Réflexion sur les complexes

Quel est le point commun entre les énoncés suivants : tout polynôme admet une racine, et : toute équation différentielle linéaire ayant autant de paramètres que d'équations se résout de proche en proche ? Ces deux énoncés sont valables « dans $\mathbb{C}$ », mais pas « dans $\mathbb{R}$ ».

En fait, ce sont deux formulations équivalentes du théorème fondamental de l'algèbre, ou *théorème de d'Alembert-Gauss*. En effet, il énonce que tout polynôme P à coefficients dans le corps des nombres complexes admet une racine a complexe elle aussi, mais pas forcément réelle. Quitte à factoriser ce polynôme par le polynôme $X - a$, dont on sait alors qu'il le divise, on peut écrire $P = (X - a)Q$ pour un polynôme Q de degré strictement inférieur et ré-appliquer le théorème fondamental à Q. En itérant le processus, on obtient que P se décompose comme un produit de polynômes de degré 1. On dit que P est scindé dans $\mathbb{C}$. On sait bien qu'une telle décomposition ne peut toujours être dans $\mathbb{R}$, puisqu'un trinôme du second degré de discriminant strictement négatif n'admet aucune racine réelle.

Le lien avec les équations différentielles linéaires ayant autant de paramètres que d'équations, qui ne sont autres que des systèmes linéaires bien évalués, autrement dit des matrices carrées, est possible grâce à la théorie de la réduction. On peut démontrer qu'une matrice carrée A est trigonalisable, c'est-à-dire semblable (i.e. à conjugaison par une matrice inversible près) à une matrice triangulaire supérieure, si et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé. Dans ce cas, on peut écrire :

$$A = P \begin{pmatrix} a_1 & & \star \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où P est une matrice inversible à I_n. Or, d'après le paragraphe précédent, tout polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ est scindé dans $\mathbb{C}$, et donc, toute matrice à coefficients réels est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $a_1, \dots, a_n, P, P^{-1}$ sont complexes). Une fois obtenu un système triangulaire, c'est un jeu d'enfants de le résoudre « de proche en proche », en partant du bas.

Il n'est pas difficile de voir réciproquement que la trigonalisabilité de toute matrice entraîne la scission de tout polynôme[1].

Cette équivalence entre la résolution d'équations différentielles et la recherche de racines d'un polynôme, se rencontre dans les plus petites classes grâce au modèle de l'oscillateur linéaire, qui engendre un polynôme caractéristique de degré 2.

On entend largement : les complexes ne servent à rien, car ils n'existent pas dans le monde réel. C'est une crainte bien compréhensible. Une seule pourtant de ces deux assertions est vraie. Les nombres complexes, certes, ne correspondent à pas grand-chose de réel, en théorie, mais ils n'en sont pas moins très utiles.

---

[1] En effet, tout polynôme est polynôme caractéristique d'au moins une matrice, de forme *compagnon*, qui s'exprime simplement en fonction des coefficients du polynôme en question.

À ce sujet, le mathématicien Jacques Hadamard dit : « Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe souvent par le domaine complexe ». Cette réflexion puissante a été reprise il y a quelques années par Hervé et Martine Queffélec pour illustrer leur ouvrage Analyse complexe, et particulièrement la partie sur le théorème des résidus. Ce théorème, fleuron de l'analyse complexe et de la théorie de l'intégration, due à Cauchy, et des séries de Laurent, permet dans nombre de cas de calculer des intégrales de fonctions d'expression réelle, dont les valeurs sont (forcément) réelles, en particulier on peut l'utiliser pour calculer des transformées de Fourier.

La clef de voûte de cette manipulation, que nous ne détaillerons pas, est la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles. Il est assez clair qu'une expression indéterminée dont le dénominateur est un produit de polynômes peut se décomposer selon la forme suivante :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$$

avec des coefficients a, b à déterminer par exemple en additionnant les fractions du membre de droite et en identifiant coefficient par coefficient. Ce procédé n'est possible, bien sûr, que si le dénominateur du membre de gauche est un produit de facteurs, ce qui est le cas si le polynôme est scindé. Ainsi, toute fraction rationnelle à coefficients complexes est décomposable en éléments simples dans $\mathbb{C}$.

Il est intéressant de comprendre ce qui se passe pour un polynôme de degré 3, de la forme : $X(X-i)(X+i) = X(X^2+1)$. D'après ce que nous venons d'expliquer, son inverse est une fraction rationnelle qui se décompose sous la forme suivante que l'on peut vérifier aisément :

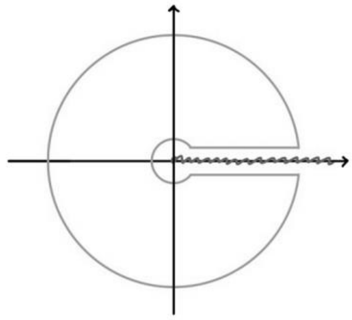
$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{1}{X-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+i}.$$

Bien sûr, cette écriture n'a aucun intérêt pour celui qui ne veut de résultat que dans le domaine réel, par exemple, un physicien. On peut cependant obtenir un résultat « minimal » en regroupant entre eux les pôles conjugués, car un polynôme à coefficients réels admet un complexe pour racine si et seulement s'il admet son conjugué pour racines, d'où l'existence de paires de racines conjuguées pour notre fraction rationnelle réelle. En multipliant les deux pôles complexes ensemble, on obtient la décomposition :

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\frac{2X}{X^2+1}.$$

En faisant le calcul, on se rend compte que les racines complexes se simplifient toujours pour obtenir une décomposition réelle, ce qui est donc bien plus satisfaisant.

Pour revenir à la vision générale des choses, l'exemple du théorème des résidus nous montre que l'introduction des nombres complexes revient (et c'est en fait très correct de le dire) à un ajout de dimension. Si les nombres réels sont disposés le long d'une droite continue, l'ensemble des nombres complexes est un plan qui contient strictement cette droite. La prophétie de Hadamard se reformule ainsi très visuellement. D'ailleurs, dans le théorème des résidus, on aura l'occasion d'introduire des chemins commençant et terminant sur la droite réelle mais parcourant d'autres parties du domaine complexe, en clef de serrure par exemple, comme pour le cas du prolongement complexe du logarithme qui n'est pas défini sur une demi-droite à déterminer par rotation près (voir l'image ci-contre).



Une dernière considération : l'apparente puissance exagérée de l'introduction de tout un plan complexe, qui n'est autre qu'une extension de dimension deux[2] du corps des nombres réels. Il n'en est rien. Le corps des nombres complexes est, par définition, le corps de décomposition du polynôme $X^2 + 1$, c'est-à-dire le plus petit corps contenant à la fois celui des nombres réels auquel on ajoute une solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$, c'est-à-dire le nombre i ou son opposé ; notons que c'est la façon commune d'introduire $\mathbb{C}$ dans les lycées. Le lecteur doit s'étonner d'une telle définition, quand elle est mise en regard du théorème fondamental de l'algèbre : le plus petit corps contenant $\mathbb{R}$ et i est en fait un corps contenant $\mathbb{R}$ et toutes les racines de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, ce qui est beaucoup plus. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, et que c'est la clôture algébrique du corps $\mathbb{R}$. Et il est remarquable que la clôture algébrique de $\mathbb{R}$ soit une extension du deuxième degré, et même de degré fini : la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, qui est donc l'ensemble des racines de polynômes à coefficients rationnels, est une extension de degré infini de $\mathbb{Q}$, plus formellement, ce n'est pas un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

[2] Car *deux* droites orthogonales donnent le plan entier.