MEMENTO GÉNÉRAL : NIVEAU B

Texte Coriaces

ENSEMBLES

- *(Théorème de Cantor-Bernstein)* Deux injections en sens contraires établissent l'équipotence. La preuve est difficile.
- Le **théorème de Cantor** donne toujours, au sens du cardinal, $E < 2^E$. Conséquence : la classe de tous les ensembles est impropre (**paradoxe de Russell**).
- Une réunion dénombrable de puissances du continu a la puissance du continu au plus. Pareillement, une réunion sur une puissance du continu d'ensembles dénombrables a, au plus, la puissance du continu. Plus généralement, si I s'injecte dans E et les E_i s'injectent dans E, alors leur réunion s'injecte dans E.
- $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap Im(f)$. f est donc surjective ssi le membre de gauche égale B.
- $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$. On montre que f est injective en seul cas d'égalité.
- Si $g \circ f$ est injective, f est injective. Généralement, une fonction est **injective** si et seulement si elle est **inversible à gauche**.
- Si $f \circ g$ est surjective, f est surjective. Généralement, une fonction est **surjective** si et seulement si elle est **inversible à droite**.
- *(Formule du crible de Poincaré)* Pour des ensembles finis,
$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right).$$
Ceci se démontre en développant l'identiquement nulle $\left(1 - \mathbb{1}_{A_1}\right) \dots \left(1 - \mathbb{1}_{A_n}\right)$, ou, moins aisément, par récurrence.
- À partir d'un **recouvrement croissant** d'un ensemble, on peut former un partage en en prenant les « anneaux » successifs.
- La **fonction de couplage de Cantor**, qui lie $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$, a pour expression : $(x, y) \mapsto \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + y$. Sa bijection réciproque est $z \mapsto \left(\frac{w(w+3)}{2} - z, z - \frac{w(w+1)}{2}\right)$ où $w = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2} \right\rfloor$. Le théorème de Fueter-Pólya énonce que ce polynôme et son symétrique en sont les deux seules bijections quadratiques ; le résultat sans restriction de degré n'est que conjecturé, et pour les dimensions supérieures, on utilise le polynôme : $P(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \binom{X_1 + X_2 + 1}{2} + \dots + \binom{X_1 + \dots + X_n + n - 1}{n}$.

CALCULS ALGÉBRIQUES

- Par récurrence simple sur n, on obtient : $\forall k \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < k^n$.
- $\sum_{k=p}^n a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}$ (en haut, « premier terme moins premier terme négligé »).
- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$.
- L'identité de Vandermonde résulte d'une preuve combinatoire immédiate : $\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$.

- *(Formule d'inversion de Pascal)* La transformation binomiale est « involutive ». Ceci s'écrit, pour des nombres $a_0, \dots, a_n$:
$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \right).$$
- *(Nombres de Catalan)* Les nombres de Catalan sont donnés par la relation de récurrence forte : $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ et l'on en déduit : $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (il est donc pair). Ils dénombrent les **mots de Dyck**, les parenthésages en milieu non associatif, les triangulations du polygone, les chemins sous-diagonaux monotones dans le carré. Pour montrer leur expression, on utilise leur série génératrice.
- Toute famille sommable est à support dénombrable.
- On rappelle que pour des (u_n) intégrables dont la série converge simplement vers une somme continue par morceaux, si $\sum \int |u_n|$ converge, alors la somme est intégrable et on peut écrire l'interversion.
- Le **déterminant de Vandermonde** $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ vaut $\prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$.
- On montre : l'**inégalité de Young** ainsi que l'**inégalité arithmético-géométrique** par concavité de $\ln$, l'**inégalité de Hölder** par convexité de la fonction puissance (en prenant pour poids les b_i^q et pour vecteurs les $a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$) et l'**inégalité de Minkowski** s'en déduit, qui établit que les normes p en dimension quelconque sont bien des normes.
- L'ensemble des **racines d'un complexe** est le produit de l'une d'elles par le groupe des racines de l'unité.
- Pour f à valeurs réelles, $\frac{|f|+f}{2}$ et $\frac{|f|-f}{2}$ sont ses **parties positive et négative** (elles sont uniques, positives et leur différence fait la fonction).
- Si f est continue et $f(a+b-t) = f(t)$, alors $\int_a^b t f(t) \mathrm{d}t = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t$.
- Pour intégrer une fraction rationnelle, lorsqu'on a un dénominateur de degré 2 irréductible, on peut chercher la forme de l'arc tangente d'une fonction affine.
- Les **règles de Bioche** permettent d'intégrer les fractions en fonctions trigonométriques circulaires. Si, en comptant le terme différentiel, l'expression est invariante de x en $-x$, on choisit cos ; de x en $\pi - x$, sin et de x en $x + \pi$, tan.
- i et son opposé sont les seuls complexes qui aient pour inverse leur opposé. Servez-vous en !
- On a : $ch(x) = \cos(ix)$ et $sh(x) = -i\sin(ix)$, ce qui rappelle les formules d'Euler en cas d'oubli bizarre.
- En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour x convenant, on a les **formules de l'arc moitié** :
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$
- Le groupe alterné est l'unique sous-groupe d'indice 2 du groupe symétrique. Remarquer que, conjuguer un cycle, c'est prendre le cycle des images.

ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS ET POLYNÔMES

- Le terme général de la **suite de Fibonacci** s'écrit $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$, où le premier est le **nombre d'or** et la seconde racine son conjugué.
- Un entier naturel non premier admet un diviseur strict inférieur à sa racine carrée.
- *(Lemme de la formule de Möbius pour l'indicatrice d'Euler)* Pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Pour le montrer, on partitionne les formes irréductibles des n rationnels inférieurs à 1 non nuls ayant n pour dénominateur.
- Le **théorème chinois** est une équivalence. Pour la réciproque, le plus petit multiple commun des cardinaux est seulement un zéro du groupe produit, car la formule du complément l'infériorise strictement au produit des cardinaux.
- Pour réduire des puissances imbriquées, on monte puis on redescend.
- *(Formule de Legendre)* $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n - somme\_des\_chiffres\_en\_base\_p\_de(n)}{p-1}$.
- $X^4 + 1$ est bien réductible dans $\mathbb{R}$.
- *(Approximation diophantienne)* Pour tout réel x, il existe un rationnel (p, q) tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q}$.
- Un polynôme est forcément **régulier** dans un espace de fonctions continues sur un intervalle quelconque.
- Les **polynômes divisibles par leur dérivé** dans $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $a(X-b)^n$.
- Étude des **suites de polynômes orthogonaux** (expression des degré, racines, etc.) : polynômes de Legendre, polynômes de Tchebychev, polynômes d'Hermite, polynômes de Laguerre, polynômes de Jacobi, etc. Les polynômes de Lagrange ne sont pas orthogonaux !
- Le **théorème fondamental de l'algèbre** énonce que le corps des complexes est algébriquement clos. On n'en connaît que des démonstrations analytiques.
- *(Théorème des deux carrés de Fermat)* Tout polynôme partout positif est **somme de deux carrés**. Cependant, un entier naturel est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k + 3$ est de valuation paire ; de plus il y en a une infinité.
- $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}}$ est libre ; plus élémentairement, $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{x \in \mathbb{C}}$ est libre.

