# MEMENTO GÉNÉRAL : NIVEAU A

Un peu plus élevé

## Ensembles

- $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap Im(f)$. $f$ est donc surjective ssi le membre de gauche égale $B$.
- $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$. On montre que $f$ est injective en seul cas d'égalité.
- À partir d'un **recouvrement croissant** d'un ensemble, on peut former un partage en en prenant les « anneaux » successifs.
- La **fonction de couplage de Cantor**, qui lie $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$, a pour expression : $(x,y) \mapsto \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + y$. Sa bijection réciproque est $z \mapsto \left(\frac{w(w+3)}{2} - z, z - \frac{w(w+1)}{2}\right)$ où $w = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2} \right\rfloor$. Le théorème de Fueter-Pólya énonce que ce polynôme et son symétrique en sont les deux seules bijections quadratiques ; le résultat sans restriction de degré n'est que conjecturé, et pour les dimensions supérieures, on utilise le polynôme : $P(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \binom{X_1 + X_2 + 1}{2} + \dots + \binom{X_1 + \dots + X_n + n - 1}{n}$.

## Calculs algébriques

- Par récurrence simple sur $n$, on obtient : $\forall k \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < k^n$.
- $\sum_{k=p}^{n} a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}$ (en haut, « premier terme moins premier terme négligé »).
- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k}$.
- L'identité de Vandermonde résulte d'une preuve combinatoire immédiate : $\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.
- *(Formule d'inversion de Pascal)* La transformation binomiale est « involutive ». Ceci s'écrit, pour des nombres $a_0, \dots, a_n$ :

$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left( \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \right).$$

- *(Nombres de Catalan)* Les nombres de Catalan sont donnés par la relation de récurrence forte : $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ et l'on en déduit : $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (il est donc pair). Ils dénombrent les **mots de Dyck**, les parenthésages en milieu non associatif, les triangulations du polygone, les chemins sous-diagonaux monotones dans le carré. Pour montrer leur expression, on utilise leur série génératrice.
- On rappelle que pour des $(u_n)$ intégrables dont la série converge simplement vers une somme continue par morceaux, si $\sum \int |u_n|$ converge, alors la somme est intégrable et on peut écrire l'interversion.
- Le **déterminant de Vandermonde** $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ vaut $\prod_{0 \leq j < i \leq n}(x_i - x_j)$.
- On montre : l'**inégalité de Young** ainsi que l'**inégalité arithmético-géométrique** par concavité de $\ln$, l'**inégalité de Hölder** par convexité de la fonction puissance

(en prenant pour poids les $b_i^q$ et pour vecteurs les $a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$) et l'**inégalité de Minkowski** s'en déduit : celle-ci établit que les normes $p$ sont bien des normes.

- ❖ L'ensemble des **racines d'un complexe** est le produit de l'une d'elles par le groupe des racines de l'unité.
- ❖ Pour $f$ à valeurs réelles, $\frac{|f|+f}{2}$ et $\frac{|f|-f}{2}$ sont ses **parties positive et négative** (elles sont uniques, positives et leur différence fait la fonction).
- ❖ Si $f$ est continue et $f(a+b-t)=f(t)$, alors $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
- ❖ Pour intégrer une fraction rationnelle, lorsqu'on a un dénominateur de degré 2 irréductible, on peut chercher de la forme de l'arc tangente d'une fonction affine.
- ❖ Les **règles de Bioche** permettent d'intégrer les fractions en fonctions trigonométriques circulaires. Si, en comptant le terme différentiel, l'expression est invariante de $x$ en $-x$, on choisit cos ; de $x$ en $\pi - x$, sin et de $x$ en $x+\pi$, tan.
- ❖ En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x$ convenant, on a les **formules de l'arc moitié** :

