Homotopie avancée

Motivation. On a deux théories homotopiques raisonnables envisageables dans Top : celle à équivalence d'homotopie près (catégorie $\mathrm{Top}[h\text{-eq}^{-1}]$) et celle à équivalence faible d'homotopie près (catégorie $\mathrm{Top}[fh\text{-eq}^{-1}]$). Puisqu'en général les localisées ne ressemblement pas aux catégories de départ, on a besoin d'un modèle de celles-là. Problème : les limites ne se comportent pas bien dans ces catégories. Par exemple, le pushout n'est pas préservé par équivalence d'homotopie : $[0,1] \cong \{*\}$ mais $\{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} \{*'\} \simeq \{*\} \not\cong S^1 \simeq \{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} [0,1]$.
Autre exemple : dans les catégories de complexes de chaînes, les noyaux ne sont pas invariants par quasi-isomorphismes : si R est un anneau, le complexe C constant en R alternant pour différentielles id_R et $0_{R\to R}$: $\dots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} R \xrightarrow{0} 0$ ici écrit en degrés $(1,0,-1)$, est exact donc en particulier quasi-isomorphe à 0. De même pour le complexe $C' = \Sigma^{-1}C$. Dans $Ch(R)$, $\mathrm{Ker}(0 \to 0) \simeq 0$ (ouf). Cependant, en considérant le morphisme de complexes $\varphi : C \to C'$ donné par $\varphi_{2n} = 0$ et $\varphi_{2n+1} = id_R$, c'est un quasi-isomorphisme et $\mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\varphi} D) \ni C$ n'est pas quasi-isomorphe à 0.
Encore un exemple : un foncteur linéaire $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ induit un foncteur $Ch(R) \to Ch(S)$ qui en général ne préserve pas les quasi-isomorphismes et donc ne passe pas aux catégories dérivées $\mathcal{D}(R) = Ch(R)[\mathrm{qis}^{-1}]$. On peut prendre par exemple $\mathrm{Hom}(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ pour M un R-module fixé qui n'est pas projectif (puisque les foncteurs exacts préservent les quasi-isomorphismes), tel $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$.
Le rôle de l'algèbre homologique apparaît alors clairement. De même que la catégorie des complexes de chaînes a assez de projectifs, *i.e.* à quasi-isomoprhisme près, tout objet est équivalent à un projectif, dans Top, à équivalence faible d'homotopie près, tout espace est équivalent à un CW-complexe.

(Si F est exact à droite et $P_\bullet(M) \to M$ une résolution projective, alors $H_0(F(P_\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $\dots \longrightarrow H_1(F(B)) \longrightarrow H_1(F(C)) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(b) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$. On note $F(P_\bullet(M)) = LF(M)$ le foncteur dérivé à gauche de F.
Si F est exact à gauche et $M \to I^\bullet(M)$ une résolution injective, alors $H^0(I^\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow H^1(F(A)) \longrightarrow H^1(F(B)) \longrightarrow \dots$. On note $F(I^\bullet(M)) = RF(M)$ le foncteur dérivé à droite de F.)

1 Catégories de modèle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition. *(Rétract catégorique)* Un morphisme $f : A \to B$ d'une catégorie est un rétract d'un morphisme $h : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "id_A"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Si les applications verticales sont l'identité, on retrouve le cas d'un rétract entre objets.
Définition. *(Catégorie de modèle)* Une catégorie de modèle est une catégorie C munie de trois classes de flèches $\mathscr{W}$ dites *équivalences faibles* notées $\xrightarrow{\sim}$, Cof dites *cofibrations* notées $\rightarrowtail$ et Fib dites *fibrations* notées $\twoheadrightarrow$, telles que

1. C est complète et cocomplète, d'objets initiaux et terminaux $\emptyset$ et $*$ (ne dépend que de C) ;
2. *(Propriété 2 parmi 3)* Pour tout triangle commutatif, si deux flèches sont dans $\mathscr{W}$, la troisième aussi (ne dépend que de $(C,\mathscr{W})$) ;
3. un rétract d'une flèche d'une des trois classes ci-dessus est encore dans cette classe ;
4. *(Relèvements)* Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\check{f}"] & Y, \end{tikzcd}$$

   $\check{f}$ existe dès que l'une des flèches verticales est une équivalence faible ;
5. *(Axiomes de factorisation)* On dit que $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}$ sont les *cofibrations acycliques*, $\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$ les *fibrations acycliques*. Toute flèche $f : X \to Y$ de C se factorise en $X \rightarrowtail C_f \to Y$ où la flèche de droite est une fibration acyclique et en $X \to P_f \twoheadrightarrow Y$ où la flèche de gauche est une cofibration acyclique, et souvent on veut ceci de façon naturelle, *i.e.* $f \mapsto C_f, f \mapsto P_f$ foncteurs.

Cofibrations-fibrations acycliques et cofibrations acycliques-fibrations sont duales et forment ce que l'on appelle un *système de factorisation* en vertu des deux derniers axiomes.
Propriété. Un objet X est *cofibrant* si $\emptyset \to X$ est une cofibration, *fibrant* si $X \to *$ est une fibration, *bifibrant* si les deux. On peut remplacer tout objet fonctoriellement par un cofibrant $L(X)$ ou un fibrant $R(X)$ faiblement équivalent via une fibration respectivement une cofibration. Une telle équivalence est appelée *remplacement cofibrant* respectivement *remp. fibrant* ou *résolution cofibrante* respectivement *rés. fibrante*. On note C^c,C^f,C^{cf} les sous-catégories pleines de cofibrants, fibrants, bifibrants.
Fait. Si L est cofibrant, $f : L \to Y$ une flèche, on a

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ L \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

et de même pour les fibrants.
Propriété. Le produit de deux catégories de modèles donné par $(C \times C', \mathscr{W} \times \mathscr{W}', \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}', \mathrm{Fib} \times \mathrm{Fib}')$ est une catégorie de modèle. L'opposée d'une catégorie de modèle munie des flèches opposées est une catégorie de modèle.
Exemples.

