Cours de mathématiques

TOME VII

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Mathématiques générales

France ∼ 2024

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Chapitre 1

Différentiabilité

Résumé

On pose les bases du calcul différentiel, qui généralise l'opération de dérivation dans le cas des fonctions à plusieurs variables. Le cadre naturel pour un tel discours est celui des espaces vectoriels normés. Dans la majorité des cas, c'est la dimension finie qui prime pour l'intuition géométrique ; dans certains cas plus fins encore (gradient, orientation, etc.), il faudra s'imaginer l'espace à trois dimensions.

1.1 Applications différentiables

Dans tout le chapitre, nous considérons :

- $\mathbb{K}$ un corps commutatif dont nous notons les lois comme habituellement ;
- E,F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Leurs lois, encore une fois notées comme habituellement, ne sont pourtant pas forcément les mêmes ;
- une norme $\|\cdot\|_E$ sur E et une norme $\|\cdot\|_F$ sur F. Par paresse, nous les notons parfois toutes deux $\|\cdot\|$, mais uniquement lorsque les choses sont claires ;
- un ouvert $U \subseteq E$;
- un point $a \in U$;
- $f : U \longrightarrow F$ une application quelconque.

1.1.1 Rappels sur les applications linéaires continues

1.1.2 Définition

$\longrightarrow$ *Notation.* Étant donnée une application linéaire f, x un vecteur de E, on note parfois $f(x) = f \cdot x$, voire $f(x) = fx$.

Exercice 1

Justifier cette notation.

▷ **Éléments de réponse.**

Un mot est plus important que les autres...

Définition

Soit W un voisinage de 0_E dans E et $\delta : W \longrightarrow F$ une application. On dit que δ *est un petit o de h au voisinage de* 0_E, et on note $\delta(h) = o(h)$, lorsque $\lim\limits_{h \to 0_E} \frac{\|\delta(h)\|}{\|h\|_E} = 0$.

Définition. ***(Différentiabilité en un point)***

On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire continue φ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(h).$$

Cette notation n'est qu'une extension de : $f(a+h) - f(a) - \varphi(h) = o(h)$.
L'application φ est appelée *différentielle de* f *en* a. On note indifféremment $\varphi = df_a = df(a) = Df_a = Df(a)$.

On peut récrire cette définition de diverses manières. Afin de les couvrir toutes d'un coup, voilà l'autre façon la plus courante :

Définition. ***(Différentiabilité en un point)***

On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire continue L telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x) + L(a)\|_F}{\|x - a\|_E} = 0.$$

On a déjà le résultat suivant :

Propriété. ***(Unicité de la différentielle)***

Si f est différentiable en a, alors sa différentielle est unique.

▷ Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_c(E,F)$ deux différentielles de f en a. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\| < \delta$, on ait

$$\|f(a+h) - f(a) - L_1(h)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|h\| \text{ et } \|f(a+h) - f(a) - L_2(h)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|h\| :$$

il suffit de prendre le plus petit des deux δ pour L_1 et L_2. Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient $\|(L_1 - L_2)(h)\| \leqslant \varepsilon\|h\|$ pour tout $h \in B_E(0,\delta)$. L'homogénéité de $L_1 - L_l$ donne qu'en fait cette inégalité est vérifiée pour tout $h \in E$, en l'appliquant à $h' = \frac{\delta}{2\|h\|}h$. En faisant tendre ε vers zéro, $L_1(h) = L_2(h)$ pour tout h soit $L_1 = L_2$. ■

Remarque. Ceci justifie l'usage de la notation $\varphi = df_a$.

1.1.3 Classes de régularité

Définition. ***(Fonction lisse)***

Une fonction f est dite *lisse* si elle est C^∞.

1.2 Grands théorèmes du calcul différentiel

1.2.1 Lemmes

Théorème. ***(Lemme d'Hadamard)***

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p avec $p \geqslant 1$ et U un ouvert étoilé en $a = (a_1,\ldots,a_n) \in U$. Alors il existe des fonctions $g_1,\ldots,g_n$ de classe C^{p-1} telles que pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)g_i(x)$.

$\triangleright$ D'après le second théorème fondamental de l'analyse, $f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+t(x-a))\mathrm{d}t$. Mais par dérivation des fonctions composées, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a+t(x-a)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(x-a))$. Le résultat s'ensuit, avec $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+t(x-a))\mathrm{d}t$, qui est C^{p-1} en vertu de la règle de Leibniz. ■

Remarques.

1. On a nécessairement $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ en observant la preuve.
2. Les fonctions g_i ne sont pas nécessairement uniques.

Propriété. ***(Régularité des fonctions d'accroissement)***

Pour tout fonction lisse f telle que $f(0) = 0$, $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est bien définie et lisse.

$\triangleright$ Il suffit d'appliquer le lemme d'Hadamard en 0 pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au rang $n+1$, pour montrer que f est C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

1.2.2 Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale

Remarque importante. Le théorème d'inversion locale reste vrai en remplaçant l'espace de départ et l'espace d'arrivée par des espaces de Banach.

Corollaire. ***(Théorème d'application ouverte différentiel)***

Soient $n \in \mathbb{N}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose que pour tout $x \in U$, df_x est inversible. Alors f est une application ouverte.

▷ Soit V un ouvert de U. Montrons que $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit donc $t \in f(V)$ et $x \in V$ tel que $f(x) = t$. Puisque df_x est inversible, par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert Ω contenant x et contenu dans U et un ouvert Ω' contenant t tel que f soit un C^1-difféomorphisme de Ω sur Ω'. En particulier, $f(\Omega) = \Omega'$. Puisque $\Omega \cap V \subseteq \Omega$, $f(\Omega \cap V)$ est un ouvert de Ω', car f est un difféomorphisme sur Ω. Posons $W = f(\Omega \cap V)$. Alors W contient t, est un ouvert de Ω' donc un ouvert, car Ω' est ouvert, et clairement $W \subseteq f(V)$, d'où le résultat. ■

1.2.3 Théorème des fonctions implicites

1.2.4 Théorème du rang constant

Soient $n,m \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de de $\mathbb{R}^n$.

Définition. ***(Rang d'une application en un point)***

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable. Le *rang* de f en $a \in U$ (f n'a aucune raison d'être linéaire !) est le rang de l'application linéaire $(df(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Remarquons que le rang ne peut qu'augmenter au voisinage d'un point.

Propriété. ***(Croissance locale du rang différentiel)***

Si f est C^1 et $a \in U$, alors il existe un voisinage ouvert V de a, $V \subseteq U$ tel que

$$\forall x \in V, \quad \mathrm{rg}(df(x)) \geqslant \mathrm{rg}(df(a)).$$

▷ En effet, le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est la taille maximale des sous-matrices carrées extraites de A qui sont inversibles. Ici $J(f)(a) \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Il existe donc une sous-matrice de taille r inversible $B(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i \in I_r \subseteq \{1,\dots,m\}, j \in J_r \subseteq \{1,\dots,n\}}$. L'application $\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathfrak{M}_r(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & B(x) \end{array}$ est continue et donc son déterminant est continu. Par suite, il existe $U' \subseteq U$ contenant a tel que pour tout $x \in U'$, $\det(B(x)) \neq 0$, *i.e.* $Jf(x)$ est de rang $\geqslant r$. ■

1.2.4.1 Normalisation des applications de rang constant

On rappelle ce théorème d'algèbre linéaire : si $C \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est de rang r, il y a $P \in GL_m(\mathbb{R}), Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $PCQ = J_r$ la matrice $Diag(1,\dots,1,0,\dots,0)$ où 1 a la multiplicité r. On essaie de raffiner ce théorème dans le cas d'une application différentiable, grâce à la définition précédente de rang, en imposant que *le changement de base soit un difféomorphisme.*

Théorème. ***(Théorème du rang constant)***

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$. **On suppose que pour tout** $\boldsymbol{x \in U}$**,** $\mathbf{rg}(\boldsymbol{df(x)}) = \boldsymbol{r}$**.** Alors pour tout $x_0 \in U$,

- il existe un voisinage $U_{x_0} \subseteq U$ de x_0 et un voisinage $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^m$ un voisinage de $f(x_0)$,
- il existe U' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U' \longrightarrow U_{x_0}$ un C^k-difféomorphisme,
- il existe V' un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $\psi : V_{f(x_0)} \longrightarrow V'$ un C^k-difféomorphisme

tels que :

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$$

avec les notations évidentes.

Certains auteurs par de *subimmersion* ; en fait, d'immersion lorsque la différentielle est injective, et de submersion lorsqu'elle est surjective, d'où le terme.

$\triangleright$ On considère $J(f)(x_0)$ de rang r. Quitte à considérer $P_1.f.P_2$ où P_1,P_2 sont des matrices de permutations. On peut supposer que $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant r}$ soit inversible. On considère l'application $H : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto (f^1(x), \ldots, f^r(x), x_{r+1},\ldots,x_n)$. Alors H est de classe C^k. On a $J(H)(x_0) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ où A est une matrice carré de taille r. Or $J(H)(x_0)$ est inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale, donc il existe $U_{x_0} \subseteq U$ un voisinage de x_0 tel que $H_{|U_{x_0}} : U_{x_0} \longrightarrow H(U_{x_0}) = U'$ est un C^k-difféomorphisme. Soit $\phi = (H_{|U_{x_0}})^{-1}$. Alors $\phi : U' \longrightarrow U_{x_0}$ est un C^k-difféomorphisme tel que $f \circ \phi(x_1,\ldots,x_n) = (f^1 \circ \phi, \ldots, f^r \circ \phi, f^m \circ \phi)$. Ainsi $H \circ \phi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n) = (f^1 \circ \phi(x), \ldots, f^r \circ \phi(x), \phi^{r+1}(x), \ldots, \phi^n(x))$ puis $f \circ \phi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r, g_{r+1}(x), \ldots, g_n(x))$, d'où $J(f \circ \phi)(x) = J(f)(\phi(x)).J(\phi)(x)$ pour tout $x \in U'$, où $J(f)(\phi(x))$ est de rang r et $J(\phi)(x)$ est inversible.

Ainsi pour tout $x \in U'$, $\mathrm{rg}(J(f \circ \phi)) = r$. Donc $J(f \circ \phi) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{i\geqslant r+1, h\geqslant r+1}$. Alors pour tout $i \geqslant r+1$, pour tout $kj \geqslant r+1$, $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$ pour tout $x \in U'$: c'est là que l'hypothèse sur le rang est cruciale. Par suite, $g_{r+1},\ldots,g_n$ ne dépendent pas de $x_{r+1},\ldots,x_n$.

Soit pour $(z_1,\ldots,z_m)$ au voisinage de $f(x_0)$, la fonction $\psi(z_1,\ldots,z_m) = (z_1,\ldots,z_r,z_{r+1} - g_{r+1}(z_1,\ldots,z_r), \ldots, z_m - g_m(z_1,\ldots,z_r))$. On a alors $J(\psi)(z) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & I_{n-r} \end{pmatrix}$, donc $J(\psi)(z)$ est inversible en $z = f(x_0)$. On applique encore le théorème d'inversion locale à ψ, donc il existe un ouvert $V_{f_{x_0}}$ contenant $f(x_0)$ tel que $\psi_{|V_{f(x_0)}} : V_{f(x_0)} \longrightarrow V'$ est un difféomorphisme, et d'après les formules précédentes, $\psi \circ f \circ \phi(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$. ■

Ce théorème est remarquable ; c'est, comme annoncé, un théorème de normalisation. En effet, à changement de variables près, les applications de rang r sont de la forme précédente : $x \mapsto (x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$.

On signale des cas particuliers qui seront largement utiles dans la suite, et notamment en géométrie différentielle.

1.2.4.2 Immersion, submersion

Définition. ***(Immersion)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k. On dit que c'est une *immersion* en $x_0 \in U$ si $df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est injective. Il faut en particulier $n \leqslant m$.

> Si $df(x_0)$ est injective, alors il y a un voisinage de x_0 sur lequel $df(x)$ est injective, *i.e.* sur lequel f est de rang constant, égal à n par le théorème du rang.

Dans le cas des immersions, on a une version légèrement plus forte que le théorème du rang constant, en cela que l'on a besoin d'un changement de variables qu'à l'arrivée.

Théorème. ***(Forme canonique des immersions)***

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k, avec $0 \in U$ (on peut énoncer une version largement plus générale, mais paraphrasée). On suppose $df(0)$ injective. Alors il existe $U' \subseteq U$ un ouvert, $0 \in U'$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant $f(0)$ et $\psi : V \longrightarrow \psi(V)$ un C^k-difféomorphisme tel que $\psi \circ f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots,0)$ pour tous $(x_1,\ldots,x_n) \in U'$.

$\triangleright$ On reprend la preuve du théorème du rang constant. Ici $r = n$ et $H(x_1,\ldots,x_n) = (f^1(x),\ldots,f^n(x)$, car H est une partie de f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On a introduit $\phi = (H_{|U_{x_0}})^{-1}$. Alors $f \circ \phi(y_1,\ldots,y_n) = (y_1,\ldots,y_n,g_{n+1}(y),\ldots,g_m(y))$ et $\psi \circ f \circ \phi(y_1,\ldots,y_m) = (y_1,\ldots,y_n,0,\ldots,0)$. Ceci donne $\psi \circ f(z_1,\ldots,z_n) = (f^1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,f^n(z_1,\ldots,z_n,0,\ldots,0)$. On compose à gauche par $\phi \times id_{\mathbb{R}^{m_n}}$. Alors $\phi \times id_{\mathbb{R}^{m_n}} \circ f(z_1,\ldots,z_n = (z_1,\ldots,z_n,0,\ldots,0)$. ■

On énonce le résultat analogue pour les submersions.

Définition. ***(Submersion)***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k. On dit que c'est une *submersion* en $x_0 \in U$ si $df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est surjective. Il faut en particulier $m \leqslant n$.

> Si f est une submersion en $x_0 \in U$, il y a un voisinage V de x_0 contenu dans U tel que pour tout $x \in V$, f est une submersion en x. Ainsi f est de rang constant sur V, égal à m par définition du rang.

Théorème. ***(Forme canonique des submersions)***

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k. On suppose que f est une submersion en x_0. Alors il existe un voisinage ouvert $U_{x_0} \subseteq U$, un ouvert $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\phi : U' \longrightarrow U_{x_0}$ un C^k-difféomorphisme tel que $\forall x \in U' \quad f \circ \phi(x) = (x_1,\ldots,x_m)$.

$\triangleright$ C'est beaucoup plus rapide : c'est le cas $r = m$ du théorème du rang constant, où alors $\psi = id_{\mathbb{R}^m}$. ■

On remarquera le lien heuristique avec ces propositions à la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par inversibilités latérales, pour des applications quelconques entre ensembles.

Chapitre 2

Analyse vectorielle

2.1 Courbes paramétrées

2.1.1 Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a < b \in \mathbb{R}$.

Définition. ***(Courbe paramétrée)***

Une *courbe paramétrée* de $\mathbb{R}^n$ est une application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

2.1.2 Longueur d'une courbe

Définition. ***(Longueur d'une courbe paramétrée)***

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. La *longueur* de γ est la borne supérieure des longueurs de toutes les lignes polygonales dont les sommets sont sur la courbe :

$$\ell(\gamma) = \mathrm{long}(\gamma) = \sup_{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b} \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(x_j) - \gamma(x_{j-1})\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

Théorème. ***(Longueur d'une courbe C^1)***

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée C^1. Alors

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Propriété. ***(Invariance de la longueur par équivalence)***

Deux courbes équivalentes ont la même longueur.

2.1.3 Régularité et paramétrisation

Définition. ***(Paramétrisation par la longueur d'arc)***

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée dérivable. Elle est dite *paramétrée par la longueur d'arc*, ou *par l'abscisse curviligne*, si $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in [a,b]$.

Heuristique

Une courbe paramétrée par la longueur d'arc est parcourue à vitesse constante.

Propriété. ***(Paramétrisation des courbes régulières)***

Toute courbe régulière admet un paramétrage par la longueur d'arc, unique à une translation près et au sens de parcours près.

Propriété. ***(Direction tangente à la courbe)***

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe régulière. Si $t_0 \in [a,b]$ est régulier, alors $\gamma'(t_0)$ donne la direction de la tangente à γ en t_0.

Propriété. ***(Direction normale à la courbe)***

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe birégulière. Si $t_0 \in [a,b]$ est birégulier, alors $\gamma''(t_0)$ donne la direction de la normale à γ en t_0.

2.1.4 Allure d'une courbe plane

Définition. ***(Courbure d'une courbe paramétrée)***

Soit γ une courbe plane C^2 paramétrée par la longueur d'arc. On appelle *courbure* la quantité $\kappa(t) = \|\gamma''(t)\|$.
Le *centre de courbure* est le point $P(t) = \gamma(t) + \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|^2}$.

Théorème. ***(Formule de la courbure)***

Soit γ un courbe C^2 (non nécessairement paramétrée par la longueur d'arc). On a :

$$\kappa(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

où l'on note $x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Exemples. *(Courbures d'une courbe)*

1. La courbure d'une droite est nulle.
2. La courbure d'un cercle de rayon R est $\frac{1}{R}$. En particulier, la courbure du cercle unité est constante égale à 1.
   Intuitivement, un bout d'un cercle de rayon très grand semble être presque plat.
3. La courbure est invariante par translation, ce qui permet de calculer la courbure de tout cercle (attention, elle n'est pas invariante par homothétie !).

Réciproquement :

Propriété. *(Caractérisation des courbures nulles)*

Toute courbe régulière de classe C^2 qui est de courbure nulle est un bout de droite.

Propriété. *(Caractérisation des courbures constantes)*

Toute courbe régulière de classe C^3 qui est de courbure constante **strictement positive** est un bout de cercle.

Définition. *(Cercle osculateur)*

Le *cercle osculateur* à une courbe paramétrée γ en un point t est le cercle dont le centre est le centre de courbure $P_\gamma(t)$ de γ en t et le rayon est l'inverse $\frac{1}{\kappa_\gamma(t)}$ de la courbure de γ en t.

Propriété. *(Allure du cercle osculauter)*

Soit γ une courbe paramétrée, $t \in [a,b]$. On note C le cercle osculateur en t.

(i) C passe par $\gamma(t)$;
(ii) le centre de C est sur la normale à la courbe en t, du même côté que $\gamma''(t_0)$;
(iii) la distance du centre de C à $\gamma(t)$ est $\frac{1}{\kappa(t)}$.

Le cercle osculateur est celui qui épouse le mieux la forme de la courbe, au sens suivant :

Théorème. *(Pertinence du cercle osculateur)*

Soit γ une courbe C^2 et t_0 birégulier. Si $t_1 < t_2 < t_3$ tendent vers t_0 alors le cercle interpolateur de $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)$ tend vers le cercle osculateur en $\gamma(t_0)$ au sens que la position du centre et de la longueur du rayon convergent.

2.1.5 Courbes gauches

Définition. ***(Plan osculateur)***

Soit $\gamma : [a,b] \to R^3$. Le *plan osculateur* de γ en $t \in [a,b]$ est le plan engendré par $\gamma'(t)$ et $\gamma''(t)$ passant par $\gamma'(t)$.
On peut alors définir *courbure* et *cercle osculateur d'une courbe gauche* qui sera contenu dans le plan osculateur.

Définition. ***(Torsion d'une courbe gauche)***

Soit γ une courbe gauche. Soit $t \in [a,b]$. La *torsion* de γ en t est la quantité

$$\theta(t) = -\frac{\det(\gamma(t),\gamma'(t),\gamma''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Théorème. ***(Pertinence de la torsion)***

La torsion d'une courbe est nulle, si et seulement si, elle est plane.

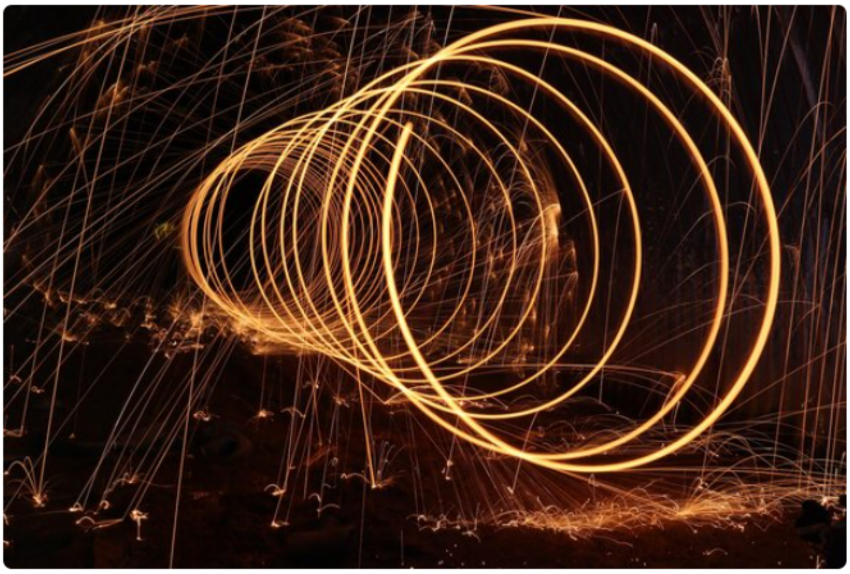
2.2 Opérateurs de champs vectoriels

Chapitre 3

Géométrie différentielle

Résumé

La géométrie différentielle explique comment faire du calcul différentiel sur des variétés abstraites sur des espaces topologiques qui a priori ne se plongent pas dans l'espace euclidien. Une fois cette description faite, on dispose des outils du calcul différentiel dans ces espaces, notamment la recherche d'extrema ou les équations différentielles.



3.1 Sous-variétés de l'espace euclidien

On souhaite, avant de définir les variétés abstraites, s'intéresser à une généralisation attendue du calcul différentiel de base : on voudrait définir la notion de différentiabilité sur une classe de parties de $\mathbb{R}$ plus large que sa topologie, c'est-à-dire ses ouverts.

Exercice 2

Soit n un entier naturel. Pourquoi est-il illusoire d'espérer définir la notion d'application différentiable sur toute partie de $\mathbb{R}^n$?

▷ **Éléments de réponse.**

Pour $n = 1$ d'abord, peut-on définir la dérivabilité sur $\mathbb{Q}$?

Soit n un entier naturel.

3.1.1 Définitions

Définition-propriété. *(Sous-variété de $\mathbb{R}^n$)*

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie de l'espace euclidien canonique de dimension n. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1. *(Submersion/par équation)* Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une application de classe C^p, $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ est surjective, *i.e.* f est une submersion en x, et $U \cap M = f^{-1}(f(x))$, autrement dit, $U \cap M$ est donné par $n - k$ équations indépendantes. Il faut et suffit en fait de trouver f une C^k-submersion en x telle que $M \cap U = f^{-1}(0)$, ou $M \cap U = f^{-1}(a)$ pour n'importe quel a fixé[a].
2. *(Graphe)* Pour tout $x \in M$, quitte à faire une permutation des coordonnées, il y a une décomposition dite *identification linéaire* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ et si $x = (x_1,x_2)$, $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k, x_1 \in U_1$ un ouvert et $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-k}, x_2 \in U_2$ un ouvert et $\varphi_x : U_1 \longrightarrow U_2$ de classe C^p est tel que $M \cap (U_1 \times U_2) = Graphe(\varphi_x) = \{(y_1,y_2) \in U_1 \times U_2, y_2 = \varphi_x(y_1)\}$.
3. *(Redressement local/par coordonnée rectifiante)* Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\psi : U_x \longrightarrow V$ un C^p-difféomorphisme tel que $\psi(x) = 0$ et $\psi(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. ψ est alors appelé *redressement local* en x, voire carte locale en x. De même que précédemment, on peut remplacer 0 par un a fixé sans problème par translation.
4. *(Paramétrisation locale, immersion)* Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, un ouvert *Ome* de $\mathbb{R}^k$, $0 \in \Omega$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^p tels que $g(0) = x$, g est un homéomorphisme de Ω sur $M \cap U$ et $dg(0)$ est injective, *i.e.* g est une immersion en 0 ; même remarque pour changer 0 en a.

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit de M que c'est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^n$, de dimension k, et de classe C^p, où $k \leqslant n$ et $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

On dit aussi qu'un point $x \in M$ partie de $\mathbb{R}^n$ est *lisse* s'il vérifie l'une des conditions précédentes ; dans ce cas, une sous-variété est un ensemble lisse.

On dit que la sous-variété est *lisse* si elle est de classe C^∞ ; conventions qui, parfois, se recoupent peu fortuitement.

[a] Car les translations sont différentiables.

▷

(2) $\Longrightarrow$ (1) : soient U_1 un ouvert de $\mathbb{R}^k$, U_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{n-k}$ et $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ de classe C^p. On note $Gr(\varphi) = \{(y_1,y_2), y_2 = \varphi(y_1)\}$. Soit $f : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ définie par $(x_1,x_2) \mapsto x_2 - \varphi(x_1)$ de

classe C^p également, où alors $f^{-1}(0) = Gr(\varphi)$. On a bien : $df(x)(h_1,h_2) = h_2 - d\varphi(x_1)(h_1)$ surjectif.

(1) $\implies$ (2) : pour $x \in M$, prenons $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ avec $df(x)$ de rang $n-k$. Quitte à faire une permutation sur les coordonnées, on peut supposer que les $n-k$ dernières colonnes de $J(f)(x)$ sont indépendantes. On a alors une décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ et $f : U \longmapsto \mathbb{R}^{n-k}$ avec $\partial_2 f(x)$ inversible. Le théorème des fonctions implicites dit pour $x = (x_1,x_2)$ et $f(x) = 0$ que $f^{-1}(0)$ est au voisinage de x le graphe d'une application C^p.

(3) $\implies$ (1) : soit $\phi : U \longrightarrow V$ un redressement local difféomorphique, $\phi = (\phi^1,...,\phi^n)$. On a $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ définie par $x \mapsto (\phi^{k+1}(x), ..., \phi^n(x))$ de classe C^p. Alors $M \cap U = f^{-1}(0)$. Alors $Jf(x)$ est une matrice extraite (en prenant les dernières colonnes) de $J\phi(x)$, qui est inversible : ces dernières colonnes sont linéaires indépendantes. D'où $J(f)(x)$ surjective.

(2) $\implies$ (4) : lorsqu'on a un graphe, on a une paramétrisation sous-jacente. On suppose que $M \cap U$ est un graphe de $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ de classe C^p et $U = U_1 \times U_2$. On considère $g : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $x \mapsto (x, \varphi(x))$ de classe C^p. Alors g une immersion, g est bijection sur $Gr(\varphi)$ est c'est bien un homéomorphisme car g est la première projection.

(4) $\rightarrow$ (3) : soit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation locale, avec $dg(0)$ injective. On a $g(\Omega) = U \cap M$ où g est un homéomorphisme. On veut un redressement. On peut penser à la forme canonique des immersions. Il existe un ouvert $\Omega' \subseteq \Omega$, $0 \in \Omega'$ et $\psi : U_x \longrightarrow \psi(U_x)$ un C^p-difféomorphisme tel que $\psi \circ g(x) = (x_1,...,x_k,0,...,0)$. Or $g(\Omega')$ est un ouvert de $U \cap M$ dont de la forme $U' \cap M$. Posons $V' = \psi(U')$. On a $\psi(U' \cap M) = \psi \circ g(\Omega') = \Omega' \times \{0\} \subseteq V' \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Pour avoir une égalité comme dans la formulation attendue, on va « réduire » V'. Soit $W = V' \cap (\Omega' \times \mathbb{R}^{n-k})$ un voisinage ouvert de 0. On a $\Omega' \times \{0\} \subseteq W \subseteq \Omega' \times \mathbb{R}^{n-k}$ et $\Omega' \times \{0\} \subseteq W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subseteq \Omega' \times \{0\}$. D'où $W \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \Omega' \times \{0\}$. On prend finalement $\phi^{-1}(W) = U''$ et $\phi(U'' \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. ■

> Les définitions que nous avons donné de sous-variété en font une <u>notion locale</u>, en deux sens : elle est définie en un point, et de plus (à vérifier), localement, la variété se comporte toujours de la même manière.