ALGÈBRE GÉNÉRALE

- La puissance d'un **nombre algébrique** est algébrique. En effet, un complexe est algébrique si et seulement s'il est valeur propre d'une matrice de $M(Q)$.
- Dans tout magma associatif fini, il existe un idempotent.
- *(Axiomes faibles du groupe)* Tout magma associatif unifère à gauche dont tous les éléments ont un inverse à gauche est un groupe.
- Les **sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où d divise n. Pour tout diviseur de n, il en existe un unique de cet ordre. Ces sous-groupes sont tous **cycliques**. On aurait aussi pu dire que les sous-groupes d'un groupe monogène sont monogènes.
- Le produit de groupes cycliques est cyclique, si et seulement si, leurs ordres sont **premiers entre eux**. Dans ce cas, les générateurs du groupe produit sont exactement les produits de générateurs.

- L'ordre d'un élément d'un produit cartésien égale le **plus petit commun multiple** des ordres des composantes. Pour deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$, celui-ci est le générateur naturel minimal de leur intersection.
- Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique (d'après le théorème de Lagrange).
- Pour tout élément a d'un groupe qui soit d'ordre n, l'ordre de a^k est $\frac{n}{k \wedge n}$.
- *(Théorème de Lagrange)* L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce sous-groupe. C'est la traduction de ce que les classes à gauche modulo ce sous-groupe lui sont toutes équipotentes.
- *(Théorème de Cayley)* Tout groupe est isomorphe à un (sous-groupe d'un) groupe de permutations. C'est une traduction de ce que les translations à gauche opèrent fidèlement.
- L'action par conjugaison, dont on note T une transversale (famille d'éléments dont les orbites partitionnent G) donne la **formule des classes** pour un groupe fini :
$$\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}\big(Z(G)\big) + \sum_{x \in T,\ x \notin Z(G)} \frac{\operatorname{card}(G)}{\operatorname{card}(Z_x)}$$
- L'image d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un anneau.
- Tout anneau euclidien est principal.
- Tout anneau intègre fini est un corps. (De même si l'anneau intègre n'a qu'un nombre fini d'idéaux.)
- Toute algèbre intègre **de dimension finie** est un corps gauche.
- Un élément régulier à gauche dans une algèbre de dimension finie est inversible bilatère.
- Tout morphisme de corps est injectif.
- Tout corps fini a pour cardinal la **puissance d'un nombre premier**, ce qui découle du passage au quotient de l'**unique homomorphisme partant de** $\mathbb{Z}$; s'il est de cardinal premier, il est isomorphe à l'anneau modulaire correspondant. Dans tous les cas, tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif est **cyclique** : il s'agit d'abord de montrer que, pour tous éléments qui commutent d'ordres premiers entre eux, leur produit est d'ordre le produit de leurs ordres.
- *(Théorème de Wedderburn)* Tout corps (gauche) fini est commutatif.

Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire

- *(Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan)* Une norme est euclidienne, si et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- Les identités de **polarisation** permettent d'extraire un produit scalaire d'une norme si elle est euclidienne.
- L'ensemble des endomorphismes stabilisant un sous-espace donné est une **sous-algèbre**.
- Si p est un projecteur, $id - p$ également et $2p - id$ est une symétrie.
- Si s est une symétrie, on en déduit que $\frac{1}{2}(id \pm s)$ sont deux projecteurs.
- *(Composition des déterminants)* $\det_{e'}(u_i) = \det_{e'}(e)\det_{e}(u_i)$.
- Une forme multilinéaire est alternée, si et seulement si, elle est antisymétrique.

- *(Écriture en composante des formes n-linéaires)* Pour simplifier, le départ est une puissance cartésienne. Pour des $x_1, \dots, x_k$, si les coordonnées de x_j sont les $x_{1j}, \dots, x_{nj}$, alors :
$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j j} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$
On en déduit la formule de Leibniz pour le déterminant et la dimension de Λ_k.
- *(Existence et unicité du déterminant)* Étant donné une base d'un espace de dimension finie, il existe une unique forme n-linéaire alternée dont l'image de cette base est unitaire. De plus, toute autre lui est proportionnelle.
- Si G est un sous-groupe fini de $GL(E)$, $\dim(E) < \infty$,
$$\dim\left(\bigcap_{g\in G} \mathrm{Ker}\,(g - id)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g).$$
- Soient f, g deux morphismes partant d'une dimension finie. Alors le rang vérifie les inégalités triangulaires. Si maintenant tout est de dimension finie, on a l'**inégalité de Sylvester** $rg(f) + rg(g) - \dim(E) \leq rg(f \circ g)$. De plus, $rg(f \circ g)$ est inférieur aux rangs de f et de g toujours.
- Le **théorème des noyaux itérés** définit l'indice d'un endomorphisme.
- La symétrie en dimension finie parallèlement à G a pour déterminant $(-1)^{\dim(G)}$.
- La distance d'un vecteur x à un hyperplan de normale n se calcule tout simplement : c'est $\frac{x.n}{||n||}$ (comme dans le plan !).
- L'**égalité de Parseval-Bessel** qui prolonge l'inégalité de Bessel du cas fini $\sum_{k=0}^{+\infty}(e_k|x)^2 = \|x\|^2$ est vérifiée si et seulement si x est adhérent au sous-espace qu'engendre la suite orthonormale (e_k). Ainsi, si elle est totale, il y a égalité.
- La quantité $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ceci est aux fondements de la théorie de Fourier.
- Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique. De même pour les symétries. Une projection p est orthogonale, si et seulement si $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout x dans l'espace. (Pour le montrer, faire appel à ses amis Cauchy et Schwarz.)
- Une **réflexion** est une symétrie par rapport à un hyperplan. D'après ce qui précède, aucune réflexion n'est dans le groupe spécial linéaire.
- Si (e_i) est une base, on fait correspondre une unique **base duale**, base du dual, en imposant la condition pour tous i, j que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

