Homotopie avancée

Motivation. On a deux théories homotopiques raisonnables envisageables dans Top : celle à équivalence d'homotopie près (catégorie Top$[h\text{-eq}^{-1}]$) et celle à équivalence faible d'homotopie près (catégorie Top$[fh\text{-eq}^{-1}]$). Puisqu'en général les localisées ne ressemblement pas aux catégories de départ, on a besoin d'un *modèle* de celles-là. Problème : les limites ne se comportent pas bien dans ces catégories. Par exemple, le pushout n'est pas préservé par équivalence d'homotopie : $[0,1] \cong \{*\}$ mais $\{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} \{*'\} \simeq \{*\} \not\cong S^1 \simeq \{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} [0,1]$.
Autre exemple : dans les catégories de complexes de chaînes, les noyaux ne sont pas invariants par quasi-isomorphismes : si R est un anneau, le complexe C constant en R alternant pour différentielles id_R et $0_{R\to R}$: $\dots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} \dots$ ici écrit en degrés $(1,0,-1)$, est exact donc en particulier quasi-isomorphe à 0. De même pour le complexe $C' = \Sigma^{-1}C$. Dans $Ch(R)$, $\mathrm{Ker}(0 \to 0) \simeq 0$ (ouf). Cependant, en considérant le morphisme de complexes $\varphi : C \to C'$ donné par $\varphi_{2n} = 0$ et $\varphi_{2n+1} = id_R$, c'est un quasi-isomorphisme et $\mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\varphi} D) \ni C$ n'est pas quasi-isomorphe à 0. Encore un exemple : un foncteur linéaire $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ induit un foncteur $Ch(R) \to Ch(S)$ qui en général ne préserve pas les quasi-isomorphismes et donc ne passe pas aux catégories dérivées $\mathcal{D}(R) = Ch(R)[\mathrm{qis}^{-1}]$. On peut prendre par exemple $\mathrm{Hom}(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ pour M un R-module fixé qui n'est pas projectif (puisque les foncteurs exacts préservent les quasi-isomorphismes), tel $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$.
Algèbre homologie et homotopie des espaces topologiques s'intriquent naturellemnt. Par exemple, de même que la catégorie des complexes de chaînes a assez de projectifs, *i.e.* à quasi-isomoprhisme près, tout objet est équivalent à un projectif, dans Top, à équivalence faible d'homotopie près, tout espace est équivalent à un CW-complexe. On généralise conjointement ces deux notions.

1 Catégories de modèle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition. *(Rétract catégorique)* Un morphisme $f : A \to B$ d'une catégorie est un rétract d'un morphisme $h : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "id_A"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Si les applications verticales sont l'identité, on retrouve le cas d'un rétract entre objets.
Définition. *(Catégorie de modèle)* Une catégorie de modèle (fermée) est une catégorie C munie de trois classes de flèches $\mathscr{W}$ dites *équivalences faibles* notées $\xrightarrow{\sim}$, Cof dites *cofibrations* notées $\rightarrowtail$ et Fib dites *fibrations* notées $\twoheadrightarrow$, telles que

1. C est complète et cocomplète, d'objets initiaux et terminaux $\emptyset$ et $*$ (ne dépend que de C) ;
2. *(Propriété 2 parmi 3)* Pour tout triangle commutatif, si deux flèches sont dans $\mathscr{W}$, la troisième aussi (ne dépend que de $(C,\mathscr{W})$) ;
3. un rétract d'une flèche d'une des trois classes ci-dessus est encore dans cette classe ;
4. *(Relèvements)* Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\check{f}"] & Y, \end{tikzcd}$$

   $\check{f}$ existe dès que l'une des flèches verticales est une équivalence faible ;
5. *(Axiomes de factorisation)* On dit que $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}$ sont les *cofibrations acycliques*, $\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$ les *fibrations acycliques*. Toute flèche $f : X \to Y$ de C se factorise en $X \rightarrowtail C_f \to Y$ où la flèche de droite est une fibration acyclique et en $X \to P_f \twoheadrightarrow Y$ où la flèche de gauche est une cofibration acyclique, et souvent on veut ceci de façon naturelle, *i.e.* $f \mapsto C_f, f \mapsto P_f$ foncteurs.

