Oraux ENS 2021

3 juillet 2021

1 Anglais (Polytechnique), 28/6/2021 à 9 h 15

Modalités L'oral se déroulait au « couloir des langues » ; le taxi m'avait déposé au parking des élèves, mais pour entrer il fallait se diriger au milieu des bâtiments à Palaiseau dans le hall d'accueil. Même si les lieux sont immenses, il y a assez d'indications pour se repérer. Retard d'une vingtaine de minutes dans l'organisation. 30 minutes de préparation encadrées par des étudiants dans une salle ad hoc où les tables étaient préparées pour fournir le brouillon et une tablette avec le reportage à visionner, à écouter à l'aide d'un casque audio ; 20 minutes de passage constituées de 10 minutes de parole et 10 minutes d'entretien avec deux examinatrices (j'avais rencontré l'une par hasard la veille en repérant les lieux sur le campus...).

Vidéo *Why do Androids have a face ?*, 5 min 10, extrait du site de *The Guardian*. L'extrait partait des réactions sur YouTube quant aux images du BigDog de Boston Dynamics et des vidéos où les robots se prennent des coups de pied. Le reportage expliquait les enjeux des designs des *lifelike robots* et se terminait avec l'explication de la théorie japonaise de l'*Uncanny Valley*.

Résumé et commentaire D'abord, vérification de la convocation, de la carte d'identité et émargement (comme à toutes les épreuves par la suite). Pour ce que j'ai produit (en anglais) :

- ▷ Problématique générale (bonus) : les robots existent depuis l'Antiquité, se répandent avec la première révolution industrielle, mais les androïdes n'existent vraiment que depuis 1950. Pourquoi ce changement ?
- ▷ Résumé en 3 parties qui suivent le reportage lui-même déjà bien partitionné.
- ▷ Commentaire. Problématique : les robots esthétiquement semblables aux animaux (= êtres animés) sont-ils une technologique plus puissante que les autres ? I. Oui (ils sont adaptés aux tâches humaines, par le physique : pouces opposables, bipédie ; ils sont plus faciles à utiliser, car sans adaptation requise : le BigDog servant de *pack mules* pour l'armée) — II. Mais (ils suscitent de la peur chez les hommes : par ex., le *Terminator* de James Cameron ; si l'on en a peur, l'industrie cesse des les développer) — III. Il faut toujours savoir où tracer la ligne entre animé et robotique (enjeux de l'*open warning letter on AI*, Alpha Robot de DeepMind ; *Do Androids Dream of Electric Sheep ?* de Philip K. Dick).

Discussion en anglais Différentes questions, un peu vagues en général. Par exemple :

- ▷ Au Japon, on considère que tous les objets ont une âme, pourquoi est-ce que cela favorise l'introduction des robots androïdes ? (question la plus curieuse qu'on m'ait posée, étant donné qu'elle se répond un peu toute seule)
- ▷ L'autre examinatrice me demande quelque chose à propos de la limite entre humain et androïde, puisque le roman de Dick a inspiré *Blade Runner*, cherchant une caractéristique du film que je n'avais pas vu (zut) — c'était que le personnage principal est peut-être lui-même un robot. Je me rattrape en évoquant le roman et la composante selon laquelle Deckard couche avec l'androïde Rachael Rosen.
- ▷ Qu'est-ce que signifie pour l'homme la possibilité que les robots androïdes aient les mêmes problèmes et des émotions semblables aux nôtres ? (après quoi j'ai évoqué la théorie cartésienne des animaux-machines)

▷ Pourquoi le vocabulaire utilisé pour parler des androïdes (Superintelligence, etc.) est-il tiré de celui appliqué aux humains (et là j'ai répondu qu'au-delà de *pouvoir* tracer la ligne de distinction entre animé et robotique, il fallait aussi le *vouloir*, et c'était le mot de la fin).

