CALCULATOR

ou comment déterminer une limite, la valeur d'une série ou d'une intégrale

LIMITE

D'une suite

- Forme déterminée : règles opératoires usuelles
- Forme indéterminée :
  - On factorise par le terme dominant
  - J'utilise les résultats de croissances comparées
  - S'il y a des produits positifs, passer au logarithme
  - J'essaie de faire des équivalents.
    - Le cas de l'exponentielle et du logarithme est subtil.
    - Le cas de la factorielle repose sur la formule de Stirling
  - S'il faut sommer, je fais un développement limité à un ordre bien choisi.
- Encadrement et théorème des gendarmes
- Théorème de la limite monotone : monotone et bornée
- Arguments de compacité :
  - Les sous-suites des termes pairs et impairs CV vers une même limite
  - Je peux montrer la CV vers une même limite d'une partition modulaire
  - Si la suite est bornée, je montre qu'elle a une unique valeur d'adhérence[1].
  - Jmq toute sous-suite admet une sous-suite convergente (gros level).
- Dans $\mathbb{R}$, je dispose du critère de Cauchy
- Il y a en fait deux suites :
  - Méthode des suites adjacentes
  - Transformer le problème en une convergence matricielle
- La suite est récurrente :
  - J'utilise un théorème de point fixe :
    - Si l'itératrice est contractante et l'espace compact, Banach-Picard
    - Lemme de la grenouille si bornée à décroissance rapide
  - Cas général : stabilisation, points fixes, etc.
    - Étude de l'attraction/répulsion des points fixes
    - Si l'itératrice est croissante, la suite est monotone
    - Si l'itératrice est décroissante, $g = f \circ f$ est croissante et on étudie les termes pairs et impairs.
  - Si $f(x) = x - ax^{b+1} + o(x^{b+1})$, $u_n \sim (abn)^{-\frac{1}{b}}$.

D'une fonction

- Utiliser la continuité pour composer

[1] En fait, il suffit (BW) de montrer que deux valeurs d'adhérence, si elles existent, sont les mêmes.

Mêmes remarques fondamentales.
Forme déterminée : règles opératoires usuelles
Forme indéterminée :
On factorise par le terme dominant
J'utilise les résultats de croissances comparées
Produit : c'est un quotient caché
Quotient :
Je multiplie par la quantité conjuguée
Je reconnais un taux d'accroissement
Si c'est dérivable, j'essaie d'appliquer la règle de l'Hôpital
Sinon, développement limité
Autres formes : je passe à la forme exponentielle
Dérivée :
Si je sais que la dérivée n-ième existe, je peux dériver le développement limité
Je reprends la définition du taux d'accroissement (surtout à l'ordre 1)
Si la limite est double, j'utilise le théorème de la *double* limite
D'une suite de fonctions : je détermine la limite simple d'abord, le mode de CV ensuite
Théorème du squeeze : f C^0, >0, décr., d'$\int$ CV : alors $\sum_n hf(nh) \to_{h\to 0} \int_0^\infty f$.
D'une intégrale : voir les théorèmes d'échange
Ne pas passer à côté d'un lemme de Riemann-Lebesgue

SÉRIE
Avant toute chose, je vérifie la divergence grossière, voire très grossière
J'essaie toujours un changement d'indice, pour retomber sur du connu
J'essaie de reconnaître un classique : géométrique, Riemann (règle du n^α), Bertrand, trigo
Les séries de Hardy reposent sur la méthode : $\int f$, $\int f'$ ACV $\Rightarrow \sum f(n)$ CV
Je connais aussi la série harmonique, la somme des pv α-ièmes, les restes de Riemann
Je vois *si je connais une majoration, un équivalent (cas positif attention !) ou un développement asymptotique de la suite sous-jacente (et alors s'arrêter soit au premier terme divergent de signe constant, soit absolument convergent)*
Convergence absolue implique convergence
Par télescopage (surtout s'il faut calculer) et lien suite-série
La série est semi-convergente :
S'il y a $(-1)^k$, j'applique le théorème des séries alternées
Sinon, transformation d'Abel et critère d'Abel
C'est un produit (puissances, factorielles...) :
Règle de d'Alembert
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$, si $a > 1$, CV ; si $a < 1$, DV.
S'il ne manque pas grand-chose, règle de Raabe-Duhamel (avec une SCV)
Encore un petit peu (mais après stop), test de Bertrand
Si ça ne marche pas, règle de Cauchy
Normalement ça conclut. Sinon, théorème d'Hadamard (pour les séries entières)

S'il y a des opérations logarithmiques, utiliser le critère de la loupe modulo p
Règle de Kummer si on est bizarre
C'est une moyenne :
Reconnaître du coin de l'œil une somme de Riemann. Ça se sent des fois
Méthode de Cesàro voire théorème de Cesàro ou corollaires
Théorèmes pan : $a, p > 0$, $(x_n) > 0$.
Si $x_{n+1} - x_n \sim \frac{a}{x_n^{p-1}}$, alors $x_n \sim (pan)^{\frac{1}{p}}$.
Si $x_{n+1} - x_n \sim -a x_n^{p+1}$, alors $x_n \sim \left(\frac{1}{pan}\right)^{\frac{1}{p}}$.
(u_n) t. q. $u_{n+1} - u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$. Alors u_n CV vers l et $u_n - l \sim \frac{-c}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.
C'est peut-être la série de Fourier d'une fonction à déterminer
On peut regrouper par paquets (termes généraux périodiques, discrets) pour sommabiliser
Revenir aux sommes partielles :
Les majorer si le t.g. est positif
Utiliser une comparaison série-intégrale si l'on reconnaît une fonction monotone
Dans $\mathbb{R}$, je dispose du critère de Cauchy
La comparaison *des sommes partielles (variable sur la somme) est possible dans le cas divergent, la comparaison des restes dans le cas convergent.*
Séries doubles : théorèmes de Fubini, théorème de Cauchy-Maertens

