$\triangleright$ Nous donnons une preuve plutôt laborieuse de ce résultat, dite « par au-dessus » (*top-down* en anglais). Celle-ci est beaucoup moins judicieuse qu'une preuve « par en dessous » (*bottom-up* en anglais), qui est l'autre preuve classique du lemme de Zorn, mais a l'avantage de ne pas recourir à la théorie des ordinaux.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné inductif. Remarquons que l'ensemble vide n'est pas inductif. Soit $\sigma$ une fonction de choix sur la famille de toutes les parties non vides de $E$. Pour $X \subseteq E$ et $a \in E$, on note $X \preccurlyeq a$ pour $\forall x \in X, x \leqslant a$ et de même pour une inégalité stricte. Pour toute chaîne $C$, on définit $C^+ = C \cup \{\sigma(\{a \mid C \prec a\})\}$ si $\{a \mid C \prec a\}$ est non vide, et $C^+ = C$ sinon.

Soit $C$ une chaîne quelconque de $E$ (il en existe toujours une, par exemple la partie vide). Parce que $E$ est inductif, il existe $a$ vérifiant $C \preccurlyeq a$ par définition. Si $a$ est maximal dans $E$, il n'y a rien à faire. Sinon, par définition, il existe un certain $b$ dans $E$ vérifiant $a < b$, et donc par transitivité $C \prec b$. Par conséquent, si $C$ est une chaîne telle que $\{a \mid C \prec a\}$ soit vide, c'est-à-dire vérifiant $C^+ = C$, alors il existe une élément maximal dans $E$. Nous allons construire une telle chaîne.

On appelle *close* toute famille $K$ de chaînes de $E$ telle que $C \in K$ entraîne $C^+ \in K$, et que, si $J$ est une partie de $K$ formées de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion, alors leur réunion appartienne encore à $K$. La famille de toutes les chaînes de $A$ est évidemment close, et l'on vérifie que toute intersection de familles closes est close. Il existe donc une plus petite famille close $K$ (l'intersection de toutes les familles closes, qui ne pose pas de problème de définition puisque l'ensemble des familles closes est non vide). Posons enfin $K' = \{C \in K \mid \forall D \in K,\ C \subseteq D \vee D \subseteq C\}$. On va montrer que $K' = K$, c'est-à-dire que $K$ est composée de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Supposons cela démontré. On pose $C$ la réunion des éléments de $K$. Par définition, on a $C \in K$ et donc $C^+ \in K$. Or, par construction, on a $D \subseteq \bigcup K = C$ pour toute chaîne $D$ dans $K$. En particulier, on a donc $C^+ \subseteq C$, d'où $C^+ = C$, comme souhaité.

Revenons sur notre postulat. Puisque $K$ est la plus petite famille close, et que l'on a $K' \subseteq K$, il suffit, pour montrer $K' = K$, de montrer que $K'$ est close. Soit $C \in K'$. Posons $K_C = \{D \in K \mid D \subseteq C \vee C^+ \subseteq K'\}$. Supposons que $D \in K_C$. Si $C^+ \subseteq D$, on a *a fortiori* $C^+ \subseteq D^+$. Pour $C = D$, on a trivialement $C^+ = D^+$. Supposons alors $D \subsetneq C$. Par hypothèse, $D^+$ est dans $K$, et $C$ est dans $K'$, donc on a $D^+ \subseteq C$ ou $C \subsetneq D^+$. Le second cas est incompatible avec $D \subsetneq C$ puisque $D^+$ privé de $D$ est un singleton. Dans tous les cas, $D \in K_C$ entraîne donc $D^+ \in K_C$. Supposons maintenant que $J$ soit un sous-ensemble de $K_C$ formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Ou bien on a $D \subseteq C$ pour tout $D$ dans $J$, et l'on a alors $\bigcup J \subseteq C$, ou bien il existe $D$ dans $J$ vérifiant $C^+ \subseteq D$, et l'on a alors $C^+ \subseteq \bigcup J$ : dans les deux cas, $\bigcup J$ est dans $K_C$. Ainsi, $K_C$ est une famille close, donc $K_C = K$, ce qui montre que $C^+$ est dans $K'$ dès que $C$ s'y trouve.

Finalement, supposons que $J$ est un sous-ensemble de $K'$ formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Soit $D$ une chaîne quelconque dans $K$. Ou bien on a $C \subseteq D$ pour toute chaîne $C$ dans $J$, dont on déduit que $\bigcup J \subseteq D$, ou bien il existe $C$ dans $J$ vérifiant $D \subseteq C$, dont on déduit que $D \subseteq \bigcup J$. Donc, dans tous les cas, $\bigcup J \in K'$. Il en résulte que $K'$ est close, et on a donc $K' = K$. ■

### 3.2.2 L'axiome de fondation

Un petit développement sur l'axiome de fondation, axiome supplémentaire de la théorie des ensembles classiques (au même titre que l'axiome du choix) et qui n'est pas du tout utile.