Cofibrations-fibrations acycliques et cofibrations acycliques-fibrations sont duales et forment ce que l'on appelle un *système de factorisation* en vertu des deux derniers axiomes.
Propriété. Un objet X est *cofibrant* si $\emptyset \to X$ est une cofibration, *fibrant* si $X \to *$ est une fibration, *bifibrant* si les deux. On peut remplacer tout objet fonctoriellement par un cofibrant $L(X)$ ou un fibrant $R(X)$ faiblement équivalent via une fibration respectivement une cofibration. Une telle équivalence est appelée *remplacement cofibrant* respectivement *remp. fibrant* ou *résolution cofibrante* respectivement *rés. fibrante*. On note C^c,C^f,C^{cf} les sous-catégories pleines de cofibrants, fibrants, bifibrants.
Exemple. L'espace de Sierpiński est non cofibrant.
Fait. Si L est cofibrant, $f : L \to Y$ une flèche, on a

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ L \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

et de même pour les fibrants.
Propriété. Le produit de deux catégories de modèles donné par $(C \times C',\mathscr{W} \times \mathscr{W}',\mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}',\mathrm{Fib} \times \mathrm{Fib}')$ est une catégorie de modèle. L'opposée d'une catégorie de modèle munie des flèches opposées est une catégorie de modèle.
Exemples.

1. Une catégorie bicomplète avec $\mathscr{W} = \mathrm{Iso}(C)$, $\mathrm{Cof} = \mathrm{Fib} = \mathrm{Mor}(C)$ est trivialement de modèle.
2. Sur Ens, (*bijections*,*injections*,*surjections*) n'est pas de modèle (à cause de $MC5$), mais (*bijections*,Ens,Ens) et (Ens,*injections*,*surjections*) le sont.
3. *(Quillen)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie, Fib les fibrations de Serre et Cof les rétracts d'applications cellulaires relatives. On remarque que tous les espaces topologiques sont fibrants.
4. *(Strøm)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences d'homotopie, Fib les fibrations et Cof les cofibrations d'image fermée. Ici les tous les espaces sont fibrants et cofibrants !
5. ΔEns munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie simpliciale, Cof les inclusions de sous-ensembles simpliciaux, Fib les fibrations de Kan. Tout ensemble simplicial est cofibrant et les fibrants sont les complexes de Kan.
6. Sur une catégorie de complexes de chaînes, la *structure projective* a pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, pour fibrations les morphismes de complexes surjectifs en chaque degré (> 0 dans $Ch_{\geqslant}(R)$) et pour cofibrations les morphismes de complexes ayant la PR par rapport aux fibrations acycliques. La *structure injective* a pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, pour cofibrations les morphismes de complexes injectifs en chaque degré (< 0) dans $Ch_{\leqslant}(R)$) et pour fibrations les morphismes de complexes ayant la PR à droite par rapport aux cofibrations acycliques.

Dans la structure projectif, les cofibrations sont les morphismes dont le conoyau est projectif en tout degré. Les cofibrants sont exactement les projectifs.
Dans la structure injective, tous les objets sont cofibrants (dissymétrie !).

Définition. Soit $\mathcal{A}$ une classe de flèches de C. f a la propriété de relèvement à droite, respectivement à gauche, et l'on note $f \in RLP(\mathcal{A})$, respectivement $LLP(\mathcal{A})$ si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\in\mathcal{A}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{respectivement} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\in\mathcal{A}"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd}$$

Propriété.
1. $f \in \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib})$.
2. $f \in \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof})$.
3. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathrm{Fib})$.
4. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathrm{Cof})$.
5. $f \in \mathscr{W} \iff f = pi$ où $i \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}, p \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$.

