

Théorie de Teichmüller

1 Approfondissements sur les surfaces de Riemann

1.1 Surfaces de type fini

Définition. Une surface de type fini est une surface compacte privée d'un nombre fini de points.

Théorème. (Classification des surfaces à bord) Toute surface à bord de type fini est isomorphe à $\Sigma_{g,n,b} := \Sigma_g \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \bigcup_{i=1}^b D_i$ où les D_i sont des disques

ouverts. g est le genre, n le nombre de pointages et b le nombre de composantes de la frontière. Le triplet (g, n, b) est la signature de la surface. En particulier, les surfaces fermées sont entièrement déterminées par leur genre.

Définition. (Triangulation faible) Soit S une surface. Une triangulation (faible) est un triplet (S, V, F) où $V \subseteq S$ est fini, F est une collection fini d'arcs à extrémités dans S , et $S \setminus (V \cup E)$ est une réunion disjointe finie $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ de disques dont chacun est incident à trois éléments de E en comptant les multiplicités.

Exemple. Le tore se triangule par un sommet, trois arêtes et deux faces.

Définition. (Caractéristique généralisée) Un lemme facile donne que $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ (en triangulant le polygone fondamental, par exemple). On pose pour une surface non fermée $S : \chi(S) = 2 - 2g - n - b$. Remarque : cette définition coïncide avec 1) la définition homologique 2) la généralisation des triangulations aux surfaces trouées.

1.2 Automorphismes des surfaces de Riemann

Théorème. (Uniformisation, admis) Toute surface de Riemann simplement connexe X est biholomorphe à $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ où $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\} \simeq \hat{D}^1$. En particulier, tout domaine simplement connexe strict du plan complexe est biholomorphe au disque de Poincaré.

Lemme. Soit $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine (= ouvert connexe) et $G < PSL_2(\mathbb{C})$ tel que G fixe D et agit librement sur D , i.e. pour tout $g \in G$ $g(D) = D$ et pour tout $g \neq e$ les points fixes de g sont hors de D . Si de plus l'action de G est proprement discontinue (pour tout compact $K \subseteq D$, $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, le quotient D/G est une surface de Riemann).

Corollaire. Toute surface de Riemann X est un quotient de $D = \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ ou \mathbb{H} : il existe $G < \text{Aut}(D)$ tel que $G \curvearrowright D$ librement et proprement discontinûment et $X = D/G$. En effet, $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$ où \tilde{X} est le revêtement universel de X .

Exemples.

1. (Plan complexe) $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Aff}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$.
2. (Sphère de Riemann) $\text{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C})$. En effet, $PSL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par multiplication matricielle. L'action sur $\hat{\mathbb{C}}$ est explicitement :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On les appelle transformations de Möbius.

3. (Tores) On prend $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\Im(\tau) > 0$. Alors

$$\Lambda_\tau = \langle g_1, g_\tau \rangle = \{z \mapsto z + m + n\tau, n, m \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m + n\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n, m \in \mathbb{Z} \right\} < PSL_2(\mathbb{C})$$

vérifie les hypothèses précédentes sur $D = \mathbb{C}$.

Vérifions la discontinuité propre. La distance de translation de $g \in \Lambda_\tau$ sur \mathbb{C} est $T_g = \inf\{|g \cdot z - z|, z \in \mathbb{C}\}$. (Dans ce cas, elle est réalisée en tout point de \mathbb{C} .) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. On observe que si $T_g > 2\text{diam}(K)$, $g(K) \cap K = \emptyset$. Ce quotient est un tore : tout point de \mathbb{C} s'écrit $x + y\tau$ de manière unique d'où une application bijection $[x + y\tau] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) \in S^1 \times S^1$.

4. (Surfaces hyperboliques) $\text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$ (\mathbb{R} et non \mathbb{C}) qui agit par homographies.

Heuristique. Ainsi \mathbb{C}/Λ_τ est un tore. Mais pour quels τ, τ' ces quotients sont-ils biholomorphes ? La théorie de Teichmüller y répond.

Propriété. (Quotients de $\hat{\mathbb{C}}$) Toute surface de Riemann de revêtement universel $\hat{\mathbb{C}}$ est biholomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$ (les transformations de Möbius ont toujours des points fixes).