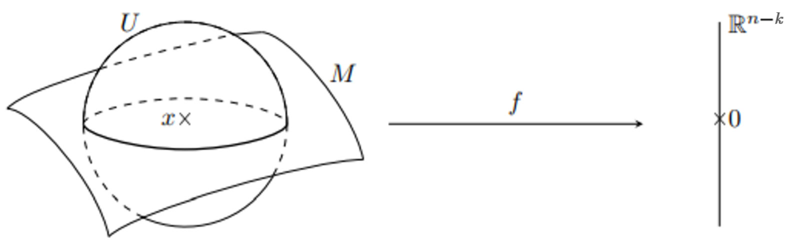


FIGURE 3.1.1 : *Définition par submersion, illustration.* —
Sur le dessin, l'entier p correspond à l'entier k de la preuve !

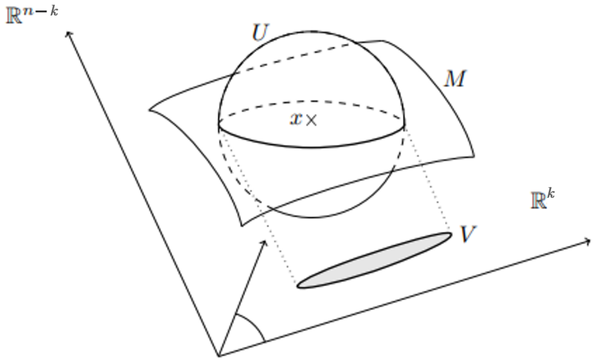


FIGURE 3.1.2 : *Définition par graphe, illustration.* —
Sur le dessin, l'entier p correspond à l'entier k de la preuve, et $U_1 = V, U_2 = U$.

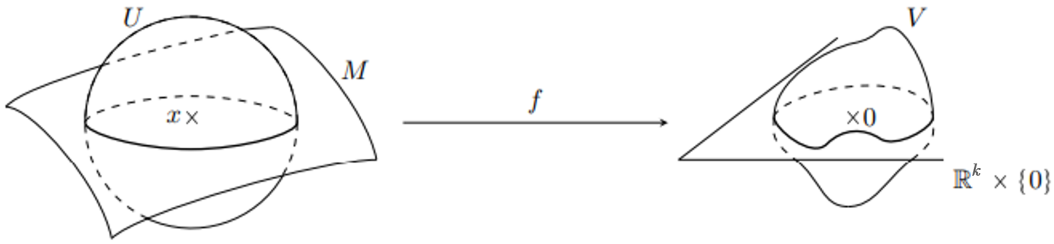


FIGURE 3.1.3 : *Définition par redressement, illustration.* —
Sur le dessin, l'entier p correspond à l'entier k de la preuve !

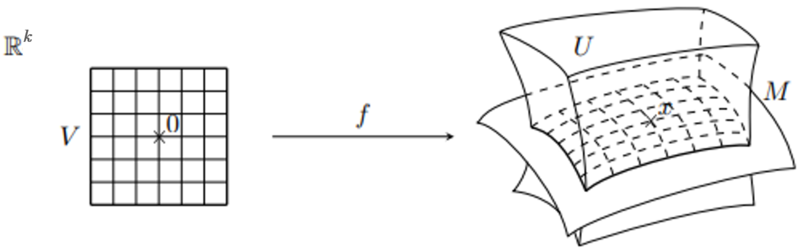


FIGURE 3.1.4 : *Définition par paramétrage, illustration.* —
Sur le dessin, l'entier p correspond à l'entier k de la preuve !

Exemples. ***(Sous-variétés de l'espace euclidien)***

1. *(Exemple fondamental : la sphère)* Prenons $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ la sphère de rayon 1. Elle est définie par la fonction $f(x) = \sum x_i^2$ clairement de classe C^∞. De plus, $df(x)(h) = 2\langle x,h\rangle$. Si $x \neq 0$, $df(x)$ est une forme linéaire non nulle, donc surjective. Ainsi $S^{n-1} = f^{-1}(1)$. Par suite, la sphère est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ *(voir la méthode suivante pour une généralisation)*.

2. *(Exemple triviaux)* Un singleton, un ouvert est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ *(voir remarque ci-dessous)*.
3. *(Sous-variétés linéaires)* Tout sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ est trivialement une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, grâce à ses équations paramétriques qui sont linéaires.
4. *(Courbes, surfaces)* Un cercle, un ellipse, une parabole, une hyperbole du plan, sont toutes des sous-variétés différentielles de l'espace euclidien. La notion intuitive de courbe, de surface, etc., sans coupure ni rebroussement, correspond à celle de sous-variété.
5. *(Problème des points multiples)* La réunion d'un plan et d'une droite de l'espace se coupant en un seul point n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. La réunion de deux droites sécantes, un serpent qui se mord la queue, le graphe de la valeur absolue... ne sont pas des sous-variétés de l'espace. Ceci vient de problèmes topologiques dus à la présence de points multiples au voisinage desquels l'espace n'a pas le même groupe fondamental qu'une boule de $\mathbb{R}^n$.
6. *(Sous-variétés matricielles)* Le groupe orthogonal est un ensemble défini par une équation globale. On a $\mathcal{O}(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tM.M = Id\}$. Soit f l'application $M \mapsto {}^tMM$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On peut la co-restreindre à $S_n(\mathbb{R})$; montrons que c'est une submersion. La différentielle de cette application est $df(M)(H) = {}^tMH + {}^tHM = {}^tMH + {}^t({}^tMH)$. Calculons le rang de $df(M)$ si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $\mathrm{Ker}(df(M)) = \left\{H, M^TH \in A_n(\mathbb{R})\right\}$. Comme ${}^tM = M^{-1}$ est inversible, ce noyau a la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème du rang, f ainsi corestreinte est une submersion.

Méthode. ***(Définir une sous-variété par une forme submersive)***

Soit A une partie de l'espace euclidien définie par une équation $f(x_1,...,x_n) = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et f est C^p, alors pour tout $x \in A$, df_x est une forme linéaire. Elle est surjective si et seulement si elle est non nulle. Il s'agit donc de chercher les points critiques de f. Ainsi, si a n'est pas valeur critique (c'est-à-dire, valeur de f en un point critique), $f^{-1}(a) = A$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
Si a est valeur critique, on ne peut pas conclure.

Remarques.

1. Les sous-variétés de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, ou, autrement dit, de codimension nulle, sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

   ▷ Il est clair que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ en est une sous-variété de dimension n en prenant l'identité et $k = n$ dans n'importe quelle caractérisation. Réciproquement, si M est une sous-variété de dimension n, alors chacun de ses points admet dans M un voisinage localement homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$, et donc il existe une boule centrée en chacun de ses points incluse dans M, donc M est ouverte. ■

2. Les sous-variétés de dimension 0 sont les points, que l'on appelle dans ce contexte *points isolés*. Il est possible qu'il y ait plusieurs points, d'où le terme en fait.

▷ Immédiat. ■

3. On appelle *courbes* les sous-variétés de dimension 1 ; *surfaces*, les sous-variétés de dimension 2.

4. **Pour ceux qui connaissent la suite** Ainsi, les sous-variétés de dimension n ne donnent aucune information supplémentaire par rapport au calcul différentiel classique. Pour les sous-variétés de dimension inférieure, il s'agit de se ramener à des espaces euclidiens de dimension inférieure *à déformation lisse près*. Remarquons d'ailleurs que toute boule ouverte étant difféomorphe à l'espace vectoriel normé dans lequel elle se trouve, il est en quelque sorte équivalent de faire du calcul différentiel sur un ouvert et sur l'espace entier. Enfin, avec la dimension nulle, on obtient la possibilité de faire du calcul différentiel sur des points. Rien d'extravagant : toutes les fonctions sont C^∞, de différentielles nulles (le vérifier), car constantes sur chaque point. Mais c'est quelque chose que l'on n'avait pas le droit de faire avec le calcul différentiel usuel.

5. Il y a unicité de la dimension et de la régularité maximale en un point. La deuxième vient immédiatement ; pour l'unicité de la dimension, il faudra se rendre compte *(voir section suivante)* que k est égal à la dimension de l'espace tangent T_aM en n'importe quel point $a \in M$. Si M est connexe non vide, alors il y a unicité de la dimension de M.

▷ Soit $x \in M$. On utilise la définition par redressement local et quitte à prendre l'intersection de deux ouverts, on considère les difféomorphismes φ_1, φ_2 associés aux pseudo-dimensions k_1,k_2. Alors $d_x(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ induit un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{R}^{k_1}$ et $\mathbb{R}^{k_2}$, d'où l'égalité par le théorème de Brouwer.

Soit x un point de M de dimension k. On introduit l'ensemble D_k des points de M de dimension k. C'est un ouvert de M, puisque si φ est un redressement local en x défini sur l'ouvert U, alors $\varphi - \varphi(x')$ est un redressement local en tout point x' de U. De plus, D_k est fermé puisque $D_k = M \setminus \bigcup_{j \neq k} D_j$. Par connexité, $D_k = M$. ■

6. Il s'ensuit une remarque purement formelle : selon notre définition de sous-variété, la réunion d'une droite et d'un point est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Si l'on avait défini une sous-variété (de dimension k) de la même manière en imposant le k fixé à chaque définition équivalente, ce ne serait pas le cas. La bénignité de ce fait est obtenu par la preuve précédente : les définitions sont équivalentes sur les composantes connexes.

Propriété. ***(Produit de sous-variétés)***

Soient M_1,M_2 sous-variétés de classe C^p de $\mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbb{R}^{n_2}$, de dimensions k_1 et k_2. Alors $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ de classe C^p. De plus, $\dim(M_1 \times M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2)$.

$\triangleright$ Par submersion. Soit $(a,b) \in M_1 \times M_2$. Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^{n_1}$ contenant a, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1-k_1}$ de classe C^p une submersion en a telle que $M_1 \cap U = f^{-1}(f(a))$. De même, il existe V de $\mathbb{R}^{n_2}$ contenant b et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2-k_2}$ C^p avec $M_2 \cap V = g^{-1}(g(b))$. Soit $F : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^{n_1-k_1} \times \mathbb{R}^{n_2-k_2}$ de classe C^p définie par $(x,y) \mapsto (f(x),g(y))$. On a $(M_1 \times M_2) \cap (U \times V) = (M_1 \cap U) \times (M_2 \cap V) = f^{-1}(f(a)) \times g^{-1}(g(b)) = F^{-1}(f(a),g(b))$. Vérifions que F est une submersion en (a,b). Sa jacobienne est diagonale par blocs : $JF(a,b) = \begin{pmatrix} Jf(a) & 0 \\ 0 & Jg(a) \end{pmatrix}$. Elle est de rang $n_1 - k_1 + n_2 - k_2$. Ceci conclut la preuve de la propriété. ■

3.1.2 Espace tangent en un point à une sous-variété

Définition. ***(Courbe tracée sur une surface)***

Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in M$. Une courbe de classe C^p passant par a, tracée sur M (ou *le long de* M) est une application $\gamma :]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^p tel que $\gamma(0) = a$ et $\forall t \in]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) \in M$.

Définition. ***(Vecteur tangent à une partie en un point)***

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k. Soit $a \in M$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est *tangent à M au point a* s'il existe une courbe γ tracée sur M, passant par a, dérivable en 0, telle que $\gamma'(0) = v$.

Pour une variété de classe C^p, on impose que γ soit C^1 sur son ensemble de définition.

Remarque. Cette définition diffère très légèrement de la notion de vecteur tangent à un autre en un point du calcul différentiel général, à réviser.

Définition. ***(Espace tangent à une sous-variété en un point)***

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. On appelle *espace tangent à M au point a*, et l'on note T_aM, l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tangents à M en a.

Théorème. ***(Structure de l'espace tangent à une sous-variété en un point)***

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k en $a \in M$, T_aM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension $k = \dim_a(M)$.

En bonus, pour chaque façon de définir M au voisinage de a, il est caractérisé ainsi :

1. *(Submersion)* Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une submersion en a avec $M \cap U = f^{-1}(f(a))$, alors $T_aM = \mathrm{Ker}(df(a))$.
2. *(Redressement local)* Pour U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $\psi : U \longrightarrow V$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, C^p difféomorphisme avec $\psi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. On a $T_aM = d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.
3. *(Paramétrisation locale)* Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^k$, $0 \in \Omega$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $g(0) = a$ une immersion en 0 et un homéomorphisme sur un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, on a : $T_aM = dg(0)(\mathbb{R}^k) = \mathrm{Im}(dg(0))$.
4. *(Graphe)* Pour $M \cap (U_1 \times U_2) = Graphe(\varphi), \varphi : U_1 \longrightarrow U_2$ C^p, $a = (a_1,a_2) \in U_1 \times U_2$, alors $T_aM = Graphe(d\varphi(a_1))$.

▷ On se place dans le deuxième cadre, plus commode. Soit γ une courbe C^1 tracée sur M passant par a. Alors pour $|t|$ assez petit, $\gamma(t) \in U \cap M$, et l'on peut poser $\tilde{\gamma}(t) = \psi \circ \gamma(t)$ de $]-\varepsilon', \varepsilon'[$ dans $V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Alors $\tilde{\gamma}$ est différentiable en 0 et $\tilde{\gamma}'(0) = d\psi(\gamma(t))(\gamma'(0)) = d\psi(a)(\gamma'(0)) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Ainsi, pour tout $v \in T_aM$, $d\psi(a)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, soit $v \in d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Montrons que $T_aM = d\psi(a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$; il suffit d'avoir l'inclusion réciproque. Soit $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, et $c(t) = tw$. Pour $|t|$ assez petit, $c(t) \in V(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ ouvert, donc $\psi(c(t)) = \gamma(t)$ est une courbe de classe C^p, passant par a tracée sur M. De plus, $\gamma'(0) = d\psi^{-1}(c(0))(c'(0)) = d\psi^{-1}(0)(w)$. Or $\psi^{-1} \circ \psi = id$ et $\psi(a) = 0$, d'où $d\psi^{-1}(\psi(a)).d\psi(a) = id$, d'où $d\psi^{-1}(0) = d\psi(a)^{-1}$, soit $\gamma'(0) = d\psi(a)^{-1}(w)$, d'où le résultat par image réciproque d'une application linéaire. La dimension vient immédiatement par cette caractérisation.

Montrons la première caractérisation. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ tracée sur M passant par a, avec $M \cap U = f^{-1}(f(a))$. Alors pour tout t, $f(\gamma(t)) = f(a)$ est constante. La fonction $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable en 0, avec $df(a)(\gamma'(0)) = 0$. Ainsi, pour tout $v \in T_aM$, $df(a)(v) = 0$. Ainsi $T_aM \subseteq \mathrm{Ker}(df(a))$, tous deux de dimension k, d'où l'égalité.

Soit $\omega \in \mathbb{R}^k$, pour $|t|$ assez petit, $t\omega \in \Omega$. Posons $\gamma(t) = g(t\omega) \in M \cap U$ avec $\gamma(0) = g(0) = a$. Alors $\gamma'(0) = dg(0)(\omega) \in T_aM$ existe, ainsi $\mathrm{Im}(dg(0)) \subseteq T_aM$ d'où l'égalité par égalité des dimensions.

Pour la caractérisation avec le graphe local, c'est laissé en exercice. ■

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Retrouver à la main que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est tangent à tout point d'un ouvert fixé de $\mathbb{R}^n$.

▷ **Éléments de réponse.**

On le sait, car un ouvert est de codimension nulle. Retrouvons-le. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in U$ et $w \in \mathbb{R}^n$. Montrons que w est tangent à U en u. Il suffit de considérer le chemin $c(t) = wt + u$ qui vérifie : $c(0) = u$, $c'(0) = w$, et dans U pour t assez petit, car u est intérieur à U.

⟶ *Convention.* Pour certains, l'espace tangent à une sous-variété en un point n'est pas un espace vectoriel mais un espace affine de même direction et passant par le point en question. Nous nous autorisons à changer de définition quand il nous souhaite. De plus, cette deuxième définition annonce la notion suivante.

3.1.3 Fibré tangent

Définition. ***(Fibré tangent à une sous-variété)***

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, de classe C^p. On note $TM = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_aM = \{(a,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, a \in M, v \in T_aM\}$ réunion disjointe, le *fibré tangent* à M. On introduit alors l'application $M : TM \longrightarrow M$ définie par $(a,v) \longmapsto a$.

Théorème. ***(Structure du fibré tangent)***

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, de classe C^p. Alors TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de classe C^{p-1} et de dimension $2k$.

▷ Soit $(a,v) \in TM$. On utilise la définition par submersion. Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une submersion en a telle que $U \cap M = f^{-1}(f(a))$. Alors $TM \cap (U \times \mathbb{R}^n) = \{(b,w) \in U \times \mathbb{R}^n, f(b) = f(a), w \in T_bM = \mathrm{Ker}(df(b))\}$. On considère l'application de $U \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, notons là F, qui à (x,w) fait correspondre $(f(x), df(x)(w))$, de classe C^{p-1}. Alors $F^{-1}(f(a),0) = \{(b,w) \in U \times \mathbb{R}^n, b \in M \cap U, w \in T_bM\} = TM \cap (U \times \mathbb{R}^n)$. Montrons que F est une submersion en (x,v) (en fait, en tout point par linéarité). Alors la matrice triangulaire par blocs $JF(a,0) = \begin{pmatrix} Jf(a) & 0 \\ * & Jf(a)) \end{pmatrix}$ est de rang $n-k+n-k = 2n-2k$. ■

⟶ *Notation.* On a introduit l'application de projection $\Pi : TM \longrightarrow M$ qui à $(a,v) \longmapsto a$. C'est la restriction à TM de l'application première projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Elle est donc C^p.

3.1.4 Fibré co-tangent

3.1.5 Notion de transversalité

Définition. ***(Sous-variété transverse)***

Soient M_1,M_2 des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, $x \in M_1 \cap M_2$. On dit que M_1 et M_2 sont *transverses* en x si leur intersection est vide ou :

$$T_xM_1 + T_xM_2 = \mathbb{R}^n.$$

Exemples. ***(Sous-variétés transverses)***

1. Deux courbes sécantes sont transverses dans le plan.
2. Plus généralement, deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$ sont transverses si et seulement si leurs hyperplans tangents ne sont pas parallèles.

Théorème. ***(Intersection de sous-variétés transverses)***

Soient M_1,M_2 deux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, de classe C^p. On suppose que M_1 et M_2 sont transverses en tout point $x \in M_1 \cap M_2$. Alors $M_1 \cap M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^p, de dimension $\dim(M_1) + \dim(M_2) - n$. De plus pour tout $x \in M_1 \cap M_2$, $T_x(M_1 \cap M_2) = (T_xM_1) \cap (T_xM_2)$.

$\triangleright$ On utilise la définition par submersion. Moralement, $U_1 \cap U_2$ sera définie par la réunion des équations définissant les deux sous-variétés. Soit $x \in M_1 \cap M_2$. Il existe un ouvert de $\mathbb{R}^n$, U_i pour $i = 1,2$ tel que $U_i \cap M_i = f_i^{-1}(f_i(x))$ où $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k_i}$, $k_i = \dim(M_i)$, est une submersion en x. Soit $F : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k_1} \times \mathbb{R}^{n-k_2}$ qui à $y \longmapsto (f_1(y), f_2(y))$. Alors F est de classe C^p, et $F^{-1}(f_1(x),f_2(x)) = f_1^{-1}(f_1(x)) \cap f_2^{-1}(f_2(x)) = M_1 \cap M_2 \cap U_1 \cap U_2$. Montrons que F est submersion en x. On calcule : $dF(y)(h) = (df_1(y)(h), df_2(y)(h))$, d'où $\mathrm{Ker}(dF(y)) = \mathrm{Ker}(df_1(y)) \cap \mathrm{Ker}(df_2(y))$, d'où $rg(dF(y)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(df_1(y) \cap \mathrm{Ker}(df_2(y))$. D'après la formule de Grassmann, puisqu'ici $\mathrm{Ker}(df_i(y)) = T_yM_i$, on a $rg(dF(y)) = n - (\dim(T_yM_1) + \dim(T_yM_2) - \dim(T_yM_1 + T_yM_2)) = (n - \dim(T_yM_1) + (n - \dim(T_YM_2) = n - k_1 + n - k_2$ par hypothèse, ce dernier terme étant n. D'où F submersion. La propriété pour l'intersection vient de la preuve. ■

3.1.6 Applications différentiables sur des sous-variétés

Définition. ***(Application différentiable sur une sous-variété)***

Soient $N \subseteq \mathbb{R}^n$ et $M \subseteq \mathbb{R}^m$ des sous-variétés de classe C^k. Soit $f : M \longrightarrow N \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que f est *différentiable* (resp. *de classe* C^p, $p \leqslant k$) *en* $a \in M$ s'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, $a \in U$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable (resp. de classe C^p) telle que $f_{|U\cap M} = F_{|U\cap M}$ avec $F(U \cap M) \subseteq N$; on dit alors que F est un *prolongement local* au voisinage de a de l'application f.

On dit que f est *différentiable* (resp. *de classe* C^p) si elle l'est en tout point.

La fonction F peut changer selon le point. (Mais ce n'est pas obligatoire bien sûr.)

La notion de caractère C^p, C^∞ est ici donc **locale** !

$\longrightarrow$ *Convention.* Dans la suite, on énoncera systématiquement les résultats pour la classe C^p pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Il va de soi qu'ils restent vrai en remplaçant toujours cette condition par *différentiable*, si tant est que l'on ne change pas d'âne au milieu du gué.

Remarque. Il y a peu d'intérêt, mais c'est faisable, de définir la régularité des fonctions sur des variétés qui ne sont pas assez régulières. Elle est souvent infirmée par le théorème, vu plus tard, de lecture dans les cartes, mais pas toujours, voir des applications constantes par exemple.

Définition. ***(Différentielle d'une application sur une sous-variété)***

Soit $f : M_1 \longrightarrow M_2$ de classe C^p en $a \in M_1$, M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_1}$, M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_2}$. On appelle *différentielle de f en a*, et l'on note $df(a)$, ou comme d'habitude, l'application $T_aM_1 \longrightarrow T_{f(a)}M_2$ définie ainsi : si $v \in T_aM_1$, $v = \gamma'(0)$ où $\gamma(0) = a$, γ une courbe tracée sur M passant par a, alors $f \circ \gamma$ est une courbe tracée sur M_2 passant par $f(a)$ et l'on pose $df(a)(v) = (f \circ \gamma)'(0)$, autrement dit $df(a) = dF(a)_{|T_aM_1}$.

Ceci a un sens et se vérifie, c'est-à-dire que cette valeur est indépendante du chemin choisi. En effet, le fait que f soit C^p en a signifie qu'il existe un prolongement local F de f sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{n_1}$ contenant a, avec donc : $F_{|U\cap M_1} = f_{|U\cap M_2}$. Ainsi $F \circ \gamma = f \circ \gamma$ sur un intervalle $]\text{-}\varepsilon', \varepsilon[$ assez petit, car par continuité de γ en zéro, $\gamma(]\text{-}\varepsilon', \varepsilon[) \in U$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon'$ certain. Mais $F \circ \gamma$ est dérivable au sens usuel en zéro, avec par dérivation des fonctions composées $(F \circ \gamma)'(0) = dF(\gamma(0))(\gamma'(0)) = dF(a)(v) = dF_{T_aM_1}(a)(v) := df(a)(v)$ et ceci ne dépend que de $v = \gamma'(0)$ et non du chemin γ.
De plus, cela ne dépend pas du choix du prolongement local F, car si G est un autre prolongement local sur un ouvert V contenant a sur $U \cap V$, $F = G = f$ pour $|t|$ assez petit, d'où $F(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) = G(\gamma(t))$, donc les dérivées au voisinage de zéro de $t \mapsto F(\gamma(t))$ et $t \mapsto G(\gamma(t))$ seront toutes deux les dérives de la même fonction $t \mapsto f(\gamma(t))$ donnée par $df(a)(\gamma'(0)) = dF(a)(\gamma'(0)) = dG(a)(\gamma'(0))$ où $df(a) \in \mathcal{L}(T_aM_1, T_{f(a)}M_2)$, où $dF(a), dG(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2})$.

On dispose de la propriété suivante, transposition de la *chain rule*, qui permet tous les calculs de différentielles qu'on aime.

Théorème. ***(Composition des différentielles sur une sous-variété)***

Soient $f : M_1 \longrightarrow M_2$, $g : M_2 \longrightarrow M_3$, M_1,M_2,M_3 des sous-variétés d'espaces euclidiens. On suppose f différentiable en a (resp. C^p), g différentiable en $f(a)$ (resp. C^p), alors $g \circ f : M_1 \longrightarrow M_2$ est différentiable en a (resp. C^p), et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) : T_aM_1 \longrightarrow T_{g\circ f(a)}M_3.$$

$\triangleright$ On prend F un prolongement local de f sur $U \ni a$ et G un prolongement local de g sur $V \ni f(a)$, quitte à restreindre à $F(U) \subseteq V$. ■

3.1.7 Calcul d'extrema

Définition. *(Extremum local)*

Soit M un espace topologique, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a un *maximum* (resp. un *minimum*) *local* en un point $a \in M$ tel qu'il existe U un voisinage ouvert de a tel que $f_{|U}$ possède en a un maximum (resp. un minimum).
Un *extrémum local* est un maximum local ou un minimum local.

Théorème. *(Théorème de Fermat sur les sous-variétés)*

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si en $a \in M$, f possède un extremum local, alors $df(a) = 0$ où l'on rappelle $df(a) : T_aM \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\triangleright$ Soit $v \in T_aM$. Il existe $\gamma :]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe passant par a telle que $\gamma'(0) = v$. Alors $df(a)(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) \mid_{t_0}$. On considère $f \circ \gamma :]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si a est un extrémum local, il existe une ouvert U de M tel que $f_{|U}$ a un extremum en a. On peut prendre ε assez petit pour que $\gamma(]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[) \subseteq U$. Alors $f \circ \gamma$ possède un extrémum en $t = 0$. Le théorème de Rolle dit : $(f \circ \gamma)'(0) = 0$, *i.e.* $df(a)(\gamma'(0)) = df(a)(v) = 0$. Si on pense en terme d'un prolongement local de F au voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$, $df(a) = dF(a)_{T_aM} = 0$. ■

Notons que ce théorème, contrairement à la définition ci-dessus, n'aurait aucun sens si l'on ne se plaçait pas sur une sous-variété de l'espace $\mathbb{R}^n$, et seulement sur une partie.

On peut également faire de l'optimisation sous contraintes.

Théorème. *(Généralisation du théorème des extrema liés)*

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $U = V \cap M$ un ouvert de M, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1, $a \in U$. On suppose que sur U, M est donnée par une submersion $g = (g_1,\ldots,g_{n-k})$ C^p de $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ avec $M \cap V = g^{-1}(0)$ et que sur U, f est la restriction d'une application $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1. Si a est un extremum local pour f, alors il existe $\lambda,\ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ telle que $dF(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \ldots + \lambda_{n-k} dg_{n-k}(a)$. Les λ_i correspondent aux *multiplicateurs de Lagrange.*

$\triangleright$ Si a est un extrémum local, soit $df(a) = 10$, soit $dF(a)_{|T_aM} = 0$, on a vu que $T_aM = \operatorname{Ker}(dg(a)) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \operatorname{Ker}(dg_i(a))$. Or $dg(a) = (dg_1(a),\ldots,dg_{n-k}(a))$ et l'on sait ici que les $dg_i(a)$ sont indépendantes. Ainsi $\bigcap_{i=1}^{n-k} \operatorname{Ker}(dg_i(a)) \subseteq \operatorname{Ker}(dF(a))$, d'où par un résultat classique d'algèbre linéaire : $dF(a) \in Vect(dg_i(a))$. ■

Application. *(Réduction des matrices symétriques)*

On considère $M = S^{n-1}$ la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; c'est une sous-variété donnée par la submersion $g(x) = \sum x_i^2 = \langle x, x\rangle$. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. On introduit la fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ qui à $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$; $f = F_{|S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞. Par compacité de S^{n-1}, f possède des extrémas. Soit $a \in S^{n-1}$ extremum. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dF(a) = \lambda dg(a)$. Or $dg(a)(h) = 2\langle a, h\rangle$, d'où $dF(a)(h) = 2\langle Aa, h\rangle$, d'où $Aa = \lambda a$ d'où l'existence d'un vecteur propre pour A. Le reste suit avec la preuve usuelle.

