose du théorème très fort suivant dans les espaces préhilbertiens et complets :

Théorème. ***(Théorème de projection sur un convexe fermé)***

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte.

En particulier :

Corollaire. ***(Distance à un sev fermé dans un Hilbert)***

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un sous-espace de Hilbert est toujours atteinte.

$\triangleright$ En effet, un sous-espace de Hilbert est complet donc fermé ; de plus, un sous-espace vectoriel est convexe. ■

On voit d'abord que l'hypothèse de complétude était nécessaire. L'existence d'un produit scalaire est cruciale, de même que la convexité. Les trois contre-exemples suivants permettent de trancher dans les cas qui restent.

Contre-exemple. ***(Si l'on n'est plus dans un complet)***

On considère l'espace pourtant préhilbertien $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme 2. Alors le noyau $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^{\frac{1}{2}} f = 0\}$ de la forme linéaire $f \longmapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f$ est un convexe fermé, car f est continue et un espace vectoriel est convexe. La distance de 1 à F n'est pourtant pas atteinte. (Exercice : s'inspirer du contre-exemple précédent.)
On a en fait le fait général suivant : la distance au noyau d'une forme linéaire continue d'un point ne lui appartenant pas est atteinte si et seulement si la norme de cette forme est atteinte. Nous démontrons ce résultat dans la partie sur les espaces vectoriels normés déjà vu si tout est normal. □

Contre-exemple. ***(Si l'on n'est plus dans un Hilbert)***

On reprend l'exemple développé des suites qui tendent vers zéro et du noyau de la forme linéaire qui à $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$. Puisque c'est un Banach. □

Contre-exemple. ***(Distance à un fermé dans un Hilbert)***

On cherche donc une partie non convexe.
On a en fait en toute généralité : soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie (tout Hilbert de dimension infinie convient alors). D'après le théorème de Riesz, la sphère unité de E n'est pas compacte, donc il existe une suite $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. Posons $x'_n = (1 + \frac{1}{n+1})x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est un fermé de E (clairement non convexe, d'ailleurs). En effet, si u est une suite convergente à valeurs dans A, soit elle admet un nombre fini de termes, auquel cas elle est stationnaire donc de limite dans A, soit elle admet un nombre infini de termes, auquel cas on peut en extraire une sous-suite qui est également une sous-suite de (x'_n). Cependant, celle-ci tend vers l'infini, donc la sous-suite également, donc ne converge pas, ce qui est exclu.
De plus, et de façon immédiate, on observe que $d(0,A) = 0$ en observant $d(0,x'_n)$ qui tend

vers 1 quand n tend vers l'infini, mais que $d(0,x'_n) = 1 + \frac{1}{n+1} \neq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc la distance de 0 à A n'est pas atteinte. $\square$

Grâce au contre-exemple général précédent, on peut énoncer sans autre justification la caractérisation suivante.

Propriété. ***(Caractérisation de la dimension par les distances à fermés)***

Un espace vectoriel normé est de dimension finie, si et seulement si, la distance de tout point à tout fermé est atteinte.

2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances

On se demande maintenant quelles conditions supplémentaires ajouter pour que, lorsque la distance d'un point à une partie est atteinte par un point dans cette partie, ce point d'atteinte soit unique.

Il n'y a aucune raison que ce soit le cas, en particulier on peut avoir une infinité de points en lequel la réalisation de la distance a lieu, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. ***(Distance atteinte une infinité de fois)***

Dans $\mathbb{R}^2$ le plan muni de la distance euclidienne, on considère la sphère unité $A = S(0,1)$ et l'origine $x = (0,0)$. Alors pour tout $y \in A$, $d(x,y) = 1$ par définition. Ainsi en passant à l'infimum, $d(x,A) = 1$. Or A est une partie infinie de $\mathbb{R}$ (par exemple, elle contient $\mathbb{U}_p$ pour tout nombre premier p). On a le résultat.
Notons que A et donc l'ensemble des points de réalisation de la distance est même indénombrable.

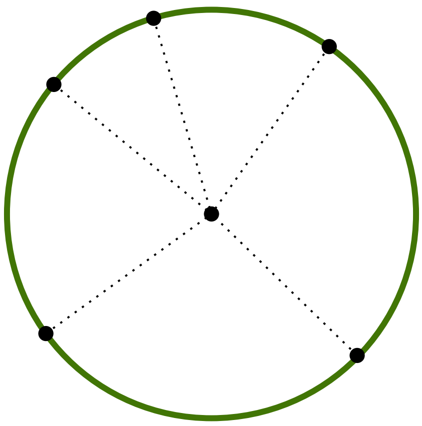


FIGURE 2.1.1 : *Distance de l'origine à la sphère unité.* —
La distance de la sphère à son centre est atteint en une infinité de points.

De façon plutôt intuitive, le problème vient de ce que la partie A, globalement éloignée du point x, peut « s'approcher de x » plusieurs fois. Un exemple très simple est donné par la figure 2.1.2.

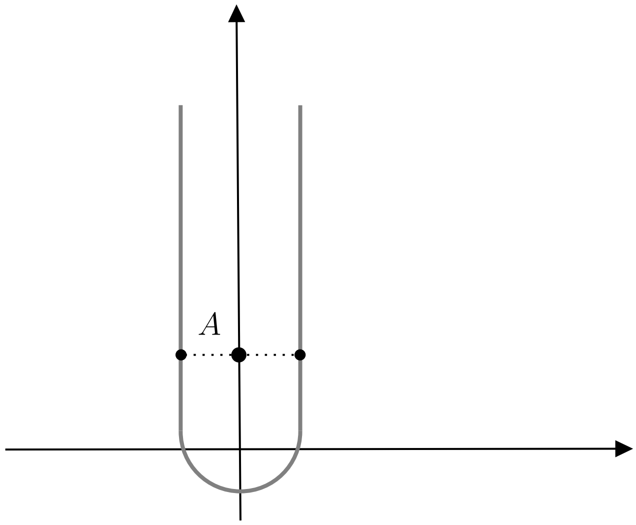


FIGURE 2.1.2 : *Distance de la fourche à un point de la bissectrice.* — Sur la figure ci-dessus, quitte à prendre le point A suffisamment éloigné du cul de la courbe en U, si tant est qu'il soit sur une droite équidistante à ses deux asymptotes, sa distance à la courbe est atteinte en deux points distincts opposés par symétrie de la figure.

On comprend que si la figure est convexe, une telle disposition ne peut se concevoir. On a le résultat suivant :

Propriété. ***(Distance à un convexe dans un espace préhilbertien)***

On se place dans un espace **préhilbertien**. Si la distance d'un point à une partie convexe est atteinte, alors ce point est unique.

▷ Soient C un convexe d'un espace vectoriel normé E et $x \in E$. Supposons que la distance de x à C soient atteintes en deux points $y,y' \in C$, c'est-à-dire $d(x,C) = d(x,y) = d(x,y')$. Soit $z = \frac{y+y'}{2}$ le milieu de $[y,y']$. Alors $z \in C$ par convexité. Montrons que $d(x,z) \leqslant d(x,y) = d(x,C)$. On a : $2d(x,z) = 2\,\|x-z\| = \|2x-y-y'\| \leqslant \|x-y\| + \|x-y'\| = d(x,y) + d(x,y') = 2d(x,y')$ d'où le résultat. Si $y \neq y'$, on a même l'inégalité stricte, car le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire s'exprime, pour une norme issue d'un produit scalaire, $x-y = \lambda(x-y')$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Puisque $x-y$ et $x-y'$ on la même norme, on obtient, si $d(x,z) = d(x,y)$, $\lambda = \pm 1$ d'où $\lambda = 1$. De plus, par le cas d'égalité, $(1-\lambda)x = y - \lambda y'$ en ramenant tout du bon côté, d'où $y = y'$. Mais $d(x,z) < d(x,y)$ est exclu par définition de la distance à une partie. Par contraposée, $y = y'$. ■

Remarquons que la distance à un convexe n'est pas forcément atteinte : il suffit de considérer une boule ouverte et un point hors de cette boule.

Exercice 11

Fournir un contre-exemple dans le cas d'un convexe d'un espace non préhilbertien.

▷ **Éléments de réponse.**

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance associée à la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$, on choisit le point $M = (1,0)$ et la partie $D = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$. Alors pour tout $N = (0,y) \in D$, $MN = \|(1,-y)\| = \max(1,|y|)$. L'infimum de cet ensemble sur $y \in \mathbb{R}$ est 1, qui est atteint pour tout $N \in \{0\} \times [-1,1]$, soit une infinité de points.

Les deux énoncés suivant permettent également de garantir l'unicité du projeté.

Théorème. ***(Théorème de projection sur un convexe fermé)***

En fait, dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte en un unique point.

Au vu des considérations précédentes, on peut aussi énoncer sans problème le fait suivant, déjà connu des élèves familiers du cours d'optimisation :

Propriété. ***(Projection sur un compact convexe)***

Soit n un entier naturel quelconque. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et x un point. La distance de x à K est atteinte en un unique point.

▷ La compacité assure l'existence, la convexité l'unicité. ■

2.1.4 Équivalence de distances

Définition. ***(Lipschitz-équivalence des distances)***

Deux distances sur E sont dites *Lipschitz-équivalentes*, s'il existe des constantes c et c' telles que $cd_1 \leqslant d_2 \leqslant c'd_1$.

Observation. ***(Caractérisation de la Lipschitz-équivalence par l'identité)***

Deux distances d_1, d_2 sur E sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si l'identité de E est un (d_1,d_2)-homéomorphisme.

Définition. ***(Lipschitz-équivalence des distances)***

Deux distances sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent les mêmes ouverts.

On peut montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, si et seulement si toute boule de l'une et incluse dans une boule de l'autre de même centre, et réciproquement. On a également une caractérisation séquentielle : deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente au sens de l'une converge au sens de l'autre. Par ailleurs, le cas échéant, les limites coïncident.

Propriété. ***(Lipschitz-équivalence implique équivalence topologique)***

Deux normes Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

▷ Le vérifier. ■

Contrairement à ce qui se passe pour les normes, la réciproque est fausse en général pour des distances non issues de normes.

Contre-exemple. ***(Distances topologiquement équivalentes non-Lipschitz-équivalentes)***

Prenons $h :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme quelconque. Prenons la distance d_1 associée à la valeur absolue sur $]0,1[$ et l'on définit : $d_2(x,y) = |h(x) - h(y)|$. Dans ce cas, d_1 et d_2 sont des distances sur $]0,1[$ qui définissent la même topologie, mais ne sont pas Lipschitz-équivalentes, car l'une est bornée mais l'autre non. □

2.2 Boules

2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées

Exercice 12 *(Extrêmement formateur)*

Donner une exemple de boule fermée qui soit ouverte mais ne soit pas une boule ouverte. On pourra se placer sur un sous-espace métrique du plan muni de la norme euclidienne.

▷ **Éléments de réponse.**

On prend comme indiqué $E = [-1,-1] \times \{0\} \cup \{0\} \times]1,2]$ et la boule $B = B_f(0,1)$.

2.2.2 Premières propriétés

2.2.3 Propriétés géométriques

Propriété. ***(Inclusions réciproques des boules)***

Soit un espace métrique E et $a \in E$, $r < r'$ deux réels. Alors

$$B_0(a,r) \subseteq \overline{B_0(a,r)} \subseteq B_F(a,r) \subseteq B_0(a,r') \subseteq \overline{B_0(a,r')} \subseteq B_F(a,r').$$

Propriété. *(Propriété fondamentale des sous-boules)*

Soit un espace métrique E. Soient a,b deux points de E et $r > 0$. On suppose que $b \in B(a,r)$. Alors $B(b, r - d(a,b)) \subseteq B(a,r)$. De plus, si $\rho = \frac{d(a,b)}{2}$, alors

$$B(b, r - \rho) \subsetneq B(a,r).$$

Propriété. *(Intercalaison de sous-boules)*

Soit un espace métrique E. Soient $a,b \in X$ et $r,s > 0$. Soit $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Soit $\rho = \min\left(r - d(a,x), s - d(b,s)\right)$. Alors $\rho > 0$ et $B(x,\rho) \subseteq B(a,r) \cap B(b,s)$.

Propriété. *(Homéomorphie des boules dans un evn)*

Dans un espace vectoriel métrique, les boules ouvertes forment une base de la topologie canonique.

Propriété. *(Déplacement de boules)*

Soit un espace **vectoriel** E. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Alors $z \in B(0,1) \iff rz+a \in B(a,r)$.

Corollaire. *(Homéomorphie des boules dans un evn)*

Dans un espace vectoriel normé, toutes les boules sont homéomorphes.

2.3 Limites

2.3.1 Limites de suites

On dispose du résultat suivant, dont on s'étonne seulement qu'il ne soit pas plus généralement enseigné.

Propriété. *(Invariance de la limite par permutation)*

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que u tende vers $l \in E$. Alors pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente de limite l.

▷ Reprenons les notations du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tout $n \geqslant N$, $u_{\varphi(n)} \in B(l,\varepsilon)$. Or par hypothèse, il existe N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \in B(l,\varepsilon)$. Comme φ est injective, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geqslant N_0$ dès que $n \geqslant N_1$. En effet, supposons le contraire. Cela signifierait que pour tout entier naturel N_1, on peut trouver un entier $n \geqslant N_1$ tel que $\varphi(n) < N_0$. Autrement dit, on peut construire un sous-ensemble infini X de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(X) \subseteq \{1,2,...,N_0 - 1\}$. Mais l'image d'un ensemble infini par une application injective est infini, contradiction. Par conséquent, pour $n \geqslant N_1$, $u_{\varphi(n)} \in B(l,\varepsilon)$. ■

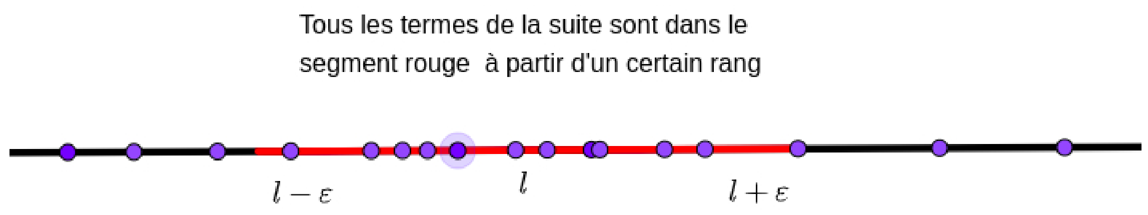


FIGURE 2.3.1 : *Invariance de la limite par permutation.* —
Par définition de la limite, tous les termes de la suite sont dans une boule centrée en la limite (ici, dans le cas de la droite réelle) à partir d'un certain rang. Ainsi, seulement un nombre fini de termes permutés seront hors de la boule également.

Remarque. En observant la preuve, on se rend compte que l'on a montré le résultat pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective. On retrouve en particulier le résultat sur les limites des suites extraites, puisque toute extractrice est strictement croissante, donc injective.

> On se rend compte, en fait, que l'hypothèse d'injectivité est équivalente à ce que la nouvelle suite construite comporte une infinité des termes de la suite d'origine. Le théorème précédent énonce précisément que cette condition suffit à ce que la propriété asymptotique de limite soit inchangée.

Ceci se généralise, dans le cas où $E = \mathbb{R}$, à des limites infinies.

Exercice 13

Montrer que, si une suite (u_n) diverge, alors pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$, $(u_{\varphi(n)})$ diverge.

▷ **Éléments de réponse.**

Se ramener au théorème précédent.

2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence

Propriété. ***(Caractérisation de la limite par les sous-sous-suites)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'espace métrique (E,d). On suppose que de toute sous-suite de u, on peut extraire une sous-sous-suite qui converge. Alors (u_n) converge.

▷ Supposons que u ne converge pas. Alors pour tout $l \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{n_k},l) > \varepsilon$. En appliquant de façon itérée ceci à n_k, on extrait une sous-suite de u vérifiant $d(u_{n_k},l) > \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$. Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente de (u_{n_k}), notée $(u_{n_{k_l}})$, convergeant vers m. Absurde, car ■

Remarque. Il est clair qu'il ne suffit pas de pouvoir extraire une sous-suite convergente de u, pour qu'elle soit convergente : considérer $((-1)^n)$ bornée et la suite des termes pairs.

2.3.1.1.1 Théorèmes de convergence grossière des suites

Dans cette section, on énonce trois théorèmes qui ne le sont jamais proprement dans n'importe quel cours élémentaire de mathématiques, mais qui le devraient être, tant ils ont la nécessité d'exister par leur évidence, et qu'ils facilitent l'emploi de la notion de sous-suite dans des cas particuliers. En particulier, il est important de retenir ces résultats et l'aisance à les établir lorsqu'on travaillera en topologie générale dans un espace métrique.

Les théorèmes sont de trois natures. Ils portent sur :

1. les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ;
2. les suites passant une infinité de fois sur la même valeur ;
3. les suites à valeurs dans l'image d'une suite.

Dans les trois cas, et de façon principale pour les deux premiers, on s'intéresse aux suites convergentes vérifiant l'une de ces conditions.

On dispose donc des propositions suivantes, qui, quoique largement ignorée, permet de manipuler avec des outils topologiques les ensembles de la forme $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Les choses ne sont pas si simples, mais avec un peu de travail, on s'y ramène dans trop de peine.

On se servira du lemme suivant, qui découle des propriétés sur les ensembles discrets d'un espace métrique. On peut néanmoins le montrer par des moyens élémentaires.

Lemme. ***(Suites convergentes à support fini)***

Une suite convergente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est stationnaire.

▷ Soit u une suite d'un espace métrique E. On suppose que u converge et ne prend qu'un nombre fini n de valeurs. Montrons le résultat par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour un certain n. Soient $(a_1,...,a_{n+1})$ les valeurs prises par la suite. Si u ne prend qu'un nombre fini de fois la valeurs a_{n+1}, alors à partir d'un certain rang, elle ne prend plus que n valeurs : par hypothèse de récurrence, elle est donc stationnaire. Sinon, elle prend une infinité de fois la valeur a_{n+1}. On construit une sous-suite de u qui ne prend que la valeur a_{n+1} : on pose $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k = a_{n+1}\}$ et $\varphi(0),...,\varphi(p)$ étant construits, on pose $\varphi(p+1) = \min\{k \in [\![\varphi(p)+1, +\infty[\![, u_k = a_{n+1}\}$ qui existe, car si la partie considérée était finie, u prendrait au plus $\varphi(p)+2$ fois la valeur a_{n+1}. On a donc une sous-suite qui converge trivialement vers a_{n+1}, donc la limite de u, supposée convergente, est a_{n+1}. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons que u prenne une infinité de fois la valeur a_i. Alors de même que précédemment, on construit une sous-suite constante égale à $a_i \neq a_{n+1}$, ce qui est absurde, car une suite convergente n'a qu'une limite. Ainsi, à partir du rang $N_i < +\infty$, u ne prend plus la valeur a_i. Par conséquent, à partir du rang $\max i \in [\![1,n]\!] N_i < +\infty$, u ne prend plus que la valeur a_{n+1}, elle est donc stationnaire à a_{n+1}. ■

On peut donner une preuve plus topologique de ce résultat, qui montre bien qu'elle fonctionne grâce à l'axiome de séparation :

▷ Notons l la limite de la suite u qui ne prend que les valeurs deux à deux distinctes $x_1,...,x_n \in E$. On peut noter $A = \{x_1,...,x_n\}$ et $D = Diam(A)$. Notons $\rho = \frac{1}{2}\min_{i\neq j} d(x_i,x_j) = \frac{D}{2}$. Alors à partir d'un certain rang N, tous les termes de u sont dans $B(l,\rho)$ qui ne peut par définition contenir deux termes distincts de A. S'il n'en contient aucun, c'est contradiction, car $u_N \in B(l,\rho)$ et $u_N \in A$. C'est terminé. ■

Au regard de la première preuve du résultat précédent, on peut même énoncer le lemme précédent, qui a été démontré :

Lemme. ***(Suites convergentes repassant au même endroit à l'infini)***

Une suite convergente qui prend une infinité de fois la valeur l converge vers l.

On peut surtout dire :

Propriété. ***(Suite à valeurs dans l'image d'une suite)***

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On note $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Alors (a_n) est à support fini ou il existe une suite extraite de (a_n) qui est une sous-suite de (u_n).

▷ Si (a_n) n'est pas à support fini, alors elle prend une infinité de termes d'indices distincts dans $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. De manière générale, par définition, il existe donc une correspondance quelconque (par forcément croissante) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_{f(n)}$. Par hypothèse, l'image de f est infinie. Construisons une sous-suite de $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui soit une sous-suite de (u_n). Posons $\varphi(0) = 0$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a_{\varphi(0)},...,a_{\varphi(n)}$ étant construits, on pose $\varphi(n+1) = \min\{k \in [\![\varphi(n)+1, +\infty[\![,\ a_k \neq a_{\varphi(0)}, ..., a_k \neq a_{\varphi(n)}$ et $f(k) > f\circ\varphi(n)\}$. Ce minimum existe, car par hypothèse, $(a_k)_k$ n'est pas à support fini, donc n'est pas à support fini à partir du rang $\varphi(n)+1$, et si la partie considérée était vide, soit tous les termes à partir de ce rang seraient égaux à l'un de $a_{\varphi(i)}$, ce qui exclu, car ceux-ci sont en nombre fini, soit on aurait $f(k) \leqslant f\circ\varphi(n)$ fixe, ce qui est absurde, car on a vu que f ne peut envoyer le complémentaire d'une partie finie sur une partie finie, autrement son image serait finie. L'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est bien strictement croissante par construction, donc $(a_{\varphi(n)})$ est bien une sous-suite de a. De plus, on a imposé $f\circ\varphi(n+1) > f\circ\varphi(n)$, ce qui implique que $f\circ\varphi$ est également une extractrice. Or pour tout entier naturel n, $a_{\varphi(n)} = u_{f\circ\varphi(n)}$, donc $(a_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de u. ■

On en déduit ce qui suit :

Conséquence. *(Suites convergentes à valeurs dans l'image d'une suite)*

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On note $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A. Alors (a_n) est stationnaire ou tend vers une valeur d'adhérence de u.

▷ Supposons (a_n) convergente. On note l sa limite. Si (a_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est stationnaire. Sinon, d'après la proposition précédente, elle admet une sous-suite qui est une sous-suite de u, qui converge également vers l, car toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite. Ainsi, u admet une sous-suite convergeant vers l, soit l est une valeur d'adhérence de u. ■

2.4 Compacité

2.4.1 Suites à valeurs dans un compact

On dispose de la proposition suivante, souvent oubliée, mais qui peut se révéler très utile.

Propriété. *(Suite compacte n'ayant qu'une valeur d'adhérence)*

Soit K un partie compacte de l'espace métrique E. Si (u_n) est une suite d'éléments de K n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.

▷ Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit l l'unique valeur d'adhérence de u. Par définition de la limite, on peut écrire $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N \quad d(u_n,l) > \varepsilon$. On construit donc aisément une extractrice et une sous-suite de u qui ne peut avoir u comme valeur d'adhérence, puisqu'elle reste hors de $B(l,\varepsilon)$. Cependant, cette sous-suite v a valeurs dans un compact donc admet une sous-suite w qui a une unique valeur d'adhérence. Celle-ci vaut forcément l, var w est aussi une sous-suite de u. Contradiction. ■

Conjointe à la propriété sur les valeurs d'adhérence d'une sous-suite, on obtient le théorème de caractérisation suivante dans les compacts :

Théorème. *(Caractérisation de la convergence dans les compacts)*

Soit u une suite à valeurs dans un compact. Alors u converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

▷ Le sens réciproque vient d'être traité. Pour le sens direct, on savait déjà qu'une suite convergente (à valeurs dans un ensemble quelconque) admet une unique valeur d'adhérence. ■

Théorème. ***(Caractérisation des Banach par Banach)***

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

$\triangleright$ Seul le sens direct nous intéresse véritablement. Soit E un espace de Banach. Soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $\sum |x_n|$ converge. Alors les sommes $S_N = \sum\limits_{n \leqslant N}^{x_n}$ vérifient pour tout $M \geqslant N$:

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| .$$

Or, la série $\sum \|x_n\|$ étant convergente, les tranches de Cauchy du dernier membre tendent vers zéro lorsque M,N tendent vers $+\infty$. Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge, c'est-à-dire que la série est convergente.

On donne la réciproque par souci d'exhaustivité. Supposons que toute série absolument convergente converge dans E. Soit (x_n) une suite de Cauchy à valeurs dans E. On peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \frac{1}{2}^n$, en choisissant $\varphi(n) = N$ le module associé à $\varepsilon = \frac{1}{2}^n$. On pose alors $u_n = x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Or $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(0)} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, donc on déduit que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge. Comme toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge, on en déduit la convergence de (x_n), et E est un espace de Banach. $\blacksquare$

2.5 Complétude

2.5.1 Suites de Cauchy

Propriété. ***(Condition suffisante de non-Cauchitude)***

Si pour tous $i,j \in \mathbb{N}$ $i \neq j$, $d(x_i,x_j) > \varepsilon > 0$, alors non seulement (x_n) n'est pas de Cauchy mais n'admet aucune sous-suite convergente.

2.5.2 Espaces complets

Exemples. ***(Espaces complets)***

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance dérivée de la valeur absolue est complet.
2. $]0,1]$ n'est pas complet.
3. $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est complet pour la norme infinie.
4. $\mathcal{C}_b^0((X_1,d_1),(X_2,d_2))$ est complet pour $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X_1} d_2(f(x),g(x))$ si (X_2,d_2) est complet.
5. Un ensemble borné en dimension finie est complet si et seulement s'il est compact.

Contre-exemple. ***(Un espace non complet)***

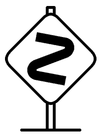
On considère $(\mathcal{C}^0([0{,}1],\mathbb{R}), \| \cdot \|_p)$ pour $p \in [1,\infty[$. Prenons pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in [0{,}1]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [\frac{1}{2},1] \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \text{ si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Alors $f_n \longrightarrow f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ et par convergence dominée, $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{m,q>n} \|f_q - f_m\|_p = 0$.

La suite (f_n) et donc de Cauchy. Pourtant, elle ne converge pas dans $\mathcal{C}^0([0{,}1])$, puisque la limite n'est pas continue et unique dans L^p. □

Remarque. On verra que ceci montre que cet espace n'est pas fermé dans L^p.



On voit là la difficulté de traiter avec l'espace des fonctions continues sur un compact. Cet espace peut être muni de beaucoup de normes, en particulier, toutes les normes p, et se plonge ainsi dans tous les espaces L^p (qui, eux, par définition, ne peuvent être muni que de la norme L^p, ou de normes inférieures...).

Propriété. ***(Sous-espace complet d'un espace quelconque)***

Tout sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

▷ Soit F un sous-espace métrique complet d'un espace métrique E quelconque. Soit u une suite à valeurs dans F convergeant dans E vers l. Toute suite convergente est de Cauchy, dans n'importe quel espace, donc u est une suite de Cauchy de E à valeurs dans F. C'est extrinsèque : u est donc une suite de Cauchy de F. Puisque F est complet, u converge donc dans F vers l'. Par unicité de la limite, $l = l' \in F$, donc F est fermé. ■

Propriété. ***(Compact $\implies$ complet)***

Tout espace métrique compact est complet.

Plus généralement, toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

2.5.3 Théorie de Baire dans le cas complet

Pour s'échauffer, on énonce la propriété suivante :

Propriété. ***(Intersection finie d'ouverts denses)***

Dans un espace topologique quelconque, toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

▷ Soit $O_1,\ldots,O_n$, $n \in \mathbb{N}$, des ouverts denses de l'espace E. Soit Ω un ouvert quelconque. On veut montrer $(O_1 \cap \ldots \cap O_n) \cap \Omega \neq \emptyset$. On pourrait écrire :

$$(O_1 \cap \ldots \cap O_n) \cap \Omega = (O_1 \cap \Omega) \ldots (O_n \cap \Omega),$$

et chaque $O_i \cap \Omega$ est non vide, mais cela ne suffit pas pour conclure. Par contre, on peut raisonner par récurrence : $O_1 \cap \Omega$ est non vide, et $O_{i+1} \cap [(O_i \cap \ldots \cap O_1) \cap \Omega]$ est non vide, car O_{i+1} est dense et $(O_i \cap \ldots \cap O_1) \cap \Omega$ est un ouvert non vide, par intersection finie d'ouverts et car $O_i \cap \ldots \cap O_1$ est dense dans E par hypothèse. ■

On se rappellera de ce butoir dans la preuve qui justifie que la preuve du théorème de Baire utilise le théorème des fermés emboîtés : *on a besoin d'une densité* jointe *et non d'une densité ouvert par ouvert* qui donne éventuellement des ouverts disjoints, donc d'intersection vide.

Puisque la propriété duale de la densité et le fait d'être d'intérieur vide, on peut l'énoncer également de la manière suivante :

Propriété. ***(Réunion finie de fermés d'intérieur vide)***

Dans un espace topologique quelconque, toute réunion finie de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Plus généralement, la théorie de Baire se demande ce qui se passe dans le cas d'une intersection finie.

Définition. ***(Espace de Baire)***

On dit qu'un espace topologique E est un *espace de Baire* s'il vérifie la *propriété de Baire* énoncée comme suit : toute intersection d'ouverts dense est dense.

On énonce un lemme célèbre et utile pour la preuve du théorème de Baire, qui donne que les espaces métriques complets, **en particulier les espaces de Banach**, sont tous des espaces de Baire.

Théorème. ***(Théorème des fermés emboîtés)***

Dans tout espace métrique complet, toute intersection décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers zéro est réduite à un singleton.

▷ Soit (E,d) un espace métrique complet, et (F_n) une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ où $\delta(F_n) = \sup_{(x,y \in F_n^2} d(x,y)$. Montrons qu'il existe

$x \in E$ tel que $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est non vide donc il contient un élément x_n d'après l'axiome du choix dénombrable. Soit $\varepsilon > 0$. Les diamètres tendant vers zéro, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(F_N) < \varepsilon$, et alors pour tous $p,q > N$, $d(x_p,x_q) < \varepsilon$, car par décroissance de (F_n), $x_p,x_q \in F_N$. La suite des (x_n) est donc une suite de Cauchy. E étant complet, elle converge vers un élément x de E. Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p est fermé et $x_n \in F_p$ pour tout $n \geqslant \mathbb{N}$, donc x appartient à F_p. On en déduit que $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide. Supposons enfin que $x,y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x,y \in F_n$ donc $0 \leqslant d(x,y) \leqslant \delta(F_n)$. En passant à la limite, $d(x,y) = 0$ d'où par séparation $x = y$. On en déduit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est le singleton $\{x\}$. ■

Remarque importante. On montre en fait un résultat plus fort. Sous les hypothèses du lemme, toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *adaptée* à l'emboîtement des fermés, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F_n$, est convergente, de limite x telle que $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Théorème. ***(Théorème de Baire)***

Dans tout espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense. Autrement dit, tout espace métrique complet est de Baire.

▷ Soit (E,d) un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide V de E, $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$. Soit donc V un ouvert de E. On construit par récurrence une suite (B_n) de boules fermées de E telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de rayon non nul inférieur à $\frac{1}{2}^n$, et d'autre part, $B_0 \subseteq O_0 \cap V$ et $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$. On notera que ces boules sont emboîtées.

L'ouvert O_0 est dense dans E donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$. Or cet ensemble est ouvert par intersection de deux ouverts, donc il existe une boule ouverte $B(x_0, r) \subseteq O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermé de centre x_0 et de rayon $r/2$ (ou 1 si $r/2 > 1$), on a donc $B_0 \subseteq O_0 \cap V$. Supposons les boules $B_0, ..., B_n$ construites et vérifiant les propriétés voulues. L'ouvert O_{n+1} étant dense dans E, $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $B(x,r)$ incluse dans $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$, et si l'on prend pour B_{n+1} la boule fermé de centre x et de rayon $\min(r/2, \frac{1}{2}^{n+1})$, on a $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$, et B_{n+1} vérifiant bien les propriétés voulues.

Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers 0. De plus, E est complet, donc d'après le théorème des fermés emboîtés, il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$. Comme $B_0 \subseteq V$, on a en particulier $x \in V$. D'autre part, par construction, $B_n \subseteq O_n$ pour tout n, donc $x \in O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ donc $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, ce qu'il fallait montrer. ■

Contre-exemple. ***(Théorème de Baire infirmé dans un pasbanach)***

On prend $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\Omega_n = \complement_E \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\mathbb{R}_[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, c'est un fermé d'intérieur vide, donc Ω_n est un ouvert dense de E. De plus, $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ donc $\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$. Ainsi $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n} = \emptyset \neq E$!
On voit en particulier que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace de Banach. □

Contre-exemple. ***(Théorème de Baire)***

Soit $E = [0,1]$ compact donc complet. Soit $O_x = [0,1] \setminus \{x\}$, ouvert dense de E. Alors $\bigcap_{x\in E} O_x = \emptyset$ est une intersection (indénombrable) d'ouverts dense, non dense. □

Exercice 14 *(Éclaircissements)*

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ grâce au théorème de Baire.
   Indication Utiliser la dénombrabilité que $\mathbb{Q}$.
2. En déduire qu'il n'y a aucune raison pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts dense soit dense.

Remarque importante. Tout espace homéomorphe à un espace métrique complet (on dit *complètement métrisable*) vérifie la propriété de Baire, sans qu'il doive être forcément complet.

Reformulation pratique. ***(Propriété de Baire pour les fermés d'intérieur vide)***

Toute réunion de fermés recouvrant un espace métrique complet non vide, contient au moins un fermé d'intérieur non vide.

▷ Il suffit de passer au complémentaire dans le théorème de Baire. ■

Définition. ***(Espace complètement de Baire)***

On dit qu'un espace topologique E est un *espace complètement de Baire* si tout sous-espace fermé de E est de Baire.

Propriété. ***(Complète Bairitude des espaces complètement métrisables)***

Tout espace complètement métrisable est complètement de Baire.

▷ Soit E un espace complètement métrisable en d. Soit F un sous-espace fermé de E. Alors, muni de la distance induite, c'est un sous-espace fermé de (E,d) qui est complet. Donc F est un espace métrique complet. Il vérifie donc la propriété de Baire d'après le théorème précédent. ■

Chapitre 3

Topologie générale

Résumé

La topologie permet de formaliser la notion de *proximité*, et donc, celle de convergence et de continuité. En analyse, on s'intéresse à une topologie extrêmement souple, dite *topologie métrique*, où l'on mesure numériquement la distance entre deux points. En topologie générale, on ne connaît pas forcément la distance entre tous les points de l'espace, mais on est capable de dire, avec une certaine précision (dépendant de la donnée d'une *topologie*), s'ils sont proches.

3.1 Définitions de base d'une topologie

Définitions

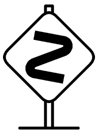
1. Un espace est dit *nul* ou *vide* s'il est vide. Il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.
2. Un espace est dit *trivial* s'il est vide ou réduit à un singleton. Dans le cas où il n'est pas vide, il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.

3.1.1 Ouverts et fermés

Cette définition est *minimale*, comme souvent en mathématiques. On verra d'autres définitions qui ne le sont plus, mais seront forcément plus intuitives.

Remarque. Le complémentaire induit une bijection involutive des ouverts d'un espace topologique sur l'ensemble de ses fermés.

A propri, il existe des parties de X qui ne sont ni ouvertes, ni fermées !



Ainsi, curieusement, les ouverts et les fermés en topologie générale ne passent pas à la limite ensembliste !

Exercice 15

Que dire d'une topologie dont les axiomes permettraient la stabilité par intersection quelconque d'ouverts ?

▷ **Éléments de réponse.**

On aurait alors la stabilité par réunion quelconque de fermés... Dans le cas où les singletons sont fermés, cela donne une topologie nécessairement grossière. Mais ce n'est pas forcément le cas (exemple ?). Avec les lois de Morgan, on parvient à la même conclusion avec un peu plus de travail sur les ensembles.

Remarquons que les intersections croissantes et les réunions décroissantes sont tout à fait dépourvues d'intérêt (pourquoi ?).

Exercice 16

1. Donner un exemple d'une intersection décroissante d'ouverts qui n'est pas ouverte.
2. Donner un exemple d'une réunion croissante de fermés qui n'est pas fermée.

Propriété. ***(Somme d'ouverts)***

Dans un evn, la somme de deux ouverts est ouverte.

▷ Soient A,B deux ouverts. Alors $A + B = \bigcup_{a \in A} \tau_a(B)$ où la translation τ_b est un homéomorphisme. ■

3.1.2 Voisinages

Mnémonik : les ouverts sont exactement les ensembles qui sont voisinage d'eux-mêmes.

3.1.3 Comparaison de topologies

3.1.3.1 Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble

Définition. ***(Finesse, grossièreté)***

Soient E un ensemble et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur E, définies au moyen des ouverts.

- Si $\mathcal{T}_1 \subseteq T_2$, on dit que T_1 est *moins fine* ou *plus grossière* que T_2.
- Si $\mathcal{T}_2 \subseteq T_1$, on dit que T_1 est *plus fine* ou *moins grossière* que T_2.

Heuristique

On a vu qu'une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient beaucoup d'ouverts (ou beaucoup de fermés). Intuitivement, on peut penser les ouverts comme des patrons dont on connaît la grandeur et que l'on peut calculer sur l'espace, voir si des points leurs appartiennent, pour approximer la distance entre eux. Une topologie est plus fine qu'une autre si elle contient plus d'ouverts, autrement dit si le patronnage est plus détaillé.

Propriété. ***(Caractérisation de la finesse par la continuité)***

Soit X un ensemble et $\mathcal{O}_1$,$\mathcal{O}_2$ deux topologies sur X. Alors $\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$ si et seulement si $id : (X, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ est continue.

3.1.3.2 Topologie minimale

Définition. ***(Minimalité d'une topologie)***

Soit X un ensemble et P un prédicat sur $\mathcal{P}(X)$. Alors la topologie minimale sur X vérifiant P, si elle existe, est la topologie la moins fine sur X vérifiant P.

Remarque. Si $P = \top$, la topologie P-minimale sur X est la topologie grossière.

3.1.4 Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité

3.1.4.1 Base d'ouverts

Remarque. Toute base est évidemment une prébase.

Fait. ***(Construire une base à partir d'une pré-base)***

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $E \subseteq \mathcal{T}$. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de E. Alors E est une prébase de $\mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Propriété. ***(Caractérisation des bases topologiques)***

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Alors $\mathcal{B}$ est une prébase de $\mathcal{T}$ si et seulement si :

1. $\mathcal{B}$ est un recouvrement de X,
2. l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ s'écrit toujours comme réunion (quelconque) d'éléments de $\mathcal{B}$.

Méthode. *(Montrer une densité grâce à une base)*

Pour montrer que A est dense, il suffit de montrer que l'intersection de A avec tout ouvert d'une base est habitée. Ceci permet donc de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En fait, dans un espace métrique, c'est désuet : tout ouvert contient déjà une boule ouverte.

Propriété. *(Critère pour qu'une pré-base soit une base)*

Soit X un ensemble, $\mathcal{B}$ une partie de l'ensemble des parties de X telle que $\bigcup \mathcal{B} = X$. On suppose :

$$\forall U,V \in \mathcal{B}\ \forall x \in U \cap V\ \exists W \in \mathcal{B} \quad x \in W \subseteq U \cap V.$$

Alors l'ensemble des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. En particulier, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

On démontre le lemme suivant, très utile :

Théorème. *(Lemme de Lindelöf)*

Tout espace à base dénombrable est de Lindelöf, c'est-à-dire : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement dénombrable.

