Théorie pratique de l'intégrale de Lebesgue

1 Intégration contre une mesure quelconque

Dans toute la suite, sauf contrordre, on se donne un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$. La lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Approximation

Théorème. *(Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées)*

(i) Toute fonction mesurable de $X \longrightarrow \mathbb{C}$ est limite simple d'une suite de fonctions étagées.

(ii) Toute fonction mesurable positive de $X \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.

Théorème. *(Approximation des fonctions étagées par des fonctions $\mathcal{C}_c$)*

Toute fonction étagée sur des intervalles bornés est limite simple d'une suite de fonctions continues à support compact.

Théorème. *(Densité des fonctions étagées dans les L^p)*

(i) Toute fonction de L^p, $p < \infty$, est limite uniforme dans L^p d'une suite de fonctions étagées telles que $\mu(\{s \neq 0\}) < \infty$.

(ii) Toute fonction de L^∞ est limite uniforme dans L^p d'une suite de fonctions étagées.

Théorème. *(Densité des fonctions régulières dans les L^p)*

(i) Toute fonction de $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), Leb_{|\Omega})$, $p < \infty$, est limite uniforme dans L^p d'une suite de fonctions continues.

(ii) Toute fonction de $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), Leb_{|\Omega})$, $p < \infty$, est limite uniforme dans L^p d'une suite de fonctions continues à support compact.

(iii) Toute fonction de $L^p(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), Leb_{|\Omega})$, $p < \infty$, est limite uniforme dans L^p d'une suite de fonctions C^∞ (et donc, $\mathcal{C}^q$ pour tout q) à support compact.

1.2 Calcul d'intégrales

Théorème. *(Relation de Chasles)*

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable et $A_1, ..., A_n$ des mesurables, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\complement_X A_1 \cup ... \cup A_n$ est mesurable et l'on a, si f est positive ou intégrable :

$$\int_X f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + ... + \int_{A_n} f d\mu + \int_{\complement_X A_1 \cup ... \cup A_n} f d\mu.$$

▷ On rappelle que pour tout mesurable A, $\int_A f d\mu$ ne désigne rien d'autre que $\int_X f \mathbb{1}_A d\mu$. On peut bien écrire la décomposition de X ci-dessous par propriété de stabilité des tribus. Le résultat s'ensuit par linéarité de l'intégrale pour des fonctions à valeurs finies appliquée à $f1 = f\mathbb{1}_{\mathbb{X}} = f(\mathbb{1}_{A_1} + ... + \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{\complement_X A_1 \cup ... \cup A_n})$. ■

Attention ! Cela ne fait pas sens d'intégrer sur un non-mesurable. En fait, conformément à la définition dans l'intégrale de Riemann, on a le résultat suivant dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue : $A \in \mathcal{P}(X)$ est mesurable, si et seulement si, $\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \int_A d\mu$ est intégrable.

Remarquons qu'une version dénombrable de l'identité de Chasles reste valable, et qu'elle est conséquence du théorème d'échange série-intégrale.

Théorème. *(Relation de Chasles généralisée)*

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable et $(A_i)_{i \in I}$ des mesurables formant une partition de X. On a, si f est positive ou intégrable :

$$\int_X f d\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{A_i} f d\mu.$$

Propriété. *(Inégalité de la valeur absolue)*

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ mesurable, qui soit positive ou intégrable. Alors

$$|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu.$$

▷ Même preuve que pour l'intégrale de Riemann dès que l'on dispose de la croissance de l'intégrale (démontrée indépendamment dans la section suivante). ■

Propriété. *(Inégalité de la moyenne)*

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ mesurable. Si f est bornée sur X et μ est une mesure finie, alors :

$$\int f d\mu \leqslant \|f\|_\infty \mu(X).$$

▷ Même remarque que précédemment. ■

Propriété. *(Conjuguée de l'intégrale)*

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mesurable. Alors

$$\overline{\int f d\mu} = \int \overline{f} d\mu.$$

▷ C'est une conséquence de la *définition* des intégrales à valeurs complexes sur une mesure quelconque ! ■

Enfin, on énonce la formule de transfert (qui n'est autre que le changement de variable abstrait), dont on remarque qu'ils ne demandent presque aucune hypothèse dans le cadre général.

Théorème. *(Changement de variable abstrait/formule de transfert)*

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ mesuré et $(Y, \mathcal{A})$ mesurable. Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ mesurable ; on munit Y de la mesure image μ_φ. Soit $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ mesurable. Alors h est intégrable si et seulement si $h \circ \varphi$ est intégrable, auquel cas :

$$\int_X h \circ \varphi d\mu = \int_Y h d\mu_\varphi.$$

Combinés aux résultats de la section suivante, ces résultats élémentaires fournissent des outils très puissants pour se ramener aux cas calculables dans l'intégrale de Lebesgue (le but final étant de se ramener à l'intégrale de Riemann pour laquelle il existe un théorème reliant l'intégrale et la primitive).

1.3 Que faire des négligeables ?

On rappelle qu'une partie négligeable de X est une *partie* de X incluse dans un mesurable de mesure nulle. En particulier, il n'est pas dit que cet ensemble soit mesurable. La propriété suivante assure que ce n'est pas bien grave.

Propriété. *(Tribu complétée, mesure complétée)*

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ mesurable. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des négligeables de cet espace et Δ la différence symétrique sur $\mathcal{P}(X)$. Alors $\mathcal{T}\Delta\mathcal{N}$ est la plus petite tribu sur X contenant X et tous les négligeables. De plus, en posant $\mu'(A\Delta N) = \mu(A)$, μ' est la plus petite mesure prolongeant μ sur $\mathcal{T}\Delta\mathcal{N}$.