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

### ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS ET POLYNÔMES

- ❖ Le terme général de la **suite de Fibonacci** s'écrit $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$, où le premier est le **nombre d'or** et la seconde racine son conjugué.
- ❖ Un entier naturel non premier admet un diviseur strict inférieur à sa racine carrée.
- ❖ Le **théorème chinois** est une équivalence. Pour la réciproque, le plus petit multiple commun des cardinaux est seulement un zéro du groupe produit, car la formule du complément l'infériorise strictement au produit des cardinaux.
- ❖ *(Formule de Legendre)* $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n - somme\_des\_chiffres\_en\_base\_p\_de(n)}{p-1}$.
- ❖ $X^4+1$ est bien réductible dans $\mathbb{R}$.
- ❖ Les **polynômes divisibles par leur dérivé** dans $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $a(X-b)^n$.
- ❖ Étude des **suites de polynômes orthogonaux** (expression des degré, racines, etc.) : polynômes de Legendre, polynômes de Tchebychev, polynômes d'Hermite, polynômes de Laguerre, polynômes de Jacobi, etc. Les polynômes de Lagrange ne sont pas orthogonaux !

### ALGÈBRE GÉNÉRALE

- ❖ La puissance d'un **nombre algébrique** est algébrique. En effet, un complexe est algébrique si et seulement s'il est valeur propre d'une matrice de $M(Q)$.
- ❖ Le produit de groupes cycliques est cyclique, si et seulement si, leurs ordres sont **premiers entre eux**.
- ❖ L'ordre d'un élément d'un produit égale le **plus petit commun multiple** des ordres des composantes. Pour deux sous-groupes de $\mathbb{Z}$, celui-ci est le générateur naturel minimal de leur intersection.
- ❖ Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique (d'après le théorème de Lagrange).
- ❖ Pour tout élément $a$ d'un groupe qui soit d'ordre $n$, l'ordre de $a^k$ est $\frac{n}{k \wedge n}$.

- *(Théorème de Lagrange)* L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce sous-groupe. C'est la traduction de ce que les classes à gauche modulo ce sous-groupe lui sont toutes équipotentes.
- L'image d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un anneau.
- Les **sous-groupes additifs de** $\mathbb{Z}$ sont monogènes.
- Tout anneau intègre fini est un corps. Toute algèbre intègre **de dimension finie** est un corps gauche.
- Tout morphisme de corps est injectif.

### Algèbre linéaire, algèbre bilinéaire

- L'ensemble des endomorphismes stabilisant un sous-espace donné est une **sous-algèbre**.
- Si $p$ est un projecteur, $id - p$ également et $2p - id$ est une symétrie.
- Si $s$ est une symétrie, on en déduit que $\frac{1}{2}(id \pm s)$ sont deux projecteurs.
- Une forme multilinéaire est alternée, si et seulement si, elle est antisymétrique.
- Si $G$ est un sous-groupe fini de $GL(E)$, $\dim(E) < \infty$,
$$\dim\left(\bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}\,(g - id)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g).$$
- Soient $f, g$ deux morphismes partant d'une dimension finie. Alors le rang vérifie les inégalités triangulaires. Si maintenant tout est de dimension finie, on a l'**inégalité de Sylvester** $rg(f) + rg(g) - \dim(E) \leq rg(f \circ g)$. De plus, $rg(f \circ g)$ est inférieur aux rangs de $f$ et de $g$ toujours.
- Le **théorème des noyaux itérés** définit l'indice d'un endomorphisme.
- La symétrie en dimension finie parallèlement à $G$ a pour déterminant $(-1)^{\dim(G)}$.
- Les identités de **polarisation** permettent d'extraire un produit scalaire d'une norme si elle est euclidienne.
- La distance d'un vecteur $x$ à un hyperplan de normale $n$ se calcule tout simplement : c'est $\frac{x.n}{||n||}$ (comme dans le plan !).
- L'**égalité de Parseval-Bessel** qui prolonge l'inégalité de Bessel du cas fini $\sum_{k=0}^{+\infty}(e_k|x)^2 = \|x\|^2$ est vérifiée si et seulement si $x$ est adhérent au sous-espace qu'engendre la suite orthonormale $(e_k)$. Ainsi, si elle est totale, il y a égalité.
- La quantité $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il permet d'introduire les séries de Fourier : sachant que la famille des fonctions exponentielles est libre d'après le cours d'algèbre linéaire, l'égalité de Parseval permet d'extraire les coefficients, ce que l'on a demandé à l'écrit des Mines en physique en 2020.
- Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique. De même pour les symétries. Une projection $p$ est orthogonale, si et seulement si $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x$ dans l'espace. (Pour le montrer, faire appel à ses amis Cauchy et Schwarz.)
- Une **réflexion** est une symétrie par rapport à un hyperplan. D'après ce qui précède, aucune réflexion n'est dans le groupe spécial linéaire.
- Si $(e_i)$ est une base, on fait correspondre une unique **base duale**, base du dual, en imposant la condition pour tous $i, j$ que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

