

Feuille d'exercices 2

Mathématiques discrètes

★★★★★ **Exercice 1.** Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

INDICATION On pourra utiliser l'axiome suivant : toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Logique

★★★★★ **Exercice 2** (Ex falso quodlibet). Montrer que, dans toute pièce non vide, il existe au moins une personne telle que si elle boit, alors tout le monde dans la pièce boit.

★★★★★ **Exercice 3** (Montrer une proposition logique : la table de vérité). Vérifier que, pour n'importe quelles propositions A et B , soit l'implication $A \implies B$ est vraie, soit $B \implies A$ est vraie.

★★★★★ **Exercice 4** (Raisonnement par équivalences successives). Montrer que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}} + 2}}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}}.$$

★★★★★ **Exercice 5** (Raisonnement par analyse-synthèse). Résoudre, lorsque cela a un sens, l'équation de la variable réelle : $x = \sqrt{1 - 3x}$.

★★★★★ **Exercice 6** (Raisonnement par l'absurde). Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Montrer de même que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel, ni $\sqrt[3]{2}$.

★★★★★ **Exercice 7** (Démonstration non constructive). Montrer, sans en exhiber nécessairement, qu'il existe deux nombres irrationnels $x, y > 0$ tels que x^y soit un nombre rationnel.

Polynômes

★★★★★ **Exercice 8** (Le nombre d'or φ).

1. Montrer qu'il existe un nombre φ de sorte que si $\varphi = \frac{a}{b}$ où a, b sont deux longueurs strictement positives, alors $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ et que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

INDICATION Se ramener à une équation ne faisant intervenir que la quantité

φ puis à une équation du second degré en φ .

2. Montrer que $\varphi \in [1, 5; 2]$.
3. À quoi est-égal le nombre $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ défini comme la limite (dont on admet qu'elle existe) de la suite $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

☆☆☆☆☆ **Exercice 9 (À la conquête des trinômes).** Soient x un réel, a, b, c , trois réels et on considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. À quelle condition P est-il du second degré? À quel moment cette hypothèse apparaît-elle dans le théorème fondamental? On fait cette hypothèse dès à présent.
2. Dans le cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$, comparer les deux racines distinctes de P . On dit parfois que les deux racines d'un trinôme sont conjuguées, à cause du changement de signe devant $\pm\sqrt{\Delta}$.
3. Étudier le cas $c = 0$.
4. Étudier le cas $b = 0$.
5. Étudier le cas $a = b = c$.
6. Étudier le cas $b = c = -a$.
7. En observant une symétrie sur une parabole quelconque, donner les coordonnées de son sommet en fonction de a, b, c . Retrouver cette valeur en admettant que l'unique extremum de P est au point d'annulation de sa dérivée (*théorème du point stationnaire*).

☆☆☆☆☆ **Exercice 10 (Relations de Viète du second degré).** Exprimer la somme et le produit des racines d'un trinôme du second degré de discriminant positif en fonction des coefficients de ce trinôme. Application : trouver une solution particulière dans \mathbb{R}^2 du système :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1. \end{cases}$$

☆☆☆☆☆ **Exercice 11 (Équation du troisième degré).** On considère $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Déterminer les racines réelles de P .

☆☆☆☆☆ **Exercice 12 (Équation bicarrée).** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Sommes

☆☆☆☆☆ **Exercice 13 (Le symbole sigma).** On introduit un symbole pour noter de façon plus compacte les sommes numériques. Étant donnée une suite finie de nombres réels u_1, \dots, u_n , on note la somme $S = u_1 + \dots + u_n$ de la façon suivante :

$$S = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Le symbole k est un indice, dit *muet*, car on aurait pu choisir n'importe quel autre symbole, et il n'existe pas en dehors de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Par défaut, c'est un entier qui varie entre la valeur indiquée en dessous de la somme (et on l'affecte alors par le signe $=$), ici 1, et la valeur indiquée au-dessus de la somme, ici n . On dit que l'on somme *pour* $k = 1, 2, \dots, n$ ou k *variant de* 1 à n . À chaque étape, on ajoute u_k à la valeur précédente, la somme vide étant par convention égale à 0. L'ordre dans lequel les $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont pris n'a pas d'importance, car l'addition est une opération commutative ($a + b = b + a$).

1. Que vaut $\sum_{k=1}^3 k$? Que vaut $\sum_{k=0}^3 k$?

2. Que vaut $\sum_{k=1}^3 k^2$? Que vaut $\sum_{k=0}^3 k^2$?

3. Que vaut $\sum_{k=1}^4 2^k$? Que vaut $\sum_{k=0}^4 2^k$?

4. Que vaut $\sum_{k=1}^3 1$? Que vaut $\sum_{k=0}^3 1$?

5. Soient u et v deux suites réelles. Soit n un entier naturel. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^n u_k + v_k =$

$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$? Corriger si besoin.

6. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=p}^n u_k$? Corriger si besoin.

7. Montrer que pour tout réel t , $\sum_{k=0}^n t u_k = t \sum_{k=0}^n u_k$.

☆☆☆☆ **Exercice 14 (Somme des premiers entiers).** On souhaite démontrer que pour tout entier

naturel n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = S = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Ecrire $2S = S + S$ de sorte que le premier terme ordonne les termes par ordre croissant, et le second terme, à aligner en dessous, par ordre décroissant.
2. Qu'observe-t-on pour deux nombres l'un au-dessus de l'autre ?
3. Combien cette somme a-t-elle de termes ?
4. Conclure.