▷ Soit $\mathcal{B} = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de l'espace X. Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $x \in X$, il existe $\omega \in \mathcal{O}$ tel que $x \in \omega$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \omega_i \subseteq \omega$. Intuitivement, nous n'avons pas besoin de tous les éléments de $\mathcal{O}$, mais de seulement ceux qui contiennent un élément de $\mathcal{B}$, et dans ce cas, un seul élément de $\mathcal{O}$ par élément de $\mathcal{B}$ est nécessairement, clairement. De façon constructive, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que ω_i soit inclus dans un élément de $\mathcal{O}$, choisissons $\Omega_i \in \mathcal{O}$ tel que $\omega_i \subseteq \Omega_i$. Pour conclure, l'ensemble $\{\Omega_i, i \in I\}$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{O}$. C'est un recouvrement. ■

3.1.4.2 Base de voisinages

Définition. *(Base de voisinages d'un point)*

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Une *base de voisinages* ou *système fondamental de voisinages* de x est un ensemble $\mathcal{B}_x$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $U \in \mathcal{B}_x$ tel que $U \subseteq V$.

On peut énoncer des propriétés similaires aux précédentes et créer un lien entre base d'ouverts et base de voisinages.

Exercice 17

Donner un exemple d'espace séparable qui n'est pas à bases dénombrables de voisinages.

▹ **Éléments de réponse.**

La topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ convient.

3.1.4.3 Axiomes de dénombrabilité

3.1.4.4 Séparabilité

La séparabilité est une notion un peu isolée mais tout à fait abordable dans les petites classes. Elle prend tout son sens dans le cadre des axiomes de dénombrabilité.

Ceci n'a rien à voir avec la notion de séparation !

Exercice 18 *(Un petit peu de clarté d'esprit)*

On vérifie l'assertion précédente.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparé non séparable.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable non séparé.

▹ **Éléments de réponse.**

ℓ^∞ n'est pas séparable (c'est bien connu), mais séparé, car métrique, puisque c'est un espace vectoriel normé ! Réciproquement, la topologie grossière sur $\mathbb{Q}$ n'est pas séparé, mais clairement séparable.

Exercice 19 *(Non-affaiblissement des hypothèses)*

On montre que la réciproque repose véritablement sur la forme des ouverts, à savoir des boules.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparable qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable, qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité mais pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

▹ **Éléments de réponse.**

Pour le deuxième exemple, qui transcende le premier, il faut creuser un peu. Le lecteur intéressé pourra se pencher sur la construction de la droite de Sorgenfrey ou encore l'espace de Helly.

Méthode. *(Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable)*

On veut montrer que E n'est pas séparable, autrement dit, qu'il n'admet aucune partie dénombrable dense. On cherche une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints indexée par un ensemble indénombrable I. Dans ce cas, une partie dense A doit rencontrer chacun d'eux, d'où une injection d'un indénombrable I dans A, qui n'est pas dénombrable. Ainsi, aucune partie dense de E n'est dénombrable (ou aucune partie dénombrable n'est dense ;)), donc E n'est pas séparable.

Propriété. *(Produit d'espaces séparables)*

Tout produit d'espaces séparables est séparable.

▷ Pour chaque X_i, soit A_i dénombrable dense. Alors le produit des A_i est dense par propriété de l'adhérence d'un produit (même infini). ■

3.1.5 Adhérence, intérieur, frontière

Ainsi l'adhérence et l'intérieur sont des ensembles extrémaux. En particulier, ils définissent des opérateurs de clôture.

Lemme

Une application constante sur une partie d'un espace topologique X est constante sur son adhérence.

3.1.5.1 Frontière ou bord

Propriété. *(Caractérisation de la frontière dans un espace métrique)*

Soit A une partie d'un espace métrique E. Alors $x \in \mathrm{Fr}(A) \iff \exists \rho > 0 \ B(x, \rho) \cap A, B(x, \rho) \cap \complement_E A \neq 0$.

3.1.5.2 Points limites, points d'accumulation, isolation

3.1.5.3 Densité

3.1.5.4 Adhérence et intérieur dans le produit

Propriété. *(Adhérence, intérieur d'un produit)*

Soient $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. Soient A_i une partie de X_i pour tout i. Soient X_1,...,X_n n autres espaces topologiques. Soient A_1,...,A_n des parties respectives de ces espaces.

1. $\overline{A_1 \times ... \times A_n} = \overline{A_1} \times ... \times \overline{A_n}$.

2. $\overset{\circ}{\overbrace{(A_1 \times \dots \times A_n)}} = \mathring{A}_1 \times \dots \times \mathring{A}_n$.
3. $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.
4. On n'a pas de propriété similaire pour le produit.

3.1.5.5 Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence

Méthode. ***(Définition d'une topologie par les adhérences)***

Dans un ensemble E, toute application $\overline{\cdot}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même vérifiant pour toutes parties X,Y de E :

1. $X \subseteq \overline{X}$;
2. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$;
3. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
4. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

permet de définir une topologie sur E dont les fermés sont les parties X telles que $X = \overline{X}$ et donc $\overline{\cdot}$ est l'adhérence.

▷ Seule la propriété d'intersection est à démontrer : elle vient de la croissance de l'opérateur $\overline{\cdot}$ qui se déduit des axiomes précédents comme tout opérateur de préclôture. Soient $(X_i)_{i\in I}$ des fermés. Soit $i \in I$. Alors $\bigcap_{i\in I} X_i \subseteq X_i$, d'où $\overline{\bigcap_{i\in I} X_i} \subseteq \overline{X_i} = X_i$, d'où $\overline{\bigcap_{i\in I} X_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i$ en passant à l'intersection sur I d'où l'égalité. ■

Propriété. ***(Idempotence de*** $\mathrm{Adh} \circ \mathrm{Int}$***)***

Soit E un espace topologique. Pour toute partie A de E, $\overline{\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$.

▷ On a, puisque l'intérieur est plus petit que la partie, $\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}} \subseteq \overline{\mathring{A}}$. Par croissance de l'adhérence, $\overline{\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}} \subseteq \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$ par idempotence de l'adhérence. Réciproquement, puisque l'adhérence est plus grand que la partie, $\mathring{A} \subseteq \overline{\mathring{A}}$ puis par croissande de l'intérieur, $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$ et enfin, par croissante de l'adhérence, $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}}$. ■

Propriété. ***(Idempotence de*** $\mathrm{Int} \circ \mathrm{Adh}$***)***

Soit E un espace topologique. Pour toute partie A de E, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

▷ S'obtient grâce à la dualité adhérence-intérieur donnée par le passage au complémentaire. ■

Avec les mêmes arguments (et même moins élaborés), on obtient :

Propriété

Soit E un espace topologique et A une partie de E. Alors $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$.

Propriété

Soit E un espace topologique et A une partie de E. Alors $\mathring{A} \subseteq \mathring{\overline{A}}$.

Propriété

De plus, $\mathring{A} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{A}}}$.

Propriété

De plus, $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subseteq \overline{A}$.

Contre-exemple. ***(L'inclusion peut être stricte.)***

Il suffit de considérer $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}^*$. $\square$

3.1.6 Applications continues

3.1.6.1 Continuité globale

Remarquer que la continuité sur une partie dépend de la topologie induite (ce qui ne pose pas de problème, car elle est canonique).

Exemple. ***(Très classique)***

L'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ muni de leurs topologies métriques éventuellement induites, est un homéomorphisme, mais pas une isométrie (elle ne préserve pas toutes les distances).

Propriété

Soit X un espace discret et Y un espace topologique quelconque. Alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

Propriété

Soit X un espace topologique quelconque et Y un espace grossier. Alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

Exercice 20

L'image d'une pré-image d'un ouvert par une application continue est-elle ouverte ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non ! Mais c'est un ouvert de l'image, au vu de la formule pour l'image d'une préimage. Pour fournir un contre-exemple, considérer $\mathbb{R}^2$.

3.1.6.2 Continuité en un point

Définition. ***(Continuité locale)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.
De façon équivalente, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que $f(W) \subseteq V$.

Théorème

Soient X,Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$. Une application de $X \longrightarrow Y$ est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A (ouf).

▷ Supposons A continue sur A. Soit $x \in A$. Soit V un voisinage de $f(x)$; il contient un ouvert U contenant $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A. Clairement, il contient x. Or $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$ ensemblistement, donc $f^{-1}(V)$ contient un ouvert contenant x, donc c'est un voisinage de x.

Réciproquement, supposons f continue en tout point de A. Soit U un ouvert de Y. Posons $O = f^{-1}(U)$ et montrons que O est un ouvert de A, autrement dit, montrons que O est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in O$, c'est-à-dire $f(x) \in U$. Alors U est ouvert, donc c'est un voisinage de $f(x)$. Ainsi $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x, donc O est un voisinage de x, et c'est terminé. ■

3.1.6.3 Homéomorphismes

Propriété. ***(Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme, si et seulement si, f est ouverte, si et seulement si, f est fermée.

▷ En effet, si f est bijective, alors $f^{-1}(f(O)) = O$ pour toute partie O de Y. ■

Propriété. ***(Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme, si et seulement si, f est ouverte, si et seulement si, f est fermée.

Exercice 21

Soit f une surjection ouverte. Existe-t-il toujours une section continue de f ? Soit f une injection ouverte. Existe-t-il toujours une rétraction continue de f ?

3.1.7 Irréductibilité d'un espace topologique

Voici une notion un peu étonnante qui sera principalement utile à l'heure des fondements de la géométrie algébrique.

Définition. ***(Espace topologique noethérien)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire.

Propriété. ***(Fermé d'un noethérien)***

Tout sous-espace fermé d'un espace noethérien est noethérien.

Propriété. ***(Caractérisation des espaces noethériens par les ouverts)***

Un espace topologique X est noethérien, si et seulement si, tout ouvert de X est quasi-compact.

$\triangleright$ Soit X un espace nothérien, soit O un ouvert de X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ ouverts de X qui recouvrent $O \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Si I est fini, il n'y a rien à faire. Sinon, I est infini. Il contient une copie de $\mathbb{N}$. Si U_1 recouvre O, c'est encore terminé. Sinon, il existe $x \notin U_1$, $x \in O$, et x dans un certain U_i, qui quitte à re-numéroter, est U_2. Si $U_1 \cup U_2$ recouvre O, c'est terminé. Sinon, on ré-itère le processus, de sorte que l'on obtient une suite strictement décroissante, grâce au point discriminé à chaque étape, de fermés $\complement_X(U_1 \cup ... \cup U_n)$, mais c'est impossible, car X est noethérien ; donc le processus s'arrête et U_1,...,U_N recouvrent O pour un certain N, d'où la quasi-compacité.

Réciproquement, soit (F_n) une suite décroissante de fermés de X. Alors $(O_n = \complement_X F_n)$ est une suite croissante d'ouverts de X. Sa réunion O est un ouvert de X. En particulier, il est quasi compact, donc il existe un N tel que O_1,...,O_N recouvre O. Par les propriétés basiques de la réunion, pour tout $i > N$, O_i est inclus dans l'un des O_i, et par monotonie de $(O_n)_n$, on a $O_i = O_N$. Donc (O_n) est stationnaire, donc (F_n) est stationnaire. ■

Heuristique

On a donc là affaire à des topologies dont nous n'avons pas l'habitude. En particulier, elles ont peu de chances d'être séparées (pourquoi ?).

Définition. ***(Espace topologique irréductible)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *irréductible* si X est vide ou si l'on ne peut pas écrire $X = F_1 \cup F_2$ où F_1,F_2 où F_1,F_2 sont deux fermés (non nécessairement disjoints !) distincts de X.

Propriété. ***(Caractérisation des espaces irréductibles)***

Un espace topologique X est irréductible, si et seulement si, pour tous ouverts non vides U,V, leur intersection $U \cap V$ est non vide ; autrement dit, si tout ouvert non vide est dense.

▷ Provient directement de la définition en passant au complémentaire sur $X = F_1 \cup F_2$, $F_1, F_2 \subsetneq X$. ■

Exemples. ***(Espaces irréductibles)***

1. L'espace vide est irréductible.
2. Tout singleton est irréductible.
3. Un ensemble fini de points du plan muni de la topologie induite par la topologie usuelle n'est pas irréductible.
4. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$... ne sont pas irréductibles ; ils s'écrivent comme la réunion de deux demi-plans fermés respectivement réels et complexes.
5. Un ensemble algébrique déterminé par l'idéal engendré par un polynôme irréductible, muni de la topologie de Zariski, est un ensemble irréductible.
6. Munie de la topologie usuelle, une droite du plan $\mathbb{R}^2$ n'est pas irréductible, mais munie de la topologie de Zariski, si.

Proposition. ***(Décomposition en composantes irréductibles)***

Soit X un espace topologique noethérien. Alors on peut écrire X comme réunion finie de fermés irréductibles, décomposition unique à l'ordre près des facteurs si l'on impose qu'il n'y a aucune inclusion réciproque entre eux. De plus, ces composantes sont les fermés irréductibles de X maximaux pour l'inclusion.

▷ On raisonne par récurrence noethérienne : soit Φ l'ensemble des fermés $F \subseteq X$ tel que $P(F)$ est fausse où $P(F)$: « F peut s'écrire comme réunion finie de fermés distincts irréductibles ». Supposons $\Phi \neq \emptyset$. Alors puisque X est noethérien, il existe $F \in \Phi$, minimal pour $\subseteq$. Comme $P(F)$ est fausse, F n'est pas irréductible, dont on peut écrire $F = F' \cup F''$ où F',$F'' \subsetneq F$ sont fermés. Par minimalité de F, $F' \notin \Phi$ et $F'' \notin \Phi$ donc $P(F')$ et $P(F'')$ sont vraies. Ainsi F' et F'' admettent des décompositions, donc F aussi en prenant la réunion de celles-ci, donc $P(F)$ est vraie. Absurde. Donc Φ est vide, en particulier $P(X)$ est vraie. La remarque finale vient alors tout naturellement d'après les définitions posées.

Pour l'unicité des composantes irréductibles : si l'on a deux décompositions, l'inclusion de l'une dans l'autre envoie chaque composante de la première dans une de la seconde ; en effet, une composante de la première qui serait envoyée à cheval sur plusieurs de l'autre ne serait pas irréductible, elle s'écrirait comme union d'un nombre fini de fermés (son intersection avec les composantes de la deuxième décomposition). Mais les composantes sont les irréductibles maximaux pour l'inclusion, d'où l'égalité. ■

Proposition

Soit X un espace topologique qui admette un recouvrement ouvert fini par des sous-espaces noethériens. Alors X est noethérien.

▷ Il suffit d'appliquer la caractérisation duale (par les ouverts) d'espace noethérien et la suite vient naturellement par *divide et impera*. ■

3.2 Constructions de topologies

Systématiquement, en construisant une nouvelle topologie à partir d'espaces topologiques donnés, nous cherchons :

- ⋆ à caractériser la topologie en fonction d'applications liant l'espace topologique de départ au nouveau, typiquement, projection ou inclusion,
- ⋆ à décrire explicitement les ouverts de la topologie,
- ⋆ à caractériser la continuité d'applications définies sur ou vers le nouvel espace considéré.

3.2.1 Topologie engendrée

Définition-propriété. ***(Topologie engendrée par une partie)***

Soit X un **ensemble** et $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Alors l'intersection de toutes les topologies sur X contenant Σ est appelée *topologie engendrée* par Σ sur X. C'est la topologie la moins fine sur X telle que toute partie de Σ soit un ouvert.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie engendrée)***

Soient X un ensemble et Σ une partie de X. Alors les ouverts de $\langle \Sigma \rangle$ sont exactement les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de Σ.

▷ Par définition d'une topologie, une telle partie doit être ouverte. Réciproquement, par définition d'une topologie, une topologie doit toutes les contenir. La proposition est démontrée. ■

Remarque importante. Par les propriétés de distributivités généralisées *(exercice)*, il revient au même de dire que ce sont les intersections finies de réunions quelconques d'éléments de Σ.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie engendrée)***

Soient Y un espace topologique et Σ une partie de Y qui engendre la topologie de Y. Soit X un espace topologique. Alors si c'est définissable, une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si l'application $f : X \longrightarrow \Sigma$ est continue.

3.2.2 Topologie initiale

Définition-propriété. ***(Topologie initiale associée à une famille d'applications)***

Soit X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout $i \in I$, une application $f_i : X \longrightarrow \mathcal{O}_i$. On appelle *topologie initiale* associée aux (f_i), ou *topologie engendrée par les* f_i, la topologie la moins fine sur X qui rende toutes les applications f_i, $i \in I$, continues.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie initiale)***

La topologie initiale sur X engendrée par les $f_i : X \longrightarrow Y$ est la topologie engendrée (strictement) par les $f_i^{-1}(U)$ pour U ouvert de $\mathcal{O}_i$, pour i parcourant I.

▷ Il est clair qu'une topologie rendant toutes les f_i continues contient toutes ces parties. Par minimalité de la topologie engendrée, on a le résultat. ■

Propriété. ***(Continuité des applications sous la topologie initiale)***

On reprend les notations précédentes ; soit également Z un espace topologique et $g : Z \longrightarrow X$ une application. Alors g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g \longrightarrow Y_i$ est continue.

▷ Le sens direct vient d'une simple composition d'applications continues. Pour le sens réciproque, soit U un ouvert de X, et il suffit de vérifier la condition dans le cas où U est dans une prébase de X. Puisque d'après la proposition précédente, une telle prébase est donnée par les $f_i^{-1}(\Omega)$, il existe $i \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_i$ tel que $U = f_i^{-1}(\Omega)$. Alors $g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(\Omega)$ ensemblistement, ouvert de Z par hypothèse. ■

Signalons les propriétés secondaires suivantes :

- Si $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ est une prébase de X.
- Si $x \in X$ et $\mathcal{V}_i$ est une base de voisinages de $f_i(x)$ pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$ est un système fondamental de voisinages du point x.

Les topologies induite et produit sont des exemples fondamentaux de topologies initiales.

3.2.3 Topologie induite

Dans ce cas spécial, on retourne le procédé habituel.

Définition. ***(Topologie induite à un sous-espace topologique)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. Alors la *topologie induite* (de X) sur A est la topologie sur A donc les ouverts sont les $A \cap U$ où U décrit l'ensemble des ouverts de X.

▷ C'est simple à faire par le calcul par associativité simple des opérations ensemblistes, mais il est plus judicieux d'attendre la caractérisation suivante qui fait le job. ■

Propriété. ***(Caractérisation abstraite de la topologie induite)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. Alors la topologie induite sur A est la topologie la moins fine rendant l'inclusion canonique $\iota : A \hookrightarrow X$ continue ; autrement dit, c'est la topologie initiale associée à (ι, X).

▷ Par définition de la topologie induite, si U est un ouvert de X, alors $\iota^{-1}(U) = U \cap A$ est un ouvert de A. Réciproquement, vérifions que l'ensemble des parties de cette forme est déjà une topologie. Elle contient $\emptyset$ et A. Elle est stable par réunion quelconque par distributivité et par intersection finie (en fait, quelconque) de même. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie initiale)***

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors pour toute partie $A \subseteq X$, la restriction $f : A \longrightarrow Y$ est continue.

▷ Immédiat. ■

Il est clair que la réciproque est fausse en fixant A !

On énonce également :

Propriété. ***(Propriété universelle de la topologie induite)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. La topologie induite est la topologie minimale sur A qui rend l'inclusion canonique continue.

Un ouvert pour la topologie induite n'a aucune raison d'être un ouvert dans le grand espace.

La topologie induite est la topologie *sous un certain angle*, celui du sous-espace.

3.2.4 Topologie finale

Définition-propriété. ***(Topologie finale associée à une famille d'applications)***

Soit Y un ensemble et $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout $i \in I$, une application $f_i : X_i \longrightarrow Y$. On appelle *topologie finale* associée aux (f_i), la topologie sur X la plus fine qui rende toutes les applications f_i, $i \in I$, continues.

Remarque. Pour la topologie initiale, où l'on construisait une topologie sur la source, on demandait une topologie minimale ; dans le cas de la topologie finale, on demande une topologie la plus fine. En fait, c'est cohérent : pour rendre des applications données continues, il y a deux manières : soit l'on enlève des ouverts à l'arrivée, soit l'on en rajoute à la source.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts dans la topologie finale)***

Un ensemble $U \subseteq Y$ est ouvert si et seulement si $f_i^{-1}(U)$ est ouvert dans X_i pour tout $i \in I$.

$\triangleright$ On note O_Y la topologie finale sur Y. Soit $U \subseteq Y$ tel que f_i^{-1} soit un ouvert des X_i. Alors $O_U = \{\emptyset, Y, U\}$ est une topologie sur Y telle que chacune des f_i est continue. Par définition, $U \in O_Y$. Ceci suffit. ■

Remarque. C'est bien plus restrictif qu'avec la topologie initiale. Ceci explique en partie que tout se passe bien pour les topologies produits, mais mal en général dans les topologies quotients.

Propriété. ***(Continuité des applications sous la topologie finale)***

On reprend les notations précédentes ; soit également Z un espace topologie et $g : Y \longrightarrow Z$ une application. Alors g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i \longrightarrow Y_i$ est continue.

▷ Réciproquement, si $g : Y \longrightarrow Z$ est telle que $g \circ f_i$ est continue, soit U un ouvert de Z. On a $f_i^{-1}(g^{-1}(U))$ ouvert des X_i. Ainsi $g^{-1}(U)$ est un ouvert dans Y, donc g est continue. ■

Les topologies somme et quotient sont des exemples fondamentaux de topologies finales.

3.2.5 Topologie faible

Définition-propriété. ***(Topologie faible)***

Soit X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose que chaque X_i est muni d'une topologie $\mathcal{O}_i$ et l'on note $f_i : X_i \longrightarrow X$ l'inclusion. La topologie finale sur X définie par les $(f_i)_{i\in I}$ est appelée *topologie faible* définie par $(X_i)_{i\in I}$.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie faible)***

On reprend les notations précédentes. Alors $F \subseteq X$ est fermé (resp. ouvert) dans X pour la topologie faible si et seulement pour tout $i \in I$, $F \cap X_i$ est fermé (resp. ouvert) dans $(X_i, \mathcal{O}_i)$.
Autrement dit, la topologie faible est la topologie la plus fine qui induise toutes les topologies des X_i.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie faible)***

Pour tout espace topologique Y, une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction $f_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$ est continue pour tout $i \in I$.

Exercice 22

Montrons que X est discret si et seulement si sa topologie est la topologie faible définie par les singletons. Montrer que cette condition est équivalente à ce que la projection canonique $\coprod_{x\in X} \{x\} \longrightarrow X$ soit un homéomorphisme.

3.2.6 Topologie somme

On continue notre litanie de définitions.

Définition-propriété. ***(Somme topologique)***

Soit $(X_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. La somme $\bigoplus_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ est la réunion disjointe $\bigsqcup_{i\in I} X_i = \coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}$ munie de la topologie la plus fine qui rend chaque injection canonique continue, autrement dit, la topologie finale pour les inclusions canoniques.

Remarque. Dans ce cas, contrairement à la topologie produit, ce n'est plus la topologie engendrée par (...) mais littéralement la topologie dont les ouverts sont les sommes disjointes d'ouverts : même constat que pour la topologie induite.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie somme)***

La topologie somme $\mathcal{T}$ est telle que $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, il existe $U_i \in \mathcal{T}_i$ tel que $U \cap (X_i \times \{i\}) = U_i \times \{i\}$.
Il est clair alors que $\mathcal{T}$ est l'ensemble des $\bigoplus\limits_{i\in I} U_i$ pour U_i ouverts respectifs de $\mathcal{T}_i$.

Propriété. ***(Applications continues sur la somme disjointe)***

Si X_i sont des espaces topologiques, on munit $\coprod X_i$ de la topologie finale. On a $\mathrm{Hom}(\coprod X_i, Z) = \prod \mathrm{Hom}(X_i,Z)$.

▷ Ouf ! ■

La topologie somme n'est jamais qu'un recollement d'espaces. La topologie est assez stable par somme, comme l'intuition le permet.

3.2.7 Topologie produit

Les propriétés viennent toutes de la topologie initiale ; on les redémontre quand-même dans ces cas particuliers.

3.2.7.1 Cas fini

Définition-propriété. ***(Topologie produit fini)***

Soit n un entier naturel et $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur $\prod\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i$ est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique $p_i : \prod\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i \longrightarrow X_i$, $i \in [\![1,n]\!]$, continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Propriété. ***(Description de la topologie produit fini)***

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *ouverts élémentaires* : $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$, où $\Omega_1 \subseteq X_1,...,\Omega_n \subseteq X_n$ sont des ouverts respectifs de ces espaces.
Une prébase est donnée par les $X_1 \times ...X_{i-1} \times \Omega_i \times X_{i+1} \times ... \times X_i$.

▷ Conséquence du cas infini. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie produit fini)***

Soient $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}, Z$ des espaces topologiques. Une application $f : Y \longrightarrow \prod_{i\in[\![1,n]\!]} X_i$ est continue si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ est continue.

$\triangleright$ Le sens direct est clair par composition. Réciproquement, soit U un ouvert du produit. Il suffit de vérifier la condition dans le cas où U est dans une pré-base de cet espace ; ici, un ouvert élémentaire à une composante convient. Ainsi il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $U = p_i^{-1}(\Omega)$ pour Ω ouvert de X_i. Ainsi, $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(\Omega)) = (p_i \circ f)^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de Y car ces applications sont continues par hypothèse. ■

On n'a pas de propriétés semblables pour les applications *partant* d'un espace produit ; le calcul différentiel nous le montre assez. En particulier, pour un produit infini non plus.

Propriété. ***(Ouverture des projections)***

Les projections sont ouvertes pour la topologie produit.

$\triangleright$ On fait la preuve dans le cas général, puisqu'elle tient encore. Soit $\prod_{i\in I} U_i$ un cylindre ouvert pour la topologie produit. Il est clair qu'à i fixé, $p_i(\prod_{i\in I} U_i) = U_i$ est un ouvert de X_i. Puisque les cylindres forment une base, et que la réunion est stable par image réciproque, et qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, le résultat tient pour n'importe quel ouvert. ■

Cette propriété tient dans le cas général, mais on ne la ré-énoncera pas.

3.2.7.2 Cas général

Définition-propriété. ***(Topologie produit fini)***

Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique $p_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$, $i \in I$, continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux $(p_i)_{i\in I}$.

Propriété. ***(Description de la topologie produit)***

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *cylindres (ouverts)* :

$\prod_{i\in I} U_i$, où U_i est un ouvert de X_i pour tout i et il existe J fini tel que pour tout $i \in I \setminus J$,
$$U_i = X_i$$

qui coïncident avec les ouverts élémentaires seulement dans le cas fini
Ils forment d'ailleurs une *base* de la topologie produit

▷ Il est nécessaire qu'une topologie rendant continue les projections canoniques contiennent les ouverts $\bigcap\limits_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)$ pour U_i ouverts de X_i, J fini. Ces ensembles sont exactement les cylindres ouverts. Par minimalité de la topologie produit, on en déduit le résultat. ■

Théorème. ***(Produit d'ouverts d'un espace produit)***

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts pour tout $i \in I$ U_i de X_i, alors $\prod\limits_{i\in I} U_i$ est un ouvert du produit si et seulement si $U_i = X_i$ pour tous les $i \in I$ sauf éventuellement un nombre fini.

Fait

Tout ouvert du produit contient un produit d'ouverts élémentaires. Tout voisinage d'un point du produit contient un voisinage élémentaire de ce point.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie produit)***

Soient $(X_i)_{i\in I}, Z$ des espaces topologiques. Une application $f : Y \longrightarrow \prod\limits_{i\in I} X_i$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ est continue.

▷ Même preuve que dans le cas fini. ■

Mnémonik : tout se passe bien dans le produit, tout se passe mal dans le quotient.

Les propriétés vraies sur un produit d'espaces ne sont des équivalences que si l'on suppose le produit non vide, puisqu'un produit avec un terme vide est vide.

3.2.7.3 Convergences

Propriété. ***(Convergence dans l'espace produit)***

Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques compacts. Soit $(x_n = (x_{n,i})_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$. Soit $x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Alors (x_n) tend vers x si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $(x_{n,i})_n$ tend vers x_i.

▷ Le sens direct vient de la continuité des projections. Montrons le sens réciproque. Soit Ω un ouvert contenant x. Il contient donc un cylindre C contenant x. Soient $U_1,\ldots,U_n$ les membres de ce produit non vide. Alors par hypothèse, pour tout $i \geqslant n$, il existe un rang N_i à partir duquel $(x_{n,i})_i$ est dans U_i. Ainsi, à partir du rang $\max N_i$, la suite (x_n) est dans C, donc dans U. ■

3.2.8 Topologie quotient

Il n'y a rien de compliqué, une fois qu'on a défini la topologie quotient (voir sur Wikipédia). Une *quotient map*, le terme n'ayant pas d'équivalent en français, est une application continue et ouverte : une application est ouverte, si l'image de tout ouvert est ouverte.

C'est plutôt la régularité de la topologie quotient qui pose un réel problème en topologie.

3.2.8.1 Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient

Définition. ***(Topologie quotient)***

Soit $q : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ une application surjective entre deux ensembles, où X est un espace topologique. On définit sur Y la *topologie quotient* comme étant la topologie finale associée à l'application q.

Fait

$U \subseteq Y$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ ouvert. $F \subseteq Y$ est fermé si et seulement si $q^{-1}(F)$ est fermé.

Remarques.

1. *(Cas particulier)* Si R est une relation d'équivalence sur X, la projection canonique induit une topologie sur le quotient X/R grâce à cette définition. C'est le cas que nous étudierons dès à présent.
2. *(Cas particulier du cas particulier : géométrie du caoutchouc)* Si $A \subseteq X$, on définit la relation d'équivalence xR_Ay si et seulement si $x = y$ ou x et $y \in A$. On peut alors définir le quotient $X/A = X/R_A$. Cela revient heuristiquement à ramasser une partie sur un point. Cette partie est quelconque (pas forcément simplement connexe) ! ! !

On ne demande absolument aucune rien sur R, c'est pourquoi les quotients topologiques, qui existent donc toujours, écopent en général de propriétés minables (pour les groupes, les espaces vectoriels au contraire, la structure descend, mais on demandait des propriétés fortes avant de quotienter). C'est en exigeant des compatibilités de R quant à la topologie de X que l'on aura des propriétés acceptables pour nos topologies quotients.

La topologie quotient satisfait la propriété universelle suivante :

Propriété. ***(Propriété universelle des topologies quotients)***

On reprend les notations précédentes. L'application $q : X \longrightarrow X/R$ satisfait la propriété suivante : pour tout espace topologique Z, pour toute application $f : X \longrightarrow Z$ continue et constante sur les classes d'équivalence, *i.e.* $xRy \implies f(x) = f(y)$, alors elle descend en un unique application continue sur le quotient, autrement dit, $\exists! \tilde{f} : X/R \longrightarrow Z$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Z \\ X/R \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

▷ Comme d'habitude, en oubliant la structure topologique, on a le passage au quotient ensembliste qui donne une unique application de $X/R \longrightarrow Z$ tel que le diagramme commute dans la catégorie des ensembles qui donne $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$ de façon indépendante du choix de x. Si $U \subseteq Z$ est ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X, et $\tilde{f}^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$ ouvert. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie initiale)***

Soit X un espace topologique et R une relation d'équivalence. On note $Y = X/R$. Pour tout espace topologique Z, une application $f : Y \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si, l'application $f \circ \pi$ est continue, en notant π la projection canonique.

▷ Conséquence de la propriété pour la topologie finale.

Redémontrons-le pour le fun. Puisque la projection canonique est continue, le sens direct vient d'une composition d'applications continues. Réciproquement, soit U un ouvert de Z. Alors $V = f^{-1}(U) \subseteq Y = X/R$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ est ouvert, ce qui est le cas si $f \circ \pi$ est bien supposée continue. ■

Le problème principal auquel on va se heurter, est que le quotient d'une espace séparé (ou même très régulier) n'est pas nécessairement séparé (en particulier pas métrisable). Pour cela, voir la section suivante.

Définition. ***(Saturation d'un ouvert)***

Soit $E \subseteq X$, le *saturé* de E est :

$$RE = \{y \in X, \exists x \in E, xRy\} = \bigcup_{x \in E} \overline{x} = q^{-1}(q(E)).$$

On dit que E est *saturé* si $RE = E$. Autrement dit, il existe $A \subseteq X/R$ tel que $E = q^{-1}(A)$[a]. Ceci revient encore à dire que E contient tous les éléments équivalents à ses éléments.

[a] Le sens direct est donné par l'une des expressions ci-dessous. Réciproquement, toute partie de la forme $q^{-1}(A)$ est saturé, car si $\overline{x} \in A$ et $y \sim x$, $\overline{y} = \overline{x} \in A$ également.

Toutes les choses qu'on voudraient vraies ne sont pas vraies, mais elles le deviennent si l'on rajoute saturé derrière.

Propriété. ***(Images des ouverts dans le quotient)***

1. Si O est un ouvert saturé dans X, alors $q(O)$ est ouvert dans X/R.
2. Si F est fermé et saturé dans X, alors $q(F)$ est fermé dans X/R.

▷ On a que $RO = q^{-1}(q(O))$. Si O est saturé, $RO = O = q^{-1}(q(O))$. Ainsi O est ouvert si et seulement si $q(O)$ l'est. Le deuxième point est identique. ■

En général, l'hypothèse *saturé* ne peut être omise.

Contre-exemple. ***(Projection quotient non ouverte)***

On considère la relation sur le tore $\mathbb{T}^2$ définie par $x' \sim y'$ s'il existe une droite D de pente α joignant x à y et tels que $\pi(x) = x'$ et $\pi(y) = y'$. On peut vérifier que si α est rationnel ou infini, $\pi(D)$ est un cercle, et sinon, son image est dense dans le tore et π induit une bijection continue sur son image, qui n'est pas un homéomorphisme. L'espace quotient est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$; dans le cas contraire, la topologie quotient est grossière. Naturellement, cet exemple convient, puisqu'on peut exhiber des ouverts dont l'image sur le tore ne l'est plus. □

En général, il est trop fort de demander que tout ouvert soit saturé.

3.2.8.2 Séparation des quotients

Les propriétés topologiques se conservent pas produit, même si, dans le cas infini, les preuves ne sont pas toujours évidentes. Par contre, elles sont extrêmement instable pour ce qu'il s'agit du quotient. En particulier, le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un réflexe.

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On rappelle qu'un espace est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée dans son carré topologique.

Propriété. ***(Condition nécessaire de séparation du quotient)***

Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$.

▷ En effet, $\Gamma_{\mathcal{R}} = q^{-1} \times q^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$. ■

Propriété. ***(Réciproque partielle à la propriété précédente)***

Si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$ **et si** q **est ouverte**, alors X/R est séparé.

▷ Si q est ouverte, $q \times q(X \times X \setminus \Gamma_{\mathcal{R}}) = (X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}) \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}}$ est ouvert. Ainsi, $\Delta_{X/\mathcal{R}}$ est fermée, donc X/R est séparé. ■

Remarque. En toute généralité, un espace non séparé peut se quotienter en un espace séparé : prendre une espace non séparé et l'écraser sur lui-même. Pourtant, en pratique, on énoncera des théorèmes permettant de *préserver* la séparation au passage au quotient.

La condition n'est pas minimale ; il peut arriver que q ne soit pas ouverte mais que, par miracle, l'espace quotient soit séparé.

Propriété. ***(Caractérisation de la séparation des quotients par saturation)***

L'espace $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si pour tous $x \neq y$, il existe des ouverts saturés qui séparent x et y : on dit que X est *saturé-séparé.*

▷ Soient $x,y \in X$ tels que $q(x) \neq q(y)$, soit $(x,y) \notin \mathcal{R}$. Si U_x,U_y sont des voisinages ouverts saturés qui séparent x et y, alors $q(U_x)$ et $q(U_y)$ sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ par saturation qui séparent $q(x)$ et $q(y)$: puisque U_x est saturé, $q(y) \notin q(U_x)$. Réciproquement, si U_x,U_y sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ qui séparent $q(x),q(y)$, alors on voit que $q^{-1}(U_x)$ et $q^{-1}(U_y)$ sont des ouverts saturés et disjoints qui séparent x et y. ■

Proposition. ***(Condition suffisante de séparation par compacts et fermés)***

Soit X séparé. Supposons que q satisfasse :

(a) $\forall x \in X \quad q^{-1}(q(x))$ est compacte,

(b) pour tout fermé de X, son saturé est fermé.

Alors X/R est séparé.

▷ Soient $x,y \in X$, $q(x) \neq q(y)$. Posons $C_x = q^{-1}(q(x))$ et $C_y = q^{-1}(q(y))$ qui sont donc des compacts disjoints de X. Puisque X est séparé, il existe des ouverts U_x,U_y disjoints séparant ces compacts (propriété connue). On pose F_x,F_y les complémentaires de ces ouverts. Ce sont des fermés dont les saturés $\mathcal{R}F_x$ et $\mathcal{R}F_y$ sont donc également fermés, par hypothèse. On pose U'_x,U'_y les complémentaires respectifs de ces saturés, qui sont donc des ouverts. Ils sont disjoints, car contenus dans les premiers. Supposons que $x \notin U'_x$. Alors $x \in \mathcal{R}F_x$. Alors il existe $z \in F_x$ tel que $x\mathcal{R}z$ et $z \in C_x = q^{-1}(q(x)) \subseteq U_x$, contradiction. Ainsi $x \in U'_x$. De même $y \in U'_y$ et tout est fait. ■

Corollaire. ***(Quotient par un compact)***

Soit X un espace topologique séparé et A une partie compacte de X. Alors X/A est séparé.

▷ Si $x \notin A$, alors $q^{-1}(q(x)) = \{x\}$ est compact. Si $x \in A$, $q^{-1}(q(x)) = A$ est compact par hypothèse. L'autre hypothèse se vérifie facilement. ■

Proposition. ***(Condition suffisante de séparation par compacts et fermés)***

Soit X un espace topologique et A un fermé ou un ouvert de X. Alors la restriction $\tilde{q} : X \setminus A \longrightarrow X/A$ est un homéomorphisme sur son image.

▷ On sait déjà que $\tilde{q}$ est continue par restriction et elle est clairement bijective. Supposons A fermé. Alors un ouvert de $X \setminus A$ est un ouvert de X qui est inclus dans $X \setminus A$. Pour un tel ouvert U, $\tilde{q}(U) = U$ est ouvert donc $\tilde{q}^{-1}$ est continue. Le cas où A est ouvert est identique par caractérisation de la continuité par images réciproques de fermés. ■

Remarque. Soient $f : X \longrightarrow Y$ continue et Y séparé. On définit r sur X par $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Alors $\tilde{f} : X/r \longrightarrow Y$ est injective et X/r est séparé.

Exemple. ***(Recollement du segment en un cercle)***

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ qui à $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Alors $[0,1]/r = [0,1]/(0 \sim 1)$. Alors $\tilde{f}$ est un homéomorphisme de $[0,1]/(0 \sim 1) \longrightarrow S^1$.

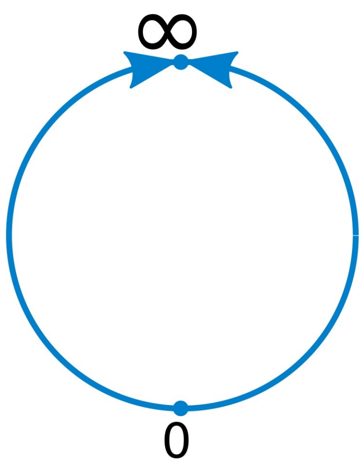


FIGURE 3.2.1 : *Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle.* —

Propriété. ***(Condition suffisante de séparation du quotient)***

Soit X un espace topologique et R une relation d'équivalence sur X. Si X' est un espace séparé et $f : X \longrightarrow X'$ une application continue vérifiant $x \sim y \iff \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$, alors X/R est séparé.

▷ En effet, f passe au quotient en $\tilde{f} : X/R \longrightarrow X'$ et cette application est injective par hypothèse. Ainsi X/R s'identifie à un sous-espace de X' séparé. Puisque tout sous-espace d'un séparé est séparé, X' est séparé. ■

Exemple. ***(Séparation du tore)***

Le tore $\mathbb{T}^2$ est séparé, grâce à l'exponentielle complexe produit, qui permet de le définir.