Corollaire.
1. Dans une catégorie de modèle deux des classes déterminent la troisième.
2. $\mathscr{W}$,Cof,Fib sont chacune stable par composition.
3. Les pushouts de cofibrations sont des cofibrations et les pullbacks de fibrations sont des fibrations.
4. Les isomorphismes sont dans l'intersection des trois classes de modèle.

1.2 Catégorie homotopie d'une catégorie de modèle

Définition. $\mathbf{Ho}(C) := C[\mathscr{W}^{-1}]$. Pour une catégorie de modèle C, une localisée est très structurée.
Lemme. Les inclusions C^c,C^f,$C^{cf} \hookrightarrow C$ induisent des équivalences de quasi-inverses induits par les remplacements cofibrants et fibrants. Il y a donc « beaucoup de cofibrants/fibrants ».
Exemples.
1. Dans Top selon Quillen, tout espace topologique est faiblement équivalent à un espace cellulaire.
2. Dans $Ch_{\geqslant 0}(R)$, tout complexe de chaînes est équivalent à un complexe concentré en un R-module projectif et de même avec injectif.

Définition. Par analogie totale avec Top :
1. Un *cylindre* de X est une factorisation de $id_X \coprod id_X : X \coprod X \to C \to X$ en une cofibration suivie d'une équivalence faible. On note $\iota_0,\iota_1 : X \to X \coprod X \to C$ semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.
2. Un *objet en chemins* est une factorisation de $\Delta_X : X \to P \to X \times X$ en une équivalence faible suivie d'une fibration. On note $p_0,p_1 : P \to X \times X \to X$ semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.

3. Une *homotopie à gauche* entre $f,g : X \to Y$ est un morphisme H faisant commuter

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, bend left=15, "i_0"] \arrow[r, tail, bend right=15, "i_1"'] \arrow[rrr, bend left=40, "f"] \arrow[rrr, bend right=40, "g"'] & X\coprod X \arrow[r, tail] & C \arrow[r, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

pour au moins un choix de cylindre C. Une *homotopie à droite* entre f,g est un morphisme K faisant commuter

$$\begin{tikzcd} & & & X \\ X \arrow[r, dashed, "K"] \arrow[urrr, bend left, "f"] \arrow[drrr, bend right, "g"'] & P \arrow[r, two heads] & X\times X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\ & & & X \end{tikzcd}$$

pour au moins un choix d'objet en chemins P (dans Top, l'homotopie est autoduale). Une *homotopie* entre f,g est la donnée d'une homotopie à gauche et d'une homotopie à droite. Équivalence d'homotopie.

Remarques. Par les axiomes, on peut toujours trouver un cylindre où de plus la deuxième flèche est acyclique et un objet un chemins où de plus la première flèche est acyclique.

Tout cylindre est faiblement équivalent au cylindre noté $X\times I$ issu de la factorisation canonique, et donc une homotopie pour $X \times I$ en induit une pour lui, mais la réciproque est fausse en général.

Lemme. Si A est cofibrant, $X \to X\coprod A$ est une cofibration. Si Y est fibrant, $X\times Y \to X$ est une fibration.

Propriétés.

1. L'homotopie à gauche, respectivement à droite est stable par postcomposition, respectivement précomposition. Elle est stable à droite, respectivement à gauche, si leur but est fibrant, respectivement cofibrant.
2. Si A est cofibrant, respectivement fibrant, l'homotopie à gauche, respectivement à droite, est une équivalence sur $\mathrm{Hom}(A,X)$, respectivement $\mathrm{Hom}(X,A)$. De plus, une fibration acyclique respectivement une cofibration acyclique entre deux fibrants respectivement cofibrants induit une bijection par postcomposition respectivement précomposition.

Corollaire. Si A est fibrant et B cofibrant, toutes les relations d'homotopie sont égales sur $\mathrm{Hom}(A,B)$. En particulier, l'homotopie est une relation d'équivalence sur C^{cf}.