Topologie matricielle

- L'application qui à une matrice associe son **polynôme caractéristique** est continue ; celle qui associe le polynôme minimal ne l'est pas en général. Pour le premier point, on choisit la norme sur $\mathbb{K}_n$: maximum des évaluations absolues en $n+1$ scalaires distincts déterminés. Dans ce cas, la convergence d'une suite de polynômes équivaut à la convergence simple en ces scalaires.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais $GL_n(\mathbb{R})$ a pour composantes connexes les images réciproques par le déterminant de celles de $\mathbb{R}$.
- Les **matrices diagonalisables** ont pour adhérence les **matrices trigonalisables**, et pour intérieur celles de polynôme caractéristique **scindé à racines simples**. On remarque que la distance d'une valeur propre d'une limite de suite de matrices au spectre d'un terme de la suite tend vers 0.
- On peut établir la densité des diagonalisables complexes en remarquant que, tout matrice étant trigonalisable, en ajoutant $\frac{i}{p}$ aux termes diagonaux, à partir d'un certain rang, ils sont deux à deux distincts.
- Par fermeture, l'**exponentielle matricielle** est polynomiale, ce polynôme dépendant de la matrice. Cependant, le coefficient de X^n n'est pas nécessairement identifiable au développement en série entière (et non !).

Matrices

- L'ensemble des matrices diagonales forme une sous-algèbre.
- Le produit de matrices symétriques est symétrique en seul cas de commutation.
- *(Formule de multiplication des matrices élémentaires)* $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
- *(Théorème général du changement de base)*
$$Mat_{e',f'}(u) = \left(P_f^{f'}\right)^{-1} \times Mat_{e,f}(u) \times P_e^{e'}.$$
- Les puissances d'une matrice s'obtiennent systématiquement par **division euclidienne** dès que l'on possède un polynôme quelconque de l'idéal annulateur.
- *(Théorème d'Hadamard)* Toute matrice à diagonale dominante est inversible.
- Pour déterminer une **valeur propre de module maximal**. La trace d'une matrice est la somme des valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités. En passant à la puissance, $Tr(A^k) \sim m(\lambda)\lambda^k$ où λ est la valeur de plus grand module. On a donc : $\lambda = \lim_{n\infty} \frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)}$.
- Des matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables.
- Pour toutes matrices, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Une famille d'endomorphismes est **simultanément diagonalisable** si et seulement s'ils commutent deux à deux. Ceci se démontre par récurrence forte en décomposant.
- Un endomorphisme est **trigonalisable**, si et seulement s'il est annulé par un scindé. Si c'est le cas, le produit des $u - \beta_i id$ est nul et l'un des facteurs est non inversible. Son image est donc dans un hyperplan. L'endomorphisme induit est donc annulé par un scindé, et par hypothèse de récurrence, trigonalisable. On complète la base.
- *(Réduction de Jordan)* Un endomorphisme de polynôme minimal scindé se réduit en matrices diagonales par blocs de Jordan, c'est-à-dire des matrices presque scalaires, la diagonale juste au-dessus étant composée toute de 1. Ce résultat est précédé par la décomposition de Dunford, plus faible. De la décomposition de Frobenius, on déduit la description des classes de similitude matricielle.
- Un endomorphisme est **nilpotent** si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre zéro.

- *(Matrices compagnons)* Un polynôme unitaire avec les notations habituelles est caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.
- *(Décomposition QR)* Toute matrice inversible se décompose comme le produit d'une orthogonale par une triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux > 0 : les inverses des normes du vecteur colonne correspondant dans la première. C'est simplement l'algorithme d'ortho-normalisation de **Gram-Schmidt** ; le théorème sans la dernière hypothèse est encore vrai pour une matrice quelconque par densité. C'est similaire dans ce qui suit.
- *(Lemme de la racine carrée, décomposition polaire)* Pour tout endomorphisme positif d'un espace euclidien, il existe un endomorphisme symétrique, unique si on lui impose un spectre positif, dont il est le carré. On en déduit que toute matrice inversible s'exprime comme le produit d'une orthogonale par une symétrique à spectre positif, et que cette décomposition est unique.
- Si l'on a une base orthonormale, une autre base est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale.
- Une matrice réelle S est **(définie) positive** si et seulement si elle est symétrique et que pour tout vecteur colonne non nul, ${}^tXSX$ est (strictement) positive. Caractérisation : une matrice est (définie) positive si et seulement si elle est symétrique et que son spectre réel est (strictement) positif.
- Matrices d'opérations élémentaires : une matrice de **permutation** est une orthogonale n'ayant que des 0 et des 1, et n'ayant qu'un seul 1 par ligne et par colonne ; une matrice de **transvection**, dont la famille engendre SL_n, s'écrit toujours de la forme $I_n + aE_{ij}$; une matrice de **dilatation** est comme l'identité dont un terme de la diagonale aurait été remplacé par une constante. Les multiplications à gauche par ces matrices correspondent aux opérations susdites sur les lignes.

NOMBRES RÉELS

- $\mathbb{R}$ est **archimédien** : : pour tout réel x, pour tout réel $y > 0$, il existe un entier n tel que $ny > x$. Si on suppose le contraire, l'ensemble des nx pour n entier a une borne supérieure. Rappelons que, dans un ordre partiel, **élément maximal** et maximum sont deux notions disjointes.
- Le **théorème de Bolzano-Weierstrass** se montre aisément par dichotomie, en sélectionnant, avec l'axiome du choix, un élément dans la moitié du segment qu'on prendra toujours contenant une infinité de terme.
- La suite de décimaux $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ tendant vers x établit la **densité de** $\mathbb{D}$. A fortiori, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; par suite, ces deux ensembles ne sont ni ouverts ni fermés.
- Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont monogènes ou denses dans $\mathbb{R}$. De même pour les sous-groupes du cercle unité. Un corollaire usuel : si θ est commensurable à π,

alors la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, mais s'il lui est incommensurable, alors $e^{i\mathbb{N}\theta}$ est dense dans $\mathbb{U}$. Les suites $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ sont alors denses dans $[-1,1]$.

- L'**irrationnalité de *e*** s'obtient par adjacence des sommes partielles de la série exponentielle avec elle-même additionnée du terme $\frac{1}{nn!}$. En supposant la rationalité, on multiplie la triple inégalité par la factorielle du dénominateur q, au rang q.