Propriété. (Quotients de \mathbb{C}) Si X est une surface de Riemann de revêtement universel \mathbb{C} , elle est biholomorphe à \mathbb{C}, \mathbb{C}^* ou à un $\mathbb{C}/\Lambda_{\lambda, \mu}$ où λ, μ sont \mathbb{R} -linéairement indépendants. Si X est une surface de Riemann diffeomorphe à \mathbb{T}^2 , alors le revêtement universel de X est biholomorphe à \mathbb{C} . La preuve est formative. On utilise :

1. Il n'existe pas de sous-groupe strict de $PSL_2(\mathbb{R})$ tel que \mathbb{H}/G existe et soit un tore.
2. Si G existe, $G \simeq \mathbb{Z}^2$.
3. Si $G < PSL_2(\mathbb{R})$ et G agit proprement discontinûment sur \mathbb{H} , si G est abélien, alors $G = \mathbb{Z}$ ou un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. (Classification des éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$) Si $g \in PSL_2(\mathbb{R}), g \neq e$ alors

- ★ soit $\exists! z \in \mathbb{H} \quad g(z) = z$ auquel cas g peut être conjugué dans $SO(2)$.
On dit que g est *elliptique*;
- ★ soit $\exists! x \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x) = x$ auquel cas g peut être conjugué dans $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$. On dit que g est *parabolique*;
- ★ soit $\exists x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x_i) = x_i$ auquel cas g est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. On dit que g est *hyperbolique* ou *loxodromique*.

Corollaire. Toute surface de genre ≥ 2 n'est pas d'un des genres précédents. On dit qu'elle est *hyperelliptique*. **Exemples.** (*Quotients de \mathbb{H}*) Il y a donc beaucoup de quotients de \mathbb{H} , car tous les précédents sont S^2 ou \mathbb{T}^2 . On dispose par exemple des surfaces hyperelliptiques $X = \tilde{X} \cup \{(\infty, \infty)\}$ où $a_1, \dots, a_{2g+1} \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\tilde{X} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = (z - a_1) \dots (z - a_{2g+1})\}$. On montre qu'elle a une structure complexe, compacte et connexe. De plus, elle est de genre g . Pour $g \geq 2$ c'est donc un quotient de \mathbb{H} . Par conséquent, toute surface compacte orientable a une structure de surface de Riemann.

Définition. (*Involution hyperelliptique*) $\iota: X \longrightarrow X$
 $(z, w) \longmapsto \begin{cases} (z, -w) & (z, w) \neq (\infty, \infty) \\ (\infty, \infty) & \text{sinon} \end{cases}$
est un automorphisme de X . π est alors l'application quotient $X \rightarrow X/\iota$ qui est le revêtement branché $X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ permettant le calcul de Riemann-Hurwitz.

1.3 Géométrie riemannienne sur les surfaces orientables

Fait. Toute surface de Riemann est équipée d'une métrique riemannienne de courbure constante 1, 0 ou -1 . Ces dernières sont dites *hyperboliques*.

Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec les métriques complètes de courbure constante 1, 0 ou -1 à isométrie près et homothétie près dans le cas euclidien.

Théorème. (*Killing-Hopf, admis*) Toute 2-variété riemannienne complète simplement connexe de courbure constante 1, 0 ou -1 est isométrique à S^2 , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H} .

Propriété. Les isométries préservant l'orientation sont :

- ★ $\text{Isom}^+(\mathbb{S}^2) = SO(3)$.
- ★ $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$.
- ★ $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Propriété. Si $\Sigma_{g,n,b}$ est hyperbolique, $\text{aire}(\Sigma_{g,n,b}) = 2\pi(2g + b + n)$.

Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec ses classes de métriques riemanniennes conformes à difféomorphisme près.

2 Espaces de Teichmüller, espaces de module

2.1 Cas d'étude : le(s) tores

Remarque. Par uniformisation il existe une unique structure complexe en genre 0 S^2 .

Propriété. À rotation et dilatation près, tout tore est de la forme $R_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ par $(\lambda, \mu) \rightsquigarrow (1, \tau)$. Alors pour tous $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$, R_τ et $R_{\tau'}$ sont biholomorphes si et seulement si $\tau' = h(\tau)$ pour une homographie $h \in SL_2(\mathbb{Z})$. Autrement dit : les surfaces de Riemann difféomorphes au tore à biholomorphisme près sont en bijection avec $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathcal{M}_1$, $\mathbb{H} = \mathcal{T}_1$.

Propriété. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, il existe $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g\tau \in \mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$. De plus :

- ★ si $\tau \in \tilde{\mathcal{F}}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{\tau\}$;
- ★ si $\Re(\tau) = \frac{1}{2}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, g\tau + 1\}$;
- ★ si $\Re(\tau) = -\frac{1}{2}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, g\tau - 1\}$;
- ★ si $|\tau| = 1$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, -\frac{1}{\bar{\tau}}\}$.