C'est pourquoi les discussions à propos de son adoption ne sont pas véhémentes, et l'on peut considérer des théories tout à fait semblables en termes des mathématiques que nous connaissons munies soit d'un axiome de fondation, soit d'un axiome d'anti-fondation. Le principe général de l'axiome de fondation est d'interdire la construction d'ensembles qui s'appartiennent eux-mêmes.

#### 3.2.2.1 Retour sur la relation d'appartenance

En théorie naïve des ensembles, on pose qu'il existe des objets, appelés *ensembles*, liés par une relation dite d'appartenance, et notée $\in$, et dont les règles de construction sont regroupées en une liste d'axiomes. Tout ce que nous appelons *élément* est ensemble, et réciproquement tout ensemble peut-être vu comme un élément[1]. Ce que sont les ensembles n'est pas précisé. Plus généralement, on regroupe le concept intuitif de collection d'objets sous le terme de *classe*, de sorte que tout ensemble soit une classe, mais ce n'est pas réciproque : par exemple, la classe regroupant tous les ensembles n'est pas un ensemble (paradoxe de Russell) ; elle est dite impropre.

La liste des axiomes choisis constitue les fondements de la théorie ; si quelques axiomes semblent essentiels à la construction d'une théorie des ensembles pertinente, pour d'autres, la communauté n'est pas décidée, tant qu'ils sont indépendants (aucun axiome n'est conséquence logique des autres), c'est en particulier le cas pour l'axiome du choix. Ceci mène à l'élaboration de différents *modèles* d'une théorie, à laquelle nous associons les noms de leur créateur, avec plus ou moins de précision : $Z$ pour Zermelo, $ZF$ pour Zermelo et Fraenkel, $ZFC$ pour ce système d'axiomes additionné de l'axiome du choix.

Ainsi les axiomes, qui sont admis obtusément, ont pour but primaire de régir les règles de construction d'ensembles et relatives à la relation d'appartenance notée $\in$, en hommage au $\epsilon$ grec, pour le verbe « est » en latin. Le but de cette section est de donner de la relation d'appartenance quelques propriétés importances, avec pour conséquence notable la construction véritable des entiers naturels.

##### 3.2.2.1.1 Notion intuitive d'appartenance

**Axiome.** *(Relation d'appartenance)*

Sur la classe des ensembles, il existe une relation notée $\in$, c'est-à-dire une partie (impropre) de $\mathrm{Ens} \times \mathrm{Ens}$.

[1] En effet, si $E$ : Ens, *i.e.* « $E$ est un ensemble », alors d'après l'axiome de la paire, $E \in F$ en posant $F = \{E\}$.

**Exemples**

1. $1, 2, 3 \in \mathbb{N}$ ;
2. $-1 \notin \mathbb{N}$ ;
3. $-1, 1 \in \mathbb{Z}$ ;
4. $(-1, 1) \notin \mathbb{N}$ ;
5. $(-1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ;
6. $(-1, 1) \in \{-1\{\times\{1\}, \{-1, 1\}^2$ ;
7. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ ;
8. $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}^2$ ;
9. $\mathbb{N} \notin \mathbb{R}$ ;
10. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ;
11. $\emptyset \notin \emptyset$ ;
12. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ ;
13. $\{1, 2, 3\} \notin \{1, 2, 3, 4\}$ ;
14. $\left\{^{\{1,2,3\}\in\{\{1,2,3\},1,2,3,4}\right\}$ ;
15. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{-1\}$ ;
16. $\{\emptyset\} \notin \emptyset$.

Quelques propriétés très intuitives.

**Propriété.** ***(Non-transitivité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance n'est pas transitive (mais pas intransitive).

▷ Il suffit de prendre pour exemples : $1 \in \{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 2\}$, mais $1 \notin \{\{1, 2\}, 2\}$. La construction et structure des ensembles entiers naturels sera justifiée plus tard. ■

**Propriété.** ***(Non-totalité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance est partielle.

▷ On a $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ et $\{\{\emptyset\}\} \notin \emptyset$ (le vérifier soi-même). ■

**Remarques.**

1. Par essence de la théorie des ensembles, tout objet est ensemble. Un problème émerge : il n'y a pas de distinction absolue entre les ensembles et leurs éléments. On comprend que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,..., $\mathbb{R}$, soient des ensembles, mais on conçoit mal que $1, 2, \pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t, \int_1^{+\infty} e^t dt$ le soient également. C'est pourtant le cas.
2. L'axiome de fondation, noté $AF$ dans la suite, répond aux questions suivantes : $\in$ est-elle réflexive ? et $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique ? On propose au lecteur de se poser la question lui-même avant de trouver la réponse dans la suite.

**Exercice 5**

Expliciter les ensembles $1, 2, \pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t$.

#### 3.2.2.1.2 Axiomes déjà connus quant à $\in$

**Axiome.** ***(Principe d'extensionnalité)***

Pour tous $A, B$ : Ens, $(A = B) \Leftrightarrow (\forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$.