Ceci étant dit, on peut énoncer la propriété suivante, souvent passée sous silence, quoique fondamentale, du moins herméneutiquement parlant, en théorie de la mesure. Remarquer qu'ils ne demandent pas en vérité que la mesure soit déjà complétée.

Propriété fondamentale. *(Une intégrale n'est jamais chargée sur les négligeables)*
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ mesurable. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ mesurable. Soit N un négligeable de complémentaire A supposé mesurable. Alors :

$$\int f d\mu = \int_A f d\mu.$$

▷ On utilise la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale sur X en la somme d'une intégrale sur N et d'une intégrale sur A. Il suffit donc de montrer que $\int_N f d\mu = \int_X f \mathbb{1}_N d\mu = 0$. On traite le cas où f est positive et l'on déduit le cas général par linéarité de l'intégrale. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant simplement vers f. Alors clairement $(f_n \mathbb{1}_N)$ converge simple vers $f \mathbb{1}_N$ et l'on a encore une suite croissante, car $\mathbb{1}_N$ est positive, de fonctions étagées positives, car $\mathbb{1}_N$ est positive : en effet si $f_n = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{k,n} \mathbb{1}_{A_{k,n}}$, où les $A_{i,j}$ sont des mesurables, alors $f_n \mathbb{1}_N = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{k,n} \mathbb{1}_{A_{k,n}} \mathbb{1}_N = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{k,n} \mathbb{1}_{A_{k,n \cap N}}$ où les $A_{k,n} \cap N$ sont des mesurables, inclus dans N, donc de mesure nulle. Par suite $\int_X f_n \mathbb{1}_N d\mu = \sum_{k=1}^{N_n} \alpha_{k,n} \mu(A_{k,n \cap N}) = 0$. Cette suite identiquement nulle a donc une limite nulle. Par le théorème de convergence monotone, $\int_X f \mathbb{1}_N d\mu = 0$. ■

Principe. Si les hypothèses d'un théorème dont la conclusion est une formule intégrale sont vérifiées μ-presque partout, et que l'on a qu'un nombre dénombrable d'hypothèses, alors le théorème vaut encore s'il est vrai partout.

On en déduit les quatre théorèmes suivants pour les fonctions mesurables réelles, parfois laissés en exercice.

Propriété. *(Positivité de l'intégrale)*
Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et μ-presque certainement positive. Alors $\int f d\mu \geqslant 0$.

▷ Par hypothèse, il existe un mesurable de mesure nulle contenant l'ensemble des x tels que $f(x)$ est strictement négative. On note A son complémentaire. Ainsi d'après la propriété fondamentale, $\int f d\mu = \int f \mathbb{1}_A d\mu$ où $f \mathbb{1}_A$ est positive. Cela revient donc à montrer la positivité de l'intégrale des fonctions certainement positives. Un argument de type TCM (comme d'habitude...) permet de conclure. ■

Propriété. *(Croissance de l'intégrale)*
Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et telles que $f \leqslant g$ μ-presque partout. Alors $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$.

▷ Positivité et linéarité. ■

Propriété. *(Égalité de l'intégrale de fonctions égales presque partout)*

Soient $f, g : X \longleftarrow \mathbb{R}$ mesurable et telles que $f = g$ μ-presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

▷ Si f est nulle presque partout, par la propriété fondamentale, son intégrale est nulle. On applique ce lemme à $f - g$. ■

Ces propriétés permettent d'écrire, pour toute fonction f mesurable, positive ou intégrable (sachant que (le vérifier), les ensembles sur lesquels on intègre sont mesurables) :

- ⋆ $\int_{\{f=c\}} f d\mu = c\mu(\{f = c\})$;
- ⋆ $\int_{\{f \geqslant c\}} f d\mu \geqslant c\mu(\{f \geqslant c\})$;
- ⋆ $\int_{\{f \leqslant c\}} f d\mu \leqslant c\mu(\{f \leqslant c\})$.

Propriété. *(Définie positivité de l'intégrale)*

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et μ-presque certainement positive. Si $\int f d\mu = 0$, alors f est μ-presque certainement nulle.

▷ Supposons que le mesurable $\{f \neq 0\}$ soit non négligeable. On a $\int f = \int_{\{f>0\}} + \int_{\{f=0\}} + \int_{\{f<0\}} = \int_{\{f>0\}}$ par hypothèse du théorème et par hypothèse du raisonnement. Si pour tout $\delta > 0$, le mesurable $\{f \geqslant \delta\}$ était négligeable, alors en considérant la suite des $\delta = \frac{1}{n}$, on pourrait écrire comme souvent $\{f > 0\}$ comme un réunion dénombrable de négligeable, ce qui est exclu, car par hypothèse, $\{f \neq 0\} = \{f > 0\} \cup \{f < 0\}$ n'est pas négligeable, mais $\{f < 0\}$ l'est. On peut donc écrire : $\int f = \int_{\{f>\delta\}} + \int_{\{f \leqslant \delta\}}$ pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Or $\int_{\{f \leqslant \delta\}} \geqslant 0$ par presque certaine positive de f et $\int_{\{f>\delta\}} > \delta\mu(\{f > \delta\})$ qui est donc strictement positif. Ainsi $\int f > 0$. Par contraposée, puisque $\int f \geqslant 0$, si $\int f = 0$, alors $\{f \neq 0\}$ est quasi certain. ■

On ajoute la propriété suivante, du même acabit.