☆☆☆☆ **Exercice 15 (La factorielle).** Étant donné n un entier naturel, on définit la *factorielle* de n

comme l'entier naturel $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$, autrement dit, $n! = \prod_{k=1}^n k$ où le symbole

\prod note comme le symbole Σ un produit au lieu d'une somme. On pose, par convention, $0! = 1$.

1. Que valent $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$, $6!$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.

3. Exprimer $\prod_{k=1}^n k^2$ en fonction de $n!$.
4. Que dire de l'identité : $(nm)! = n!m!$ où n, m sont des entiers naturels ?
5. Comparer 2^{n-1} , $n!$ et n^n .
6. On cherche à démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tous entiers naturels $k \leq n$.
 - (a) Rappeler la définition des coefficients binomiaux.
 - (b) Vérifier la formule pour $k = 1$ et n quelconque.
 - (c) (*Difficile*) Montrer par récurrence sur n , en utilisant la formule de Pascal, la formule des coefficients binomiaux en fonction de la factorielle.
 - (d) En déduire que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un entier.
 - (e) Retrouver la formule de symétrie des coefficients binomiaux.
 - (f) Donner une formule pour $\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Combinatoire

☆☆☆☆☆ **Exercice 16 (Question de vocabulaire).** Sachant que, contrairement aux vermilingues, les oryctéropes ne sont pas des xénarthres, étant donné trois oryctéropes et quatre vermilingues, combien peut-on former de groupes de deux couples oryctérope-xénarthre pour danser à quatre ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 17 (Compter les listes).** Combien y a-t-il de manières de mettre trois Télétubbies à la queue leu-leu ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 18 (Formule du crible de Poincaré).** Soient A, B deux ensembles finis.

1. Montrer à l'aide d'un diagramme que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
2. Que se passe-t-il lorsque A et B sont disjoints ?
3. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B)$ en toute généralité.
4. Vérifier que cette formule est vraie si $A = B$.
5. Combien y a-t-il d'entiers naturels inférieurs à 20 qui soient pairs ou multiples de 3 ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 19 (Preuve par dénombrement de la formule de Pascal).** Après avoir rappelé la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule de Pascal sans calcul, en utilisant la formule de l'exercice précédent.

INDICATION Si l'on isole un élément x d'un sac de boules, alors on peut considérer les parties à k boules ne contenant pas la boule x et les parties à k boules dont on sait qu'elles la contiennent.

Probabilités

☆☆☆☆☆ **Exercice 20 (Poker).** On joue au poker avec un jeu de 52 cartes. Une main est toujours constituée de 5 cartes.

1. Quelle chance a-t-on d'obtenir un carré ?

2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un full ?
3. Quelle chance a-t-on d'obtenir une double paire ?
4. Quelle chance a-t-on d'obtenir un brelan ?
5. Quelle chance a-t-on d'obtenir une paire ?
6. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush ?
7. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush royale ?
8. Quelle chance a-t-on d'obtenir une suite ?
9. Quelle chance a-t-on d'obtenir une couleur ?
10. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un as ?
11. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un trèfle ?
12. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins une figure ?
13. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et une figure ?
14. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et un trèfle ?
15. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou une figure ?
16. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou un trèfle ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 21 (La formule de Bayès).** Un test de détection d'une maladie rare est positif à 99 % lorsqu'un individu est atteint de cette maladie, et il est positif à 0,1 % lorsqu'il n'est pas atteint. Supposons que 0,01 % de la population soit atteint de cette maladie. Sachant être positif au test de détection, calculer la probabilité que l'on soit atteint par la maladie.

Informatique avec Python

☆☆☆☆☆ **Exercice 22 (Programmation fonctionnelle).** Écrire un programme qui, à partir de la saisie d'un rayon et d'une hauteur, calcule le volume d'un cône droit.

☆☆☆☆☆ **Exercice 23 (Une fonction booléenne).** Écrire une fonction qui affiche « PAIR » si un entier donné est pair est « IMPAIR » sinon.

☆☆☆☆☆ **Exercice 24 (Boucle itérative fixe).** Écrire une fonction qui calcule la somme des premiers entiers jusqu'à un entier donné.

☆☆☆☆☆ **Exercice 25 (Boucle itérative conditionnelle).** Écrire un programme qui calcule la plus grande puissance de 2 divisant un entier donné.

☆☆☆☆☆ **Exercice 26 (Approximation numérique).** Écrire un programme qui approxime la valeur de la constante mathématique e en fonction de n assez grand en utilisant la formule $e \approx \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$.

Vers l'analyse : les inégalités

- ☆☆☆☆☆ **Exercice 27** (Positions relatives de paraboles). Comparer les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ d'équation $y = 3x^2 + 6x + 1$ et $y = 2x^2 - 7x - 2$.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 28** (Inégalité arithmético-géométrique). Montrer que, pour tous réels a, b positifs, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 29** (Inégalité de Bernoulli (par le calcul)). Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.