3.1.8 Difféomorphismes entre sous-variétés

Définition. *(Difféomorphisme entre sous-variétés)*

Avec les notations évidentes :

1. $f : M_1 \longrightarrow M_2$ est un *C^p-difféomorphisme* si f est C^p, bijective et f^{-1} est C^p.
2. f est un *C^p-difféomorphisme local en $a \in M$*, il existe U un voisinage ouvert de a dans M_1 tel que $f(U)$ soit un voisinage ouvert de $f(a)$ dans M_2 et $f : U \longrightarrow f(U)$ soit un C^p-difféomorphisme.
3. f est un *difféomorphisme local* si c'est un difféomorphisme local en chaque point.

Remarque. On voit que tout difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété. *(Les difféomorphismes préservent la dimension)*

Si $f : M_1 \longrightarrow M_2$ est un difféomorphisme local en a, alors $df(a) : T_aM_1 \longrightarrow T_{f(a)}M_2$ est un isomorphisme d'espace vectoriel et $df(a)^{-1} = df^{-1}(f(a))$. En particulier $\dim M_1 = \dim M_2$.

Théorème. *(Image par un difféomorphisme d'une sous-variété)*

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, U,V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme. On suppose $U \cap M \neq \emptyset$. Alors $\phi(U \cap M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et si $a \in U \cap M$, $T_{\phi(a)}(\phi(U \cap M)) = d\phi(a)(T_aM)$.

▷ On utilise la caractérisation par paramétrisation locale pour avoir directement l'identité sur les espaces tangents. Si $a \in U \cap M$, $b = \phi(a)$, on veut une paramétrisation locale de $\phi(U \cap M)$ au voisinage de b. Pour a dans M, il existe W un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^k$, où $k = \dim(M)$ par la remarque précédente, et $g : \Omega \longrightarrow W$ une immersion, avec $g(0) = a$ telle que g induit un homéomorphisme de Ω sur $g(\Omega) = W \cap M$. Pour $\phi : U \longrightarrow V$, on regarde $\phi_{|U \cap W}$: c'est un difféomorphisme sur un ouvert V' de $\mathbb{R}^n$. Alors $\Omega' = g^{-1}(U \cap W)$ est un ouvert $\subseteq \Omega$. On regarde $\phi \circ g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi \circ g(0) = \phi(a) = b$; c'est une immersion. C'est un homéomorphisme sur son image. $\phi \circ g(\Omega') = \phi(U \cap W \cap M)$, $g(\Omega') = U \cap W \cap M$. Ainsi $\phi \circ g(\Omega') = \phi(U \cap W \cap (U \cap M)) = \phi(U \cap M) \cap V'$, *i.e.* $\phi \circ g$ est une paramétrisation de $\phi(U \cap M)$ et le théorème est démontré. ■

3.1.9 Cartes locales, atlas

Cette section permet de cerner mieux la nature abstraite des objets que l'on manipule.

Définition. *(Carte locale)*

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété C^p et $\dim(M) = k$, soit $a \in M$. Une *carte locale* de M au voisinage de a est un couple (U, φ) avec U ouvert de M contenant a et $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un difféomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$.
On dit de plus que la carte est *(centrée) en* a si $\phi(a) = 0$.

L'idée fondamentale est qu'**au voisinage de chaque point, une variété ressemble à un ouvert de l'espace euclidien**, au sens des difféomorphismes. En effet, la propriété suivante assure que les cartes locales existent toujours pour les sous-variétés.

Propriété. *(Construction de cartes locales sur des sous-variétés)*

On reprend les notations précédentes.

1. Supposons que M est donnée au voisinage de a par redressement local : il y a U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $0 \in V$, $\phi : U \longrightarrow V$ un C^p-difféomorphisme tel que $\phi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la projection sur le premier facteur de la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Alors $\psi = \Pi \circ \phi : U \cap M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^p et $\psi_{|U \cap M}$ est une carte locale.
2. Supposons M donnée par paramétrisation locale au voisinage de a. On a Ω un ouvert de $\mathbb{R}^k$, $0 \in \Omega$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion avec $\phi(0) = a$ un homéomorphisme de Ω sur $\phi(\Omega) = U \cap M$. Alors il existe $U' \subseteq U$ ouvert contenant a tel que $\phi^{-1} : U' \cap M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une carte locale.

En particulier, toute variété admet des cartes locales en tout point, en particulier, un atlas. (C'est ce qui permet de définir la notion générale de variété en mathématiques.)

▷ L'application $\Pi_{|\mathbb{R}^k \times \{0\}} : \mathbb{R}^k \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est bijective, d'inverse $i : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $(x_1,\ldots,x_k) \longmapsto (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$. Alors $\phi^{-1} \circ i$ est l'inverse de ψ.

Il faut que quitte à restreindre ϕ^{-1} à un sous-ouvert de $U \cap M$, elle soit C^p. Puisque ϕ est une immersion, on utilise sa forme canonique. Il existe $\Omega' \subseteq \Omega$ un ouvert, $U' \subseteq U$ un ouvert et $\theta : U' \longrightarrow V$ un difféomorphisme tel que $\theta \circ \phi(x) = (x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$, $x \in \Omega'$. Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ la projection sur les k premières coordonnées. Alors $\Pi \circ \theta \circ \phi(x) = x$ pour tout $x \in \Omega'$. Ainsi $\phi^{-1} = \Pi \circ \theta$ sur $\phi(\Omega')$ ouvert de $U \cap M$, donc de la forme $U' \cap M$ donc de classe C^p car θ est C^p. ■

Seulement, il n'est pas toujours aisé de les construire.

Exemple fondamental. ***(Cartes locales : cas de la sphère. Projections stéréographiques)***

Soit $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité. On considère les projections stéréographiques sur le plan équatorial par rapport respectivement aux pôles nord et sud : $\phi_N(M) = \mathbb{R}^n \cap (NM)$ de $S^n \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^n$, donnée par

$$\phi_N(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\ldots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right),$$

et $\phi_S(M) = \mathbb{R}^n \cap (SM)$ de $S^n \setminus \{S\}$ dans $\mathbb{R}^n$, donnée par

$$\phi_N(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\ldots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right).$$

Alors ϕ_N, ϕ_S sont des cartes locales : elles sont C^∞, bijectives, de réciproques :

$$\phi_N^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1},\ldots,\frac{2x_n}{\|x\|^2+1},\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right)$$

et

$$\phi_S^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1},\ldots,\frac{2x_n}{\|x\|^2+1},-\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}=\frac{1-\|x\|^2}{\|x\|^2+1}\right).$$

Une application concrète de la notion de cartes est que l'on peut lire la régularité sur les cartes locales.

Lemme. ***(Isotropie de la lecture dans les cartes locales)***

Soit $M_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ une sous-variété C^p de dimension k_i pour $i = 1{,}2$. On suppose que l'application $f : M_1 \longrightarrow M_2$ est différentiable (resp. C^p) en $a \in M$. S'il existe une carte locale (U, ϕ) en a ($\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$) et $g = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ est différentiable en $\phi(a)$ (resp. C^p au voisinage de $\phi(a)$, alors pour toute autre carte locale (U', φ'), $f \circ {\varphi'}^{-1} : \varphi'(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ différentiable en a.

Définition. ***(Atlas)***

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Un *atlas* de M est une famille $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de cartes locales telles que $M = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Exemple. ***(Atlas : cas de la sphère)***

L'exemple précédent convient, car $S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{S\})$.

On peut reformuler le théorème suivant en termes d'atlas.

Théorème. ***(Caractérisation de la différentiabilité grâce à un atlas)***

Soit M_i une sous-variété de $\mathbb{R}^{n_i}$, pour $i = 1{,}2$ et $(U_j, \varphi_j)_{j\in J}$ un atlas de M_1. Alors $f : M_1 \longrightarrow M_2$ est différentiable (resp. C^p) ssi pour tout j, $f \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j) \longrightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ est différentiable (resp. C^p) (au sens connu).

Exemple. ***(Prolongement C^∞ d'un polynôme au compactifié d'Alexandrov)***

Soit $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale explicitement donnée par $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.
On a $\hat{\mathbb{C}} = S^2$. On veut prolonger P à S^2 en utilisant les projections stéréographiques. On identifie $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ le plan équatorial.
Ici, $\phi_N(z,t) = \frac{z}{1-t}, \phi_S(z,t) = \frac{z}{1+t}$ et $\phi_N^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right), \phi_S^{-1}(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right)$.
Remarquons que $\phi_N \circ \phi_S^{-1}(z) = \frac{1}{z}$.
On définit l'application $f : S^2 \longrightarrow S^2$ sur $S^2 \setminus \{N\}$ définie par $f = \phi_N^{-1} \circ P \circ \phi_N$ et $f(N) = N$. Cette application f est C^∞ : il suffit de voir que $f \circ \phi_N^{-1}$ et $f \circ \phi_S^{-1}$ sont C^∞, ce qui est donc clair d'après le remarque.

3.1.10 Généralisation des théorèmes fondamentaux

On peut généraliser aux sous-variétés les théorèmes d'inversion locale et globale.

Théorème. ***(Inversion locale, inversion globale)***

Soit $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $\dim(M_1) = k$; $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, $\dim(M_2) = k$. Soit $f : M_1 \longrightarrow M_2$ C^p.

1. Soit $a \in M_1$, tel que $df(a) : T_aM_1 \longrightarrow T_{f(a)}M_2$ soit un isomorphisme linéaire. Alors f est un difféomorphisme local au voisinage de a.
2. Si pour tout $a \in M_1$, $df(a) : T_aM_1 \longrightarrow T_{f(a)}M_2$ est un isomorphisme, alors f est un C^p-difféomorphisme local, et si de plus f est injective, f est un C^p-difféomorphisme de M_1 sur son image.

▷ On utilise des cartes locales et on se ramène au résultat classique entre ouverts de $\mathbb{R}^k$. ■

3.2 Variétés différentielles

Nous allons maintenant généraliser la notion de variété en topologie qui ne se plonge pas forcément dans l'espace euclidien. L'idée est de reprendre la notion de carte locale pour paramétrer l'espace topologique localement et permettre le calcul différentiel sur l'image de la carte.

3.2.1 Notion de variété topologique

Définition. ***(Variété topologique)***

Une *variété topologique (sans bord)* (C^0) est un espace topologique séparé (parfois paracompact), à base dénombrable, tel que tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert d'un $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Remarques.

1. Toute variété topologique est donc localement compacte, localement connexe par arcs, et donc connexe si et seulement si elle est connexe par arcs ; ou encore, les composantes connexes et connexes par arcs coïncident. Sur chaque composante connexe, elle est aussi localement métrisable et donc à base dénombrable de voisinages. Enfin, chaque composante connexe est σ-compacte.
2. Une variété topologique est donc paracompacte si et seulement si chacune de ses composantes connexes est dénombrable à l'infini (voir le cours de TOPOLOGIE GÉNÉRALE, section COMPACITÉ).
3. On peut montrer (mais c'est dur) que toute variété topologique paracompacte est métrisable. Ainsi, on s'autorise, habité par des âmes de physicien, à démontrer dans la pratique seulement la séparabilité au lieu de l'existence d'une base dénombrable.
4. De même que pour les sous-variétés, il y a unicité de la dimension en un point pour une variété topologique générale grâce au théorème de Brouwer : quitte à considérer l'intersection de deux voisinages, on obtiendrait un homéomorphisme entre la boule unité de $\mathbb{R}^{k_1}$ et la boule unité de $\mathbb{R}^{k_2}$.
   Si de plus l'espace topologique est connexe, il y a unicité de la dimension de la variété topologique (la preuve est la même que dans le cas différentiel : on considère pour voisinage du point a, la restriction du voisinage de la définition à un ouvert contenant ce point qui est alors voisinage de chacun de ses points). En particulier, la dimension est constante sur chaque composante connexe.
5. On définit également la notion de *variété topologique dénombrable à l'infini* : c'est une variété topologique σ-compacte. On montre qu'une variété topologique est dénombrable à l'infini, si et seulement si, elle a un nombre dénombrable de composantes connexes, ou encore, si elle est à base dénombrable de voisinages.

Exemples. ***(Variétés topologiques)***

1. Une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k est une variété topologique. Cela vient des cartes locales qui sont des difféomorphismes C^p, donc a fortiori bicontinues.
2. *(Exemple fondamental : l'espace projectif)* L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1}/(u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* v = \lambda u)$ est une variété topologique.
   On sait en effet que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, muni de la topologie quotient, est compact donc séparé. Potons pour $i \in \{1,\dots,n+1\}$, $V_i = \{v = (v_1,\dots,v_{n+1}), v_i \neq 0\}$ ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, et $U_i = p(V_i)$ où p est la

projection canonique. Alors l'application de U_i dans $\mathbb{R}^n$ qui à $[v_1,\ldots,v_{n+1}] \mapsto (\frac{v_1}{v_i},\ldots,\frac{\hat{v_i}}{v_i},\ldots,\frac{v_{n+1}}{v_i})$ est un homéomorphisme, en effet, sa réciproque est $(t_1,\ldots,t_n) \mapsto [t_1,\ldots,t_{i-1},1,\ldots,t_n]$. Les V_i recouvrent $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété topologique de dimension n. On conseille au lecteur de montrer l'injectivité et la surjectivité de ces applications indépendamment de ce qu'elles sont réciproques afin de se refamiliariser avec l'espace projectif.

Comme on sait, pour $n \geqslant 2$, l'espace projectif ne se plonge pas dans un espace euclidien. Pourtant, c'est une variété topologique, et l'on va pouvoir y faire du calcul différentiel.

3. On montrera que les espaces topologiques usuels de la topologie algébrique, à savoir le tore, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein, sont des variétés topologiques.

Propriété. ***(Stabilité topologique de la notion de variété)***

Soient X,Y deux espaces topologiques homéomorphes. Alors X est une variété topologique si et seulement si Y est une variété topologique. De plus, s'ils sont connexes, ils ont la même dimension.

Définition. ***(Carte locale sur une variété topologique)***

Soit M une variété topologique de dimension k. Une *carte locale* est un couple (U,φ) où U est un ouvert de M et φ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^k$.

Définition. ***(Atlas d'une variété topologique)***

Soit M une variété topologique de dimension k. Un *atlas* de M est une famille $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ de cartes locales de M telles que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = M$.

Définition. ***(Changement de cartes)***

Soit M une variété topologique de dimension k et (U,φ), (V,ψ) deux cartes locales avec $U\cap V \neq \emptyset$. L'application $\psi\circ\varphi^{-1}_{|\varphi(U\cap V)} : \varphi(U\cap V) \longrightarrow \psi(U\cap V)$ est appelée *application de changement de cartes*.

Il est clair que c'est un homéomorphisme.

Exemples. ***(Cartes locales, atlas topologiques)***

1. Les projections stéréographiques φ_N,φ_S de S^n définissent des cartes locales.
2. Dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, les (U_i,φ_i) pour $1\leqslant i\leqslant n+1$ comme définies précédemment forment un atlas.

Définition. ***(Atlas, cartes compatibles)***

Soit M une variété topologique de dimension k.

1. Deux cartes $(U,\varphi),(V,\psi)$ sont dites *C^p-compatibles* si soit $U\cap V=\emptyset$, soit l'application de changement de cartes $\psi\circ\varphi^{-1}$ est un C^p-difféomorphisme entre ouverts de

$\mathbb{R}^k$.

2. Un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ est dit *de classe* C^p, ou *compatible*, si toutes ses cartes sont deux à deux C^p-compatibles. Parfois, on parle simplement d'atlas.
   Deux atlas sont dits *compatibles* s'ils sont tous deux de classe C^p et si toute carte de l'un est compatible avec toute carte de l'autre, autrement dit, si leur réunion est un atlas (de classe C^p, compatible).

À partir de maintenant, on dira atlas pour atlas compatible (avec lui-même), ou encore atlas de classe C^p.

Définition. ***(Atlas maximal)***

Soit M une variété topologique de dimension k. Un atlas de classe C^p est dit *maximal* si toute carte C^p-compatible avec toutes les (U_i, φ_i) est déjà dans l'atlas.

Remarques.

1. Comme dit plus haut, si l'on a deux atlas de classe C^p tel que toute carte de l'un est C^p-compatible avec toute carte de l'autre, alors leur réunion est un atlas de classe C^p.
2. On peut définir une relation d'équivalence, définie par la compatibilité, sur l'ensemble des atlas d'une variété différentielle. Il n'est pas tout à fait évident que cette relation est transitive, et l'on pousse le lecteur à l'écrire proprement par clarté d'esprit.
3. Dans chaque classe d'équivalence, on peut privilégier un représentant donné par un atlas maximal, comme le précise le corollaire suivant du fait initial.

Corollaire

Tout atlas est contenu dans un unique atlas maximal.

▷ Il suffit de prendre la réunion de tous les atlas compatibles avec lui. Cet ensemble d'atlas est bien sûr un ensemble. ■

Remarque. Si (U, φ) est une carte de M et $V \subseteq U$ un ouvert alors $(V, \varphi_{|V})$ est une carte C^p-compatible avec.

Ces définitions permettent d'introduire la notion suivante.

Heuristique

Plus la variété est connexe, plus il y a besoin de compatibilité entre cartes.

3.2.2 Notion de variété différentielle

Définition. ***(Variété différentielle)***

Soit M une variété topologique de dimension k. Une structure de *variété différentielle* ou *variété différentiable* de classe C^p sur M est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas compatibles, c'est-à-dire un atlas maximal de cartes (C^p-)compatibles. On dit que la variété topologique a une structure différentielle. On peut sans problème étendre cette définition au cas où $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$ où C^ω désigne le caractère analytique.

Remarque importante. Pour se donner une telle structure, il suffit de se donner un atlas (pas nécessairement maximal) de cartes C^p-compatibles.

Un ensemble est une variété topologique si on peut le munir d'une structure de variété topologique. Une variété différentielle est la donnée d'une structure différentielle sur une variété topologique, ce qui est assez fondamentalement différent d'un point de vue définitoire.

Remarques.

1. Un théorème dû à Whitney énonce le fait surprenant suivant : si X possède un atlas C^1, il existe un atlas C^∞ qui est compatible.
2. Il existe des variétés C^0 qui n'ont pas de structure C^1 compatibles.
3. Il peut exister plusieurs structures C^∞ non compatibles sur une même topologie. C'est le cas de la sphère S^7, grâce à une description due à Milnor.
4. Plus étonnant, toute variété C^∞ admet une structure C^ω-compatible.

Exemples. ***(Variétés différentiables)***

1. Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, grâce aux cartes locales via paramétrage ou redressement, sont des variétés différentielles.
2. En particulier, la sphère S^n avec $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$, $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$ les projections stéréo admet une structure C^∞, car $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$.
3. L'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ muni de l'atlas $(U_i, \varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ est une variété différentielle : le changement de cartes
$$\begin{array}{rcl} \varphi_i(U_i \cap U_j) & \longrightarrow & \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \underbrace{\frac{1}{y_j}}_{i^{\text{e}} \text{ position}}, \dots, \frac{\hat{y_j}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right) \end{array}$$
est C^∞.
On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et obtenir la même chose.

Propriété. ***(Atlas sur une variété compacte)***

Toute variété compacte admet un atlas fini.

▷ Immédiat par la propriété de Borel-Lebesgue. ■

Observation. *(Créer une variété différentielle d'un ensemble)*

Soit X un ensemble. On peut le munir d'une structure C^r en se donnant un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ avec I dénombrable où $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ et des applications $\varphi_\alpha : U\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ bijectives, où l'on suppose que pour tous α,β tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est un C^r-difféomorphisme.

▷ Il suffit de mettre sur X la topologie dont les ouverts sont les $U \subseteq X$ tels que $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ est ouvet pour tout $\alpha \in I$. C'est bien une topologie et les φ_α sont des homéomorphismes. De plus, si $p,q \in X, p \neq q$, on a soit p,q dans des cartes différentes, soit p,q sont dans un même ouvert de carte, donc la topologie de X est séparée. La dénombrabilité de I assure que X est dénombrable à l'infini. ■

3.2.3 Applications différentiables sur des variétés différentielles

Définition. *(Application de classe C^p sur une variété différentielle)*

Soient M,N variétés différentielles de classe C^p. Une application $f : M \longrightarrow N$ est dite de classe C^p si elle est **continue** et pour tout $a \in M$, il y a une carte (U, φ) en a, *i.e.* $a \in U$, une carte (V, ψ) en $f(a)$ telle que l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ est de classe C^p.

$$\begin{tikzcd}
a \in U \cap f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & V \ni (f(a) \arrow[d, "\psi"] \\
\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & \varphi(V)
\end{tikzcd}$$

L'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$ est appelée *application lue dans les cartes.*

Remarques.

1. Quitte à restreindre U, on peut supposer $f : U \longrightarrow V$ (on utilise d'ailleurs la continuité de f pour avoir $f^{-1}(V)$ ouvert), et ainsi seulement dire dans la définition : il y a deux cartes [...] avec $f(U) \subseteq V$. Le diagramme devient alors :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
\varphi(U) \arrow[r, dashed, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1} C^p"'] & \psi(U).
\end{tikzcd}$$

2. Grâce à la définition de variété différentielle (choix d'un atlas (compatible)), ceci ne dépend pas du choix des cartes (U, φ) et a et (V, ψ) en $f(a)$, explicitement : pour d'autres cartes (U', φ') en a et (V', ψ') en $f(a)$, $f(U') \subseteq V'$, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U') \longrightarrow \psi'(V')$ sur $U \cap U'$, $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = \psi' \circ \psi'^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1})$. Comme $\varphi \circ \varphi'^{-1}$

sur $\varphi'(U \cap U')$ et $\psi' \circ \psi^{-1}$ sur $\psi(V \cap V')$ sont C^p, alors $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ l'est aussi. **Ainsi, une application continue $f : M \longrightarrow N$ est C^p si et seulement si l'application lue dans tous les couples de cartes est C^p (et il n'y a pas besoin d'avoir un atlas maximal).**

Propriété. ***(Composition d'applications entre variétés différentielles)***

Soient M,N,P des variétés différentielles de classe C^p. Soient $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ des applications de classe C^p. Alors $g \circ f$ est de classe C^p.

▷ Soit $a \in M$, on dispose de $f(a) \in N$, $g \circ f(a) \in P$, (U, φ) carte en a, (V, ψ) carte en $f(a)$, (W, ξ) carte en $g \circ f(a)$, $f(U) \subseteq V, g(V) \subseteq W$,

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\psi\circ f\circ\varphi^{-1}"'] & \psi(V) \arrow[r, "\xi\circ g\circ\psi^{-1}"'] & \xi(W) \end{tikzcd}$$

Ainsi $\xi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ est C^p par composée. ■

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété C^p de dimension k ; on a vu que c'était une variété différentielle. On dispose a priori de deux notions d'applications C^p entre sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$:

- celle ci-dessus,
- celle donnée par l'existence d'un prolongement local.

Proposition

Ces deux notions sont les mêmes.

▷ S'il existe un prolongement local, alors il y a caractère C^p au sens ci-dessus. On peut tracer :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[r] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

Mais U est un ouvert de M, donc s'écrit $U = M \cap U'$, avec U' un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et par hypothèse il existe $F : U'' \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^p sur l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ $U'' \supseteq U$ et $F_{|U} = f$. Alors $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \psi \circ F \circ \varphi'$ est donc de caractère C^p au sens des variétés différentielles.

Inversement, si f est C^p au sens ci-dessus. On prend pour carte en a une carte donnée par redressement $\varphi : W \longrightarrow R^n$, W ouvert de $\mathbb{R}^n$, avec $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. On sait $f \circ \varphi^{-1}$ définie sur $\varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ et C^p. Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \{0\}$ la projection ; alors $g = f \circ \varphi^{-1} \circ \Pi$ est définie sur $\varphi(W)$ et est C^p. On considère $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$; alors $F = (f \circ \varphi^{-1} \circ \Pi) \circ \varphi$ est C^p. Pour $x \in W \cap M$, $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, $\Pi \circ \varphi(x) = \varphi(x)$, $F(x) = f(x)$. ■

Souvent, on utilise des cartes centrées, *i.e.* (U, φ) carte en a avec $\varphi(a) = 0$.

Exemples. ***(Applications entre variétés différentielles)***

1. Soit M une variété différentielle de dimension k et de classe C^p. Soit $U \subseteq M$ un ouvert. Alors U est une variété différentielle de dimension k et de classe C^p. En effet, si (U_i, φ_i) est un atlas de M, on prend les $(U \cap U_i, \varphi_{i|U\cap U_i})$.
2. *(Produit de variétés différentielles)* Si M,N sont des variétés différentielles de classe C^p et de dimension k et l respectivement. Alors $M \times N$ est une variété différentielle de classe C^p, de dimension $k + l$, et les projections $M \times N \longrightarrow M$, $M \times N \longrightarrow N$ sont des applications de classe C^p.

   $\triangleright$ En effet, soit (U_i, φ_i) atlas de M et (V_j, ψ_j) atlas de N ; alors $(U_i \times V_j, \varphi_i, \times\psi_j)$ est un ouvert de $M \times N$ pour la topologie produit. On introduit $\varphi \times \psi_j : U_i \times V_j \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ qui sont des homéomorphismes sur $\varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$. Les changements de carte $(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_i) \times (\psi_j^{-1} \circ \psi_{j'})$ est un C^p difféomorphisme, car les composantes le sont. ■

Définition. ***(Difféomorphismes)***

Soient M,N deux variétés différentielles de classe C^p. Soit $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p.

1. On dit que f est un difféomorphisme si f est bijective et $f^{-1} : N \longrightarrow M$ est de classe C^p.
2. On dit que f est un difféomorphisme local au voisinage de a s'il existe un ouvert $U \ni a$ tel que $f_{|U}$ est un difféomorphisme sur son image.
3. Si f est un difféomorphisme local si c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de M.

3.2.4 Sous-variété d'une variété différentielle

Définition. ***(Sous-variété différentielle)***

Soit M une variété différentielle de classe C^p, de dimension k. On dit que $P \subseteq M$ est une *sous-variété (différentielle)* de M si pour tout $a \in P$, il y a une carte (U, φ) en a telle que $\varphi(U \cap P)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^k$, *i.e.* il y a une carte (U, φ) en a telle que $\varphi(U \cap P) = V \times (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^k$ où $\varphi(U) = V$.

Nota bene. Si (U, φ) est une carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$, et ψ un difféomorphisme, alors $(U, \psi \circ \varphi)$ est une carte.

Proposition

Une sous-variété d'une variété différentielle est une variété est une variété différentielle.

3.2.5 Variétés à bord

Définition. ***(Variété à bord)***

Une *variété à bord* est un espace topologique séparé, à base dénombrable, tel que tout point admette un voisinage homéomorphe à un ouvert du demi-espace $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geqslant 0\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

3.2.6 Points réguliers, points critiques

Définition. ***(Point régulier, point critique, valeur régulière)***

Soient M,N des variétés de classe C^p et de même dimension. Soit $f : M \longrightarrow N$.

1. Un point $a \in M$ est dit *régulier*, s'il y a un ouvert $U \ni a$ tel que $f_{|U}$ est un difféomorphisme sur son image.
2. Un point qui n'est pas régulier est dit *point critique*.
3. Un point $b \in N$ est dit *valeur régulière* si pour tout $a \in f^{-1}(b)$, a est un point régulier. Par convention, si $b \notin f(M)$, on dit bien que c'est une valeur régulière.

Cette notion est une particularisation de la notion générale de point critique en calcul différentiel.

Théorème. ***(Fibres d'une valeur régulière dans le cas compact)***

Soient M,N deux variétés différentielles de classe C^p et de même dimension. On suppose M compacte. Soit $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p. Soit $y \in N$ une valeur régulière. Alors $f^{-1}(y)$ est de cardinal fini et il existe V un voisinage de y dans N tel que pour tout $z \in N$, $\mathrm{card}(f^{-1}(z)) = \mathrm{card}(f^{-1}(y))$.

$\triangleright$ Si $y \notin f(M)$, $|f^{-1}(y)| = 0$. Or M est compacte, donc $f(M)$ est compacte, donc fermée dans N séparée. Donc $N \setminus f(M)$ est un ouvert qui contient y. Si maintenant y est valeur régulier avec $y \in f(M)$. Pour tout $x \in f^{-1}(y)$, x point régulier, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $f_{|U_x} : U_x \longrightarrow f(U_x)$ un difféomorphisme qui à $x \mapsto y$. Ceci dit que $f^{-1}(y)$ est un sous-espace topologique de M dont tous les points sont isolés : $U_x \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Mais $f^{-1}(y)$ est fermé, donc compact, car M est compact. Or, un ensemble discret et compact est fini, d'où le premier point.