ANALYSE RÉELLE

- *(Démonstration des résultats de **croissances comparées**)* Pour montrer que $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0, on majore $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Les puissances s'obtiennent en exhibant des constantes telles que $\frac{\ln(x)^b}{x^a} = k\left(\frac{\ln(x^c)}{x^c}\right)^d$. L'exponentielle s'en déduit aisément.
- La réciproque d'une bijection convexe croissante est concave ; celle d'une bijection convexe décroissante est convexe.
- Une **fonction convexe** sur un intervalle est continue en tout point intérieur, car elle admet des dérivées latérales en tout point intérieur.
- *(Théorème du point fixe de Banach-Picard)* Toute suite définie par une itératrice contractante d'un intervalle dans lui-même converge, s'il en est, vers son point fixe. En effet, il en existe au plus un en appliquant la contractance à la différence de deux points fixes, et existe toujours si l'intervalle est fermé, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, modulo des limites, à $f - id$ (on rappelle qu'il faut que l'itératrice stabilise l'intervalle de définition pour définir une suite de telle manière). Enfin, la contractance écrite avec u_n et le point fixe donne par récurrence immédiate une majoration par quelque chose qui tend vers 0.
- L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est une forme définie.
- $x \mapsto x + \sin(2\pi x)$ est un exemple de fonction croissante sur $\mathbb{N}$ mais non monotone (de quoi se rattraper avec brio en cas de gros lapsus à l'oral).
- $(n(1 + (-1)^n))$ est une suite pas convergente n'ayant qu'une valeur d'adhérence.
- *(Lemme de Fekete)* Pour $(u_n)_{n\geq 1}$ sous-additive, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
- La dérivabilité entraîne la **pseudo-dérivabilité**, mais la réciproque est fausse, la fonction peut même n'être pas continue.
- *(Théorème des accroissements finis généralisé)* Si f et g vérifient les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a,b]$, il existe un point intérieur c tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.
- *(Règle de l'Hospital)* De plus, si $f(a) = g(a) = 0$ et $l = \lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$ existe, $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = l$.
- Les **intégrales de Wallis** de la puissance du sinus entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont reliées par récurrence : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On en déduit : $I_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p} p\,!^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} p\,!^2}{(2p+1)!}$. Puisque cette suite d'intégrales décroit et que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, on peut encadrer son carré et obtenir pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- On en déduit la **formule de Stirling**, en posant $v_n = \frac{e^n}{n^n} n!$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$. Il faut vérifier que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire $\ln w_{n+1} - \ln w_n$.

- L'**intégrale de Dirichlet** vaut $\frac{\pi}{2}$. Le lemme de Lebesgue en partie imaginaire appliqué à $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, C^1, fait apparaître l'intégrale constante $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t$. Il faut bien sûr avoir déjà montré la convergence du sinus cardinal : pour la semi-convergente, non nécessaire, on étudie l'intégrale entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$.
- La valeur de l'**intégrale de Gauss** ($\sqrt{\pi}$ sur la droite réelle) s'obtient en remarquant que les fonctions $x \mapsto -\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ ont des dérivées égales, en posant $u = tx$.
- *(Théorème de Heine)* Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue. On rappelle que le caractère lipschitzien entraîne l'uniforme continuité, qui entraîne la continuité, sur n'importe quel intervalle.
- *(Théorème de Darboux)* Une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, autrement dit elle n'a pas de discontinuité de deuxième espèce. Pour le démontrer, on fait appel à la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$, c fixé entre...
- *(Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)* Une fonction d'un espace vectoriel dans un autre est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites dont la différence tend vers 0, la différence des suites images tend vers 0.
- Si f est uniformément continue, alors $f(x) \leq a|x| + b$ où $b = |f(0)| + 1$ et a est l'inverse de la valeur maximale de η associée à $\epsilon = 1$.
- Le **théorème d'approximation de Weierstrass** se démontre facilement à l'aide des **polynômes de Bernstein** qui s'expriment $B_k^n = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. Le polynôme associé à f s'écrit $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n$ et CVU vers f pour f continue sur [0,1]. On en fait une démonstration probabiliste constructive.

SÉRIES NUMÉRIQUES

- Les convergences usuelles sont les **intégrales de Bertrand** de la forme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ qui convergent entre 2 et l'infini si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \; et \; \beta > 1)$ et entre 0 et ½ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1 \; et \; \beta > 1)$. Les convergences sont alors absolues, de même pour les séries associées. Les **intégrales trigonométriques**, c'est-à-dire Riemann avec un sinus ou cosinus au numérateur, à partir de 1 : divergent pour $\alpha \leq 0$, convergent absolument pour $\alpha > 1$ et sont semi-convergentes sur $]0, 1]$. (Les séries associées sont dites « de Fresnel ».)
- Toute suite convergeant dans la droite réelle achevée est convergente au sens de Cesàro, de même limite. Le théorème est vrai en fait pour la quantité $\frac{\sum a_n u_n}{\sum a_n}$ où $\sum a_n$ est divergente.
- Une conséquence très importante permet d'obtenir des équivalents aux **suites récurrentes u strictement positives qui tendent vers zéro**, dont l'**itératrice** vérifie $f(x) = x - ax^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$. Dans ce cas : $u_n \sim \left(\frac{1}{a\alpha n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
- La **transformation d'Abel** est l'analogue parfait de l'intégration par parties. On en déduit le **critère** d'Abel, qui généralise les séries alternées. En particulier, si a_n, positive, décroît vers 0, $\sum a_n e^{in\theta}$ converge absolument, car $\sum e^{in\theta}$ est bornée.

- *(Règle de Raabe-Duhamel)* Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(t.g.de\ CV)$, alors $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ où $A > 0$. Il s'agit d'étudier le logarithme de la suite.
- Le **théorème de Mertens** est le même énoncé que le théorème du produit de Cauchy, mais il n'y a besoin que de la convergence absolue d'une seule série ; l'autre, peut être seulement convergente.
- L'**identité d'Euler** stipule que $\zeta(\alpha) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^\alpha}}$. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{p^\alpha}$ sur les nombres premiers converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour la preuve, on montre par récurrence la restriction de l'égalité à A_N l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers sont les N premiers premiers, en partitionnant sur la valuation p-adique du dernier de la liste. La conclusion se déduit de la sommation d'un recouvrement croissant.