**Remarques.**

1. C'est le premier axiome.
2. C'est en fait une définition, celle de « $=$ » . Cette relation d'égalité est définie entre les ensembles, et l'on peut garder en mémoire que toutes les relations d'égalités utilisées quotidiennement sont des *restrictions* de cette relation définie sur une classe impropre.
3. Le syntagme « $\forall x$ » seul apparaissant dans la formulation de l'axiome n'est pas un abus, mais la notation la plus correcte pour : « pour tout ensemble $x$... » . Quand on note, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}(x) = x$, on raccourcit la plus correcte : $(\forall x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Re}(x) = x)$.

Un petit rappel qui ne fait pas de mal.

**Définition.** ***(Inclusion)***

Pour tous $A, B$ : Ens, on dit que $A \subseteq B$ si $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$.

**Remarque.** L'idée fondamentale de l'inclusion est son rapport avec l'appartenance : l'appartenance $\in$ est un notion locale, alors que l'inclusion $\subseteq$ est une notion globale.

On donne quelques applications du principe d'extensionnalité, sachant qu'un peu de raisonnement axiomatique n'est pas luxueux. Dans le théorème suivant, l'existence d'un ensemble des parties en conséquence de l'axiome d'existence d'ensemble des parties. Nous ne donnons pas tous les axiomes, au risque de faire inventaire. Le lecteur intéressé peut les trouver à l'adresse : http ://math.univ-lyon1.fr/ melleray/AnnexeA.pdf.

**Théorème.** ***(Identité d'ensembles par les ensembles des parties)***

Pour tous $A, B$ : Ens, $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

$\triangleright$ Si $A = B$, $\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Or $\forall X\ X \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in X\ x \in A$, donc on vérifie : $\forall X\ X \subseteq A \Leftrightarrow X \subseteq B$, soit par définition $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ : c'est l'extensionnalité, car $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Réciproquement, si $A \neq B$, il existe $x \in B$, $x \notin A$ (ou $x \in A, x \notin B$, cas qui se traite de la même manière). Dans le premier cas, $\{x\} \subseteq B$ mais $\{x\} \nsubseteq A$, car sinon $x \in A$. Ainsi $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ mais

$\{x\} \notin \mathcal{P}(A)$, donc par extensionnalité $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$. Par contraposée, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \Rightarrow A = B$, d'où l'équivalence. ■

**Remarque.** Une chose remarquable du théorème, et que l'égalité des ensembles des parties n'est qu'une égalité d'ensembles, et pas une correspondance deux à deux des parties.

**Théorème.** ***(Singletons associés)***

$\forall A, B \; A = B \Leftrightarrow \{A\} = \{B\}$.

▷ D'une part, on suppose $A = B$. Soit $x \in \{A\}$. Alors puisque c'est un singleton, $x = A$. Or $A = B$, donc $x = B$, et $B \in \{B\}$ donc $x \in \{B\}$. Ainsi $\{A\} \subseteq \{B\}$. Semblablement, $\{B\} \subseteq \{A\}$, donc par double inclusion $\{A\} = \{B\}$.

Réciproquement, supposons $\{A\} = \{B\}$. $A \in \{A\}$ et $\{A\} = \{B\} \Leftrightarrow (\forall x \in \{A\} \; x \in \{B\} \wedge \forall x \in \{B\} \; x \in \{A\})$. Le premier point de la conjonction, avec la première remarque faite donne $A \in \{B\}$, soit $A = B$, car $\{B\}$ est un singleton. ■

**Remarques.**

1. De même que pour le théorème précédement, l'existence du singleton contenant $A$ est axiomatique. (Elle vient de l'axiome... de la paire. Il n'y pas d'axiome du singleton : pour l'en déduire, il suffit de prendre, dans la paire, les deux éléments identiques, et l'on se rend compte qu'un axiome de singleton serait superflu, car il est déjà constructible à partir de l'axiome de la paire.)
2. La contraposée du théorème donne : $A \neq B \Leftrightarrow \{A\} \neq \{B\}$.

**Propriété.** ***(Partition triviale par événements atomiques, partition discrète)***

Soit $\Omega$ un ensemble. Alors $(\{x\})_{x\in\Omega}$ partitionne $\Omega$.

▷ Il suffit de reprendre point par point la définition de partition.

- ⋆ **Habitations.** Soit $x \in \Omega$, c'est-à-dire $\{x\}$ dans la partition. $\mathrm{card}(\{x\}) = 1 \neq 0$, donc les parties de la partition ne sont pas vides.
- ⋆ **Disjonction deux à deux.** C'est la contraposée du théorème des singletons associés.
- ⋆ **Réunion.** $\bigcup_{x\in\Omega} = \Omega$. En effet : $X \in \bigcup_{x\in\Omega} \Leftrightarrow \exists x \in \Omega \; x = X$, soit $\bigcup_{x\in\Omega} \Leftrightarrow x \in \Omega$. Ainsi, on a l'égalité par extensionnalité,

ce qui termine la preuve. ■

**Remarque.** On aurait pu le démontrer beaucoup plus rapidement : l'égalité sur $E$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont les $(\{x\})_{x\in\Omega}$ et d'après le théorème fondamental des relations d'équivalence, c'est une partition de $\Omega$.