2 Maths (Cachan), 29/6/2021 à 14 h 30

Modalités Pas de retard, et plus aucun pour toutes les épreuves suivantes. J'ai pu rentrer sans problème avec ma valise dans l'ENS puis dans la salle, étant donné que je devais quitter l'hôtel avant midi (à peu près 500 m à pied) ; deux élèves devant qui fumaient m'ont gentiment guidé. L'examinatrice me donne une feuille d'exercice avec cinq questions, et me dit que pendant 10 minutes, elle ne fera que me regarder (ensuite, on peut discuter). Dès le départ l'oral ne devait durer que 45 minutes. Exercice de théorie des groupes sur les représentations.

Sujet reproduit exactement Si G est un groupe fini, on dit qu'il admet une représentation s'il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et un morphisme de groupes $\rho_V : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, appelé action. On définit le caractère associé à cette action :

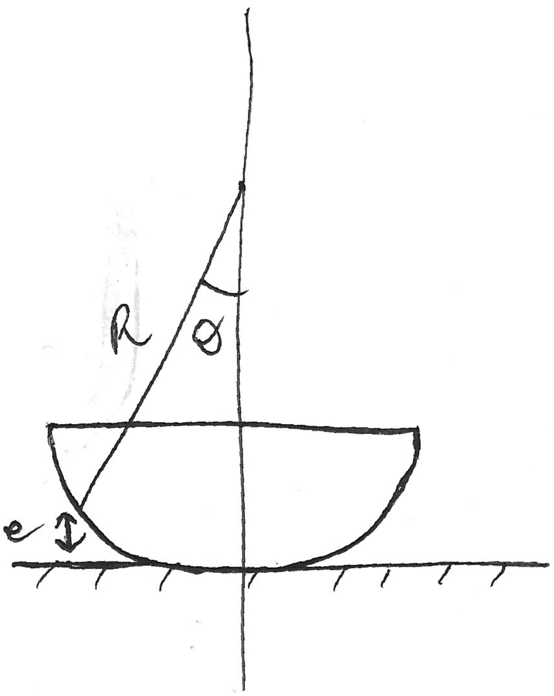
$$\begin{aligned}\chi_V : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \det(\rho_V(g))\end{aligned}$$

1. Montrer que le caractère est un morphisme de groupes.
   Puisqu'il est bien défini (à valeurs dans les complexes non nuls), c'est simplement une composition de deux morphismes.
2. Dans le cas où $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que toute représentation est entièrement caractérisée par la donnée d'un espace vectoriel V et un élément $u \in V$ tel que $u^n = id_V$.
   G étant monogène, généré par $\overline{1}$, les propriétés de morphisme permettent de choisir $u = \rho_V(\overline{1})$. Réciproquement, étant donné u, l'application partant de G, $k \longrightarrow u^k$ est bien définie, car deux entiers congrus modulo n ont les mêmes images.
3. (L'examinatrice commence à me parler à partir de cette question.) Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   J'ai d'abord commencé par le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; dans ce cas, la question précédente donne que $X^n - 1$ est annulateur de $\rho_V(g)$. Ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, d'où la diagonalisabilité et $\mathrm{Sp}(\rho_V(g)) \subseteq \mathbb{U}_n$. On généralise très simplement à n'importe quel groupe avec le théorème de Lagrange, où là $\mathrm{Sp}(\rho_V(g)) \subseteq \mathbb{U}_q$, où q est un entier. On me demande par ailleurs la démonstration de ce que tout élément d'un groupe fini est d'ordre fini.
4. Montrer que dans le cas où G est commutatif, alors il existe une décomposition de toute représentation en sous-espaces stables sous l'action de G. Remarques : la question était d'une part peu claire, et il a fallu que je demande ce que signifiait la dernière locution, ce à quoi on m'a répondu que cela équivalait à : stable par tout automorphisme $\rho_V(g)$ pour g parcourant G. De plus, il fallait faire des hypothèses supplémentaires pour que la décomposition attendue ne soit pas triviale (en effet, on pourrait tout simplement dire : je prends la décomposition de E par E lui seul), ce que nous avons précisé par la suite.
   Par morphisme, l'image de G par l'action est un sous-groupe commutatif du groupe linéaire de V. Ainsi tous les automorphismes considérés commutent deux à deux ; leurs sous-espaces propres sont donc réciproquement stables. Si l'on en prend un particulier qui ne soit pas l'identité, s'il en est, on obtient ce qui est demandé en décomposant V avec ses sous-espaces propres, puisqu'il est diagonalisable nécessairement : $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho_V(g_0))} E_\lambda$. Là je perds quelques minutes, puisqu'en listant les hypothèses directes j'avais répondu à la question, mais je ne m'en étais pas rendu compte (ce qui provoque un rire lorsque je percute).
5. Question en deux sous-questions. Pour la première, dans le cas des représentations de dimension 1, on définit $\widehat{\chi}$ comme l'ensemble des caractères du groupe et on définit une loi interne de façon naturelle. Il fallait montrer que cela formait un groupe, ce qui n'est pas évident. Pas le temps de finir.