3.2.8.3 Autres propriétés des quotients

Important. Les propriétés du type image continue se préservent par passage au quotient par continuité de la projection canonique. Ainsi :

- ⋆ tout quotient séparé de compact est compact ;
- ⋆ tout quotient d'espace connexe, connexe par arcs, est connexe par arcs.

3.2.8.4 Fenêtre : espaces projectifs

Définition. ***(Espace projectif réel)***

Soit n un entier naturel. L'*espace projectif réel de dimension* n est $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R})$ est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1}$ par la relation d'équivalence de colinéarité.
Puisque deux vecteur sont colinéaires s'ils dirigent la même droite, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ peut être vu comme l'ensemble des droites vectorielles, c'est-à-dire des *directions*, de l'espace euclidien de dimension $n+1$.

▷ En effet, si l'on supprime zéro, la relation de colinéarité est une équivalence. ■

Proposition. ***(L'espace projectif réel est un quotient)***

$P_n(\mathbb{R})$ est le quotient $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ où le groupe $\mathbb{R}^\times$ agit sur cet espace par homothétie $\lambda \cdot x \mapsto \lambda x$. C'est l'ensemble des orbites sous cette action.
On retrouve que $P_n(\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par zéro.

Dans les premières dimensions, on a :

Exemples. ***(Espaces projectifs de petites dimensions)***

1. L'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des directions du plan. Grâce au demi-cercle unité supérieur (car deux points antipodaux du cercle définissent la même droite), cet espace s'y identifie, pour toute droite non horizontale. Par le même argument, les deux points d'ordonnée nulle s'identifient ; par conséquent, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{S}^1$ sous espace de $\mathbb{R}^2$. **C'est faux en dimension supérieure !**
   Plus précisément *(voir la suite)*, l'homéomorphisme $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1(\pm 1)$ envoie une droite vectorielle sur la classe de ses intersections avec S^1. Identifions le demi cercle $B' = \{e^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ avec l'intervalle $[-1,1]$ par projection sur l'axe des abscisses. Alors l'homéomorphisme $B^1/x \sim -x \longrightarrow S^1/\pm 1$ est induit par l'inclusion $B' \longhookrightarrow S^1$.

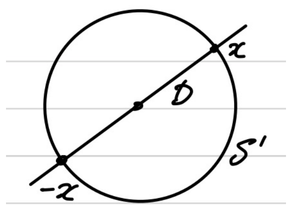
Finalement, P^1 est obtenu en attachant à $P^0 = \{\pm 1\}$ une cellule B' le long de $\partial B' = S^0$.

De façon calculatoire, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$, on définit la relation d'équivalence engendrée par $(x,y) \sim (\frac{x}{y},1)$: c'est la *projection stéréographique.* Elle permet de définir des points à l'infini. Dans le cas de la dimension 2, mais celui-là seul encore, les deux points à l'infini coïncident.

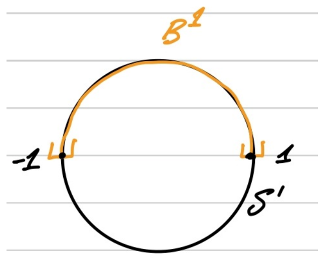
2. Dans le cas $n = 2$, l'homéomorphisme $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2(/\{\pm I_3\}$ envoie une droite sur la classe d'équivalence de ses deux points d'intersection avec la sphère de dimension 3 S^2.

Identifions la demi-sphère supérieure $\{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$ avec le disque $B'' \subseteq \mathbb{R}^2$ par $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Alors l'homéomorphisme $B''/(x \sim -x, x \in S' \subseteq B^2)$ est induit par l'inclusion $B'' \longrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. Notons d'ailleurs qu'on a une inclusion $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$. Si on attache B'' à P^1 le long de la projection $S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, on obtient un espace homéomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

On peut enfin montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans le plan, dans un sens que l'on précisera pas ici. En effet, intuitivement, en prenant la demi-sphère supérieure, on ne peut pas recoller dans l'espace euclidien usuel la circonférence de sa base.

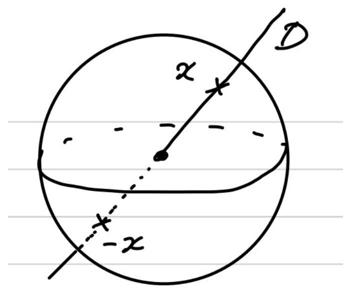


(a) *Une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^2$. —

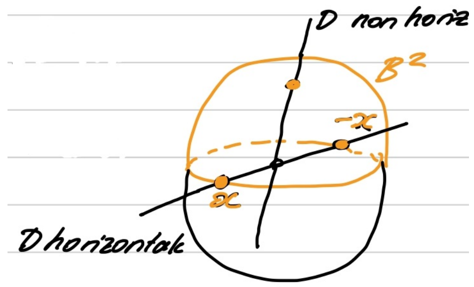


(b) *Identification de* $\mathbb{P}^1$. —

FIGURE 3.2.2 : *Espace projectif de dimension* 1. —



(a) *Une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^3$. —



(b) *Identification de* $\mathbb{P}^2$. —

FIGURE 3.2.3 : *Espace projectif de dimension* 2. —

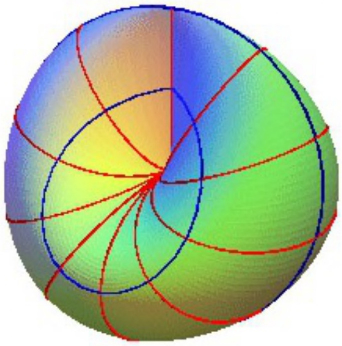


FIGURE 3.2.4 : *Vue de* $\mathbb{P}^2$. —
L'espace $\mathbb{P}^2$ ne se plonge pas dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (difficile). Puisque c'est une variété différentielle compacte, il reste simple de le plonger dans un espace euclidien, mais nécessairement plus grand.

On peut identifier les espaces projectifs de proche en proche de la manière suivante :

Proposition. ***(Identification des espaces projectifs)***

On a les homéomorphismes suivants :

$$P_n(\mathbb{R}) \xleftarrow[1]{\sim} S^n/\{\pm 1_{n+1}\} \xleftarrow[2]{\sim} B^n/(x \sim -x, x \in S^{n-1}) \xleftarrow[3]{\sim} P_{n-1}(\mathbb{R}) \bigcup_{q^{n-1}} e_n,$$

où $q^{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$, qui donnent donc inductivement la structure de CW-complexes finis.

$\triangleright$ L'injection canonique $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induit $S_n/\{\pm id\} \twoheadrightarrow P_n(\mathbb{R})$ qui est clairement bijectif et continu, quotient possible à gauche, car deux points antipodaux définissent la même droite. On a une application continue $\alpha_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$ qui induit la bijection réciproque. Comme cette application qui l'induit est continue, on a le premier homéomorphisme.

On a l'application continue $f : B^n \longrightarrow S^n$ et $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$. Par suite, elle induit une application continue bijective $B^n/(\{x \sim -x\}) \longrightarrow S^n/\{\pm I_{n+1}\}$ qui est un homéomorphisme. En effet, on a $q \circ f(x) = q \circ f(y)$ si et seulement si $x = y$ ou ($y = -x$ et $\|x\| = \|y\|$). En outre, l'espace $B^n/(...)$ est quasi compact et $S^n/\{\pm I_{n+1}\}$ est séparé, le graphe de l'action de $\{\pm I_{n+1}\}$ étant fermé. D'où le résultat.

Soit $Y = B_n/(x \sim -x \text{ si } x \in S^{n-1})$, espace qui d'après le deuxième homéo égale $P_n(\mathbb{R})$. On a l'application composée $S^{n-1} \hookrightarrow B^n \longrightarrow Y$ continue qui en passant au quotient induit une application continue $j_2 : P_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$. Soit $j_1 : B^n \longrightarrow Y$ l'application quotient canonique. On montre que Y

avec ces applications est universel pour le diagramme ci-dessous, d'où $Y = P_{n-1}(\mathbb{R}) \coprod_{q^{n-1}} B^n$.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q_{n-1}"] \arrow[d, "i_n"'] & P^{n-1}(\mathbb{R}) \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, "\forall \alpha_2 \text{ cont.}"] & \\ B^n \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "\forall \alpha_1 \text{ cont.}"'] & Y \arrow[dr, dotted, "\exists h \text{ cont.}"] & \\ & & Z \end{tikzcd} \qquad t.q.\ \alpha_2 \circ q_{n-1} = \alpha_1 \circ i_n$$

Comme j_1 est surjectif, l'application h est unique si elle existe. Dans ce cas, on a $h \circ j_1 = \alpha_1$ qui est continue, donc h est continue. Si on se donne α_1, α_2 telle que demandées, alors pour $x \in S^{n-1}$, on a $\alpha_1(x) = \alpha_1 \circ i_n(x) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(-x) = \alpha_1 \circ i_n(-x) = \alpha_1(-x)$. Par la propriété universelle de $j_1 : B \longrightarrow Y$, on obtient $h : Y \longrightarrow Z$ telle que $h \circ j_1 = \alpha_1$ et pour $u = q_{n-1}(v) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, on a :

$$h \circ j_2(u) = h \circ j_2 \circ q_{n-1}(v) = h \circ j_1 \circ i_n(v) = \alpha_1 \circ i_n(v) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(v) = \alpha_2(u),$$

et c'est fini. ■

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Heuristique

Il faut penser aux tentes Décathlon, qui sont des ronds, et que l'on le replie en huit jusqu'à en faire un point.

3.2.9 Quotient d'une topologie par une action de groupes

Tout un pan de la recherche mathématique étudie ces quotients : c'est un exemple fondamental pour lequel le quotient hérite encore une fois, a priori, d'une structure minable.

On étudie cette notion plus en détail dans la section de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

3.3 Constructions d'espaces topologiques

3.3.1 Prérequis : boules, sphères, tores, rubans

3.3.1.1 Boules, sphères

Définition. ***(Boule)***

On appelle *boule* de dimension n, la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, définie par $\mathbb{B}^n = B_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$.

Définition. ***(Sphère)***

On appelle *sphère* de dimension n, ou n-*sphère*, la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, définie par $\mathbb{S}^{n-1} = S_{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.

Proposition. ***(Passer de la boule à la sphère)***

$\mathbb{S}^{n-1}$ est la frontière de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition. ***(Quotient d'une boule par une sphère)***

$\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$.

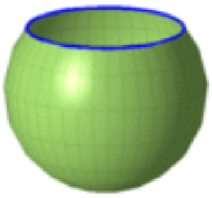


FIGURE 3.3.1 : *Quotient d'un disque par sa frontière sphérique.* —

Proposition. ***(Écrasement d'une demi-sphère sur un disque)***

La demi-sphère large $\mathbb{S}^n_+ \simeq \mathbb{B}^2$.

Proposition. ***(Compacité de la boule)***

$\mathbb{B}^n$ est compact.

▷ Fermé borné en dimension finie. ■

Proposition. ***(Connexité de la sphère)***

$\mathbb{S}^{n-1}$ est connexe par arcs pour $n \geqslant 2$.

▷ Première méthode : on le déduit de la convexité de $\mathbb{B}^n$. ■

▷ On peut raisonner par récurrence en montrant que tout point est reliable à l'équateur, en considérant un chemin donné par projection pour la première coordonnée et en ajustant avec la deuxième coordonnée : ceci est possible dès que $n \geqslant 2$. ■

▷ Le plus simple reste de considérer $\frac{(1-t)x+tx}{\|(1-t)x+ty\|}$. C'est possible seulement pour deux points non antipodaux. On en déduit le résultat en remarquant qu'un espace de dimension $n \geqslant 2$ connaît toujours au moins deux vecteurs colinéaires ou anticolinéaires. ■

Proposition. ***(Suspension de la sphère)***

$S(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{S}^n$.

Proposition. ***(Élasticité de la boule)***

$S(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq C(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq \mathbb{B}^n$.

3.3.1.2 Tore

Définition. ***(Tore)***

On appelle *tore de dimension n*, le quotient d'espaces topologiques $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Proposition. ***(Séparation du tore)***

Tout tore est séparé.

▷ Le tore se décrit comme quotient de l'application $(t_1,\dots,t_n) \mapsto (e^{2it_1\pi},\dots,e^{2it_n\pi})$. ■

Proposition. ***(Description alternative du tore)***

$\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$. Ce n'est pas $\mathbb{S}^n$.

Propriété

Le tore de dimension 1 est la sphère.

Proposition. ***(Obtention du tore par le carré unité)***

Le tore $\mathbb{T}^2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $K = [0,1] \times [0,1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$ *(voir schéma)*.

Le tore qu'on connaît est le tore de première dimension.

3.3.1.3 Ruban de Möbius

Définition. ***(Ruban de Möbius)***

On appelle *ruban de Möbius* le quotient $M = [0{,}1] \times [0{,}1]/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(0{,}s) \sim (1{,}1-s)$ *(voir schéma)*.

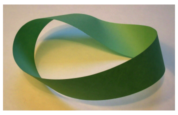


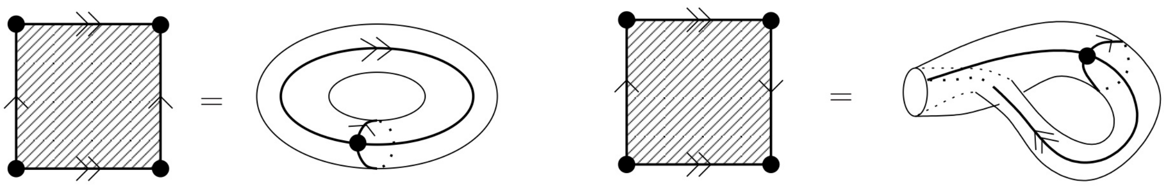
FIGURE 3.3.2 : *Un ruban de Möbius dans notre monde.* —

3.3.1.4 Bouteille de Klein

Définition. ***(Bouteille de Klein)***

La bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par $(1{,}t) \sim (0{,}1-t)$ et $(t{,}1) \sim (t{,}0)$ *(voir schéma)*.

La bouteille de Klein est le tore de Möbius.



(a) *Le tore simple.* —

(b) *La bouteille de Klein.* —

FIGURE 3.3.3 : *Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes.* —

3.3.1.5 Peignes

Définition. ***(Peigne)***

On appelle *peigne*, sans autre précision, un espace topologique de la forme suivante : le sous-espace topologique du plan euclidien :

$$X = [0{,}1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0{,}1].$$

Cet exemple se généralise à de nombreuses autres réalisations, y compris en dimensions supérieures. C'est la *philosophie du peigne* qui importe ici.

3.3.2 Cylindres

Définition. ***(Cylindre d'une espace)***

Soit X un espace topologique. Le *cylindre* de X est l'espace produit

$$\mathfrak{C}(X) = X \times I$$

où $I = [0,1]$ est muni de la topologie usuelle issue de $\mathbb{R}$.

3.3.3 Cônes

Définition. ***(Cône d'une espace)***

Soit X un espace topologique. Le *cône* de X est l'espace quotient

$$C(X) = \mathfrak{C}(X)/(X \times \{1\}).$$

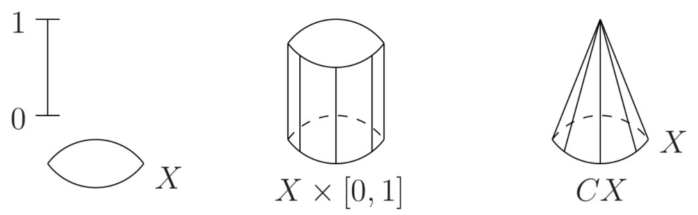


FIGURE 3.3.4 : *Construction pas à pas du cône d'un espace X.* —

Proposition. ***(Isotropie des cônes)***

Soit X un espace topologique. On a aussi $CX \simeq \mathfrak{C}/(X \times \{0\})$.

▷ Il suffit d'exhiber un automorphisme au sens topologique de $[0,1]$ qui envoie 0 sur 1, par exemple $t \mapsto 1 - t$. ■

Proposition. ***(Plongement d'un espace dans son cône)***

Soit X un espace topologique. Alors l'application $X \longrightarrow CX$ qui à $x \mapsto \overline{(x,0)}$ est continue et un homéomorphisme sur son image.

▷ Cette application est continue par composition d'application continues. Elle est clairement injective. Or $X \hookrightarrow X \times I \longrightarrow CX$ est une application quotient par $X \times \{1\}$, qui est fermé dans $X \times I$: en notant i l'injection canonique, $i(X) \subseteq X \times I \setminus X \times \{1\}$. Ainsi X est un homéomorphisme sur son image. ■

Remarque. Pour tout $s \in [0,1[$ en fait, l'application $X \longrightarrow CX$ qui à $x \mapsto \overline{(x,s)}$ est un homéomorphisme sur son image.

Définition. ***(Sommet d'un cône)***

Le *sommet* d'un cône est le point $\overline{(x,1)}$ de CX pour n'importe quel $x \in X$. Il est bien défini par construction.

Proposition. ***(Fonctorialité du cône)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $CX \longrightarrow CY$, $Cid_X = id_{CX}$ et $C(f \circ g) = Cf \circ Cg$.

▷ On a $f(X \times \{1\}) \subseteq Y \times \{1\}$. On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "f\times id"] \arrow[d] & Y \times I \arrow[d] \\ CX \arrow[r, "Cf"] & CY \end{tikzcd}$$

par propriété universelle du quotient. ■

Proposition. ***(Séparation du cône)***

Le cône d'un espace séparé est séparé.

▷ Soit R la relation $R_{X\times\{1\}}$, c'est-à-dire, $xRy \iff x = y$ ou $xety \in X \times \{1\}$. Si $F \subseteq X \times I$, alors $RF = F$ si $F \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$ ou $= F \cup (X \times \{1\})$ sinon.Soient $a = (x,s)$ et $b(y,t)$ deux points de $X \times I$ tels que $\overline{(x,s)} \neq \overline{(y,t)}$. On disjoint les cas.

Si $s = 1$, alors $t \neq 1$. Soient U,V des ouverts disjoints de $[0,1]$ qui contiennent $s = 1$ et t (c'est possible !). Alors $X \times U$ et $X \times V$ sont des ouverts saturés disjoints qui séparent a et b, et c'est fait.

Si $t = 1$, c'est pareil.

Si $s,t \neq 1$ et $s \neq t$, soient U,V des ouverts disjoints de $[0,1]$ qui séparent s et t. Alors $X \times U$ et $X \times V$ conviennent encore.

Si $s,t \neq 1$ et $s = t$. Alors $x \neq y$. Soient V_x, V_y des ouverts de X qui séparent x et y, X étant séparé. Alors $V_x \times [0,1[$ et $V_y \times [0,1[$ sont des ouverts saturés qui séparent x et y. Tous les cas sont traités. ■

Exemple. ***(Cône d'une sphère)***

On a $CS^{n-1} = B^n$. En effet, le cylindre d'une sphère est un cylindre, et son cône est homéomorphe à une boule.

3.3.4 Suspensions, doubles cônes

Définition. ***(Suspension d'une espace)***

Soit X un espace topologique. La *suspension* de X est l'espace quotient $S(X) = \Sigma(X) = X \times [-1,1]/R$ où :

$$(x,s)R(y,t) \iff (x,s) = (y,t), \quad s = t = 1, \quad s = t = -1.$$

Autrement dit : $S(X) = X \times [-1,1]/X \times \{-1,1\}$.

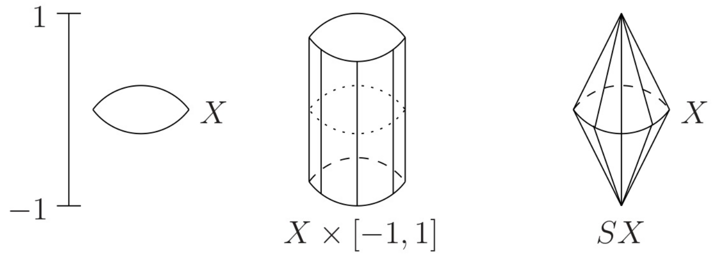


FIGURE 3.3.5 : *Construction pas à pas de la suspension d'un espace X.* —

Proposition. ***(Plongement d'un espace dans sa suspension)***

Soit X un espace topologique. Alors l'application de X dans SX qui à x fait correspondre $\overline{(x,0)}$ est un homéomorphisme sur son image.

Remarque. Même remarque que pour le cône avec $s \in]$-1,1$[$.

Proposition. ***(Fonctorialité de la suspension)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $SX \longrightarrow SY$, $Sid_X = id_{SX}$ et $S(f \circ g) = Sf \circ Sg$.

Proposition. ***(Séparation de la suspension)***

La suspension d'un espace séparé est séparée.

Proposition. ***(La suspension est un double cône)***

Soit X un espace topologique. Alors $S(X) \simeq CX/X \times \{0\}$.

Exemple. ***(Suspension de la sphère)***

On a $SS^{n-1} = S^n$.

3.3.5 Écrasements

Exemple très simple déjà rencontré en exemple dans la topologie quotient, on revient sur cette construction extrêmement classique.

Définition. ***(Écrasement d'un espace sur une partie)***

Soit X un espace topologique est $A \subseteq X$. On appelle *écrasement de X sur A* l'espace topologique quotient $X/A := X/\langle A \rangle$ où X est quotient par la relation d'équivalence :

$$x \sim_A y \iff x = y \vee (x,y) \in A^2.$$

C'est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous $x,y \in A$.

Figure 3.3.6 : *Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule.* — En vérité, les deux espaces étaient déjà homéomorphes...

Proposition

Si A est ouverte ou fermé, la restriction de la projection canonique à $X \setminus A$ est un homéomorphisme sur son image.

Proposition. ***(Suspension par écrasement)***

Le cône, la suspension sont des écrasements.

3.3.6 Recollements, bouquets

Une généralisation (la dernière propriété va vous surprendre !).

Définition. ***(Recollement le long d'un espace)***

Soient X,Y et A des espaces topologiques. On prend des applications $f : A \longrightarrow X$ et $g : A \longrightarrow Y$ des applications continues. On note $X \coprod_A Y$ le *recollement le long de* A, par abus de notation (le recollement dépend d'une certaine application en fait, d'ailleurs non nécessairement injective), le quotient $X \coprod Y/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par les $\{f(a)\mathcal{R}g(a), a \in A\}$.

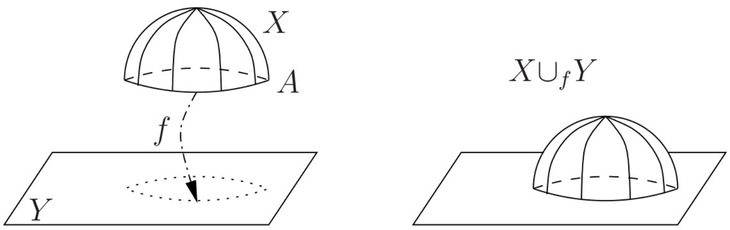


FIGURE 3.3.7 : *Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.* —

Une autre façon de voir les choses est la suivante :

Propriété. ***(Propriété universelle du recollement le long d'un espace)***

On reprend les notations précédentes. Alors $\iota_X : X \longrightarrow X \coprod_A Y$ est continue, de même pour ι_Y. On a $\iota_X \circ f = \iota_Y \circ g$. De plus, pour tout espace Z, pour toutes $j_X : X \longrightarrow Z$ et $j_Y : Y \longrightarrow Z$, $j_X \circ f = j_Y \circ g$ alors il existe une unique flèche continue $h : X \coprod_A Y \longrightarrow Z$ telle que le diagramme suivant commute, *i.e.* $h \circ \iota_Y = j_Y$ et $h \circ \iota_X = j_X$.

▷ Propriété universelle du quotient :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\iota_X"] \arrow[ddr, bend left, "j_X"] & \\
Y \arrow[r, "\iota_Y"'] \arrow[drr, bend right, "j_X"'] & X \coprod_A Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & Z.
\end{tikzcd}$$

■

Il y a donc au moins trois façons pratiques de recoller des espaces :

- exhiber un recollement (une application f)
- vérifier la propriété universelle
- reconnaître un recollement usuel.

Il faut bien que les deux ensembles d'images coïncident !

Heuristiquement, on va utiliser le recollement dans le cas où les ι sont injectives, où l'image de A est dans la frontière de l'espace et donc A pris comme sous-espace de X ou de Y. L'idée est de recoller des morceaux d'espaces le long de leurs bords.

Exemples. ***(Recollements)***

1. Soit $X = Y = [0{,}1]$ et $A = \{\star, \cdot\}$ muni de la topologie discrète. On prend $f(\star) = 0 = g(\cdot)$ et $f(\cdot) = 1 = g(\star)$. Alors $X \coprod_A Y \cong S^1$.
2. Un *espace topologique pointé*[a] est une paire (X, x_0) où $x_0 \in X$ est appelé *point base*. Soient (Y,y_0) un deuxième espace topologique pointé. Prenons le singleton $A = \{\star\}$. Pour $f : A \longrightarrow X$ constante x_0 et g de même, le *bouquet* de $(X,x_0), (Y,y_0)$ est l'espace $X \coprod_A Y$ dit *pointé par l'image de* $x_0 \neq y_0$. Intuitivement, on prend un point de chaque espace, on les identifie tous et on tient ce point au bout des doigts. Formellement, on l'appelle également *somme pointée* et l'on note $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \left(\coprod_{i\in I} X_i\right)/R$ où R est engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i,j.
3. *(Attachement cellulaire)* Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant. Soit S^n la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ et B^n la boule de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\partial B^n = S^{n-1}$ (pour se rappeler le décalage, écrire $\mathrm{Fr}(B^2) = S^1$).
   Puisque B^n est fermé, on a une inclusion canonique de la $(n-1)$-sphère dans la n-boule $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$. Si X est un espace topologique, et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est continue, on note $X \bigcup_\varphi e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$ au moyen de φ ; dans le recollement, les applications f,g n'étaient pas les plus importantes ; ici, c'est le contraire, l'espace A est toujours le même, c'est l'application φ qui est importante. On dit alors qu'on a *recollé une* n*-ellule à* X et qu'on obtient $X \cup_\varphi e^n$ *en attachant une* n*-cellule le long de* φ.

[a] Il existe une vraie dichotomie entre les espaces topologiques et les espaces topologiques pointés.

Remarque importante. On signale une définition alternative du recollement, ne faisant intervenir qu'une seule application.

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si A est une partie de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. Le *recollement de* X *sur* Y *par* f est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ et la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.

Proposition

On vérifie que si A est ouvert ou fermé, la projection canonique $X \coprod Y \longrightarrow X \cup_f Y$ induit sur Y un homéomorphisme sur son image qui est de même nature.

Autrement, ce n'est pas clair.

Curiosité. ***(L'écrasement est un recollement)***

Si Y est réduit au point $\star$ (notation homotopique), alors f est l'application constante la seule qui existe et l'inclusion de X dans $X \coprod \star$ induit un homéomorphisme $X/\langle A\rangle \simeq X \cup_f \{\star\}$.

Proposition

Si A est non vide, le recollement de deux connexes ou connexe par arcs est de même nature.

On verra d'autres exemples de recollements dans la partie sur les espaces cellulaires, tels que l'attachement cellulaire.

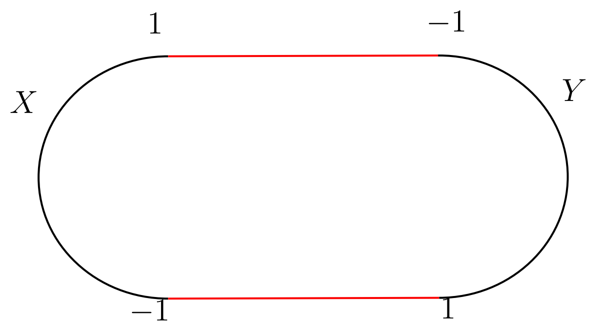


Figure 3.3.8 : *Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle.* —

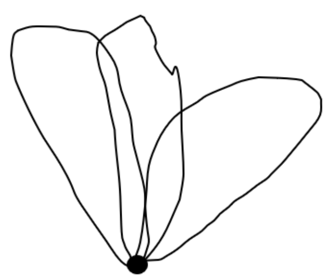


Figure 3.3.9 : *Bouquet à trois* fleurs. —
Toutes les formes sont à prévoir à homéomorphie près.

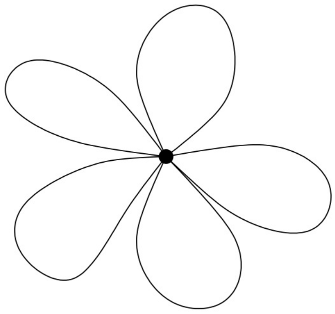


FIGURE 3.3.10 : *Bouquet à cinq cercles.* —
C'est la vision la plus proche de l'intuition.

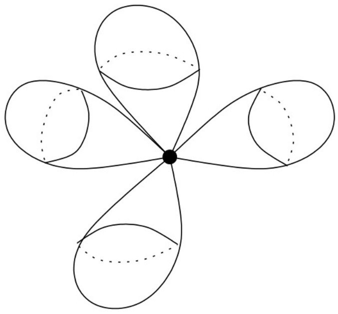


FIGURE 3.3.11 : *Bouquet à quatre sphères.* —
Noter qu'il est impossible de le représenter correctement en trois dimensions.

3.3.7 Joints

3.4 Propriétés topologiques classiques

3.4.1 Le caddie de contre-exemples

3.4.1.1 Droite de Sorgenfrey

3.4.1.2 Plan de Sorgenfrey

3.4.1.3 Droite de Michael

3.4.2 Séparation

Définition. ***(Espace séparé)***

Soit X un espace topologique. Alors X est séparé si pour tous $x \neq y$ dans X, il existe deux ouverts (ou, de façon équivalente, deux voisinages) disjoints qui contiennent x,y respectivement.

▷ Immédiat. ■

Remarques.

1. La topologie discrète est toujours séparée.
2. La topologie grossière n'est jamais séparée.

Exemple. ***(Dédoublement du segment unité)***

Soient 0_- et 0_+ deux ensembles distincts n'appartenant pas à $[0,1]$. On considère $X =]0,1] \cup \{0_+\} \cup \{0_-\}$. On note $\mathcal{B}(x) = \{]x-1/n, x+1/n[\cap[0,1], n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in]0,1]$, $\mathcal{B}(0_+) = \{\{0_+\}\cap]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{B}(0_-) = \{\{0_-\}\cap]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $\mathcal{B}(x)$ est une base d'ouverts d'une topologie sur X. Autrement dit, on considère $[0,1]$ muni de sa topologie induite auquel on adjoint une copie c du point 0 tel que $c\cup]0,1]$ ait la même topologie que $[0,1]$.
Alors X n'est pas séparé pour cette topologie. En effet, 0_+ et 0_- n'admettent pas de voisinages disjoints.

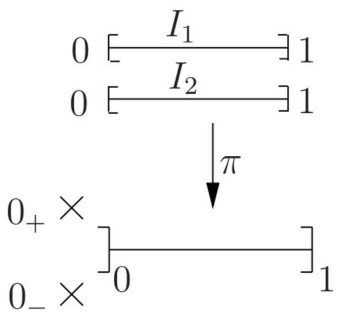


FIGURE 3.4.1 : *La suspension du segment unité, non séparée.* —
On parle de *segment à deux origines.*

Propriété. ***(Fermeture des singletons)***

Soit X un espace séparé. Alors les singletons sont fermés.

Contre-exemple. ***(Topologie non séparée donc les singletons sont fermés)***

Soit $X = \mathbb{C}$ que l'on munit de la topologie de Zariski $\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad U = \{x \in \mathbb{C}, P(x) \neq 0\}\}$. $\square$

Propriété. ***(Stabilité de la séparation par induction)***

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

On montre qu'un produit d'espaces séparés est séparé. La preuve dans le cas fini est extrêmement élémentaire ; dans le cas infini, c'est plus dur.

Propriété. ***(Produit fini d'espaces séparés)***

Le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

▷ Soient (x_1,y_1) et $(x_2,y_2) \in X \times Y$ distincts. On peut, sans perte de généralité, supposer $x_1 \neq x_2$. Puisque X est séparé, on peut trouver deux ouverts U_1,U_2 tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $x_i \in U_i$. Ainsi $U_1 \times Y$ et $U_2 \times Y$ sont des ouverts disjoints qui contiennent (x_1,y_1) et (x_2,y_2) respectivement. Ainsi $X \times Y$ est séparé. ■

Théorème. ***(Produit d'espaces séparés)***

Soit I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides munis de leurs topologies respectives. Alors $\prod_{i\in I} X_i$, muni de la topologie produit, est séparé, si et seulement si, chaque terme X_i est séparé.

▷ Nous montrons le sens direct. Supposons les X_i séparés. Soient $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ tels que $x \neq y$. Par définition, il existe un certain $i \in I$ tel que $x_i \neq y_i$. Puisque X_i est séparé, il existe U,V deux ouverts disjoints de X_i qui séparent x et y. Alors $X \times X \times ... \times U \times ... \times X$ et $X \times X \times ... V \times ... \times X$ sont deux ouverts disjoints de $\prod_{i\in I} X_i$ contenant respectivement x et y.

Les injections canoniques forment des homéomorphismes sur leurs images. Ainsi les X_i s'identifient à des sous-espaces de $\prod_{i\in I} X_i$, qui sont donc séprаés comme sous-espaces d'espaces séparés. ■

3.4.2.1 Autres axiomes de séparation

Propriété. ***(Caractérisation pratique des T_0)***

Un espace topologique X est T_0 si et seulement si pour tous $x,y \in X$, si $x \in \overline{\{y\}}$ et si $y \in \overline{\{x\}}$, alors $x = y$.

▷ Notons $(\star)$ cette propriete.

$(\star) \implies T_0$: supposons $x \neq y$. Alors quitte à renommer, x n'est pas dans l'adhérence de $\{y\}$. Ainsi, $\{y\}^c$ est un voisinage ouvert de x qui ne contient pas y.

$T_0 \implies (\star)$: supposons $x \neq y$. Alors quitte à renommer, il existe un voisinage ouvert V de x qui ne contient pas y. Ainsi, $V^c \ni y$, donc $\{y\} \subseteq V^c$ qui est fermé, d'où $\overline{\{y\}} \subseteq V^c$ et donc $\overline{\{y\}} \not\ni x$. ■

3.4.3 Dénombrabilité

Voir la première section : Axiomes de dénombrabilité, Séparabilité.

3.4.4 Métrisabilité

Mnémonik : un espace est métrisable s'il est maîtrisable.

Propriété

Tout espace métrisable est séparé.

3.4.4.1 Produits d'espaces métrisables

Tout produit fini d'espaces métrisables est métrisable grâce à la distance produit. Dans le cas dénombrable, c'est encore possible grâce à un procédé diagonal. Dans le cas infini quelconque, c'est encore possible, grâce à l'axiome du choix ! Mais la métrique obtenue est bien loin des métriques élémentaires.

3.4.5 Compacité

Remarque. Il suffit de vérifier, pour montrer qu'une partie est compacte, que de tout recouvrement *éventuellement dépassant*, on peut extraire un recouvrement fini.

Méthode. ***(Travailler un compact en topologie générale)***

Pour tout point $x \in$ truc, il existe un ouvert U_x et la collection des U_x recouvre X. Souvent, par séparation, on a en fait un ouvert $V_{f(x)}$ dual. Il en existe donc un nombre fini qui recouvre X. Alors l'intersection de leurs duaux est encore un ouvert vérifiant la propriété voulue.

Propriété. ***(Sous-espace compacts)***

Les sous-espaces (quasi-)compacts d'un espace séparé sont ses fermés.

▷ En effet, si X est compact et $A \subseteq X$ est fermé, alors A est compact. D'autre part, si X est séparé et $K \subseteq X$ est compact, alors K est fermé dans X. ■

Le fait que la notion de compacité soit extrinsèque, confirme que tous les sous-espaces d'un compact ne peuvent être compact.

Ceci d'autant plus que tout espace se plonge dans un espace compact, dans lequel il est n'est donc pas fermé...

On énonce maintenant une propriété qui rend compte du fait qu'un espace compact est en particulier localement compact.

Lemme

Tout point d'un espace compact admettant un voisinage ouvert U admet un voisinage fermé V contenu dans U.

▷ Soit x un tel point et notons X l'espace compact dont il est question. On sait que $\mathrm{Fr}(U)$ est un fermé inclus dans X, donc il est compact. Par séparation, pour tout $t \in U$, il existe un voisinage ouvert V_t de t et un voisinage F_y de x dans U disjoints. Puisque $(V_y)_{y\in \mathrm{Fr}(U)}$ recouvre $\mathrm{Fr}(U)$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini indexé par disons $t_1,...,t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_0 = F_{t_1} \cap ... \cap F_{t_n}$ est un voisinage de x dans U ne rencontrant aucun des termes d'un recouvrement de $\mathrm{Fr}(U)$, donc $F := \overline{F_0} \subseteq U = \overline{U} \setminus \mathrm{Fr}(U)$. ■

Propriété. *(Raffinement relativement compact d'un recouvrement)*

Soient X un espace compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X avec I un ensemble quelconque. Alors il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in J}$ de X avec $J \subseteq I$ fini, $V_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in J$ et $\overline{V_i} \subseteq U_i$ compact ; on dit que V_i est *relativement compact dans* U_i. En particulier, $(\overline{V_i})_{i\in J}$ est un recouvrement fini de X par des compacts qui est un raffinement de $(U_i)_{i\in I}$.

▷ Une façon de raisonner est d'utiliser la compacité locale d'un espace compact. Soit $x \in X$. Il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$. D'après le lemme précédent, on peut trouver un voisinage F_{i_x} de x avec $F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$. Posons $V_x = \mathring{F}_{i_x}$ de sorte que $x \in V_x$ pour tout $x \in X$. Alors V_x est relativement compact, puisque son adhérence est un fermé inclus dans X qui est compact. La famille $(V_x)_{x\in X}$ est un recouvrement de X dont on peut extraire un sous-recouvrement fini qui est bien par construction un raffinement de $(U_i)_{i\in I}$, de plus $\overline{V_x} \subseteq \overline{F_{i_x}} = F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$ pour tout x, et toutes les conditions sont remplies. ■

3.4.5.1 Compacts, quasi-compacts et applications continues

Contre-exemple. *(Un quasi-compact non séparé)*

Tout ensemble fini non séparé, par exemple, $\{a,b\}$ muni de la topologie grossière, est quasi-compact sans être séparé, donc ne peut être dit *compact*. □

Propriété. *(Image d'un quasi-compact)*

L'image d'un quasi-compact par une application continue est quasi-compacte.

Propriété. *(Image d'un compact)*

L'image d'un compact par une application continue **à valeurs dans un espace séparé** est compacte.

C'est propriété est très forte, car l'image d'un fermé par une application continue n'a aucune raison d'être fermée, même dans l'image. La compacité permet de rendre les choses bien plus fortes. On en déduit une propriété suivante.

Théorème. ***(Isomorphisme de compact)***

Soient X,Y deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective continue. Si X est quasi-compact et Y est séparé, alors f est un homéomorphisme.

▷ Montrons que f est fermée. Soit F un fermé de X, c'est un compact. Ainsi $f(F)$ est un compact, donc un fermé. ■

Heuristique

L'idée selon laquelle un compact est petit est trompeuse, tout simplement car la taille est une notion relative. Il est plus intéressant de remarquer qu'un espace n'est pas compact s'il lui manque quelque chose ; de là on déduit qu'un compact ne peut pas « s'étendre à l'infini ».
À méditer, les plongements suivants :

$$B_{\mathbb{C}}(0,1) \hookrightarrow \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}¶^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où les espaces compacts de cette suite sont $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$ et $\mathbb{C}¶^1$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$.

3.4.5.2 Applications propres

Fait

Toute application propre est fermée.