Propriété. *(Les fonctions intégrables sont raisonnables)*

Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ une fonction intégrable. Alors f est presque sûrement finie.

▷ La preuve, similaire à la précédente, est laissée au lecteur. ■

1.4 Détermination d'intégrabilité par comparaison

Propriété. *(Intégrabilité par comparaison simple)*

Soient f, g deux fonctions mesurables à valeurs positives dans la droite réelle achevée. Si $f \leqslant g$ et g est intégrable, alors f est intégrable et $\int f \leqslant \int g$.

▷ On applique le théorème de convergence dominée à la suite constante (f) (!). ■

On donne encore le critère d'intégrabilité suivant, qui permet d'entrevoir un lien série-intégrale dans la théorie de Lebesgue.

Propriété. *(Comparaison série-intégrale de Lebesgue)*

Soient $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}$ mesurable. Alors f est intégrable si et seulement si $\sum_{n \geqslant 1} \mu(\{|f| \geqslant n\})$ converge.

▷ La preuve, pas très révolutionnaire, concerne la partie entière de f et l'identité : $\lfloor |f| \rfloor = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{\{|f|\geqslant n\}}$. ■

1.5 Uniforme continuité de l'intégrale

Une propriété de l'intégrale quelconque contre une mesure, qui permet :

- d'une part de dépasser l'inégalité de Markov avec quelque chose de meilleur que l'intégrale totale mais plus difficile à établir ;
- de pallier le manque de théorème fondamental de l'analyse en additionnant à la théorie de l'intégration abstraite des outils analytiques.

On se sert du lemme suivant :

Lemme. *(Diminution de l'intégrale sur les hauteurs lorsqu'elle converge)*

Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et intégrable. Alors :

$$\int_{\{f \geqslant M\}} f d\mu \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

▷ Conséquence directe du théorème de convergence dominée version continue appliqué à $f\mathbb{1}_{f\geqslant M}$ qui converge simplement vers 0 pour tout réel x (par propriété archimédienne de $\mathbb{R}$). Cette fonction est bien sûr majorée par $|f|$ en valeur absolue, intégrable par hypothèse. ■

Qui nous permet de conclure :

Propriété. *(Uniforme continuité de l'intégrale)*

Soit f une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout mesurable A, $\mu(A) < \eta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.

▷ Prenons pous f dans ce qui précède, $|f|$ dans l'énoncé. Appliquons le paradigme de Cesàro en choisissant M dans le lemme tel que $\int_{A\cap\{|f|\geqslant M} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$. L'autre partie de l'intégrale se majore naturellement par $M\mu(A)$. Il suffit donc de choisir $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$. ■

1.6 Mesure de comptage discrète

Propriété. *(Facilité de la mesure de comptage)*

Toute suite est mesurable pour la mesure de comptage.

▷ On munit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de comptage $\mu_c : A \longrightarrow \mathrm{card}(A)$. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{C}}$. Soit A un borélien de l'ensemble d'arrivée. Alors $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et c'est terminé. ■

Remarquons que la mesure de comptage n'a pas de négligeables non vides.

Propriété. *(Intégrale contre la mesure de comptage)*

Soit u une suite réelle positive. Alors $\int_{\mathbb{N}} u d\mu_c = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

▷ Soit u une suite réelle positive. En particulier d'après la remarque précédente elle est mesurable. Elle n'est pas forcément étagée (c'est une somme infinie dénombrable de Dirac *a priori* distinctes, notamment si elle est injective). Vérifions-le pour les suites étagées (par convergence monotone modulo une suite approximante, cela suffira). On remarque d'abord le fait suivant : $\mu_c(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n(A)$.

Si $u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i 1_{E_i}$ où $E_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} u d\mu_c &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_c(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n(E_i) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_n(E_i) \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int u d\delta_n \\
\int_{\mathbb{N}} u d\mu_c &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n
\end{aligned}$$

selon la remarque en fin de section. Remarquer que l'interversion des sommes a lieu en milieu doublement fini, donc sans problème (si la somme était dénombrable, on utiliserait le théorème de Fubini pour les familles sommables... ce qui est discutable lorsqu'on le démontre également dans le cadre de l'intégration). ■

Corollaire. *(Intégration contre la mesure de comptage)*

Soit u une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$. Alors u est intégrable contre la mesure de comptage si et seulement si la série associée est absolument convergente, auquel cas

$$\int_{\mathbb{N}} |u| d\mu_c = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Il serait intéressant d'énoncer les théorèmes de la construction de l'intégrale de Lebesgue ainsi que ceux de cette feuille pour les mesures de comptage. C'est un exercice qu'il est bon de développer soi-même. On obtient soit des faits triviaux, soit des résultats généraux assez intéressants sur les suites doubles.

Un exemple par honnêteté intellectuelle :

Propriété. *(Théorème de convergence monotone discrète)*

Soit $(u_{n,k})$ une suite de réels positifs croissante telle que pour tout n, $(u_{n,k})_k$ soit croissante. Alors $\lim\limits_{k\Rightarrow+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{k\Rightarrow+\infty} u_{n,k}$.

Exercice 1

(Titre de l'exercice) On souhaite énoncer de même le théorème de convergence dominée.

