Anneaux des entiers algébriques des corps de nombres quadratiques

Faits généraux

- Ce sont les $A_K = \mathcal{O}_K$ pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où d est un entier $\neq 1$ sans facteur carré (4 ne divise pas d).
- Pour $d \equiv 2{,}3\ [4]$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$; pour $d \equiv 1\ [4]$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$. En particulier, tous les anneaux d'entiers algébriques de corps quadratique sont monogènes. (C'est faux pour le degré ≥ 3.)
- Pour $d < 0$ (corps imaginaires), $\mathcal{O}_K$ est un réseau inclus dans $\mathbb{C}$ jamais inclus dans $\mathbb{R}$. Pour $d > 0$ (corps réels), $\mathcal{O}_K$ est un sous-anneau inclus dans $\mathbb{R}$ dont le groupe additif est dense.
- Comme tous les anneaux d'entiers algébriques de corps de nombres, tous ces anneaux sont commutatifs, intègres, intégralement clos, noethériens, de Dedekind, en particulier atomiques (il existe toujours une décomposition en irréductibles).

$d = \cdots$	$\mathcal{O}_K =$	Euclidien ?	Principal ?	Factoriel ?	Intégralement clos ?	Unités
-19	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$	✗	✓	✓	✓	$\{\pm 1\}$
-18	3^2 divise d					
-17	$\mathbb{Z}[i\sqrt{17}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-16	4 divise d					
-15	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-14	$\mathbb{Z}[i\sqrt{14}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-13	$\mathbb{Z}[i\sqrt{13}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-12	4 divise d					
-11	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm 1\}$
-10	$\mathbb{Z}[i\sqrt{10}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-9	3^2 divise d					
-8	4 divise d					
-7	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm 1\}$
-6	$\mathbb{Z}[i\sqrt{6}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-5	$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm 1\}$
-4	4 divise d					
-3	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]$	✓	✓	✓	✓	$\left\{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$
-2	$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm 1\}$
-1	$\mathbb{Z}[i]$ *(entiers de Gauss)*	✓	✓	✓	✓	$\{\pm 1, \pm i\}$
0	$\mathbb{Z}$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm 1\}$
1	On retombe sur $\mathbb{Z}$					
2	$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(1+\sqrt{2})^n\}$
3	$\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(2+\sqrt{3})^n\}$

4	4 divise d					
5	$\mathbb{Z}[\phi]$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *(entiers d'Eisenstein)*	✓	✓	✓	✓	$\left\{\pm\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$
6	$\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(5+2\sqrt{6})^n\}$
7	$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(8+3\sqrt{7})^n\}$
8	4 divise d					
9	3^2 divise d					
10	$\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$	✗	✗	✗	✓	$\{\pm(3+\sqrt{10})^n\}$
11	$\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(10+3\sqrt{11})^n\}$
12	4 divise d					
13	$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$	✓	✓	✓	✓	$\{\pm(11+3\sqrt{13})^n\}$

The show must go on

- Les deux colonnes centrales coïncident toujours, en effet : un anneau de Dedekind est principal si et seulement s'il est factoriel.
- Il n'y a que cinq anneaux $\mathcal{O}_K$ imaginaires qui soient euclidiens : dès $d = -11$ (à rebours), plus aucun ne l'est. Dans chacun de ces cas, le stathme utilisé est la norme.
- $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ n'est jamais factoriel si $d \neq 1,2$. En particulier, il n'est pas principal.
- Si $d < 0$ a deux facteurs premiers, $\mathcal{O}_K$ n'est pas factoriel non plus (illustration : $d = -15$).
- L'exemple $d = -19$ est notoirement dû à D. Perrin et minimal (voir ce qui suit). En fait, pour les corps imaginaires, il n'y a que neuf anneaux $\mathcal{O}_K$ principaux : les cinq anneaux euclidiens, le précédent, puis $-43, -67, -163$.
- Dès $d = -3$, toutes les unités des $\mathcal{O}_K$ sont réduites à ± 1.
- Pour $d = 2,3,5$, il est aisé de vérifier que $\mathcal{O}_K$ est euclidien. On conjecture qu'il existe une infinité de d tels que $\mathcal{O}_K$ soit euclidien. On sait que $d = 14$ ou $d = 69$ le sont. On peut démontrer (pas moi en tout cas) que l'anneau réel $\mathcal{O}_K$ est euclidien *pour la norme* si et seulement si $d = 2,3,5,6,7,11,13,17,19,21,29,33,37,41,57,73$, ce qui règle largement leur compte aux exemples ci-dessus.
- Une autre conjecture (due à Gauss) prévoit qu'il existe une infinité de $d > 0$ tel que $\mathcal{O}_K$ soit principal. Or, on sait que parmi eux, au plus deux sont non euclidiens (résultat dû à Narkiewicz), et aucun si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie !
- Pour tout $d \geq 0$, les unités des $\mathcal{O}_K$ constituent un groupe isomorphe à $\{\pm 1\} \times \mathbb{Z} \simeq \{\pm \varepsilon^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Pour trouver ε minimal, on peut appliquer l'algorithme des fractions continues à l'équation de Pell-Fermat associée à la norme.
- Lorsque $|d|$ augmente, le nombre de nombres premiers augmente ($\mathcal{P}$ est infini), donc la densité d'entiers possédant un facteur carré augmente, donc la « densité » d'anneaux d'entiers algébriques diminue.
- Quid des laissés pour compte ? Les anneaux $\mathbb{Z}[i\sqrt{19}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{15}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{11}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$, et plus généralement, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour d congru à 1 modulo 4, ne sont pas intégralement clos (donc ni euclidiens, ni principaux, ni factoriels). Remarquons que pour tout complexe α, $\mathbb{Z}[\alpha]$ est quand même noethérien (donc atomique).