Montrons que le cardinal de la fibre est localement constant. Quitte à les restreindre, on peut supposer $U_{x_1},\dots,U_{x_p}$ deux à deux disjoints. Ainsi $f(U_{x_1}),\dots,f(U_{x_p})$ sont des ouverts de N, donc leur intersection est un ouvert de N contenant y. En outre, $M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ est un fermé de M, donc compact.

Ainsi $f(M \setminus \bigcup_{1}^{p} U_{x_i})$ est un compact de N, donc fermé. Ainsi, $N \setminus f(M \setminus \bigcup_{1}^{p} U_{x_i})$ est un ouvert de N contenant y. On prend $V = f(U_{x_1}) \cap \ldots f(U_{x_p}) \cap (N \setminus f(M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i})))$ ouvert contenant y. Si $z \in V$, alors il n'a pas d'antécédent ailleurs que dans $\bigcup_{i=1}^{p} U_{x_i}$ et il en a exactement un dans chaque U_{x_i}, d'où $|f^{-1}(z)| = p$. ■

Curiosité. ***(Application : démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss)***

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors il induit une application surjective de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

▷ On veut utiliser le théorème précédent ; pour cela, il faut se ramener au cas compact. Pour cela, on utilise le prolongement de P en une application C^∞ de $S^2 \longrightarrow S^2$, notée f, telle que $f(N) = N$ et $f = \varphi_N^{-1} \circ P \circ \varphi_N$, où S^2 est compacte. Soit $a \in S^2$, $a \neq N$. Si $\varphi_N(a)$ n'est pas un zéro de P', alors a est un point régulier de f. $\varphi_N, \varphi_N^{-1}$ sont des difféomorphismes. Si $P'(z) \neq 0$, $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et le théorème d'inversion locale dit que c'est un difféomorphisme local en z. On cherche les valeurs critiques de f. Il n'y en a qu'un nombre fini, car P' n'a qu'un nombre fini de zéros : c'est un polynôme non nul. Soit donc C l'ensemble des valeurs critiques de f. On sait que sur $S^2 \setminus C$, $y \mapsto |f^{-1}(y)|$ est localement constante. Mais $S^2 \setminus C$ est connexe par arcs, car C est fini, donc cette application est constante. Donc cette valeur est la même pour toutes les valeurs régulières. En particulier le nombre d'antécédents d'un point de C n'est jamais 0. ■

Et voilà une preuve du théorème fondamental de l'algèbre grâce aux outils de la géométrie différentielle (et une de plus !).

3.2.7 Espace tangent en un point à une variété

Soit $a \in M$, une variété différentielle de classe C^p. On considère des courbes $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$, $\varepsilon > 0$, tracées sur M avec $\gamma(0) = a$ de classe C^1, c'est-à-dire qu'il y a une carte (U, φ) en a (avec $\varphi(a) = 0$) tel que $\varphi \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \varphi(U)$ soit C^1 au sens usuel. On note $\mathcal{C}_m$ l'ensemble de ces courbes.

On introduit une relation d'équivalence (à vérifier) sur les courbes tracées sur M et passant par a : on dit que γ_1 et γ_2 sont tangentes et l'on note $\gamma_1 \sim \gamma_2$ s'il existe une carte (U, φ) en a (centrée) tel que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

Ceci ne dépend pas du choix de la carte (U, φ) en a. Si (V, ψ) est une autre carte $(\psi \circ \gamma_1) = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1)$, alors $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est C^p au sens usuel. Alors $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = d(\psi \circ \varphi^{-1})(0).(\varphi \circ \gamma_1)'(0)$. On a ainsi une relation d'équivalence.

Définition. ***(Espace tangent à une variété différentielle)***

L'espace tangent T_aM est l'ensemble des classes d'équivalence de courbes tangentes en a pour la relation définie ci-dessus[a], autrement dit, $T_mM := \mathcal{C}_m/ \sim$.

[a] Les lecteurs les plus attentifs ne seront pas surpris que, dans le cas des variétés abstraites, on ne puisse construire l'espace tangent de manière plus convaincante.

Théorème. ***(Structure de l'espace tangent à une variété différentielle)***

Pour tout $a \in M$, T_aM est un espace vectoriel de dimension $\dim(T_aM) = k = \dim(M)$.

▷ Munissons T_aM d'une structure d'espace vectoriel. Soit (U, φ) une carte en a. On a une application $\theta_\varphi : T_aM \longrightarrow \mathbb{R}^k$ qui à $v \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$ avec γ une courbe dont v est la classe. Peu importe φ grâce à la remarque précédente. On a ainsi une application injective. Montrons que θ_φ est bijective. Soit $w \in \mathbb{R}^k$. Alors $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ ouvert qui à $a \mapsto 0$ vérifie, pour ε assez petit, $\forall t \in]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\quad tw \in \varphi(U)$ et $\gamma(t) = \varphi^{-1}(tw) \in U \subseteq M$. γ est C^1, car $\varphi \circ \gamma(t) = tw$ et l'on a $(\varphi \circ \gamma)'(0) = w$. Ainsi, on transporte la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$ à T_aM ainsi : pour $v,v' \in T_aM$, $\theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(v) + \theta_\varphi(v')) := v + v'$. Ceci ne dépend pas du choix de la carte (U, φ) si on prend (V, ψ) et θ_ψ. On a $\theta_\psi = d(\psi \circ \varphi^{-1})(0).\theta\varphi$, puis : $\theta_\psi^{-1}(\theta_\psi(v) + \theta_\psi(v')) = \theta_\varphi^{-1}(d(\psi \circ \varphi^{-1})(0))^{-1}d(\psi \circ \varphi(0)\theta_\varphi(v) + \theta_\varphi(v')$. Ainsi, cette définition est intrinsèque. ■

Remarques.

1. *(« L'information d'une variété est contenue dans n'importe lequel de ses ouverts »)* Soit U un ouvert de M. Alors $T_aU = T_aM$, une remarque qui devrait rappeler des souvenirs aux amateurs de géométrie algébrique.
2. *(Espace tangent d'un produit.)* Soient M,N des variétés et $a \in M$, $b \in N$. $T_{(a,b)}(M \times N) = T_aM \times T_bN$.

Grâce à la notion d'espace tangent, on peut définir la différentielle d'une application C^p (oui, que maintenant !).

Définition. ***(Différentielle d'une application sur variété différentielle)***

Soient M,N deux variétés de classe C^p et $f : M \longrightarrow N$ C^p. On veut définir une application linéaire $T_af : T_aM \longrightarrow T_{f(a)}N$. Soit γ_1 une courbe tracée sur M, passant par a ; alors $f \circ \gamma_1 = c_1$ une courbe tracée sur N passant par $f(a)$. Si (U, φ) est une carte en a, (V, ψ) une carte en $f(a)$ avec $f(U) \subseteq V$. Alors l'application en bas :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\psi \circ f \circ \varphi^{-1}"'] & \varphi(V) \end{tikzcd}$$

est C^p au sens usuel, avec $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$.
Par construction, on a $\varphi \circ \varphi_1$ qui est C^1 au sens usuel. Alors $c_1 = f \circ \gamma_1 = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_1)$. Dans ce cas $\psi \circ c_1 = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_1)$ est bien C^1 par composition de classe C^p et de classe C^1.

$$\begin{tikzcd} T_aM \arrow[r, "\theta_\varphi"] \arrow[d, "T_af"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d] \\ T_{f(a)}M \arrow[r, "\theta_\psi"'] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

On pose la *différentielle de* f : $\boxed{T_af = \theta_{\psi^{-1}} \circ d_0(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_\varphi}$. On parle aussi d'*application linéaire tangente* en a. Alors T_af est clairement une application linéaire qui ne dépend pas du choix des cartes effectué pour les calculer.
Cette définition est cohérente, car $(\psi \circ c_1)'(0) = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)(\varphi \circ \gamma_1)'(0)$.

Remarque. T_af sera injective, resp. surjective, resp. bijective, ssi $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)$ l'est.

Théorème. ***(Composition des différentielles sur une variété différentielle)***

Soient M,N,P des variétés différentielles et $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p, $g : N \longrightarrow P$ de classe C^p. Soit $a \in M$. Alors $T_a(g \circ f) = T_{f(a)}(g) \circ T_a(f)$.

▷ Soient (U, φ) une carte en a, (V, ψ) une carte en $f(a)$, (W, ξ) en $g(f(a))$. Alors $g \circ f = g \circ \psi^{-1} \circ phi \circ f$, et $T_a(g \circ f)\theta_\xi^{-1} d(\xi \circ f \circ f \circ \varphi^{-1})(0)\theta_\varphi = \theta_\xi^{-1} d(\xi \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})(0)\theta_\varphi$. ■

3.2.8 Difféomorphisme, immersion, submersion sur une variété différentielle et adaptation des grands théorèmes à leur cas

En se plaçant dans des cartes, on obtient :

Théorème. ***(Théorèmes fondamentaux sur les variétés différentielles)***

Soient M,N des variétés C^p, $\dim(M) = k$, $\dim(N) = l$ et $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p. Soit $a \in M$.

1. *(Inversion locale)* Si l'application tangente $T_af : T_aM \longrightarrow T_{f(a)}N$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors il existe un ouvert U de M, $a \in U$ tel que $f_{|U} : U \longrightarrow f(U)$ soit un difféomorphisme.
2. *(Immersion, submersion)* Si $T_af : T_aM \longrightarrow T_{f(a)}N$ est injective (on dit encore que f est une immersion en a), il existe des cartes (U, φ) en a et (V, ψ) en $f(a)$ telles que si $x = (x_1,...,x_k) \in \varphi(U)$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1,...,x_k,0,...,0)$.
   Si T_af est surjective (on dit encore que f est une submersion en a), alors il existe des cartes (U, φ) en a et (V, ψ) en $f(a)$ telles que pour tout $x = (x_1,...,x_k) \in \varphi(U)$,

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_l)$, $l \leqslant k$.

Définition. ***(Plongement différentiel)***

Soit $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p avec les hypothèses précédentes. On dit que f est un *plongement* si $f(M)$ est une sous-variété de N et si f est un difféomorphisme de M sur $f(N)$.

Définition. ***(Point critique, valeur critique)***

On dit que que $a \in M$ est *point critique* de f si $T_a f$ n'est pas surjective, *i.e.* $\mathrm{rg}(T_a f) < l = \dim(N)$. On dit que $b \in N$ est *valeur critique* si c'est l'image d'au moins un point critique.

Théorème. ***(Immersion injective sur un compact)***

Soient M, N des variétés différentielles de classe C^p, $f : M \longrightarrow N$. On suppose M compacte. On suppose que f est une immersion injective. Alors f est un plongement.

▷ Par hypothèse, f est bijective continue donc c'est un homéomorphisme de f sur $f(M)$. Montrons que $f(M)$ est une sous-variété de dimension $k = \dim(M)$ de N. Pour donnée une carte (V, ψ) de N, on veut voir $\psi(V \cap f(M))$ sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^l$ et pour cela obtenir $\varphi(U \cap f(M)) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Soit $b = f(a)$. Par forme canonique des immersions, il y a une carte (U, φ) en a, (V, ψ) en b avec $f(U) \subseteq V$ telle que pour tout $x(x_1, \dots, x_k) \in \varphi(U)$, $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. f étant un homéomorphisme sur $f(M)$, on peut réduire le domaine de carte V pour que $\psi(f(M) \cap V) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. ■

Théorème. ***(Caractérisation des sous-variétés par submersion)***

Soit $f : M \longrightarrow N$ de classe C^p. Si f est une submersion, alors pour tout $b \in N$, $f^{-1}(b)$ est une sous-variété de M de dimension $k - l$.

3.2.9 Fibré tangent à une variété différentielle

Théorème. ***(Structure du fibré tangent)***

Soit M une variété de classe C^p, de dimension k. Alors $TM = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a M$ est muni d'une structure de variété différentielle.

▷ On veut déjà munir TM d'une structure de variété topologique. Soit (U, φ) une carte de M. Soit $TU = \bigcup_{a \in U} \{a\} \times T_a M$. On a une application bijective $\phi : TU \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^k$, qui à $(a, v) \mapsto (\varphi(a), \theta_{\varphi(v)})$, $v \in T_a M$, $\varphi(U) \times \mathbb{R}^k$ ouvert de $\mathbb{R}^{2k}$. On peut munir TU d'une topologie en décrétant que ϕ doit être un homéomorphisme, *i.e.* $W \subseteq TU$ ouvert $\iff$ $\phi(W)$ ouvert de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^k$.

On considère un atlas (U_i, φ_i) de M. Pour tout i, on dispose de TU_i, $\phi_i : TU_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$ muni de la topologie ci-dessus. Comme les U_i recouvrent M, les TU_i recouvrent TM. On opère donc un *recollement de topologies* : on munit TM d'une topologie par : $W \subseteq TM$ est ouvert si et seulement si pour tout i, $W \cap TU_i$ est un ouvert de TU_i, soit pour tout i, $\phi_i(W \cap TU_i)$ ouvert de $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$. Grâce aux changements de cartes, les topologies sur $TU_i \cap TU_j = T(U_i \cap U_j)$ induites par celles de TU_i et TU_j coïncident.

On dispose de $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ un C^p-difféomorphisme et donc de sa différentielle $d\varphi_{ij}(0) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un isomorphisme linéaire. On construit : $\phi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \varphi_k(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ qui à $(x,v) \mapsto (\varphi_{ij}(x), d\varphi_{ij}(x)(v))$. En posant $\phi_i : TU_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$ qui à $(a,v) \mapsto (\varphi_i(a), \theta_{\varphi_i}(v) = T_x\varphi_i(v))$, on a $\boxed{\phi_j = \phi_{ij} \circ \phi_i}$.

On a donc muni TM d'une structure de variété topologique, avec les cartes (TU_i, ϕ_i) et donc les changements de cartes $\phi_{i,j} : \varphi_i(Ui \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}$ qui à $(x, w) \mapsto (\varphi_{ij}(x), d\varphi_{ij}(x)(w))$.

Montrons que les (TU_i, ϕ_i) forment un atlas de C^{p-1} sur TM, d'où la structure de variété C^{p-1} sur TM, et que de plus $\Pi : TM \longrightarrow M$ qui à $(a,v) \mapsto a$ est C^{p-1}. Il s'agit de voir que les changements de cartes ϕ_{ij} sont des C^{p-1}-difféomorphismes. Comme ce sont des homéomorphismes, il suffit de voir que ce sont des difféomorphismes locaux. Or $J\phi_{ij}(x,w) = \begin{pmatrix} J\varphi_{ij}(x) & 0 \\ * & J\varphi_{ij}(x) \end{pmatrix}$. Comme les φ_{ij} sont des difféomorphismes, $J\phi_{ij}(x, w)$ est inversible. Lue dans les cartes, Π est la première projection. ■

Remarques.

1. *(Interprétation de $\theta_\varphi : T_aM \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$:)* Cette application est C^p car $\varphi \circ \varphi^{-1} = id : U \longrightarrow U$ et $\theta_\varphi = d\varphi(a)$.
2. *(Cette topologie est bien séparée.)* Soient $(a,v), (b,w) \in TM$, $(a,v) \neq (b,w)$. Si $a = b$, $v \neq w$, si pour i fixé, $a \in U_i$, $\theta_{\varphi_i}(a) \neq \theta_{\varphi_i}(b)$, d'où des ouverts de $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k$ qui séparent $\phi_i(a,v)$ et $\phi_i(b,w)$ et alors ϕ_i^{-1} de ces ouverts séparent.
   Si $a \neq b$ mais a et b dans un même U_i, idem.
   Si $a \neq b$ dans des U_i disjoints, c'est vite vu.

3.2.10 Fibration, fibrés vectoriel, définition des champs de vecteurs

À mi-chemin du faisceau (topologie ensembliste) et du revêtement (topologie algébrique), la géométrie différentielle a la fibration.

Définition. ***(Fibration, base d'une fibration, espace total et fibre type)***

Soient E,B,F des variétés différentielles de classe C^p. Une *fibration (localement triviale)* de *base* B, *espace total* E et *fibre de type* F est la donnée d'un morphisme surjectif $p : E \longrightarrow B$ de classe C^p tel que pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $U = U_b \ni b$, parfois dit *trivialisant*, tel qu'il y a un C^p-difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tel que :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F, \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

soit $pr_1 \circ \phi = p$, autrement dit, p coïncide avec la première coordonnée de ϕ. On dit donc aussi que p est une application *localement triviale*. On note $p : E \xrightarrow{F} B$. Remarquons que p est une application ouverte.

Remarques.

1. Pour tout $b \in B$, la *fibre* $F_b := p^{-1}(b)$ (qui parfois partage son nom, avec malheur, avec la fibre type) est difféomorphe à F. En effet, immédiatement, $\phi_{|p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \simeq \{b\} \times F \simeq F$ (par un difféomorphisme).
2. Autrement dit, pour tout $e \in E$, $p(e) = pr_1(\phi(e))$ et $e \in p^{-1}(b) \iff \phi(e) \in pr_1^{-1}(b) \simeq F$.
3. Remarquons que l'on peut parfois définir la fibration avec une fibre type variant selon l'ouvert trivialisant. Dans ce cas, la remarque précédente vaut (avec $F = F(b)$), et l'on a : $F(b) \simeq F(b')$ au sens des difféomorphismes dès que b et b' sont dans la même composante connexe de B.
4. L'application p est toujours une submersion. En effet, le fait d'être une submersion est une propriété locale, disons en x ; restreignons p au-dessus d'un ouvert trivialisant contenant $b = p(x)$. Or, en notant $\psi(x) = (b,u)$, le foncteur tangent transforme le diagramme définitionnel en :

$$\begin{tikzcd} T_x p^{-1}(U) \arrow[r, hook, two heads, "T_x\psi"] \arrow[d, "T_x p"'] & T_b U \times T_u F \arrow[dl, two heads, "T_{(b,u)} pr_1"] \\ T_b U & \end{tikzcd}$$

dont $T_x p$ est surjective.
5. *(Les revêtements sont les fibrations à fibres discrètes.)* En effet, soit $\pi : E \longrightarrow B$ un revêtement. Pour tout $b \in B$, $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \pi^{-1}(b)} V_\alpha$ tel que $\pi_{|V_\alpha} : V_\alpha \simeq U_b$ et donc $\pi^{-1}(b) = F$ a la topologie discrète. Ainsi $\phi : \pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$ par $x \in V_a \mapsto (\pi_{|V_\alpha}, \alpha)$. Réciproquement, si l'on a $E \longrightarrow B \supseteq U_b \ni b$ et $\pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ via ϕ, F discret, on peut supposer U_b connexe par la connexité locale des variétés topologiques. Ainsi $\pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$ par ϕ de sorte que $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{f \in F} \pi^{-1}(U_b \times \{f\})$ et $\pi_{|\pi^{-1}(U_b \times \{f\})} : \pi^{-1}(U_b \times \{f\}) \simeq U_b$.

Définition. ***(Morphisme de fibrations)***

Soient (E,B,F) et (E',B,F') des fibrations de base B. Un *morphisme de fibrations* (de base B) est une application C^p :

$$\begin{tikzcd} f : E \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

telle que $p' \circ f = p$. Ainsi, pour tout $b \in B$, f envoie $p^{-1}(b)$ dans $p'^{-1})$.
Si de plus f est un difféomorphisme, f^{-1} est aussi un morphisme et l'on dit que f est un *isomorphisme de fibrations.*

Exemples. ***(Fibrations)***

1. *(Fibration triviale)* Soient B,F deux variétés et $E = B \times F$. Alors pour $p = pr_1 : E \longrightarrow B$, pour tout $b \in B$, $pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$.
   Par définition, une fibration quelconque est localement isomorphe à une fibration triviale.
2. L'application $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une fibration de fibre de type $\mathbb{R}^\times$.
   En effet, on a introduit les ouverts $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ avec les $U_i = p(V_i)$ formant un atlas.

$$\begin{tikzcd} V_i = p^{-1}(U_i) : (v_1,\ldots,v_{n+1}) = \underline{v} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & U_i \times \mathbb{R}^k : (p(\underline{v}), v_i) \arrow[dl] \\ & U_i : [(v_1,\ldots,v_{n+1})] = [(\frac{v_1}{v_i},\ldots,1,\ldots,\frac{v_{n+1}}{v_i})] & \end{tikzcd}$$

3. L'application $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ qui à $t \mapsto e^{it}$ est une fibration de type $2\pi\mathbb{Z}$. On constate l'analogie avec la théorie des revêtements topologiques *(que nous explorerons ci-après)*.

Définition. ***(Fibré vectoriel)***

Un *fibré vectoriel* de classe C^p est une fibration (E,B,F) de classe C^p telle que F est un espace vectoriel, les fibres $p^{-1}(b)$ sont des espaces vectoriels et les difféomorphismes ϕ de trivialisation locale

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F, \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels entre les $p^{-1}(b)$ et F.
Par définition, le *rang* du fibré vectoriel est la dimension de F.

Exemples. ***(Fibrés vectoriels)***

1. *(Fibré trivial)* Donné par $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$.
2. Soit M une variété différentielle de classe C^p. Alors $TM \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel C^{p-1}, de rang $\dim(M)$.
   En effet, on considère l'atlas de TM construit à partir d'un atlas (U_i, φ_i) de M
   $$\begin{tikzcd} TU_i \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[d] & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k \\ U_i & \end{tikzcd}$$
   où l'on prend $(\varphi_i^{-1} \times id) \circ \varphi_i$.
   $$\begin{tikzcd} TU_i \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_i. & \end{tikzcd}$$
3. Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$ ou $SL_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors TG est trivialisable : $TG \longrightarrow G \times T_{id}G$ grâce à $(g,v) \mapsto (g, g^{-1}v)$.

Définition. ***(Fibré trivialisable)***

Un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe à un fibré trivial.

Définition. ***(Variété parallélisable)***

Une variété différentielle est *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable.

On introduit une notion cruciale.

Définition. ***(Section d'une fibration)***

Soit (E,B,F) une fibration selon la définition précédente. Une *section* est une application $s : B \longrightarrow E$ de classe C^p telle que $p \circ s = id_B$, autrement dit, c'est une section différentielle de la fibration.

Heuristiquement, il s'agit de choisir un élément dans la fibre de façon C^p.

Exemple. ***(Section d'une fibration triviale)***

Pour une fibration triviale, $s(b) = (b,f)$ où $f \in F$ est quelconque ; on obtient $B \to B \times F$.

Définition. ***(Champ de vecteurs)***

Soit M une variété et TM son fibré tangent. Une section de (TM,M) est appelée *champ de vecteurs*.
Autrement dit, un champ de vecteurs d'une variété différentielle M est une fonction différentiable associant à chaque point x de la variété M un vecteur tangent en ce point : $V : M \to TM$ qui à $x \mapsto (x, V_x)$ où $V_x \in T_xM$ l'espace tangent à M en x, c'est-à-dire, il existe une courbe $\gamma :]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\to M$ tracée sur M avec $\gamma(0) = x$ et C^1 au sens des variétés différentiables ; on prend alors $\tilde{V_x}$ sa classe modulo l'égalité de la dérivée en zéro de l'application lue dans n'importe quelle carte.

Fait. ***(Donnée d'un champ de vecteurs)***

Si M est une variété et $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas différentiel sur M, se donner un champ de vecteurs sur M revient à se donner $(X_i)_{i\in I}$ avec chaque $X_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i,\mathbb{R}^n)$ tel que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, pour tout x dans cette intersection, $X_i(x) = d_{\varphi_j(x)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(X_j(x)))$.

Remarque. L'ensemble des champs de vecteurs $\Gamma(TM)$ est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-module.

Définition. ***(Push-forward d'un champ de vecteurs)***

Soient M,N deux variétés différentiables. Soit $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme. Soit $X \in \Gamma(TM)$. On définit le *push-forward* de X par $\varphi_*(X)(y) = d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi(X_{\varphi^{-1}(y)}) \in \Gamma(TN)$.

Définition. ***(Pull-back d'un champ de vecteurs)***

Soient M,N deux variétés différentiables. Soit $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme. Soit $Y \in \Gamma(TN)$. On définit le *pull-back* de X par $\varphi^*(Y)(x) = d_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(Y_{\varphi(x)}) \in \Gamma(TM)$.

Exemple fondamental. ***(Champ de vecteurs d'un fibré trivialisable)***

Soit (E,B,F) un fibré vectoriel trivialisable. Fixons $(e_1,...,e_n)$ une base de F. Posons $s_i : B \longrightarrow E$ qui à $b \mapsto \phi^{-1}(b,e_i)$. C'est une section, et l'on a pour tout b, $(s_1(b), ..., s_n(b))$ qui est une base de $p^{-1}(b)$.

Proposition

Soit (E,B,F) un fibré vectoriel, $\dim(F) = n$, tel qu'il existe n sections $s_1,...,s_n$ telles que pour tout b, $s_1(b),...,s_n(b)$ base de $p^{-1}(b)$. Alors le fibré est trivialisable.

$\triangleright$ On construit $\psi : B \times F \longrightarrow E$. Fixons une base $(e_1,...,e_n)$ de F tel que $v \in F$, $v = \sum v_i e_i$. Alors $\psi : (b,v) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i s_i(b)$ est un morphisme de fibrés vectoriels, et un isomorphisme sur les fibres. Comme E est fibré, il est localement trivial. Soit U un ouvert de B, $b \in U$ tel que $\phi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$

avec une section $s_iU \longrightarrow p^{-1}(U)$, d'où $\phi_U \circ s_i : U \longrightarrow U \times F$. Ainsi, $\phi_U \circ s_i(b) = (b, S_i^U(b))$ où $S_i^U : U \longrightarrow F_i$. Or $(S_1^U(b),\dots,S_n^U(b))$ est une base de F. Soit $S^U(b)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans $(e_1,\dots,e_n)$. Les applications $S^U : U \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ sont C^p, $A \mapsto A^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ dans lui-même est C^∞ donc $S^U(\;\cdot\;)^{-1} : U \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^p, qui à $b \mapsto S^U(b)^{-1}$ est C^p. On a $(id \times S^U(\;\cdot\;)^{-1}) \circ \phi_U \circ \psi(b,v) = (b,v)$, car $\phi_u \circ \psi(b,v) = (b, \sum v_i S_i^U(b))$. Ainsi, $(id \times S^U(\;\cdot\;)^{-1}) \circ \phi_U$ est l'inverse de ψ sur le domaine considéré, donc ψ est un difféomorphisme local. ■

Exemple. ***(Le fibré vectoriel tautologique sur l'espace projectif)***

Soit $E = \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in [x]\}$ et $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la restriction de la première projection. Alors E est une sous-variété de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ et $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}$. On considère l'atlas (U_i, ϕ_i) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ habituel, d'où un atlas $U_i \times \mathbb{R}^{n+1}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par les $\phi_i \times id$. On veut voir que $(\phi_i \times id)(U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété. Prenons $[y] = [y_1, \dots, y_{n+1}] \in U_i$, avec $y_i \neq 0$. Alors $\phi_i([y]) = (\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$ sans le i-ième terme. Alors $(\phi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) = \{(z,v), v_k = v_i z_k, k \leqslant i+1, v_k = v_i z_{k-1}, k \geqslant i+1\}$ avec $z = (z_1,\dots,z_n)$, $v = (v_1,\dots,v_{n+1})$. C'est donné par n équations, *i.e.* par une application $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Comme les différentielles de ces n équations sont linéairement indépendantes, F est une submersion et l'on a donc une sous-variété. Ainsi E est une variété et $\dim(E) = n+1$, avec $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Pour tout $[x]$, $\Pi^{-1}([x]) = \mathbb{R}x$ une droite vectorielle. On obtient une trivialisation locale sur $\Pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}$ donnée sur $U_i \times \mathbb{R}$ par $[(u_1,\dots u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_{n+1})], t) \mapsto ([u], (tu_1, \dots, t, \dots, tu_{n+1}))$.