1. *(Convergence dominée discrète)* Soit $(u_{n,k})_{n,k}$ une suite numérique double. On suppose que pour tout k, $u_{n,k} \underset{n\to\infty}{\to} u_k$ et que $\sum u_k$ existe. On suppose de plus que pour tout n, k, $|u_{n,k}| \leqslant v_k$ où v_k est le terme général d'une suite absolument convergente. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$.

2. *(Cas particulier)* On suppose de plus que $u_{n,k} \to 0$ pour tout n. Montrer qu'alors cette limite est nulle.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n)^k}$.

▷ **Éléments de réponse.**

Le texte des solutions.

Nous pouvons énoncer la remarque suivante :

Remarque. *(Intégration contre une Dirac)*

Soit $a \in X$ et f une fonction de X dans $\overline{\mathbb{K}}$. (Elle est automatiquement mesurable car la Dirac est définie sur la tribu grossière.) Alors : $\displaystyle\int_X f d\delta_a = f(a)$.

▷ Puisque $x = a\ \delta_a$ presque sûrement, $f(x) = f(a)$ est presque sûr. On déduit le résultat grâce à l'intégration sur les négligeables et le fait que $\delta_a(X) = 1$. ■

1.7 Mesures produits

On généralise la construction de la mesure produit à un produit dénombrable d'espaces mesurables.

Théorème. *(Produit dénombrable d'espaces mesurables)*
Soit $(X_k, \mathcal{T}_k, \mu_k$ des espaces mesurés σ-finis pour $k \in \mathbb{N}$. On munit $X = \prod_{k\in\mathbb{N}}$ de la tribu engendrée par les cylindres : $\mathcal{U} = A_1 \times ... \times A_n \times X \times X \times ...$ où $A_i \in \mathcal{T}_i$. Alors il existe une unique probabilité μ sur $(X, \mathcal{T}$ telle que pour tout cylindre de cette forme, $\mu(\mathcal{U}) = \mu(A_1)...\mu(A_n)$.

▷ Conséquence directe du théorème de Kolmogorov. ■

Cette construction permet en particulier de modéliser, en probabilités, un jeu de pile ou face infini ; voyez plutôt.

Exercice 2
(Modélisation du pile ou face infini) On considère l'espace de probabilités $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la probabilité produit naturelle justifiée par la construction ci-dessus.
1. Retrouver l'expression de la loi géométrique.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours pile ? Les négligeables non impossibles, sont-ils alors réservés aux probabilités continues ?

Notons qu'il n'existe bien sûr pas de théorème de Fubini général.

Dans le cas d'un nombre fini d'espaces, l'ensemble des cylindres est exactement l'ensemble des pavés, donc on retrouve la construction habituelle.

1.8 Linéarité par rapport à la mesure

Pour terminer, on mentionne un résultat un peu casse-tête mais qui se révèle utile en probabilités discrètes.

Propriété. *(Linéarité de l'intégrale par rapport à la mesure)*
Soit $(X, \mathcal{T})$ mesurable et μ_1, μ_2 deux mesures sur cet espace. Soit λ un réel positif. Alors $\lambda\mu_1 + \mu_2$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ et pour toute fonction mesurable f,

$$\int f d(\lambda\mu_1 + \mu_2) = \lambda \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

▷ On vérifie le résultat sur les indicatrices, puis linéarité, convergence monotone, parties signées, parties réelle et imaginaire. ■

Généralisation. *(Linéarité dénombrable par rapport à la mesure)*

Soit $(X, \mathcal{T})$ mesurable et $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des mesures sur cet espace. Alors $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ est encore une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ et pour toute fonction mesurable f,

$$\int f d(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f d\mu_i.$$

▷ Le fait que μ soit une mesure vient pour la σ-additivité du théorème de Fubini cas positif pour les familles sommables de réels. L'égalité reste vraie pour les mêmes arguments que précédemment, en utilisant le théorème de la double limite pour les suites doubles doublement croissantes (à faire). ■

2 Le cas Lebesgue

2.1 Tribu borélienne en dimensions supérieures

On se place dans l'espace mesure $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), Leb)$ où Leb est la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ obtenue par extension de Hahn-Kolmogorov sur le π-système des pavés.

Propriété. *(Nécessité de toutes les dimensions pour faire poids)*

Tout hyperplan de $\mathbb{R}^d$ est négligeable.

Propriété. *(Grosseur des parties avec intérieur)*

Tout négligeable de $\mathbb{R}^d$ est d'intérieur vide.

2.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

On commence par rappeler le fait suivant.

Propriété. *(σ-finitude de la mesure de Lebesgue)*

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est σ-finie.

▷ On écrit $\mathbb{R}^d$ comme l'exhaustion des compacts $\prod_{i=1}^{d} [n_i, n_{i+1}]$ où les n_i sont des entiers relatifs, ce qui revient à quadriller l'espace en cubes selon le réseau $\mathbb{Z}^d$. Tous ces cubes sont de volume $1 < \infty$ et cette réunion est clairement dénombrable, car indexée par $\mathbb{Z}^d \simeq \mathbb{N}$. ■

On donne maintenant deux propriétés de » linéarité « de la mesure de Lebesgue qui ne découlent pas de la définition de mesure générale, mais font qu'elle satisfait au problème historique de Borel pour trouver une mesure qui fait sens.