Analyse vectorielle

- Les **théorèmes de Dini** affinent les théorèmes de convergence des suites de fonctions. Le **premier** établit qu'une suite croissante de fonctions continues définies sur un compact convergeant simplement vers une fonction continue converge uniformément : $\{x \mid f(x) - \epsilon < f_n(x)\}$ est une suite croissante d'ouverts dont un terme est le segment. Le **second** établit le même résultat pour une suite de fonctions croissantes continues définies sur un segment, en subdivisant pour avoir comme support $\{f(a) + \frac{i(f(b)-f(a))}{2n}\}$, avec $\frac{f(b)-f(a)}{n} < \epsilon$.
- Le **lemme de Riemann-Lebesgue** permet d'établir que, pour tout fonction continue sur un segment f, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x = 0$. C'est une conséquence du théorème d'approximation uniforme : on majore la différence entre l'intégrale sur la fonction et sur l'escalier par $(b-a)\epsilon$, puis on établit que l'intégrale de l'escalier tend vers 0.
- La différentielle du déterminant s'écrit : $d\det_A(H) = Tr(\mathrm{Com}(A)^T H)$. On utilise la densité du groupe linéaire. Aussi $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$, si A, C commutent.
- *(Règle de la chaîne)* De façon générale, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont définies sur des ouverts, alors avec les notations usuelles des composantes,
$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \qquad \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$
- *(Théorème des fonctions implicites)* Si E est de dimension p, si F, G sont de dimension q, et f est définie sur un ouvert de $E \times F$ à valeurs dans G, si f est C^k, s'annule en un couple et que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ est un isomorphisme de F sur G, alors il existe des voisinages ouverts V de a et W de b tels que $\forall x \in V \quad \exists!\, y_x \in W \quad f(x, y_x) = 0$ et la fonction y est C^k sur V.

Topologie

- Une norme composée à droite par une application linéaire injective est encore une norme.

- On définit la **norme subordonnée** sur l'espace des applications linéaires continues : $|||u||| = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf_{\forall x \in E\ \|u(x)\| \leq k\|x\|} k$. Elle dépend donc à la fois de la norme de départ et de celle d'arrivée. Dans ce cas, on a d'une part $\|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$ et d'autre part $|||u \circ v||| \leq |||u|||\ |||v|||$.
- Pour montrer l'**équivalence des normes en dimension finie sur** $\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$, on remarque que la norme admet un minimum sur la sphère unité de la norme infinie et l'on normalise.
- *(Théorème de Riesz)* Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte. Il s'agit de remarquer que la **distance à un fermé en dimension finie** est toujours atteinte : c'est en fait une distance à un compact. On a donc un vecteur unitaire donc la distance à F est unitaire. Il suffit alors de construire une suite qui n'est pas de Cauchy par récurrence sur le sous-espace vectoriel engendré par les premiers termes.
- L'**adhérence** est la réunion des **points isolés** et des **points d'accumulation**. Un point isolé est son propre voisinage, il appartient à la partie ; les adhérents qui n'appartiennent pas à la partie accumulent donc forcément. Un voisinage d'un point d'accumulation rencontre la partie toujours en au moins deux points, ou, de façon équivalente dans les métrisables, une infinité de points. Plus généralement, la topologie d'un espace où tous les points sont isolés est dite **discrète**.
- L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points qui lui sont à une distance nulle.
- La **frontière** d'une partie A égale celle de $\complement_E A$; c'est même $\bar{A} \cap \overline{\complement_E A}$. Enfin, un espace est toujours partitionné par l'intérieur de cette partie, sa frontière, et le complémentaire de son adhérence $\complement_E \bar{A}$.
- L'intérieur d'un **produit** est le produit des intérieurs, de même pour l'adhérence. La frontière de $A \times B$ est $\left(\bar{A} \times \mathrm{Fr}(B)\right) \cup (\mathrm{Fr}(A) \times \bar{B})$.
- Une **application linéaire** est **continue** si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité, ou encore si et seulement si l'image réciproque de la sphère unité est fermée.
- *(Prolongement par continuité dense)* Une application continue en tout point d'une partie dense d'un espace et admettant en tout point de l'espace une limite finie admet un prolongement continu en tout point.
- L'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image de l'espace.
- Une **forme linéaire est continue** si et seulement si son noyau est fermé.
- Un **hyperplan** est fermé ou dense.
- Une **bijection continue sur un compact** est un **homéomorphisme**. Pour le montrer, on utilise la caractérisation par images réciproques de fermés.
- La **distance à un compact** ou entre deux compacts est toujours atteinte. De même, la **distance entre un compact et un fermé** est atteinte.
- Un espace est connexe, si les seuls ouverts fermés sont triviaux. **Connexité par arcs** entraîne **connexité**, mais la réciproque est fausse.
- Le **théorème de compacts emboîtés** se montre aisément ; le sens ensembliste s'établit en remarquant que Bolzano-Weierstrass donne une sous-suite à valeurs dans

le premier compact qui converge. Pour tout terme de la suite emboîtée, la sous-suite est à valeurs dans ce terme, qui est fermé.

- *(Théorème de Baire)* Une conséquence de ce qui précède : en dimension finie, une intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.

GÉOMÉTRIE

- On peut fournir une démonstration du théorème de Pythagore avec la statique des fluides. Pour cela, considérer un aquarium prismatique à base triangle rectangle.
- Le **théorème d'Al-Kashi** établit que, dans tout triangle, on a à l'instar du triangle rectangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc\cos(\widehat{b,c})$.
- Parallèlement, la **loi des sinus** montre que, dans un triangle ABC, nécessairement $\frac{BC}{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{AC}{\sin(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = \frac{AB}{\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$.
- *(Droites remarquables du triangle)* Dans un triangle, les médiatrices concourent au centre du cercle circonscrit O ; les médianes concourent à l'isobarycentre G ; les hauteurs concourent en l'orthocentre H ; les bissectrices au centre du cercle inscrit. Les points O, G, H sont alignés sur ce qu'on appelle la **droite d'Euler**.
- *(Théorème de l'angle au centre)* Dans un cercle, un angle au centre a pour mesure le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.
- *(Théorème de Thalès allemand)* Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Réciproquement, un triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont l'hypoténuse est le diamètre.
- L'**angle entre deux tangentes** en des points d'un cercle égale l'ouverture entre ces deux points, ce qu'on utilise en physique (cabestan, ressort circulaire, etc.)
- *(Caractéristiques de l'ellipse)* Une ellipse vérifie l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les constantes étant les demi-axes. La distance du centre de l'ellipse à l'un des foyers vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et l'excentricité vaut donc $e = \frac{c}{a}$. Le paramétrage de l'ellipse consiste en deux fonctions affines de la variable cosinusoïdale et sinusoïdale, de coefficients les demi-axes. Son équation polaire est $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$, p étant la longueur de la corde parallèle à la directrice Δ passant par un foyer F, où $\forall M \ \frac{d(M,F)}{d(M,\Delta)} = e$.
- Les géodésiques de la sphère sont les grands arcs, d'après le calcul différentiel.
- Les **solides de Platon** sont les seuls polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Utiliser la caractéristique d'Euler.
- *(Théorème de Ménélaüs, théorème de Ceva)* Soient, dans ABC, trois points D, E, F des droites $(BC), (AC)$ et (AB) différents des sommets. Ils sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$. En outre, les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes ou parallèles si et seulement si ce produit égale -1.
- *(Théorème de Carathéodory)* L'enveloppe convexe d'une partie d'un espace de dimension n est décrit comme l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n + 1$ points de A.