Propriété. ***(Caractérisation de la propreté par les fibres)***

Soit Y un espace séparé et localement compact. Soit X un espace quelconque. Une application continue $f : X \to Y$ est propre si et seulement si f est fermée et les fibres de f sont fermées au-dessus de chaque élément de Y.

3.4.5.3 Produit d'espaces compacts

On signale le lemme du tube, parfois utilisé.

Lemme. ***(Lemme du tube)***

Soient X,Y deux espaces topologiques, Y quasi-compact. Soit $x \in X$. Alors tout ouvert contenant $\{x\} \times Y$ contient un ouvert élémentaire $U \times Y$ contenant cette partie.

▷ Soit O un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x\} \times Y$. Par définition, pour tout $y \in Y$, $(x,y) \in O$. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert élémentaire $U_y \times V_y$ contenant (x,y) contenu dans O. En particulier, $(V_y)_y$ est un recouvrement ouvert du quasi-compact Y. On peut en extraire un sous-recouvrement fini, indexé par Z. Posons $U = \bigcap_{y \in Z} U_y$. Alors l'ouvert U contient x et la réunion des V_y, $y \in Z$ vaut Y donc $U \times Y \subseteq O$. ■

Remarques.

1. C'est faux dans le cas général ! L'hypographe avec l'axe des abscisses de la fonction inverse, contient la droite des ordonnées ; elle ne contient aucun tube contenant la droite des ordonnées.
2. On peut montrer que le lemme du tube équivaut à la quasi-compacité de Y : pour tout Y non quasi-compact, on peut trouver un x ne vérifiant pas la propriété du lemme.

Propriété. ***(Produit fini d'espaces compacts)***

Le produit de deux espaces quasi-compacts est quasi-compact.

▷ *(Preuve sans le lemme du tube (explicitement).)* Soient X,Y deux espaces quasi-compacts. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour tous $(x,y) \in X \times Y$, je choisis $i(x,y) \in I$ tel que $(x,y) \in O_{i(x,y)}$ et des ouverts $U_{(x,y)}$ et $V_{(x,y)}$ de X et Y contenant x et y tels que $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq O_{i(x,y)}$. Si on fixe x, les $V_{i(x,y)}$, $y \in Y$ recouvrement ouvert de Y. Puisque Y est quasi-compact, il existe un sous-ensemble fini $Y_x \subseteq Y$ tel que les $V_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$ recouvrent Y. Or, pour $U_x = \cap U_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$ forment un recouvrement de X par des ouverts, car Y_x est fini. Donc il existe $X_0 \subseteq X$ tel que $(U_x)_{x \in X_0}$ est un recouvrement fini de X. Ainsi, les $O_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$, $x \in X_0$ forment un recouvrement ouvert fini de $X \times Y$. ■

Dans le cas général (assez surprenant par ailleurs !), on a besoin de l'axiome du choix.

On montre d'abord un lemme technique.

Théorème. ***(Théorème de compacité d'Alexander)***

On dit qu'un mauvais recouvrement d'un espace topologique X est un recouvrement dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini. Clairement, un espace séparé est compact si et seulement s'il n'admet aucun mauvais recouvrement ouvert.
Soit A une prébase d'ouverts de X. On prétend que si X admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de A.

▷ En effet : soit M l'ensemble des mauvais recouvrements ouverts de X ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de M. Soit $U = \bigcap_{j \in J} U_j$. Alors U majore les U_j. C'est un mauvais recouvrement ouvert de X, sinon, il contiendrait un sous-recouvrement fini V_1,...,V_n. En prenant $V_i \in U_{j_i}$ et si $\beta \in J$ vérifie $U_{i_j} \subseteq U_\beta$ pour chacun, alors U_β aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction. Donc M est inductif. Par le théorème de Zorn, soit U^* un élément maximal de M. En particulier, pour tout ouvert $V \notin U^*$, le recouvrement $U * \cup V$ n'est pas mauvais, donc il existe U_1,...,U_n dans U^* tel que $\{V, U_1,...,U_n\}$ recouvre X.

Pour terminer la preuve du lemme, remarquons deux choses. D'abord, pour tous ouverts V,V' de X, si $V \notin U^*$ et $V' \notin U^*$, alors $V \cap V' \notin U^*$. En effet, soient U_1,...,U_n et U'_1,...,U'_n comme dans la remarque précédente. Alors $V \cap V', U_1,...,U_n, U'_1,...,U'_n$ recouvre X, et comme U^* est mauvais, $V \cap V' \notin U^*$. Remarquons également que pour tous ouverts V,V' de X, alors si $V \notin U*$ et $V \subseteq V'$, alors $V' \notin U^*$, puisque si V,U_1,...,U_n recouvre X, alors V',U_1,...,U_n recouvrirait X aussi. Montrons enfin que $A \cap U^*$ recouvre X. Soit $x_0 \in X$. Comme U^* recouvre X, il existe $T \in U^*$ tel que $x_0 \in T$. Comme A est une prébase, il existe V_1,...,V_n dans A tels que $x_0 \in V_1 \cap ... \cap V_n \subseteq T$. Par les remarques précédentes, il existe i tel que $V_i \in U^*$. Donc $x_0 \in V_i \in A \cap U^*$. Enfin, comme U^* est mauvais, $A \cap U^*$ l'est aussi. ■

Théorème. ***(Théorème de Tychonov)***

Un produit non vides d'espaces compacts est compact si et seulement si chaque facteur est compact.

▷ Encore une fois le sens direct se déduit de la continuité des projections et de l'image continue d'un compact. Montrons donc le sens réciproque.

Revenons à la preuve. Alors le produit des espaces compacts, donc séparés, X_i, $i \in I$, est séparé, par produit quelconque de séparés. S'il n'était pas compact, alors par le lemme technique, il existerait un mauvais recouvrement de ce produit X par des éléments de la prébase $A = \{p_j^{-1}(V), j \in I, V$ ouvert de $X_j\}$. Pour $j \in J$, soit $\mathcal{A}_j$ l'ensemble des ouverts V de X_j tels que $p_j^{-1}(V) \in U$. Si $\mathcal{A}_j$ recouvre X_j, par compacité de X_j, il existe V_1,...,V_n dans $\mathcal{A}_j$ recouvrant X_j. Mais alors $p_j^{-1}(V_1) \cup ... \cup p_j^{-1}(V_n) = p_j^{-1}(X_j) = X$, ce qui contredit le fait que U est mauvais. Soit donc $x_j \in X_j$ tel que $x_j \notin \mathcal{A}_j$. On pose $x = (x_j)_{j \in J} \in X$. Comme U recouvre X, il existe $j \in I$ et V ouvert de X_j tel que $x \in p_j^{-1}(V) \in U$. Ceci est une contradiction. Donc $\prod_{i \in I} E_i$ est un espace compact, ce qu'il fallait montrer. ■

3.4.5.4 Locale compacité

Définition. ***(Espace localement compact)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement compact* s'il est séparé et tout point admet un voisinage compact.

Théorème. ***(Riesz)***

Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.

▷ Le sens direct vient du théorème Bolzano-Weierstrass. Montrons en quoi le théorème de Riesz implique la réciproque. Supposons que 0 admette voisinage compact, alors soit une boule fermée non triviale inclus dans ce voisinage. C'est un fermé d'un compact donc compact. Il existe donc une boule fermé non triviale compacte. Par homéomorphisme, la boule unité fermée est compacte, donc E est de dimension finie. ■

Propriété. ***(Système de voisinages compacts)***

Un espace séparé X est localement compact si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

▷ La réciproque est claire. Soit X localement compact. Soit $x \in X$ et F un voisinage compact de x. Pour tout ouvert U avec $x \subseteq U \subseteq F$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage W de x fermé, contenu dans U ; il est alors automatiquement compact.

Comme X est séparé, si $y \neq x$, soient V et V' des voisinages de x et y respectivement les séparant. Alors $y \notin \overline{V}$: en effet, sinon, pour tout voisinage de y, en particulier V', $V \cap V' \neq \emptyset$. Ainsi $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V}$. Par conséquent, $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Par compacité de F, il existe des voisinages $V_1, ..., V_n$ de x tels que $(X - U) \cap \overline{V_1} \cap ... \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Alors $\overline{V_1} \cap ... \cap \overline{V_n} \cap F$ convient. ■

Corollaire. ***(Ouvert dans un localement compact)***

Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.

3.4.5.5 Compactification d'Alexandrov

Propriété. ***(Compactifié de l'espace)***

Le compactifié de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est la n-sphère.

3.4.5.6 Séquentielle compacité

3.4.5.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

On l'énonce.

3.4.5.6.2 Généralisations

On fait ce qu'on peut.

Exercice 23

Montrer qu'il existe un espace compact non séquentiellement compact.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit $I = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $X = \{0,1\}$. Pour $i \in I$, on note i_n sa n-ième composante. Considérons la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans X définie par $f_n(i) = i_n$. Soit $(f_{n_k})_k$ une suite extraite de f qui converge dans X. Notons K

l'image dans $\mathbb{N}$ de la suite $(n_k)_k$. Soit $j \in I$ tel que $j_m = 0$ si $m \in 2K$, et $j_m = 0$ sinon. On détermine l'image de $(f_{n_k})(j)$ et on montre qu'elle ne converge pas dans X.

3.4.5.7 Dénombrabilité à l'infini

Définition. ***(Espace dénombrable à l'infini, σ-compact)***

Un espace topologique X est *dénombrable à l'infini* ou *σ-compact* s'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts tels que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Lemme

Un espace dénombrable à l'infini et localement compact admet un recouvrement dénombrable d'ouverts relativement compacts $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sorte que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\overline{U_i} \subseteq U_{i+1}$.

$\triangleright$ Soit $(K_i)i \in \mathbb{N}$ un recouvrement dénombrable de X par des compacts. On construit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence. On pose $U_0 = \emptyset$. Supposons qu'on ait construit U_1,...,U_n comme demandé. En particulier, $Q_n = \overline{U_n} \cup K_{n-1} \subseteq X$ est compact. Pour tout $x \in Q_n$, soit U_x un voisinage ouvert de x. Par compacité locale, on peut le remplacer par V_x d'adhérence compacte $\overline{V_x} \subseteq U_x$ et l'on a encore un recouvrement de Q_n. Comme Q_n est compacte, il existe J fini tel que $(V_x)_{x\in J}$ recouvre encore Q_n, et la réunion $U_{n+1} = \bigcup_{x\in J} V_x$ est donc un voisinage ouvert de Q_n, en particulier de $\overline{U_n}$. De plus, $\overline{U_{n+1}}$ est bien compact, car $\overline{\bigcup_{x\in J} V_x} = \bigcup_{x\in J} \overline{V_x}$. Il reste à voir que $(U_i)_{i\in I}$ ainsi obtenue est un recouvrement de X. Or par construction, les U_{i+1} contiennent les Q_i et donc les K_i qui forment eux-mêmes un recouvrement, donc c'est bon. ■

Propriété. ***(σ-compact $\implies$ Lindelöf)***

Dans un espace dénombrable à l'infini, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

Curiosité

Un espace séparé à la fois de Baire et σ-compact est localement compact en au moins un point.
En particulier, dans le cas d'un groupe topologique, il est localement compact.

Propriété. ***(Produit d'espaces σ-compact)***

Tout produit fini d'espaces σ-compacts est σ-compacts.

Contre-exemple. ***(Produit de σ-compacts pas σ-compact)***

L'espace $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k,k+1]$ est σ-compact. Cependant, on montre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas σ-compact. $\square$

3.4.5.8 Paracompacité

Définition. ***(Espace paracompact)***

Un espace topologique X est *paracompact* si et seulement si tout recouvrement ouvert admet un raffinement « localement fini », *i.e.* étant donné $(V_i)_{i\in I}$, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \ni x$ tel que $\{i \in I \mid V_i \cap U \neq \emptyset\}$ est fini.

Remarque. Un compact est paracompact.

Si $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, soit $\bigcup_{i\in I} V_i = X$, un *raffinement* est un recouvrement $(V_j)_{j\in J}$ tel que pour tout j, il existe $\varphi(j) \in I$ tel que $V'_j \subseteq V_{\varphi(j)}$. Un sous-recouvrement est un raffinement particulier.
Si l'on remplace *localement fini* par *fini* dans le définition, on retombe clairement sur la notion de compacité. Plus étonnant, si l'on remplace *raffinement* par *sous-recouvrement* dans la définition précédente, on retombe également sur la notion de compacité !

$\triangleright$ Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $V \in \mathcal{U}$ non vide contenant x et posons $\mathcal{V} = \{G \cup V, G \in \mathcal{U}\}$. Alors $\mathcal{V}$ est clairement un recouvrement ouvert de X, mais puisque chacun de ses membres contient V, aucun sous-recouvrement ne peut être localement fini en x à moins qu'il soit lui-même fini. Par suite, $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement non seulement localement fini (par hypothèse) mais fini (par ce que l'on vient de dire). Ainsi, X est compact. $\blacksquare$

Fait. ***(Réunion disjointe de paracompacts)***

Toute réunion disjointe d'espaces paracompacts est paracompacte. Il suffit de l'écrire.

Lemme. ***(Localement compact + σ-compact $\implies$ paracompact)***

Un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact.

$\triangleright$ Soit X un tel espace. Par un lemme sur la dénombrabilité à l'infini, on sait que X possède un recouvrement dénombrable $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ouverts relativement compacts avec $\overline{V_i} \subseteq V_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Remarquons en particulier que $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ est compact quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X quelconque. En tant que recouvrement de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ indexé par $J_n \subseteq I$. On considère $\mathcal{U}_n = \{U_i \cap (V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}})\}$, qui est bien un recouvrement ouvert de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$. Posons $\mathcal{U}$ la famille des $\mathcal{U}_n$, pour n parcourant $\mathbb{N}$.

C'est un raffinement de $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. En effet, tout $\mathcal{U}_n$ est contenant dans l'un des U_i par construction. C'es encore un recouvrement, car elle recouvre $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par construction de $(V_i)_i$, $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ recouvre X. Enfin, elle est localement finie, car tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert de la forme $V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}}$ et puisque par construction ce recouvrement a une intersection triviale avec les points de $\mathcal{U}$ pour $i \geqslant n+3$ et comme tous les $\mathcal{U}_n$ sont finis, de sorte que $\bigcup_{k<n+3} U_k$ est fini. ■

Reformulation pratique. ***(Paracompacité dans le cas lclc)***

Soit X un espace topologique localement compact et localement connexe. Alors X est paracompact, si et seulement si, chaque composante connexe est dénombrable à l'infini.

▷ Il s'agit d'abord de remarquer qu'un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact. Oh, mais on vient de le faire. Le sens réciproque du théorème vient donc facilement. En effet, chaque composante connexe est fermée. Elle est donc localement compacte. Puisqu'elle est dénombrable à l'infini par hypothèse, elle est donc paracompacte. Par réunion disjointe de paracompacts, elle est paracompacte.

Le sens direct est plus complexe. On a besoin d'une propriété additionnelle : un espace est dit *fortement paracompact*, si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un raffinement $*$-fini, autrement dit tel que chaque membre n'intersecte qu'un nombre fini de membres de la collection. On peut vérifier en exercice qu'un espace paracompact et localement compact est fortement paracompact. Par suite, les composantes connexes de X sont fortement paracompactes pour les mêmes arguments que dans la preuve de la réciproque. De plus, C étant connexe, il a la propriété de Lindelöf, et donc par compacité local, C est σ-compact. ■

Exercice 24

Un espace paracompact est-il nécessairement à base dénombrable de voisinages ?

3.4.5.9 Théorème de la cornemuse

3.4.6 Complétude

3.4.7 Convexité

Propriété. ***(Produit de convexes)***

Tout produit de convexes est convexe.

▷ Car tout produit de segment fait l'affaire. ■

3.4.8 Connexité par arcs

Les notions de connexité s'énonce tout aussi bien dans un espace topologique que dans un espace métrique ou vectoriel normé. On impose directement le formalisme général.

La notion de connexité par arcs, contrairement à celle de connexité, s'introduit au moyen de celle de composante connexe (par arcs) : dans cette section, on parlera de composante connexe pour, en toute rigueur, *composante connexe par arcs*.

Définition-propriété. ***(Composantes connexes (par arcs), connexité par arcs)***

Soit X un espace topologique. Soit C une partie de X On définit la relation sur C : *être connecté par un chemin*, ou *il existe un chemin continu entre*, s'il existe $a < b \in \mathbb{R}$, et l'on peut sans perte de généralité fixer $[0,1]$ à cette étape, et un arc paramétré $\gamma : [a,b] \longrightarrow C$ (!) de classe continue tel que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$.
Cette relation est d'équivalence ; ses classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes (par arcs)* de C. On dit que C est *connexe par arcs*, ou connexe s'il n'y a pas d'ambiguïté, s'il y a une unique composante connexe : lui-même dans ce cas.
Ainsi, X est connexe par arcs si deux points quelconques de X sont toujours reliés par un chemin continu.
On montrera avec la propriété de réunion de connexe par arcs que les composantes connexes par arcs sont les parties connexes par arcs maximales pour l'inclusion.

▷ Trouver les bonnes transformations d'application pour montrer la transitivité. ■

Heuristique

La connexité par arcs est une notion extrinsèque.

Exemples. ***(Connexes par arcs)***

1. L'ensemble vide, les singletons sont connexes par arcs.
2. Tout espace vectoriel normé, tout espace affine est connexe par arcs.
3. Tout convexe, toute partie étoilée est connexe par arcs.

On a des propriétés analogues à celles générales sur les connexes. Elles se démontrent toutefois bien plus facilement.

Propriété. ***(Connexité par arcs des réunions)***

Soit X un espace topologique et $(C_i)_{i\in I}$ des connexes par arcs de X.
1. Si les C_i se rencontrent deux à deux, leur réunion est connexe par arcs.
2. Si l'intersection des C_i est non vide, même conclusion.
3. Si I est dénombrable et $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, même conclusion.

4. Si I est fini et même hypothèse, même conclusion.

▷ Dans le cas dénombrable ou fini, il s'agit d'appliquer un nombre fini de fois la transitivité de la relation d'équivalence définissant la connexité par arcs. Dans le premier cas, il suffit de l'appliquer... une seule fois. ■

Contre-exemple. ***(Complémentaire d'un connexe)***

Le complémentaire d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs. Par exemple, le complémentaire de l'axe des abscisses, connexe par arcs puisqu'espace affine, dans le plan a exactement deux composantes connexes : les deux demi-plans supérieur et inférieur. □

L'intersection de deux connexes par arcs, même non disjoints (hi hi), n'a aucune raison de l'être !

L'adhérence d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs : le sinus du topologue le démontre.

Propriété. ***(Produit de connexes par arcs)***

Un produit non vide d'espaces topologiques non vides est connexe par arcs si et seulement chaque composante est connexe par arcs.

▷ C'est très rapide ! L'inclusion directe n'est pas dure par image continue d'un connexe par arcs par les projections ; la réciproque vient de la caractérisation de la continuité des applications à valeurs dans un produit, et il suffit alors de considérer l'application produit. ■

Propriété. ***(Image d'un connexe par une application continue)***

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

▷ Découle directement de la définition. ■

Corollaire. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***

Soit X une espace topologique connexe par arcs et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image de f est un intervalle.

▷ Découle du TVI version connexe. ■

Corollaire. *(Somme de deux connexes par arcs)*

Soient A,B deux connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$. Alors $A+B$ est connexe par arcs.

▷ C'est l'image de $A \times B$ par la somme, continue. ■

Remarque. On a donc une propriété similaire pour les connexes.

Corollaire. *(Connexité par arcs dans $\mathbb{R}$)*

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

▷ Soit C un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Alors c'est un connexe, comme on le verra plus tard, donc un intervalle.

Réciproquement, montrons qu'un intervalle est connexe par arcs. Soit I cet intervalle et $a < b \in I$. Par définition, $[a,b] \subseteq I$. Alors le chemin affine $\gamma : [0,1] \longrightarrow [a,b] \subseteq I$, $t \mapsto (1-t)a + tb$ convient. ■

Corollaire

En dimension 1, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident (en dimension 2, non plus).

On énonce le théorème suivant, valable dans les espaces vectoriels normés.

Définition. *(Connexité par lignes brisées)*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est *connexe par lignes brisées* ou *polygonales* si pour tous $x,y \in A$, il existe $a_1,\dots,a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $[x,a_1]$, $[a_1,a_2],\dots$, $[a_{n-1},a_n]$, $[a_n,y]$ soient tous inclus dans A.

Propriété. *(Connexité par lignes brisées des ouverts d'un evn)*

Soit Ω un ouvert d'une espace vectoriel normé X. Alors Ω est connexe si et seulement s'il est connexe par lignes brisées. Il est alors connexe par arcs affines par morceaux, donc $\mathcal{C}^1_{pm}$.

▷ Il suffit d'observer la preuve du résultat suivant, donné dans la partie de la Connexité sur le lien entre connexité et connexité par arcs. Il est clair sinon que la connexité par lignes brisées implique la connexité par arcs et donc la connexité. ■

Dans un espace vectoriel normé, les boules sont convexes, donc connexes par lignes brisées et simplement connexes, donc connexes par arcs, et même connexes. En revanche, **une boule d'une espace métrique n'a aucune raison d'être connexe par arcs !**

Exercice 25 *(Co-connexité des hyperplans)*

Montrer que dans un evn E, pour tout hyperplan H, H est fermé si et seulement si $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit H un hyperplan fermé de E. C'est le noyau de ϕ, forme linéaire continue non nulle. Posons $U = \{x \in E, \phi(x) > 0\}$ et $V = \{x, \in E, \phi(x) < 0\}$. Alors U,V sont clairement des ouverts disjoints, non vides par non nullité. Ils sont connexes, car images réciproques de connexes par des applications continues : non, non et non ! Comment m'avez-vous cru ? Ils sont connexes puisque convexes donc connexes par arcs. Ainsi $E \setminus H$ a deux composantes connexes non triviales, donc n'est pas connexe, donc n'est pas connexe par arcs.

Réciproquement, soit H un hyperplan non fermé. Soient x,$y \in E$, x,$y \notin H$. On peut supposer $x \neq y$. Quitte à multiplier par un scalaire et invoquer un argument de convexité le long d'une droite, on peut supposer $|x - y| = 1$. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E \setminus H$ qui vérifie $x_0 = y$, $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $x_{n+1} - x_n \in H$. L'initialisation est déjà faite. On suppose les k premiers termes construits. H est dense dans E, donc il existe $v \in H$ tel que $|(x - x_k) - v| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. On pose alors $x_{k+1} = x_k + v$ qui n'est pas dans H, autrement, $x_k \in H$, et cela vérifie toutes les conditions. On définit enfin $f(0) = x$, $f(\frac{1}{2^n}) = x_n$ et f affine entre deux de ces points. Alors $f(1) = y$ et f relie x à y dans $\mathbb{E} \setminus H$.

3.4.9 Connexité

3.4.9.1 Définition

Définition. ***(Espace connexe)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* ou, si le contexte n'est pas clair, *connexe général*, si les seuls ouverts fermés de X sont $\emptyset$ et X.

Reformulation pas pratique. ***(Connexité par les frontières)***

Un espace topologique est connexe si et seulement si la frontière de toute partie non vide ou étendue à l'espace tout entier est non vide.

Propriété. ***(Caractérisations de la connexité)***

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est connexe,
2. il n'existe pas de partitions de X en ouverts disjoints non triviaux,
3. il n'existe pas de partitions de X en deux ouverts disjoints non triviaux,
4. il n'existe pas de partitions de X en deux fermés disjoints non triviaux,
5. toute application continue de $X \longrightarrow Y$ est constante où Y est un espace discret fixé,
6. toute application continue de $X \longrightarrow D$ est constante où D est un ensemble dénombrable, muni de la topologie discrète, fixé,

7. toute application continue de $X \longrightarrow \{0{,}1\}$ est constante.

▷ Supposons qu'il existe une partition de X en ouverts disjoints non triviaux. On en choisit un O_1 et on note O_2 la réunion de tous les autres ; on a alors une partition en deux ouverts disjoints non triviaux. Alors O_1 est un ouvert de X et un fermé de X, car son complémentaire est un ouvert (O_2) de X. Puisque ni O_1 ni O_1 ne sont vides, O_1 n'est pas égal à $\emptyset$ et X.

Une partition en deux ouverts disjoints non triviaux est une partition en deux fermés disjoints non triviaux, puisque que le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue non constante où Y est un espace discret donné. Soit x une valeur prise par f. Alors $f{-}1(x)$ est un fermé, car f est continue. Soit Y' le complémentaire de $\{x\}$ dans Y. Puisque Y est discret, Y' est fermé. Ainsi $f^{-1}(Y')$ est un fermé, et c'est le complémentaire de $f^{-1}(0)$. Donc $f^{-1}(0)$ est un ouvert fermé non trivial, car $f^{-1}(Y')$ contient au moins un point par non-constance, de X.

Les implications suivantes sont immédiates.

Soit A un ouvert fermé non trivial de X. Alors $f = \mathbb{1}_A$ est une application non constante de X dans $\{0{,}1\}$. En plus, elle est continue : en effet, $f^{-1}(1) = A$ est un ouvert et $f^{-1}(0) = \complement A$ est un ouvert en tant que complémentaire d'un fermé. ■

▷ **Éléments de réponse.**

On s'intéressera notamment aux parties d'un espace topologique connexe ; il n'y a aucune raison qu'elles soient connexes. **On dit que $A \subseteq X$ est connexe si elle l'est pour la topologie induite.** *En particulier, la connexité est une notion extrinsèque.*

Intuitivement, les connexes sont les parties d'un seul tenant (de même que les parties connexes par arcs, bien que les deux notions ne coïncident pas...). On se représente aisément les propriétés générales sur les connexes par des dessins de patatoïdes dans le plan.

Contre-exemple. ***(Un ensemble non connexe pas trivial)***

$\mathbb{Q}$ est non connexe.
En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q} = (]\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q})$ partition en deux ouverts disjoints non vides de $\mathbb{Q}$: ils contiennent respectivement 1 et 2. □

Méthode. ***(Montrer qu'une partie n'est pas connexe)***

Cette technique est fondamentale, car il est plus simple d'exhiber des ouverts disjoints non vides d'un espace général plutôt que des ouverts relatifs.
Pour montrer que $A \subseteq X$ est non connexe, il faut et il suffit d'exhiber deux ouverts de X non vides, disjoints O_1, O_2 tels que $O_1 \cap A, O_2 \cap A \neq \emptyset$ et $A \subseteq O_1 \cup O_2$.

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. La preuve n'est absolument pas triviale.

Théorème. *(Connexes de $\mathbb{R}$)*

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

$\triangleright$ Soit C un connexe de $\mathbb{R}$. Alors C est un intervalle. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $a,b \in C$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Ainsi $C \subseteq]-\infty,x[\cup]x,+\infty[$, donc C se partitionne en $C\cap]-\infty,x[$ et $C\cap]x,+\infty[$ qui sont deux ouverts de C, donc C ne serait pas connexe.

Réciproquement, montrons que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes : ce n'est pas évident. Si I intervalle est un singleton, c'est déjà fait. D'autre part, $I^\circ \subseteq I \subseteq \overline{I^\circ} = \overline{I}$, donc il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ est connexe. Soit $f :]a,b[\longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Si f n'était pas constante, il existerait $x,y \in I$ vérifiant $a < x < y < b$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Pour fixer les idées, prenons $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On pose :

$$A = \{z \in I, z \geqslant x \text{ et } \forall t \in [x,z] \quad f(t) = 0\}.$$

L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, car elle contient x, majorée par y. Soit c sa borne supérieure. Par continuité de f, $f(c) = 0$. Mais f étant continue à droite en c, il existe η tel que pour tout $t \in [c, c+\eta[$, $|f(t) - f(c)| < \frac{1}{2}$. Par conséquent pour tout $t \in [c, c+\eta[$, $f(t) = 0$, d'où $f(c+\eta/2) = 0$, ce qui contredit la maximalité de c. Ainsi, f est constante, donc par caractérisation, I est connexe, ce qu'il fallait montrer. ■

Propriété. *(Connexité de $\emptyset$)*

L'ensemble vide est connexe.

Propriété. *(Connexité des singletons)*

Tout singleton est connexe.

3.4.9.2 Opérations sur les connexes

La connexité est stable par quelques opérations bien choisies.

Propriété. *(Réunion de connexes qui s'entendent bien)*

Toute réunion (quelconque) de connexes dont les intersections deux à deux sont non vides est connexe.

$\triangleright$ Soient X un espace topologique et $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de I dont on suppose que $\forall i,j \in I \quad i \neq j \implies C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Soit Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints non vides de X tels que $R = \bigcup\limits_{i\in I} C_i \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$. Si I est vide, R est vide et R et connexe. Sinon, soit $i_0 \in I$. Alors $C_{i_0} \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$. Par connexité de C_{i_0}, et sans perte de généralité, on a $C_{i_0} \subseteq \Omega_1$. Soit $i \in I$. Puisque C_i est connexe, on a $C_i \subseteq \Omega_1$ ou $C_i \subseteq \Omega_2$. Or $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$, donc on ne peut avoir $C_i \subseteq \Omega_2$, puisque Ω_1 et Ω_2 sont disjoints ; ainsi $C_i \subseteq \Omega_1$. En passant à la réunion, $R \subseteq \Omega_1$. ■

Corollaire. *(Réunion de connexes qui piquent-niquent)*

Toute réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

▷ Elle vérifie en particulier les hypothèses de la propriété précédente. ■

Dans le cas d'un ensemble dénombrable, on peut faire mieux.

Propriété. *(Réunion dénombrable de connexes à la queue leu leu)*

Soit X un espace topologique et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est connexe.

▷ Pour tout $i \in I$, étant donnée une application constante $f : \bigcup\limits_{i\in I} C_i \longrightarrow \{0\}$, on a $f_{|C_i} = f_{|C_{i+1}}$ au sens de son unique valeur comme fonction continue sur un connexe. Par récurrence, pour tout $i \in I$, la valeur de f sur C_i est celle sur C_0. Donc f est constante. ■

Propriété. *(Réunion finie de connexes non disjoints)*

Soit X un espace topologique et $C_1,\dots,C_n$, n un entier naturel, des connexes de X tels que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i = 1,\dots,n-1$. Alors $C_1 \cup \dots \cup C_n$ est connexe.

▷ Il suffit d'adapter un peu la preuve générale. ■

Attention ! L'intersection de deux connexes n'a aucune raison d'être connexe.

Propriété. *(Connexité des parties intercalées entre la fermeture)*

Soit X un espace topologique et A une partie connexe de X. Alors toute partie B telle que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ est connexe.

▷ Soit $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Elle se restreint en une application continue sur A. Puisque A est connexe, f est constante sur A ; sans perte de généralité, supposons $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$. Par continuité, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{A}$: en effet, $f^{-1}(\{0\})$ est un fermé contenant A, donc contient $\overline{A}$. En particulier, f est constante sur B, ce qu'il fallait montrer. ■

▷ On peut également donner une preuve calculatoire de ce fait. ■

Corollaire. *(Connexité de l'adhérence d'un connexe)*

L'adhérence d'un connexe est connexe.

Attention, on verra qu'on n'a pas de propriétés semblables pour l'adhérence d'un simple connexe par arcs.

Contre-exemple. ***(Partie non connexe dont l'adhérence est connexe)***

Deux boules ouvertes tangentes conviennent. □

Propriété. ***(Produit d'espaces connexes)***

Un produit fini non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes sont connexes.

▷ On donne donc d'abord la preuve dans le cas fini, plus simple. Notons que le sens direct est direct par image continue d'un connexe par les projections.

On fixe $(x,y) \in X \times Y$, ce produit étant non vide par hypothèse. Alors $\{x \times Y$ est connexe. En effet, il est homéomorphe à X ! Ainsi, pour tous $b,b' \in Y$, (x,b) et (x,b') sont dans la même composante connexe. De même, puisque $X \times \{y\}$ est connexe, pour tous $a,a' \in X$, $(a,y),(a',y)$ sont dans la même composante connexe. Soient donc en général $(a,b),(a',b') \in X \times Y$. Alors $(a,b) \sim (a,b') \sim (a',b')$ pour la relation être dans la même composante connexe. Ainsi $X \times Y$ n'a qu'une composante connexe. ■

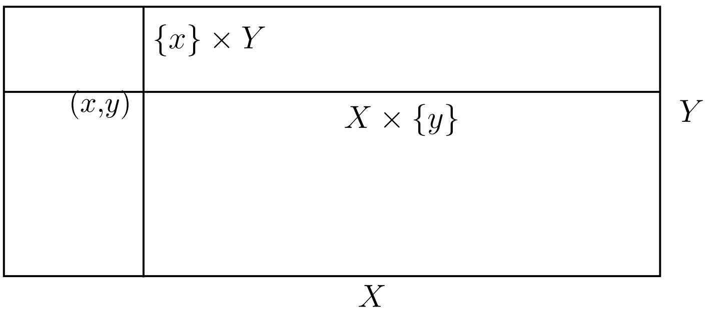


FIGURE 3.4.2 : *Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes.* — On considère l'espace produit $X \times Y$, un point (x,y) et les deux fibres convoquées par lui.

Théorème. ***(Produit d'espaces connexes)***

Un produit non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes le sont.

▷ De même, le sens direct est donné par la continuité des projections. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, E_i soit un espace topologique connexe. Montrons que le produit est connexe. Soient $a,b \in \prod_{i\in I} E_i$ avec $J = \{j \in I, a_j \neq b_j\}$ fini. Alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \prod_{j\in J} E_j & \longrightarrow & \prod_{i\in I} E_i \\ x & \longmapsto & a_i \text{ si } i \in I \setminus J, x_i \text{ sinon} \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image. Son image est donc connexe. Comme elle contient a et b, on en déduit que la composante connexe de a contient l'ensemble $A = \{b, J \text{ est fini}\}$. Or par hypothèse le produit est non vide. Montrons simplement maintenant que $\overline{A} = \prod_{i\in I} E_i$, dont on déduira que $\prod_{i\in I} E_i$ est connexe. Soit x un élément du produit. Soit $R(U_{i_1},...,U_{i_k})$ un rectangle contenant x. Alors $R \cap A$ contient au moins x' qui vaut x_i si $i = i_1, ..., i_k$ et a_i sinon. ■

On termine par un résultat rigolo appelé *théorème du passage à la douane.*

Théorème. ***(Théorème du passage des douanes)***

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie A et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de A.

▷ Soit C un connexe de l'espace topologique X. On suppose que $C \cap A \neq \emptyset$ et que $C \cap \complement_X A \neq \emptyset$ pour une partie quelconque A de X. Alors $\emptyset \neq \overline{C \cap A} \subseteq \overline{C} \cap \overline{A}$ et de même $\emptyset \neq \overline{C} \cap \overline{\complement_X A} = \complement_X \mathring{A}$. On rappelle que $\overline{C}$ est connexe. Si $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}$ est tel que $C \cap Fr(A) = \emptyset$, alors encore $\overline{C} \cap Fr(A) \neq \emptyset$, car une frontière est fermé. Par suite, comme $\mathring{A}, Fr(A), \complement_X \mathring{A}$ est une partition de X, $\overline{C} \cap \mathring{A}, \overline{C} \cap \complement_X \mathring{A}$ est une partition de $\overline{C}$ en deux ouverts non vides disjoints, contradiction. ■

3.4.9.3 Connexes et applications

Propriété. ***(Image d'un connexe par une application continue, théorème de Bolzano)***

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

▷ Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X,Y. On suppose X connexe. Montrons $f(X)$ connexe. Soit $g : f(X) \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Alors $g \circ f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est bien définie, continue par composition et donc constante, car X est connexe. Alors g est constante : en effet, si $y \in f(X)$, $y = f(x)$ d'où $g(y) = g \circ f(x) = C$. C'est démontré. ■

Remarque. On retrouve les caractérisations 5 à 7 de la connexité. En effet, *les composantes connexes d'un espace discret sont les singletons.*

Corollaire. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***

Soit X une espace topologique connexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image de f est un intervalle.

La notion de connexité, parmi d'autres, est l'une des notions fondamentales qui permet de passer du global au local. Un premier exemple.

Théorème. *(Applications localements constantes)*

Soit X un espace connexe. Soit f une application localement constante sur X, alors f est constante.

▷ On remarque d'abord qu'une telle application $f : X \longrightarrow Y$ est continue. Soit en effet $x \in X$. Soit W un voisinage de $f(x)$ dans Y. On choisit V un voisinage de x sur lequel f est constante. Alors $f(V) \subseteq W$ trivialement.

Par définition des applications non vides X est non vide. Sinon, soit x_0 un point de X et $c = f(x_0)$. On note $A = \{x \in X, f(x) = c\}$. Alors A est non vide et c'est un fermé par continuité de f. Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$. Alors il existe un voisinage V de x tel que pour tout $t \in V$, $f(t) = c$, soit $V \subseteq A$. Ce qui termine la preuve. ■

3.4.9.4 Composantes connexes

Lemme. *(Composante connexe)*

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Alors il existe une plus grande partie connexe C_x contenant x. C'est la réunion de tous les parties connexes de X contenant x. On dit parfois que C_x est *maximalement connexe.*

▷ Découle de la propriété sur les réunions de connexes ayant tous un point en commun. ■

Lemme

Toute partie non vide ouverte fermée et connexe d'un espace topologique en est une composante connexe.

▷ Par maximalité. ■

Ce lemme n'est pas utile.

Définition-propriété. *(Composantes connexes)*

Soit $x \in X$; l'ensemble C_x est appelé *composante connexe* de x. Les C_x sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x \in C_y$, aussi définissable par : il existe C connexe tel que $x,y \in C$. En particulier, les composantes connexes de X forment une partition de X.

▷ Rapide. ■

Ainsi, un espace se décompose toujours en réunion de connexes.

On peut se demander la structure topologique (ouverte, fermée) des composantes connexes dans l'espace.

Propriété. ***(Fermeture des composantes connexes)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Alors C est fermée dans X.

▷ Vient de ce que l'adhérence d'un connexe est connexe. ■

Propriété. ***(Ouverture des composantes connexes en nombre fini)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Si X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors C est ouverte dans X.

▷ Puisqu'une réunion finie de fermée est fermée. ■

Propriété. ***(Ouverture des composantes connexes si localement connexe)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Si X est localement connexe, alors C est ouverte dans X.

▷ C'est évident : soit $x \in C$. Alors X est trivialement voisinage de x ; soit un voisinage ouvert connexe de x. Par maximalité, ce voisinage est tout entier contenu dans C, donc C est voisinage de chacun de ces points. ■

En particulier, **dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées**.

On verra d'autres résultats sur les composantes connexes d'un ouvert dans le cas localement connexe.

Propriété. ***(Composantes connexes du produit)***

Dans un produit d'espaces topologiques $\prod_{i \in I} E_i$ la composante connexe du point x est le produit des composantes connexes de x_i dans E_i.

▷ Par continuité des projections. ■

3.4.9.5 Totale discontinuité

On introduit une notion qui traduit un défaut puissant de connexité.

Définition. ***(Espace totalement discontinu)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons (ou « points », légèrement improprement).

Un espace totalement discontinu ayant au moins deux éléments n'est jamais connexe, ni connexe par arcs.

Tout espace discret est totalement discontinu. Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exemple fondamental. *($\mathbb{Q}$ est totalement discontinu)*

En effet, soient $x \leqslant y \in \mathbb{Q}$. On suppose que x et y sont dans la même composante connexe C. Alors tout connexe contenant x et y est inclus dans $C \subseteq \mathbb{Q}$. En particulier, $[x,y] \subseteq C \subseteq \mathbb{Q}$. Ceci n'est pas possible dès que si $x < y$.
Un autre exemple, un peu moins évident : $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathbb{Q}^2$ est totalement discontinu.

Exercice 26

Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu.