INTÉGRALE

Intégrale propre :
Si la fonction est polynomiale, ou une primitive classique, TFA.
Je me ramène au cas précédent par linéarité
Je me ramène au cas précédent par découpage de Chasles
Exploiter les parités et les symétries (notamment : si sym/$\frac{a+b}{2}$, $\int_a^b tf(t) = \frac{a+b}{2} \int f$).
J'applique l'astuce du « j'ajoute un t » pour faire une IPP. (Utile pour les fonction trigonométriques réciproques et les polynômes en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.)
C'est un polynôme × une exponentielle :
IPP successives pour diminuer le degré de P
C'est un quotient/inverse :
En premier lieu, j'essaie de reconnaître f'/f
J'essaie de reconnaître une fonction trigonométrique réciproque
Fractions rationnelles : je DES et j'applique la méthode classique : pour les éléments de degré 1, intégration directe. Pour les éléments de degré 2, je détache en deux morceaux comme appris étant jeune (et, si besoin, je mets le dénominateur sous forme canonique : avec l'astuce suivante, pas besoin si l'élément est à la puissance 1). Le premier morceau s'intègre directement. Pour l'autre, petit changement de variable translaté, puis deux méthodes : intégration par parties pour descendre le degré (attention, le sens de la relation est inverse à celui qu'on penserait) ; deuxième façon, changement de variable en tangente pour se ramener aux polynômes trigonométriques (voir après).

Rappel : cas de l'inverse d'un trinôme irréductible. Une primitive est de la forme de l'arctangente d'une fonction affine.

Polynômes trigonométriques. Un élément $\sin^n \cos^m$ s'intègre :

Si n ou m est impair, on se ramène à $\sin^{n'} \cos + \sin^{n''} \cos$ puis changement de variable en sinus, qui s'intègre

Si les deux sont pairs, on linéarise.

Fractions rationnelles trigonométriques : règles de Bioche

Fractions rationnelles hyperboliques : changement de variables e^u

Fraction rationnelle en $\sqrt{ax+b}$: changement de variables immédiat

Fraction rationnelle en $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (intégrales eulériennes) : méta-Bioche

Autre méthode : on factorise et écrit $(x-t)\sqrt{\frac{x-t'}{x-t}}$, intégrale abélienne.

Si carrément $\int \sqrt{ax^2+bx+c}$: IPP

Fractions rationnelles en $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{\gamma x+\delta}$: changement de variables $t=\sqrt{\gamma x+\delta}$ pour se ramener au cas précédent

Intégrales abéliennes : $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$: changement de variables immédiat

Type $\frac{1}{(x+a)^n}\sqrt{ax^2+bx+c}$: changement de variable $t=\frac{1}{x+a}$

Sinon, changement de variables (notamment tangente de l'arc moitié)

Intégrale impropre :

Avant toute chose, je regarde où sont les singularités et si elles sont réelles

J'essaie de reconnaître une intégrale classique : Riemann, Bertrand, trigo, Hardy

Je vois *si je connais une majoration, un équivalent (cas positif attention !) ou un développement asymptotique de l'intégrande (et alors s'arrêter soit au premier terme divergent de signe constant, soit absolument convergent)*

Convergence absolue implique convergence

J'essaie toujours un changement de variables, ou une IPP retrouver du connu

La fonction est décroissante ou croissante :

Une comparaison série-intégrale avec un encadrement d'équivalents

L'intégrale est semi-convergente :

Une intégration par parties

Règle d'Abel (déconseillée)

On peut essayer de regrouper par paquets (termes généraux périodiques, discrets)

C'est une suite d'intégrales : on trouve une relation de récurrence

Il y a plusieurs paramètres :

Il y a de l'exponentielle : j'essaie de reconnaître une transformée de Fourier

De la forme : $\int_0^{+\infty} g(x)e^{tf(x)}$: méthode de Laplace

Je vois d'abord si l'on ne peut pas faire des factorisations qui permettent d'intégrer

Sinon, je dérive, je trouve un lien avec l'intégrale de base et je résous une équa diff

Pas mal : on exprime l'intégrande sous DSE pour, si CVU, CVN, on échange et méthode 2

Pour les pros : passer à l'analyse complexe grâce au théorème des résidus. Ça marche pour :

- les fractions rationnelles trigonométriques (→ cercle),
- les fractions rationnelles sans pôles réels (→ portion de camembert),
- les transformées de Fourier de fractions rationnelles (→ demi-camembert),

- les mélanges du type sinus cardinal ($\rightarrow$ demi-couronne),
- bien sûr les intégrales complexes, notamment avec du Log ($\rightarrow$ trou de serrure) ou avec des pôles quadrillés ($\rightarrow$ rectangles, carrés)
- grâce à la fonction Γ qui joue un rôle central pour le calcul intégral complexe.

Revenir aux intégrales partielles :

Les majorer si le t.g. est positif

Intégrer et calculer une limite -> méthode 1

Dans $\mathbb{R}$, je dispose du critère de Cauchy

La *comparaison des intégrales partielles (variable sur l'intégrale) est possible dans le cas divergent, la comparaison des restes dans le cas convergent.*

Parfois, une IPP peut servir : si $\int^x f = F + \int^x g$ et $g = o(f)$