Corollaire. *(Whitehead)* Un morphisme entre bifibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.

Théorème. On a :

(a) L'inclusion $C_{cf} \hookrightarrow C$ induit une équivalence catégorique $C_{cf}/\text{homotopie} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ho}(C_{cf}) \simeq \mathbf{Ho}(C)$.

(b) Des isomorphismes naturels $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(C)}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(L(X),R(Y))/\simeq$.

(c) Tout morphisme passant en isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(C)$ est une équivalence faible.

1.3 Exemples : catégories de modèle de complexes de chaînes

1.4 Catégories de modèle cofibrement engendrées

Définition. Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de morphismes dans C. Une *application $\mathcal{I}$-cellulaire relative* ou simplement *$\mathcal{I}$-cellulaire* dans C est un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ tel que $Y = \mathrm{colim} X^{(n)}$ où $X^{(0)} = X$ et $X^{(n+1)}$ est un pushout de la forme

$$\begin{tikzcd} \coprod_{k\in J_n} A_{i_k} \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{k\in J_n}\varphi_{i_k}"'] & X^{(n)} \arrow[d, "f^{(n)}"] \\ \coprod_{k\in J_n} B_{i_k} \arrow[r] & X^{(n+1)} \end{tikzcd}$$

et $f = \mathrm{colim} f^{(n)}$. Un *objet $\mathcal{I}$-cellulaire* est un objet Y tel que $0 \to Y$ est $\mathcal{I}$-cellulaire relative.

Définition. Un morphisme est *$\mathcal{I}$-injectif* ou *$\mathcal{I}$-fibrant* si $f \in RLP(\mathcal{I})$. Les *$\mathcal{I}$-cofibrations* sont $LLp(RLP(\mathcal{I})$ *i.e.* les morphismes ayant la LLP relativement aux $\mathcal{I}$-injectifs.

Définition. C catégorie et κ un ordinal. Un objet X de C est *κ-petit* ou *κ-compact* si $\mathrm{colim}_{n\subseteq\kappa}\mathrm{Hom}_C(X,Y_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X,\mathrm{colim}_{n\subseteq K} Y_i$.

Définition. Un objet est *compact* si $\mathrm{colim}_J \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X,\mathrm{colim}_J Y)$ pour toute J filtrante. Les compacts ne sont pas compacts dans Top, mais dans la catégorie des espaces cellulaires si. Les compacts de Vect sont les espaces de dimension finie. Les compacts de Mod A sont les modules de présentation finie sur A.

Définition. Une catégorie de modèle est *cofibrement engendrée* s'il l'on a deux <u>ensembles</u> de morphismes $\mathcal{I},\mathcal{J}_{ac}$ tels que $\mathscr{W}\cap \mathrm{Fib} = RLP(\mathcal{I})$, $\mathrm{Fib} = RLP(\mathcal{J}_{ac})$ et les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ respectivement $\mathcal{J}_{ac}$ sont petites par rapports aux $\mathcal{I}$-cellulaires respectivement $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaires.

Exemples. Structures de modèle projectives. Structure de Quillen. Contre-exemple : Strøm n'est pas cofibrement engendrée.

Théorème. Soient $\mathcal{C}$ bicomplète, $\mathcal{I},\mathcal{J}_{ac}$ deux ensembels de morphismes. Soit $\mathscr{W}$ une classe dans $\mathcal{C}$. Il exite une structure de modèle sur $\mathcal{C}$ cofibrement engendrée avec $\mathcal{I},\mathcal{J}_{ac}$ respectivement les cofibrations et cofibrations acycliques génératrices, et $\mathscr{W}$ sont les équivalences faibles, ceci si et seulement si :

(i) $\mathscr{W}$ satisfait 2 pour 3 et est stable par rétract ;

(ii) Les sources ds applications dans $\mathcal{I}$ sont compactes relativement aux $\mathcal{I}$-cellulaires et celles dans $\mathcal{J}_{ac}$ aux $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaires.