Exercice 27 *(Un connexe dénombrable)*

On souhaite montrer qu'il existe un espace topologique connexe non discret, non grossier, séparé et dénombrable. Pour cela, soient $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ et $Y = \mathbb{Q} \times \{0\}$. Pour $\varepsilon > 0$, $y = (q,0) \in Y$, posons $B(y,\varepsilon) = \{(p,0) \in Y, |p-q| < \varepsilon\}$. Pour $x = (p,q) \in X - Y$, notons T_x le triangle équilatéral du plan dont les trois sommets sont $x(p,q)$, $(d(x),0) = p+q/\sqrt{3},0)$, $(g(x),0) = (p-q/\sqrt{3},0)$. On pose alors $B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(s,0) \in Y, |s-d(x)| < \epsilon\} \cup \{(s,0) \in Y, |s-g(x)| < \varepsilon\}$. On munit donc X de la topologie engendrée par ces boules. Montrer que X est connexe.

3.4.9.6 Lien avec la connexité par arcs

Propriété. *(Connexe par arcs $\implies$ connexe)*

Tout espace connexe par arcs est connexe.

▷ Soit X un espace topologique connexe par arcs. Si X est vide, c'est terminé. Sinon, soit $x \in X$. On écrit X comme la réunion $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0,1]$ où pour tout y, $\gamma_y \in C^0([0,1],X)$ est tel que $\gamma_y(0) = x$ et $\gamma_y(1) = y$, cette existence étant garantie par la connexité par arcs. Or les $\gamma_y[0,1]$ sont connexes comme images continues (démontré) d'intervalle donc connexe (démontré). De plus, ils ont tous le point x en commun. Ainsi, X est connexe. ■

La réciproque est fausse, mais, conformément à l'intuition, les exemples que l'on peut trouver sont gravement pathologiques.

Exemple fondamental. ***(Sinus du topologue)***

On considère le graphe Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. On peut sans problème se restreindre au graphe sur $]0,1]$. On peut facilement vérifier que son adhérence est $\Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$: en effet, pour un point $(0,y)$, on pose $t_n = \frac{1}{2\pi n + c}$; alors $(t_n, f(t_n)) = (t_n,y) \longrightarrow (0,y)$ est une suite d'éléments de A. Enfin, il est clair que pour tout autre point, il existe une boule centrée en ce point qui sort de A.
Soit donc $A = \Gamma \cup \{(0,0)\}$. On remarque que $\Gamma \subseteq A \subseteq \overline{\Gamma}$[a]. Alors Γ est connexe par arcs, par image continue $x \longmapsto (x, f(x))$ du connexe par arcs $]0,1]$. Il est donc connexe. Ainsi, A est connexe puisque contenu entre lui et son adhérence.
Cependant, A n'est pas connexe par arcs. Soit x le point $(0,0)$ et $y = (1, \sin(1))$. Supposons qu'il existe un arc continu γ joignant x à y. Alors $\gamma(t) = (u(t), \sin(1/u(t))$ dès que $u(t) \neq 0$. On note $t_0 = \sup\{t \geqslant 0, u(t) = 0\}$ le dernier instant où le chemin passe en zéro. Alors par continuité de γ, $u(t_0) = 0$, d'où $v(t_0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$. Alors par le TVI, il existe $t_1,t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ avec $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ et $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Remarquons simplement qu'alors $v(t_1) = -1$ et $v(t_2) = 1$. Soit donc $b \in [-1,1]$ tel que $|b| > \frac{1}{2}$. Par le TVI encore, il existe $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ tel que $v(t) = b$ et donc $|v(t)| > \frac{1}{2}$. Ceci valant pour tout ε, il y a une grosse contradiction. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue par morceaux est connexe parcs si et seulement si elle est prolongeable par continuité.
On vérifie maintenant que A n'est pas localement connexe. En effet, le point $(0,0)$ n'a pas de voisinage ouvert connexe dans A contenu dans $B(0, \frac{1}{2})$. On voit très distinctement sur un dessin que l'intersection de toute boule de rayon < 1 avec Acontient une branche de A qui ne se relie à rien d'autre.

[a] L'ensemble $\overline{\Gamma}$ est parfois appelée *courbe fermée du topologue*, est est compacte, mais elle vérifie des propriétés semblables à la nôtre.

Exemple. ***(Le cercle polonais)***

On ajoute à la courbe sinus fermée du topologue un arc continu joignant le point $(1, \sin(1))$ au point $(0, -1)$. Alors cet espace est connexe par arcs, donc connexe, mais pas localement connexe, ni donc localement connexe par arcs.

On a quand même une certaine régularité sur la topologie propre aux espaces normés :

Propriété. ***(Ouverts connexes)***

Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

$\triangleright$ On peut en fait montrer exactement de la même manière (en changeant l'expression de A) que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs par lignes brisées. On laisse le lecteur adapter la rédaction.

Soit X un espace vectoriel normé et C un ouvert connexe. Si C est vide, c'est terminé. Sinon, soit $x \in C$. On note $A = \{y \in C, x \sim y\}$ où $\sim$ est la relation « il existe un chemin continu... ». Montrons

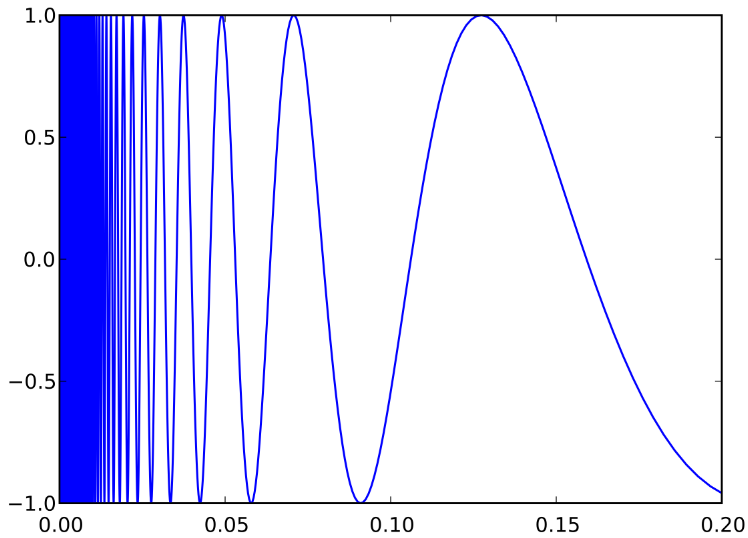


FIGURE 3.4.3 : *Le sinus fermé du topologue.* —
Un espace topologique connexe, mais ni localement connexe, ni connexe par arcs.

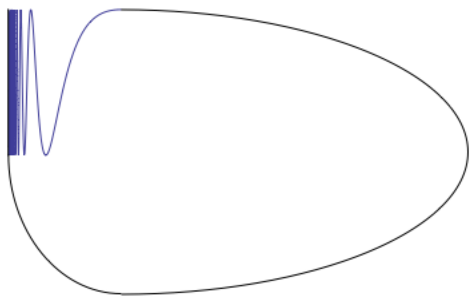


FIGURE 3.4.4 : *Le cercle polonais.* —
Un espace topologique connexe par arcs mais non localement connexe.

que A est un ouvert fermé de C : puisqu'il est non vide, cela suffira. Soit $y \in A$. Alors puisque C est ouvert, il existe une boule B centrée en y incluse dans C. Soit $t \in B$. Puisqu'une boule est connexe par arcs, $t \sim y$. Or $y \sim x$, donc $t \sim x$. Ainsi $t \in A$, donc B est incluse dans A. Ainsi A est ouverte. Montrons qu'elle est fermée. Soit $y \in C \setminus A$. Comme C est ouvert, il existe une boule B dans C centrée en y. S'il existait $t \in B$ tel que $t \in A$, soit $t \sim x$, alors puisque B est connexe, $t \sim y$, donc $y \sim x$, contradiction, donc B est dans $C \setminus A$. Donc $C \setminus A$ est ouverte, donc A est bien fermée. ■

▷ *(Autre méthode.)* On montre directement que si $x \in \overline{A}$ dans C, alors par définition de l'adhérence par des voisinages, $x \in A$. ■

Ce constat s'étend assez peu aux autres structures.

En fait :

Fait. ***(Lien entre les composantes connexes et connexes par arcs)***

Les composantes connexes par arcs sont incluses dans les composantes connexes (sans déborder).

Exactement de même que dans le cas connexe, on peut démontrer :

Propriété. ***(Ouverture des composantes connexes par arcs en milieu localement connexe par arcs)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe par arcs de X. Si X est localement connexe par arcs, alors C est ouverte dans X.

▷ Même que pour le cas connexe tout court. ■

Les composantes connexes par arcs n'ont aucune raison d'être fermées, la branche principale du sinus du topologue nous le montre.

3.4.9.7 Locale connexité et locale connexité par arcs

Définition. ***(Espace localement connexe)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement connexe* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes.

Contre-exemple. ***(Tout point admet un voisinage connexe)***

Dans un espace localement connexe, assez facilement, *tout point admet un voisinage ouvert connexe.*

La réciproque ne suffit pas à caractériser les espaces localement connexes. Prenons le peigne : $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$. Cet espace est connexe car connexe par arcs, mais pas localement connexe[a] : on citera également le sinus du topologue ci-dessous qui vérifie cette propriété cheloue. Pourtant, tout point de A possède un voisinage ouvert connexe, à savoir A lui-même. □

[a] En effet, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ n'admet pas de bases de voisinages connexes. Soit V un voisinage de ce point dans le peigne induit par une boule ne rencontrant par l'axe des ordonnées, par exemple, une boule de rayon $\frac{1}{4}$. Alors l'application $(x,y) \in V \longmapsto y$ est continue sur V à valeurs rationnelles, donc constante. Ainsi V est contenu dans une seule dent du peigne, ce qui est absurde, car V est induit par une boule qui contient une infinité de points d'ordonnées rationnelles de même abscisse que $\frac{1}{2}$.

Exemple

$\mathbb{Q}$ n'est pas localement connexe. En fait, ce n'est pas une conséquence d'autre chose comme on pourrait s'y attendre.

Même un espace métrique, même une partie d'un espace vectoriel normé peut n'être pas localement connexe.

Propriété. ***(Locale connexité des evn)***

Tout espace vectoriel normé est localement connexe (par arcs).

▷ Puisque les boules sont connexes (par arcs). ■

Les notions de connexité et de locale connexité n'ont rien à se dire. Bien évidemment, un espace localement connexe n'a aucune raison d'être connexe (exemple : le plan privé d'une droite). Réciproquement, le sinus du topologue est connexe mais pas localement connexe ! Ainsi, connexe n'implique pas localement connexe.

Propriété. ***(Composantes connexes d'un ouvert en milieu lc)***

Soit X un espace topologique. Alors X est localement connexe, si et seulement si, pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont ouvertes.

▷ Elles sont alors fermées (pourquoi ?). Cependant cette condition ne suffirait pas. ■

Preuve.

▷ Soit X un espace topologique localement connexe et U un ouvert de X. Soit C une composante connexe de U. Soit $x \in C$. Puisque U est ouverte, il existe un voisinage V de x dans U inclus dans U. Par locale connexité, il existe V' un voisinage connexe de x tel que $x \in V' \subseteq V$. Par maximalité de la composante connexe contenant x, $V' \subseteq C$, donc C est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert (on a déjà montré cela dans la partie précédente).

Réciproquement, soit $x \in X$. Soit V un voisinage de X que l'on peut prendre ouvert. Alors les composantes connexes de V sont ouvertes et partitionnent $V \ni x$. Soit C une composante connexe dans laquelle se trouve x. Alors C est un voisinage de x connexe et contenu dans V. ■

On se servira évidemment davantage du sens direct de ce théorème.

Théorème. ***(Connexion des fermés par une unique branche)***

Soit X un espace topologique connexe et localement connexe. Soient A,B deux fermés disjoints non vides de X. Alors il existe une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence intersecte à la fois A et B.

▷ On montre ce lemme : si Y est un espace localement connexe, F un fermé de Y, et U un ouvert connexe de Y disjoint de F. Alors pour toute composante connexe V de $U \setminus F$, $\emptyset \neq F \cap \partial_U V \subseteq F \cap \partial_Y V$. En effet, puisque Y est localement connexe, les composantes de $U \setminus F$ sont connexes. Puisque U est connexe, et $U \cap F \neq \emptyset$, une composante V de $U \setminus F$ ne peut être ouverte dans U, d'où $\partial_U V = (\partial V) \cap U \neq \emptyset$. Mais en tant que composante connexe, V est fermée dans $U \setminus F$, donc, puisque V est également ouverte, $\emptyset = \partial_{U \setminus V} V = (\partial V) \cap (U \setminus V)$. Ainsi, $\emptyset \neq \partial_U V = (\partial V) \cap U =$

$(\partial V \cap U \setminus F) \cup (\partial V \cap (U \cap F)) = (\partial V) \cap (U \cap F)$.

Appliquons le lemme à notre situation. Soit M l'union de A avec toutes les composantes connexes de $X \setminus (A \cup B)$ qui intersectent A. Alors M est ouverte. Il est clair que tout point de M qui appartienne à l'une des composantes connexes de $X \setminus (A \cup B)$ est un point intérieur de M, puisque ces composantes sont ouvertes. Il reste à voir que $A \subseteq \mathring{M}$. Soit $a \in A$, et soit U un voisinage ouvert connexe de a qui ne rencontre par B. Alors $U \subseteq M$. Si C est une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ rencontrant U, soit W une composante connexe de $U \cap C$, et V la composante connexe de $U \setminus A$ contenant W. Alors $C \cup V$ est connexe, et $(C \cup V) \cap (A \cup B) = \emptyset$, donc $V \subseteq C$. Par le lemme, $\emptyset \neq A \cap \partial V = A \cap \overline{V} \subseteq A \cap \overline{C}$, donc $C \subseteq M$. Avec le même argument, $N \cup B$ et toute composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence rencontre B est ouverte. Puisque $X = M \cup N$, et ni M ni N n'est vide, il suit que $M \cap N \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence rencontre à la fois, A et B. ■

Définition. ***(Espace localement connexe par arcs)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement connexe par arcs* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Exercice 28 *(Un contre-exemple type sinus du topologue pour la connexité par arcs)*

Montrer que l'ensemble $\{(x,rx), x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

La partie A considérée est étoilée en $(0,0)$ donc en particulier connexe par arcs. Montrons pourtant qu'il existe un voisinage de $(1,1) = (x,rx)$ où $x = r = 1$ qui ne contient aucun voisinage connexe par arcs. Prenons simplement un voisinage V ne contenant pas $(0,0)$, par exemple, induit par une boule centré en $(1,1)$ de rayon $\frac{1}{2}$. Alors l'application continue $(x,y) \longmapsto y/x$ est continue sur V, à valeurs rationnelles, donc constante. Le voisinage V est donc inclus dans la droite de pente r, absurde, car le voisinage choisi est induit par une boule non vide qui contient des points d'autres pentes.

Propriété. ***(Composantes CPA d'un ouvert en milieu lcpa)***

Soit X un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X est localement connexe par arcs,
2. pour tout ouvert U de X, les composantes connexes par arcs de U sont ouvertes.

Lemme

Toute partie ouverte d'un espace localement connexe est un espace localement connexe.

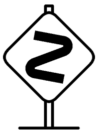
▷ Il suffit de prendre la trace d'une base de voisinages disjoints. ■

▷ Pour montrer l'équivalence entre les deux points, il suffit de copier la preuve précédente en remplaçant connexe par connexe par arcs, en remarquant que les composantes par arcs sont également les parties maximales connexes par arcs ■

Propriété. ***(Ouvert connexe en milieu lcpa)***

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Alors tout ouvert connexe de X est connexe par arcs.

▷ On reprend la preuve dans les evn. ■



Localement connexe ne suffit pas !

Théorème. ***(Connexe + lcpa $\implies$ connexe par arcs)***

Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

▷ Si X est connexe et localement connexe par arcs, prenons $x \in X$. Alors la composante connexe par arcs contenant x est ouverte, en milieu lcpa. Comme elles partitionnent l'espace, elles sont fermées. Comme X est connexe, il n'y en a qu'une, donc X est connexe par arcs. ■

Exercice 29

Donner un exemple d'espace connexe, localement connexe mais non connexe par arcs. Remarquer qu'un tel exemple fournit également un exemple d'espace localement connexe non localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Parce que moi je cherche encore.

Propriété. ***(Composantes connexes dans un espace lcpa)***

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Alors les composantes connexes et connexes par arcs coïncident (on dit que l'espace est *à bonnes composantes connexes*).

▷ On applique : la deuxième caractérisation, le lemme, le théorème précédent. Ou, plus explicitement : pour tout $x \in X$, C_x^{cpa} est connexe par arcs donc connexe donc $C_x^{cpa} \subseteq C_x^c$. Réciproquement, C_x^c est connexe et ouvert, car composante connexe d'un espace localement connexe (car localement connexe par arcs). Or d'après le théorème un connexe lcpa est connexe par arcs, donc de même que précédemment, par maximalité, $C_x^c \subseteq C_x^{cpa}$. ■

Remarque. Cette propriété est très pratique. On en fait souvent l'hypothèse dans l'étude des groupes de Lie.

On termine avec une propriété à retenir dans le coin de sa tête :

Corollaire. ***(Quotient d'espace localement connexe)***

Tout quotient d'un espace localement connexe est localement connexe.

Ce qu'il faut retenir

→ **Tout espace** se décompose comme la réunion disjointe de ses composantes connexes.

3.4.10 Connexité simple

Définition. ***(Espace simplement connexe)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet tracé sur X est homotope à un point. De façon équivalente, X est connexe par arcs et pour tous points $x,y \in X$, deux chemins de x à y sont toujours homotopes.

Intuitivement, un connexe par arcs est simplement connexes s'il est *sans trou, ni poignée.*

3.4.11 Discrétion

Propriété. ***(Caractérisation de la discrétion)***

Un espace est discret si et seulement si tous les singletons sont ouverts.

Il existe des espaces dénombrables qui ne sont pas discrets (l'adhérence de la suite harmonique, l'ensemble des rationnels).

Propriété. ***(Produit d'espaces discrets)***

Tout produit d'espaces discrets est discret.

▷ Définition. Plus précisément : tous les singletons + produit des espaces entiers sont ouverts. Par réunion dénombrable, n'importe quel singleton du produit est un ouvert. ■

3.5 Exemples classiques de topologie

3.5.1 Topologies cofinies

3.5.1.1 Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$

3.5.1.2 Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$

3.5.2 Topologie de Zariski

Définition. ***(Topologies de Zariski)***

Soit k un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}$. La *topologie de Zariski* sur $\mathbb{A}^n(k) := k^n$ est définie par l'ensemble de ses fermés, qui sont de la forme :

$$\{x \in \mathbb{A}^n(k) \mid \forall i \in I \quad P_i(x) = 0\}$$

pour une certaine famille $(P_i)_{i \in I}$, I quelconque, de polynômes de $k[X_1,\ldots,X_n]$.

▷ L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant égal à 1. La réunion de deux fermés de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes indexée par le produit des ensembles d'indexation valant le produit de deux polynômes en chaque couple. L'intersection est évidente. ■

Théorème. ***(Description simple de la topologie de Zariski)***

Tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'un polynôme de $k[X_1,\ldots,X_n]$.

▷ Le théorème du Nullstellensatz de Hilbert garantit que tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille finie de polynômes. Il suffit ensuite de considérer leur produit. ■

Propriété. ***(Topologie de Zariski en dimension 1)***

La topologie de Zariski sur $\mathbb{C}$ est la topologie cofinie.

▷ Soit E un ensemble fini d'éléments de k. Alors $\prod_{x \in E}^{X-x}$ est un polynôme de $k[X]$ dont les zéros sont exactement les éléments de E. ■

On peut s'intéresser aux fermés et ouverts de Zariski de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle.

Propriété. ***(Comparaison des topologies réelle et de Zariski)***

La topologie de Zariski sur $\mathbb{R}^n$ est plus grossière que la topologie usuelle, au sens suivant : tout ouvert de Zariski est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie usuelle.

$\triangleright$ Soit F un fermé de Zariski. Alors $F = P^{-1}(\{0,...,0\})$ où P est un polynôme, donc une application continue de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi F est un fermé de $\mathbb{R}^n$. ■

Propriété. ***(Densité des ouverts de Zariski)***

Tout ouvert de Zariski non vide est dense dans $\mathbb{R}^n$ pour sa topologie usuelle. En particulier, tout ouvert de Zariski non vide est dense dans $\mathbb{R}^n$ pour la topologie de Zariski même.

$\triangleright$ On montre que tout fermé non trivial de Zariski est d'intérieur vide pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ s'annule sur une boule ouverte. D'après le lemme d'annulation des polynômes à plusieurs variables, si P s'annule sur $A_1 \times ... A_n$ où chaque A_i est de cardinal $> \deg_i(P)$, alors P est nul. En particulier, si $A_1 \times ... \times A_n$ est un hypercube non trivial, alors P est nul. Or toute boule de $\mathbb{R}^n$ contient un hypercube. Donc P est nul, donc le fermé considéré est égal à $\mathbb{R}^n$. Pour montrer que notre ouvert non vide de Zariski est également dense pour la topologie de Zariski, on suppose que sa Zariski-adhérence ne soit pas $\mathbb{R}^n$. Par comparaison, c'est également un fermé de $\mathbb{R}^n$, ce qui contredit la minimalité de la $\mathbb{R}^n$ adhérence. ■

Corollaire

La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ n'est pas séparée pour $n > 0$.

$\triangleright$ On montre plus fortement que deux ouverts disjoints non vides de Zariski s'interceptent toujours. Soient U,V tels. Montrons $U \cap V \neq \emptyset$, donc montrons $U^c \cup V^c \neq \mathbb{R}^n$. Supposons que ce soit le cas. $U^c \cup V^c$ n'est jamais que l'ensemble des zéros communs à un polynôme PQ où P a pour lieu d'annulation U^c et Q V^c. Ainsi PQ s'annule sur $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}$ est infini, le morphisme fonction polynomiale est injectif, donc on peut dire que $PQ = 0$, d'où $P = Q = 0$ par intégrité. Donc U^c et V^c sont égaux à $\mathbb{R}^n$, donc U et V sont vides, ce qui était pourtant exclu, d'où le résultat.

On aurait aussi pu utiliser le résultat précédent pour avoir immédiatement, car U dense et V ouvert, $U \cap V \neq \emptyset$. ■

Chapitre 4

Topologie algébrique

Résumé

Contrairement à la topologie analytique qui s'intéresse aux notions de convergence, la topologie algébrique prend un point de vue extérieur tout à fait distinct où l'on étudie les espaces topologiques pour eux-mêmes. Grâce à la notion d'homologie, on peut définir le *groupe fondamental* qui associe des invariants algébriques à la catégorie Top.

4.1 Groupes topologiques

La théorie des groupes topologiques permet notamment d'obtenir des résultats (propriétés, structures) sur des objets de base de façon simple.

4.1.1 Définition

Définition. ***(Groupe topologique)***

Un groupe topologique est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une topologie, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continues.

Méthode. ***(Montrer qu'un groupe est un groupe topologique)***

Cela revient seulement à montrer la continuité d'opérations dans un certain espace topologique (voir l'exemple 3 ci-dessous).

Propriété. ***(Continuité des translations dans un groupe topologique)***

Dans un groupe topologique, les translations

$$x \longmapsto a \star x \text{ et } x \longmapsto x \star a$$

sont des homéomorphismes.

▷ Les applications partielles d'une application continue sont continues. Or ce sont des bijections qui ont la même forme que leurs réciproques. ■

On en déduit :

Fait

La topologie d'un groupe topologique est déterminée par la donnée des voisinages de l'élément neutre e.

Propriété. ***(Séparation d'un groupe topologique)***

Un groupe topologique G est séparé si et seulement si $\{e_G\}$ est fermé dans G.

▷ Si G est séparé, le singleton $\{e\}$ est fermé. Réciproquement, si $\{e\}$ est fermé, alors la diagonale de G est l'image réciproque de ce fermé par l'application continue $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$. Elle est donc fermée, donc G est séparé. ■

Exemples. ***(Groupes topologiques)***

1. **Tout groupe est un groupe topologique pour la topologie discrète.**
2. Heureusement, il y a d'autres exemples intéressants. Dans la section suivante, on étudiera l'action de la sphère unité du plan complexe sur la sphère de l'espace par rotation.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique pour la topologie induite de $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$; c'en est d'ailleurs un ouvert, ses ouverts sont donc les ouverts de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$. Il a deux composantes connexes (par arcs) $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{R})$[a]. Il agit continûment **(on omettra cette précision régulièrement dans la suite)** sur $\mathbb{R}^n$, on note simplement $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowleft \mathbb{R}^n$, et transitivement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dans ce cas sur $\mathbb{R}^n$ il y a deux orbites : $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

[a] On peut redémontrer ce résultat grâce à la théorie des groupes topologiques.

Lemme

Soit G un groupe topologique et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes connexes par arcs. Alors $H = \langle H_i, i \in I \rangle$ est connexe par arcs.

▷ Soit $J \subseteq I$ fini. Alors $H_J = \langle H_i, i \in J \rangle = \mathrm{Im}(\prod_{i \in J} H_i \longrightarrow G)$ qui à $(h_1,\dots,h_j) \mapsto h_1 \dots h_j$. Puisque $\prod_{i \in J} H_i$ est connexe par arcs et que la multiplication est continue par axiome, alors H_J est connexe par arcs. Or H est l'union des H_J qui ont tous le neutre en commun, donc H est connexe par arcs. ■

Clairement, il y a au moins deux composantes connexes par arcs, car $\mathbb{R}^*$ c'est pas connexe. Cela ne nous apporte rien. Montrons que $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. On remarque que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par $D = Diag(\mathbb{R}_+,1,\dots,1)$ et $T_{ij} = \{id + tE_{ij}, t \in \mathbb{R}\}$. Il est donc connexe par arcs, puisque $D \simeq \mathbb{R}_+$ et T_{ij} est clairement homéomorphe à $(\mathbb{R},+)$, donc ils sont tous deux connexes par arcs. De même, GL_n^- est connexe par arcs, puisqu'il est homéomorphe à GL_n^+ en tant qu'espace topologique, via la multiplication par $Diag(-1,1,...,1)$.

Heuristique

Mnémonik : Les groupes topologiques, c'est fait pour les grands groupes.

Foncièrement, pour un groupe fini, seule la topologie discrète peut être appliquée pour en faire un groupe topologique.

Définition. ***(Action continue sur un G-espace)***

Soit G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action continue de G sur X est une action de groupe de G sur X telle que l'application :

$$G \times X \longrightarrow X$$

soit continue.
Un G-*espace* est un espace topologique muni d'une action continue de G.

Exemple. ***(Action du cercle sur la sphère)***

On voit immédiatement que $U(1) := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (notation physicienne) est un groupe topologique pour la multiplication de $\mathbb{C}$. Il agit continûment sur la 2-sphère :

$$S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\}.$$

par rotation autour de l'axe Oy.
Cette action est fidèle, mais pas transitive.

Propriété. ***(Continuité de l'action discrète)***

Soit G un groupe muni de la topologie discrète agissant sur un ensemble X. Alors l'action considérée est continue si et seulement si pour tout $g \in G$, $x \mapsto g \cdot x$ est continue.

Définition. ***(Isomorphisme de groupes topologiques)***

Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que groupes par une application bicontinue.

4.1.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe

Définition. ***(Quotient par une action de groupe)***

Soit G un groupe topologique et X un espace topologique telle que G agisse sur X. On définit le *quotient de X par l'action de G*, et on note $X/G = X/R_G$, où :

$$xR_Gy \iff \exists g \in G \quad x = g \cdot y.$$

C'est l'ensemble des orbites de X sous l'action de G, dépendant de G, muni de la topologie quotient sur X, indépendante de G dans sa construction.

Propriété. ***(Quotient par une action transitive)***

Si l'action de G sur X est transitive, alors X/G est réduit à un point.

▷ Il n'y a rien à faire. ■

Exemple

$\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R}) = \{\{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ n'est pas séparé, puisque grossier non trivial.

Propriété

Soit X un G-espace séparé et G un groupe quasi-compact où l'action de G est transitive. Alors pour tout $x \in X$ la bijection canonique $G/G_x \simeq X$ est un homéomorphisme.

▷ On a $G/G_x \longrightarrow X$ continue par propriété universelle. Puisque G/G_x est quasi-compact (on le verra plus tard) et X est séparé, la bijection est un homéomorphisme. ■

Exemple fondamental. ***(La sphère est quotient de groupes spéciaux orthogonaux)***

On a $SO(n+1)$ le sous-groupe spécial orthogonal d'ordre $n+1$ agit sur S^n la sphère (unité) de $\mathbb{R}^n$; par exemple, $SO(2) \curvearrowleft S^1$ par rotation.
Cette action est transitive. C'est clair, mais une autre façon de le voir est de dire que pour $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $x = A \cdot e_1$ si x est la première colonne de A et A est prise dans $SO(n+1)$ en complétant les autres colonnes ; réciproquement, le stabilisateur de 1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $B \in SO(n)$. En appliquant le théorème précédent, on obtient l'homéomorphisme très important :

$$\boxed{S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)}.$$

4.1.3 Propriétés des groupes topologiques

4.1.3.1 Groupes compacts

Définition. ***(Groupe compact)***

Un *groupe compact* est un groupe topologique compact.

Exemples. ***(Groupes compacts)***

1. Les groupes finis discrets (ce sont les seuls parmi eux !).
2. $U(n)$ l'ensemble des matrices unitaires $n \times n$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $M\overline{M}^T = id$. On remarque que $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ce sont des groupes compacts.

Propriété

Soient G un groupe topologique, X un G-espace.

(a) Si X est quasi-compact, X/G aussi.

(b) La surjection canonique est ouverte.

(c) Si X,G sont compacts, X/G aussi.

▷ La première affirmation est vraie pour tous les quotients, puisque la projection canonique q est surjective et continue.

Soit $V \subseteq X$ un ouvert. Alors $q^{-1}(q(V)) = \sum_{g \in G} g \cdot V$ est ouvert par réunion d'ouverts : en effet, les translations sont des homéomorphismes.

Il suffit de montrer que X/G est séparé. Montrons que $\Gamma_G \subseteq X \times X$ est fermé. Puisque $X \times X$ est compact, en fait il est équivalent de dire que Γ_G est compact. Or ce graphe est l'image par $(g,x,y) \mapsto (x,gy)$ de $G \times \Delta_X$. Comme X est séparé, Δ_X est séparé donc compact donc $G \times \Delta_X$ est compact. D'où le résultat. ■

Propriété. ***(Compacité du groupe quotient)***

Soient G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe de G. Si G est compact et H est fermé, G/H est compact.

▷ Découle directement de la proposition précédente. ■

4.1.4 Groupes séparés

Propriété. ***(Séparation du groupe quotient)***

Soient G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe de G. Alors G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

▷ Si G/H est séparé, alors pour tout $x \in G$, $q(x)$ est fermé dans G/H par ouverture, donc $q^{-1}(q(1_G)) = H$ est fermé. Si H est fermé maintenant, soit $\beta : (x,y) \longmapsto yx^{-1}$. Alors $\beta^{-1}(H) = \Gamma_H$! d'où le résultat. ■

Théorème. ***(Groupe topologique quotient)***

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe distingué de G. Alors G/H est un groupe topologique.

▷ L'inverse est continue, induite par le diagramme suivant où la flèche horizontale du bas est continue.

$$(\cdot)^{-1} : \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

Pour la multiplication, c'est un peu moins trivial : on utilise les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d] & G \arrow[d, "q"] \\ (G \times G)/(H \times H) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f"] & G/H \\ G/H \times G/H \arrow[ur, dotted, "m_{G/H}"'] & \end{tikzcd}$$

puis :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r] \arrow[d] & G/H \times G/H \\ (G \times G)/(H \times H) \arrow[ur, hook, two heads, "f"'] & \end{tikzcd}$$

et le théorème est démontré. ■

4.1.5 Groupes topologiques distingués

Proposition

Tout sous-groupe distingué d'un groupe connexe est commutatif.

Soient G un groupe topologique.
Soit X un G-espace.
On considère X/G l'espace topologique (ensemble des orbites).

Soit H un sous-groupe (topologique) de G.
On considère G/H l'espace topologique (ensemble des classes à gauche).

TROIS FAITS GÉNÉRAUX :

- La surjection canonique est toujours ouverte de $X \rightarrow X/G$.
- Si H est distingué, G/H est un groupe topologique.
- G est séparé ssi $\{e\}$ est fermé.

Hypothèse sur X	*Hypothèse sur G*	*Conséquence sur le quotient*
X séparé	G compact	?
X q-compact	G quelconque	X/G q-compact
X compact	G compact	X/G compact
Hypothèse sur G	*Hypothèse sur H*	*Conséquence sur le quotient*
G quelconque	H fermé	G/H séparé
G q-compact	H quelconque	G/H q-compact
G compact	H fermé	G/H compact

TABLE 4.1 : *Récapitulatif sur les groupes topologiques.* —
Liens entre compacité et séparation.

4.2 Espaces cellulaires

La philosophie des espaces cellulaires est d'obtenir des espaces topologiques grands par recollements de certaines de leurs parties.

On introduit en particulier une classe d'espaces topologiques comprenant la plupart des espaces topologiques rencontrés dans ce cours, à homéomorphisme près.

4.2.1 Attachements cellulaires

On conseille au lecteur de revoir la partie sur la topologie somme disjointe et sur les recollements le long d'un espace ou d'une partie. En particulier :

- ⋆ la somme disjointe de deux espaces topologiques X,Y a pour ouverts les sommes (= unions disjointes) d'ouverts ;

- ⋆ pour des applications continues $f,g : A \longrightarrow X$, le recollement $X \cup_{f,g} Y = X \coprod Y/R$ consiste à quotienter la somme disjointe par la relation d'équivalence vérifiant $f(a)R(a)g(a)$ pour tout $a \in A$. Intuitivement, A est une copie de parties de X,Y et l'on identifie ces copies entre elles. Formellement, on peut se passer d'une des deux applications est prendre la relation engendrée par $x \sim g(a)$: cela revient au même ;
- ⋆ si A est fermé dans X, l'application canonique $Y \longrightarrow X \cup_g Y$ est un homéomorphisme sur son image, fermée dans Y ;
- ⋆ si X est un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ un ensemble de parties topologiques, on définit la topologie faible par : $F \subseteq X$ est fermé dans X si et seulement si $F \cap X_i$ est fermé dans X_i pour tout i, de même pour les ouverts. Une application est continue ssi toutes les restrictions aux X_i sont continues.

Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant : l'attachement cellulaire, déjà rencontré dans le section CONSTRUCTION D'ESPACES TOPOLOGIQUES, paragraphe RECOLLEMENTS. Soit $S^n = \mathbb{S}_n$ la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $B^n = \mathbb{B}_n$ la boule de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\partial B^n = S^{n-1}$ (pour se rappeler du décalage, écrire $\mathrm{Fr}(B^2) = S^1$).

Puisque B^n est fermé, on a une inclusion canonique de la $(n-1)$-sphère dans la n-boule $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$.

Définition. ***(n-cellule)***

Une *cellule de dimension n*, ou *n-cellule*, est un espace topologique homéomorphe à la boule unité fermée de dimension n de $\mathbb{R}^n$. On note souvent e_n une n-cellule.
Une *n-cellule ouverte* ou encore *cellule ouverte de dimension n* est un espace homéomorphe à $\mathbb{B}_n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$.

D'après le théorème d'invariance du domaine (admis), tout homéomorphisme de la boule préserve son bord. On peut définir ainsi :

Définition. ***(Bord d'une n-cellule)***

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Si e est une cellule, notons ∂e son *bord*, c'est-à-dire l'image de la frontière de $\mathbb{B}_n$, si e est une n-cellule, par n'importe quel homéomorphisme de e dans $\mathbb{B}_n$.
On note également $\mathring{e} = e - \partial e$.
Si $f : e \longrightarrow X$ est une application continue, on note ∂f la restriction $f_{|\partial e}$ de f au bord de e.

On définit maintenant la notion la plus importante de cette section.

Définition. *(Attachement cellulaire, recollement d'une n-cellule le long d'une application)*

Si X est un espace topologique, et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est continue, on note

$$X \bigcup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$$

le recollement au moyen de φ.

On dit alors qu'on a *recollé une n-cellule à X* et qu'on obtient $X \cup_\varphi e^n$ en *attachant une n-cellule le long de φ.*

On a en particulier $X \bigcup_{\varphi} e^n = X \coprod B^n/R$, où R est la relation d'équivalence engendrée par les $\varphi(a) R i_n(a)$, $a \in S^{n-1}$.

▷ En effet, c'est la définition du recollement. ■

Dans le recollement général, les applications f,g n'étaient pas les plus importantes, car souvent des inclusions canoniques ; ici, c'est le contraire, l'espace A où l'on applique le recollement est toujours le même, c'est la sphère, et c'est l'application φ qui joue un rôle important.

Encore par définition du recollement :

Fait. *(Classes des points remarquables d'un recollement cellulaire)*

Ainsi,

1. pour $x \in X$, sa classe d'équivalence est $cl(x) = \{x\} \coprod i_n(\varphi^{-1}(x))$

2. et pour $b \in \mathring{B}^n$, on a $cl(b) = \{b\} \coprod \emptyset$ (on touche pas au dedans).

Plus précisément, on a la propriété de base suivante.

Proposition. *(Plongement de X et de la boule ouverte dans leur attachement cellulaire)*

Les applications $X \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ et $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ sont des homéomorphismes sur leurs images.

▷ On note $q : X \coprod B^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ la projection canonique. Alors sa restriction $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ est continue et injective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit $U \subseteq \mathring{B}^n$ un ouvert. Par ouverture de l'intérieur, cela revient à prendre un ouvert de B^n. Comme on a $\varphi = q \circ i_{B^n}$, on remarque que $i_{B^n}(U) = \emptyset \coprod U$ est un ouvert de $X \coprod B^n$, qui de plus est saturé. On a donc $\phi(U) = q(\emptyset \coprod U)$ ouvert car $\phi = q \circ \iota(B^n) : B^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$.

Maintenant, montrons que æ$_X$: $X \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ est injective. Si $cl(x) = cl(y)$, alors $\{x\} \cup i_n(\varphi^{-1}(x)) = cl(x) = cl(y) = \{y\} \cup i_n(\varphi^{-1}(\{y\})\}$. Il suffit de montrer que $j_X : X \longrightarrow j_X(X)$ est fermée. Soit F un fermé de X. On a $j_X = q \circ i_X(F) = F \coprod \emptyset$. De plus, $q^{-1}(q(F \coprod \emptyset) = F \coprod \varphi^{-1}(F)$ est un fermé de $X \coprod B^n$. Donc $j_X(F) \subseteq j_X(X)$ est un fermé de $j_X(X)$. ■

Proposition

Si X est pointé par x_0 et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est constante de valeurs x_0, alors on a un homéomorphisme $X \cup_\varphi e^n \simeq X \vee S^n$, où $S^n \simeq B^n/S^{n-1}$ est pointé par $q(S^{n-1})$.

On précise cette notion en généralisant et itérant le processus un nombre quelconque de fois.

Définition. ***(Espace topologique obtenu par recollement de cellules)***

On dit qu'un espace topologique est *obtenu par recollement de cellules* de dimension n sur un espace topologique Y s'il existe une famille $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de cellules de dimension n, munie d'une famille d'applications continues $g_\alpha : \partial e_\alpha \to Y$, telle qu'il existe un homéomorphisme :

$$X \simeq (\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y.$$

(Notons que les g_α ne sont pas supposés injectifs.)