#### 3.2.2.1.3 Clarification de l'ambivalence entre ensemble et élément

On a vu que tout élément est en fait un ensemble complétement, et que la distinction entre les deux n'est réellement qu'un agrément de langage. Dans l'assertion :

$$E \in F,$$

$E, F$ sont des ensembles, mais on dit plutôt que $E$ est un élément, à savoir un élément de $F$. D'autre part, tout ensemble peut être vu comme un élément, on l'a déjà remarqué, car $\forall x, \in x \in \{x\}$, ce qui justifie de confondre le concept d'élément avec celui d'ensembles. Nous voulons, dans ce qui suit, corriger les imprécisions mentales issues de l'ambivalence entre les deux termes.

**Propriété.** ***(Inclusions générales)***

*(i)* Tout ensemble inclut un ensemble ;
*(ii)* tout ensemble est inclus dans un ensemble ;
*(iii)* si $\mathrm{card}(E) \geqslant 1$, un ensemble $E$ inclut un autre ensemble ;
*(iv)* dans le cas général, tout ensemble est inclus dans un autre ensemble.

▷ Dans chacun des cas :

(1) $E \subseteq E$ ;
(2) $E \subseteq E$ ;
(3) $\emptyset \subseteq E$, et $E \neq \emptyset$, car, par hypothèse, il est de cardinal non nul, et l'ensemble vide existe d'après un axiome ;
(4) Soit $F$ un ensemble, $F \notin E$. Il existe d'après le paradoxe de Cantor. Alors $E \subseteq E \cup \{F\} = G$, mais $G \neq E$, car $F \in G$ mais $F \notin E$,

et tout a été démontré. ■

En général, un élément d'un ensemble n'en est pas une partie. Par exemple $\{1\} \in \{\{1\}\}$, mais $1 \notin \{\{1\}\}$ donc $\{1\} \nsubseteq \{\{1\}\}$. Ceci n'est pas universel, c'est même faux dès que $E \ni \emptyset$ (pourquoi ?). Réciproquement, une partie d'un ensemble, en général, ne lui appartient pas : $\{1, 2\} \notin \mathbb{N}$ alors que $\{1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$.

**Propriété.** ***(Remarques supplémentaires)***

*(i)* Un ensemble n'est pas nécessairement disjoint de l'ensemble de ses parties ;
*(ii)* on peut avoir $E \subseteq F$ et $E \in F$ même si $E \neq \emptyset$ ;
*(iii)* pour tout $E$, il existe $F$ tel que $E \subseteq F$ et $E \in F$.

▷ (1) et (2) ont déjà été traités ci-dessus. Pour (3), il suffit de choisir $F = E \cup \{E\}$. ■

Remarquons que $E \cup \{E\} \neq E$ : cette propriété universelle découle de l'axiome de fondation ; avant de l'introduire, on rend compte des implications d'une trop grande liberté dans les constructions relatives relation d'appartenance.

#### 3.2.2.2 Bizarreries de la relation d'appartenance

Formalisons les conséquences des propriétés juste précédentes, pour en montrer les limites. Le premier objet bizarre engendré par de telles constructions est celui d'*ensemble transitif*.

##### 3.2.2.2.1 Ensembles transitifs

On a vu que $\in$ n'était pas *a priori* transitive, mais également, qu'elle n'était pas pour autant intransitive. Les ensembles transitifs sont tels que la transitivité est toujours vraie, lorsqu'on ne regarde qu'eux, un par un.

**Définition.** ***(Ensemble transitif)***

Un ensemble est dit *transitif* si les éléments de ses éléments en sont tous des éléments, autrement dit, $A$ est transitif si et seulement si $\forall x \in A \forall a \in X \quad x \in A$.

**Exemples**

1. $\emptyset$ est transitif. En effet, $\forall x \in \emptyset \; \forall a \in x \; x \in \emptyset$, car toute propriété commençant par $\forall x \in \emptyset$ est vraie par principe d'explosion ;
2. $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ est transitif (le vérifier) ; ainsi l'ensemble vide n'est pas le seul transitif.

La notion d'ensemble transitif n'est pas du tout intuitive : elle montre les pathologies de la relation d'appartenance. $AF$ n'interdit pas les ensembles transitifs, mais il les limite[1], en pratique, à ceux que nous voyons maintenant, c'est-à-dire, l'ensemble vide et ses composés selon le théorème suivant.

L'ensemble des parties d'un ensemble $A$ est noté indifféremment $\mathcal{P}(A)$ ou $\beta(A)$.

**Propriété.** ***(Caractérisation de la transitivité par l'ensemble des parties)***

Un ensemble $A$ est transitif si et seulement si $A \subseteq \beta(A)$.

▷ C'est une simple reformulation de la définition. Le lecteur un peu perdu aura intérêt à rédiger l'équivalence. ■

**Théorème.** ***(Construction des ensembles transitif)***

Soit $A$ un ensemble transitif. Alors :

(1) $A \cup \{A\}$ est transitif ;

(2) $\mathcal{P}(A)$ est également transitif.

▷ On montre l'une et l'autre des deux assertions :

[1] En effet, si $E \in E$, alors $E$ est automatiquement transitif.