3.2.11 Quelques constructions de variétés différentielles : actions de groupe et revêtements

Soit M une variété topologique et différentielle, G une groupe agissant sur M par homéomorphisme ou difféomorphisme, G muni de la topologie discrète. On considère les orbites $G \cdot m = \{g \cdot m, g \in G\}$ pour $m \in M$ et M/G l'ensemble des orbites. On dispose d'une projection $p : M \longrightarrow M/G$; on munit de M/G de la topologie quotient au sens où Y est un ouvert de M/G si et seulement si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de M. Dans ce cas, $f : M/G \longrightarrow X$ un espace topologique est continue si et seulement si $f \circ p : M \longrightarrow X$ est continue. Notons qu'ici, p est une application ouverte. En effet, $p^{-1}(p(U)) = \bigcup\limits_{g \in G} g \cdot U$ est ouvert par action par homéomorphismes.

Dans toute la suite, les espaces topologiques considérés seront séparés, localement compacts (tout point admet une base de voisinage compact ou, ce qui est équivalent, admet un voisinage relativement compact).

Définition. ***(Action propre)***

Supposons M localement compact. L'action de G sur M est *propre* si pour tous K,L compacts de M, il n'y a qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $g \cdot K \cap L \neq \emptyset$.

On rappelle qu'une action est libre, ou sans point fixe, si elle agit sans point fixe autre que le neutre.

Propriété. ***(Transmission de la locale compacité aux orbites)***

Soit M un espace topologique séparé et localement compact, où G agit proprement. Alors M/G est séparé et localement compact.

On rappelle la preuve.

Preuve.

$\triangleright$ On considère $p : M \longrightarrow M/G$. Montrons que M/G est séparé. Soient $\alpha \neq \beta$ dans M/G. Soient $a,b \in M$ avec $p(a) = \alpha$ et $p(b) = \beta$, $a \neq b$. M est séparé, soient U,V deux voisinages compacts de a,b les séparant. Il n'y a qu'un nombre fini de $g \in G$ tels que $gV \cap U \neq \emptyset$. Soient $g_1,\dots,g_p$ ces éléments. Alors $g_1V,\dots,g_pV$ sont des voisinages de $g_ib \neq a$. Il existe V_i un voisinage compact de g_ib, U_i idem de a tels que $V_i \cap U_i = \emptyset$. Soit $U' = U \cap U_1 \cap \dots \cap U_p$ voisinage de a ; $V' = V \cap g_1^{-1}V_1 \cap \dots \cap g_p^{-1}V_p$ voisinage de b. On a : pour tous $g,g' \in G$, $gU' \cap g'V' = \emptyset$, d'où $p(U') \cap p(V') = \emptyset$. Montrons que M/G est localement compact. Soit $\alpha \in M/G$, et $a \in M$ tel que $p(a) = \alpha$. Soit U un voisinage compact de a. Alors $p(U)$ est compact et un voisinage de α, car p est ouverte. $\blacksquare$

De plus :

Proposition. ***(Structure de variété topologique donnée par une action propre)***

Soit M un espace topologique séparé et localement compact, où G agit proprement et librement. Alors tout point de M possède un voisinage U tel que les $g \cdot U$ sont deux à deux disjoints.

On introduit la notion de revêtement en topologie différentielle. Elle est semblable à celle de la topologie.

Définition. ***(Revêtement différentiel)***

Soient E,B des variétés de classe C^p. Soit $p : E \longrightarrow B$ une application surjective et de classe C^p. On dit que (E,B,p) est un revêtement si pour tout $b \in B$, il y a un ouvert *trivialisant* $U \ni b$ tel que la *fibre* $p^{-1}(U)$ est une réunion d'ouverts $V_i, i \in I$, les *feuillets*, deux à deux disjoints, et *bien revêtus*, soit tels que $p_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ est un C^p-difféomorphisme. En particulier, p est ouverte.

Remarque. Un revêtement est toujours un difféomorphisme local. La réciproque est fausse. Par contre, un difféomorphisme global est un revêtement, à un seul feuillet.

Exemples. ***(Revêtements différentiels)***

1. *(Revêtement trivial)* Soit B un variété et F un ensemble discret. Soit $pr_1 : B \times F \longrightarrow B$. Localement, on est dans cette situation avec $F = I$:

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\simeq U \times I \\ V_i &\longmapsto U \times \{i\} \\ x &\longmapsto (p(x),i). \end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$.

On rappelle :

Théorème. ***(Revêtement par une action proprement libre)***

Soit G un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact M. Alors $p : M \longrightarrow M/G$ est un revêtement (topologique).

Nous avons maintenant :

Théorème. ***(Revêtement différentiel par une action proprement libre)***

Soit M un variété de classe C^p et G un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur M localement compacte. Alors il y a une unique structure de variété sur M/G tel que $p : M \longrightarrow M/G$ est un revêtement de classe C^p.

$\triangleright$ Pour la version topologique, on utilise un voisinage V donné par la proposition précédente de $a \in p^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in M/G$. Alors $U = p(V)$ est un ouvert de M/G. Alors $p^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$ et $V_g = g \cdot V$. On a bien $p_{g \cdot V} : g \cdot V \longrightarrow U$ un homéomorphisme. Traitons le cas qui nous intéresse où M est un variété. Il faut munir M/G d'un atlas de cartes C^p-compatibles. Si on a un ouvert $U \subseteq M/G$, montrons que $p^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$, $p_{|V_i} : V_i \longrightarrow U$ un difféomorphisme avec $(p_{|V_i})^{-1} : U \longrightarrow V_i$. Pour montrer cela, on a deux outils : les cartes locales et les trivialisations locales. On part d'un atlas (W_i, ξ_i) de M. On munit M/G d'un atlas ainsi : pour $\alpha \in M/G$, U ouvert de M/G avec $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ et quitte à restreindre, on peut supposer V_i domaine de carte.

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, shift left] & \mathbb{R}^k \\ U \arrow[u, shift left, "p_{|V_i}"] & \end{tikzcd}$$

$\phi_U : \phi_i \circ (p_{|V_i})^{-1} : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ un homéomorphisme sur son image (on a une variété topologique). On regarde les changements de carte $\phi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $\phi_U = \phi \circ (p_{|V})^{-1}$ et $\phi_{U'} : U' \longrightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $\phi_{U'} = \phi' \circ (p_{|V'})^{-1}$ sur $\phi(U \cap U') \longrightarrow \phi'(U \cap U')$: c'est $\phi' \circ \phi^{-1} = \phi' \circ [p_{|V'}^{-1} \circ p_{|V}] \circ \phi^{-1}$. Tout revient à voir que les $(p_{|V'})^{-1} \circ (p_{|V}) : V \longrightarrow V'$ sont C^p au-dessus de $U \cap U'$. On prend $V_1 \subseteq V$, $p(V_1) = U \cap U'$, $V_2 \subseteq V'$, $p(V_2) = U \cap U'$. Soit $f = (p_{|U'})^{-1} \circ (p_{|V_1}) : V_1 \longrightarrow V_2$. C'est l'application qui à tout $m \in V_1$ associe l'unique élément de V_2 qui est dans son orbite, soit $f(m) = h.m$ où h est un unique élément de G vérifiant cette relation.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "p_{|V_1}"'] & & V_2 \arrow[dl, "p_{|V_2}"] \\ & U \cap U' & \end{tikzcd}$$

Les $k.V_2$, $k \in G$ sont deux à deux disjoints donc f envoie un voisinage de m dans ce même V_2 et pas dans $k.V_2$, $k \neq e$ et sur ce voisinage W : $\forall x \in W \quad f(x) = h.x$. On a là utilisé des *fonctions de transition*. ■

Exemples. ***(D'autres revêtements différentiels)***

1. Pour $M = S^n$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant par $x \longmapsto -x$, donc librement. Alors $M/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Alors $S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un revêtement (*à deux feuillets*) de classe C^∞.
2. Même chose où $\Pi^n = \mathbb{R}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau.

3.2.12 Fonctions plateaux et partition de l'unité

Définition. ***(Support d'une fonction sur une variété)***

Soient M une variété et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p. Le *support de f* est l'adhérence de $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Définition. ***(Fonction plateau sur une variété)***

Soit M une variété de classe C^∞. Une *fonction plateau* sur M est une fonction C^∞ $f : M \longrightarrow [0,1]$ tel qu'il existe U,V ouverts de M relativement compacts avec $\overline{V} \subseteq U$, $f_{|V} = 1$ et $\mathrm{supp}(f) \subseteq U$.

Heuristique

Les fonctions plateaux sont utiles pour prolonger à M certaines fonctions à support dans un ouvert.

Proposition. ***(Prolongement conjoint de fonctions sur des ouverts)***

Soient M une variété, U,V des ouverts de M, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui coïncident sur $U \cap V$. Alors elles se prolongent en une fonction C^∞ sur $U \cup V$.

Exemple

Typiquement, si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est à support dans un ouvert $V \subseteq U$, sur $W = \text{supp}(f)^c$, f est nulle, donc on peut la prolonger à M.

Théorème. ***(Existence de fonctions plateaux)***

1. *(Cas de $\mathbb{R}^n$)* Soient $B_1 \subseteq B_2$ deux boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$, de même centre et de rayons respectifs $r > R$. Alors il y a une fonction plateau $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ telle que $\text{supp}(f) \subseteq B_2$ et $f_{|B_1} = 1$.

2. *(Cas des variétés)* Soit M une variété, U un ouvert de M et $a \in U$. Alors il existe un ouvert V d'adhérence compacte $\overline{V} \subseteq U$ avec $a \in V$ et une fonction plateau f telle que $f_{|V} = 1$ et $\text{supp}(f) \subseteq U$.

3. *(Cas des variétés, cas compact)* Soit M une variété, $K \subseteq M$ compact, U ouvert avec $K \subseteq U$. Alors il existe une fonction plateau f sur M telle que $\text{supp}(f) \subseteq U$ et $f_{|K} = 1$.

$\triangleright$ Pour le premier point

a) La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x})$ pour $x > 0$ et 0 sinon est de classe C^∞. On le sait depuis les petites classes.

b) Soit $a > 0$. Alors $g(x) = \exp(\frac{-1}{a^2-x^2})$ pour $|x| < a$, 0 sinon est C^∞. Elle est à support compact. La primitive $h_(a(t) = \int_{-\infty}^{t} g_a(x)\mathrm{d}x / \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\mathrm{d}x$ est dans $[0,1]$, nulle pour $t \leqslant -a$ et égale à 1 pour $t \geqslant a$. Pour $b > a$, $h_a(b-t) \in [0,1]$, $b - t \leqslant -a$, *i.e.* $t \geqslant a + b$ nulle, et $b - t \geqslant a$, *i.e.* $t \leqslant b - a$ qui vaut 1.

c) On pose, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = h_a(b - \|x\|^2)$ avec $r_1^2 = b - a$ et $r_2^2 = b + a$.

Généralisons maintenant aux variétés. Soit (W, φ) une carte de M en a, $W \subseteq U$, $\varphi(a) = 0$. On a $\varphi(W)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut donc trouver deux boules $B_1 \subseteq B_2$ centrées en 0 et f une fonction plateau telle que $\text{supp}(f) \subseteq B_2$ avec $f_{|B_1} = 1$. On considère alors $f \circ \varphi : W \longrightarrow [0,1]$. $V = \varphi^{-1}(B_1) \subseteq \varphi^{-1}(B_2) = U$ et $a \in \overline{V} \subseteq U$. C'est une fonction plateau, qui n'est définie que sur W. On peut la prolonger en une fonction C^∞ sur M grâce à la fonction nulle et le tour est joué.

Soit K un compact. Pour tout $a \in K$, on prend une carte en a, d'où comme ci-dessus des voisinages $V_a \subseteq U_a$ avec $\overline{V_a} \subseteq U_a$ et des fonctions plateaux f_a telles que $\text{supp}(f_a) \subseteq U_a$ et $f_{a|V_a} = 1$. Du recouvrement ouvert $(V_a)_{a\in K}$, on extrait un recouvrement fini d'où $a_1,\ldots,a_p$ avec $V_{a_1} \cup \ldots \cup V_{a_p} = K$ et f_{a_i} vaut 1 sur a_i. L'idée dès lors et de faire l'analogie avec les fonctions caractéristiques. On écrit $K = \bigcup V_{a_i}$, puis $K^c = \bigcap V_{a_i}^c$ et $\chi_{K^c} = \prod_{i=1}^{p} \chi_{V_{a_i}^c}$, puis $1 - \chi_K = \prod(1 - \chi_{V_{a_i}})$. On pose $f = 1 - \prod_{i=1}^{p}(1 - f_{a_i})$ qui est C^∞ à valeurs dans $[0,1]$. Si $x \notin \bigcup U_{a_i}$, $f_(a_i)(x) = 0$ pour tout i d'où $f(x) = 0$. Ainsi $\text{supp}(f) \subseteq \overline{\bigcup U_{a_i}}$ d'où qu'il est compact. Si $x \in K$, il existe i, $f_{a_i}(x) = 1$ et $f(x) = 1$. ■

Définition. ***(Partition de l'unité)***

Soit M une variété différentielle et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement est la donnée de fonctions C^∞ $p_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que $\operatorname{supp}(p_i) \subseteq U_i$ et $\sum p_i = 1$.

Heuristique

Ces notions permettent généralement le passage du local au global.
Comme on le verra dans la section suivante, les fonctions plateaux jouent le rôle d'un système de coordonnées, particulièrement utile dans le cas compact.

Proposition. ***(Existence de partitions de l'unité dans le cas compact)***

Si M est compacte et I est fini, alors il existe une partition de l'unité subordonnée.

$\triangleright$ On prend, grâce au lemme de la partie suivante, un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ avec $\overline{V_i} \subseteq U_i$ et des fonctions plateaux f_i avec $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$ et $f_{i|V_i} = 1$. On a, si $f(x) = \sum\limits_{i\in I} f_i(x)$, $\forall i \quad f(x) > 0$, car il existe i_0 tel que $x \in V_{i_0}$ et alors $f_{i_0}(x) = 1$. On prend donc $p_i(x) = \frac{f_i(x)}{f(x)}$. ■

3.2.13 Plongement d'une variété compacte dans un espace euclidien

Lemme. ***(Recouvrement d'un compact par des fermés sur une variété)***

Soit M une variété compacte, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de M. Alors il y a un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ avec le même ensemble d'indices I avec $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

$\triangleright$ M est localement compacte, donc pour tout $x \in M$, il existe $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$ et V_x est ouvert, avec $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_{i(x)}$. Alors $(V_x)_{x\in M}$ est un recouvrement ouvert de M, d'où un sous-recouvrement fini $V_{x_1},\ldots,V_{x_p}$. Pour $i \in I$, soit $J_i = \{k \in \{1,\ldots,p\}, i(x_k) = i\}$ et $V_i = \bigcup\limits_{k\in J_i} V_{x_k}$ fait le job. On a bien $\overline{V_i} \subseteq U_i$. ■

Théorème. ***(Théorème de plongement des variétés compactes)***

Toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien.

$\triangleright$ Soit M une variété différentielle compacte de dimension k. On veut trouver un entier naturel n tel que M se plonge dans $\mathbb{R}^n$. On a vu que sur une variété compacte, un plongement est exactement une immersion injective. On considère un atlas de M, dont on extrait un sous-recouvrement fini $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$, $I = [\![1,p]\!]$ fini. On veut prolonger les φ_i à M. On considère les V_i donnés par le lemme et pour $\overline{V_i} \subseteq U_i$, on prend une fonction plateau f_i avec $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$ et $f_{i|V_i} = 1$. Alors, pour tout i, la fonction $\psi = f_i\varphi_i$ se prolonger en une fonction C^∞ sur M. Soit $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{np+p}$, $x \mapsto (\psi_1(x),\ldots,\psi_p(x),f_1(x),\ldots,f_p(x))$. La fonction F est C^∞, car ses composantes le sont. Montrons l'injectivité de F. Soient $x,y \in M$ tels que $F(x) = F(y)$. Comme les V_i forment un recouvrement de M, il existe i tel que $x \in V_i$. Alors $f_i(x) = 1 = f_i(y)$. On a aussi $\psi_i(x) = \psi_i(y)$. Ainsi $\varphi_i(x)f_i(x) = \varphi_i(y)f_i(y)$, soit $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, mais φ_i est bijective, d'où $x = y$. Il faut maintenant que je m'assure que F est une immersion. Il faut donc vérifier qu'en tout point, son application linéaire tangente est une application linéaire injective. Par composition, $T_x f = (T_x\psi_1,..., T_x\psi_p, ..., T_x f_1,..., T_x f_p)$. Si $x \in V_i$, alors sur V_i, $\psi_x = \varphi_i$; sur V_i, $T_x\psi_i = T_x\varphi_i$ et $T_x\varphi_i : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, d'où l'injectivité de T_xF. ■

Généraliser le théorème de plongement

Hassler Whitney a montré, et ce n'est pas impossible de le refaire, que toute variété compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$. Cette valeur $2n$ peut être diminuée bien sûr, car S^n se plonge toujours dans $\mathbb{R}^{n+1}$, mais la constante est optimale en ce que dans le cas de l'espace projectif, la constante est optimale, et un exemple suffit.

John Nash, défié par un camarade de Princeton, a démontré en 1956, après deux années de travail, que toute variété riemannienne peut être plongée de manière isométrique dans un espace euclidien.

3.3 Champs de vecteurs

Dans toute cette section, les variétés différentielles considérées seront supposées C^∞. On prend M une variété et X un champ de vecteurs (que l'on peut penser comme un opérateur différentiel d'ordre 1), soit $X : M \longrightarrow TM$ de classe C^∞ tel que $p \circ X(m) = m$. On verra comment, étant donné X, on peut trouver des courbes de classe C^∞ $c : I \longrightarrow M$ telles que pour tout $t \in I$, $c'(t) = X(c(t)) \in T_{c(t)}M$.

3.3.1 Dérivations sur une variété et description de l'algèbre des dérivations par rapport aux champs

Définition. ***(Dérivation sur une algèbre)***

Soit A une algèbre (associative, unitaire), typiquement, $A = \mathcal{C}^\infty(M)$. Une *dérivation* sur A est une application linéaire $D : A \longrightarrow A$ tel que pour tous $a,b \in A$, $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.
Canoniquement, pour $A = \mathcal{C}^\infty(M)$, on parle de *dérivation sur M*.
On note $\mathrm{Der}(A)$ l'ensemble des dérivations de A.

Remarques.

1. $D(1) = 0$, car $D(1^2) = D(1) = 1.D(1) + D(1).1 = 2D(1)$.
2. Si $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ comme suggéré, on en déduit $D(\text{application constante}) = 0$.

Proposition

$\mathrm{Der}(A)$ est un espace vectoriel.

Par contre, si $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, en général, $D_1 \circ D_2 \notin A$!

Proposition. ***(Crochet de dualité de dérivations)***

Si D_1,$D_2 \in \mathrm{Der}(A)$, $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Der}(A)$.

▷ Simple calcul. ■

Proposition. ***(Champ de vecteurs et dérivations)***

Soit M une variété C^∞ et $A = \mathcal{C}^\infty(M)$. Tout champ de vecteurs X sur M détermine une dérivation D_X de A donnée si $f \in A$ par

$$D_X(f)(x) = T_x f(X(x)) \in \mathbb{R}$$

(car $T_x f : T_x M \longrightarrow \mathbb{R}$, où $T_x f$ est l'application linéaire tangente de f, définie pour tout $v \in T_x M$ par $T_x f(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(c(t))$ où $c : I \longrightarrow M$ avec $c'(0) = v$). On a $D_X(f) \in A$.

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(N) \arrow[r, "g \mapsto g\circ\phi"'] \arrow[d, "\phi_\star(D)"'] & C^\infty(M) \arrow[d, "D"] \\
C^\infty(N) & C^\infty(M) \arrow[l, "h \mapsto h\circ\phi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

▷ On traite d'abord le cas d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Un champ de vecteurs sur U est donné par une application C^∞ $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, car $TU = U \times \mathbb{R}^n$. Fixons $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors $X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) e_i$. Alors pour $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_x f(X(x)) = df(x)(X(x)) = sommei = 1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) X_i(x)$. C'est bien C^∞. Ainsi $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est la dérivation correspondant au champ de vecteurs constant $x \mapsto e_i$.

Dans le cas d'une variété M, C^∞ est une notion locale, donc on peut se placer dans un domaine de carte (U, φ). Soit X un champ de vecteurs.

$$\begin{array}{ccccccc}
U & \longleftarrow & TU & \simeq & U \times \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^n \\
x & \longleftarrow & (x,\xi) & \longmapsto & (x, T_x\varphi(\xi)) & \xmapsto{pr_2} & T_x\varphi(x)
\end{array}$$

L'application $pr_2 \circ \phi \circ X$ est une application C^∞ par composition, donc $x \mapsto T_x\varphi(X(x))$ est C^∞. Or f est C^∞, sa restriction à U également, donc on a que l'application lue dans la carte (U, φ) donnée par $\varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $z \mapsto f \circ \phi^{-1}(z)$ est C^∞. Ainsi, $T_x f(X(x)) = T_x f \circ T_{\varphi(x)} \varphi^{-1} \circ T_x \varphi(X(x))$, car $T_{\varphi(x)} \varphi^{-1} \circ T_x \varphi = x$. Or le premier terme égale $T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})$ où $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ donc

$z \mapsto T_z(f \circ \varphi^{-1})$ de $\varphi(U) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est C^∞. Le dernier terme est déjà réglé. ■

On voit maintenant que toute dérivation provient d'un champ de vecteurs.

Théorème. ***(Correspondance entre champs de vecteurs et dérivations)***

L'application $X \mapsto D_X$ est une application linéaire bijective entre l'espace vectoriel $\chi(M)$ des champs de vecteurs et celui $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$ des dérivations.

Cette application est clairement linéaire. Montrons la bijectivité. Commençons par le cas d'un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. L'injectivité vient de ce que, si $X(x) = \sum X_i(x).e_i$, si $D_X = 0$, $X = 0$. En effet, si $X \neq 0$, il existe $a \in U$ et $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $X_i(a) \neq 0$, donc $(D_X f)(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ où f est la restriction à U de la fonction $x \mapsto x_i$ la i-ième coordonnée. Démontrons la surjectivité. Soit D une dérivation. On cherche $X \in \chi(U)$ tel que pour tout f, pour tout x, $D(f)(x) = \sum X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Fixons $x_0 \in U$ convexe. D'après le lemme de Hadamard, $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) h_i(x)$ avec les $h_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et même $h_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Soient $g_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto x_i - x_{i,0}$, avec donc $g_i(x_0) = 0$. Alors $f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(x)$. Alors $(Df)(x) = \sum_{i=1}^n [D(g_i)(x) h_i(x) + g_i(x) D h_i(x)]$, d'où $(Df)(x_0) = \sum_{i=1}^n D(g_i)(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Ainsi Df sur U coïncide avec D_X où $X(y) = \sum_{i=1}^n D(g_i)(y) e_i$. ■

3.3.2 Restriction d'une dérivation à un ouvert

Proposition. ***(Restriction des dérivations)***

Soit D une dérivation sur M.

1. Soit U un ouvert de M, $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que $f_{|U} = g_{|U}$. Alors $D(f)_{|U} = D(g)_{|U}$.
2. Pour tout ouvert U de M, il existe une unique dérivation D_U sur U telle que si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f_{|U} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ et alors $D(f)_{|U} = D_U(f_{|U})$.

▷ Par soustraction, on se ramène à : si $f_{|U} = 0$, $D(f)_{|U} = 0$, c'est-à-dire, pour tout $x \in U$, $D(f)(x) = 0$. Soit donc $x \in U$. Il existe V un ouvert dont l'adhérence est un compact inclus dans U et $x \in V$, il existe également une fonction plateau g dont le support est inclus dans U et valant 1 sur V. Alors $fg = 0$ au sens du produit donc $D(fg) = 0 = D(f)g + fD(g)$ en x. En particulier, en x, $0 = D(f)(x).g(x) + f(x)D(g)(x) = (Df)(x)$, car $f(x) = 0$.

Soit $f \in C^\infty(U)$. Soit $x \in U$. Quid de $D_U(f)(x)$? On prend $V \subseteq U$ et g une fonction plateau comme ci-dessus. Alors la fonction fg se prolonge par 0 en une fonction C^∞ sur M. On dispose de $D(fg) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. On pose, pour $y \in V$, $D_U(f)(y) = D(fg)(y)$. Ceci ne dépend par du choix de g grâce au premier point. Sa valeur en x ne dépend pas du choix de v. ■

3.3.3 Image par un difféomorphisme d'un champ de vecteurs ou d'une dérivation

Soient M,N deux variétés. Soit $\phi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. ϕ induit un morphisme d'algèbre $\phi^\star : \mathcal{C}^\infty(N) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ via $g \mapsto g \circ \phi$. Si de plus ϕ est un C^∞ difféomorphisme, on a aussi $(\phi^{-1})^\star : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(N)$. On les utilise ainsi pour transporter dérivations sur M en dérivations sur N.

Définition. ***(Transport de dérivation)***

Avec les notations précédentes, soit $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$. Alors $\phi_\star(D)$ donnée par :

$$\phi_\star(D)(g) = (\phi^{-1})^\star \circ D(\phi^\star(g))$$

soit

$$\phi_\star(D)(g)(y) = D(g \circ \phi)(\phi^{-1}(y))$$

est dans $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(N))$.

Remarque importante. Pour des champs de vecteurs,

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T\phi} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

et si $X \in \chi(M)$, $\phi_\star(X) = T\phi(X \circ \varphi^{-1})$, soit $\phi_\star(X)(y) = T_{\varphi^{-1}(y)}(X(\varphi^{-1}(y)))$.

Avec les définitions ci-dessus, $D_{\varphi_\star(X)} = \varphi_\star(D_X)$.

▷ En effet, $D_{\phi_\star(X)}(g)(y) = T_y g(\phi_\star(X)(y)) = T_y g \circ T_{\phi^{-1}(y)}(X(\phi^{-1}(y))) = T_{\varphi^{-1}(y)}(g \circ \phi^{-1})(X(\phi^{-1}(y)))$ pour $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$. Pour $\phi_\star(D_X)(g)(y) = D_X(g \circ \phi)(\phi^1(y)) = T_{\phi^{-1}(y)}(g \circ \phi)(X(\phi^{-1}(y))$, d'où l'identité. ■

On peut donc reprendre la preuve du théorème :

Preuve.

▷ Montrons l'injectivité dans le cas général. Soit $X \in \chi(M)$ tel que $D_X = 0$. Si $a \in M$ avec $X(a) \neq 0$, soit (U, φ) une carte en a, $\varphi(a) = 0$. $T_a\varphi(X(a)) \neq 0$ avec $T_a\varphi : T_aM \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donc pour au moins l'une des coordonnées, $T_a\varphi^i(X(a)) = D_x(\varphi^i)(a) \neq 0$. Ce n'est pas encore une contradiction, car φ^i n'est définie que sur U et pas sur M tout entier. Soit $V \subseteq U$, avec $\overline{V}$ compact, $a \in V$ et g une fonction plateau à support dans V. On considère $g\varphi^i$ qui se prolonge en une fonction C^∞ sur M. $D_X(g\varphi^i)(a) = D_x(g)(a)\varphi^i(a) + g(a)D_x\varphi^i(a) = D_x\varphi^i(a) \neq 0$.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit D une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(M)$. On cherche X tel que $D = D_X$. Soit (U_i, φ_i) des cartes d'un atlas d'où des D_{U_i}, puis $\varphi_i(D_{U_i})$ dérivations sur l'ouvert $\varphi_{i\star}(U_i)$ d'où $X_i \in \chi(\varphi_i(U_i))$ tel que $D_{X_i} = \varphi_{i\star}(D_{U_i})$, puis ${\varphi_i^{-1}}_\star(X_i) = Y_i$ champ de vecteur sur U_i. Question :

existe-t-il $Y \in \chi(M)$ tel que $Y_{|U_i} = Y_i$. Il faut vérifier que les Y_i et Y_j coïncident sur $U_i \cap U_j$. Pour cela, ${\varphi_i}_\star(Y_i) = X_i$ sur $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ et ${\varphi_j}_\star(Y_j) = X_j$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. ■

Proposition. ***(Comportement du transport de dérivation par composition)***

Soient M,N,P trois variétés différentielles. Soient $\phi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ des difféomorphismes. Alors $(\psi \circ \varphi)_\star = \psi_\star \circ \varphi_\star$, sur $\chi(M)$ ou sur $\mathrm{Der}(M)$.