Propriété. *(Invariance par translation de la mesure de Lebesgue)*
La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ vérifie $\lambda(A + x) = \lambda(A)$ pour tout borélien A, pour tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

$\triangleright$ Soit x un point fixé. Il suffit de montrer que $A \longrightarrow \lambda(A + x)$ coïncide avec λ sur les intervalles fermés bornés et l'on conclut par le lemme d'unicité des mesures. Or c'est évident dans ce cas. $\blacksquare$

Propriété. *(Invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue)*
La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ vérifie $\lambda(kA) = |k|\lambda(A)$ pour tout borélien A, pour tout scalaire $k \in \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Soit k un scalaire fixé. S'il est nul, c'est par axiome. Sinon, il suffit de montrer que $A \longrightarrow \frac{\lambda(kA)}{|k|}$ coïncide avec λ sur les intervalles fermés bornés et l'on conclut par le lemme d'unicité des mesures. Or c'est évident dans ce cas. $\blacksquare$

Propriété. *(Diffusivité de la mesure de Lebesgue)*
La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ vérifie $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

$\triangleright$ On se sert de l'inclusion décroissante $]x - 1/n, x + 1/n[$. $\blacksquare$

On termine par la propriété de régularité de la mesure de Lebesgue (version faible et pratique), qui ouvre sur les théorèmes de Lusin, que nous n'abordons pas encore.

Propriété. *(Régularité de la mesure de Lebesgue)*
Soit A un borélien. Il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant A et un fermé F contenu dans A tel que $\lambda(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. De plus, si A est de mesure finie, on peut prendre F compact.

$\triangleright$ On montre le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; le résultat en dimension supérieure se montrant de façon analogue mais beaucoup plus laborieusement au niveau de l'écriture. On suppose que l'on se place sur un sous-espace mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), Leb)$ de mesure totale finie, prenons $]-n, n[$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des boréliens vérifiant la propriété demandée (avec $F = K$ compact).

Remarquons qu'elle contient tous les intervalles fermés bornés. Soit $[a, b]$ avec a, b deux réels, pour $a < b$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $K = [a + \frac{\varepsilon}{8}, b - \frac{\varepsilon}{8}]$ compact inclus dans $[a, b]$, éventuellement vide, et $\mathcal{O} =]a - \frac{\varepsilon}{8}, b + \frac{\varepsilon}{8}[$ ouvert contenant $[a, b]$. Si K est vide, c'est immédiat. Sinon, $\mathcal{O} \setminus K$ est la réunion de deux intervalles disjoints de diamètre chacun $\frac{\varepsilon}{4}$. La longueur totale est donc $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Montrons maintenant que c'est une classe monotone. Elle contient Ω. En effet, il suffit de choisir $\mathcal{O} =]-n, n[$ et $K = [-n + \varepsilon/4, n - \varepsilon/4]$.

Montrons la stabilité par différence. Soient X, Y vérifiant la proposition et $\varepsilon > 0$. On choisit donc $F_X \subseteq X \subseteq O_X$ et $F_Y \subseteq X \subseteq O_Y$ comme dans la propriété pour une marge $\varepsilon/4$. Posons $O = O_Y \setminus F_X$ et $F = F_Y \setminus O_X$ respectivement ouverts et fermés par opérations usuelles, avec F compact, car fermé dans le compact F_Y. Le tout est représenté sur la figure ci-dessous. On a par construction $Y \setminus X \subseteq O$ et $F \subseteq Y \setminus X$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mu(O \setminus F) &= \mu((O_Y \setminus F_X) \setminus (F_Y \setminus O_X)) \\
&= \mu((\overline{O_Y} \cap \overline{F_X} \cap \overline{F_Y}) \cup (O_Y \cap \overline{F_X} \cap \overline{O_X})) \\
&\geqslant \mu(\overline{O_Y} \cap \overline{F_X} \cap \overline{F_Y} + \mu(O_Y \cap \overline{F_X} \cap \overline{O_X}) \\
&\leqslant \mu(O_Y \cap \overline{F_Y}) + \mu(O_X \cap \overline{F_X}) \\
&\leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \\
\mu(O \setminus F) &\leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant la stabilité par réunion dénombrable croissante. Soit (X_n) une suite croissante de boréliens vérifiant la propriété demandée. Notons $X = \cup X_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par hypothèse, il existe un compact $F_n \subseteq X_n \subseteq O_n$ un ouvert tels que $\mu(O_n \setminus F_n) \leqslant \varepsilon_n = \varepsilon/(4.2^n)$. Posons $O = \cup O_n$ ouvert et $F = \cup F_n$, qui n'est pas forcément fermé par contre. Remarquons que $O \setminus F = \cup(O_n \setminus F_n)$ par opérations ensemblistes et qu'il est de mesure inférieure à $\sum \varepsilon_n = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Il faut résoudre le problème de la fermeture de F. Notons $A_n = O \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$. La suite (A_n) est décroissante et son intersection vaut $O \setminus F$. Puisque la mesure est finie, par convergence monotone, on a $\mu(A_n)$ qui tend vers $\mu(O \setminus F) \leqslant \varepsilon/2$. Par conséquent, il existe un rang N à partir duquel $\mu(O \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k) \leqslant \varepsilon/2$ et $F' = \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$, qui est compact cette fois, par réunion finie de compacts, convient.

Cette classe monotone est engendrée par le π-système des intervalles fermés bornés, puisque la mesure est borélienne. Par le lemme de classe monotone, elle est donc égale à la tribu engendrée par ce π-système, qui est l'ensemble de la tribu borélienne. On a donc prouvé le résultat pour tous les boréliens.