3 Physique (Ulm), 30/6/2021 à midi, au 24 rue Lhomond (V^e arr.)

Modalités Au 24 rue Lhomond, derrière la rue d'Ulm, comme au bâtiment principal de la rue d'Ulm, il faut absolument attendre que quelqu'un passe avec un badge ou que, par hasard, un étudiant vienne ouvrir de l'intérieur pour pouvoir entrer ! L'examinateur me fait émarger puis il me fournit une feuille en me précisant d'être clair sur les hypothèses simplificatrices que je compte faire. Il est précisé dès le début que l'oral n'est censé durer que quarante minutes.

Sujet Au tout début, sur la feuille, il est écrit : soit une lentille convexe très légèrement curviligne. On la place à côté d'une lame de verre et on l'éclaire avec des rayons parallèles. Décrire les phénomènes observés en réflexion et en transmission. Enfin un dessin tel quel est fourni :



Éléments Beaucoup d'imprécisions dans ma compréhension des indications (rares, l'examinateur étant plutôt taciturne), et aussi du modèle suggéré par la feuille. Pour faire quelque chose, je commence par énoncer la loi de Descartes entre l'air et le verre, j'évoque les conditions de Gauss en regard de l'exhortation donné initialement de l'oral, puis je trace la figure au tableau (trois fois, de plus en plus grande, fautes de choses à faire). À grand peine, l'examinateur me fait deviner que le modèle proposé est celui d'une petite cuillère vue dans sa concavité et que nous souhaitons décrire les interférences lumineuses observées par la cause de sa surface. En tout, les points d'avancée de l'oral auront été :

- Le coin d'air formé rappelle le Michelson en coin d'air, donc des interférences se forment sur l'observateur (ce que j'ai pu dire).
- Un rayon parallèle à l'axe optique traversant la face curviligne de la lentille équivaut à un rayon oblique passant par un lentille mince (ce que je n'ai pas su dire). Pour déterminer une différence de marche, on considère deux rayons infinitésimalement proches.
- Le lien entre y, l'ordonnée sur la source/écran et e est quadratique : $e = f(y^2)$. Par suite, la figure d'interférences est constituée de franges qui sont des anneaux et l'interfrange n'est pas constante, parce que les carrés ne se simplifient pas contrairement à ce qui se passe d'habitude.

4 Maths (Ulm), 1/7/2021 à 11 h 30

Modalités Même souci que rue Lhomond, il faut vraiment attendre qu'un élève passe pour entrer dans les bâtiments. Rendez-vous à onze heures et demie dans la salle « des Résistants ». Une fois le bureau de réception des candidats trouvé (ou déniché), que le chargé des maths spé soit rappelé, puisqu'il ignore où se trouve cette salle, on appelle quelqu'un qui sait et m'y mène. Oral de 45 minutes : l'examinatrice m'interdit de toucher au tableau avec les doigts, pour effacer. Comme je l'ai fait une ou deux fois par réflexe, elle a tiqué un peu, mais rien de grave. En général l'examinatrice est sympathique. L'exercice est dicté au tableau ; les notations sont atroces. Exercice terminé.