COMBINATOIRE

- *(Principe des tiroirs)* Si n chaussettes occupent $m < n$ tiroirs, alors au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes. On en déduit que deux personnes en Australie ont le même nombre de cheveux ; de neuf points dans un triangle d'aire A, trois déterminent un triangle d'aire inférieure à $\frac{A}{4}$; aussi, on peut disposer au maximum 14 **fous sur un échiquier** qui ne soient pas en prise.
- *(Lemme des bergers)* S'il existe une surjection $f : X \to Y$ telle que pour tout $y \in Y$, $\mathrm{card}\,(f^{-1}(\{y\}) = k$, alors $\mathrm{card}(X) = k \times \mathrm{card}(Y)$.
- *(Identité des poignées de main)* La somme des degrés des sommets d'un graphe fini non orienté est le double du nombre de ses arêtes.
- Le **problème des ménages** consiste à placer n couples hétérosexuels monogames autour d'une table sans placer personne à côté de son conjoint. Ce nombre est explicitement de $2(n!)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$.
- Le nombre de **dérangements** du groupe symétrique (permutations sans point fixe) vérifie $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$. Aussi : $d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
- *(Dénombrement des applications)* Il y a $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et $\binom{n+p-1}{p}$ applications croissantes, et c'est aussi le nombre de combinaisons avec répétitions éventuelles. D'autre part, on y dénombre $(n)_p$ injections et $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$ surjections.
- En **informatique**, il suffit de connaître, avec les **complexités** correspondantes : les algorithmes de **tri** (sélection, insertion, bulles, rapide, fusion, cocktail) et leurs propriétés, les **recherches de zéros** (balayage, dichotomie, tangentes, sécantes), le **calcul d'intégrales** (rectangles, trapèzes, point médian, Simpson, Romberg, Monte-Carlo) et les **résolutions d'équations différentielles** (Euler, Runge-Kutta). Il faut aussi savoir rechercher en langage SQL.

THÉORIE DES PROBABILITÉS

- Toute tribu infinie est indénombrable. De toute façon, il n'y a pas d'ensemble des parties dénombrable d'aucun ensemble.
- *(Théorème d'Ulam)* Il n'existe pas de probabilité diffuse, c'est-à-dire dont aucun événement n'est atome — soit qu'il ne soit pas quasi impossible, sur l'espace mesurable $\mathbb{R}$ discret : dans un tel espace, il y aura toujours un singleton de probabilité > 0. C'est un résultat de culture générale.
- Contrairement aux autres domaines des mathématiques, l'**indépendance mutuelle** implique l'indépendance deux à deux d'événements, mais la réciproque est fausse.
- Les théorèmes de **limite monotone** sont vrais dès qu'il existe un arrangement croissant de la famille dénombrable d'événements. En effet, si σ est une application injective et (u_n) converge, $(u_{\sigma(n)})$ converge vers la même limite.
- *(Lemmes de Borel-Cantelli)* Soit (A_n) une suite d'événements. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\bigcap_{k=0}^{+\infty}\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est négligeable. Si elle diverge et que les événements sont mutuellement indépendants, alors cet événement est presque sûr.

- Pour des événements $A_{,} \ldots, A_n$, et les C_k : « appartenir à au moins k de ces événements », $\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leq \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$. Ceci se démontre par récurrence forte.
- *(Inégalité d'Édith Kosmanek)* $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si ($\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) \in \{0, \frac{1}{2}\}$).
- La **loi hypergéométrique** converge vers une loi binomiale de mêmes paramètres lorsque la taille de l'urne devient infinie. Elle a en effet la même espérance, et par ailleurs, sa variance est $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.
- Les lois géométrique et exponentielle (celle-ci pour les probabilités continues) sont **sans mémoire**, à savoir que $\mathbb{P}(X > k + l\,|X > k) = \mathbb{P}(X > l)$ pour tout l positif, si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}$.
- Deux variables aléatoires non **corrélées**, c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, si Z suit une **loi de Rademacher** et X est indépendante de Z, alors X et ZX conviennent. On peut déterminer le coefficient de corrélation $\frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
- *(Paradoxe de Monty Hall)* Trois portes cachent un gain et deux pertes, et un joueur désigne une porte. Le présentateur révèle une des deux autres portes qui ne cache pas le gain. Alors le joueur a intérêt à changer son choix de départ.

MÉCANIQUE, SYSTÉMIQUE

- L'accélération en cylindrique d'un mouvement circulaire s'écrit simplement :
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}.$$
La comparaison de cette expression à la loi de la quantité de mouvement donne la troisième loi de Kepler, ainsi que la vitesse : $\sqrt{\frac{Gm_S}{r}}$. On en déduit les énergies.
- *(Loi des aires)* La vitesse aréolaire $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ est $\frac{C}{2}$ où $C = \frac{L}{m}$. Avec ces notations, l'**énergie potentielle effective** s'écrit $\mathrm{Ep}_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \mathrm{Ep} = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathrm{Ep}$.
- On appelle **première vitesse cosmique** celle du satellite géostationnaire : elle vaut 7,9 $\mathrm{km.s^{-1}}$. La **deuxième vitesse cosmique** est celle de l'état de diffusion (énergie mécanique positive) pour l'attraction gravitationnelle : elle vaut 11,2 $\mathrm{km.s^{-1}}$. La **troisième vitesse cosmique**, de même, remplace l'attraction de la Terre par celle du soleil : elle vaut 42,1 $\mathrm{km.s^{-1}}$. On en déduit les **rayons de Schwarzschild**.
- La **satellisation** à partir du sol est impossible.
- *(Théorème de Bertrand)* Les seuls mouvements à force centrale produisant une trajectoire fermée quelles que soient les conditions initiales sont newtonien (en $1/r^2$) et de Hooke (en r).
- Le champ gravitationnel vérifie les équations locales : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g} = 0$ et $\mathrm{div}\,\vec{g} = -4\pi G\rho$.
- L'**association de deux ressorts** en série est $\left(\frac{kk'}{k+k'}; l + l'\right)$; leur association en parallèle est $\left(k + k', \frac{kl+k'l'}{k+k'}\right)$.