(iii) Les $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaires sont dans $\mathscr{W}\cap\mathcal{I} - \mathrm{Cof}$.

(iv) Les $\mathcal{I}$-injectives (fibrations acycliques) sont dans $\mathscr{W} \cap \mathcal{J}_{ac}$ – injectifs, ce dernier terme étant fibrations.

(v) L'un deux énoncés suivants est vrai : $\mathcal{I} - \mathrm{Cof} \cap \mathscr{W} \subseteq \mathcal{J}_{ac} - \mathrm{Cof},_J j_{ac}$ – injectifs $\cap \mathscr{W} \subseteq \mathcal{I}$ – injectifs.

Lemme. *(Argument du petit objet)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de morphismes dans $\mathcal{C}$ tel que les sources des éléments de $\mathbb{J}$ sont $\mathcal{W}$-compactes relativement aux $\mathcal{J}$−cellulaires. Alors il existe une factorisation fondamentale $f : X \to Y$ dans $f : X \to C_f \to Y$ où $f : X \to C_f$ est Jj-cellulaire et $C_f \to Y$ est dans $RLP(\mathcal{J})$.

Remarque. Si $f : X \to Y$ est $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaire, $f \in LLP(\mathrm{Fib})$. Si $f : X \to Y$ est $\mathcal{I}$-cellulaire, $f \in LLP$ relaivement aux $\mathcal{J}_{ac}$-injectifs.

On peut appliquer le lemme à $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}_{ac}$ pour avoir des factorisations fonctorielles de $f : X \to Y$ en :

$$X \to C_f \to Y$$

une $\mathcal{I}$−cellulaire (dans $LLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib})$ suivie d'une $RLP(\mathcal{I}_) \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$, et :

$$X \to P_f \to Y$$

une $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaire (dans $\mathscr{W} \Cap \mathrm{Cof} \subseteq \mathcal{J}_{ac} - \mathrm{Cof})$ suivie d'une $RLP(\mathcal{J}_{ac}) = \mathrm{Fib}$.

Corollaire. Si $\mathcal{C}$ est cofibrement engendrée, alors les cofibrations sont les $\mathcal{I}$-cofibrations et sont des rétracts de $\mathcal{I}$-cellulaire (par factorisation cellulaire). Les cofibrations acycliques sont les $\mathcal{J}_{ac}$-cofibrations et sont des rétracts de $\mathcal{J}_{ac}$-cellulaires.

1.5 Foncteurs de Quillen

Définition. Un *foncteur de Quillen à gauche* est un adjoint à gauche préservant les cofibrations et les cofibrations acycliques. *Foncteur de Quillen à droite.* Un Quillen à gauche préserve les colimites et les objets cofibrants. Une *adjonction de Quillen* est une adjonction entre catégories de modèles faisant intervenir deux foncteurs de Quillen.

Lemme. Dans une adjonction entre catégories de modèle, l'un des adjoints est Quillen si et seulement si l'autre l'est.

Exemples. Oubli sur Quillen-Top, sur Strøm-Top.

Lemme. *(Brown, pour montrer qu'un foncteur est dérivable)* Un foncteur envoyant des cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles (en particulier un foncteur de Quillen à gauche) envoie toute équivalence faible entre objets cofibrants sur une équivalence faible. Même énoncé pour les fibrations acycliques...

Définition. $(C,\mathscr{W})$ une catégorie, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Un *dérivé à gauche* de F est la donnée d'un foncteur $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(C) \to D$ et d'une transformation naturelle $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F \circ \pi \to F$ vérifiant la propriété universelle : pour tous $(G : \mathbf{Ho}(C) \to F, \alpha : G \circ \pi :\to F)$, il existe une transformation naturelle $\theta_F^G : G \to \mathbb{L}F$ qui factorise α *i.e.* $\alpha = G \circ \pi \xrightarrow{\theta_F^G \circ \pi} \mathbb{L}F \circ \pi \xrightarrow{\mathbb{L}\tau_F} F$. Avec le formalisme des 2-catégories, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow \mathbb{L}\tau_F"] & D \\ & \mathbf{Ho}(C) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"'] & \end{tikzcd}$$

dont le défaut de commutativité est contrôlé par $\mathbb{L}\tau_F$.