*(i)* On fait une disjonction des cas : si $x \in A \cup \{A\}$, soit $x \in A$, dans ce cas, on applique la transitivité de $A$, donc pour tout $a \in x$, $x \in A$ donc $x \in A \cup \{A\}$. Si d'autre part $x \in \{A\}$, alors $x = A$, donc si $a \in x = A$, $a \in A$ donc $a \in A \cup \{A\}$ de même.

*(ii)* Si $x \in a \in \mathcal{P}(A)$, $x \in a \subseteq A$, soit $x \in A$ par définition de l'inclusion, donc par définition $x \subseteq A$, soit $x \in \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(A)$ est transitif.

Ainsi l'on a montré les deux règles de construction. ■

On espère avoir assez brouillé les esprits croyant l'apparente commodité de la relation d'appartenance. Avant de passer à l'énoncé de $AF$, on rappelle le paradoxe suivant, beaucoup utile.

#### 3.2.2.2.2 Paradoxe de Russell

Soit la collection des objets : $\{X \mid X \notin X\} = \mathcal{C}$.

**Paradoxe.** ***(Paradoxe de Russell)***

La construction de $\mathcal{C}$ est paradoxale.

▷ Par principe logique de tiers-exclu, on a, soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Supposons pour commencer $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Alors par définition de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}$ est un $X$ tel que $X \in \mathcal{C}$. Inversement, supposons que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Par définition, $\mathcal{C}$ contient tous les $X$ tels que $X \notin X$, et $\mathcal{C}$ vérifie ce prédicat logique, donc $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Ainsi, dans les deux cas logiques possibles, on a ($\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$), donc cette proposition est universellement vraie. Or elle est universellement fausse selon le principe de non-contradiction, donc la propriété « la propriété $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ est vraie » est la fois vraie et fausse, ce qui est contradictoire par non-contradiction. ■

Le constat du paradoxe de Russell a conduit à la création d'un des premiers axiomes de la théorie des ensembles, les schémas de séparation : on ne peut pas construire des ensembles à partir de rien, mais il y a une règle : si $E$ existe, et $\mathcal{P}$ est un prédicat logiquement bien formé sur $E$, alors on peut considérer l'ensemble $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, d'où le nom de définition par séparation et compréhension. C'est la raison pour laquelle il faut écrire toujours : $\forall x \in \mathbb{R}$..., $\forall f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$... (Notons qu'il faut également postuler l'existence d'au moins un ensemble, ce que l'on fait avec l'axiome de l'ensemble vide.)

La faute commise dans le paradoxe de Russell est d'avoir postulé l'existence de l'ensemble $\mathcal{C}$ : il n'est pas défini par séparation, donc *a priori*, il n'existe pas. En effet, l'on sait que $\mathcal{C}$, d'après l'axiome de fondation, est Ens la classe de tous les ensembles, et d'après le théorème de Cantor, ce n'est pas un ensemble, autrement dit une classe impropre.

#### 3.2.2.3 L'axiome de fondation proprement dit

⟶ **Notation.** On notera $ZF_\bullet$ l'ensemble des axiomes de Zermelo-Fraenkel sans l'axiome de fondation, et $ZF = ZF_\bullet + AF$.

On rappelle les quelques interrogations initiales de cette section :

⋆ $\in$ est-elle réflexive ?

⋆ $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique, ou sous quelles conditions ?

[label=⋆] c'est-à-dire, existe-t-il, et lesquels, des ensembles $E, F$ tels que :

⋆ $E \in E$ ?

⋆ $E \in F$ et $F \in E$ ?

#### 3.2.2.3.1 Énoncé et premières propriétés

**Axiome.** *(Axiome de fondation)*

Pour tout ensemble $A$, $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists B \in A\ B \cap A = \emptyset$.

**Remarques.**

1. C'est chelou.
2. On verra que ceci exprime que la relation $\in$ est *bien fondée* sur la classe des ensembles, c'est-à-dire, qu'il existe toujours sur tout ensemble et l'ensemble des éléments qu'il contient, et l'ensemble des éléments qu'ils contiennent, etc., un élément minimal pour l'appartenance, et donc qu'il n'existe pas de suite infinie du type $E \ni F \ni G \ni$... Nous verrons même que, modulo un axiome du choix spécial, cette assertion est équivalente à $AF$.

**Théorème.** *(Irréflexivité de $\in$)*

Pour tout ensemble $E$, $E \notin E$.

▷ Si $E \in E$ pour un certain ensemble $E$, notons $A = \{E\}$. Dans ce cas, $A \neq \emptyset$, car $A$ est un singleton donc de cardinal $1 \neq 0$. De plus, si $x \in A$, $x \in \{E\}$ soit $x = E$ et $x \cap A \neq \emptyset$, car $x \cap A = E \cap \{E\}$, et puisque $E \in \{E\}$ et $E \in E$ par hytpohèse, on aurait $E \in E \cap \{E\}$, ce qui contredirait $AF$. Par contraposition, $AF \Rightarrow \forall E,\ E \notin E$, c'est-à-dire $\nexists E,\ E \in E$. ■

**Remarques.**

1. Ce théorème d'irréflexivité se réécrit en : il n'existe pas d'ensemble $E$ tel que $E = \{E\}$.
2. On en déduit immédiatement ce que l'on a évoqué tout à l'heure : pour tout ensemble $E$, $E \cup \{E\} \neq E$. En effet, cela voudrait dire que, comme $E \in E \cup \{E\}$, $E \in E$.
3. On constate que l'irréflexivité est encore vérifiée pour l'ensemble vide. En effet, $\emptyset$ ne peut contenir aucun élément, y compris $\emptyset$.