Il faut maintenant généraliser le résultat à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, c'est chose facile. ■

Méthode. MONTRER UNE PROPRIÉTÉ SUR UNE TRIBU BORÉLIENNE

Je veux montrer une propriété (P) sur la tribu borélienne. Je montre que l'ensemble des boréliens qui la vérifient est une classe monotone C (c'est plus simple qu'une tribu), contenant les intervalles fermés bornés (si ce sont bien les plus simples avec qui travailler dans le cas présent). Puisque la tribu est borélienne, ils engendrent la classe monotone en question. Par le lemme de classe monotone, $C = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car c'est la tribu engendrée par les intervalles fermés bornés.

2.3 Lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann

Remarquons le fait suivant.

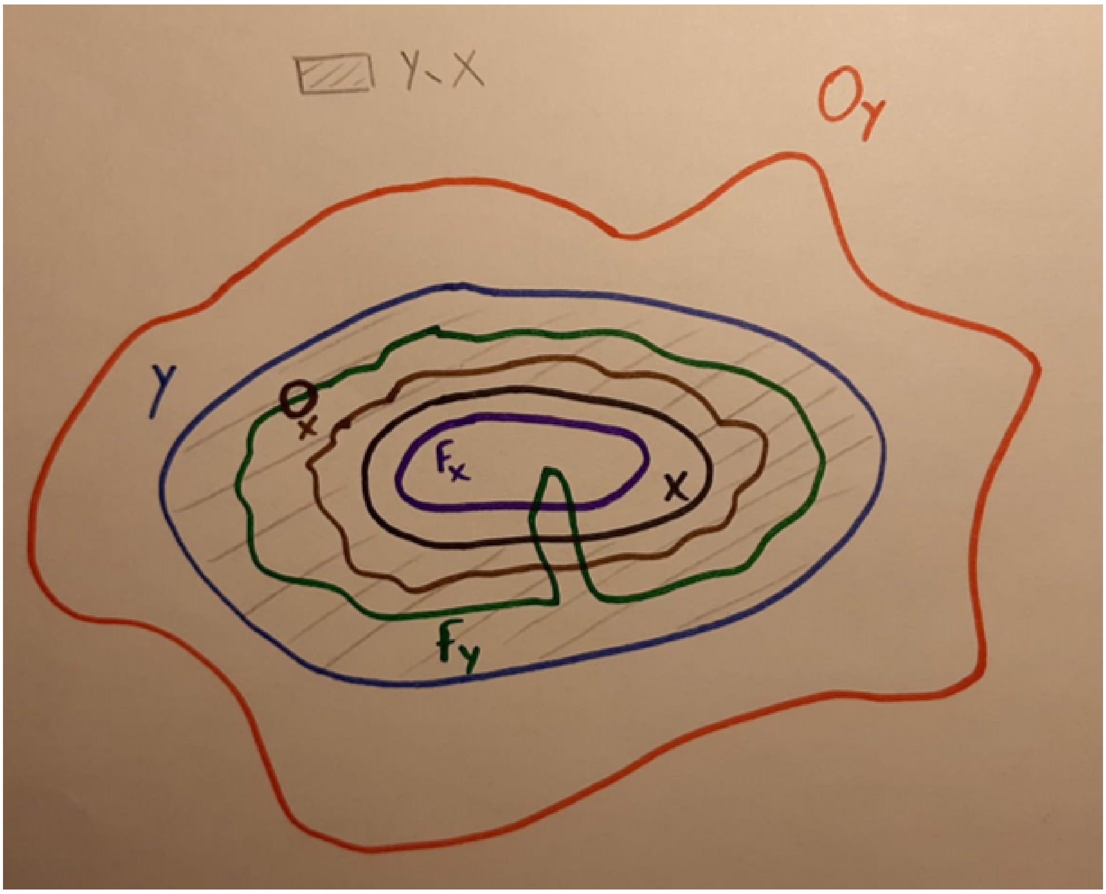

Figure 2.1: *Stabilité par différence de la classe monotone des boréliens réguliers.* —

Propriété. *(L'intégrale de Riemann n'est contre aucune une mesure)*
Il n'existe pas de mesure sur $[0,1]$ telle que l'intégration selon Riemann sur $[0,1]$ corresponde à l'intégration contre cette mesure.

▷ Autrement, on aurait un théorème de convergence monotone. Cependant, pour une énumération (q_n) des rationnels la limite des intégrables $\mathbb{1}_{\{q_1,\dots,q_n\}}$ ne l'est pas. ■

Propriété. *(L_2 n'est pas dans L_1)*
Une fonction peut-être de carré intégrable sur un segment sans être intégrable sur ce segment.

▷ Prendre l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$ en remplaçant les valeurs prises sur les irrationnels par la valeur -1. ■

On se demande maintenant comment relier l'intégrale de Lebesgue à l'intégrale de Riemann. On dispose des théorèmes suivants :

Propriété. *(Riemann-intégrabilité sur un segment)*
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors si f est intégrable au sens de Riemann (c'est-à-dire, bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est Lebesgue-négligeable), elle est intégrable au sens de Lebesgue et les intégrales sont alors égales.
C'est en particulier le cas pour des fonctions réglées.

Corollaire

Toute fonction monotone sur un segment est Riemann-intégrable, Lebesgue-intégrable et les deux intégrales sont égales.

Propriété. *(Riemann-intégrabilité sur un intervalle)*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ localement Riemann-intégrable. Alors f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si son intégrale est absolument convergente et les intégrales sont alors égales.

Remarque. Noter cependant que les intégrales semi-convergentes restent des limites d'intégrales de Lebesgue.

