Théorie de Teichmüller

1 Approfondissements sur les surfaces de Riemann

1.1 Surfaces de type fini

Définition. Une *surface de type fini* est une surface compacte privée d'un nombre fini de points.
Théorème. *(Classification des surfaces à bord)* Toute surface à bord de type fini est isomorphe à $\Sigma_{g,n,b} := \Sigma_g \setminus \{p_1,...,p_n\}, \bigcup_{i=1}^{b} D_i$ où les D_i sont des disques ouverts. g est le *genre*, n le nombre de *pointages* et b le nombre de *composantes de la frontière*. Le triplet (g,n,b) est la *signature* de la surface. En particulier, les surfaces fermées sont entièrement déterminées par leur genre.
Définition. *(Triangulation faible)* Soit S une surface. Une *triangulation (faible)* est un triplet (S,V,F) où $V \subseteq S$ est fini, E est une collection fini d'arcs à extrémités dans S, et $S \setminus (V \cup E)$ est une réunion disjointe finie $F = \{f_1,...,f_k\}$ de disques dont chacun est incident à trois éléments de E en comptant les multiplicités.
Exemple. Le tore se triangule par un sommet, trois arêtes et deux faces.
Définition. *(Caractéristique généralisée)* Un lemme facile donne que $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ (en triangulant le polygone fondamental, par exemple). On pose pour une surface non fermée S : $\chi(S) = 2 - 2g - n - b$. Remarque : cette définition coïncide avec 1) la définition homologique 2) la généralisation des triangulations aux surfaces trouées.

1.2 Automorphismes des surfaces de Riemann

Théorème. *(Uniformisation, admis)* Toute surface de Riemann simplement connexe X est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ où $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) > 0\} \simeq \mathring{D}^1$. En particulier, tout domaine simplement connexe strict du plan complexe est biholomorphe au disque de Poincaré.
Lemme. Soit $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine (= ouvert connexe) et $G < PSL_2(\mathbb{C})$ tel que G fixe D et agit librement sur D, *i.e.* pour tout $g \in G$ $g(D) = D$ et pour tout $g \neq e$ les points fixes de g sont hors de D. Si de plus l'action de G est proprement discontinue (pour tout compact $K \subseteq D$, $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, le quotient D/G est une surface de Riemann.
Corollaire. Toute surface de Riemann X est un quotient de $D = \mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{H}$: il existe $G < \mathrm{Aut}(D)$ tel que $G \circlearrowright D$ librement et proprement discontinûment et $X = D/G$. En effet, $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$ où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X.
Exemples.

1. *(Plan complexe)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$.
2. *(Sphère de Riemann)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C})$. En effet, $PGL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par multiplication matricielle. L'action sur $\hat{\mathbb{C}}$ est explicitement :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} \text{ si } z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty \text{ sinon} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0 \\ \infty \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

   On les appelle *transformations de Möbius*.
3. *(Tores)* On prend $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$. Alors $\Lambda_\tau = \langle g_1, g_\tau \rangle = \{z \mapsto z + m + n\tau, n,m \in \mathbb{Z}\} = \{\begin{pmatrix} 1 & m+n\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n,m \in \mathbb{Z}\} < PSL_2(\mathbb{C})$ vérifie les hypothèses précédentes sur $D = \mathbb{C}$.
   Vérifions la discontinuité propre. La *distance de translation* de $g \in \Lambda_\tau$ sur $\mathbb{C}$ est $T_g = \inf\{|g \cdot z - z|, Z \in \mathbb{C}\}$. (Dans ce cas, elle est réalisée en tout point de $\mathbb{C}$.) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. On observe que si $T_g > 2diam(K)$, $g(K) \cap K) = \emptyset$.
   Ce quotient est un tore : tout point de $\mathbb{C}$ s'écrit $x + y\tau$ de manière unique d'où une application bijection $[x + y\tau] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) \in S^1 \times S^1$.
4. *(Surfaces hyperboliques)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$) qui agit par homographies.