On arrive désormais aux équivalences centrales de cette partie, qui donnent tout son sens à la formulation initiale un peu obscure de l'axiome de fondation. Avant cela, on rappelle l'énoncé de l'axiome du choix dépendant qui servira ensuite pour établir une formulation équivalente de

$AF$.

**Axiome.** ***(Axiome du choix dépendant)***

Pour tout $X \neq \emptyset$, pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur $X$, si le domaine de définition de $\mathcal{R}$ est bien $X$ (autrement dit si tout élément $x \in X$ est bien tel qu'il existe un $y \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$), alors il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel $n$, $x_n \mathcal{R} x_{n+1}$. On note cet axiome $DC$.

**Propriété.** ***(Formulations diverses de l'axiome de fondation)***

On considère les propriétés suivantes :
$AF$ l'axiome de fondation ;
$(I)$ l'irréflexivité de la relation d'appartenance ;
$(II)$ « Il n'existe pas $x_1, ..., x_n$ $n$ ensembles, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 = x_n$ et $x_1 \in ... \in x_n$ » ;
$(III)$ « $\in$ est bien fondée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles décroissante pour $\in$ » .
Alors on a les implications relatives comme représentées sur la figure 3.2.1. En particulier, elles sont toutes vraies dans un système ayant pour axiome $AF$. Les autres sont de simples conséquences logiques les unes des autres, mais $(III) \Leftrightarrow AF$ en présence de l'axiome du choix dépendant.

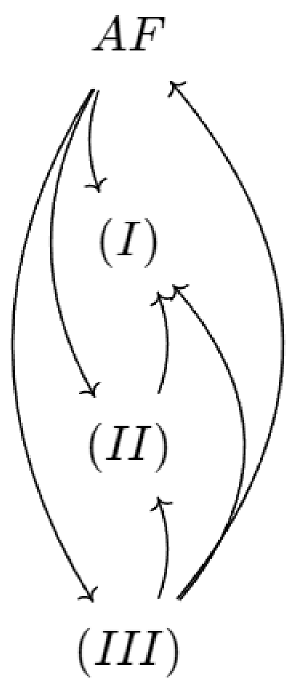


Figure 3.2.1 : *Formulations faibles de l'axiome de fondation.* —

▷ Montrons chacune des flèches précédentes, qui représentent des implications.

- $AF \Rightarrow (I)$. On l'a déjà montré, c'est l'objet de la propriété précédente.
- $AF \Rightarrow (II)$. De même, par contraposée. Supposons $x_1 \in ... \in x_n = x_1$. On pose $E = \{x_1, ..., x_n\}$, qui n'est pas vide puisque $n \neq 0$. On construit ainsi un contre-exemple de l'axiome de fondation. En effet, soit $x \in E$. $x = x_i$ où $i \in [\![1, n[\![$, car $x_1 = x_n$. $x \cap E = x_i \cap \{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Dans le premier cas, $i \neq 1$. On a $x_{i-1} \in x_i$ par hypothèse et $x_{i_1} \in \{x_1, ..., x_{n-1}\}$, donc $x_{i-1} \in x \cap E$ qui est donc non vide. Dans le deuxième cas, $i = 1$. Alors $x_{n-1} \in x_i = x_n$ et $x_{n-1} \in \{x_1, ..., x_{n-1}\}$ donc $x_{n-1} \in x \cap E$ qui n'est pas vide encore une fois. Ainsi $\neg AF$.
- $AF \Rightarrow (III)$. Remarquons en passant que c'est faux pour une suite qui serait croissante, il suffit de prendre $x_0 = \emptyset$ et $x_{i+1} = \{x_i\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit donc une suite infinie décroissante $x_0 \ni ... \ni x_n \ni ...$; l'axiome de la réunion permet de former $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} = \mathrm{Im}(x)$ : l'existence de la suite $(x_n)$ est hypothétique donc certaine. $E \neq \emptyset$, car $E \ni x_{47}$. Soit $x \in E$. $x \cap E = x_i \cap \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$, $i \in \mathbb{N}$ fixé choisi. On a à la fois $x_{i+1} \in x_i$ par hypothèse de chaîne et $x_{i+1} \in \{x_0, ..., x_n, ...\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ donc $x_{i+1} \in x \cap E$ qui est non vide. Ainsi, on nie l'axiome de fondation et l'on conclut par contraposition.
- $(III) \Rightarrow (I)$. On raisonne encore par contraposée : si $A \in A$, alors la suite constante $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ convient pour nier $(III)$.
- $(III) \Rightarrow (II)$. On raisonne par contraposée, en concaténant : $x_n \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ....$ Plus précisément, on définit comme contre-exemple de $(III)$ la suite infinie décroissante : $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x_n$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_i = x_{n-k-1}$ où $k$ est le reste dans la division euclidienne de $i$ par $n$.
- $(II) \Rightarrow (I)$. Il suffit de prendre $n = 1 \in \mathbb{N}^*$.
- $(III), DC \Rightarrow AF$. Toujours par contraposition. Le principe de démonstration est le suivant : nions $AF$. On suppose qu'il existe $A_0 \neq \emptyset$ tel que $\forall B \in A_0, B \cap A_0 \neq \emptyset$ (c'est exactement $negAF$). $A_0$ étant non vide, prenons $B_0 \in A_0$. $B_0 \cap A_0$ d'après ce qui précède, donc on peut prendre $A_1 \in B_0 \cap A_0$. Mais en particulier $A_1 \in A_0$, donc $A_1 \cap A_0 \neq \emptyset$ par hypothèse. Alors on peut prendre $A_2 \in A_1 \cap A_0$. Mais $A_2 \in A_0$, donc $A_2 \cap A_0 \neq \emptyset$ toujours par hypothèse, et l'on prend $A_3 \in A_2 \cap A_0$, etc. Cette intuition que l'on va pouvoir creuser à l'infini dans les éléments de $B$, d'où le terme de fondation, se formalise exactement avec $DC$. On prend, dans la définition de $DC$, $X = A_0 \neq \emptyset$ et pour relation $\ni$ la relation symétrique de $\in$. $\ni$ est bien définie partout sur $X$, en effet c'est l'hypothèse : $\forall B \in A_0\ B \cap A_0 \neq \emptyset$, c'est-à-dire, $\forall B \in A_0\ \exists x \in A_0\ x \in B$ soit $B \ni x$. Ainsi, $DC$ s'applique et il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, x_i \ni x_{i+1}$, soit $\neg(III)$,