▷ On le vérifie bien sur le diagramme, ou pour les courageux, par le calcul. ■

On retiendra en somme le lien fondamental : pour $X \in \chi(M)$,

$$\boxed{D_{\phi_\star(X)} = \phi_\star(D_X)}.$$

3.3.4 Constructions de champs de vecteurs

Soit M une variété C^∞. Soit $X \in \chi(M)$. On a vu : si (U, φ) est une carte locale, alors l'application lue dans les cartes est un champs de vecteur Y sur U, $Y = \varphi_\star(X)$.

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r] & \varphi(U) \times \mathbb{R}^k \\ (x, \xi) \arrow[r, mapsto] & (\varphi(x), T_x\varphi(\xi)) \\ U \arrow[u, bend left, "X"] & \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k \arrow[u, dashed, "Y"] \end{tikzcd}$$

Si on a un atlas (U_i, φ_i) de M, on obtient ainsi des champs de vecteurs $Y_i = {\phi_i}_\star(X_{|U_i})$ sur $\varphi_i(U_i)$ ayant la compatibilité sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$, $Y_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})_\star(Y_j)$.

Inversement :

Proposition. ***(Recollement de champs de vecteurs)***

Soit M une variété, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M et pour tout $i \in I$, Y_i un champ de vecteurs sur l'ouvert $\varphi_i(U_i)$. On suppose : si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$, $Y_i = (\phi_i \circ \phi_j^{-1})_\star(Y_j)$. Alors il existe un champ de vecteurs X sur M tel que ${\phi_i}_\star(X_{|U_i}) = Y_i$.

▷ En effet, $X_i = {\phi_i^{-1}}_\star(Y_i)$ est un champ de vecteurs sur U_i et la condition dit exactement que ${X_i}_{|U_i \cap U_j} = {X_j}_{|U_i \cap U_j}$. ■

3.3.5 Crochet de Lie de champs de vecteurs

Définition. ***(Crochet de Lie de champs de vecteurs)***

Soient $X,Y \in \chi(M)$. Soient D_X et D_Y le dérivations correspondantes. Le *crochet de Lie de X et Y*, noté $[X,Y]$, est le champ de vecteurs associé à la dérivation $[D_X,D_Y] = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X$: $D_{[X,Y]} = [D_X,D_Y]$.

Exemple. ***(Crochet de Lie de champs d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$)***

Sur U ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une base $(e_1,...,e_n)$, $X = \sum_{i=1}^n X_i e_i$ avec $X_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, $Y = \sum_{i=1}^n Y_i e_i$, $Z = [X,Y] = \sum Z_i e_i$. On a :

$$Z_j = \sum_{i=1}^n (X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}).$$

En effet, $D_X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $D_X \circ D_Y(g) = D_X(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial g}{\partial x_j}) = \sum_{i=1}^n X_i (\sum_{j=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j})$. On utilise le théorème de Schwartz pour conclure.

Comme tout crochet de Lie, celui des champs de vecteurs n'est pas associatif, mais vérifie :

Propriété. ***(Identité de Jacobi pour les champs de vecteurs)***

Soient $X,Y,Z \in \chi(M)$. On a :

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

▷ La vérification est immédiate en passant par les dérivations ! ■

Propriété. ***(Dualité et crochet de Lie de champs de vecteurs)***

Soient $X,Y \in \chi(M)$, $\phi : M \longrightarrow N$ un difféomorphisme. Alors

$$\phi_\star([X,Y]) = [\phi_\star(X), \phi_\star(Y)].$$

▷ De même. ■

3.3.6 Flot d'un champ de vecteurs

3.3.6.1 Équation différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit X un champ de vecteurs, *i.e.* $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞. On cherche des courbes $c : I \longrightarrow U$ de classe C^∞, avec I un intervalle ouvert contenant 0, telles que pour tout $t \in I$, $c'(t) = X(c(t))$ avec une *condition initiale* $c() = x_0$ où l'on s'est fixé un $x_0 \in U$.

Théorème. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***

Avec X et x_0 comme ci-dessus, il existe I intervalle ouvert $\ni 0$, $c : I \longrightarrow U$ C^∞ tels que $c'(t) = X(c(t))$ pour tout $t \in I$, $c(0) = x_0$. De plus, deux telles solutions coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition.

Ceci permet, pour $x_0 \in U$ donné, de considérer la solution maximale issue de x_0, *i.e.* $c_{x_0} : I_{x_0} \longrightarrow U$ où I_{x_0} est un intervalle maximal pour les c, $c(0) = x_0$.

Théorème. ***(Flot d'un champ de vecteurs sur un ouvert)***

Soit $\Omega = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\} \subseteq \mathbb{R} \times U$. Alors Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times U$ et l'application $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $(t,x) \mapsto c_x(t)$ est C^∞.

Définition. ***(Flot d'un champ de vecteurs sur un ouvert)***

Cette application ϕ est appelée le *flot de X*.

Remarque. Puisque Ω est ouvert, pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ et V voisinage ouvert de x tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \subseteq \Omega$, *i.e.* $\forall y \in V \quad]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I_y$ intervalle fixe valable pour tous les y de V.

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $V_t = \{x \in Y \mid (t,x) \in \Omega\}$ ouvert. Alors $x \in V_t \iff t \in I_x$ et l'on a une application $V_t \longrightarrow U$, $x \mapsto \phi(t,x) = \phi_t(x) = c_x(t)$.

Motivation.

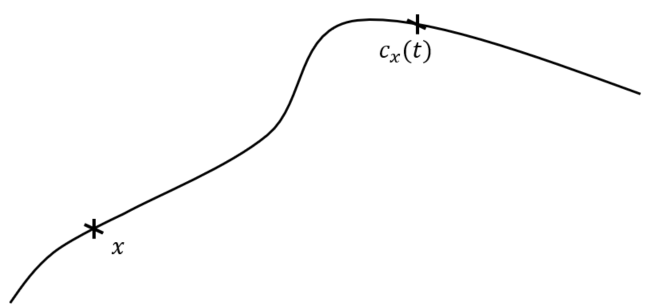


FIGURE 3.3.1 : *Théorème de Cauchy-Lipschitz et flot.* —
On réapplique l'existence en $c_x(t)$.

Proposition

(1) Soit $x \in U$, $t \in I_x$. Alors $I_{\phi_t(x)} = I_{c_x(t)} = I_x - t$ translaté.

(2) $t + s \in I_x \iff s \in I_{\phi_t(x)}$ et $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$. Ainsi ϕ_t est un difféomorphisme de V_t sur son image.

▷ Pour le premier point, supposons $I_x =]\text{-}a,b[$ avec $a,b > 0$, éventuellement infinis, par exemple $0 < t < b$. Posons $d(s) = c_x(t+s)$ défini sur $[\text{-}a-t, b-t]$, $d(0) = c_x(t)$. Alors $d'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_x(t+s) = c_x'(t+s) = X(c_x(t+s)) = X(d(s))$. Ainsi d est une solution de l'équation différentielle issue de $c_x(t) = \phi_t(x)$. Ceci donne $I_x - t =]\text{-}a-t, b-t[\subseteq I_{\phi_t(x)}$. La solution maximale issue de $\phi_t(x)$ est $s \mapsto \phi_s(\phi_t(x))$. En particulier, $d(s) = \phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$ pour $s \in I_x - t$. En particulier, pour $s = \text{-}t$, $\phi_{\text{-}t}(\phi_t(x)) = \phi_0(x) = x$. Ainsi, ϕ_t est un difféomorphisme sur V_t. En suite, on refait comme ci-dessus avec $(\text{-}t, \phi_t(x))$ au lieu de (t,x). On obtient $I_{\phi_t(x)} + t \subseteq I_x$. ■

VOC Dans la preuve ci-dessus, on dit que (ϕ_t) est un *groupe local à un paramètre.*

Définition. ***(Champ de vecteurs complet)***

On dit que le champ de vecteurs X est *complet* si pour tout $x \in U$, $I_x = \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on dispose du difféomorphisme ϕ_t $(V_t = U \quad \forall t)$ et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes, *i.e.* on a un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans Difféo qui à $t \mapsto \phi_t$.

On cherche à décrire les opérations inverses.

Proposition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times U$ ouvert contenant $\{0\} \times U$ et $h : \Omega \longrightarrow U$ de classe C^∞ tel que $h(0,x) = x$ et $h(s,h(t,x)) = h(s+t,x)$ dès que les deux membres sont définis. On pose, pour $x \in Y$, $X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t,x)\Big|_{t=0}$. Alors X est un champ de vecteurs sur U, appelé *générateur infinitésimal* de h, et le flot de X est donné par h.

▷ $t \mapsto c_x(t) = h(t,x)$ définie pour t assez petit est une courbe C^∞ issue de x. De plus, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}c_x(t+s)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h(t+s,x)_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}h(s,h(t,x))\Big|_{s=0} = X(h(t,x))$. ■

3.3.6.2 Image par un difféomorphisme... encore

Propriété. ***(Image d'un flot par un difféomorphisme)***

Soient U,V ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow V$ un difféomorphisme. Soit X un champ de vecteurs sur U, d'où l'on tire $f_\star(X)$ un champ de vecteurs sur V. Soit $(\varphi_t)_t$ le groupe local à un paramètre associé à X, (ψ_t) le groupe local à un paramètre associé à $f_\star(X)$. Alors $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$.

▷ Soit $y \in V$. Il faut voir que $t \mapsto f \circ \varphi_t(f^{-1}(y))$ est la courbe intégrale issue de y pour le champ $f_\star(X)$. Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\varphi(t, f^{-1}(y))_{t=0} = T_{\varphi_t \circ f(y)} f(X(f^{-1}(y))) = f_\star(X)(y)$. ■

3.3.6.3 Flot d'un champ de vecteurs sur une variété

Définition. ***(Équation différentielle sur une variété)***

Soit M une variété, $X : M \longrightarrow TM$ un champ de vecteurs et $a \in M$. Une solution de l'équation différentielle sur M définie par X est un couple (I,c) où I est un intervalle ouvert, $0 \in I$ et $c : I \longrightarrow M$ est C^∞ avec $c(0) = a$ et $c'(t) = X(c(t))$. (Cette équation a bien un sens puisque $c'(t)$ est dans $T_{c(t)}M$ par définition de l'application linéaire tangente et le champ de vecteurs est à valeurs dans le fibré tangent.) C'est appelé *courbe intégrale* de X.

En se plaçant dans des cartes locales, on montre :

Théorème. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz sur des variétés)***

Soit M une variété, $X : M \longrightarrow TM$ et $a \in M$. Alors :

(1) Il existe un intervalle ouvert $I \ni 0$ et une solution $c : I \longrightarrow M$ avec $c(0) = a$.

(2) Si $c_1 : I_1 \longrightarrow M$ est une autre solution avec de même $c_1(0) = a$, alors c_1 et c coïncident sur $I \cap I_1$.

Ainsi, on dispose de la notion de solution maximale issue d'un point a et pour $a \in M$, de l'intervalle maximal I_a.

Définition. ***(Flot d'un champ de vecteurs sur une variété)***

On définit $\Omega = \bigcup_{a \in M} I_a \times \{a\} \subseteq \mathbb{R} \times M$, ouvert et $\phi : \Omega \longrightarrow M$ qui à $(t,a) \mapsto c_a(t) = \phi_t(a) = \phi(t,a)$ qui est de classe C^∞.

Lemme. ***(Uniformité du flot sur les compacts)***

On reprend les notations ci-dessus.

Soit $K \subseteq M$ compact. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et U un ouvert de M contenant K tels que $]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \subseteq \Omega$ et ϕ est C^∞ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

▷ Soit $a \in K$. Il existe $\varepsilon_a > 0$ et U_a un ouvert de M contenant a tel que $]-\varepsilon_a, \varepsilon_a[\times U_a \subseteq \Omega$. Les $(U_a)_{a \in K}$ forment un recouvrement ouvert de K, d'où un recouvrement fini $U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_p} \supseteq K$. Alors $U = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_p}$ ouvert convient et $\varepsilon = \min(\varepsilon_{a_1}, \ldots, \varepsilon_{a_p})$ convient. ■

Théorème. *(Complétude des champs de vecteurs compact)*

Soit M une variété compacte. Alors tout champ de vecteurs sur M est complet.
En particulier, pour tout $X \in \chi(M)$, on dispose d'un groupe à un paramètre $(\varphi_t^\times)_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphisme de M.

▷ D'après le lemme, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M$, $]\text{-}2\varepsilon, 2\varepsilon[\subseteq I_x$. On veut que pour tout $x \in M$, $I_x = \mathbb{R}$. Soit $a \in M$, $I_a \neq \mathbb{R}$, par exemple $I_a =]\text{-}\alpha, \beta[$, $\beta < +\infty$ et $t = \beta - \varepsilon$. Considérons $c_a(t)$. On sait que pour tout $\delta < \varepsilon$, $\phi(s, c_a(t))$ est défini et $\phi(s, \phi_t(a)) = \phi(s + t, a)$ avec $s + t < \beta$. Ainsi, on peut prolonger $u \mapsto \phi(u, a)$ au delà de β via $\phi(u - t, c_a(t))$, ce qui contredit la maximalité. ■

Légèrement plus généralement.

Propriété. *(Complétude des champs de vecteurs à support compact)*

Soit M une variété et $X \in \chi(M)$ à support compact. Alors X est complet.

▷ On suppose qu'il existe K compact tel que $X(m) = 0$ si $m \notin K$. Si $m \notin K$, la courbe constante $t \mapsto m$ est solution, d'où, si $x \in K$, la courbe c_x reste dans K et on ramené au théorème précédent. ■

Propriété. *(Théorème des bouts pour les variétés)*

Soit M une variété, $X \in \chi(M)$, $\phi : \Omega \longrightarrow M$ son flot. Soit $K \subseteq M$ compact. On suppose que $m \in M$ est tel que $I_m \cap [0, +\infty[=]0,b[$ avec $b < +\infty$. Alors il existe $t_K \in]0,b[$ tel que pour tout $t \in]t_K,b[$, $\phi(t,m) \notin K$.

▷ D'après le lemme, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I_x$. On peut prendre $\varepsilon < b$ sans problème. On pose $t_K = b - \varepsilon > 0$. Si $t \in]t_K,b[$, $I_{\phi_t(m)} = I_m - t = [0, b - t]$ où $b - t < b - t_K = \varepsilon$. On n'a pas $]\text{-}\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I_{\phi_t(m)}$, donc $\phi_t(m) \notin K$. ■

3.3.6.4 Une application : dilatation des lignes de niveau

Théorème

Soit M une variété différentielle compacte et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $M^a = \{x \in M | f(x) \leqslant a\}$. Supposons $a < b$ tel que $f^{-1}([a,b])$ ne contient pas de points critiques de f. Alors il existe un difféomorphisme φ de M qui envoie M^a sur M^b.

▷ Pour tout $x \in f^{-1}([a,b])$, $T_x f \neq 0$. On sait également que M compacte peut être vue comme une sous-variété d'un certain $\mathbb{R}^N$. On a $T_x f \in (T_x M)^\star$ et si $M \subseteq \mathbb{R}^N$, $T_x M \subseteq \mathbb{R}^N$. On munit $\mathbb{R}^N$, et donc chaque $T_x M$ d'une structure euclidienne, d'où le gradient de f : $\delta f(x) \in T_x M$ défini par : pour tout $v \in T_x M$, $\langle \delta f(x), v \rangle = T_x f(v)$. On dispose ainsi d'un champ de vecteurs $x \mapsto \delta f(x)$ sur M. Soit $K = f^{-1}([a,b])$ compact, car fermé dans M. Posons $U = \{x \mid \delta f(x) \neq 0\}$ ouvert contenant K. Soit donc

g une fonction plateau avec $g = 1$ sur K, à support dans U. On pose pour $x \in M$: $\chi(x) = g(x).\frac{\delta f(x)}{\|\delta f(x)\|^2}$. Soit $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ le groupe à une paramètre donné par le flot de X, M étant compacte. Posons $t \mapsto f(\phi_t(x)) = h(t)$ et $h'(t) = T_{\phi_t} f(\chi(\phi_t(x)) = \left\langle \delta f(\phi_t(x), g(\phi_t(x)) \frac{\delta f(\phi_t(x))}{\|\delta f(\phi_t(x))\|^2} \right\rangle = g(\phi_t(x)) \in [0,1]$. Si $\phi_t(x) \in K$, *i.e.* si $f(\phi_t(x)) \in [a,b]$, alors $h'(t) = 1$. De plus, $h(t) - h(a) = \int_a^t h'(s)\mathrm{d}s = t - a$, *i.e.* ϕ_{b-a} envoie M^a sur M^b. ■

3.3.6.5 Redressement d'un champ de vecteurs

Propriété

Soit M une variété, X un champ de vecteurs et $a \in M$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe une carte (U, φ) en a telle que le champ X lu dans la carte est constant, *i.e.* $\varphi_\star(X_{|U})$ soit constant sur l'ouvert $\varphi(U)$.

▷ Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer $a = 0$, $X(0) = (X^1(0),\ldots, X^n(0))$ et l'on peut supposer $X^1(0) \neq 0$. On veut trouver un difféomorphisme G défini sur un voisinage ouvert de 0 tel que $G_\star(X) = e_1 = (1,0,\ldots,0)$. Soit (ϕ_t) le groupe local associé à X. (L'intérêt est que les courbes intégrales de e_1 sont $\varphi_t(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 + t, x_2,\ldots,x_n))$. Heuristiquement, dans le cas d'un champ constant, on peut utiliser les variables comme paramètres.) On fabrique, à partir de X, un difféomorphisme : $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui à $(x_1,\ldots,x_n) \to \varphi_t(0,x_2,\ldots,x_n)$. F est un difféomorphisme local au voisinage de zéro. On considère $dF(0)$. Sa jacobienne en zéro est la matrice compagnon dont la première colonne est $X(0)$. Son déterminant est donc $X^1(0) \neq 0$. Par le théorème d'inversion locale pour les sous-variétés, F est un difféomorphisme local. Prenons $G = F^{-1}$ sur les voisinages obtenus ci-dessus. Quel est $G_\star(X)$? On sait que c'est le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre obtenu à partir de celui de X en conjuguant par G, *i.e.* $t \mapsto F^{-1} \circ \varphi_t \circ F$. Pour $x \in U$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F^{-1} \circ \phi(t) \circ F(x) \mid_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F^{-1} \circ \phi_t \circ \phi_{x_1}(0,x_2,\ldots,x_n) \mid_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F^{-1}(\underbrace{\phi_{t+x_1}(0,x_2,\ldots,x_n))}_{F(t+x_1,x_2,\ldots,x_n)} \mid_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1 + t, x_2,\ldots,x_n) = (1,0,\ldots,0)$. ■

3.3.6.6 Image d'un champ de vecteurs par un flot

Proposition

Soit X un champ de vecteurs sur une variété M, ϕ_t son flot. Alors $(\phi_t)_\star(X) = X$.

▷ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(x) = X(\phi_t(x))$, d'où la formule $(\phi_t)_\star(X)(x) = T_{\phi_t^{-1}(x)}\phi_t(X(\phi_t^{-1}(x)))$. On a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi_{t+s}(x) \mid_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\phi_t \circ \phi_s(x)) = T_x\phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x))$ où $X(x) = T_{\phi_t(x)}\phi_t^{-1}(X(\phi_t(x)))$. ■

On donne la formule générale que l'on admettra.

Proposition

Soient X,Y deux champs de vecteurs et ϕ_t^X, ϕ_t^Y leurs groupes locaux à un paramètre. Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t^X)_\star(Y)\Big|_{t=0} = [X,Y]$.

⊛ *(Idée de la preuve.)* Cette fois, on passe par les dérivations : $D_{[X,Y]} = D_X D_Y - D_Y D_X$. ■

3.4 Groupes de Lie

$\boxed{\text{Dans la suite, toutes les variétés seront supposées } C^\infty.}$

3.4.1 Définition, premiers exemples

Définition. ***(Groupe de Lie)***

Un *groupe de Lie* G est une variété C^∞ munie d'une structure de groupe telle que les applications $m: \begin{array}{rcl} G\times G & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$ et $\mathrm{inv}: \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$ sont C^∞.

Définition. ***(Morphisme de groupes de Lie)***

Un *morphisme (de Lie)* entre deux groupes de Lie est un morphisme entre ces groupes qui soit une application de classe C^∞.

Définition. ***(Sous-groupe de Lie)***

Un *sous-groupe de Lie* d'un groupe de Lie est un sous-groupe de ce groupe qui en est aussi une sous-variété.

Exemples. ***(Groupes de Lie)***

1. $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.
2. $SL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.
3. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C}), \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), SU_n(\mathbb{C})$, sont des groupes de Lie.

3.4.2 Translations à gauche & à droite, champ de vecteurs invariants

Définition. ***(Translations latérales dans un groupe de Lie)***

Soit G un groupe de Lie. Pour $g \in G$, les applications $L_g: \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$ et

$$R_g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & hg \end{array}$$ sont C^∞ et sont des difféomorphismes, appelées translations à gauche et à droite par g.

Proposition

On a : $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2}$, $R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$.

Proposition

On a : $L_g R_h = R_h L_g$.

Définition. ***(Champ de vecteurs invariant)***

Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à gauche*, respectivement *à droite*, si pour tout $g \in (L_g)_\star(X) = X$, respectivement $(R_g)_\star(X) = X$). Ceci s'écrit : $X(gh) = T_h L_g(X(h))$. Ainsi, X est complètement déterminé par sa valeur $X(e)$ en l'élément neutre $\boxed{X(g) = T_e L_g(X(e))}$.

$\longrightarrow$ *Notation.* Notons $\mathcal{G} = T_e G$.

Proposition

L'application $X \mapsto X(e) \in \mathcal{G}$ est un isomorphisme de l'espace des champs de vecteurs invariants à g avec $\mathcal{G}$.

$\triangleright$ Soit $\mathfrak{X}(G)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur G et $\mathfrak{X}(G)^{\text{inv}}$ le sous-ensemble de ceux invariants à g. Alors l'application $X \mapsto X(e)$ de $\mathfrak{X}(G)^{\text{inv}}$ sur $\mathcal{G}$ est linéaire injective grâce à ce qui précède. De plus, elle est surjective : si $v \in \mathcal{G}$, on pose $X(g) = T_e L_g(v) \in T_g G$. Il est bien invariant à gauche : $X(gh) = T_e L_{gh}(v)$ grâce à $L_{gh} = L_g \circ L_h$ et $T_e(L_{gh}) = T_h L_g \circ T_e L_h$. Il faut encore s'assurer que $g \mapsto X(g)$ est bien C^∞. ■

On en déduit :

Proposition

Tout groupe de Lie est une variété parallélisable.

$\triangleright$ Il faut trouver, si $n = \dim(G)$, n champs de vecteurs $X_1,\ldots,X_n$ sur G tels que $(X_1(g),\ldots,X_n(g))$ soit une base de $T_g G$. On a $\dim(T_e G) = n$. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de $\mathcal{G} = T_e G$. On considère les champs invariants à g associés : $X_k(g) = T_e L_g(e_k)$: c'est une famille libre, car $T_e L_g : T_e G = T_g G$ est inversible. Ainsi $TG \simeq G \times \mathcal{G}$ par $(g, T_e L_g(v)) \longleftarrow (g,v)$. ■

Proposition. ***(Invariance du crochet de Lie)***

Le crochet $[X,Y]$ de deux champs de vecteurs invariants à gauche (resp. à droite) est encore invariant à gauche (resp. à droite).

▷ On a vu que si φ est un difféomorphisme, $\varphi_\star([X,Y]) = [\varphi_\star(X), \varphi_\star(Y)]$. ■

3.4.3 Flot d'un champ de vecteurs invariant à gauche et sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie

Définition. ***(Sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie)***

Un *sous-groupe à un paramètre* d'un groupe de Lie G est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers G.

Exemple

Pour $G = GL_n(\mathbb{R})$, tout groupe à un paramètre est de la forme $t \mapsto \exp(tA)$ pour une $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque importante. Si $f : (\mathbb{R},+) \longrightarrow G$ est un sous-groupe à un paramètre de G, on lui associe un groupe à un paramètre de difféomorphismes de G : $\phi_t(g) = g \cdot f(t)$, *i.e.* $\phi(t) = R_{f(t)}$.

Théorème

1. Si $f : \mathbb{R} \to G$ est un sous-groupe à un paramètre, alors le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre de difféomorphisme $\phi_t(g) = gf(t)$ est un champ de vecteurs invariant à gauche.
2. Inversement, si X est un champ de vecteurs invariant à gauche, le groupe à un paramètre de difféomorphisme est défini sur $\mathbb{R} \times G$ et il est donné par un sous-groupe à un paramètre de G, *i.e.* $\phi_t^\times(g) = g \cdot f_X(t)$ où $f_X(t)$ est un sous-groupe à un paramètre de G, $f_X(t) = \phi_t^\times(e)$.

▷ Pour le premier point, $\phi_t(g) = g \cdot f(t)$. On sait que le générateur infinitésimal est donné grâce à $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(g) = X(\phi_t(g))$. Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(gf(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_g(f(t)) = T_{f(t)}L_g(f'(t))$. En $t = 0$, $X(g) = T_eL_g(f'(0))$. C'est exactement la forme des champs invariants à gauche.

Inversement, soit X un champ de vecteurs invariants à g. On regarde son flot. Il est défini sur $I_e \times G$, *i.e.* pour tout $g \in G$, $I_e \subseteq I_g$, et il est donné par $(t,g) \mapsto g.\phi_t(e)$ où $\phi_t(e)$ est une courbe issue de g, dans G. c'est-à-dire que l'on a $\phi_t(g) = g \cdot \phi_t(e)$. Pour le voir, comme en $t = 0$, ces deux courbes valent g, il suffit de voir qu'elles satisfont à la même équation différentielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g, \phi_t(e)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g \cdot \phi_{s+t}(e)) \mid_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g \cdot \phi_s \circ \phi_t(e)) \mid_{s=0} = T_{\phi_t(e)}L_gX(\phi_t(e)) = X(g \cdot \phi_t(e))$, car X est invariant à g. Par ailleurs, par définition, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(g) = X(\phi_t(g))$, d'où, pour $t \in I_e$, $\phi_t(g) = g \cdot \phi_t(e)$. En particulier, pour tout $g \in G$,

$I_e \subseteq I_g$. On a vu, de façon générale, $I_{\phi_t(e)} = I_e - t$ d'où $I_e \subseteq Ie - t$ pour tout $t \in I_e$, $I_e + t \subseteq I_e$, d'où $I_e = \mathbb{R}$. ■

3.4.4 Algèbre de Lie

Définition. ***(Algèbre de Lie)***

C'est un espace vectoriel $\mathcal{G}$ muni d'un application bilinéaire $[.,.] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ qui est alternée/antisymétrique et satisfait à l'*identité de Jacobi* :

$$\forall X,Y,Z \in \mathcal{G}, \quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Définition. ***(Sous-algèbre de Lie)***

Une sous-algèbre de Lie est un sev stable par $[.,.]$.

Définition. ***(Morphisme d'algèbre de Lie)***

Un morphisme d'algèbre de Lie est une application $f : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ linéaire telle que $f([X,Y]) = [f(X),f(Y)]$.

Exemples. ***(Algèbres de Lie)***

1. Soit A une algèbre associative. Pour tous $X,Y \in A$, $[XY] = XY - YX$ convient.
2. Soit A une algèbre, alors l'algèbre de ses dérivations $\mathrm{Der}(A)$ muni du crochet de Lie déjà rencontré, convient.
3. Soit M une variété. Alors $\mathfrak{X}(G)$ est une algèbre de Lie
4. Soit G un groupe de Lie. Alors $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie.