2.3.1 Quelques contre exemples classiques à appliquer dans Lebesgue-Vitali

Propriété. *(Fonction partout discontinue)*
La fonction de Dirichlet (indicatrice de $\mathbb{Q}$) est discontinue en tout point.

Propriété. *(Fonction dont le lieu de discontinuité est $\mathbb{Q}$)*
La fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{2^n}$ est continue sur les irrationnels et discontinue en tout rationnel.

Propriété. *(Pas de « fonction de Thomae inverse »)*
Il n'existe aucune fonction continue en tout rationnel et discontinue en tout irrationnel.

2.4 Interversions

Voir fiche consacrée.

2.5 TOUS les théorèmes de changement de variables

Avec le théorème de Fubini, c'est l'un des deux outils qui permet le calcul véritable des intégrales multiples. Dans le cas des intégrales simples, les énoncés ci-dessous rendent le théorème de transfert applicable avec des moyens concrets.

Théorème. *(Changement de variable sur un segment)*

Soit I un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi([a,b]) \subseteq I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Théorème. *(Changement de variable sur un intervalle quelconque)*

Soit I un intervalle Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ avec telle que J soit un intervalle de $\mathbb{R}$, en notant a, b les extrémités de I, et $\varphi(a), \varphi(b)$ les limites de φ à ses bornes. Alors les intégrales de f et de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sont de même nature et dans le cas convergent, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Théorème. *(Changement de variable sur $\mathbb{R}^d$)*

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable qui soit positive ou intégrale et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (donc bijectif et dont l'inverse est C^1) tel que $U \subseteq \mathbb{R}^d$ soit un ouvert. Alors :

$$\int_U f(\varphi(y))|\mathrm{detJac}(\varphi)(y)|d\lambda(y) = \int_V f(x)d\lambda(x).$$

On rappelle que la jacobienne est la matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, donc la première colonne est le vecteur des coordonnées de la dérivée selon la première variable. Aucun intérêt pour le théorème en réalité, parce que si l'on se trompe, on obtient la transposée, et le déterminant est invariant par transposition.

Rappelons également que le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant.

On y ajoute deux résultats pratiques pour le calcul : comment établir qu'une fonction est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (bonjour le calcul diff), et certains changements de variables classiques où il n'est certainement pas utile de recalculer la jacobienne à chaque fois.

Théorème. *(Inversion locale, inversion globale)*

Soit $\varphi : U \longrightarrow V$ une application $\mathcal{C}^1$, U, V deux ouverts.

- Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{Jac}(\varphi)(a)$ soit inversible. Alors φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en a (il existe un ouvert $A \subseteq U$ contenant a et un ouvert $B \subseteq V$ contenant $\varphi(a)$ tels que $\varphi : A \longrightarrow B$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).
- Si pour tout $a \in U$, $\mathrm{Jac}(\varphi)(a)$ soit inversible, alors φ est ouverte. Si de plus elle est injective, alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (global) de U dans $\varphi(U)$.

Théorème. *(Changements de variables classiques)*

- *(Coordonnées polaires)*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta$$

- *(Coordonnées cylindriques)*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)rdrd\theta dz$$

- *(Coordonnées sphériques)*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\theta))r^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$$

3 Probabilités

3.1 Variables aléatoires

Par définition, si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité, les variables aléatoires sur Ω (disons, pour fixer les idées, à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{N}$, en fait, leur support $X(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ numérique), sont les fonctions mesurables en considérant la tribu discrète ou borélienne sur l'image. On définit naturellement la mesure image de $\mathbb{P}$ par :

$$\mathcal{L}_X(A) = \mu(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$$

pour tout A mesurable de l'image ; c'est la *loi* de X. Il ne faut pas confondre cette construction avec $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X, sous-tribu de $\mathbb{A}$ qui rend X mesurable et définie par $X^{-1}(\mathcal{F})$. Ainsi on peut construire une variable aléatoire à partir de toute application $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} = E$.

3.1.1 Intégration contre une mesure image (ici, une loi de proba)

Définition-propriété. *(Mesure image)*
Soit E mesuré par μ et f mesurable sur $E \longrightarrow F$. Alors μ_f est une mesure sur F.

Théorème. *(Formule de transfert générale)*
On reprend les notations précédentes. Soit $h : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est intégrable selon μ_f si et seulement si $h \circ f$ est intégrable selon μ. Dans ce cas $\int h \circ f d\mu = \int h d\mu_f$.

On peut appliquer de façon très commode cette identité à l'espérance probabiliste. Voir plutôt :

Propriété. *(Formule de transfert générale)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}$ probabilisé et X une variable aléatoire *réelle* sur X. Alors :

$$(\mathbb{E}X) = \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x\mathcal{L}_X(dx).$$

▷ Il suffit de prendre l'identité à la place de h. ■

3.1.2 Intégration contre une mesure à densité (ici, somme dénombrable de Dirac et par rapport à la mesure de Lebesgue)

Définition-propriété. *(Mesure à densité par rapport à une fonction mesurable)*
Soit E mesuré par μ et f mesurable sur $E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ positive. Alors $\nu(A) = \int_A f d\mu$ est une mesure sur E.

Propriété. *(Intégration selon une mesure à densité)*
On reprend les notations précédentes. Soit $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Alors h est intégrable selon ν si et seulement si est intégrable selon μ. Si h est positive ou intégrable, alors $\int h d\nu = \int h f d\mu$.