et tout a été démontré. ■

Enfin, on règle le compte de la symétrie de la relation d'appartenance. On voit qu'elle n'est pas symétrique, et même asymétrique. De plus, elle n'est asymétrique que si l'un des deux ensembles est vide afin d'appliquer le principe d'explosion.

**Corollaire.** ***(Asymétrie de la relation d'appartenance)***

Il n'existe pas d'ensembles $E, F$ tels que $E \in F$ et $F \in E$.

▷ C'est une conséquence de $(II)$ pour $n = 2$. ■

**Remarque.** Une autre façon de le dire, est qu'aucun ensemble n'est élément d'un de ses éléments.

**Questions ouvertes.** Il est naturel de se demander si l'on peut clore le diagramme ci-dessous, de sorte que les quatre propositions soient en fait équivalentes : $(II)$, et *a fortiori* $(I)$, impliquent-ils $AF$ ? La question n'a peut-être pas de réponse, car trouver un exemple de théorie (on dit : un *modèle*) dans laquelle les axiomes de $ZF$ sont vérifiés est en fait impossible, c'est le théorème d'incomplétude de Gödel, et il serait problématique de montrer alors que $AF$ et $(I)$ ne sont pas équivalentes, d'où la difficulté de traiter $\neg AF \Rightarrow \neg(I)$.

#### 3.2.2.3.2 Conséquences pour la construction d'objets mathématiques

**Exercice 6**

Montrer que $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$.

**Exercice 7**

Montrer que, pour tout ensemble $x$, $\{\{x\}\} \neq x$.

**Exercice 8**

Montrer que, pour tout ensemble $x$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{p\text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p\text{ fois}} \neq x$.

**Exercice 9**

Montrer que, pour tout ensemble $x$, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{n\text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{n\text{ fois}} \neq \underbrace{\{\{...\{}_{p\text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p\text{ fois}}$ si et seulement si $n \neq p$.

On va, sommairement, construire de façon ensembliste quelques-uns des objets mathématiques les plus utilisés, notamment les entiers naturels de l'ensemble $\mathbb{N}$. L'axiome de fondation permet, non de créer les entiers naturels (c'est l'axiome de l'infini qui le permet), mais de montrer que les constructions obtenues sont deux à deux distinctes, autrement, de justifier que $1 \neq 2$. Il est important de comprendre que la « représentation » ci-dessous est bel et bien une construction, c'est-à-dire une façon tout au moins de justifier l'existence de tels objets, même si, l'on en convient, ce qu'ils sont n'a pratiquement aucun intérêt à côté de leurs propriétés ; elles sont l'objet de l'arithmétique.

**Définition.** ***(Représentation des entiers naturels de Von Neumann)***

Nous posons : $0 = \emptyset$, puis : $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, puis $2 = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc., c'est-à-dire, à l'infini (ce qui est justifié par l'axiome de l'infini) $n+1 = n \cup \{n\}$. L'existence de $\emptyset$ est garantie par l'axiome de l'ensemble vide.

John Von Neumann

D'origine hongroise, fils d'un banquier réputé, János Lajos Neumann, dit Von Neumann commence à étudier à Budapest. Enfant surdoué, il lit et mémorise tout ce qui lui tombe sous la main, parle grec et latin à l'âge de six ans. Calculateur prodige, il stupéfie ses instituteurs et les amis de la famille, dont Lipót Fejér qui dirigera sa thèse, par sa mémoire prodigieuse et ses capacités en calcul mental.