3.4.5 Quelques calculs d'applications linéaires tangentes

Exemple. ***(Différentielle de la multiplication)***

On considère $m : G \times G \longrightarrow G$. Calculons $T_{(e,e)}m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ courbes dans G issues de e. $a'(0), b'(0) \in \mathcal{G}$. Ainsi $T_{(e,e)}(m)(a'(0),b'(0)) = a'(0) + b'(0)$. En effet, $m(a(t),b(t) = c(t) = a(t)b(t)$ et l'on calcul $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(a(t),b(t)) \Big|_{t=0}$. De façon générale, $T_{(e,e)}m(u,v) = T_{(e,e)}m(u,0) + T_{(e,e)}m(0,v)$, car $(u,v) = (u,0) + (0,v)$ et $T_{(e,e)}m(a'(0),0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(a(t),e) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t) \Big|_{t=0} = a'(0)$.
Calculons maintenant $T_{(g,e)}m : T_gG \times T_eG \longrightarrow T_gG$ qui à $(v,w) \mapsto v + T_eL_g(w)$. Si $t \mapsto c(t)$ est une courbe issue de g, alors $c(t) = g.a(t)$ où $t \mapsto a(t)$ est issue de e, $c'(0) = v$. Soit $t \mapsto b(t)$ une courbe issue de e, $b'(0) = w$. Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)b(t)_{|t=0} =$
$ddtttg(a(t)b(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_g(a(t)b(t))) \Big|_{t=0} = T_eL_g(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t)b(t))) = T_eL_g(a'(0) + b'(0)) = c'(0) + T_eL_g(b'(0)) = v + T_eL_g(w)$.

Maintenant, soit $t \mapsto a(t)$ une courbe issue de e. Le vecteur tangent en g à la courbe $t \mapsto a(t)ga(t)^{-1}$ est $T_eR_g(a'(0)) = T_eL_g(a'(0))$. En effet, $a(t)ga(t)^{-1} = m(a(t)g, a(t)^{-1})$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a(t)^{-1}) \Big|_{t=0} = a'(0)$. On a ainsi la composée $t \mapsto (a(t)g, a(t)^{-1})$ de dérivée $(T_eR_g(a'(0)), -a'(0))$ avec m, où il faut prendre la différentielle en (g,e). On obtient ainsi $T_eR_g(a'(0)) + T_eL_g(-a'(0))$.
Un dernier fait utile. Soient $x,g \in G$. Le vecteur tangent en xg à la courbe $t \mapsto xa(t)ga(t)^{-1} = L_x(a(t)ga(t)^{-1})$ est $T_gL_x(T_eR_g(a'(0)) - T_eL_g(a'(0))) = T_xR_gT_eL_x(a'(0)) - T_e(L_{xg})(a'(0))$.

3.4.6 Actions d'un groupe de Lie sur lui-même et sur son algèbre

3.4.6.1 Définitions

Proposition. ***(Régularité de la conjugaison)***

Dans un groupe de Lie, les automorphismes intérieurs sont des applications C^∞. Ce sont donc des difféomorphismes.

▷ En effet, ils s'expriment sous la forme $L_gR_{g^{-1}}$ pour les $g \in G$. ■

Définition. ***(Représentation adjointe dans un groupe de Lie)***

Soit G un groupe de Lie et $g \in G$. On appelle $\mathrm{Ad}(g) : T_eG \longrightarrow T_eG$ la différentielle en e de la conjugaison par g.

Remarque importante. Cherchons $\mathrm{Ad}(g)(X)$. Soit $t \mapsto a(t)$ une courbe issue de e avec $a'(0) = X$. Alors $\mathrm{Ad}g(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g.a(t)g^{-1}) \Big|_{t=0}$. On dispose maintenant d'une application $Ad : G \longrightarrow \mathrm{End}(T_eG)$. Elle est C^∞, car différentielle d'une application C^∞.

Définition. ***(Adjonction dans un groupe de Lie)***

La différentielle de Ad en e est notée $T_e\mathrm{Ad} = \mathrm{ad} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{G})$.

Proposition. ***(Adjoint du produit)***

Soient $g_1,g_2 \in G$. Alors $\mathrm{Ad}(g_1g_2) = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}_{(}g_2)$.

▷ $\mathrm{Ad}(g_1g_2)(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1\, \underbrace{g_2a(t)g_2^{-1}}_{b(t)}\, g_1^{-1}) = \mathrm{Ad}(g_1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b(t)\right) = \mathrm{Ad}g_1(\mathrm{Ad}(g_2)(X))$. ■

Concrètement, $X,Y \in \mathcal{G} = T_eG$ et $\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}(a(t))(Y)) \Big|_{t=0}$. Pour $t \mapsto b(t)$ courbe issue de e avec $b'(0) = Y$ et $t \mapsto a(t)$ courbe issue de e avec $a'(0) = X$,

$$\boxed{\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}a(t)b(s)a(t)^{-1}\right) \Big|_{s=0,t=0}}.$$

On a aussi : $\forall X,Y \in \mathcal{G} \quad \mathrm{ad}(X)(Y) \in \mathcal{G}$.

On dispose aussi du crochet, via identification de $\mathcal{G}$ avec champs de vecteurs invariants à gauche.

Théorème. ***(Lien adjonction-crochet)***

Pour tous $X,Y \in \mathcal{G}$, $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X,Y]$.

▷ $[X,Y]$ est l'élément de $\mathcal{G}$ associé au champ de vecteurs invariant à g $[\tilde{X},\tilde{Y}]$, *i.e.* à la dérivation $D_{[\tilde{X},\tilde{Y}]} = D_{\tilde{X}}D_{\tilde{Y}} - D_{\tilde{Y}}D_{\tilde{X}}$. Il faut donc considérer la dérivation associé au champ de vecteurs invariants à gauche $\mathrm{ad}(\tilde{X})(Y)$. On rappelle que $D_{\tilde{X}}f(x) = T_xf(\tilde{X}(x)) = T_xf(T_eL_x(X)) = T_e(f \circ L_x)(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x.a(t)) \mid_{t=0}$ où $a(t)$ est une courbe issue de e, $a'(0) = X$. En particulier, $D_{\mathrm{ad}\tilde{X}(Y)}f(x) = T_xf(T_eL_x(\mathrm{ad}(X)(Y)))$. On considère a,b chemins pointés en X,Y et $(t,s) \mapsto f(x,a(t)b(s)a(t)^{-1})$ de classe C^∞. Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(xa(t)b(s)a(t)^{-1})\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T_xfT_eL_x\mathrm{Ad}(a(t))(Y)\right) \mid_{t=0} = T_xfT_eL_x\mathrm{ad}(X)(Y)$. D'après le théorème de Schwarz, c'est aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(xa(t))b(s)a(t)^{-1}) \mid_{t=0,s=0}$. Or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(xa(t))b(s)a(t)^{-1}) = T_{xb(s)}f(T_xR_{b(s)}T_eL_x(X)) - T_{xb(s)}fT_eL_{xb(s)}X)$. Le deuxième terme se récrit $T_{xb(s)}fT_eL_{xb(s)}(X) = T_{xb(s)}f(\tilde{X}(xb(s))) = D_{\tilde{X}}f(xb(s))$, et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(D_{\tilde{X}}f)(xb(s)) \mid_{s=0} = D_{\tilde{Y}}(D_{\tilde{X}}f)(x)$. Pour le premier terme, on veut $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T_{xb(s)}fT_xR_{b(s)}T_eL_x(X)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(xa(t)b(s)) \mid_{t=0}\right) \mid_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f\,(xa(t)b(s)) \mid_{s=0}\right) \mid_{t=0} = D_{\tilde{Y}}f(x(a(t))) \mid_{t=0} = D_{\tilde{X}}D_{\tilde{Y}}f(x)$. ■

Exemples. ***(Algèbre des groupes de Lie matriciels)***

1. Pour le groupe de Lie $G = SL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$.
2. Pour $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{G} = \{M, {}^tM = -M\}$.
3. Pour $G = SU_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{G} = \{M \in M_n(\mathbb{C}), M^* = -M, \mathrm{tr}(M) = 0\}$.

3.4.7 Application exponentielle

L'application exponentielle, de même que dans la théorie des équations différentielles, permet de faire le lien entre algèbre de Lie et groupe de Lie.

Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G} = T_eG$. Soit $X \in \mathcal{G}$, $\tilde{X}$ champ de vecteurs invariant à gauche, dont on sait qu'il est complet. Le groupe à un paramètre de difféomorphismes associé à $\tilde{X}$ est de la forme $\phi_t^{\tilde{X}}(g) = g\phi_t^{\tilde{X}}(d)$. De plus, $t \mapsto \phi_t^{\tilde{X}}(e)$ est un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie.

Définition. ***(Exponentielle dans un groupe de Lie)***

On définit :

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathcal{G} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \phi_1^{\tilde{X}}(e). \end{aligned}$$

Exemple

Pour $G = GL(n,\mathbb{R})$, $\phi_t^{\tilde{X}}(g) = g\phi_t^{\tilde{X}}(I)$, d'où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^{\tilde{X}}(g) = \phi_t^{\tilde{X}}(g)X$.
On a donc à résoudre une équation différentielle linéaire.

On peut décrire la forme des sous-groupes à un paramètre des groupes de Lie, au moyen de l'exponentielle.

Proposition. ***(Forme des sous-groupes paramétrés de Lie)***

Les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie G sont de la forme $t \mapsto \exp(tX)$ pour un $X \in \mathcal{G}$.

▷ On sait a priori qu'ils sont $t \mapsto \phi_t^{\tilde{X}}(e)$. Il suffit de dire que c'est $\exp(tX) = \phi_1^{t\tilde{X}}(e)$. ■

Lemme

Pour $X \in \mathcal{G}$, $\phi_{st}^{\tilde{X}}(e) = \phi_t^{s\tilde{X}}(e)$.

▷ En effet, fixons s, et considérons les courbes $t \mapsto \phi_t^{s\tilde{X}}(e)$ et $t \mapsto \phi_{st}^{\tilde{X}}(e)$ qui valent e en $t = 0$. Ce sont des sous-groupes à un paramètre de G. Il suffit de voir qu'elles ont mêmes générateurs infinitésimaux. ■

Proposition. ***(L'exponentielle est un difféomorphisme local en 0)***

$\exp : \mathcal{G} \to G$ est un difféomorphisme local en 0 et $T_0 \exp : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ est *id*.

▷ $T_0 \exp(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(0 + tX) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tX)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_1^{t\tilde{X}}(e)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t^{\tilde{X}}(e)\big|_{t=0} = X$. ■

Propriété. ***(Composition de l'exponentielle par un morphisme)***

Soient G,H deux groupes de Lie d'algèbres de Lie respectives $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors pour tout $X \in \mathcal{G}$, $f(\exp_G(X)) = \exp_H(T_e f(X))$. Autrement dit,

$$f \circ \exp_G = \exp_H \circ T_e f$$

▷ On considère les sous-groupes à un paramètre de H. Ils sont donnés par $t \mapsto f(\exp_G(tX))$ et $t \mapsto \exp_H(T_e f(tX))$. Montrons qu'ils ont même générateur. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp_G(tX))\big|_{t=0} = T_e f(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_G(tX)\big|_{t=0}) = T_e f(X)$. ■

Application. ***(Exponentielle d'un sous-groupe d'un groupe de Lie)***

Si $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, alors $\exp_G = {\exp_{GL_n(\mathbb{R})}}_{|\mathcal{G}}$.

Application. ***(Conjuguée de l'exponentielle)***

On a, pour $g \in G$, $\mathrm{Ad}(g) = \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ et $\mathrm{Ad}(g) = T_e i(g)$. Ainsi $\exp(\mathrm{Ad}g(X)) = i(g)\exp(X)$, d'où
$$g\exp(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g))(X).$$

Application. ***(Exponentielle de l'adjoint)***

$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathcal{G})$, $T_e Ad = \mathrm{ad}$. Ainsi, $\exp(\mathrm{ad}(X)) = \mathrm{Ad}(\exp(X))$, $\mathrm{ad}(X) \in \mathrm{End}(\mathcal{G})$.

Proposition. ***(Algèbre par l'exponentielle)***

Soit G un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{G} = \{X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \exp(tX) \in G\}$.

Proposition. ***(Tangente d'un morphisme de Lie)***

Soient G,H deux groupes de Lie d'algèbres de Lie $\mathcal{G}, \mathcal{H}$. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors $T_e f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est un morphisme d'algèbre de Lie, c'est-à-dire : $T_e f([X,Y]) = [T_e f(X), T_e f(Y)]$, soit $T_e f(\mathrm{ad}(X)(Y)) = \mathrm{ad}(T_e f(X))(T_e f(Y))$.

$\triangleright$ Pour tous $g \in G$, $X \in Gj$, $f(g\exp(tX)g^{-1}) = f(g)f(\exp(X)) = f(g)^{-1}$. On prend la dérivée en $t = 0$. Alors $T_e f \circ \mathrm{Ad}(g)(Y) = \mathrm{Ad}f(g) \circ T_e f(Y)$. On prend $g = \exp(sX)$, $X \in \mathcal{G}$. Alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} T_e f \mathrm{Ad}(\exp(sX)(Y)) \mid_{s=0} = T_e f(\mathrm{ad}(X)(Y)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{Ad}(f(\exp(sX)))(T_e f(Y)) \mid_{s=0} \mathrm{ad}(T_e f(X))(T_e f(Y))$. ■

L'application exponentielle n'est pas toujours injective, ni surjective. D'ailleurs, l'image d'un connexe étant connexe, il ne faut pas rêver : on ne peut avoir de résultat de surjectivité que sur des groupes de Lie connexes.

Proposition. ***(Surjectivité de l'exponentielle de Lie)***

Soit G un groupe de Lie connexe. Soit V un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$ sur lequel exp est un difféomorphisme. Alors G est engendré par $\exp(V)$.

$\triangleright$ Soit $W = \exp(V) \subseteq G$, voisinage ouvert de e. W^{-1} également. Le groupe engendré par $\exp(V)$ est le sous-ensemble de G formé des produits d'éléments de W et de W^{-1} ; c'est un sous-groupe H de G. Montrons que H est un ouvert fermé. Par fait général, le produit fini d'ouverts est ouvert dans un groupe topologique, donc H est ouvert. H est alors automatiquement fermé dans un groupe topologique. Comme G est connexe, $G = H$. ■

On peut démontrer le fait intéressant suivant qui permet de passer du continu au C^∞ :

Théorème. *(Paramétrisation des morphismes continus)*

Soit G un groupe de Lie. Alors tout morphisme $\underline{\mathrm{G}}$ de $(\mathbb{R},+)$ vers G est C^∞ et donc un sous-groupe à un paramètre.

On utilise le fait suivant :

Proposition. *(Unicité de la racine carrée)*

Munissons $\mathcal{G}$ d'une norme. Soit $B(0,2r)$, $r > 0$, sur laquelle exp est un difféomorphisme et $V = \exp(B(0,r))$. Alors pour tout $g \in V$, g possède une unique racine carrée dans V.

▷ Dans l'image de l'exponentielle, posséder une racine carrée n'a rien d'exceptionnel. Si $g \ni V$, toute racine carrée s'écrit $\exp(Y)$ pour $Y \in V$ unique. ■

Preuve.

▷ On va utiliser la densité des dyadiques dans $\mathbb{R}$. On se place sur $V = \exp(B(0,M))$ où l'on a un racine carrée unique. Soit $f : (\mathbb{R},+) \to G$ non trivial : il existe $a > 0$ tel que $f(a) \neq e$. On peut supposer a arbitrairement petit, en fait tel que $f([-a,a]) \subseteq V$. On a $f(\frac{a}{n}n) = f(a) = f(\ fran)^n$ d'où $f(\frac{a}{n}) \neq e$. En particulier, $f(a) = \exp(aX)$ pour un unique X avec $aX \in B(0,r)$, alors par unicité de la racine carrée, $f(\frac{a}{2}) = \exp(\frac{a}{2}X)$ et $f(\frac{a}{2^n}) = \exp(\frac{a}{2^n}X)$ puis pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(\frac{k}{2^n}a) = \exp(\frac{ka}{2^n}X)$ et par densité, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(ta) = \exp(taX)$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s) = \exp(sX)$. ■

Théorème. *(Théoreme de Cartan)*

Soit G un groupe de Lie. Soit H un sous-groupe fermé de G. Alors H est un sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall t \quad \exp(tX) \in H\}$.

3.4.8 Dérivée de Lie d'une fonction

Définition. *(Dérivée de Lie d'une fonction)*

La *dérivée de Lie d'une fonction f le long d'un champ de vecteurs Y* est $L_Y f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha_{t,Y,x} - x}{t}$ où $\alpha t,Y,x = x + e^{tY}$ est le flot de Y avec point de départ t.

Proposition. *(Expression de la dérivée de Lie en coordonnées locales)*

Si $X = \sum_j X_j \partial_j$, $L_X(f) = \sum_j X_j \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

3.5 Formes différentielles

3.6 Géométrie différentielle complexe et atlas holomorphes

On commence par un rappel :

Théorème. ***(Théorème de prolongement de Riemann)***

Soit $h : \Delta * \to \mathbb{C}$ où $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ holomorphe, d'image bornée. Alors il existe un prolongement $\tilde{h} : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorphe.

▷ À récrire. ■

Définition. ***(Fonction holomorphe)***

Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ continue. Supposons $F = (F_1,\dots,F_n)$. On dit que F est *holomorphe* si $\frac{\partial F_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Définition. ***(Variété complexe)***

Soit M un espace topologique. On dit que M est une *variété complexe* de dimension n s'il existe un recouvrement $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ et cartes $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ (bijections homéomorphes sur $\varphi_\alpha(U_\alpha)$) telles que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ soit un biholomorphisme. L'ensemble des $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ est un atlas (souvent pris maximal).

Chapitre 4

Surfaces de Riemann

Résumé

En géométrie différentielle et géométrie analytique complexe, une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1. Cette notion a été introduite par Bernhard Riemann pour prendre en compte les singularités et les complications topologiques qui accompagnent certains prolongements analytiques de fonctions holomorphes. Par oubli de structure, une surface de Riemann se présente comme une variété différentielle réelle de dimension 2, d'où le nom surface. Toute surface réelle orientable peut être munie d'une structure complexe, autrement dit être regardée comme une surface de Riemann. Cela est précisé par le théorème d'uniformisation. L'étude des surfaces de Riemann est à la croisée de nombreux domaines mathématiques dont, outre la géométrie différentielle, la théorie des nombres, la topologie algébrique, la géométrie algébrique, les équations aux dérivées partielles...

4.1 Préliminaires

Ce cours est la suite de Géométrie différentielle complexe et atlas holomorphes.

Définition. ***(Surface de Riemann)***

Une *surface de Riemann* ou *SR* est une variété complexe de dimension 1. On suppose, sauf mention contraire, que X est connexe.

Remarques.

1. Toute surface réelle orientable possède une structure de surface de Riemann.
2. Considérons S^{2n} la sphère de dimension réelle $2n$. (Remarquons que pour n impair, il n'y a clairement pas de structure complexe.) On montre que pour $n \geqslant 2$, il n'existe pas de structure complexe sauf pour $n = 3$, nombre pour lequel c'est un problème ouvert.
3. Les structures complexes sur une surface réelle fixée reviennent à l'étude de l'espace de module ou espace de Teichmüller.

Exemples. ***(Surfaces de Riemann)***

1. *(Surfaces de Riemann du plan complexe)* $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann. Tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est une surface de Riemann.
2. *(Sphère de Riemann)* $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est une surface de Riemann. Explicitons un atlas : $U_1 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \cup \{\infty\}$, $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$, $\varphi_1(s) = \frac{1}{z}$, $\varphi_1(\infty) = 0$, $U_2 = \mathbb{C}$, $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ en fixant 0 au pôle sud, ∞ au pôle nord de la sphère. On a $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ et $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2), z \mapsto \frac{1}{z}$.
3. $\mathbb{CP}^n$ est une variété complexe mais pas a priori une surface de Riemann.

Définition. ***(Application holomorphe entre variétés complexes)***

Soit $F : X \to Y$ une application continue entre deux variétés complexes. On dit que F est *holomorphe* si pour toutes cartes $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ de Y et $\psi_\beta : U_\beta \to \mathbb{C}^n$ de X telles que $F(U_\beta) \subseteq U_\alpha$, l'application $\varphi_\alpha \circ F \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ est holomorphe (selon la définition donc de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$).

Exercice 4

(Formes holomorphes sur des surfaces compactes) Soit X une surface de Riemann compacte et $\varphi : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que φ est constante.

▷ **Éléments de réponse.**

C'est une conséquence du principe du maximum.

Définition. ***(Application méromorphe sur une surface de Riemann)***

Soit X une surface de Riemann et $D \subseteq X$ un ensemble discret et fermé. Une fonction méromorphe sur X est une focntion $F : X \smallsetminus D \to \mathbb{C}$ telle que la précomposition avec chaque carte $F \circ \varphi^{-1}$ est une fonction méromorphe.

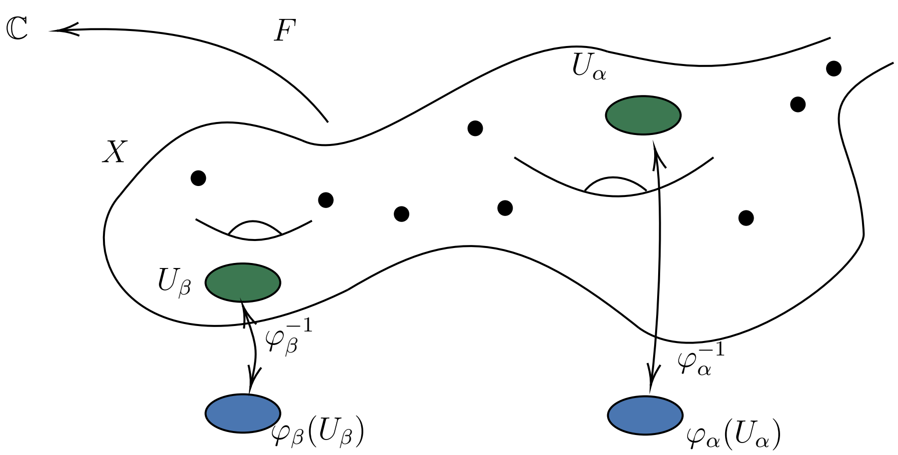


FIGURE 4.1.1 : *Fonction méromorphe sur une surface de Riemann.* —

Propriété. ***(Prolongement d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{CP}^1$)***

Soit X une surface de Riemann et $F \in \mathcal{M}(X)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur X. Soit D l'ensemble des pôles de F. On définit une extension $\tilde{F} : X \to \mathbb{CP}^1$ en posant $\tilde{F}(p) = \infty$ pour tout $p \in D$. Alors $\tilde{F}$ est une application holomorphe.
Réciproquement, si $g : X \to \mathbb{CP}^1$ est holomorphe non constante en ∞, alors la fonction $g_{|g^{-1}(\infty)}$ est une fonction méromorphe sur X.

$\triangleright$ Il faut observer que $\tilde{F}$ est holomorphe sur un voisinage d'un point $p \in D$, avec $\lim_{z \to p} F(z) = \infty$. On peut alors utiliser sur $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la carte $\varphi_1 : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ qui à $w \mapsto \frac{1}{w}$. ■

Remarques.

1. Soit X une surface de Riemann connexe. Alors $\mathcal{M}(X)$ est un corps.
2. Si X est une surface de Riemann compacte connexe, extension de $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}(X)$ est un corps de transcendance égal à 1.

Lemme. ***(Forme locale d'une application holomorphe)***

Soit $\varphi : X \to Y$ une application holomorphe entre surfaces de Riemann, et $\phi(x_0) = y_0$ où $x_0 \in X$. Alors il existe des cartes ϕ_x et ϕ_y centrées en 0 telles que $\phi_y \circ \phi \circ \phi_x^{-1}(z) = z^n$ pour $n \geqslant 1$.

$\triangleright$ On choisit des cartes centrées en x_0 et y_0 ϕ_y et ϕ_x'. On a $\phi_y \circ \phi \circ \phi_X^{-1}(w) = h(w)$ où h est holomorphe telle que $\phi_Y \circ \phi \circ \phi_x^{-1}(0) = 0$. On peut écrire $h(w) = w^n g(w)$ avec $n \geqslant 1$, $g(0) \neq 0$. On convoque ensuite le fait qu'il existe une fonction $F(w)$ telle que $F^n(w) = g(w)$ donnée par

$F(w) = e^{\frac{1}{n}\ln(g(w))}$, de sorte que $z^n = w^n g(w) = w^n F^n(w)$.

$$\begin{tikzcd}
x_0 \odot \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi_x"'] & y_0 \odot \arrow[d, "\phi_y"] \\
0 \odot \arrow[r, "h : w \mapsto w^n g(w)"] \arrow[d] & 0 \odot \\
z = wF(w) \odot \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Alors $\phi = \psi \circ \varphi'_X$ est la carte cherchée. ■

Corollaire

1. Si $n = 1$, l'application est un biholomorphisme local.
2. *(Vocabulaire)* Si $n \geqslant 2$, on dit que x_0 est un *point de ramification* et y_0 est un *point de branchement.*

Ce lemme est formidablement riche de conséquences.

Conséquence. *(Ouverture des fonctions holomorphes entre SR)*

Toute fonction holomorphe non constante entre surfaces de Riemann est ouverte.

Conséquence. *(Principe du maximum sur une surface de Riemann)*

Soit X une surface de Riemann. Si une fonction $\varphi : X \to \mathbb{C}$ holomorphe est non constante, elle n'atteint pas son maximum.

Et même :

Conséquence. *(Théorème de Liouville)*

Toute fonction bornée holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est constante.

▷ La fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie de $\mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ bornée. On peut par restriction sur un disque épointé appliquer le théorème de prolongement de Riemann et l'on obtient une fonction holomorphe $\tilde{F} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$. Continue sur un compact, elle devrait atteindre son maximum, ce qui contredit le principe précédent. ■

Conséquence. *(Surjectivité des focntions holomorphes sur une SR compacte)*

Soit $\varphi : X \to Y$ une fonction holomorphe où X est une surface de Riemann compacte et Y une surface de Riemann. Alors φ est surjective.

Conséquence. *(Description des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann)*

$\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) = \{\frac{p}{q} \mid p,q$ polynômes en une variable, $q \neq 0\}$ l'ensemble des fonctions rationnelles.

$\triangleright$ Soit $F \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$, d'où $F = \frac{p}{q}$ où p et q sont des polynômes. On suppose que F n'a pas de pôle en ∞. Soit (z_i) la liste des pôles de F dans $\mathbb{C}$. Pour chaque z_i, on écrit la partie principale de F en z_i : $P_{z_i} = \sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z-z_i)^{-n}$. La fonction $F - \sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z-z_i)^{-n}$ est holomorphe donc constante. Ainsi, $F = \sum_{i=1}^{N}\sum_{n=1}^{n_i} c_{n,i}(z-z_i)^{-n} + K$ est un quotient de deux polynômes. ■

VOC Les zéros de $F = \frac{p}{q} \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$ sont les zéros de p et les pôles de F sont les zéros de q ; à l'infini, F a un zéro ou un pôle (selon le signe) d'ordre[1], si $\deg(p) = n$ et $\deg(q) = m$, p,q sans facteur commun, $\mathrm{ord}_\infty(F) = -(n-m)$.

Remarque. $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) \simeq$ l'ensemble des fonctions holomorphes $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$. Par exemple, $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ avec $\varphi(0) = \infty$.

On peut également énoncer :

Conséquence. *(Théorème d'Abel pour $\mathbb{CP}^1$)*

Soient (z_i) et (w_j) deux familles finies disjointes avec le même nombre de points de $\mathbb{CP}^1$. Alors il existe une fonction rationnelle avec zéros exactement en les (z_i) et pôles exactement en (w_j), unique à un scalaire près.

$\triangleright$ On pose a priori $\prod_i \frac{z-z_i}{z-w_i}$, si $z_i \neq \infty$ et $w_i \neq 0$ pour tout i. Si $z_i = \infty$, on substitue le terme $z - z_i$ par $\frac{1}{z}$, et si $w_i = \infty$, on substitue le terme $z - w_i$ par z. ■

VOC La somme formelle $D = \sum_i z_i - \sum_i w_i$ est le diviseur *associé* à la fonction méromorphe. D est dit *diviseur principal*, et l'on note $D = \mathrm{div}(F)$.

Remarque. $\sum_{x\in\mathbb{CP}^1} \mathrm{ord}_x F = 0$. En effet, si $F(z) = \frac{(z-a_1)\dots(z-a_n)}{(z-b_1)\dots(z-b_n)}$, $\mathrm{ord}_{a_i} F = \#(\text{zéros de } p = a_i)$ et $\mathrm{ord}_{b_i} F = -\#(\text{zéros de } q = b_i)$. Ainsi, $\sum_{x\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_x F = n - m + \mathrm{ord}_\infty F = -(n-m)$.