VOC D ans la définition précédente :

- ⋆ La donnée de (e_α,g_α est de l'homéomorphisme liant X et l'espace est appelée *décomposition cellulaire* de X relative à Y. Elle est le plus souvent sous-entendue.
- ⋆ Si $f_\alpha : e_\alpha \longrightarrow X$ est l'application induite, alors f_α est continue et on l'appelle *application caractéristique* de e_α. (De même, ce ne sont pas toujours des homéomorphismes sur leurs images.)
- ⋆ En revanche, sa restriction $f_{\alpha|\mathring{e_\alpha}}$ est un homéomorphisme sur son image qui est donc un ouvert de X.
- ⋆ Si Y est séparé, l'image de g_α est un compact de Y, donc un fermé de Y.
- ⋆ Si Y est séparé, la topologie de X est la topologie faible définie par la famille $\{Y\} \cup \{f_\alpha(e_\alpha)\}_\alpha$.
- ⋆ Les e_α, par abus avec $f_\alpha(e_\alpha)$, s'appellent les *cellules* de X relativement à Y. De même, en identifiant son intérieur avec son image dans X, on l'appelle *cellule ouverte* de X relative à Y. Les cellules ouvertes sont les composantes connexes de $X \setminus Y$.
- ⋆ L'application $\partial f_\alpha = g_\alpha : \partial e_\alpha \longrightarrow Y \subseteq X$ est appelée *application d'attachement* de la cellule e_α de X sur Y.

Si par exemple $n = 0$, alors X est homéomorphe à la somme disjointe de Y et de l'ensemble d'indices A muni de la topologie discrète.

On énonce un lemme de construction. On rappelle que dans un bouquet de sphères, la restriction de projection canonique à chaque sphère S_i est un homéomorphisme sur son image, et qu'à homéomorphisme près, le bouquet de sphères ne dépend pas des points bases choisis.

Lemme

Si un espace topologique X est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur un espace topologique Y, alors le quotient $X/\langle Y\rangle$ de X par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous $x,y \in Y$ est un espace topologique discret si Y est vide, et un bouquet de sphères de dimension n sinon.

$\triangleright$ C'est immédiat sur Y est vide, auquel cas $n = 0$, X est discret et $X/\langle Y\rangle \simeq X$. Sinon, soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ une décomposition cellulaire de X relative à Y. Soit $\sim_\alpha$ la relation d'équivalence sur la α-ième cellule engendrée par $x \sim y$ si x et y sont tous deux dans le bord. Alors $S_\alpha := e_\alpha/\sim_\alpha$ est homéomorphe à une sphère, que nous munissons du point base image de ∂e_α. L'inclusion $\coprod_{\alpha\in A} e_\alpha \longrightarrow \left(\coprod_{\alpha\in A} e_\alpha\right) \cup \coprod Y$ induit clairement par passage au quotient un homéomorphisme ($\sim$ étant engendrée par l'identification des points bases) :

$$\bigvee_{\alpha\in A} S_\alpha := \left(\coprod_{\alpha\in A} S_\alpha\right)\Big/\sim\ \simeq (\coprod_{alf} e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y)/\langle Y\rangle\,.$$

Ceci conclut. ■

4.2.2 CW-complexe, espace cellulaire

4.2.2.1 Définition générale

Définition. ***(CW-complexe, espace cellulaire fini)***

Un *espace cellulaire*, ou *CW-complexe*, est un espace topologique X muni d'une famille $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces, en utilisant la convention $X^{(-1)} = \emptyset$, si :

1. $X^{(n)}$ est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$,
2. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}$ et la topologie de X coïncide avec la topologie faible définie par la famille $(X^{(n)})_n$.

Voici quelques définitions et propriétés générales des CW-complexes.

VOC D ans la définition précédente :

- ⋆ Le sous-espace $X^{(n)}$ s'appelle le n-squelette de X. Il est fermé dans X. Le 0-squelette $X^{(0)}$ est un espace discret.
- ⋆ Nous appellerons *décomposition cellulaire* de X la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une décomposition cellulaire de $X^{(n)}$ relative à $X^{(n-1)}$. Elle est le plus souvent sous-entendue, les propriétés qui suivent des CW-complexes n'en dépendent pas. Les cellules, cellules ouvertes, applications caractéristiques, applications d'attachement de (la décomposition cellulaire fixée de) X sont celles de $X^{(n)}$ relativement au précédent. L'ensemble X est donc réunion disjointe de ses cellules ouvertes, qui sont les composantes connexes de

$X^{(n)} - X^{(n-1)}$.

Attention, les (images par les applications caractéristiques des) cellules de X sont fermés de X, mais les cellules ouvertes n'en sont pas forcément des ouverts.

- ⋆ Une cellule de dimension 0 est appelé un *sommet* de X. Une cellule ou cellule ouverte de X de dimension 1 est appelée *arête* ou *arête ouverte* de X. La frontière d'une arête ouverte est fermée d'un ou deux sommets de X, appelés les *extrémités* de l'arête.
- ⋆ La topologie de X est la topologie faible définie par la famille de ses cellules.
- ⋆ La *dimension* de X est la borne supérieure des dimensions de ses cellules ouvertes, ce qui est bien définir par le théorème d'invariance du domaine. Un *graphe topologique* est un CW-complexe de dimension $\leqslant 1$.

Définition. ***(Sous-CW-complexe)***

Un sous-CW-complexe de X est un sous-espace topologique Y de X, tel que si $Y^{(n)} = X^{(n)} \cap Y$, alors $(Y^{(n)})_n$ est un CW-complexe.

Il faut et il suffit pour cela que Y soit union de cellules ouvertes de X dont l'adhérence est contenue dans Y.

Par exemple, $X^{(k)}$ est un CW-complexe de dimension $\leqslant k$.

Définition. ***(Application cellulaire)***

Soient X,Y deux CW-complexes. Une application continue de X dans Y est dite cellulaire si elle envoie le n-squelette de X dans le n-squelette de Y pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On dit que le CW-complexe est fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Il est alors de dimension finie. La seconde condition des CW-complexes est automatiquement vérifiée si le CW-complexe est fini, comme ce sera le cas dans la plupart des exemples. Ceci permet d'énoncer la définition suivante :

4.2.2.2 CW-complexe fini, espace cellulaire fini

Définition. ***(Espace cellulaire fini, CW-complexe fini)***

Un *espace cellulaire fini*, ou *CW-complexe fini*, est un espace obtenu à partir d'un nombre fini de points, les 0-*cellules*, en recollant par ajout itératif un nombre fini de cellules.

Autrement dit, un espace cellulaire est fini s'il est de dimension finie et que chaque n-squelette résulte du recollement de seulement un nombre fini de n-cellules.

Exemples. ***(Espaces cellulaires finis)***

1. Toute sphère est un espace cellulaire. Pour $n \geqslant 1$, l'application d'attachement $\pi : S^{n-1} \longrightarrow pt$, $S^n = B^n \bigcup_{\pi} pt = \{N\}$ confère à S^n une structure de CW-complexe fini ayant un sommet N et une et une seule n-cellule ; si $n = 0$, on considère simplement l'application vide. Heuristiquement, il suffit de recoller le bord de la boule sur un point pour obtenir la sphère. C'est d'ailleurs un CW-complexe de dimension n.
2. Les bouquets de sphère sont donc des espaces cellulaires complexes. En effet, un bouquet de sphères pointées de dimension n, indexées par un ensemble S, admet une structure de CW-complexe, avec un seul sommet et $\mathrm{card}(S)$ cellules de dimension n, dont les applications d'attachements sont les applications constantes sur le sommet.
3. Par compacité (voir ci-dessous), $\mathbb{R}^n$ n'est pas CW-complexe fini.
4. Le tore $\mathbb{T}^2$ admet une structure de CW-complexe fini ayant une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule. Il est donc de dimension 2. En effet, le tore $\mathbb{T}^2$ est par définition homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $K = [0,1] \times [0,1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$. La 0-cellule est l'image de $(0,0)$, les deux 1-cellules sont les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{T}^2$ obtenues par passage au quotient des applications $t \mapsto (t,0)$ et $t \mapsto (0,t)$. La 2-cellule est la projection canonique de $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{T}^1$.
5. La bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$ admet une structure de CW-complexe fini ayant aussi un sommet, deux arêtes et une cellule de dimension 2. En effet, par définition, elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,1-t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$. Les cellules sont données par les mêmes opérations.
   Les 1-squelettes de $\mathbb{K}_2$ et de $\mathbb{T}^2$ sont naturellement homéomorphes, mais l'application d'attachement de la 2-cellule de $\mathbb{K}_2$ n'est pas homotope à l'application d'attachement de la 2-cellule de $\mathbb{T}^2$.
6. Un autre exemple est l'espace projectif réel. On l'étudie en détail dans la section consacrée, dans la section Topologie quotient. Fenêtre : espaces projectifs.

Corollaire

Tout espace cellulaire fini est séparé.

Corollaire

Tout espace cellulaire fini est compact.

4.3 Homotopie et groupe fondamental

Motivation. En topologie, contrairement à la géométrie, on s'intéresse peu à la taille des objets mais à leurs possibilités de déformation. Ainsi, deux espaces homéomorphes sont les mêmes, mais on voudrait maintenant décrire des applications donnant que deux espaces sont *presque* homéomorphes (c'est l'homotopie), mais les mêmes à déformation près. Par exemple, un plongement de la sphère dans le plan ne peut être homéomorphe, mais quitte à agrandir son image jusqu'à l'infini, on dira que le sphère et le plan sont les mêmes, à déformation près. On définit ainsi une relation plus faible que l'homéomorphie et bien utile au topologue.

4.3.1 Point de vue catégorique de la topologie

Définition. ***(Catégorie des espaces topologiques)***

On note $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$, la catégorie de tous les espaces topologiques. Dans ce cas, pour tous objets X,Y, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sont les applications continues $= C(X,Y)$.

4.3.2 Applications homotopes

$\longrightarrow$ *Notation.* S i X est un espace topologique, on note $\star_X$ *n'importe quel point* arbitrairement fixé de X. Si X est évident, en particulier si X est le seul espace mis en jeu, on note simplement l'étoile $\star$.

Définition. ***(Homotopie)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues (cela va de soi dans la catégories des espaces topologiques). Une *homotopie* entre f et g est une application continue :

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

où $I = [0,1]$, telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une homotopie entre f et g, et l'on écrit $f \cong g$, ou, si le contexte est clair (ce qui arrive souvent, puisqu'on parle d'applications maintenant), $f \simeq g$.

Intuitivement, H est une application continue qui « interpole » entre f et g. Aussi, f et g ne sont pas les mêmes, mais il existe une collection de chemins continus qui ramène continûment le chemin f au chemin g.

Remarque : avec la phrase précédente, on a traduit que les deux applications partielles doivent être continues. Mais, d'après la définition, cela ne suffit pas tout à fait.

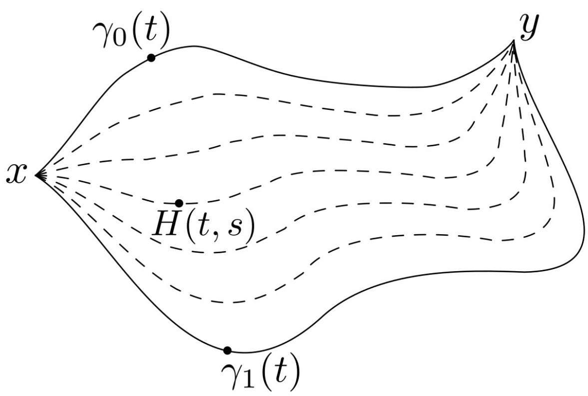


FIGURE 4.3.1 : *Deux applications homotopes.* —
On reprend les notations de l'énoncé. Ici, l'homotopie est prise relativement à deux points $\{x,y\}$. L'idée est de déformer continûment f en g. **Non seulement je peux le faire sur tous les points, j'ai peux le faire de manière simultanément cohérente pour tous les points** (H est continue).

L'homotopie entre deux applications n'est pas équivalente avec l'existence d'un chemin continu de f à g dans $C(X,Y)$, mais presque (mais quelle topologie donner à cet espace ?). C'est vrai si l'on suppose X localement compact (raisonnable) et si l'on munit $C(X,Y)$ de la topologie compacte-ouverte (raisonnable également).

Clairement :

Proposition. ***(Relation d'homotopie)***

L'homotopie est une relation d'équivalence.

▷ Bah, pour la réflexivité, il suffit de prendre $H(x,t) = f(x)$ (là on voit qu'il faut f continue sinon ça déconne). Pour la symétrie, considérer $H'(x,t) = H(x,1-t)$ continue par composition. Pour la transitivité, faire appel à une ruse de fouine semblable à la connexité par arcs. ■

Remarque. L'homotopie s'énonce également avec $[a,b]$ au lieu de I. Il y a bien sûr équivalence entre les deux définitions.

Exemples. ***(Homotopies)***

1. $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est homotope à l'application constante $0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Pour voir, la structure topologique de $\mathbb{R}^n$ est tellement basique que $\mathbb{R}^n$ est homotope à un point (pour l'équivalence d'homotopie, que nous définirons plus bas). On peut *réaliser l'homotopie* par $H : \mathbb{R}^n \times I : (x,t) \longmapsto xt$.
2. Deux segments d'un espace vectoriel normé sont toujours homotopes (le faire). On peut même imposer que les chemins interpolateurs soient également des segments.
3. On verra que dans des espaces gentils tels que $\mathbb{R}^n$ où l'application identité est

homotope à une application constante, on parlera d'espace *contractile*, tout lacet est homotope à un lacet constant. C'est le cas du plan complexe, où l'on retrouve un théorème sur l'intégration des fonctions holomorphes.
Ce n'est plus vrai dans certains autres espaces. Par exemple, dans le cercle S^1 réalisé dans le plan complexe, la situation n'est pas équivalente à la précédente. Si un fil parcourt une boucle autour d'un cercle, il n'est pas possible de modifier le nombre de tours compté algébriquement sans que le fil ne se brise ou quitte la surface de la sphère. Ce *nombre de tours* est formellement défini de la manière suivante : l'application de $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$ étant un homéomorphisme local, tout lacet $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ possède un unique relèvement continu $\overline{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\overline{\gamma}(0) = 0$. Le degré du lacet est alors $\overline{\gamma}(1)$. Si deux tels lacets sont homotopes, on démontre, en relevant de même cette homotopie, qu'ils ont le même degré.

Ainsi, deux applications homotopes ne sont pas égales, mais interchangeables, en un point à préciser.

Définition. ***(Homotopie relative)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \longrightarrow Y$. Soit $A \subseteq X$, telles que $f_{|A} = g_{|A}$. On dit que *f est homotope à g relativement à A*, et l'on note $f \cong_A g$ ou $f \simeq_A g$, si il existe une homotopie $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$, et $H(a,t) = f(a) = g(a)$ pour tous $a \in A$, $t \in [0,1]$.

Proposition. ***(Relation d'homotopie relative)***

Avec les notations précédentes, l'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence.

▷ La réflexion vient de ce qu'on peut prendre $H(x,t) = f(x)$. Pour la symétrie, si H est une homotopie (relativement à A) $f \simeq g$, alors $H(x,1-t)$ convient. On définit $H'(x,t) = H(x,2t)$ si $t \in [0,\frac{1}{2}[$, $H'(x,t) = H(x,2(t-\frac{1}{2}))$ sinon. C'est une homotopie de f à h. C'est déjà pas mal ! ■

Définition. ***(Candidats d'homotopie relative)***

Soit $\psi : A \longrightarrow X$. On note alors $C(X,Y)_\psi$ l'ensemble des applications continues de $f : X \longrightarrow Y$ telles que $f_{|A} = \psi$, c'est-à-dire l'ensemble des applications pour laquelle l'homotopie relative à A avec ψ fait sens.

Définition. ***(Quotient d'homotopie relative)***

On note $[X,Y]_\psi$ le quotient de $C(X,Y)_\psi$ par la relation d'homotopie relative à A.

Exemple. *(Quotient d'homotopie trivial)*

Cherchons $[\star,X]$ dans le cas $C(\star,X) = X$. Une homotopie dans ce cas est un chemin comme on connaît : on note $\pi_0(X) = [\star, X]$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Et, héhé, on touche du doigt la suite des événements...

L'homotopie n'est pas une notion extrinsèque (on n'en doutait pas) ! Un cercle du plan est homotope à un point ; un cercle embrassant le tore, non.

Lemme. *(Conservation de l'homotopie par compositions)*

Soient, T,X,Y,Z des espaces topologiques et

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Si $f \simeq g$, alors $h \circ f \circ k \simeq h \circ g \circ k$.

▷ Soit H une homotopie de f à g. Alors $h \circ H \circ (id \times h)$ est une homotopie de $h \circ f \circ k$ sur $h \circ g \circ h$. ■

On cite aussi.

Lemme. *(Composition d'homotopies)*

Si $f \simeq g$ et $h \simeq k$, h est composable à f et k à g, alors $h \circ f \simeq k \circ g$.

▷ La preuve est sans malice : pour composer deux homotopies H et K, on considère $\Theta(t,x) = K(t,H(t,x))$. ■

On peut maintenant, à la mode catégorique, transformer les notions que l'on connaît en notions vraies à homotopies près. Le lecteur se convaincra qu'en topologie, c'est la bonne manière de considérer les choses.

Définition. *(Équivalence d'homotopie)*

On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie*, s'il existe une application continue $Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g \simeq id_Y$ et $g \simeq f \simeq id_X$.
Moins formellement, une équivalence d'homotopie est une application continue inversible à homotopie près.
Deux espaces topologiques A,B sont dits *homotopes* s'il existe une équivalence d'homotopie entre eux. C'est clairement une relation d'équivalence. On note $A \cong B$ et nous proscrivons l'usage $\simeq$ similaire à l'homéomorphie.

Fait. ***(Homotopie et homéomorphie)***

Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

Les notions de convergence, internes, ne sont pas conservées par l'équivalence d'homotopie. En revanche, les considérations extérieures (trous, composantes connexes, etc.), le sont : c'est un peu la « morale de l'équivalence d'homotopie ».

Exemples. ***(Équivalences d'homotopie)***

1. Comme on a vu, $\begin{array}{ccc} \star & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \star & \longmapsto & a \end{array}$ est une équivalence d'homotopie pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$. L'homotopie représente donc bien cette idée topologique de géométrie du caoutchouc : peu importe la taille, des choses très petites, atomiques, sont homotopes à des choses très grandes, infinies.
2. $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie. On pose $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$, qui à x fait correspondre $\frac{x}{\|x\|}$. Alors $g \circ f = id$ et $f \circ g \neq id$. On pose $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui à $(x,t) \longmapsto (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$. Alors $f \circ g$ est homotope à l'identité. **Pourtant, il est clair que S^1 et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes** (en effet, le premier, privé de deux points, n'est plus connexe par arcs ; le second, si).

Définition. ***(Catégorie des espaces topologiques homotopique)***

On raffine la catégorie des espaces topologiques en la *catégorie d'homotopie* $C = \mathrm{Top}_H$ dont les objets sont encore les espaces topologiques et pour tous objets X,Y, $\mathrm{Hom}_C(X,Y) = [X,Y] := [X,Y]_\emptyset$: les morphismes sont les applications continues définies à homotopie près.
Les isomorphismes de la catégorie C sont les équivalences d'homotopie.

Heuristique

L'homotopie est une sorte de *morphisme entre les morphismes*, ce qui fait gagner un troisième cran d'abstraction dans les catégories.

On donne quelques propriétés pratiques pour établir des homotopies.

Propriété. ***(Cas trivial dans $\mathbb{R}^n$)***

Toute application continue d'un convexe dans lui-même est homotope à l'identité.

▷ Soit X un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue $X \longrightarrow X$. Alors l'homotopie $(1-t)x + tf(x)$ convient. ■

Propriété. ***(Type d'homotopie par changement de point de vue)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $g : Y \longrightarrow X$. On ne parvient pas à construire $f : X \longrightarrow Y$ directement de façon continue. On choisit un isomorphisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ et l'on pose $f : X' \longrightarrow Y$ On suppose $(f \circ \varphi) \circ g = id_Y$. Alors il suffit de montrer $g \circ f \simeq \varphi^{-1}$ pour en déduire que X,Y sont homotopiquement équivalents.

▷ En effet, il suffit de montrer $(g \circ f) \circ \varphi \simeq id_X$ et l'on conclut par relation d'équivalence. ■

4.3.3 Espaces contractiles

Définition. ***(Espace contractile)***

On dit qu'un espace topologique X est *contractile* s'il est homotope (= homotiquement équivalent) à un point, c'est-à-dire si $X \simeq \star$ dans Top_H.

Heuristique

Le seul espace topologique homéomorphe à un point est le point, qui est d'ailleurs unique à homéomorphisme près : il est discret, grossier, compact, connexe, séparé, à base dénombrable.
On se rappelle donc que l'équivalence d'homotopie est bien plus faible que l'homéomorphie ; en particulier, elle ne restreint par le cardinal.

Exemples. ***(Contractiles)***

1. Il s'agit de montrer : $X \cong \{\emptyset\}$.
2. Tout cône d'une espace topologique est contractile : *le cône est le paradigme d'espace contractile* (l'écrire).

Définition. ***(Rétracts)***

Soit X un espace topologique et $i : A \hookrightarrow X$ continue, ce qui revient à prendre un sous-espace A de X, on dit que A est un *rétract* de X, ou que A est *rétracte*, si l'inclusion a une *rétraction* topologique stricte, *i.e.* s'il existe $\tau : X \longrightarrow A$ continue telle que $\tau \circ i = id_A$.
On dit que A est un *rétract par déformation* si c'est une rétract et sa rétraction $\tau : X \longrightarrow A$ est une section telle que $i \circ \tau \simeq id_X$.
On dit encore que A est un *rétract par déformation fort* si de plus $i \circ \tau \simeq_A id_X$.
Ainsi rétract par déformation fort $\implies$ rétract par déformation $\implies$ rétract.

Pour ne pas avoir l'homéomorphisme, on comprend bien que c'est la condition la plus forte que l'on peut demander.

Remarque. D ans le cas du rétract par déformation, i et τ sont des équivalences d'homotopie.

Ainsi, **une rétraction par déformation est un cas particulier d'identité du type d'homotopie**.

Exercice 30

L'équateur de la sphère usuelle en est-il un rétract par déformation ? Un rétract ?

Exemples. ***(Rétracts)***

1. $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ continue, X un espace topologique. Alors f se prolonge en une application continue $g : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow X$ si et seulement si $f \simeq \star$ l'application constante.

▷ Si un tel g existe, on pose :

$$\begin{aligned} H \colon \quad \mathbb{B}^{n+1} \times I &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto g(tx) \end{aligned}$$

qui est une homotopie entre g et l'application constante $x \longmapsto g(0)$. Par restriction, on en déduit une homotopie entre f et $g(0)$.

Réciproquement, si $f \simeq x_0$, soit $H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow X$ cette homotopie. On pose :

$$\begin{aligned} g \colon \quad \mathbb{B}^{n+1} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \begin{cases} H(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|) \text{ si } \|x\| \geqslant \frac{1}{2} \\ x_0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et voilà. ■

4.3.4 Homotopie et recollement de cellules

Définition. ***(Propriété d'extension des homotopies, peh)***

Soient Y un espace topologique et $X \subseteq Y$ un sous-espace. On dit que (Y,X) a la *propriété d'extension des homotopies* si pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ (continue) et pour toute application continue $H : X \times I \longrightarrow Z$ telle que $H(-,0) = g_{|X}$, alors il existe une homotopie $\tilde{H} : Y \times I \longrightarrow Z$ vérifiant : $\tilde{H}_{|X \times I} = H$ et $\tilde{H}(-,0) = g$.

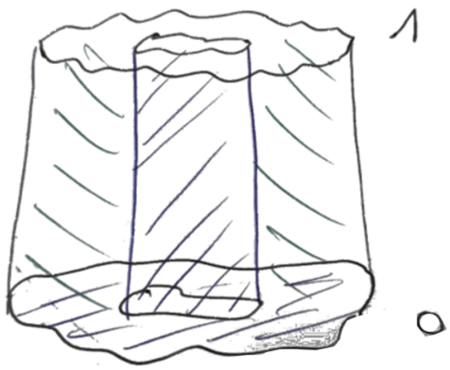


FIGURE 4.3.2 : *Illustration de la notion de rétraction.* —

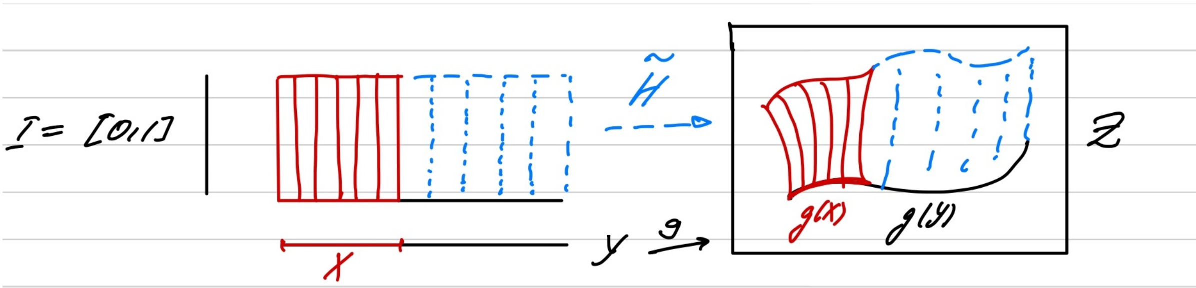


FIGURE 4.3.3 : *Propriété d'extension des homotopies.* —

Remarques.

1. Si X est fermé dans Y, par recollement de continues sur un recouvrement de deux fermés, g et H donnent une application continue

$$(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z.$$

Autrement, ce n'est pas clair (contre-exemple : prendre $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R}$)).

2. Si (Y,X) a cette propriété, alors l'inclusion canonique i de $(X\times I)\cup(Y\times\{0\}) \hookrightarrow Y\times I$ s'étend (en effet, on a une application continue $g = i_{|Y\times\{0\}}$ et une homotopie $H = i_{|X\times I}$ qui vérifient les hypothèses) en une application continue qui est par construction une rétraction de i donc par définition $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$ est un rétract de $Y \times I$. Réciproquement, s'il existe une rétraction $\tau : Y \times I \longrightarrow (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$, en

composant avec τ, toute application continue f :

$$\begin{tikzcd}
(X\times I)\cup(Y\times\{0\} \arrow[r] & Z \\
Y\times I \arrow[u, hook] \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

s'étend en une application continue sur $Y\times I$ donnée par $f\circ\tau$. Or d'après la remarque précédente la donnée d'une application continue g et d'une homotopie H vérifiant les hypothèses de la définition est équivalente à la donnée d'une application continue f de $(X\times I)\cup(Y\times\{0\})$ dans le cas A fermé. On peut donner une preuve dans le cas général, mais c'est nettement plus laborieux. Ainsi,

$$\boxed{(Y{,}X) \text{ a la PEH si et seulement si } (X\times I)\cup(Y\times\{0\}) \text{ est un rétract de } Y\times I.}$$

Le cas échéant, c'est même un rétract par déformation.

3. En exercice : si $(Y{,}X)$ a la propriété d'extension des homotopies, alors $(Y\times Z, X\times Z)$ aussi.

Proposition

Si Y est séparé et $(Y{,}X)$ a la peh, alors X est fermé dans Y.

▷ Y est séparé si et seulement si Δ_Y est fermée dans $Y\times Y$. On a une rétraction donné par la figure ci-dessous. Soit $F : Y\times I \longrightarrow (Y\times I)\times(Y\times I)$ qui $x\longmapsto(x,\tau(x))$. On a $(X\times I)\cup(Y\times\{0\}) = F^{-1}(\Delta_{Y\times I})$ fermé.

$$\begin{tikzcd}
Y\times I \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "p"'] & (X\times I)\cup(Y\times\{0\}) \arrow[r, hook] & Y\times I
\end{tikzcd}$$

En prenant l'intersection avec le fermé $Y\times\{1\}$, on obtient que X est fermé. ■

Remarque. D ans ce cas, une application $f : (X\times I)\cup(Y\times\{0\}) \longrightarrow Z$ est continue ssi $f_{|X\times I}$ et $f_{|Y\times\{0\}}$ le sont.

Proposition

(B^n, S^{n-1}) a la P.E.H.

▷ On a une rétraction par déformation τ : $\underbrace{B^n\times I}_{\text{gobelet plein}} \longrightarrow \underbrace{(S^{n-1}\times I)\cup(B^n\times\{0\})}_{\text{gobelet}}$ en utilisant la projection radiale. ■

En faisant le quotient d'un espace par une partie, on identifie cette dernière à un point. Intuitivement, si cette partie est contractile, on obtiendrait un espace homotopiquement équivalent au précédent. C'est faux ! On a besoin de la propriété d'extension pour énoncer proprement cette propriété.

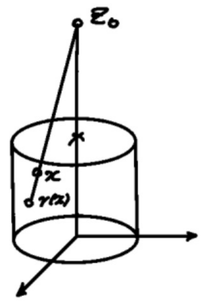


FIGURE 4.3.4 : *La* projection radiale *du gobelet plein sur le gobelet.* —

Propriété

Si (Y,X) a la PEH et X est contractile, alors Y et Y/X sont homotopiquement équivalents.

▷ On montre que $q : Y \longrightarrow Y/X$ est une équivalence d'homotopie. Soit $i : X \longrightarrow Y$ et puisque X est contractile, $H : X \times I \longrightarrow X$ entre id_X et l'application constante c_{x_0}. On a donc $\tilde{H} : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie entre i et c_{x_0}. Par extension, il existe $K : Y \times I \longrightarrow Y$ qui satisfait en particulier $K(x,1) = x_0$ pour tout $x \in X$. On pose $g : y \longmapsto K(y,1)$ de Y dans Y. g est constante sur X donc elle passe au quotient en $\tilde{g} : Y/X \longrightarrow Y$ et $\tilde{g} \circ q = g$. Donc $\tilde{g} \circ q$ est homotope via K et id_Y. De plus, pour tous $(x,t) \in X \times I$, on a $q \circ K(x,t) = q(x_0) \in Y/X$. Ainsi par extension, $Y \times I \longrightarrow (Y/X \times I)$ et $Y \times Y \longrightarrow Y/X$ permet la factorisation $g \,\tilde{\circ}\, K$ qui est une homotopie entre $id_{Y/X}$ et $q \circ \tilde{g}$. ■

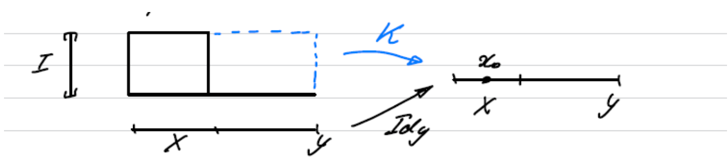


FIGURE 4.3.5 : *Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne.* —

Propriété. ***(Transitivité de la PEH)***

Si (Y,X) et (Z,Y) ont la PEH alors (Z,X) aussi.

Lemme. ***(PEH d'un recollement)***

Supposons que (B,A) a la PEH et $f : A \longrightarrow X$. On pose $Y = X \coprod_A B$. Alors (Y,X) a la PEH.

▷ La donnée de $H : B \times I \longrightarrow Z$ donne $H^{\#} : B \longrightarrow C(I,Z)$ qui à $b \mapsto (t \mapsto H(b,t))$. Par la PEH,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall H^{\#}"] \arrow[d] & C(I,Z) \arrow[d, "ev_0"] \\ B \arrow[r, "\forall g"'] \arrow[ur, dotted, "K^{\#}"] & Z \end{tikzcd}$$

tel que $\forall H^{\#}\ \forall g : ev_0 \circ H^{\#} = g \circ i\ \exists K^{\#} \quad ev_0 K^{\#} = g$ et $K^{\#} \circ i = H^{\#}$. Alors :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r, "H^{\#}"] \arrow[d, "j_X"] & C(I,Z) \arrow[d] \\ B \arrow[r, "j_B"'] \arrow[urr, dotted, "K^{\#}"] & B \coprod_A X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "L^{\#}"'] & Z \end{tikzcd}$$

car K a la PEH par (B,A), et $L^{\#}$ est obtenue par propriété universelle du quotient. Donc $(B \coprod_A X, X)$ a la PEH. ■

Conséquence. ***(Propriété d'écrasement des CW-complexes)***

Si Y est obtenu à partir de X en attachant des cellules, et si X est contractile, alors $Y/X \cong Y$.

Propriété. ***(Homotopie des recollements par des homotopes)***

Soient $A \subseteq B$ des espaces topologiques ; on suppose que (B,A) a la propriété d'extension des homotopies et que $f,g : A \longrightarrow X$ sont homotopes. Alors il existe une équivalence d'homotopie

$$X \coprod_f B \cong X \coprod_g B.$$

▷ Soit H une homotopie de f vers g. Avec $Z = (B \times I) \coprod_H X$, on a

$$\begin{tikzcd} X \coprod_f B \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \\ X \coprod_g B \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

On a une rétraction par déformation $\tau : B \times I \longrightarrow B \times \{0\} \cup (A \times I)$ qui induit une rétraction par déformation, $(B \times I) \coprod_H X \longrightarrow (B \times \{0\}) \cup (A \times I) \coprod_H X = B \coprod_f X$. On a donc $B \coprod_f X \cong Z \simeq B \coprod_g X$. La propriété est démontrée. ■

4.3.5 Le groupe fondamental

Définition. ***(Homotopie entre chemins)***

Soit X une espace topologiques. Deux chemins (continus) $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow X$ sont dit *homotopes* si

$$\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma',$$

autrement dit, s'il existe une homotopie de γ vers γ' qui fixe leurs extrémités.
En particulier, l'homotopie entre deux chemins n'a de sens que s'ils ont (déjà) les mêmes extrémités.
On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie d'un chemin.

Le premier dessin illustrant l'homotopie dans ce polycopié illustre en fait déjà ce cas.

Définition. ***(Lacet, boucle)***

Soit X une espace topologiques et γ un chemin de X. On dit que γ est un *lacet* ou une *boucle* si $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Attention ! On peut imaginer une homotopie entre deux lacets fixant les extrémités de ces deux là, mais ne fixant par celles des lacets intermédiaires.

4.3.5.1 Bagage théorique pour la construction du GF

Faire des dessins !

Définition. ***(Inverse d'un chemin, opposé d'un chemin)***

Soit X une espace topologiques et α un chemin dans X. On note $\overline{\alpha} : t \mapsto \alpha(-t)$ qui est un chemin de $\alpha(1) \to \alpha(0)$.

Définition. ***(Chemin constant)***

Soit X une espace topologique. On note $c_\star : t \mapsto \star$ un chemin constant en $\star \in X$.

Définition. ***(Composition des chemins)***

Si β est une chemin avec $\beta(0) = \alpha(1)$, on note $(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \text{ si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2(t-\frac{1}{2})) \text{ sinon.} \end{cases}$ On pose $[\alpha] \star [\beta] = [\alpha \star \beta]$ s'il existe bien défini, où $[\,\cdot\,]$ est la classe d'homotopie d'un chemin (qui est clairement une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins continus dans X).

Cette formule n'est pas canonique, mais c'est la plus simple que l'on puisse trouver dans le commerce.

Le lemme suivant assure en particulier la bonne définition de la composition. Elle montre que les classes d'homotopie de chemins ne dépendent pas de leur paramétrage, ce qui est très puissant.

Lemme

Soit $\varphi : I \longrightarrow I$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$, alors φ est homotope à id_I relativement à $\{0,1\}$.

▷ Prenons $H : I \times I \longrightarrow X$ qui à $(t,s) \longmapsto st + (1-s)\varphi(t)$. ■

Remarque. S i $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$, on dit que $\gamma \circ \varphi$ est un *reparamétrage de γ par précomposition.*

La composition des chemins n'est pas associative par raison de reparamétrisation ; intuitivement, on a bien le même dessin, mais on ne parcourt pas les mêmes sections à la même vitesse, ce qui fait que, rigoureusement, les fonctions ne sont pas les mêmes.

Lemme

Avec les notations précédentes, $([\alpha] \star [\beta]) \star [\gamma] = [\alpha] \star ([\beta] \star [\gamma])$.

▷ On obtient $(\alpha \star \beta) \star \gamma$ à partir de $\alpha \star (\beta \star \gamma)$ par reparamétrage. ■

Lemme

$[\alpha] \circ [\overline{\alpha}] = [c_{x_0}]$ avec $x_0 = \alpha(0)$ et c_{x_0} l'application constante en x_0.

4.3.5.2 Définition

Définition. ***(Groupoïde)***

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

Définition. ***(Automorphismes)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $x \in \mathcal{C}$. On note $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$ l'ensemble des isomorphismes de $x \to x$. Alors en particulier, dans un groupoïde, $\mathrm{Hom}(x,x) = \mathrm{Aut}(x,x)$ pour tout $x \in X$ (condition non suffisante bien sûr pour avoir un groupoïde).

Exemple fondamental. ***(Groupoïde d'un groupe)***

Si G est un groupe, on définit une catégorie C_G telle que $\mathrm{Ob}(C_G) = \{\star\}$ et $\mathrm{Hom}(\star, \star) = G$ est un groupoïde.

Définition. *(Groupoïde fondamental)*

Soit X un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* d'un espace X, est un groupoïde $\Pi(X)$ dont les objets sont les éléments de X $\mathrm{Ob}(\Pi(X)) = X$, les morphismes entre deux points $\mathrm{Hom}(x,y)$ sont les classes d'homotopie des chemins de x vers y, la composition est $\star$ comme définie dans la section précédente et l'identité d'un point x est $id_x = [c_x]$.

Définition. *(Groupe fondamental)*

Soit X un espace topologique. Le *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie* basé en $x_0 \in X$ dit *point base* de X, noté $\pi_1(X,x_0)$, est $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0) = \mathrm{Aut}_{\Pi(X)}(x_0)$ (puisque c'est un groupoïde).
Autrement dit, c'est l'ensemble, qui forme un groupe, des classes d'homotopie (de chemins) de lacets autour de x_0.

Remarque. S i $x,y \in C$, f un isomorphisme de $x \to y$, alors il existe un isomorphisme de groupe $\mathrm{Aut}(x) \simeq \mathrm{Aut}(y)$, $g \longmapsto f \circ g \circ f^{-1}$. Dans $\mathcal{C} = \Pi(X)$, un isomorphisme de x vers y n'est autre un chemin de x vers y puisqu'il est clair que tout chemin est inversible pour la loi de composition définie dans la section précédente. On en déduit le fait suivant.

Fait. *(Groupe fondamental et composantes connexes par arcs)*

x et y sont isomorphes dans $\Pi(X)$ si et seulement si x et y sont dans la même composante par arcs.
Dans ce cas,

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Pi_1(X,x) & \simeq \Pi_1(X,y) \\ [\alpha] & \longmapsto [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}], \end{array}}$$

ceci n'étant pas canonique (car dépend de la conjugaison, c'est-à-dire du chemin $\gamma : x \longrightarrow y$).

Parfois, les cours introduisent seulement le groupe fondamental et montre qu'il ne dépend pas du point base sur une même composante par arcs, à isomorphisme près. C'est dommage, car le groupoïde fondamental est plus canonique, ne dépendant que de l'espace X absolument, et a toutes les informations puisque cette catégorie contient toutes les informations des catégories des groupes de Poincaré dans ses morphismes.

Par exemple, on ne devrait pas dire que le groupe fondamental du cercle (voir ci-dessous) est $\mathbb{Z}$. On devrait dire que le groupe fonda du cercle, basé en 0, est $\mathbb{Z}$, mais c'est un peu redondant, car ils sont tous isomorphes (et encore plus canoniquement puisque dans le cas de $\mathbb{Z}$, la conjugaison n'agit pas par abélianité).

Exemples. *(Groupes fondamentaux)*

1. On pose $X = \mathbb{S}^1$. On prend la base $x_0 = 0$. On montrera plus tard l'isomorphisme
$\begin{array}{ll} \mathbb{Z} & \longrightarrow \Pi_1(S^1,0). \\ k & \longmapsto [t \mapsto e^{2ik\pi t}] \end{array}$
Intuitivement, le groupe fondamental détecte (en ce qu'il est non trivial) la non-trivialité des topologies : ici, la non-contractilité : on peut tourner avec un lacet autour du trou.