1. Une catégorie bicomplète avec $\mathscr{W} = \mathrm{Iso}(C)$, $\mathrm{Cof} = \mathrm{Fib} = \mathrm{Mor}(C)$ est trivialement de modèle.
2. *(Quillen)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie, Fib les fibrations de Serre et Cof les rétracts d'applications cellulaires relativese. On remarque que tous les espaces topologiques sont fibrants.
3. *(Strøm)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences d'homotopie, Fib les fibrations et Cof les cofibrations d'image fermée. Ici les tous les espaces sont fibrants et cofibrants !
4. ΔEns munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie simpliciale, Cof les inclusions de sous-ensembles simpliciaux, Fib les fibrations de Kan. Tout ensemble simplicial est cofibrant et les fibrants sont les complexes de Kan.

Définition. Soit $\mathcal{A}$ une classe de flèches de C. f a la propriété de relèvement à droite, respectivement à gauche, et l'on note $f \in RLP(\mathcal{A})$, respectivement $LLP(\mathcal{A})$ si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\in \mathcal{A}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{respectivement} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\in \mathcal{A}"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd}$$

Propriété.

1. $f \in \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib})$.
2. $f \in \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof})$.
3. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathrm{Fib})$.
4. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathrm{Cof})$.
5. $f \in \mathscr{W} \iff f = pi$ où $i \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}, p \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$.

Corollaire.

1. Dans une catégorie de modèle deux des classes déterminent la troisième.
2. $\mathscr{W}$,Cof,Fib sont chacune stable par composition.
3. Les pushouts de cofibrations sont des cofibrations et les pullbacks de fibrations sont des fibrations.
4. Les isomorphismes sont dans l'intersection des trois classes de modèle.

1.2 Catégorie homotopie d'une catégorie de modèle

Définition. $\mathbf{Ho}(C) := C[\mathscr{W}^{-1}]$. Pour une catégorie de modèle C, une localisée est très structurée.
Lemme. Les inclusions C^c,C^f,$C^{cf} \hookrightarrow C$ induisent des équivalences de quasi-inverses induits par les remplacements cofibrants et fibrants. Il y a donc « beaucoup de cofibrants/fibrants ».
Exemples.

1. Dans Top selon Quillen, tout espace topologique est faiblement équivalent à un espace cellulaire.
2. Dans $Ch_{\geqslant 0}(R)$, tout complexe de chaînes est équivalent à un complexe concentré en un R-module projectif et de même avec injectif.

Définition. Par analogie totale avec Top :

1. Un *cylindre* de X est une factorisation de $id_X \coprod id_X : X \coprod X \to C \to X$ en une cofibration suivie d'une équivalence faible. On note $\iota_0,\iota_1 : X \to X \coprod X \to C$ semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.
2. Un *objet en chemins* est une factorisation de $\Delta_X : X \to P \to X \times X$ en une équivalence faible suivie d'une fibration. On note $p_0,p_1 : P \to X \times X \to X$ semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.
3. Une *homotopie à gauche* entre $f,g : X \to Y$ est un morphisme H faisant commuter $\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, tail, "\iota_0"] \arrow[r, shift right, tail, "\iota_1"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & X \coprod X \arrow[r, tail] & C \arrow[r, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$ pour au moins un choix de cylindre C. Une *homotopie à droite* entre f,g est un morphisme K faisant com-

muter
$$\begin{tikzcd} & & & X \\ X \arrow[r, dashed, "K"] \arrow[urrr, bend left, "f"] \arrow[drrr, bend right, "g"'] & P \arrow[r, two heads] & X \times X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\ & & & X \end{tikzcd}$$
pour au moins un choix d'objet en chemins P (dans Top, l'homotopie est autoduale). Une *homotopie* entre f,g est la donnée d'une homotopie à gauche et d'une homotopie à droite. Équivalence d'homotopie.

Remarques. Par les axiomes, on peut toujours trouver un cylindre où de plus la deuxième flèche est acyclique et un objet un chemins où de plus la première flèche est acyclique.
Tout cylindre est faiblement équivalent au cylindre noté $X \times I$ issu de la factorisation canonique, et donc une homotopie pour $X \times I$ en induit une pour lui, mais la réciproque est fausse en général.

Lemme. Si A est cofibrant, $X \to X \coprod A$ est une cofibration. Si Y est fibrant, $X \times Y \to X$ est une fibration.

Propriétés.

1. L'homotopie à gauche, respectivement à droite est stable par postcomposition, respectivement précomposition. Elle est stable à droite, respectivement à gauche, si leur but est fibrant, respectivement cofibrant.

2. Si A est cofibrant, respectivement fibrant, l'homotopie à gauche, respectivement à droite, est une équivalence sur $\mathrm{Hom}(A,X)$, respectivement $\mathrm{Hom}(X,A)$. De plus, une fibration acyclique respectivement une cofibration acyclique entre deux fibrants respectivement cofibrants induit une bijection par postcomposition respectivement précomposition.

Corollaire. Si A est fibrant et B cofibrant, toutes les relations d'homotopie sont égales sur $\mathrm{Hom}(A,B)$. En particulier, l'homotopie est une relation d'équivalence sur C^{cf}.

Corollaire. *(Whitehead)* Un morphisme entre bifibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.