Un *dérivé à droite* de F est la donnée d'un foncteur $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(C) \to D$ et d'une transformation naturelle $\mathbb{R}\tau_F : F \to \mathbb{R}F \circ \pi$ vérifiant la propriété universelle : pour tous $(G : \mathbf{Ho}(C) \to F, \beta : G \circ \pi :\to F)$, il existe une transformation naturelle $\theta_G^F : \mathbb{R}F \to G$ qui factorise β *i.e.* $\beta = \mathbb{R}F \circ \pi \xrightarrow{\theta_G^F \circ \pi} G \circ \pi \xrightarrow{\beta} F$. Avec le formalisme des 2-catégories, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathbb{R}\tau_F"] & D \\ & \mathbf{Ho}(C) \arrow[ur, "\mathbb{R}F"'] & \end{tikzcd}$$

dont le défaut de commutativité est contrôlé par $\mathbb{L}\tau_F$.

Propriété. Soit $F : C \to D$ un foncteur où C est de modèle. Si F envoie les cofibrations acycliques entre cofibrants sur des isomorphismes, son foncteur dérivé à gauche existe et est donné par $X \mapsto F(L(X))$. De même pour l'existence du foncteur dérivé à droite. Conséquence : si A est cofibrant, $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \to F(A)$ est un isomorphisme. De même pour Y fibrant et $\mathbb{R}\tau_F : F(Y) \to \mathbb{R}F(Y)$.

Définition. Un foncteur *dérivé total à gauche/à droite* de F est un dérivé à gauche/à droite du composé $C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(D)$.

Propriété. Si un foncteur envoie les cofibrations acycliques entre cofibrants sur des équivalences faibles (en particulier un Quillen à gauche), son foncteur dérivé total à gauche existe. Même énoncé pour les fibrations acycliques.

Théorème. Si $F : C \rightleftarrows D : G$ une adjonction de Quillen, alors les dérivés totaux induisent une adjonction $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(C) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(D) : \mathbb{R}G$.

Définition. Une *équivalence de Quillen* est une adjonction de Quillen dont l'adjonction induite est une équivalence de catégories, *i.e.* son unité et sa coünité sont des isomorphismes. On dit alors que les deux catégories de modèle sont *Quillen-équivalentes.*

Propriété. Pour une adjonction de Quillen $F : C \rightleftarrows D : G$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) c'est une équivalence de Quillen ;

(ii) pour tout cofibrant A, tout fibrant Y, une flèche $f : F(A) \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $A \to G(Y)$ est une équivalence faible ;

(iii) pour tout cofibrant A, tout fibrant Y, les flèches $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$ et $F(L(G(Y)) \xrightarrow{F(L_{G(Y)})} F \circ G(Y) \xrightarrow{\delta} Y$ sont des équivalences faibles.

Exemple. L'adjonction réalisation géométrique-homologie singulière est une équivalence de Quillen, en particuiler $X \leftarrow |Sing(X)|$ (qui est cellulaire) est une équivalence faible d'homotopie.

1.6 Colimites et limites homotopiques

Définition. $(C,\mathscr{W})$ catégorie, D petite. Une *colimite/limite homotopique* est un foncteur dérivé total à gauche/à droite du foncteur colimite, notées $\mathbb{L}\mathrm{colim}_D$,$\mathbb{R}\lim_D$. Attention, une colimite homotopique n'est pas toujours une colimite dans $\mathbf{Ho}(C)$ *i.e.* $\mathbf{Ho}(C^D) \ncong \mathbf{Ho}(C)^D$.