On doit distinguer deux cas :

Propriété. *(Loi discrète)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ probabilisé et X une variable aléatoire quelconque sur X. Si le support de X est dénombrable, alors sa loi est donnée par :

$$\mathcal{L}_X(A) = \sum_{a \in \mathrm{Im}(X)} \mathbb{P}(X = a)\delta_a(A).$$

Propriété. *(Loi continue)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ probabilisé et X une variable aléatoire *réelle* sur X. Si f est une fonction positive, borélienne et de poids intégral total 1, on peut définir X telle que :

$$\mathcal{L}_X(A) = \int \mathbb{1}_A f dx.$$

Notons que dans le cas d'une variable à densité, la loi est complètement indépendante de la probabilité de départ ! Chaud quand même.

3.1.3 Intégration contre une mesure produit (ici, une probabilité produit)

Rien à dire de plus que pour l'intégration contre une mesure produit générale.

3.2 Identités casse-tête

Propriété. *(Intégrale de 1 selon une probabilité)*
$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega 1_A d\mathbb{P}$.

Propriété. *(Lien espérance-événements)*
$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(X) = \mathbb{P}(X \in A)$.

3.3 Quatre choses à dire sur la presque certitude d'événements

Propriété. *(Réunion dénombrable de quasi-impossibles)*
Toute réunion dénombrable d'événements quasi impossibles est quasi impossible.

Propriété. *(Indénombrable dénombrable de presque-sûrs)*
Toute intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Propriété. *(Premier lemme de Borel-Cantelli)*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$ (c'est la probabilité qu'une infinité de A_n se réalise simultanément).

Propriété. *(Deuxième lemme de Borel-Cantelli)*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

On rappelle que la limite inférieur d'une suite d'ensemble est l'événement qui stipule que tous les A_n se réalise simultanément à partir d'un certain rang.

3.4 Théorie de la mesure appliquée aux probas

On rajoute quelques considérations (qui sont des reformulations de la théorie de la mesure pour les probabilités) à celles de la première section de cet article.

Propriété. *(Théorème de convergence monotone)*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives sur le même espace probabilisé. Si X_n converge presque sûrement vers X de façon croissante, alors $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mathbb{E}(X)$.

Propriété. *(Théorème de convergence monotone pour les séries)*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires positives sur le même espace probabilisé. Alors $\mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty} X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Propriété. *(Théorème de convergence dominée)*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires quelconques sur le même espace probabilisé. Si X_n converge presque sûrement vers X, et s'il existe une variable aléatoire Z sur le même espace telle que presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leqslant Z$. Alors $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

3.5 Construction de lois et de suites de lois

3.5.1 Construction explicite d'une loi uniforme

Sans perte de généralité, on construit une loi uniforme continue sur $[0,1]$.

Il suffit de choisir : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Alors la variable aléatoire $X : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à ω fait correspondre ω est uniforme. En effet : $\mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, t]) = \mathbb{P}(id_{|[0,1]}(]\infty, 1])) = \lambda[0, \min(1,t)] = 0$ si $t < 0$, t si $t \in [0,1]$ et 1 si $t > 1$, qui est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

3.5.2 Simulation d'une loi quelconque

Avant de montrer l'astuce, il faut définir l'inverse généralisée (ou *pseudo-inverse* selon la littérature) d'une fonction de répartition F :

Définition. *(Pseudo-inverse)*

$$\begin{aligned} F^{-1} : [0,1] &\longrightarrow [-\infty, +\infty] \\ p &\longmapsto \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant p\} \end{aligned}$$

Intuitivement, les sauts de F deviennent les plateaux de F^{-1} et réciproquement (c'est la réflexion de F par rapport à la première bissectrice). On a surtout la propriété fondamentale :

$$\forall p \in [0,1]\ \forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{p \leqslant F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(p) \leqslant x}$$

$\triangleright$ En effet, si $p \leqslant F(x)$, alors $F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant p\} \leqslant x$ par définition de F^{-1}, car alors $x \in \{x \in \mathbb{R}, F(x) \geqslant p\}$. Réciproquement, si $F^{-1}(p) \leqslant x$, alors pour tout $\epsilon > 0$, par croissance de F et définition de l'infimum, $F(x+\epsilon) \geqslant p$. En utilisant la continuité à droite de F, on en déduit $F(x) \geqslant p$. ■

Étant donné une loi de probabilité quelconque $\mathcal{L}$ de fonction de répartition F_X (ce qui est équivalent à la donnée de la loi de X), on pose $X = F^{-1}(U)$. Alors X est de loi $\mathcal{L}$, puisque $\mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leqslant t) = \mathbb{P}(U \leqslant F(t)) = F(t)$. Et voilà c'est terminé !

3.5.3 Suites de variables aléatoires de lois prescrites

Grâce à la construction précédente, on dispose du théorème suivant. Si l'on rajoute l'hypothèse d'indépendance, on obtient un théorème beaucoup plus fort dont la démonstration n'est pas du tout facile.

Théorème. *(Suite de variables aléatoires de lois prescrites)*
Soient $\mathcal{L}_n$ des lois de probabilités pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite de variables aléatoires (X_n) sur Ω telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n soit $\mathcal{L}_n$.

Théorème. *(Suite de variables aléatoires indépendantes de lois prescrites)*
Soient $\mathcal{L}_n$ des lois de probabilités pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite de variables aléatoires **indépendantes** (X_n) sur Ω telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n soit $\mathcal{L}_n$.