- La **force d'inertie d'entraînement d'un mouvement circulaire non nécessairement uniforme** s'écrit : $-m\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}-\frac{m\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{OM}$, ou encore : $m\vec{\Omega}^2\overrightarrow{HM}-\frac{m\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{OM}$.
- La vitesse en sphérique s'adjoint du terme $r\sin(\theta)\dot{\phi}\overrightarrow{u_\phi}$.
- On a l'égalité différentielle : $\mathrm{d}Ep=-\delta W$.
- La puissance d'une force subie par un solide est $M_\Delta(.)\omega$.
- Le **moment cinétique** est $J_\Delta\dot{\theta}$ où le **moment d'inertie** est $J_\Delta=\sum_i m_i r_i^2$.
- *(Théorème de König-Huygens)* Soit un système de masse M, de centre de masse G et A un point à la distance d de G. Alors les moments d'inertie se transportent :
$$J_A=J_G+Md^2.$$
- *(Précession de Larmor)* Pour un électron, le champ magnétique exerce un couple sur le moment magnétique $\vec{\mu}$, donc en introduisant le **rapport gyromagnétique** γ, $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{\Gamma}=\vec{\mu}\wedge\vec{B}=-\gamma\vec{B}\wedge\vec{L}$. Il subit donc une **précession**, car le projeté du vecteur position, lui-même de norme constante, sur l'axe, est constant, à la vitesse angulaire nommée **pulsation de Larmor**, $\omega=\gamma B$. En physique classique, $\gamma=\frac{-e}{2m}$.
- *(Théorème du viriel)* Un système de moment d'inertie constant a pour énergie cinétique l'opposé de la moitié de son énergie potentielle. Autre version : si la vitesse et la force subis par un système sont bornés, $<\vec{F}.\vec{r}>=-2\mathrm{Ec}$.
- Le **moment dipolaire** est par définition $\vec{P}=q\overrightarrow{NP}$. L'approximation correspondante est celle des rayons significativement supérieurs à NP. Un champ extérieur dans lequel il est plongé induit un moment $\overrightarrow{M_O}=\vec{P}\wedge\overrightarrow{E_{ext}}$. La résultante des forces subies s'exprime $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}})$, d'où $\mathrm{Ep}=-\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}}$. De façon tout à fait analogue, les résultats se transposent à la magnétostatique, en posant le moment $\vec{M}=i\vec{S}$.
- La **force de Laplace** en induction s'exprime $\overrightarrow{f_L}=i\vec{L}\wedge\vec{B}$.
- À une onde, on associe une **vitesse de phase** $v_\varphi=\frac{\omega}{k'}$ et une **vitesse de groupe** $v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$. Leur produit est constamment égale au carré de la vitesse de la lumière dans le cas des ondes électromagnétiques.
- *(Effet Doppler)* $f_{\text{reçue}}=f_{\text{émise}}\frac{c-v_{\text{récepteur}}}{c-v_{\text{émetteur}}}$.
- La **valeur efficace** d'un signal périodique est la racine carrée de la valeur moyenne de son carré.
- La **bande passante** rassemble les pulsations dont le gain est au-dessus de **3 dB**, c'est-à-dire où la fonction de transfert est plus grande que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Au premier ordre, **pulsations de coupure** et **de cassure** sont égales.
- Si l'on modélise la **marche aléatoire** d'une particule à une dimension sur un réseau à pas de a, sautant de chaque côté à probabilités égales à pas de temps égaux τ, alors l'espérance de sa position est nulle, et sa variance au temps $n\tau$ s'écrit na^2. L'écart-type du déplacement est alors $\sqrt{Dt}$ en définissant un **coefficient de diffusion** $D=\frac{a^2}{\tau}$. Ce procédé est un cas simple de **chaîne de Markov**.

- *(Facteur de Lorentz relativiste)* Un mobile de vitesse relative donnée est associé au facteur de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Si τ est le temps propre et t le temps coordonnée, on a $\Delta t = \gamma \Delta \tau$.

ÉLECTROMAGNÉTISME

- Si son rotationnel est identiquement nul, un **champ dérive d'un potentiel**.
- En régime statique, l'**équation de Poisson** s'écrit : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.
- La **densité volumique de force électromagnétique** est $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{f_L}}{\mathrm{d}\tau} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ et la **puissance volumique** $\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}.\vec{E}$.
- Un plan infini génère de part et d'autre un champ électrique $\frac{\pm\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$.
- *(Capacité d'un condensateur)* $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, en Gaussifiant le résultat $E = \frac{U}{d}$. On rappelle que $q = Cu$.
- *(Résultats magnétostatiques fondamentaux)* Le champ magnétique créé par un **fil rectiligne** est $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$; par un **fil épais**, $\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{pour r > R} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j R}{2}\overrightarrow{u_\theta} \ \ \text{sinon} \end{cases}$, par un **solénoïde** $\vec{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{u_z}$. L'**inductance propre d'une bobine**, vérifiant $\phi = L_P i$, s'écrit $L_P = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d}$.
- Le **magnéton de Bohr**, qui joue le rôle de quantum de moment magnétique pour l'électron, vaut $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m_e} = 9{,}27.10^{-24}$ A.m^2. Il s'agit de voir que l'électron possède l'énergie cinétique minimale $\frac{1}{2}\hbar\omega$.
- Le **vecteur de Poynting** d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement s'exprime en moyenne $< \vec{\Pi} > = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}\overrightarrow{u_x}$. L'**équation locale** de Poynting exprime que les pertes d'énergie électro-magnétique sont dues à la fois à la dissipation par effet Joule et au rayonnement électromagnétique.
- Dans le **modèle de Drude**, la conductivité électrique est de $\frac{n_0 q^2 \tau}{m}$ où τ est le coefficient de frottement fluide linéaire. Cette loi d'Ohm locale est identique dans le modèle collisionnel qui fait appel aux probabilités continues.
- *(Effet Hall)* Un courant électrique traversant un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à ce dernier, de valeur $\frac{iB}{n_0 e \varepsilon}$ où ε désigne l'épaisseur du matériau.
- Le ciel est bleu.
- Le **plasma** est un milieu composé d'électrons et d'ions positifs, localement neutre, sans frottements et à chocs rares, non relativiste et peu dense. La **conductivité complexe** du plasma est $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}$. La **relation de dispersion** s'écrit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P{}^2}{c_0{}^2}$ en posant $\omega_P^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ le carré de la pulsation de coupure.