4.3.5.3 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique

Dans une optique toute moderne, les catégories peuvent être vue en toute généralité comme des espaces topologiques dont les objets sont des points. Ainsi, les morphismes sont les classes des chemins. Nous voulons généraliser cette analogie en définissant dans la théorie des catégories, la notion d'application continue et d'homotopie.

Définition. *(Foncteur)*

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une chose qui à tout objet x de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(x) \in \mathcal{D}$, et à tout morphisme $f : x \to y$, associe un morphisme $F(f) : F(x) \to F(y)$. On impose également que pour tous morphismes f,g, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ et $\forall x \in \mathcal{C}$, $F(id_X) = id_{F(x)}$. Rappelons que dans notre cas des petites catégories, toutes ces choses sont des applications.
On peut égaler définir la composition entre foncteurs pour $F : C \to D$ et $G : D \to E$, on définit GF de façon évidente. De plus pour toute catégorie C, il existe un foncteur identité id_C qui ne touche à rien. Ainsi, un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible[a].
Les foncteurs sont l'analogue des applications continues dans l'analogie ci-haut.

[a] Ainsi dans le cas petit deux catégories isomorphes induisent par oubli une bijection $\mathrm{Ob}(C) \simeq \mathrm{Ob}(D)$. De même que l'homéomorphie ce n'est pas une bonne définition...

On a pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$, une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x),F(y))$. En particulier, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(F(x))$ est un morphisme de groupes.

Remarques.

1. On considérera particulièrement le foncteur d'oubli Top $\longrightarrow$ Ens. On considérera également le foncteur de Top dans Top_h qui à $x \mapsto x$ et à $f \mapsto [f]$.
2. Le groupe fondamental est un foncteur partant de la catégorie des espace topologiques pointés : $\mathrm{Top}^* \longrightarrow \mathrm{Grp}$.
3. *(Hors-programme)* Le groupoïde fondamental $\Pi(\ \cdot\ )$: Top $\longrightarrow$ Groupoid (où, attention, les objets sont des catégories). Ainsi si $f : X \longrightarrow Y$ est une application

continue, $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ est un foncteur défini par $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$ définie par $(x \to y) \longmapsto f(x) \xrightarrow{[f\circ\gamma]} f(y)$. En particulier, $\Pi_1(X,x_0) = \mathrm{Aut}_{\Pi(X)}(x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Pi(Y)}(f(x)) = \Pi_1(Y,f(x_0))$.

Définition. ***(Produit de catégories)***

Le produit $C \times D$ de deux catégories, est défini par $\mathrm{Ob}(C \times D) = \mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$ et $\mathrm{Hom}((x,x'),(y,y')) = \mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(x',y')$.

Lemme. ***(Groupoïde fondamental du produit)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors :

$$\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y).$$

Comme dans beaucoup d'autres cas, l'isomorphisme proposé est tellement tautologique qu'en pratique, on écrit souvent l'égalité.

Lemme. ***(Groupoïde fondamental de deux espaces homéomorphes)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. On suppose que X et Y sont homéomorphes par f. Alors $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ est un isomorphisme de groupes.

Définition. ***(Transformation naturelle)***

Soient $F,G : C \longrightarrow D$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ est telle que pour tout $x \in C$, on ait un morphisme dans D, $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$ tel que $\forall f : x \longrightarrow y (\in \mathrm{Hom}_C(x,y))$,

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"] & G(y) \end{tikzcd}$$

Si C,D sont petites, alors il existe une catégorie $\mathrm{Fun}(C,D)$ dont les objets sont les foncteurs $C \longrightarrow D$, et les morphismes sont les transformations. De même qu'avec les foncteurs, on peut parler d'isomorphismes naturels, etc.
Les transformations naturelles sont l'analogue des homotopies continues dans l'analogie ci-haut.

Propriété

Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ est inversible si et seulement si pour tout $x \in C$, $\eta_x \in \mathrm{Hom}(F(x),G(x))$ est un isomorphisme.

Théorème

Soit $f,g : X \longrightarrow Y$ continues et soit $H : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie entre f et g. Pour tout $x \in X$, on note ηx le chemin de $f(x)$ vers $g(x)$, défini par $t \longmapsto H(x,t)$. Alors η est un isomorphisme naturel de $\Pi(f)$ vers $\Pi(g)$.

▷ Soit γ un chemin de x vers y dans X. On veut montrer que[1]

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "f(\gamma)"] \arrow[d, "\eta_x"] & f(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ g(x) \arrow[r, "g(\gamma)"] & g(y) \end{tikzcd}$$

commute (homotopie d'applications et non relative/de chemins, qui ne préservent pas les extrémités). Voir le dessin. Les chemins $f(\gamma)\times\eta_y$ et $\eta_x\times g(\gamma)$ sont homotopes par $I\times I \longrightarrow Y$ qui à $(s,t) \longrightarrow H(\gamma(s),t))$ (puisque l'isomorphie naturelle est donnée par les coordonnées). Remarque : on a dit, grâce à η qui recolle les bouts, que $f(\gamma)$ et $g(\gamma)$ sont homotopes en partant de ce que f et g sont homotopes. ■

Cette équivalence entre diagrammes et schémas d'homotopie est fondamentale.

Définition. ***(Équivalence de catégories)***

Soient C,D de catégories. Une équivalence de catégorie est un foncteur $F : C \longrightarrow D$ s'il existe $G : D \longrightarrow C$ tel que $FG \simeq id_D$ et $DG \simeq id_C$ par des isomorphismes naturels.
On dit que G est un quasi-inverse. Le quasi-inverse, de même que l'homotopie est unique à homotopie près mais pas à unique homotopie près (il est donc essentiellement unique, mais pas canonique). Plus précisément, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; et même le quasi-inverse fixé, l'homotopie de la composition à l'identité n'est pas unique.

La proposition suivante est une conséquence de la propriété rappelée en dessous dont on incite les étudiants à refaire la preuve catégorique.

Corollaire. ***(Fonctorialité du groupe fondamental)***

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si f est une équivalence d'homotopie, alors $\Pi(f)$ est une équivalence $\Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$; autrement dit, le groupoïde fondamental est fonctoriel.
Car : si $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, $\Pi_1(X,x_0) \longrightarrow \Pi_2(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme.

[1] Ce diagramme est en fait tout à fait viseul ! On peut le voir comme pris dans un l'espace Y, « l'image par la transformation naturelle (globale) » du chemin γ entre x et y vu dans l'espace X. Dans le carré qu'il forme, parallèlement aux lignes verticales, on dispose d'une infinité de chemins continus.

▷ Par le théorème, si H est une homotopie entre $f \circ g$ et id_Y, $g : Y \longrightarrow Y$, par le théorème, $H : \mathrm{Fun}(\Pi(Y),\Pi(Y)) \ni \Pi(f \circ g) \simeq \Pi(id_Y) \in \mathrm{Fun}(\Pi(Y),\Pi(Y))$ par H, donc $\Pi(f) \circ \Pi(g) \simeq id_{\Pi(y)}$. Donc $\Pi(f)$ est une équivalence, car elle est pleinement fidèle et $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0,x_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\Pi(Y)}(f(x_0),f(x_0))$. ■

Théorème

Un foncteur $F : C \longrightarrow D$ est une équivalence ssi F est pleinement fidèle : $\forall x,y \in C \quad \mathrm{Hom}_C(x,y) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_D(F(x),F(y))$ est bijectif ; et essentiellement surjectif : $\forall y \in D\ \exists c \in C \quad F(x) \simeq y$.

Tout ce dictionnaire entre catégories et topologie permet de coder des relations plus riches entre espace, l'équivalence (d'homotopie), et notamment le groupe fondamental capture ces notions sur le type d'homotopie, et d'après le corollaire, il suffit que des groupes fondamentaux soient équivalents pour qu'ils soient isomorphes, au sens suivant : **si deux espaces connexes par arcs sont homotopiquement équivalents, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.** En particulier, on a déjà un critère : si deux groupes fondamentaux d'espaces ne sont pas isomorphes, alors les espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Définition. ***(Sous-catégorie pleine)***

Soit C une (petite) catégorie, et $S \subseteq \mathrm{Ob}(C)$. La *sous-catégorie pleine* C_S de X est telle que $\mathrm{Ob}(C_S) = S$ et pour tous $x,y \in S$, $\mathrm{Hom}(x,y) = \mathrm{Hom}_C(x,y)$.

Remarque. I l y a une foncteur évident $C_S \longrightarrow C$ qui est pleinement fidèle.

Par exemple, si $A \subseteq X$ un espace topologique, on pose $\Pi(X,A)$ la sous-catégorie pleine $\Pi(X)_A$. En particulier, si l'on prend A un point, on retombe sur le groupe fondamental, et c'est cool.

Propriété

Si A est un rétract de X, alors $\Pi_1(A,a_0) \longrightarrow \Pi_1(X,a_0)$ est injectif.
Si A est un rétract par déformation, il est de plus un isomorphisme.

Cette propriété n'a rien de vrai si A n'est pas un rétract mais si l'on a seulement une injection (même canonique). En effet, S^1 se plonge dans $\mathbb{Z}$ mais le groupe fondamental du cercle ne se plonge pas dans celui de $\mathbb{C}$, qui est trivial !

▷ Si $\tau : X \longrightarrow A$ est un retract de $i : A \longrightarrow X$, alors $\tau \circ i = id_A$. Donc $\Pi(\tau \circ i) = id_{\Pi_A}$. Dans le cas du retract par déformation, on a une équivalence d'homotopie par la propriété précédente. ■

Le fait que deux espaces aient groupe d'homotopie isomorphes, ne garantit pas l'équivalence d'homotopie. Il faut d'abord trouver une application entre les deux qui induit ces isomorphismes, et alors, c'est automatiquement une équivalence.

Corollaire. *(Groupoïdes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents)*

Soient X,Y du même type d'homotopie. Alors $\Pi(X)$, $\Pi(Y)$ sont des catégories équivalentes.

4.3.5.4 Théorème du cône

4.3.5.5 Lien avec la connexité simple

Reformulation pratique. *(Connexité simple)*

On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si $\Pi_1(X,x_0)$ est trivial pour tout $x_0 \in I$.

Une remarque pas très intéressante :

Propriété. *(Contractile $\implies$ simplement connexe)*

Si X est contractile, alors X est simplement connexe.

Contre-exemple. *(Espace simplement connexe non contractile)*

La sphère S^2 convient. □

Contractilité et groupe fondamental

On peut définir Π_2 comme le groupe des classes d'homotopie d'un chemin dans lui-même. De proche en proche, on peut définir les groupes d'homotopie supérieurs (qui, d'ailleurs, sont abéliens). Alors X est contractile si et seulement si tous les Π_n sont triviaux.

Être contractile, en topologie algébrique, revient à être trivial, alors qu'il y a toute une littérature sur les espaces simplement connexes, qui peuvent être très intéressants. Ces deux notions n'ont donc pas grand-chose à voir.

En général, les groupes fondamentaux non triviaux, même d'espaces simplement connexes, ne se calculent pas comme ça. On va devoir introduire le concept suivant pour espérer décrire des groupes fondamentaux simples.

4.4 Revêtements

La théorie des revêtements est véritablement une théorie de Galois pour les espaces topologiques : il existe comme un dictionnaire entre les sous-groupes du groupe fondamental et les *revêtements* de l'espace topologique.

4.4.1 Définitions fondamentales

Définition. ***(Revêtement général)***

Soit X un espace topologique. Un revêtement de X (par Y) est une application continue $P : Y \longrightarrow X$ qui est localement triviale. Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que $P^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ où les U_i, $i \in I$ ensemble, sont ouverts, dits *feuillets*, et $P_{|U_i}$ est un homéomorphisme sur U $P : U_i \simeq U$. On dit alors que U est un *ouvert trivialisant* (de x), et que les U_i sont bien revêtus.
Une telle application est nécessairement surjective et ouverte. Les U_i sont les composantes connexes de l'image réciproque de U.
Le cardinal du revêtement est le cardinal de l'ensemble de ses feuillets, en particulier *fini*, *dénombrable*...

Corollaire

Tout revêtement est un homéomorphisme local.

Intuitivement, il faut que la fibre au-dessus d'un point soit discrète, ou plutôt indexée par un ensemble (qui n'a pas de topologie) : on ne doit pas pouvoir sauter d'un point à un autre comme ça.

En fait, un espace vérifiant à peu près cette propriété est un *espace fibré*. Dans le cas du revêtement, on impose que les fibres soient discrètes, heu... pour que ça marche.

Propriété. ***(Caractérisation des revêtements finis en milieu séparé)***

Soit $f : Y \to X$ un homéomorphisme local avec Y séparé. Si les fibres des éléments de X par f sont toutes finies = compactes ici et f est fermée, alors f est un revêtement. En particulier, si les fibres des éléments de X par f ont toutes le même cardinal fini, alors f est un revêtement.

Contre-exemple. ***(Pas un revêtement)***

Soit Δ le disque unité strict. L'application $\begin{array}{ccc} \Delta \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2}\}) & \longrightarrow & \Delta \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$ n'est pas un revêtement. $\square$

Exemples. ***(Revêtements)***

1. Si $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$, alors P est un revêtement. Elle induit un homéomorphisme déjà rencontré $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$.

Les revêtements vérifient la propriété d'équivalence des homotopies.

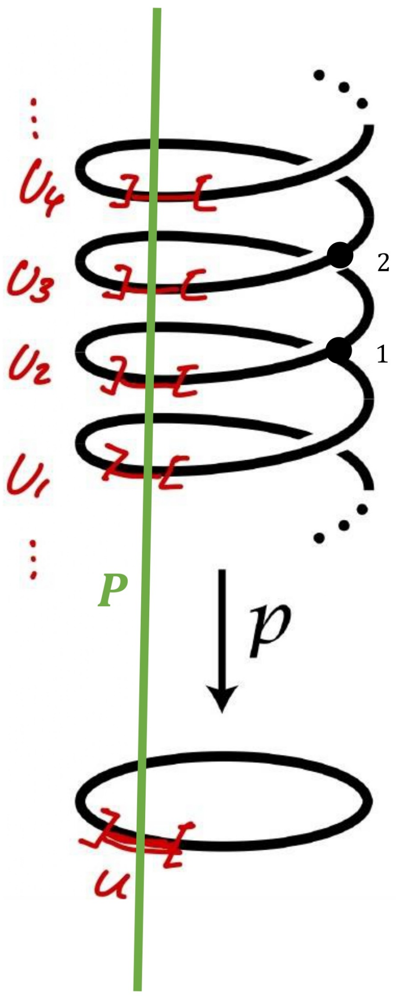


FIGURE 4.4.1 : *Revêtement canonique du cercle.* —
Le cercle est revêtu par la droite réelle ici représentée en tire-bouchon.

Propriété

Soit $P : Y \longrightarrow X$ une revêtement, et $H : Z \times I \longrightarrow X$ une application continue et on pose $g : H(-,0) : Z \longrightarrow X$. Si g se relève en $\tilde{g} : Z \longrightarrow Y$,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

alors H aussi : $\tilde{H} : Z \times I \longrightarrow Y$.

▷ Soit $z_0 \in Z$. Comme H est continue, il existe pour tout t un ouvert $V_t \times W_t \subseteq Z \times I$ qui contient (z_0,t) et tel que $H(V_t, W_t)$ soit contenu dans un ouvert trivialisant de X de $H(z_0,t) = x_0$, c'est-à-dire un ouvert U tel que $P^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ et $P_{|U_i} \simeq U$. Comme $\{z_0\} \times I$ est compact, on peut trouver un voisinage ouvert de z_0 dans Z et $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ une subdivision telle que

$H(V \times [t_i,t_{i+1}])$ est contenue dans un seul des W_i. Supposons qu'on a étendu H à $Z \times [0,t_i]$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} : Z \times [0,t_i] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "P"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et $H(Z \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ est un ouvert trivialisant et $P^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{U_j}$ et $\tilde{H}(z_0,t_i) \in \tilde{U_j}$ pour un certain j. Mais $P_{|U_j} \simeq U_i$, et l'on définit $\tilde{H}$ sur $Z \times [t_i, t_{i+1}]$ en tirant H en ouvert via p.

On montre de la même façon que $\tilde{H}$ est unique. ■

Voilà enfin la propriété fondamental de relèvement selon un revêtement, qui permet de faire le lien entre revêtements et groupe fondamental.

Corollaire. *(Décomposition selon une projection continue)*

Soit $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement et $\gamma : I \longrightarrow X$ un chemin. Soit $x_0 = \gamma(0)$. Alors pour tout $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ qui relève γ et tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0}$.
De plus, pour toute homotopie relativement à $\{0,1\}$, $\gamma \simeq \gamma'$, chemins de source x_0, il existe une unique homotopie relative $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma'}$ qui la relève en notant $\tilde{\ }$ le relèvement sur $\tilde{x_0}$. (On démontrera cela plus tard.)

▷ C'est un corollaire du théorème précédent si $Z = \star$, avec le diagramme $\star \times I \longrightarrow Y \longrightarrow X$ et $\star \times I \longrightarrow X$. Pour le deuxième point, on prend $Z = I$. ■

4.4.2 Le groupe fondamental du cercle

Cet exemple n'a rien de trivial.

Théorème. *(Groupe fondamental du cercle)*

On a : $\Pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z}^a$.

[a] L'égalité est prise au sens d'un représentant dans la classe d'isomorphie.

▷ On montre ça à partir du revêtement canonique $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$. Si γ est une boucle basée en 1, remarquons que $P(0) = 1$. D'après le théorème, il existe un relèvement $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(0_{(I)}) = 0_{(\mathbb{R})}$. Soit $n = \tilde{\gamma}(1) \in P^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Le chemin $\omega_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & nt \end{array}$ est un chemin de 0 à n dans $\mathbb{R}$ et il est homotope à $\tilde{\gamma}$, de façon immédiate car $\mathbb{R}$ est simplement connexe. Ainsi $w_n = P \circ \tilde{w_n}$ et $[w_n] = [\gamma]$. Il reste à montrer que $[w_n] = [w_m] \implies m = n$. Or il est clair que $[w_n][w_m] = [w_{n+m}]$. Donc $\mathbb{Z} \longrightarrow P_1(S^1,1)$ est un morphisme surjectif bien défini. Ainsi, il suffit de montrer que ce morphisme de $\mathbb{Z}$ dans le groupe fondamental du cercle est un objet injectif, autrement dit, qu'à deux chemins homotopes de cette forme correspond le même entier, et c'est la partie difficile.

Soit H une homotopie entre w_n et w_m. Alors d'après le théorème précédent, il existe une homotopie $\tilde{H}$ entre $\tilde{w_n}$ et $\tilde{w_m}$. Ainsi $m = n$, car si non, ils n'ont même pas les extrémités, donc ne peuvent être homotopes. ■

4.4.3 Relèvement

Intuitivement, on a des points d'un espace topologique en bas, et on essaie de les *relever* en des points d'un espace topologique en haut.

4.4.4 Degré d'une application

4.4.5 Applications et conséquences en Analyse

4.4.5.1 Préservation des bords

Exercice 31 *(Un exemple : bords d'une couronne)*

Pour $r > 0$, on note $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$. Soient $r' > r > 1$ et $f : C_r \to C_{r'}$ un homéomorphisme. Le but est de montrer que f envoie ∂C_r dans $\partial C_{r'}$.

1. Soient $D_n = C_{1+2^{-n}(r-1)}$ et $E_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + 2^n(r'-1) \leqslant |z| \leqslant r'(1-2^{-n})\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est une partie compacte de $C_{r'}$ et que pour n assez grand, $C_{r'} \smallsetminus E_n$ a deux composantes connexes.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant n$, $f(D_k) \subseteq C_{r'} \smallsetminus E_N$.
3. Conclure en utilisant la connexité de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4.5.2 Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine

4.4.5.3 Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue

4.4.5.4 Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon

4.4.6 Théorie des revêtements

On aura besoin du théorème de Van Kampen pour cette description.

4.5 Théorème de Van Kampen

On calcule du groupe fondamental par une méthode diviser pour régner. L'idée générale est, pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique, de découper celui-ci en petits sous-espaces, calculer les groupes fondamentaux de ces espaces pour le recoller ensuite.

On démontre plusieurs versions, de différentes forces, du théorème de Van Kampen.

4.5.1 Version faible du théorème de Van Kampfen

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen faible)***

Soit X une espace topologique et on suppose que U,V sont deux ouverts connexes par arcs de X d'intersection non vide et connexe par arcs qui recouvrent X. Soit $x_0 \in U \cap V$. Par fonctorialité du groupe fondamental, on a des morphismes $\Pi_1(U,x_0), \Pi_1(V,x_0) \longrightarrow \Pi_1(X,x_0)$.
Alors $\Pi_1(X,x_0)$ est engendré par les images de ces morphismes.

$\triangleright$ Soit $\gamma : I \longrightarrow X$ une boucle basée en x_0. On a $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ et, en notant I_i, I_j des intervalles ouverts, $\gamma^{-1}(U) = \bigsqcup\limits_{i \in I} I_i$ et $\gamma^{-1}(V) = \bigsqcup\limits_{j \in J} I_j$, donc l'union des I_i avec l'union des I_j est un recouvrement de I. Par compacité de I (subtilité qui n'apparaissait pas dans le schéma, qui n'a donc pas tout à fait valeur de preuve... loin de là), on extrait un recouvrement fini de la forme $[0,1] = [0,s_1[\cup]u_2,s_2[\cup ... \cup]u_2,1]$ où les s_i sont ordonnés et $u_i < s_{i-1} \quad \forall i \geqslant 1$; en choisissant $t_i \in]u_{i+1},s_i[$, on obtient un recouvrement de la forme suivante : $I = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup ... \cup [t_n,1]$ tel que $\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subseteq U$ ou V par connexité, pour tout $i \in [\![1,n[\![$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, pour des $t_i \in I$. On peut de plus supposer que $\gamma(t_i) \in U \cap V$. Comme $U \cap V$ est connexe par arcs par hypothèse, il existe un chemin α_i dans $U \cap V$ reliant x_0 à $\gamma(t_i)$. Alors puisque $[0,1] \simeq [0,t_1]$, en notant $\gamma([0,t_1]$, γ restreint à U ou V, la composition étant licite car $[\alpha_1 \alpha_1^{-1}][c_{x_0}]$, on a $\gamma = \gamma([0,t_1]) \star \gamma([t_1,t_2]) \star ... \star \gamma([t_n,1])$. Ainsi $[\gamma_1 \times \alpha^{-1} \times \alpha_1 \times \gamma_2 ... \times \gamma_n] = [\gamma]$. On peut supposer $\gamma_1 \subseteq U$ où $\alpha_1 \subseteq U$, donc $\gamma_1 \alpha_1^{-1} \subseteq U$. Et $[\gamma_1 \alpha^{-1}] \in \Pi_1(U,x_0)$ pour une boucle basée en x_0. De même, $\alpha_i \gamma_{i+1} \alpha_{i+1}^{-1} \in \Pi_1(A,x_0)$ donc $A = U$ ou $A = V$. $\blacksquare$

Remarque. C e théorème faible ne s'applique pas dans le cas du cercle ! On aura besoin des groupoïdes ici.

Corollaire. ***(Corollaire faible de Van Kampen faible)***

Avec les hypothèses précédentes, si $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ est connexe pas arcs et si $\Pi_1(U_1,x_0)$ et $\Pi_2(U_2,x_0)$ sont triviaux, alors $\Pi_1(X,x_0)$ aussi.
Autrement dit, un espace réunion de deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe par arcs est simplement connexe.

On peut toutefois appliquer le théorème à la *sphère* en dimension supérieure ou égale à 3.

Théorème. ***(Simple connexité de la sphère)***

Pour $\underline{n \geqslant 2}$, $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

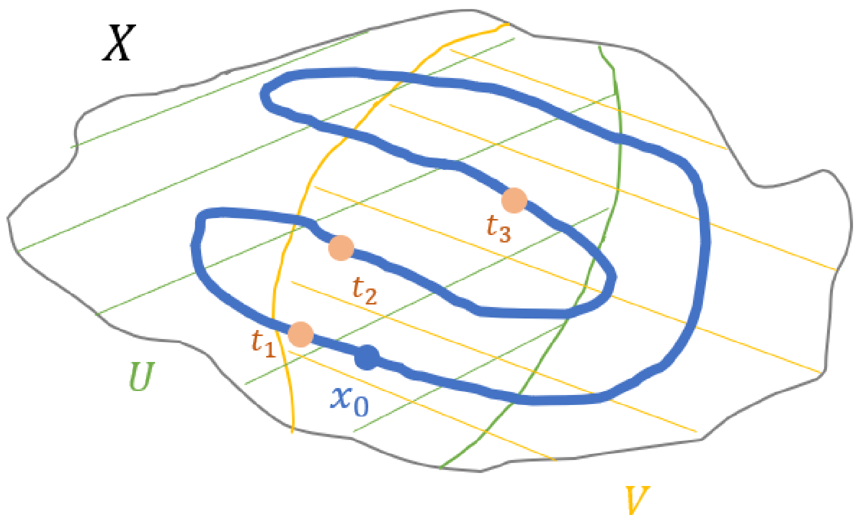


FIGURE 4.5.1 : *émonstration du théorème de Van Kampen, version faible.* — L'intersection des deux ouverts est supposée connexe.

▷ On prend pour ouverts, la sphère privée du pôle nord, respectivement du pôle sud. Alors ces ouverts sont contractiles car homéomorphes au plan par projection stéréographique et leur intersection est bien connexe par arcs (exercice). D'où le résultat. ■

Cette asymétrie avec le cercle n'est pas sans surprise : le cercle privé de deux points n'est plus connexe par arcs, la sphère, si. Plus topalgébriquement, on ne peut plus tourner autour du cercle privé d'un point, mais on peut autour de la sphère privé d'un point. Remarque : pourtant, on peut toutes les deux les déformer en un point !

Théorème. ***(Théorème faible de Van Kampen pour les groupoïdes)***

Soient $X = U_1 \cup U_2$, U_1,U_2 deux ouverts et $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Alors $\Pi(X)$ est engendré au sens des catégories par les images au sens des catégories de $\Pi(U_1)$ et $\Pi(U_2)$ par les foncteurs $\Pi(\iota_i) : \Pi(U_i) \longrightarrow \Pi(X)$ induits par les inclusions $U_i \longrightarrow X$.

▷ Même preuve, et même un peu plus simple, que dans le cas des groupes fondamentaux. ■

Remarque. O n peut déduire le théorème classique par passage à des sous-groupoïdes pleins.

Un espace de groupe fondamental non trivial peut être engendré par des groupes triviaux ! C'est ce qui se passe pour le cercle

4.5.2 Théorème de Van Kampen général

On aura besoin de quelques notions catégoriques.

4.5.2.1 Somme amalgamée dans une catégorie

Définition. ***(Somme amalgamée de catégories, pushout)***

Soient C une catégorie et supposons qu'on ait entre objets et morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

et bien la somme amalgamée, si elle existe, est dans ce cas un objet noté $Y \bigcup\limits_X Z$, et la donnée des morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, "h_1"] & \\ Z \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, "h_2"'] & Y \cup_X Z \arrow[dr, dotted] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

tels que tout le diagramme commute (soit quatre identités).

Remarque. S i ça existe, c'est unique à unique isomorphisme près.

Exemples

1. Si X est l'union de deux ouverts U_1,U_2, alors

$$\begin{tikzcd} U_1 \cap U_2 \arrow[r] \arrow[d] & U_2 \arrow[d] \\ U_1 \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est une somme amalgamée où $X = U_1 \cup_{U_1 \cap U_2} U_2$.
Ici $f : U_1 \longrightarrow Y$ et $g : U_2 \longrightarrow Y$. On définit $h : X \longrightarrow Y$ par recollement de U_1 et U_2 où par hypothèse f et g coïncident sur $U_1 \cap U_2$ d'où la bonne définition.
Dans la catégorie des espaces topologiques pointés Top*, si (X,x_0) est un objet avec $X = U_1 \cup U_2$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$, soit $(X,x_0) = (U_1,x_0) \cup (U_2, x_0)$ par abus, alors $X = (U_1,x_0) \cup_{(U_1 \cap U_2, x_0)} (U_2,x_0)$.

Théorème. ***(Produit amalgamé de groupes)***

Dans la catégorie des groupes, les sommes amalgamées existent toujours (et on l'appelle plutôt *produit amalgamé*).

▷ On définit le produit libre $G \star H = G \star_1 H$ via le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & G \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ H & \longrightarrow & G \star H \end{array}$$

où $G \star H$ est l'ensemble des mots dits alternés, de la forme $g_1 h_1 g_2 ...$ finie ou $h_1 g_1 h_2 ...$ finie, avec aucune interaction entre les g et les h, mais bien sûr les règles de calcul au sein de H et de G. Autrement dit, si $G = \langle S \mid R \rangle$, $H = \langle S' \mid R' \rangle$ où $G \star H = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle$. Il est clair que l'une ou l'autre de ces descriptions vérifie bien la propriété universelle demandée. Il faut maintenant vérifier le reste de la propriété universelle. Si $f : K \longrightarrow G$ et $g : K \longrightarrow H$, on pose le produit amalgamé au-dessus de K : $G \star_K H = G \star H / \langle f(h) = g(h), h \in K \rangle$, *i.e.* $G \star_K H = \langle S \cup S', R \cup R' \cup \{f(k)g(k)^{-1}, k \in K\} \rangle$. (Si K est trivial, on retombe bien sur le groupe libre.) ■

Exemples

1. $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2$.
2. $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z} = \langle a,b \mid a^2 = 1 \rangle$. En effet, par exemple, $abb^{-1}aaaba^{-1} = aaba^{-1} = ba^{-1}$. Ainsi un mot s'écrit toujours (sous forme *normale* ou *canonique*) comme $b^{k_1} a b^{k_2} a ... b^{k_n}$ avec $h_1,...,h_n \in \mathbb{Z}$, $h_i \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$.

4.5.2.2 Le théorème de Van Kampen fort

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen)***

Soit X une espace topologique et on suppose que U_1,U_2 sont deux ouverts quelconques de X qui le recouvrent, tels que $U_1 \cap U_2$ soit connexe par arc. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Alors $\Pi_1(X,x_0) \simeq \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \Pi_1(U_2,x_0)$.

▷ Conséquence du théorème pour les groupoïdes (plus tard). ■

Exemples

1. On prend $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(-1,0),(1,0)\}$, alors $\Pi_1(X,x_0) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \emptyset \rangle$.
2. Soit $X = \mathbb{RP}^2 = D^2/(x \sim -x, x \in S^1)$. Alors $\Pi_1(U_2,x_0) = 1$ et $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathbb{Z}$. Or U_1 est un rétract par déformation de $S^1/(x \sim -x)$, mais $S^1/(x \sim -x) \cong S^1$ par $z \mapsto z^2$. Ainsi $\Pi_1(U_1, x_0) = \Pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z}$. On a donc $\Pi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Pi_1(U_1)$, soit $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, qui à $1 \longmapsto z$. Ainsi, $\Pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) = 1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Intuitivement, il sera beaucoup plus difficile de trouver des espaces non simplement connexes dont le groupe fondamental est fini, ou même de torsion ; cela signifierait, par définition du GF, qu'il existe des boucles non homotopes à un point qui, parcourues plusieurs fois, le deviendraient.

Remarque. C e théorème ne s'applique toujours pas au cercle.

Théorème. ***(Produit amalgamé de groupoïdes)***

Les produits amalgamés existent aussi dans la catégorie des groupoïdes.

▷ Voir la preuve du théorème suivant. ■

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen pour les groupoïdes)***

Si $X = U_1 \cup U_2$ un espace topologique, U_i deux ouverts. Alors

$$\Pi(X) \simeq \Pi(U_1) \star_{\Pi(U_1 \cap U_1)} \Pi(U_2).$$

▷ On reprend les notations de l'énoncé. Pour $f : U_1 \longrightarrow Y$, $g : U_2 \longrightarrow Y$, on veut faire commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi(U_1) \arrow[d] \arrow[ddr, "g^\star"] & \\
\Pi(U_2) \arrow[r] \arrow[drr, "f^\star"'] & \Pi(X) & \\
& & \Pi(Y)
\end{tikzcd}$$

Soient $x,y \in X$, un *chemin généralisé* est un objet de la forme $\alpha : [0,l] \longrightarrow X$, $l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $\alpha(l) = y$. Alors par reparamétrage $\gamma_\alpha : [0,1] \longrightarrow X$, $t \mapsto \alpha(tl)$ est un chemin au sens usuel. On note l_x le chemin constant, $[0,l] \longrightarrow X$, $t \mapsto x$. Soit $P(X)$ (P pour *path*) la *catégorie des chemins* de X, dont les objets sont les éléments de X et les morphismes $x \to y$ les chemins généralisés. La composition est définie pour $\alpha : [0,l_1] \longrightarrow X$ un chemin de $x \to y$ et $\beta : [0,l_2] \longrightarrow X$ un chemin de $y \to z$, avec $\alpha \star \beta : [0, l_1 + l_2] \longrightarrow X$, $t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) \text{ si } t \in [0,l_1] \\ \beta(t - l_1) \text{ si } t \in [l_1,l_2] \end{cases}$, et l'on définit l'identité par $id_x = 0_x$. Dans ce cas, $P(x)$ est une catégorie, mais pas un groupoïde. On a cependant un foncteur $P(X) \longrightarrow \Pi(X)$, et $\Pi(X)$ est le quotient par la relation : $\alpha \sim \beta$, s'il existe des chemins constants l_y, l'_y tels que $l_y \circ \alpha$ et l'_y soient homotopes. On a :

$$\begin{tikzcd}
P(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & P(U_1) \arrow[d] \arrow[ddr, "F_2 = P(f)"] & \\
P(U_2) \arrow[r] \arrow[drr, "F_1 = P(g)"'] & P(X) \arrow[dr, dashed, "G"] & \\
& & P(Y)
\end{tikzcd}$$

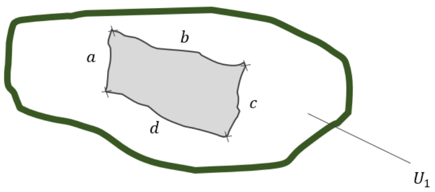
et l'on pose donc $G(x) = \begin{cases} F_1(x) \text{ si } x \in U_1 \\ F_2(x) \text{ si } x \in U_2 \end{cases}$ bien définie par hypothèse du théorème. Comme dans les preuves précédentes, si $\gamma : x \to y$ est généralisé, on peut trouver une subdivision $0 < t_1 < ... < t_n = l$

telle que $\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subseteq U_1$ ou U_2. On pose $\gamma_i(t) = \gamma(t_i + t)$. On a $\gamma = \Gamma_{n-1} \times ... \times \gamma_1$. On pose donc $G(\gamma) = F_{j_n}(\gamma_n)...F_{j_1}(\gamma_1)$ où $j_h = 1$ ou 2.

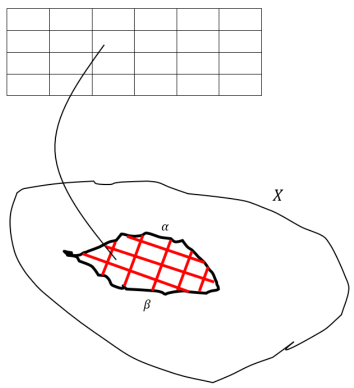
Il reste à montrer que G passe au quotient.

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \Pi(Y) \\ \Pi(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Primo, G envoie les chemins constants sur les identités. Secundo, soit $H : I \times I \longrightarrow U_j$. Puisque $I \times I$ est un carré, soit a,c,d,b ses côtés. Alors $F_i(a)F_i(b) = F_i(c)F_i(d)$.



Tertio, si $\alpha, \beta : [0,l] \longrightarrow X$ et $H : [0,l] \times I \longrightarrow X$ est une homotopie de $\alpha \to \beta$,



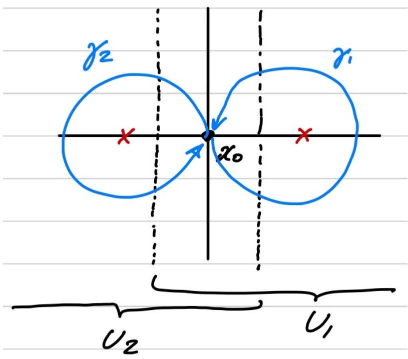
où l'on découpe $[0,l] \times I$ comme sur la figure de telle sorte que l'un d'eux s'écrive comme $\in H^{-1}(U_1)$ ou $H^{-1}(U_2)$. En utilisant le deuxième point sur chaque petit carré, on déduit $G(\alpha\alpha') = G(\beta'\beta)$, si α et β son thomotopes à extrémité fixés, $G(\alpha) = G(\beta)$ puis G descend à $\Pi(X)$.

Par suite, $\Pi(X)$ satisfait la propriété universelle de $\Pi(U_1) \star \Pi(U_2)$ sur $\Pi(U_1 \cap U_2)$.

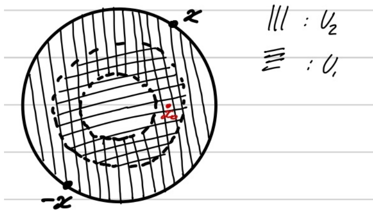
En particulier, ce produit amalgamé existe comme on l'avait prétendu. ■

Exemples

1. Retrouver le groupe fondamental du cercle. Soit $X = S^1$. Alors $\Pi_1(S^1) = \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(I) \star \Pi_1(J)} \Pi_1(U_2) \simeq \Pi_1(U_1, x_0,x_1)$ où I,J sont dans l'intersection $U_1 \cap U_2$, sur les côtés opposés du cercle. Or en notant c_1, c_2 les chemins (quelconques) sur les demi-arcs respectifs, on a $\mathrm{Hom}_{\Pi(U_1)}(I,J) = \{[c_1]\}$ et $\mathrm{Hom}_{\Pi(U_2)}(I,J) = \{[c_2]\}$. Par suite, $\mathrm{Hom}_{\Pi(S^1)}(I,J) = \langle [c_1][c_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$.



(a) *Le plan doublement pointé.* —



(b) *Le plan projectif réel.* —

FIGURE 4.5.2 : *Applications du théorème de Van Kampen.* —

4.5.3 Conséquence sur la théorie des revêtements

Soit X un espace topologique ; on s'intéresse aux revêtements de X.

Définition. ***(Revêtement CALCA)***

Soit $P : E \longrightarrow X$ une application continue surjective, E un espace topologique. On rappelle que P est un *revêtement*, si tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U tel que $P^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$, $PU_i \simeq U$.

On dit que ce revêtement est *CALCA* (connexe par arcs localement connexe par arcs) si E et X sont connexes par arcs et localement connexe par arcs. **On suppose toujours cela à partir de maintenant.**

On appelle P la *projection*, $P^{-1}(x)$ la *fibre au-dessus de* x, U un *ouvert trivialisant*, car localement au voisinage de x, $P_{|U_i} \simeq U_1 \times X \longrightarrow X$. Les U_i s'appellent les *feuilles* au-dessus de U.

On conseille au lecteur de revoir cette partie avant de continuer.

4.5.3.1 Morphismes de revêtements

Définition. ***(Morphisme de revêtements)***

Soit $P_1 : E_1 \longrightarrow X$ et $P_2 : E_2 \longrightarrow X$ deux revêtements d'un même espace X. Un *morphisme de revêtements* est un diagramme commutatif (d'applications continues) comme suit.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "P_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Hom}(P_1,P_2)$ ces morphismes.

Si P est un revêtement, on a $\mathrm{Aut}(P)$ le groupe des automorphismes. Un automorphisme de revêtement P est exactement une bijection bicontinue f de E dans E telle que $P = P \circ f$. En effet, il faudrait aussi imposer $P \circ f^{-1} = P$, mais c'est conséquence de $P = P \circ f$.