Malgré une situation politique instable en Hongrie, Neumann entreprend des études supérieures de mathématiques à Budapest en 1919 qu'il complète par trois années d'études de chimie à Berlin et Zurich. Il rencontrera ainsi Erhard Schmidt, Herman Weyl et Polya. Il s'intéresse en fait plus aux ensembles et aux nombres transfinis de Cantor qu'à la chimie... C'est à Budapest qu'il soutiendra finalement sa thèse dirigée par Fejér portant sur les ensembles transfinis, fin 1926.

Professeur à Göttingen puis à l'université de Berlin, la réputation de Neumann s'instaure outre-Atlantique : il se rend aux États-Unis à Princeton à l'invitation de Veblen en 1930 à l'occasion de la mise en place du tout nouveau Institute for Advanced Study.

Juif, afin d'échapper à la répression du pouvoir hitlérien soutenu par le régime hongrois, von Neumann s'installe définitivement aux Etats-Unis en 1933 et fit toute sa carrière au célèbre institut. Il meurt prématurément, en 1954, à 54 ans, d'un cancer des os sans doute causé par ses nombreuses expositions aux radiations lors des expérimentations pour la mise au point de la première bombe atomique.

L'ensemble formé par cette infinité d'ensembles est noté $\mathbb{N}$ ; on peut lui définir une addition, une multiplication, et vérifier qu'elles vérifient toutes les propriétés habituelles qui lui sont associés ; également un ordre qui permet d'énoncer la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ : toute partie non vide a un minimum. C'est peu intéressant et sans révolution conceptuelle non plus ; le lecteur intéressé trouvera une construction plutôt complète dans *Épistémologie mathématique* de Henri Lombardi. De plus, on vérifie qu'il vérifie les cinq propriétés axiomatiques de l'arithmétique de Peano, que nous énonçons à titre informatif ci-dessous :

**Définition.** ***(Arithmétique de Peano)***

On appelle *entiers naturels de Peano*, un ensemble $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes, dits *axiomes de Peano* :

1. il contient au moins un élément, notons le 0 ;
2. il existe une fonction $\sigma$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée *successeur* ;
3. aucun entier naturel n'est suivi par 0 ($0 \notin \operatorname{Im}(\sigma)$) ;
4. deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux ($\sigma$ est injective) ;
5. un principe de récurrence : si un ensemble contient 0 et le successeur de chacun de ses

éléments, cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Habituellement, la fonction successeur est donnée par $\sigma(n) = n + 1$.

Concluons par l'intérêt principal de cette partie.

**Théorème.** ***(Distinction deux à deux des entiers naturels)***

En présence de l'axiome de fondation, les entiers naturels de Von Neumann sont deux à deux distincts.

$\triangleright$ On l'a déjà vu : $n$ ne peut appartenir à $n$, pour tout $n$, donc $n + 1 \neq n = n \cup \{n\}$. Ceci montre que deux entiers successifs sont distincts. Pour montrer que les entiers naturels sont deux à deux distincts, il s'agit simplement le principe du quatrième exercice présenté ci-dessus, qui en découle. ■

Nous espérons que, par ces considérations, le lecteur sera convaincu que la totalité des objets mathématiques qu'il manipule est une construction ensembliste : un ordre, par exemple, est une relation sur, disons, $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une partie du produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ : la notation $n \leqslant p$ traduit simplement $(n, p) \in \leqslant$. Une fonction $f$ est un triplet $f = (E, F, \Gamma)$, où $E$ est l'ensemble de départ, $F$ l'ensemble d'arrivée et $\Gamma$ une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété fondamentale des fonctions : tout élément a au plus une image. Les nombres réels sont identifiés, par exemple, aux coupures de Dedekind : ce sont alors des couples $(A, B)$ tels que $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, $AcupB = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall a \in A \forall b \in B \quad a < b$. Et ainsi de suite.

#### 3.2.2.3.3 Considérations logiques

On peut montrer que si $ZF_\bullet$ est consistant, *i. e.* s'il n'y a pas d'incohérence dans ses axiomes et qu'un modèle est envisageable, alors il ne prouve ni $AF$, ni sa négation : on dit que $AF$ est indépendant des axiomes de $ZF_\bullet$. Cela s'exprime :

$$ZF_\bullet \text{ consistant} \Rightarrow ZF \text{ consistant.}$$

## 3.3 Cardinalité

### 3.3.1 Théorème de Cantor-Bernstein

**Théorème.** ***(Théorème de Cantor-Bernstein)***

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. S'il existe une injection de $A$ dans $B$, et s'il existe une injection de $B$ dans $A$, alors $A$ et $B$ sont en bijection. Autrement dit, la relation $\hookrightarrow$ est antisymétrique.

$\triangleright$ Il existe un grand nombre de preuves du théorème de Cantor-Bernstein ; nous en donnons une constructive et qui ne fait pas recours à l'axiome du choix. Soient $A$ et $B$ deux ensembles, dont on