Homotopie II

Motivation. On a deux théories homotopiques raisonnables envisageables dans Top : celle à équivalence d'homotopie près (catégorie Top$[h\text{-eq}^{-1}]$) et celle à équivalence faible d'homotopie près (catégorie Top$[fh\text{-eq}^{-1}]$). Puisqu'en général les localisées ne ressemblement pas aux catégories de départ, on a besoin d'un modèle de celles-là. Problème : les limites ne se comportent pas bien dans ces catégories. Par exemple, le pushout n'est pas préservé par équivalence d'homotopie : $[0,1] \cong \{*\}$ mais $\{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} \{*'\} \simeq \{*\} \not\cong S^1 \simeq \{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} [0,1]$.
Autre exemple : dans les catégories de complexes de chaînes, les noyaux ne sont pas invariants par quasi-isomorphismes : si R est un anneau, le complexe C constant en R alternant pour différentielles id_R et $0_{R\to R}$: $\ldots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} R \xrightarrow{0} 0$ ici écrit en degrés $(1,0,-1)$, est exact donc en particulier quasi-isomorphe à 0. De même pour le complexe $C' = \Sigma^{-1}C$. Dans $Ch(R)$, $\mathrm{Ker}(0 \to 0) \simeq 0$ (ouf). Cependant, en considérant le morphisme de complexes $\varphi : C \to C'$ donné par $\varphi_{2n} = 0$ et $\varphi_{2n+1} = id_R$, c'est un quasi-isomorphisme et $\mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\varphi} D) \ni C$ n'est pas quasi-isomorphe à 0.
Encore un exemple : un foncteur linéaire $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ induit un foncteur $Ch(R) \to Ch(S)$ qui en général ne préserve pas les quasi-isomorphismes et donc ne passe pas aux catégories dérivées $\mathcal{D}(R) = Ch(R)[\mathrm{qis}^{-1}]$. On peut prendre par exemple $\mathrm{Hom}(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ pour M un R-module fixé qui n'est pas projectif (puisque les foncteurs exacts préservent les quasi-isomorphismes), tel $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$.
Le rôle de l'algèbre homologique apparaît alors clairement. De même que la catégorie des complexes de chaînes a assez de projectifs, *i.e.* à quasi-isomoprhisme près, tout objet est équivalent à un projectif, dans Top, à équivalence faible d'homotopie près, tout espace est équivalent à un CW-complexe.

(Si F est exact à droite et $P_\bullet(M) \to M$ une résolution projective, alors $H_0(F(P_\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $\ldots \longrightarrow H_1(F(B)) \longrightarrow H_1(F(C)) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(b) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$. On note $F(P_\bullet(M)) = LF(M)$ le foncteur dérivé à gauche de F. Si F est exact à gauche et $M \to I^\bullet(M)$ une résolution injective, alors $H^0(I^\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow H^1(F(A)) \longrightarrow H^1(F(B)) \longrightarrow \ldots$. On note $F(I^\bullet(M)) = RF(M)$ le foncteur dérivé à droite de F.)

1 Catégories de modèle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition. *(Rétract catégorique)* Un morphisme $f : A \to B$ d'une catégorie est un rétract d'un morphisme $h : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "id_A"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Si les applications verticales sont l'identité, on retrouve le cas d'un rétract entre objets.
Définition. *(Catégorie de modèle)* Une catégorie de modèle est une catégorie C munie de trois classes de flèches $\mathcal{W}$ dites *équivalences faibles* notées $\xrightarrow{\sim}$, Cof dites *cofibrations* notées $\rightarrowtail$ et Fib dites *fibrations* notées $\twoheadrightarrow$, telles que

1. C est complète et cocomplète, d'objets initiaux et terminaux $\emptyset$ et $*$;
2. *(Propriété 2 parmi 3)* Pour tout triangle commutatif, si deux flèches sont dans $\mathcal{W}$, la troisième aussi ;
3. un rétract d'une flèche d'une des trois classes ci-dessus est encore dans cette classe ;
4. *(Relèvements)* Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\check{f}"] & Y, \end{tikzcd}$$