Lemme. Si C^D admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant $cst : C \to C^D$ soit de Quillen à droite, alors la colimite homotopique existe. Si de plus $\alpha : F \to F'$ une transformation naturelle entre diagrammes est faible objet par objet, alors la flèche naturelle $\mathbb{L}\mathrm{colim}_D(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}(C)$. On a les mêmes propositions à gauche pour les limites homotopiques.

1.7 Constructions de catégories de modèle

Définition. *(Structure de modèle de Quilen)* Les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'hompotopie, les fibrations sont les applications qui ont la propriété de relèvement à droite relativement aux $I^n \hookrightarrow I^{n+1}$ (qui sont des cofibrations acycliques) et $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} = LLP(\mathrm{Fib})$.

Lemme. $P : X \to Y$ est une fibration acyclique si et seulement si $P \in RLP(\partial I^{n+1} \hookrightarrow I^{n+1}, n \geqslant 0)$.

Définition. Notons $D^n(M)$ le complexe ayant M et M seulement en degrés n et $n-1$, avec id les joignant. $0 \xrightarrow{\sim} D^n(M)$ est une cofibration acyclique si M est projectif. Notons $S^n(M)$ le complexe ayant M seulement en degré n. $S^n(M) \hookrightarrow D^{n+1}(M)$ donnée par l'identité seulement entre M et M, est une cofibration si M est projectif (et dans $Ch_{\geqslant}(R)$ si $n \geqslant 0$). $D^n(M) \to S^n(M)$ donnée semblablement est une fibration.

Propriété. f morphisme de complexes. f est une fibration pour la structure projective si et seulement si $f \in RLP(0 \hookrightarrow D^n(R)$ (pour $n \geqslant 1$ dans $Ch_{\geqslant}(R)$). f est une fibration acyclique toujours si et seulement si $f \in RLP(S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R))$ (idem).

1.8 Catégories de modèle combinatoires

Définition. Une *catégorie de modèle combinatoire* est une catégorie cofibrement engendrée telle qu'il existe un ensemble de compacts $\{X_i, i \in I\}$ tel que chaque objet est colimite filtrante de X_i (typiquement $Ch_{grand0}(R)$, ΔEns...

Théorème. $\mathcal{D}$ petite, $\mathcal{C}$ de modèle. Si $\mathcal{C}$ est cofibrement engendrée, la structure projective sur $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ est de modèle et cofibrement engendrée. Si $\mathcal{C}$ est combinatoire, la structure injective sur $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ est de modèle et combinatoire. En particulier, les colimites homotopiques sur $\mathcal{D}$ existent dans ces cas.

Définition. *(Structure projective sur $\mathcal{D}$)* Soit $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction. $f : X \to Y \in \mathscr{W}_{\mathcal{D}} \iff G(f) \in \mathscr{W}_{\mathcal{C}}$, $f \in \mathrm{Fib}_{\mathcal{D}} \iff G(f) \in \mathrm{Fib}\mathcal{C}$, $\mathrm{Cof}_{\mathcal{D}} = LLP(\mathrm{Fib}_{\mathcal{D}})$. Si c'est une structure de modèle, G sera Quillen à droite et donc on aura une adjonction de Quillen.

Théorème. *(Quillen)* On suppose $\mathcal{C}$ est cofibrement engendrée. Si G préserve les colimites filtrantes et l'un des deux énoncés suivants est vrai : pour tout $A \in \mathcal{D}$, pour tous $\alpha_i : A_i' \to B_i' \in \mathcal{J}_{ac}$, pour tous $F(A_i) \to A$, l'application canonique $A \to A \sqcup_{F(A_i)} F(B_i') \in \mathscr{W}_{\mathcal{D}}$; pour tous $f : X \to Y$ tel que $f \in RLP(F(\mathcal{I}))$, $f \in \mathscr{W}$: alors la structure projective est de modèle, cofibrement engendrée et $F(\mathcal{I})$,$F(\mathcal{J}_{ac})$ sont générateurs.