## Matrices

- L'ensemble des matrices diagonales forme une sous-algèbre.
- Le produit de matrices symétriques est symétrique en seul cas de commutation.
- *(Formule de multiplication des matrices élémentaires)* $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
- *(Théorème général du changement de base)*
$$Mat_{e',f'}(u) = \left(P_f^{f'}\right)^{-1} \times Mat_{e,f}(u) \times P_e^{e'}.$$
- Les puissances d'une matrice s'obtiennent systématiquement par **division euclidienne** dès que l'on possède un polynôme quelconque de l'idéal annulateur.
- Des matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables.
- Pour toutes matrices, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Une famille d'endomorphismes est **simultanément diagonalisable** si et seulement s'ils commutent deux à deux.
- Un endomorphisme est **nilpotent** si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre zéro.
- *(Matrices compagnons)* Un polynôme unitaire avec les notations habituelles est caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.
- *(Décomposition QR)* Toute matrice inversible se décompose comme le produit d'une orthogonale par une triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $> 0$ : les inverses des normes du vecteur colonne correspondant dans la première. C'est simplement l'algorithme d'ortho-normalisation de **Gram-Schmidt** ; le théorème sans la dernière hypothèse est encore vrai pour une matrice quelconque par densité. C'est similaire dans ce qui suit.
- *(Lemme de la racine carrée, décomposition polaire)* Pour tout endomorphisme positif d'un espace euclidien, il existe un endomorphisme symétrique, unique si on lui impose un spectre positif, dont il est le carré. On en déduit que toute matrice inversible s'exprime comme le produit d'une orthogonale par une symétrique à spectre positif, et que cette décomposition est unique.
- Si l'on a une base orthonormale, une autre base est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale.
- Une matrice réelle $S$ est **(définie) positive** si et seulement si elle est symétrique et que pour tout vecteur colonne non nul, ${}^tXSX$ est (strictement) positive. Caractérisation : une matrice est (définie) positive si et seulement si elle est symétrique et que son spectre réel est (strictement) positif.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
- Par fermeture, l'**exponentielle d'une matrice** est polynomiale, ce polynôme dépendant de la matrice. Cependant, le coefficient de $X^n$ n'est pas nécessairement identifiable au développement en série entière (et non !).

## NOMBRES RÉELS

- ❖ $\mathbb{R}$ est **archimédien** : pour tout réel $x$, pour tout réel $y > 0$, il existe un entier $n$ tel que $ny > x$.
- ❖ Le **théorème de Bolzano-Weierstrass** énonce que les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts ; c'est à partir de cette version réelle et de son homologue complexe que l'on montre que les compacts sont en dimension finie exactement les fermés bornés, et non l'inverse.
- ❖ La suite de décimaux $\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right)$ tendant vers $x$ établit la **densité de** $\mathbb{D}$. A fortiori, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ; par suite, ces deux ensembles ne sont ni ouverts ni fermés.