Propriété. Deux *marquages* $\Sigma_p = [A_p, B_p], \Sigma'_p$ d'un tore $\ni p$, i.e. choix de générateurs du GF, sont équivalents si un chemin $p \rightarrow p'$ conjugue A_p, A'_p et B_p, B'_p . Alors les structures marquées $R_\tau, R_{\tau'}$ sont équivalentes si et seulement si $\tau = \tau'$. Ainsi \mathcal{T}_1 est l'ensemble des structures complexes marquées sur le tore à difféomorphisme près.

On peut définir une façon de marquer plus commode.

Propriété. Deux difféos préservant l'orientation $f_i: S \rightarrow R_i$, R_i surface de Riemann, S surface orientée difféomorphe au tore, sont *équivalents* si $f_2^{-1}h f_1 \sim id_S$. Alors l'ensemble des (R, f) , R surface de Riemann, $f: S \rightarrow R$ à équivalence près est en bijection avec \mathcal{T}_1 via $(R, f) \mapsto (R, f_*([A]_p[B]))$.

2.2 Cas général et marquages de surfaces

Définition. (*Espace de Teichmüller*) Soit S une surface orientée de type fini. L'espace de Teichmüller de S est

$$\mathcal{T}(S) = \{(R, f), R \text{ surface de Riemann}, f: S \rightarrow R \text{ difféomorphisme préservant l'orientation}\} / \sim$$

où $(R_1, f_1) \sim (R_2, f_2) \iff \exists h: R_1 \rightarrow R_2$ biholomorphisme tel que $f_2^{-1}h f_1 \sim id_S$. Si S est de genre g à n pointages, on note $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}_{g,n}$ et l'on impose que l'homotopie à id soit relative aux pointages (un à un, ce qu'il n'est pas nécessaire d'imposer!).

Définition. Soit S une surface de Riemann fermée de genre g . Un *marquage* de S est un ensemble de générateurs du groupe fondamental $W = (A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g)$ en un point p tels que $\pi[A_i, B_i] = e$. Deux marquages W, W' sont *équivalents* lorsqu'il existe une chemin continu entre leur point d'ancrage tel que le morphisme induit sur les GF envoie W sur W' . Deux paires de surfaces de Riemann marquées sont

équivalentes s'il existe un biholomorphisme dont le morphisme induit envoie W sur W' .

Théorème. Soit S une surface fermée marquée par Σ . Alors $\mathcal{T}(S)$ est en bijection avec les paires (R, Σ_p) où R est une surface de Riemann fermée difféomorphe à S , $p \in R$ et Σ_p un marquage sur R à équivalence près, par $[(R, f)] \mapsto [(R, f_*(\Sigma))]$.

Lemme. (Alexander) Soit $\varphi : D^2 \rightarrow D^2$ un homéomorphisme tel que $\varphi|_{S^1} = id$. Alors φ est isotope à D . **Propriétés.**

1. Si S est difféomorphe à $\Sigma_0, \Sigma_{0,1}, \Sigma_{0,2}, \Sigma_{0,3}$, alors $\mathcal{T}(S)$ est un point.

2. $\mathcal{T}(\Sigma_{1,1}) \simeq \mathcal{T}(\Sigma_1)$.

Définition. (Mapping class group) $(\Sigma, x_1, \dots, x_n)$ surface fermée orientée. Alors $MCG(\Sigma, x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble des *difféotopies*, i.e. classes à homotopie près des $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ difféomorphismes pointés préservant l'orientation.

Définition. (Espace de modules) $MCG(\Sigma)$ agit sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ par $[X, f] \mapsto [X, f \circ \varphi^{-1}]$. Son quotient est l'espace de modules. Dans $\mathcal{M}(\Sigma)$, les points marqués sont encore marqués.

Proposition. $MCG(\Sigma_{0,n})$ est trivial pour $n \leq 3$.

Définition. (Torsion de Dehn) Sur l'anneau $A = [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on considère $T : (t, [\theta]) \mapsto (t, [\theta + t])$.

Propriété. $MCG(A) \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle [T] \rangle$.

2.3 Topologie sur les espaces de Teichmüller

2.3.1 Différentielles de Teichmüller

2.3.2 Un peu de géométrie hyperbolique

2.3.3 Décomposition en pantalons