- Dans un métal conducteur ohmique, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}$. L'équation de dispersion s'écrit alors $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\omega$. Le conducteur ohmique en est un, de conductivité infinie. Les **relations de passage** s'y écrivent alors $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ et $\vec{B}(M) = \mu_0\vec{J_S}\wedge\vec{n}$, M proche.
- Les modèles discret et continu du paramagnétisme de Langevin infirment la **loi de Curie** à basses températures, mais la vérifient à hautes températures avec la constante $\frac{N\mu_0^2}{k_B}$.
- En physique quantique, l'**équation de Schrödinger** s'écrit : $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V.\psi$.
- *(Théorème de Millman)* Le potentiel d'un nœud égale le barycentre des potentiels des nœuds voisins pondérés par les admittances qui les séparent.

Optique physique et géométrique

- *(Prise en compte du retard)* On a $\underline{a}(P,t) = \underline{a}(M,t)e^{-j\frac{2\pi[MP]}{\lambda}}$.
- La **loi de Malus** à travers un polariseur d'angle α s'écrit $I' = I\cos^2(\alpha)$.
- La formule de Fresnel $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$ s'appliquent si les deux ondes proviennent de la même source, sont de même pulsation et si elles sont quasi synchrones, c'est-à-dire que le retard entre elles est inférieur au temps de cohérence, longueur temporelle du train d'ondes.
- Le **contraste** est leur rapport des moyennes géométrique et arithmétique.
- La différence de marche sur l'écran après les trous d'Young vaut $\delta = \frac{ya}{D}$.
- La compensatrice de l'**interféromètre de Michelson** permet l'absence de différence de marche supplémentaire induite par la séparatrice.
- *(Loi de la déviation dans le prisme)* L'angle de déviation est $D = i + i' - A$, car $A = r + r'$. En recherchant un minimum de déviation, on obtient l'indice optique en sa fonction, les signes prime notant les angles à la sortie du prisme comme si le rayon entrait, A étant l'angle au sommet du prisme.
- La **fonction de réseau** s'écrit $I(M) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ où ϕ est le déphasage consécutif.
- *(Formule fondamentale des réseaux)* Un réseau par transmission éclairé sous incidence i fait apparaître des pics aux angles tels que $a(\sin i - \sin\theta) = k\lambda$.

Thermodynamique, chimie

- *(Théorème de Bernoulli)* Un fluide parfait incompressible en régime stationnaire, sans chaleurs ni travaux, s'écoule du point d'altitude z_1 au point d'altitude z_2. Alors on a la relation $P_1 + \mu\frac{V_1^2}{2} + \mu g z_1 = P_2 + \mu\frac{V_2^2}{2} + \mu g z_2$.
- Des identités thermodynamiques, on tire les expressions différentielles des grandeurs thermodynamiques : $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ et $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$. On définit aussi le **coefficient de compressibilité isotherme** $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ et le **coefficient de dilatation isobare** $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Ainsi $\mathrm{d}V = \beta V\mathrm{d}T - \chi_T V\mathrm{d}P$. Ces coefficients sont dits coefficients thermoélastiques ; il y en a d'autres.

- On peut exprimer selon la **fonction de partition** l'énergie moyenne $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ et l'écart quadratique énergétique moyenne $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$.
- Le **théorème d'équirépartition de l'énergie** annonce que l'énergie moyenne d'un système à l'équilibre vaut $\frac{1}{2}k_B T$ pour chacun de ses termes quadratiques indépendants.
- Un élastique est modélisé par une chaîne de N polymères indépendants d'orientation libre, de longueurs l, soumis à une force F. Une étude statistique donne la fonction de partition du système : $Z = \left(4\pi \frac{sh(\beta F l)}{\beta F l}\right)^N$; sa longueur moyenne est $Nl\mathcal{L}(\beta F l)$, où $\mathcal{L}$ est la fonction de Langevin. On constate qu'une augmentation de la température entraîne la rétraction de l'élastique. Si l'on veut prendre en compte l'hystérésis mécanique, on écrit la loi de Hooke : $\frac{F}{S} = \sigma = E\frac{l-l_0}{l_0}$, E module d'Young.
- Lors de tout choc, il y a conservation de la quantité de mouvement ; lors d'un **choc élastique**, il y a conservation de l'énergie cinétique également. La **pression cinétique** est la moyenne temporelle des forces de pression dues aux chocs élastiques des molécules sur une paroi. Sur une paroi fixe, celle-ci reçoit deux fois la quantité de mouvement normale initiale. Pour un gaz isotrope, elle vaut $\frac{Nmv^2}{3V}$.
- *(Entropie d'une phase condensée idéale)* $\mathrm{S} = C\ln(\mathrm{T}) + \mathrm{cste}$, où C est la capacité thermique unique du système.
- Si toute **adiabatique réversible** est **isentropique**, la réciproque est fausse ; une transformation isobare pour un système à paroi mobile est forcément **monobare** ; une transformation isotherme pour un système non calorifugé est **monotherme**.
- La variation d'énergie d'une isochore est $\Delta U = Q$, la variation d'enthalpie d'une isobare ou monobare est $\Delta H = Q$.
- *(Loi de Dulong et Petit)* La capacité thermique molaire d'un métal vaut $3R$.
- La **variation d'entropie d'une transformation d'un gaz parfait** s'obtient en créant un chemin réversible pour les fonctions d'état : $\mathrm{d}S = C_\mathrm{V}\frac{\mathrm{d}T}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V}$.
- Penser aux **lois de Joule** en présence d'un gaz parfait.
- *(Théorème des moments)* $x_{vap} = \frac{v-v_l}{v_g-v_l} = \frac{h-h_l}{\Delta_{vap}h} = \frac{s-s_l}{s_g-s_l} = T\frac{s-s_l}{\Delta_{vap}h}$.
- *(Relation de Clapeyron)* Lors d'une vaporisation,
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_\mathrm{vap}h}{T(v_g-v_l)}.$$
- La résistance thermique d'un cylindre vaut $\frac{L}{\gamma S}$.
- La **loi de Stefan** donne que la puissance surfacique totale (i. e. intégrée sur toutes les valeurs possibles de pulsation) rayonnée par un **corps noir** est σT^4 où σ est la constante de Stefan-Boltzmann et vaut approximativement $5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$. Il faut utiliser la **loi statistique de Planck** : à l'équilibre thermique, la densité spectrale d'un corps noir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}.\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)-1}$. On donne : $\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$.
- *(Loi de Newton pour la convection)* $\phi = hS(T_p - T_\infty)$.