   $\check{f}$ existe dès que l'une des flèches verticales est une équivalence faible ;
5. *(Axiomes de factorisation)* On dit que $\mathcal{W} \cap \mathrm{Cof}$ sont les *cofibrations acycliques*, $\mathcal{W} \cap \mathrm{Fib}$ les *fibrations acycliques*. Toute flèche $f : X \to Y$ de C se factorise en $X \rightarrowtail C_f \to Y$ où la flèche de droite est une fibration acyclique et en $X \to P_f \twoheadrightarrow Y$ où la flèche de gauche est une cofibration acyclique, et souvent on veut ceci de façon naturelle, *i.e.* $f \mapsto C_f, f \mapsto P_f$ foncteurs.

Cofibrations-fibrations acycliques et cofibrations acycliques-fibrations sont duales et forment ce que l'on appelle un *système de factorisation* en vertu des deux derniers axiomes. **Propriété.** Un objet X est *cofibrant* si $\emptyset \to X$

est une cofibration, *fibrant* si $X \to *$ est une fibration. On peut remplacer tout objet fonctoriellement par un cofibrant $L(X)$ ou un fibrant $R(X)$ faiblement équivalent via une fibration respectivement une cofibration. Une telle équivalence est appelée *remplacement cofibrant* respectivement *fibrant* ou *résolution cofibrante* respectivement *fibrante*.
Fait. Si L est cofibrant, $f : L \to Y$ une flèche, on a

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ L \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

et de même pour les fibrants.
Propriété. Le produit de deux catégories de modèles donné par $(C \times C'$,$\mathcal{W} \times \mathcal{W}'$,Cof $\times$ Cof$'$,Fib $\times$ Fib$')$ est une catégorie de modèle. L'opposée d'une catégorie de modèle munie des flèches opposées est une catégorie de modèle.
Exemples.
1. Une catégorie bicomplète avec $\mathcal{W} = \mathrm{Iso}(C)$, Cof $=$ Fib $= \mathrm{Mor}(C)$ est trivialement de modèle.
2. *(Quillen)* Top munie de $\mathcal{W}$ les équivalences faibles d'homotopie, Fib les fibrations de Serre et Cof les rétracts d'applications cellulaires relativese. On remarque que tous les espaces topologiques sont fibrants.
3. *(Strøm)* Top munie de $\mathcal{W}$ les équivalences d'homotopie, Fib les fibrations et Cof les cofibrations d'image fermée. Ici les tous les espaces sont fibrants et cofibrants !
4. ΔEns munie de $\mathcal{W}$ les équivalences faibles d'homotopie simpliciale, Cof les inclusions de sous-ensembles simpliciaux, Fib les fibrations de Kan. Tout ensemble simplicial est cofibrant et les fibrants sont les complexes de Kan.

Définition. Soit $\mathcal{A}$ une classe de flèches de C. f a la propriété de relèvement à droite, respectivement à gauche, et l'on note $f \in RLP(\mathcal{A})$, respectivement $LLP(\mathcal{A})$ si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\in\mathcal{A}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{respectivement} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\in\mathcal{A}"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd}$$

Propriété.
1. $f \in \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathcal{W} \cap \mathrm{Fib})$.
2. $f \in \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathcal{W} \cap \mathrm{Cof})$.
3. $f \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathrm{Fib})$.
4. $f \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathrm{Cof})$.
5. $f \in \mathcal{W} \iff f = pi$ où $i \in \mathcal{W} \cap \mathrm{Cof}, p \in \mathcal{W} \Cap \mathrm{Fib}$.

Corollaire.
1. Dans une catégorie de modèle deux des classes déterminent la troisième.
2. $\mathcal{W}$,Cof,Fib sont chacune stable par composition.
3. Les pushouts de cofibrations sont des cofibrations et les pullbacks de fibrations sont des fibrations.
4. Les isomorphismes sont dans l'intersection des trois classes de modèle.