## ANALYSE RÉELLE

- ❖ *(Démonstration des résultats de **croissances comparées**)* Pour montrer que $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0, on majore $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Les puissances s'obtiennent en exhibant des constantes telles que $\frac{\ln(x)^b}{x^a} = k\left(\frac{\ln(x^c)}{x^c}\right)^d$ . L'exponentielle s'en déduit aisément.
- ❖ La réciproque d'une bijection convexe croissante est concave ; celle d'une bijection convexe décroissante est convexe.
- ❖ *(Théorème du point fixe de Banach-Picard)* Toute suite définie par une itératrice contractante d'un intervalle dans lui-même converge, s'il en est, vers son point fixe. En effet, il en existe au plus un en appliquant la contractance à la différence de deux points fixes, et existe toujours si l'intervalle est fermé, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, modulo des limites, à $f - id$ (on rappelle qu'il faut que l'itératrice stabilise l'intervalle de définition pour définir une suite de telle manière). Enfin, la contractance écrite avec $u_n$ et le point fixe donne par récurrence immédiate une majoration par quelque chose qui tend vers 0.
- ❖ L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est une forme définie.
- ❖ $x \mapsto x + \sin(2\pi x)$ est un exemple de fonction croissante sur $\mathbb{N}$ mais non monotone (de quoi se rattraper avec brio en cas de gros lapsus à l'oral).
- ❖ $(n(1 + (-1)^n))$ est une suite pas convergente n'ayant qu'une valeur d'adhérence.
- ❖ *(Théorème des accroissements finis généralisé)* Si $f$ et $g$ vérifient les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a, b]$, il existe un point intérieur $c$ tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.
- ❖ *(Règle de l'Hospital)* De plus, si $f(a) = g(a) = 0$ et $l = \lim\limits_a \frac{f'}{g'}$ existe, $\lim\limits_a \frac{f}{g} = l$.
- ❖ Les **intégrales de Wallis** de la puissance du sinus entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont reliées par récurrence : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On en déduit : $I_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p} p\,!^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} p\,!^2}{(2p+1)!}$. Puisque cette suite d'intégrales décroit et que $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, on peut encadrer son carré et obtenir pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- ❖ On en déduit la **formule de Stirling**, en posant $v_n = \frac{e^n}{n^n} n!$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$. Il faut vérifier que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire $\ln w_{n+1} - \ln w_n$.

- L'**intégrale de Dirichlet** vaut $\frac{\pi}{2}$. Le lemme de Lebesgue en partie imaginaire appliqué à $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, $C^1$, fait apparaître l'intégrale constante $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t$. Il faut bien sûr avoir déjà montré la convergence du sinus cardinal : pour la semi-convergente, non nécessaire, on étudie l'intégrale entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$.
- La valeur de l'**intégrale de Gauss** ($\sqrt{\pi}$ sur la droite réelle) s'obtient en remarquant que les fonctions $x \mapsto -\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ ont des dérivées égales, en posant $u = tx$.
- *(Théorème de Heine)* Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue. On rappelle que le caractère lipschitzien entraîne l'uniforme continuité, qui entraîne la continuité, sur n'importe quel intervalle.
- *(Théorème de Darboux)* Une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, autrement dit elle n'a pas de discontinuité de deuxième espèce. Pour le démontrer, on fait appel à la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$, $c$ fixé entre…
- Le **théorème d'approximation de Weierstrass** se démontre facilement à l'aide des **polynômes de Bernstein** qui s'expriment $B_k^n = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$. Le polynôme associé à $f$ s'écrit $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n$ et CVU vers $f$ pour $f$ continue sur $[0,1]$. On en fait une démonstration probabiliste constructive.