Heuristique. Ainsi $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est un tore. Mais pour quels τ,τ' ces quotients sont-ils biholomorphes ? La théorie de Teichmüller y répond.
Propriété. *(Quotients de $\hat{\mathbb{C}}$)* Toute surface de Riemann de revêtement universel $\hat{\mathbb{C}}$ est biholomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$ (les transformations de Möbius ont toujours des points fixes).
Propriété. *(Quotients de $\mathbb{C}$)* Si X est une surface de Riemann de revêtement universel $\mathbb{C}$, elle est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou à un $\mathbb{C}/\Lambda_{\lambda,\mu}$ où λ,μ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Si X est une surface de Riemann difféomorphe

à $\mathbb{T}^2$, alors le revêtement universel de X est biholomorphe à $\mathbb{C}$.
La preuve est formatrice. On utilise :

1. Il n'existe pas de sous-groupe strict de $PSL_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{H}/G$ existe et soit un tore.
2. Si G existe, $G \simeq \mathbb{Z}^2$.
3. Si $G < PSL_2(\mathbb{R})$ et G agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$, si G est abélien, alors $G = \mathbb{Z}$ ou un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. *(Classification des éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$)* Si $g \in PSL_2(\mathbb{R}), g \neq e$ alors
   - ⋆ soit $\exists! z \in \mathbb{H} \quad g(z) = z$ auquel cas g peut être conjugué dans $SO(2)$. On dit que g est *elliptique* ;
   - ⋆ soit $\exists! x \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x) = x$ auquel gas g peut être conjugué dans $\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. On dit que g est *parabolique* ;
   - ⋆ soit $\exists x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x_i) = x_i$ auquel cas g est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. On dit que g est *hyperbolique* ou *loxodromique*.

Corollaire. Toute surface de genre $\geqslant 2$ n'est pas d'un des genres précédents. On dit qu'elle est *hyperelliptique*.
Exemples. *(Quotients de $\mathbb{H}$)* Il y a donc beaucoup de quotients de $\mathbb{H}$, car tous les précédents sont S^2 ou $\mathbb{T}^2$. On dispose par exemple des surfaces hyperlliptiques $X = \mathring{X} \cup \{(\infty,\infty)\}$ où $a_1,...,a_{2g+1} \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\mathring{X} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = (z-a_1)...(z-a_{2g+1})\}$. On montre qu'elle a une structure complexe, compacte et connexe. De plus, elle est de genre g. Pour $g \geqslant 2$ c'est donc un quotient de $\mathbb{H}$. Par conséquent, toute surface compacte orientable a une structure de surface de Riemann.
Définition. *(Involution hyperlliptique)* $\iota: \begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & X \\ (z,w) & \longmapsto & \begin{cases} (z,-w) & (z,w) \neq (\infty,\infty) \\ (\infty,\infty) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$ est un automorphisme de X. π est alors l'application quotient $X \to X/\iota$ qui est le revêtement branché $X \to \hat{\mathbb{C}}$ permettant le calcul de Riemann-Hurwitz.

1.3 Géométrie riemanienne sur les surfaces orientables

Fait. Toute surface de Riemann est équipée d'une métrique riemanienne de courbure constante 1, 0 ou -1. Ces dernières sont dites *hyperboliques*.
Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec les métriques complètes de courbure constante 1, 0 ou -1 à isométrie près et homothétie près dans le cas euclidien.
Théorème. *(Killing-Hopf, admis)* Toute 2-variété riemannienne complète simplement connexe de courbure constante 1, 0 ou -1 est isométrique à S^2, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{H}$.
Propriété. Les isométries préservant l'orientation sont :

- ⋆ $\text{Isom}^+(S^2) = SO(3)$.
- ⋆ $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$.
- ⋆ $\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Propriété. Si $\Sigma_{g,n,b}$ est hyperbolique, $aire(\Sigma_{g,n,b}) = 2\pi(2g + b + n)$.
Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec ses classes de métriques riemaniennes conformes à difféomorphisme près.