[1] Si $F \in \mathcal{M}(X)$, $x \in X$, $\mathrm{ord}_x(F)$ est l'ordre de $F \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x) = 0$, avec, si $F \circ \varphi^{-1}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ où $c_k \neq 0$, $\mathrm{ord}_x(F \circ \varphi^{-1}) = k$.

Définition. ***(Groupe des diviseurs)***

Soit X une surface de Riemann. On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe abélien engendré par les ponts de X, dit *ensemble des diviseurs* de X. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)$ est une somme formelle $D = n_1 x_1 + ... n_k x_k$ avec les $n_i \in \mathbb{Z}$, les $x_i \in X$. Le *degré* de D est $\deg(D) = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Exemple

Soit $F \in \mathcal{M}(X)$ où X est une surface de Riemann compacte. Alors $D = \mathrm{div}(F) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x F.x$.

Définition. ***(Diviseur principal)***

On dit que $D \in \mathrm{Div}(X)$ est *principal* si $D = \mathrm{div}(F)$ pour $F \in \mathcal{M}(X)$.

Proposition. ***(Caractérisation des diviseurs principaux dans $\mathbb{CP}^1$)***

Si $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{CP}^1)$, D est associé à une fonction méromorphe, *i.e.* $D = \mathrm{div}(F)$, si et seulement si, $\deg(D) = 0$.

$\longrightarrow$ *Notation.* $\mathrm{Div}^0(X) = \{D \in \mathrm{Div}(X) \mid \deg(D) = 0\}$.

On se pose le problème suivant : on cherche à décrire les fonctions méromorphes de pôles d'ordre au moins n_i aux points $x_i \in X$.

Exemple fondamental

On prend $X = \mathbb{CP}^1$, $w_i \in \mathbb{C}$ pour $i \in [\![1,N]\!]$. On considère la partie principale par rapport à w_i donnée par $\sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{k,i}}{(z-w_1)^k}$ avec les $w_1,...,w_N$ isolés. On a $D = n_1 w_1 + ... + n_N w_N$ et $L(D) = \{F \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1) \mid \mathrm{ord}_x(F) \geqslant -D(x)\}$ où

$$D : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \{w_1,...,w_N\} \\ n_i \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Théorème. ***(Riemann-Roch pour $\mathbb{CP}^1$)***

Si $D = n_1 z_1 + ... + n_k z_k$ avec $n_i > 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, alors $\dim(L(D)) = \deg(D) + 1$.

En général :

Remarques.

1. $\dim(L(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$.
2. $\dim(L(D)) = \deg(D) + 1$ si $\deg(D) > 0$.
3. $L(D) = \{\text{constantes}\}$ si $D = 0$.

4. $L(D) \simeq \mathbb{C} \simeq \{\mathbb{C}g\}$ si $\deg(D) = 0$, $D \neq 0$ où $g \in \mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$, avec $\mathrm{div}(g) = D$.

$\triangleright$ L'idée est la suivante : la fonction $F(z) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{k,i}}{(z-w_i)^k}$ est dans $L(D)$. De plus, la seule façon d'obtenir des fonctions de $L(D)$ est de prendre une telle fonction F et de varier les coefficients $c_{k,i}$. Ainsi, la dimension de l'espace $L(D)$ égale le nombre de coefficient $c_{k,i} = \deg(D) \underbrace{-1}_{\text{en comptant le cas où le nombre de pôles égale le nombre de zéros}} + \underbrace{1}_{\text{en comptant les constantes}}$, soit $n_1 + ... + n_N = \deg(D)$.

On développera la preuve plus en détail plus tard. ■

Exemple. ***(Surface de Riemann donnée comme variété algébrique lisse)***

$V = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z,w) = 0\}$ où $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ telle que $(\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w}) \neq (0,0)$ en aucun point, est une surface de Riemann.

Théorème. ***(Théorème des fonctions implicites holomorphe)***

Soit $F : \Delta_{\varepsilon_1} \times \Delta_{\varepsilon_2} \to \mathbb{C}$ holomorphe, de sorte que $\frac{\partial F}{\partial w}(0,0) \neq 0$, $F(0,0) = 0$. Alors il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ and $\varphi : \Delta_{\delta_1} \to \mathbb{C}$ holomorphe, qui vaut 0 en 0, de sorte que $\{(z,\varphi(z)) \mid z \in \Delta_{\delta_1}\} = F^{-1}(0) \cap \Delta_{\delta_1} \times \Delta_{\delta_2}$.

$\triangleright$ Observons d'abord que $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à $(x,y) = x + iy = z$ donne $(u,v) = u + iv = w$ holomorphe a pour jacobien $\mathrm{Jac}(F) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^2$.

D'autre part, le théorème des fonctions implicites réel donne $\varphi : \Delta_{\delta_1} \to \mathbb{C}$ tel que $(z,\varphi(z)) \in F^{-1}(0)$. On doit montrer que φ est holomorphe, où $0 = F(z,\varphi(z))$. On différentie selon $\overline{z}$: $0 = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z,\varphi(z))}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial w}(z,\varphi(z))}_{\neq 0} . \underbrace{\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \overline{z}}}_{=0}$, car F est holomorphe. Posons l'ensemble $V = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z,w) = 0\}$. Alors $(\frac{\partial F}{\partial z}(z,w), \frac{\partial F}{\partial w}(z,w)) \neq (0,0)$ lorsque $(z,w) \in V$. Soit $(z_0,w_0) \in V$. On suppose $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$. Alors $\varphi : U_{z_0} \to V$ est holomorphe de sorte que $(z,\varphi(z)) \in V$. Si maintenant $(z_1, w_1) \in V$ avec $\frac{\partial F}{\partial z}(z_1,w_1) \neq 0$, on définit $\varphi_1 : U_{w_0} \to V$ semblablement. Dans l'intersection des deux ouverts de cartes, $\varphi_{z_1,w_1} \circ \varphi^{-1}_{z_0,w_0}(z) = \varphi_{z_1,w_1}(z,\varphi(z)) = \varphi(z)$ est holomorphe. ■

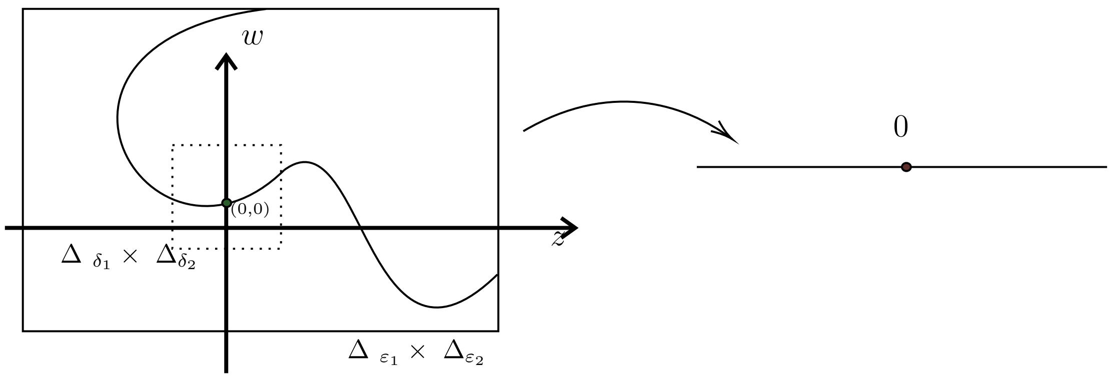


FIGURE 4.1.2 : *Théorème des fonctions implicites, version holomorphe.* —

Théorème. ***(Théorème de représentation conforme)***

Soit X une surface de Riemann simplement connexe. Alors X est biholomorphe à $\mathbb{C}$, à Δ ou à $\mathbb{CP}^1$.

Théorème. ***(Théorème d'uniformisation de Riemann)***

Toute surface de Riemann compacte simplement connexe est conforme à la sphère de Riemann.

4.2 Courbes elliptiques

Proposition

Toute surface de Riemann compacte de genre 1 est un quotient de $\mathbb{C}$ par un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ de la forme $\Lambda_{\omega_1,\omega_2} = \{n\omega_1 + m\omega_2, n,m \in \mathbb{Z}\}$ (groupe de translations) où ω_1,ω_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{C}$ linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, soit $X = \mathbb{C}/\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$.
On peut sans problème se restreindre aux $\mathbb{C}$-réseaux de la forme $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau$ où $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$.

On cherche maintenant $\mathcal{M}(X)$ dans le cas où $X = E_\tau$.

Remarque. Les fonctions holomorphes sont toujours les fonctions constantes. La donnée d'une telle fonction méromorphe est celle d'une fonction méromorphe vérifiant $F(z+1) = F(z)$, $F(z+\tau) = F(z)$ en tous z convenant.

Proposition. ***(Un premier constat)***

Soit $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$ sans pôles sur la frontière d'une région fondamentale (quadrilatère fermé déterminé par les points $0,1,\tau,1+\tau$). On note P une telle région et ∂P_i les côtés parcourus dans le sens anti-horaire en commençant par 0-1). Alors la somme des résidus par rapport aux pôles contenus dans la région fondamentale est nulle.

$\triangleright$ Par le théorème des résidus, $\displaystyle\sum_{x\in P} \mathrm{res}(F,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} F(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial P_1} F(z)\mathrm{d}z + \int_{\partial P_2} F(z)\mathrm{d}z + \int_{\partial P_3} F(z)\mathrm{d}z + \int_{\partial P_4} F(z)\mathrm{d}z\right)$. L'invariance de l'intégrale par translation fait s'annuler ces quatre termes deux à deux, d'où $\displaystyle\sum_{x\in P} \mathrm{res}(F,x) = 0$. ■

Proposition. ***(Rouché dans E_τ)***

Soit $F \subseteq \mathcal{M}(E_\tau)$ sans pôles ni zéros à la frontière du domaine fondamental. Alors, dans l'intérieur de P, le nombre de zéros égale le nombre de pôles en comptant la multiplicité.

$\triangleright$ Semblablement au cas de l'analyse complexe, on fixe ici un domaine Ω, $\partial\Omega$ parcouru par γ et l'on a $\#\text{zéros} - \#\text{pôles} = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$. ■

Proposition

Soit $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$ sans pôles ni zéros sur ∂P. Soit (a_i) et (b_j) deux familles disjointes de points de $\mathring{P}$ (avec éventuellement des répétitions). On suppose que les zéros sont précisément les (a_i) et les pôles les (b_i). Alors $\sum a_i - \sum b_j \in \Lambda_{1,\tau} = \Lambda_\tau$.

$\triangleright$ En exercice ■

Lemme

Soient (a_i) les zéros et (b_i) les pôles de F qui soient contenus dans un domaine Ω cerclé par γ. Alors $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z = \sum a_i - \sum b_j$.

$\triangleright$ On vérifie que $\Lambda_\tau = \{n + m\tau \mid n,m \in \mathbb{Z}\}$. On a : $\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\partial P_1} z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\partial P_2} z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z}_{-\int_{\partial P_1}(z+\tau)\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z} + \underbrace{\int_{\partial P_3} z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z}_{-\int_{\partial P_4}(z+1)\frac{F'(z)}{F(z)}} + \int_{\partial P_4} z\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z = -\tau\int_{\partial P_1}\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z - \int_{\partial P_4}\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z\Big) = -\tau\iota_{\partial P_1}F - \iota_{\partial P_4}F \in \Lambda_\tau$ où ι note l'indice. ■

Méthode. ***(Idée pour construire $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$)***

On voit que $\frac{1}{z^n} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ pour tout n. Ainsi, $F_n(z) \sum_{\gamma\in\Lambda_t} \frac{1}{(z-\gamma)^n}$ a des chances d'être méromorphe sur E_τ. Vérifions : $F_n(z+1) = \sum_{\gamma\in\Lambda_\tau} \frac{1}{(z+(1-\gamma))^n} = \sum_{\gamma'\in\Lambda_\tau} \frac{1}{(z+\gamma')^n} = F_n(z)$.
De façon similaire, $F_n(z+\tau) = F_n(z)$ en tout z tel que ça ait du sens.
Attention cependant ! Il n'est pas clair que la série $F_n(z)$ converge. Si c'est le cas, la convergence absolue nous donne la convergence commutative et permet de bien définir cette somme infinie.

Lemme

La somme à n fixé $F_n(z)$ converge vers une fonction méromorphe pour tout $n \geqslant 3$.
$F_n \in \mathcal{M}(E_\tau)$ avec des pôles d'ordre n en chaque point du réseau Λ_τ.

Pour montrer la première ligne, il nous faudra :

Lemme

$\sum_{\gamma\in\Lambda_\tau\setminus\{0\}} \frac{1}{|\gamma|^n}$ converge pour $n \geqslant 3$.

▷ On sépare la somme selon les lignes du réseau. Pour $k=1$, autrement dit sur la premier rangée, pour $|\gamma| \geqslant r$, *i.e.* $1,|\tau|,|1+\tau|,|1-\tau| \geqslant r$, $\frac{1}{|\gamma|^n} \leqslant \frac{1}{r^n}$. Pour $k=2$, sur la deuxième rangée, $\frac{1}{|\gamma|^n} \leqslant \frac{1}{(2r)^n}$. Par suite, $\sum_{\gamma\in\Lambda_\tau\setminus\{0\}} \frac{1}{|\gamma|^n} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{(kr)^n} = \frac{8}{r^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n-1}}$, qui converge pour $n-1 \geqslant 2$, soit $n \geqslant 3$. ■

Preuve.

▷ F_n est une somme de fonctions méromophes, donc uniformément convergente sur les ensembles compacts $K \subseteq \mathbb{C}$, auquel cas :

(i) seulement un nombre finis de termes ont des pôles dans K ;

(ii) le compélemntaire de cet ensemble fini de termes, converge uniformément dans K.

Pour $z \in K$, on a $\frac{1}{|z-\gamma|^n} \leqslant \frac{c}{|\gamma|^n}$, c constante qui convergece, d'où l'uniforme convergence.

La deuxième ligne suit naturellement. ■

Remarque. Le cas $\boxed{n=2}$ est donc critique. On peut se poser la question suivante :

Exercice 5

Soit τ fixé. Existe-t-il une fonction dans $\mathcal{M}(E_\tau)$ avec un pôle d'ordre 2 à chaque point de Λ_τ ?

▷ **Éléments de réponse.**

On montre que cela contradirait la condition sur la somme des résidus dans le domaine fondamental. Un bon contre-exemple est donné par la *fonction de Weierstrass* $\mathcal{P}(z)$, solution de l'équation $\mathcal{P}(z) = -2F_3(z)$. Montrons donc que la série $\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$ définit une fonction elliptique avec un pôle d'ordre 2 en tout point de Λ_τ. Écrivons $\left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| = \left| \frac{\gamma^2-(z-\gamma)^2}{\gamma^2(z-\gamma^2)^2} \right| = \left| \frac{2z\gamma - z^2}{\gamma^2(z-\gamma)^2} \right|$ sur un compact $K \subseteq \mathbb{C}$ fixé, qui se majore par $C\frac{|\gamma|}{|\gamma|^4} = \frac{1}{|\gamma^3|}$, et donc la série définie par $\mathcal{P}$ est normalement convergente. Ainsi, $\mathcal{P} \in \mathcal{M}(E_\tau)$.

Ainsi, dans le lemme précédent, $\boxed{\text{la condition } n \geqslant 3 \text{ est nécessaire.}}$

Curiosité. ***(Interprétation géométrique de la fonction de Weierstrass)***

Topologiquement, $E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est un tore. On peut interpréter :

$$\mathcal{P} : E_\tau \longrightarrow \mathbb{CP}^1.$$

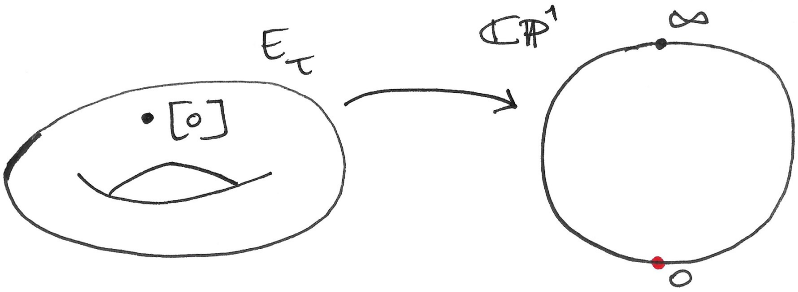


FIGURE 4.2.1 : *Interprétation de la fonction de Weierstrass.* —

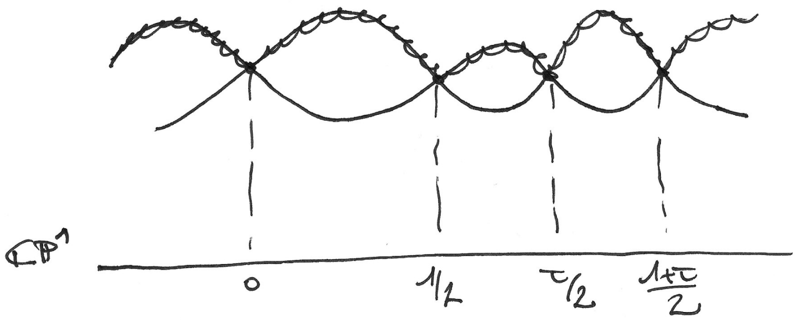


FIGURE 4.2.2 : *Interprétation de la fonction de Weierstrass.* —
Pôles vus sur le revêtement

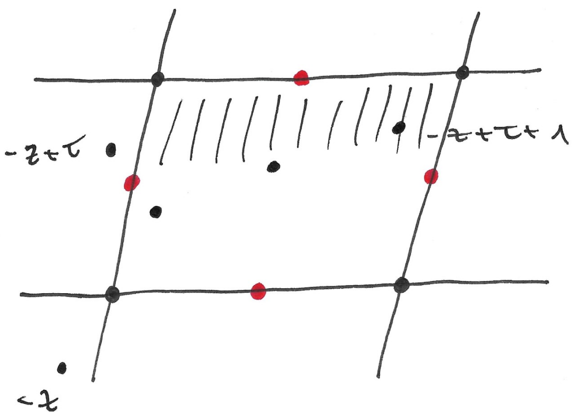


FIGURE 4.2.3 : *Interprétation de la fonction de Weierstrass.* —
Pôles sur le réseau

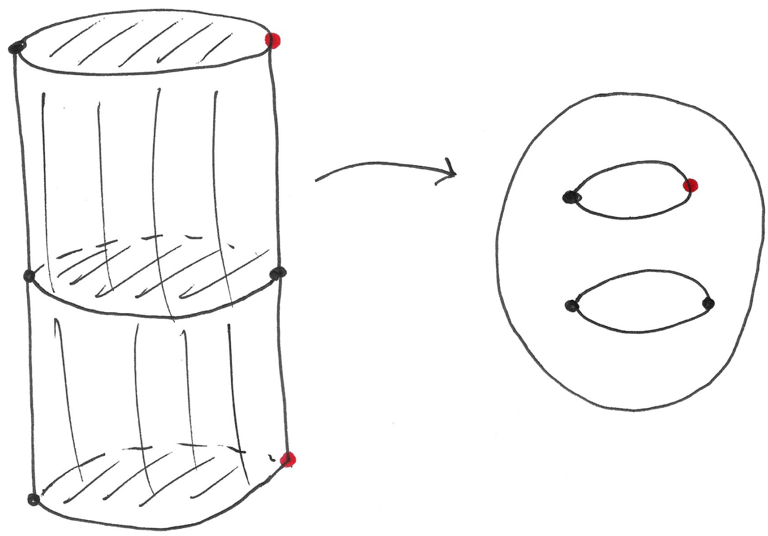


FIGURE 4.2.4 : *Interprétation de la fonction de Weierstrass.* —
Du réseau au tore

Définition-propriété. *()*

Soit $F : X \to Y$ une fonction holomorphe entre surfaces de Riemann compactes. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, le *degré* de F, tel que pour tout y, $\sum_{x \in F^{-1}(y)} m_X F = n$ où m_x note la multiplicté de F en x.

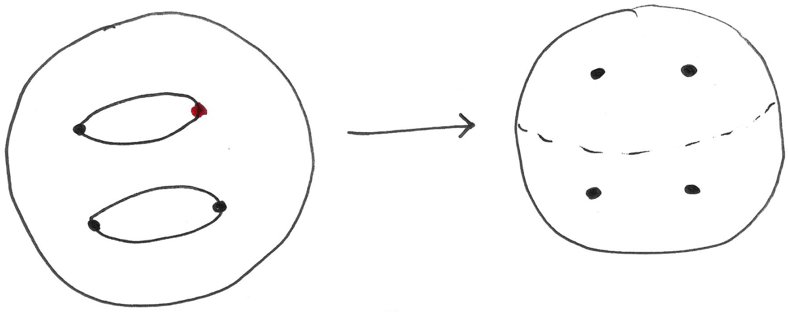


FIGURE 4.2.5 : *Interprétation de la fonction de Weierstrass.* —
Du tore à la sphère

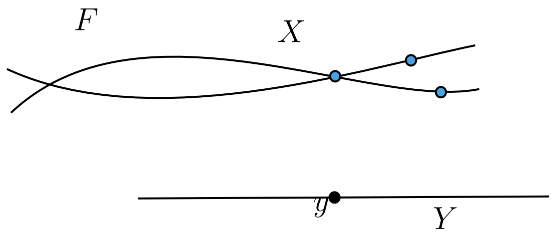


FIGURE 4.2.6 : *On en trouve* 3.. —

Remarque. $\mathcal{P}^{-1}(\infty) = [0] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ de multiplicité 2. Il devrait y avoir deux points dans $\mathcal{P}^{-1}(0)$. Or $\mathcal{P}'!E_\tau \to \mathbb{CP}^1$ a un pôle d'ordre 3 en $[0]$, d'où $\deg(\mathcal{P}') = 3$. Ainsi, $\mathcal{P}'^{-1}(0)$ a trois points. Ce sont $[\frac{\tau}{2}]$,$[\frac{1}{2}]$,$[\frac{1+\tau}{2}]$.

On a $\mathcal{P}'(z) = -\mathcal{P}'(-z)$ qui permet de voir que $\mathcal{P}'(z)$ est périodique. De plus, $\mathcal{P}'(\frac{1}{2}) = 0$.

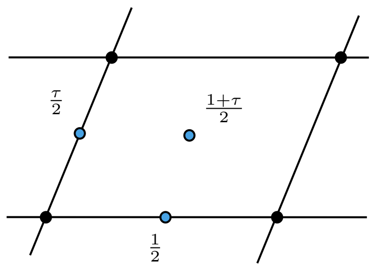


FIGURE 4.2.7 : *On en trouve* 3.. —

Le théorème le plus profond de cette section est le suivant/

Théorème. ***(Abel)***

Soit $E_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$. Soit (a_i) et (b_j) deux familles disjointes de points dans le domaine fondamental P avec le même cardinal $\geqslant 2$. Alors $\sum a_i - \sum b_j \in \Lambda_j$ SI ET SEULEMENT SI il existe $F \in \mathcal{M}(E_\tau)$ ayant exactement pour zéros les (a_i) et pour pôles les (b_j).

▷ On définit $\sigma(z) = z \prod_{\gamma\in\Lambda_\tau\smallsetminus\{0\}} (1-\dfrac{z}{\gamma})e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma}}$. Cette fonction est holomorphe et ses zéros sont précisément sur le réseau.

Observons :

⋆ $\sigma(z+1) = -\sigma(z)e^{n_1(z+\frac{1}{2})}$;

⋆ $\sigma(z+\tau) = -\sigma(z)e^{n_2(z+\frac{1}{2})}$ avec $n_1,n_2 \in \mathbb{C}$;

⋆ $g(z) = \frac{\sigma(z-a_1)\ldots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\ldots\sigma(z-b_n)} \in \mathcal{M}(E_\tau)$. En effet, $g(z+1) = g()$ et $g(z+\tau) = g(z)$. Écrivons le premier :

$$g(z+1) = \frac{\sigma(z-a_1+1)\ldots\sigma(z-a_n+1)}{\sigma(z-b_1+1)\ldots\sigma(z-b_n+1)} = \frac{\sigma(z-a_1)\ldots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\ldots\sigma(z-b_n)}\underbrace{\frac{e^{n_1}(\sum_{i=1}^{n}(z-a_i)+\dfrac{1}{2})}{e^{n_1}(\sum_{i=1}^{n}(z-b_i)+\dfrac{1}{2})}}_{e^{n_1}(\sum(b_i-a_i))}.$$

Or on peut changer l'un des termes a_i, de sorte que $\sum a_i - b_i = 0$; choisir a_i qui convient quitte à translater.

On rappelle qu'un produit infini de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, $\prod_n F_n(z)$ converge uniformément sur tout compact si pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, $\lim F_n(z) = 1$ uniformément sur K et il existe n_0 tel que $\sum_{n\geqslant n_0} \log(F_n(z))$ converge uniformément (la convergence normale suffit donc). Ainsi, $\left|\log(1-\frac{z}{\gamma})e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}}\right| = \left|\log(1-\frac{z}{\gamma})+\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}\right|$ où le premier terme $-\frac{z}{\gamma}-\frac{z^2}{2\gamma^2}-\frac{z^3}{3\gamma^3}$. For $z \in K$ un compact fixé, $\left|\log(1-\frac{1}{z}e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}}\right| \leqslant \frac{c}{|\gamma|^3}$ converge. Ainsi, $\sigma(z) = z\prod_{\gamma\in\Lambda_\tau\smallsetminus\{0\}}(1-\dfrac{z}{\gamma})e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}}$ est bien définie. ■

Remarque. La répartition correspond au plus grand ordre.

Exemple fondamental

Prenons $\mathcal{P}' \in \mathcal{M}(E_\tau)$. Ses zéros sont $\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$ et ses pôles sont 0 qui est du troisième ordre. Vérifions le théorème : $\sum a_i - \sum b_i = 1+\tau \in \Lambda_\tau$.

On rappelle que si $D = \sum n_i[z_i]$ est un diviseur dans $\mathrm{Div}(E_\tau)$, $L(D) = \{F \in \mathcal{M}(E_\tau) \mid F = 0 \text{ OU } \mathrm{ord}_z F \geqslant -D\}$. Si $D(z) > 0$, alors F a au plus un pôle d'ordre n en z et si $n < 0$, alors F a un zéro d'ordre au moins $D(z)$.

$F \in L(D) \iff \mathrm{ord}_{z_i} F \geqslant -n_i$ OU $F \cong 0$.

Théorème. ***(Riemann-Roch pour le tore)***

Soit D un diviseur sur E_τ, $D = \sum_i n_i[z_i]$ avec les $n_i \in \mathbb{Z}$ et les $[z_i] \ni E_\tau$. Alors

(i) si $\deg(D) < 0$, $L(D) = \{0\}$;

(ii) si $\deg(D) > 0$, $\dim(L(D)) = \deg(D)$;

(iii) si $\deg(D) = 0$, $\begin{cases} \dim(L(D)) = 1 \text{ si } [\sum_i n_i z_i] = [0] \\ L(D) = \{0\} \text{ sinon.} \end{cases}$

Exemples

1. Pour $D = 0$, $L(D) = \{\text{constantes}\} = \{F \mid \text{ord}_z(F) \geqslant 0\}$.
2. Pour $D = 1.[0]$, $L(D) = \{F \mid F \cong 0 \text{ OU } \text{ord}_{[0]}(F) \geqslant -1, \text{ord}_{[z]}(F) \geqslant 0 \text{ si } [z] \neq [0] = \{\text{constantes}\}$, d'où $L([0]) = L(0)$.
3. $L(2[0]) = \langle 1, \mathcal{P} \rangle$ donc $\dim(L(2[0]) = 2$.

4.3 Surface de Riemann comme revêtement de $\mathbb{CP}^1$

4.4 Théorie de Hodge

4.4.1 Fonctions harmoniques

4.4.2 Différentielle holomorphe

4.4.3 Théorèmes conséquences de la théorie de Hodge

4.4.3.1 Théorème de Riemann-Roch

4.4.3.2 Théorème d'Abel-Jacobi

Chapitre 5

Exercices

Difficulté des exercices :

- ● ○ ○ ○ ○ Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- ● ● ○ ○ ○ Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- ● ● ● ○ ○ Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- ● ● ● ● ○ Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- ● ● ● ● ● La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.

Appendice

Table des matières

Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition

Table des figures

Liste des tableaux