Remarque importante. $\mathrm{Aut}(P)$ agit sur $P^{-1}(x)$ pour tout $x \in X$

4.5.3.2 Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications

Théorème. ***(Propriété de relèvement des homotopies)***

Toute boucle dans X basée en x se relève de façon unique en un chemin dans E basé en n'importe quel point de $P^{-1}(x)$.
Les homotopies se relèvent aussi.

Corollaire. ***(Plongement des groupes fondamentaux)***

Soient $x \in X$, $x_0 \in P^{-1}(x)$. Alors le morphisme $\Pi_1(E,x_0) \xrightarrow{P^\star} \Pi_1(X,x)$ est injectif.

▷ Soit γ une boucle de E basée en x_0, sa projection $P(\gamma)$ est une boucle basée en x, et il existe un unique chemin qui relève cette boucle d'extrémité donnée. Soit $\tilde{\Gamma}$ l'unique chemin qui relève $P(\gamma)$ basé en x_0. On a $P(\tilde{\gamma}) = P(\gamma)$, donc ils sont homotopes. Donc $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, donc c'est une boucle. ■

Corollaire. ***(Relèvement des applications)***

Soit $f : Y \longrightarrow X$ (Y CALCA) une application continue avec $x_0 = f(y_0)$ et $p(\tilde{x_0}) = x_0$. Alors f se relève en $\tilde{f} : Y \longrightarrow E$ (de façon unique avec $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$) ssi $f^\star(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p^\star(\pi_1(E,\tilde{x_0})$. Soit :

$$\begin{tikzcd} y_0 \in Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & E \ni \tilde{x_0} \arrow[d, "P"] \\ & X \ni x_0 \end{tikzcd}$$

▷ **Preuve complètement brouillon** Si $y \in Y$, $\alpha : y_0 \longrightarrow y$, $f^\star(\alpha)$ est un chemin dans X de x_0 vers x. On peut le relever en un chemin basé en x_0. On voudrait que $\tilde{f}(y) = x$. On cherche F_x. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ se relève en $\tilde{f} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi $f^\star(\Pi_1(Y,y_0)) = 1$.

Dans Y, soient y_0, y et deux chemins γ' et γ les reliant chacun. Dans le relèvement (penser à $\mathbb{R}$), $x = f(y)$ et $\tilde{x_0}$ est dans la fibre, tout comme $\tilde{f}(y)$. Il existe $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$ tel que $\gamma' = \alpha \times \gamma$, car tout isomorphisme entre deux objets est obtenu par précomposition par un automorphisme du premier à un isomorphisme fixé (résultat élémentaire valable dans toute catégorie). Si l'image de $[\alpha]$ dans $\Pi_1(X,x)$ est inclus dans $P^\star(\Pi_1(E,\tilde{x_0}))$. Si x est l'image de y obtenue en utilisant γ et x' par γ', alors l'unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de $f^\star([\alpha])$ est un chemin de x vers x', or $x = x'$ équivaut à $\tilde{\alpha}$ est une boucle, lui-même équivalant à $\alpha \in P^\star(\Pi_1(E,\tilde{x_0}))$. ■

4.5.3.3 Monodromie

Théorème. ***(Action de monodromie)***

On a une action **à droite** (c'est-à-dire qui renverse la composition) $P^{-1}(x) \times \Pi_1(X,x) \longrightarrow P^{-1}(x)$, dite *action de monodromie*, donnée pour $[\alpha] \in \Pi_1(X,x)$, $x_0 \in P^{-1}(x)$, par $x_0 \cdot [\alpha]$: l'extrémité de l'unique chemin relevant α, basé en x_0.

▷ Rien à faire. ■

Théorèmes

1. $\mathrm{Stab}(x_0) = P^\star(\Pi_1(E,x_0)) \subseteq \Pi_1(X,x)$.
2. Cette action est transitive.
3. Les groupes $\{P^\star(\Pi_1(E,x_0)), x_0 \in P^{-1}(x)\}$, forment une classe de conjugaison dans $\Pi_1(X,x)$.

▷ Successivement :

1. Si $x_0 \cdot [\alpha] = x_0$, c'est exactement que le relèvement de α dans E basé en x_0 est une boucle, soit $[\alpha] \in P^\star(\Pi_1(E,x_0))$.
2. Soient $x_0, x_1 \in P^{-1}(x)$. E est connexe par arcs, donc il existe γ dans E de $x_0 \to x_1$. Soit $\alpha = P^\star(\gamma)$, boucle basée en x. Par définition, $x_0 \cdot [\alpha] = x_1$.
3. Soit γ un chemin de x_0 sur x_1 avec $\alpha = P^\star(\gamma)$. Alors $P^\star(\Pi_1(E,x_0))$ et $P^\star(\Pi_1(E,x_1))$ sont conjugués par $[\alpha]$. Réciproquement, si un tel α existe, on peut relever ça en un chemin basé en x_0, en posant $x_1 = \gamma(1)$.

Lemme

Soit $f \in \mathrm{Hom}(P_1, P_2)$, $x \in X$. Alors $f_X : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$ est compatible avec l'action de $\Pi_1(X,x)$.

▷ Soit $x_1 \in P_1(x)$ et $x_2 = f(x_1) \in P_2^{-1}(x)$. Soit $\gamma \in P_1(X,x)$, $\tilde{\gamma_1}$ un relèvement dans E_1 de γ basé en x_1, avec $x_1 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma_1}(1)$ et $\tilde{\gamma_2}$ un relèvement de γ dans E_2, avec donc $x_2 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma_2}(1)$. Or f est un morphisme de revêtements, $f_X(\tilde{\gamma_1})$ est un relèvement de γ dans E_2, et comme $f(\tilde{\gamma_2}(0)) = x_1 = \tilde{\gamma_2}(0)$, $f^\star(\tilde{\gamma_1})$ est basé en x_2, c'est même égal à $f^\star(x_1 \cdot [\gamma]) = f^\star(x_1) \cdot [\gamma]$. ■

Remarque. O n peut le dire ainsi : les actions de $\mathrm{Aut}(P)$ et de $\Pi_1(X,x)$ sur $P^{-1}(x)$ commutent.

Théorème. ***(Théorème fondamental de la monodromie)***

L'application

$$\mathrm{Hom}(P_1,P_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Pi_1(X,x)}(P_1^{-1}(x),P_2^{-1}(x))$$

est une bijection.
En particulier, $\mathrm{Aut}(P) \simeq \mathrm{Aut}_{\Pi_1(X)}(P^{-1}(x_0))$ est un isomorphisme de groupes.

▷ L'injectivité vient de la connexité de E_1. Soit $x_1 \in P_1^{-1}(x)$. Soit $h : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$. Si h commute avec l'action de $\Pi_1(X,x)$, alors elle est déterminée par $h(x_1)$. Soit $x_1' \in P_1^{-1}(x)$, il existe $\gamma \in \Pi_1(X,x)$ tel que $x_1' = x_1 \cdot [\gamma]$. On a $h(x_1') = h(x_1) \cdot [\gamma]$. Fabriquons un morphisme de revêtements. On a donc nos revêtements $P_1 : E_1 \longrightarrow X$ et $P_2 : E_2 \longrightarrow X$. Or on a vu qu'un morphisme $\tilde{P} : E_1 \longrightarrow E_2$ existe si et seulement si $P^\star(\Pi_1(E_1,x_1)) \subseteq P_2^\star(\Pi_1(E2,x_2))$ en tant que cas particulier de relèvement d'applications. Soit γ_1 un lacet dans E_1 basé en x_1. On a $x_1 \cdot [P_1\gamma_1] = x_1$. Ainsi $h(x_1 \cdot [P_1\gamma_1]) = P_2^\star(\Pi(E_2, x_2)) = x_2$. ■

Heuristique

Un automorphisme de revêtements commute avec les projections, donc agit sur les fibres ; le groupe fondamental aussi ; ce que l'on dit, c'est qu'ils agissent de la même façon, en ce qu'ils se déterminent l'un l'autre.
Autrement dit, un automorphisme de revêtements est caractérisé par ce qu'il fait sur la fibre, puisque chaque fibre est reliée, par connexité par arcs (hypothèse CALCA), à tout le revêtement.

Récapitulons : prenons pour exemple en esprit X le cercle et E son revêtement canonique par la droite réelle représentée en tire-bouchon. On a vu que pour toute boucle de X, il y a une unique de façon de la relever dans le revêtement E, mais alors en un chemin. Intuitivement, les boucles dans E vont donc constituer le noyau de cette action (si c'est une boucle et non seulement un chemin, c'est que c'était seulement un point).

4.5.3.4 Revêtements galoisiens

Théorème. ***(Compatibilité de revêtements)***

Soit $P : E \longrightarrow X$ un revêtement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in E \quad \Pi_1(E,x) \subseteq \Pi_1(X,P(x)))$ est distingué ;
2. $\forall x \in E \quad \Pi_1(E,x) \subseteq \Pi_1(X,P(x)))$ est distingué ;
3. Le groupe $\mathrm{Aut}(P)$ agit transitivement sur $P^{-1}(x_0)$.

▷ Les deux premiers points sont équivalents, car on a vu que tous les $\Pi_1(E,x)$ sont conjugués dans $\Pi_1(X, P(x))$. Le deuxième point équivaut à ce que si $\tilde{x}, \tilde{y} \in P^{-1}[x_0)$, $P(\Pi_1(E, \tilde{x})) = P(\Pi_1(E, \tilde{y}))$, d'où $\exists f \in \mathrm{Aut}(P)$ tel que $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. La réciproque est claire. ■

Remarque. L 'action de $\mathrm{Aut}(P)$ est en toute généralité libre (elle agit sans point fixe). La transitivité de l'action par monodromie est donc équivalente à sa simple transitivité.

Définition. ***(Revêtement galoisien)***

On dit qu'un revêtement est *galoisien*, ou *régulier*, ou *normal*, s'il vérifie l'une des propriétés précédentes.

Remarque. S i P est galoisien, on a une bijection $\mathrm{Aut}(P) = \Pi_1(X)/\Pi_1(E)$ ensembliste.

Théorème. ***(Revêtements galoisiens et monodromie : théorème fondamental qui font de ces revêtements des objets « normaux »)***

Si P est galoisien, l'action par monodromie induit un isomorphisme de groupe $\mathrm{Aut}(P) \simeq \Pi_1(X,x)/P^{-1}(\Pi_1(E,\tilde{x}))$, où $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$.

$\triangleright$ $\mathrm{Aut}(P) = \mathrm{Aut}_{P_1(X)}(P^{-1}(x))$. On veut un morphisme $\Pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Pi_1(X,x))}(P^{-1}(x))$. Si $\gamma \in \Pi_1(X,x)$, $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$, on relève γ en un chemin $\tilde{\gamma}$ dans E basé en $\tilde{x}$, et soit $\tilde{y}$ son extrémité. Puisque P est galoisien, il existe (par transitivité simple) un unique $f_\gamma \in \mathrm{Aut}(P)$ tel que $f_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Comme tous les $\Pi_1(E,\tilde{x})$ sont égaux (dans $\Pi_1(X,x)$). Ainsi, f_γ ne dépend que de $[\gamma] \in \Pi_1(X,x)$. On a donc construit une application $\Pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$. Par construction, c'est un morphisme de groupe. Or $f_\gamma = id$ si et seulement si $\tilde{\gamma}$ est une boucle, si et seulemnt si $\gamma \in \Pi_1(E,\tilde{x})$. Par le théorème d'isomorphisme, on a alors $\Pi_1(X,x)/\Pi_1(E,\tilde{x}) \simeq \mathrm{Aut}(P)$. ■

Le théorème suivant conclut cette section.

Définition. ***(Action totalement discontinue)***

Soit G un groupe discret. L'action de G sur un espace X est continue si et seulement si pour tout $g \in G$, g agit par homéomorphisme.
On dit que l'action de G est *totalement discontinue* si $\forall x \in X\ \exists U \in \gamma(x) \quad U \cap g \cdot U \neq \emptyset,\ g = id$.

Remarque. D ans ce cas, l'action de G est libre, mais c'est encore plus fort.

Théorème. ***(Les revêtements galoisiens CALCA sont des quotients de trucs connexes par des groupes discrets)***

Soit G agissant sur E CALCA de façon totalement discontinue. Alors $P : E \longrightarrow E/G$ est un revêtement galoisien, et $\mathrm{Aut}(P) = G$.

$\triangleright$ On avait vu que P est une application ouverte. Soit $x \in E$. Soit $U \in \gamma(x)$; pour tout $g \neq id$, $g \cdot U \cap U = \emptyset$. Or U est ouvert, donc $P(U)$ est ouvert. Par construction, $P^{-1}(P(U)) = \coprod_{g \in G} g \cdot U$ et $g \cdot U \simeq U$.

Secundo, on a un morphisme de $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$. Par construction, c'est un élément de $\mathrm{Aut}(P)$, c'est-à-dire $P(x) = P(g \cdot x)$. Comme l'action de G libre, ce morphisme est injectif.

Montrons qu'il est surjectif. Soit $f \in \mathrm{Aut}(P)$ et soit $\tilde{x_0} \in E$ et $x_0 = P(\tilde{x_0})$. Comme $f(\tilde{x_0}) \in P^{-1}(x_0)$, il existe $g \in G$ tel que $f(\tilde{x_0}) = g \cdot \tilde{x_0}$. L'action de f sur $P^{-1}(x_0)$ coïncide avec l'action de g. Comme E/G est connexe, alors l'action de f et de g coïncident partout. ■

Remarque. O n a $G \simeq \Pi_1(X,x)/\Pi_1(E,\tilde{x})$ par le théorème précédent.

L'analogie à la théorie de Galois des extensions de corps apparaît ici : cette remarque, en tant que réciproque du théorème précédent, dit que tous les revêtements de Galois sont précisément de cette forme. Ainsi :

$$\boxed{\{\text{revêtements galoisiens}\} \longleftrightarrow \{\text{sous-groupes distingués de } \Pi_(X,x)\}}.$$

Exemples

1. Si E est simplement connexe, $\Pi_1(E/G) = G$.
2. $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translation. On a $(S^1) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le n-tore, d'où $\Pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$. On retrouve aussi le groupe fondamental du cercle (ce qui n'était pas trivial).
3. Le théorème nous dit autre chose, dont avec la précédente, deux propositions qui ont l'air bien différentes et dont aucune n'est triviale. Les revêtements fermés de S^1 sont donnés par $P_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$. Le groupe d'automorphisme est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a $P_n^\star : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $k \longmapsto nk$. Grâce au théorème, à équivalence près, ce sont les seuls.

Corollaire

Soit $P : E \longrightarrow X$ un revêtement galoisien. Alors $\mathrm{Aut}(P) := A(P)$ agit de façon totalement discontinue et $P : E/A(P) \longrightarrow X$ est un homéomorphisme.

Définition. ***(Revêtement universel)***

Soit X un espace topologique CALCA. Un *revêtement universel* de X est un revêtement $P : E \longrightarrow X$ avec E simplement connexe.

Corollaire

Si X admet un revêtement universel E, alors

$$\{\text{revêtements}\} \longleftrightarrow$$
$$\{\text{classes de conjugaison dans l'ensemble des sous-groupes de } \Pi_(X,x)\},$$

soit $G \subseteq \Pi_(X,x) \rightsquigarrow E/G$.

Définition. ***(Espace des chemins)***

Soit X un espace topologique CALCA et séparé, et $x_0 \in X$. On appelle *espace des chemins* $P(X,x_0)$ l'ensemble des chemins de x basé en x_0 (c'est une pieuvre).
On a $P : P(X,x_0) \longrightarrow X$, $\gamma \longmapsto \gamma(1)$ surjectif, car X est CALCA, et un revêtement.

C'est simplement connexe.

Exemple

$P(S^1,1) = \mathbb{R}$.

Voilà une illustration des considérations précédentes qui démontre au passage la supériorité définitive de la topologie sur l'algèbre. Il existe une preuve algébrique imbuvable du résultat suivant, qui ne peut que pâlir devant la concision apporté par la preuve de la topologie algébrique.

Théorème. ***(Nielsen-Schreier)***

Tout sous-groupe de F_2 est libre.

▷ On fait une preuve sans détail. F_2 est le groupe fondamental du bouquet de sphères $S^1 \wedge S^1$ pointées en 1, par le théorème de Van Kampen. Cet espace admet bien un revêtement universel : en effet, on peut le représenter comme un graphe infini sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, avec b l'axe des abscisses ($\bar{b} = b^{-1}$) dans le sens opposé, et a dans l'axe des abscisses ; la donnée d'un mot sur F_2 correspond exactement à un chemin partant de l'origine et fini sur ce revêtement, que nous notons Γ (il faudrait en fait définir la topologie sur des arbres). Ainsi, d'après le théorème précédent, prendre un revêtement de $S^1 \wedge S^1$ revient à prendre des sommets de ce graphe et à les attacher (quotient par l'action d'un sous-groupe $G \subseteq F_2$). Par exemple, $abaab \in G$ peut se refermer en une boucle par un autre chemin, d'ailleurs très arbitraire Donc Γ/G est un bouquet de cercle, éventuellement un nombre infini. Si on a n cercles, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est facile (puis il faut généraliser au cas dénombrable). Ainsi, $\Pi_1(\Gamma/G, x_0) = \star_n \mathbb{Z} = F_n$. Ainsi $G \simeq F_n$ est donc libre. ■

4.6 Notions introductives d'algèbre homologique

Le problème est qu'il existe des espaces assez différents au niveau du type d'homotopie et qui auront des groupes fondamentaux identiques. L'algèbre homologique permet d'associer des homotopies entre homotopies et prendre en compte des paramètres de degré supérieur que le groupe fondamental ne voit pas.

4.6.1 Complexe de modules

4.6.1.1 Définitions

Soit R un anneau commutatif. Pour une suite exacte donnée, l'image est facile à construire, le noyau facile à tester ; l'égalité entre les deux revient à construire les solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$. L'algèbre homologique va permettre de quantifier la connaissance de ces solutions.

On rappelle qu'un groupa abélien correspond exactement à la notion de $\mathbb{Z}$-module.

Définition. ***(Complexe de module)***

Un *complexe de R-module* est une suite de R-modules :

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où les d_i indexés par $\mathbb{N}$ sont des morphismes de modules tels que $d_i d_{i+1}$, soit $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$. On note (C, d) (parfois, par convention, on utilise (M_0,d_0) et l'on indexe la chaîne par $\mathbb{Z}$).
On définit pour $n = i$ l'*espace des cycles* $Z_n(C,d) = Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ et on appelle les *bords* $B_n(M_0, d_0) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. On a $B_n \subseteq Z_n$ et on appelle *homologie* de (C,d) les quotients $H_n = H_n(C,d) = Z_n/B_n$, le *n-ième groupe d'homologie*. On appelle d en général la *différentielle*.
On dit que le complexe est *exact* en C_n si et seulement si $H_n = 0$.
On dit que (C,d) est *exact*, ou *acyclique*, si $H_n = 0$ pour tout n, c'est-à-dire s'il est exact en chacun de ses termes.

Définition. ***(Morphisme de complexes)***

Un *morphisme de complexes* avec la définition précédente, noté $f : (C,d) \longrightarrow (C',d')$, est une collection de morphismes $f_i : C_i \longrightarrow C'_i$ qui commute avec la différentielle :

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

commutatif.

Propriété

Un tel morphisme induit $[f_i] : H_i \longrightarrow H'_i$.

Définition. ***(Quasi-isomorphisme)***

On dit que le morphisme de complexe de modules f est un *quasi-isomorphisme* si les $[f_i]$ sont des isomorphismes.

4.6.1.2 Δ-complexe

On introduit la notion générale suivante, qui permet de former de manière combinatoire des espaces topologiques.

Définition. ***(Simplexe)***

Soit $E = \mathbb{R}^N$ et $\{V_0,\dots,V_{n+1}\}$ des points affinement indépendants.
Le n-simplexe $\sigma = [V_0,\dots,V_n]$ est l'enveloppe convexe de ces points dans cet espace (cela dépend donc de N a priori $\neq n$).
La i-ième *face* de σ est le simplexe $[V_0,\dots,\hat{V}_i,\dots,V_n]$ avec la notation habituelle.
Une *face propre* de σ est un simplexe engendré par un sous-ensemble strict de $\{V_0,\dots,V_n\}$.
Le *bord* de σ est la réunion de toutes ses faces propres.
Le *n-simplexe standard* est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. En particulier,

- Δ_0 est le point sur l'espace nul,
- Δ_1 est un segment unitaire sur une droite,
- Δ_2 est un triangle dans le plan (d'aire $\frac{1}{2}$),
- Δ_3 est un tétraèdre.

Autrement dit, dans le cas du simplexe standard, son bord est $\bigcup_i \partial_i \Delta_n$. L'*intérieur* du n-simplexe standard est $\Delta_n \setminus \partial\Delta_n$.

Un « simplexe » qui n'a pas la bonne orientation, n'en est pas un.

Exercice 32

Quelle est la mesure de Lebesgue de Δ_3 ?

Remarque. L es simplexes standards sont orientés et leurs sommets sont caractéristiquement nommés.

Définition. ***(Δ-complexe)***

Une structure de Δ-*complexe* sur X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$, d'applications continues $\sigma_\alpha : \Delta_{n_\alpha} \longrightarrow X$, $\alpha \in \mathcal{A}$, tels que :

1. $\sigma_{\alpha|\mathring{\Delta}_{n_\alpha}}$ soit injective,
2. $\forall x\ \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad x \in \mathrm{Im}(\sigma_\alpha)$,
3. $\forall i\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \sigma_{\alpha|\partial_i \Delta_{n_\alpha}} = \sigma_\beta$ pour un certain $\beta \in \mathcal{A}$,
4. $A \subseteq X$ est ouvert ssi $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ sont tous ouverts, autrement dit, la topologie sur X est la topologie finale associée à $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

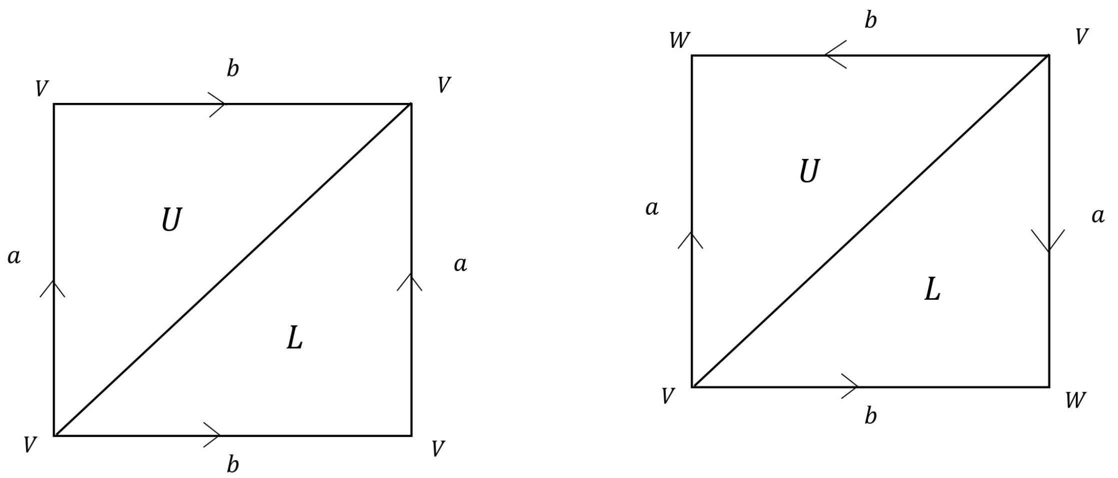
$\mathcal{A}$ est un ensemble d'indices.
On dit : e_{n_α} est un simplexe dans E si on le plonge naturellement dans un espace E.

Fait

La quatrième condition est automatiquement vérifiée dans le cas d'une famille $\mathcal{A}$ finie.

Exemples. *(Δ-complexe)*

1. La sphère S^1 est un Δ-complexe : elle est composée d'un 0-simplexe, un point, et d'un 1-simplexe, le segment, dont les deux extrémités sont jointes sur ce point.
2. Le tore admet une structure de Δ-complexe, composée d'un 0-simplexe, de 3 1-simplexes et de 2 2-simplexes. En effet, il suffit de recoller deux triangles égaux sur leurs hypoténuses respectives, et l'on obtient un carré. Il suffit enfin de prendre les segments des côtés, qui vont être deux à deux égaux, et la diagonale pour 1-complexes, et l'on peut faire le même artifice de recollement d'un carré que pour la structure de CW-complexe du tore.
3. L'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ est un Δ-complexe *(voir le schéma ci-dessous)*.



(a) *Structure de Δ-complexe du tore usuel.* —

(b) *Structure de Δ-complexe de l'espace projection de dimension* 2. —

Figure 4.6.1 : *Exemples de Δ-complexes classiques.* —

Propriété. ***(Lien CW-complexe et Δ-complexe)***

Tout Δ-complexe et un CW-complexe.

Remarque importante. Tout ce dont on va parler ne dépend pas vraiment des σ_α, mais seulement de leurs images + des informations combinatoires concernant la position des sommets + l'ordre des sommets/l'orientation des arêtes.

Définition. ***(Complexe de chaîne)***

Étant donnée une structure de Δ-complexe sur X, on définit un *complexe de chaînes* :

$$C_n^\Delta(X) = \{\sum_{\text{finies}} n_i \underbrace{e_n^\alpha}_{=\sigma_\alpha(\Delta_n),\, \alpha\in\mathcal{A},\ \text{tel que } n_\alpha = n} \mid n_i \in \mathbb{Z}\},$$

et on définit la différentielle sur ce simplexe de chaînes δ_n par :

$$\partial_n\sigma(Delta_n) = \sum_i (-1)^n \sigma([V_0,..., \hat{V_i}, ..., V_n].$$

Exemples. ***(Complexes de chaîne, différentielles)***

1. On considère le 1-simplexe (segment) de sommets V_0,V_1, orienté de V_0 à V_1. Sa différentielle est $[V_1]-[V_0]$.
2. On considère le 2-simplexe (triangle) de sommets V_0,V_1,V_2, orienté de V_0 à V_1, de V_1 à V_2 et de V_0 à V_2. Alors sa différentielle s'exprime : $[V_0V_1]+[V_1V_2]-[V_0V_2]$.

Lemme

C'est bien un complexe de modules, *i.e.* $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

▷ Soit $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$. Alors $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma([V_0,...,\hat{V_i},...,V_n])$, puis $\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{i,j}(-1)^i(-1)^j\sigma([V_0,...,\hat{V_i},...,\hat{V_j},...,V_n])$. ■

VOC O n appelle et l'on note H_n^Δ le n-ième groupe d'homologie simpliciale de (X,Δ), le n-ième groupe d'homologie de (X,Δ).

Exemples. ***(Groupes d'homologie simpliciaux)***

1. Dans le premier cas, la différentielle vaut $b-a+d-c+f-d$.
2. Dans le deuxième cas, la différentielle vaut $[ab]+[bc]+[cd]+[de]+[ea]=0$.
3. La concaténation cyclique de trois 1-simplexe ne donne pas un 2 simplexe, faute d'orientation. L'alternance dans la somme de la différentielle permet de rectifier cette construction.

   Plus explicitement, dans le troisième cas présenté, les 1-cycles sont les cycles dans X. La différentielle vaut $[ab]+[bc]+[ca]=[ab]+[bc]-[ac]$. On remarque que $[ab]$ correspond au 1-simplexe de sommets a,b orienté de a à b, et $[ba]$ au 1-simplexe d'orientation opposée.

   Généralement, en homologie singulière, la plaie est le choix des signes...

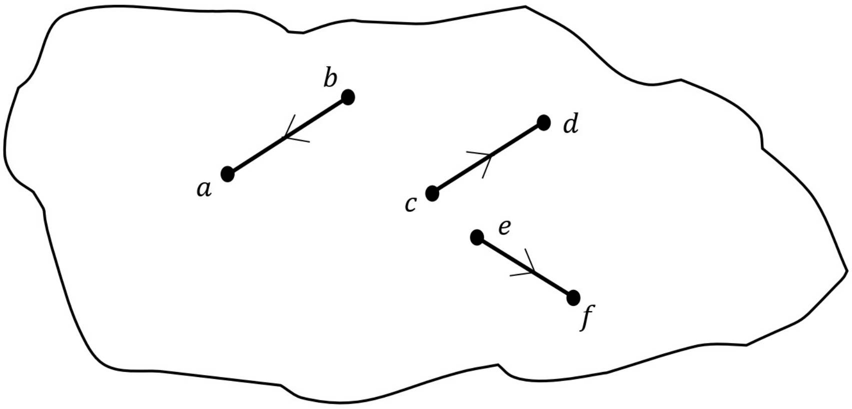


FIGURE 4.6.2 : *Différentielle simpliciale sur trois branches.* — Un premier exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

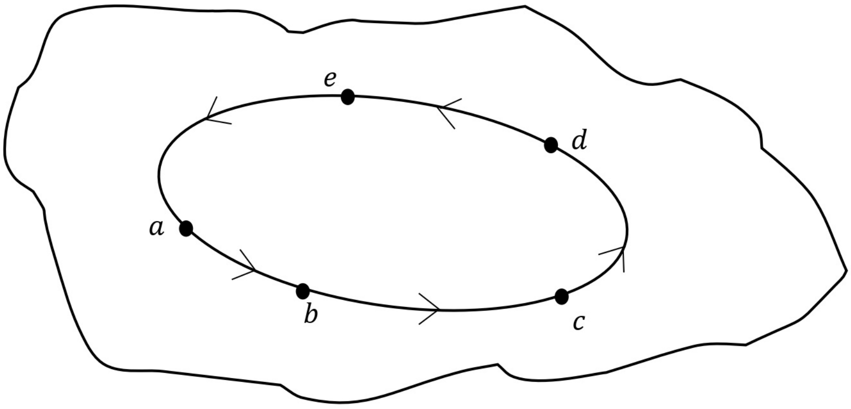


FIGURE 4.6.3 : *Différentielle simpliciale sur le pentagone.* — Un deuxième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

Exemples

1. *(Homologie de la sphère)* Prenons la sphère de sommet V selon le 1-simplexe a, orientée dans le sens anti-horaire. Alors $\partial(a) = [V]-[V] = 0$. On a $C_0^\Delta = \mathbb{Z}$, $C_1^\Delta = \mathbb{Z}$, d'où la chaîne ...$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$. Ainsi, $H_0^\Delta = \mathbb{Z} = H_1^\Delta$.
2. *(Homologie du tore)* Dans le cas du tore (on reprend les notations de la figure précédente), $\partial_1(a) = [U] - [U] = 0$, $\partial_1(b) = 0$, puis $\partial_2(U) = \partial_2(V) = a + b - c$. On en déduit la chaîne ...$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$. Ainsi, $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}^2$ et $H_2 = \mathbb{Z}$.
3. *(Homologie du plan projectif)* Dans le cas du plan projectif (on reprend les notations de la figure précédente), $\partial_1(a) = [W]-[V] = \partial_1(b)$, $\partial_1(c) = 0$, puis $\partial_2(U) = c+b-a$ et $\partial_2(L) = c + a - b$, ces deux derniers étant linéaires indépendants. D'où la chaîne

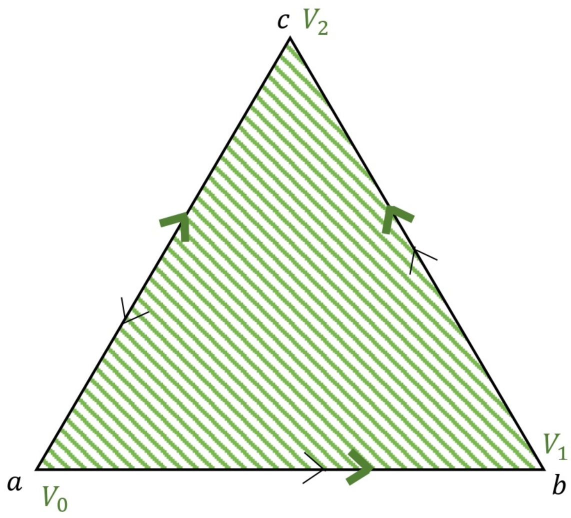


Figure 4.6.4 : *Différentielle simpliciale sur le triangle.* — Un troisième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(\partial_1) = \langle [W] - [V] \rangle$, $\mathrm{Ker}(\partial_2) = 0 = \mathrm{Im}(0)$. Ainsi $H_2 = 0$. De plus, $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}^2 = \langle c, a - b + c \rangle$ et $\mathrm{Im}(\partial_2) = 2c$ d'où $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est le premier exemple de groupe d'homologie qui n'est pas un groupe libre. D'ailleurs, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \Pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

4.6.1.3 Complexes simpliciaux

On généralise les Δ-complexes en ne prenant plus, plus que des simplexes standards.

Définition. ***(Complexe simpliciel)***

Un *complexe simpliciel* K de $\mathbb{R}^N$ est une collection de simplexes dans $\mathbb{R}^N$ tel que toute face de K est aussi dans K et l'intersection de deux simplexes est une face de chacun d'eux.

Propriété. ***(Lien Δ-complexe et complexe simplicial)***

Tout Δ-complexe est en particulier un complexe simplicial. Réciproquement, tout complexe simplicial est homéomorphe à un Δ-complexe.

▷ Il s'agit de trianguler des polygones, tétraédriser des polyèdres, etc. On utilise ensuite que tous les convexes compacts sont homéomorphes dans $\mathbb{R}^N$. ■

Définition. ***(Structure de complexe sur un complexe simpliciel)***

Soit X un espace topologique et K un complexe simpliciel. Une structure de K-complexe sur X est la donnée d'application $\Delta \longrightarrow X$, $\Delta \in K$ injectives. Pour tout $x \in X$, il existe $\Delta \in K$ tel que x est dans l'image de Δ.

4.6.2 Homologie singulière

On définit $C_n(X)$, le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par toutes les applications continues $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$.

On définit la différentielle ∂ de la même façon. On peut alors se restreindre aux applications telles que $\sigma_{|\mathring{\Delta}_n}$ soit injective.

Théorème

L'application évidente

$$(C^{\Delta}(X), \partial) \longrightarrow (C(X), \partial)$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce théorème, dont l'application calculatoire est éminemment intéressante, ne connaît pas de preuve élémentaire.

Propriété. ***(Identification des groupes d'homologie)***

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, elle induit une application continue $(C(X), \partial) \longrightarrow (C(Y),\partial)$ et de $H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$.
Si f est un homéomorphisme, les groupes d'homologie d'ordre n sont de plus isomorphes.

Voilà la raison pour laquelle on travaille sur des complexes de chaîne (et non sur des espaces vectoriels tous simples).

Propriété. ***(Homotopie et homologie)***

Si $f \simeq g$ sont homotopes, alors elles induisent la même application en homologie.

⊛ *(Idée de la preuve.)* Si H est une homotopie entre f et g et $\Sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ est un n-simplexe dans X, je construis une homotopie entre $f\sigma$ et $g\sigma$ en montrant par exemple que, dans $H_1(Y)$, $[f(e_1)] = [g(e_1)]$ grâce à la diagonale entre la première extrémité de $f(e_1)$ et la dernière extrémité de $g(e_1)$. ■

La théorie de l'homologie (singulière) capture en particulier l'essence de la théorie de l'homotopie.

Corollaire

Si $\sigma, \sigma' : \Delta_n \longrightarrow X$ sont homotopes, alors $[\sigma\Delta_n]$ et $[\sigma'\Delta_n]$ sont égales dans $H_n(X)$.

Proposition

Si $X = Y \coprod Z$, $H_n(X) = H_n(Y) \oplus H_n(Z)$.

Proposition

Si X est connexe par arcs, $H_0(X) = \mathbb{Z}$.
En général, si X est localement par arcs, $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{nombre de composantes connexes par arcs de } X}$.

▷ On a $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) = \mathbb{Z}[X] \xrightarrow{0}$ .... Si U et V sont des 0-simplexes dans X, $[U] = [V]$ si et seulement si il existe un 1-simplexe d'extrémités U,V, soit, U et V sont dans la même composante connexe. ■

Théorème. ***(Homologie d'un espace connexe par arcs)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé, X connexe par arcs. Alors l'application qui à une boucle basée en x_0 associe l'image du 1-simplexe associé dans $H_1(X)$, est un morphisme de groupes qui induit un isomorphisme $\Pi_1(X,x_0)^{ab} \simeq H_1(X)$.
Autrement dit, le premier groupe d'homologie d'un espace connexe par arcs est l'abélianisé de son groupe fondamental. Autrement dit, dans ce cas particulier, l'homologie voit la partie abélienne du groupe fondamental.

⊛ *(Idée de la preuve.)* Dans l'abélianisé, la conjugaison n'agit plus. Plus précisément : on vérifie d'abord que, pour $\alpha, \beta \in \Pi_1(X,x_0)$, $[\alpha] + [\beta] = [\alpha\beta]$ dans $H_1(X)$. Ensuite, soit $\sum n_i\sigma_i \in C_1(X)$ un cycle. On peut supposer que $n_i = 1$ quitte à changer l'orientation sur ces 1-simplexes. Maintenant, de deux choses l'une : on choisit un chemin de x_0 à un des sommets de chaque cycle, et on peut les interpréter comme les éléments du Π_1 en tant que $\sum a_i$ où a_i l'image de $\Pi\sigma_i$ est un vrai cycle ; de plus, si $[h] = 0$ dans H_1, $h \in \Pi(X,x_0)$. Il faut le vérifier ensuite pour une somme de 2-simplexes, qui s'écrira à la fin comme un produit de commutateurs. ■

Chapitre 5

Exercices

Difficulté des exercices :

- ● ○ ○ ○ ○ Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- ● ● ○ ○ ○ Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- ● ● ● ○ ○ Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- ● ● ● ● ○ Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- ● ● ● ● ● La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.

Appendice

Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition

Table des figures

1.6.1 *Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière.* — 17

2.1.1 *Distance de l'origine à la sphère unité.* — 24
2.1.2 *Distance de la fourche à un point de la bissectrice.* — 25
2.3.1 *Invariance de la limite par permutation.* — 29

3.2.1 *Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle.* — 62
3.2.2 *Espace projectif de dimension* 1. — 64
3.2.3 *Espace projectif de dimension* 2. — 64
3.2.4 *Vue de* $\mathbb{P}^2$. — 65
3.3.1 *Quotient d'un disque par sa frontière sphérique.* — 67
3.3.2 *Un ruban de Möbius dans notre monde.* — 69
3.3.3 *Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes.* — 69
3.3.4 *Construction pas à pas du cône d'un espace* X. — 70
3.3.5 *Construction pas à pas de la suspension d'un espace* X. — 72
3.3.6 *Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule.* — 73
3.3.7 *Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.* — 74
3.3.8 *Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle.* — 76
3.3.9 *Bouquet à trois* fleurs. — 76
3.3.10 *Bouquet à cinq cercles.* — 77
3.3.11 *Bouquet à quatre sphères.* — 77
3.4.1 *La suspension du segment unité, non séparée.* — 78
3.4.2 *Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes.* — 96
3.4.3 *Le sinus fermé du topologue.* — 102
3.4.4 *Le cercle polonais.* — 102

4.3.1 *Deux applications homotopes.* — 125
4.3.2 *Illustration de la notion de rétraction.* — 131
4.3.3 *Propriété d'extension des homotopies.* — 131
4.3.4 *La* projection radiale *du gobelet plein sur le gobelet.* — 133
4.3.5 *Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne.* — 133
4.4.1 *Revêtement canonique du cercle.* — 144

4.5.1 *émonstration du théorème de Van Kampen, version faible. —* 148
4.5.2 *Applications du théorème de Van Kampen. —* 153
4.6.1 *Exemples de Δ-complexes classiques. —* 163
4.6.2 *Différentielle simpliciale sur trois branches. —* 165
4.6.3 *Différentielle simpliciale sur le pentagone. —* 165
4.6.4 *Différentielle simpliciale sur le triangle. —* 166

Liste des tableaux

4.1 *Récapitulatif sur les groupes topologiques. —* 117