## Séries numériques

- Les convergences usuelles sont les **intégrales de Bertrand** de la forme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ qui convergent entre 2 et l'infini si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1\ et\ \beta > 1)$ et entre 0 et ½ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1\ et\ \beta > 1)$. Les convergences sont alors absolues, de même pour les séries associées. Les **intégrales trigonométriques**, c'est-à-dire Riemann avec un sinus ou cosinus au numérateur, à partir de 1 : divergent pour $\alpha \leq 0$, convergent absolument pour $\alpha > 1$ et sont semi-convergentes sur $]0,1]$. (Les séries associées sont dites « de Fresnel ».)
- Toute suite convergeant dans la droite réelle achevée est convergente au sens de Cesàro, de même limite. Le théorème est vrai en fait pour la quantité $\frac{\sum a_n u_n}{\sum a_n}$ où $\sum a_n$ est divergente.
- La **transformation d'Abel** est l'analogue parfait de l'intégration par parties. On en déduit le **critère** d'Abel, qui généralise les séries alternées. En particulier, si $a_n$, positive, décroît vers 0, $\sum a_n e^{in\theta}$ converge absolument, car $\sum e^{in\theta}$ est bornée.
- *(Règle de Raabe-Duhamel)* Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(t.g.de\ CV)$, alors $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ où $A > 0$. Il s'agit d'étudier le logarithme de la suite.
- L'**identité d'Euler** stipule que $\zeta(\alpha) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^\alpha}}$. Souvent, on en fait une démonstration probabiliste.

## Topologie

- Une norme composée à droite par une application linéaire injective est encore une norme.

- Une **application linéaire** est **continue** si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité, ou encore si et seulement si l'image réciproque de la sphère unité est fermée.
- Une **forme linéaire est continue** si et seulement si son noyau est fermé.
- On définit la **norme subordonnée** sur l'espace des applications linéaires continues : $|||u||| = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf_{\forall x \in E\ \|u(x)\| \leq k\|x\|} k$. Elle dépend donc à la fois de la norme de départ et de celle d'arrivée. Dans ce cas, on a d'une part $\|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$ et d'autre part $|||u \circ v||| \leq |||u|||\ |||v|||$.
- L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points qui lui sont à une distance nulle.
- La **frontière** d'une partie $A$ égale celle de $\complement_E A$ ; c'est même $\bar{A} \cap \overline{\complement_E A}$. Enfin, un espace est toujours partitionné par l'intérieur de cette partie, sa frontière, et le complémentaire de son adhérence $\complement_E \bar{A}$.
- L'intérieur d'un **produit** est le produit des intérieurs, de même pour l'adhérence.
- L'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image de l'espace.
- Un **hyperplan** est fermé ou dense.
- Une **bijection continue sur un compact** est un **homéomorphisme**. Pour le montrer, on utilise la caractérisation par images réciproques de fermés.
- La **distance à un compact** ou entre deux compacts est toujours atteinte. De même, la **distance entre un compact et un fermé** est atteinte.
- Le **théorème de compacts emboîtés** se montre aisément ; le sens ensembliste s'établit en remarquant que Bolzano-Weierstrass donne une sous-suite à valeurs dans le premier compact qui converge. Pour tout terme de la suite emboîtée, la sous-suite est à valeurs dans ce terme, qui est fermé.

## GÉOMÉTRIE

- Le **théorème d'Al-Kashi** établit que, dans tout triangle, on a à l'instar du triangle rectangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc\cos(\widehat{b,c})$.
- *(Droites remarquables du triangle)* Dans un triangle, les médiatrices concourent au centre du cercle circonscrit $O$ ; les médianes concourent à l'isobarycentre $G$ ; les hauteurs concourent en l'orthocentre $H$ ; les bissectrices au centre du cercle inscrit.
- *(Théorème de Thalès allemand)* Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Réciproquement, un triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont l'hypoténuse est le diamètre.
- L'**angle entre deux tangentes** en des points d'un cercle égale l'ouverture entre ces deux points, ce qu'on utilise en physique (cabestan, ressort circulaire, etc.)