Sujet Soit la fonction $F : z \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-(\xi^2+i)z^2)}{\xi^2+i}\mathrm{d}\xi$ sur $[0,+\infty[$. D'abord, étudier F.

- ▷ Bonne définition. L'intégrande est intégrable en comparant avec Riemann, pas de problème. Il y a continuité en 0 pour tout z puisque ξ^2+i est insoluble sur $\mathbb{R}$ (les solutions sont $\pm e^{i\pi/4}$).
- ▷ Continuité sur $\mathbb{R}_+$ (théorème de continuité sous le signe somme).
- ▷ Limites en 0 et $+\infty$. On fait appel au théorème de convergence dominée en version continue. En l'infini, la limite simple est nulle ; en 0, la limite est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+i}$. Attention pointilleux : on vérifie que l'hypothèse de domination établie pour la convergence dominée continue est encore valable pour $z=0$.
- ▷ Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ (hypothèse de domination sur la dérivée partielle sur tout sous segment de $\mathbb{R}_+ \supseteq [\alpha,\beta]$ avec $\alpha \neq 0$). Sinon la dominatrice est 2β, non intégrable sur $\mathbb{R}$. Les calculs ne sont pas agréables.

Ensuite, calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\xi^2}\mathrm{d}\xi$.

- ▷ On remarque que cette intégrale est semi-convergente.
- ▷ L'expression de $F'(z)$ obtenue avec le théorème de dérivation sous le signe somme permet de se ramener, à l'aide d'un changement de variable, à l'intégrale de Gauss sur $\mathbb{R}_+$ dont il était demandé de rappeler la valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En intégrant, on obtenait d'après mon souvenir : $I = K(\lim\limits_{+\infty} \overline{F} - \lim\limits_{0} \overline{F})$, le deuxième terme étant nul, avec $K = \sqrt{\pi}$ si je me le rappelle bien. La conjugaison apparaît en souhaitant remplacer $e^{-i\xi^2}$ par $e^{i\xi^2}$.
- ▷ Par continuité de la conjugaison, on n'avait plus qu'à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2-i}$ ce qui se fait aisément en décomposant en éléments simples.

5 TIPE (Ulm), 1/7/2021 à 17 h

Modalités Retour à Ulm en fin de journée. Deux examinateurs, très jeunes, du département de mathématiques appliquées (des couloirs tortueux et longs). On me propose de présenter pendant vingt minutes mon TIPE (je leur donnai mon dossier d'une soixantaine de pages à lire, et je le projetai en PDF sur le tableau), pendant lesquelles je n'ai pas été interrompu. Ensuite, vingt minutes d'exercices sur des sujets afférents tous posés par le même examinateur.

Questions posées Dans l'ordre :

- ▷ L'examinateur me dit : « vous nous avez dit qu'il existait une transformation isométrique de tout ouvert de la sphère en tout ouvert du plan », sans vraiment de question. Plus tard, il m'explique qu'il voulait me faire relever un lapsus dans mon document écrit, comme quoi la projection de Peters ne préserve non les distances mais les aires.
- ▷ Classes de régularité de la projection de Mercator, ensemble de bijectivité.
- ▷ Démonstration sans polycopié des formules de passage des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. Initialement, on me demande seulement de les énoncer, mais les ignorant, on me demande les retrouver. Comme on me refuse toute assistance, j'y passe quelques minutes longuement éprouvées. Mais j'y arrive enfin.

- ▷ Soit un arc sur la sphère $\gamma(t) = (\theta(t), \varphi(t))$. On demande d'écrire l'expression de la dérivée de cet arc en coordonnées cartésiennes (ce qui est fastidieux, mais sans astuce, en reprenant les formules rappelées précédemment). Ensuite, on veut écrire la norme de ce vecteur dérivé (très fastidieux), puisqu'il était imposé de conserver pour variables la longitude et la colatitude. Finalement, j'ai trouvé le résultat : $||\gamma'(t)||^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2(\theta)$. On me demande d'expliquer dans la dernière minute, à partir de cette formule, pourquoi « les géodésiques de la sphère sont les grands arcs ».