## COMBINATOIRE

- *(Principe des tiroirs)* Si $n$ chaussettes occupent $m < n$ tiroirs, alors au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes. On en déduit que deux personnes en Australie ont le même nombre de cheveux.
- *(Lemme des bergers)* S'il existe une surjection $f : X \to Y$ telle que pour tout $y \in Y$, card $(f^{-1}(\{y\}) = k$, alors $\mathrm{card}(X) = k \times \mathrm{card}(Y)$.

- Le nombre de **dérangements** du groupe symétrique (permutations sans point fixe) vérifie $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$. Aussi : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- En **informatique**, il suffit de connaître, avec les **complexités** et **erreurs** correspondantes : les algorithmes de **tri** (sélection, insertion, bulles, rapide, fusion, cocktail) et leurs propriétés, les **recherches de zéros** (balayage, dichotomie, tangentes, sécantes), le **calcul d'intégrales** (rectangles, trapèzes, point médian, Simpson, Romberg, Monte-Carlo) et les **résolutions d'équations différentielles** (Euler, Runge-Kutta). Il faut aussi savoir rechercher en langage SQL.

## Théorie des probabilités

- Contrairement aux autres domaines des mathématiques, l'**indépendance mutuelle** implique l'indépendance deux à deux d'événements, mais la réciproque est fausse.
- Les théorèmes de **limite monotone** sont vrais dès qu'il existe un arrangement croissant de la famille dénombrable d'événements. En effet, si $\sigma$ est une application injective et $(u_n)$ converge, $(u_{\sigma(n)})$ converge vers la même limite.
- *(Lemmes de Borel-Cantelli)* Soit $(A_n)$ une suite d'événements. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est négligeable. Si elle diverge et que les événements sont mutuellement indépendants, alors cet événement est presque sûr.
- La **loi hypergéométrique** converge vers une loi binomiale de mêmes paramètres lorsque la taille de l'urne devient infinie. Elle a en effet la même espérance, et par ailleurs, sa variance est $np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$.
- Les lois géométrique et exponentielle (celle-ci pour les probabilités continues) sont **sans mémoire**, à savoir que $\mathbb{P}(X > k + l \,|X > k) = \mathbb{P}(X > l)$ pour tout $l$ positif, si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}$.
- Deux variables aléatoires non **corrélées**, c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, si $Z$ suit une **loi de Rademacher** et $X$ est indépendante de $Z$, alors $X$ et $ZX$ conviennent. On peut déterminer le coefficient de corrélation $\frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

## Mécanique, systémique

- L'accélération en cylindrique d'un mouvement circulaire s'écrit simplement :
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}.$$
La comparaison de cette expression à la loi de la quantité de mouvement donne la troisième loi de Kepler, ainsi que la vitesse : $\sqrt{\frac{Gm_S}{r}}$. On en déduit les énergies.
- *(Loi des aires)* La vitesse aréolaire $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ est $\frac{C}{2}$ où $C = \frac{L}{m}$. Avec ces notations, l'**énergie potentielle effective** s'écrit $\mathrm{Ep}_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \mathrm{Ep} = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathrm{Ep}$.
- On appelle **première vitesse cosmique** celle du satellite géostationnaire : elle vaut $7{,}9\,\mathrm{km.s^{-1}}$. La **deuxième vitesse cosmique** est celle de l'état de diffusion (énergie mécanique positive) pour l'attraction gravitationnelle : elle vaut $11{,}2\,\mathrm{km.s^{-1}}$. La

**troisième vitesse cosmique**, de même, remplace l'attraction de la Terre par celle du soleil : elle vaut 42,1 $\mathrm{km.s^{-1}}$. On en déduit les **rayons de Schwarzschild**.

- L'**association de deux ressorts** en série est $\left(\frac{kk'}{k+k'}; l+l'\right)$ ; leur association en parallèle est $\left(k+k', \frac{kl+k'l'}{k+k'}\right)$.
- On a l'égalité différentielle : $\mathrm{d}Ep = -\delta W$.
- La puissance d'une force subie par un solide est $M_\Delta(.)\omega$.
- Le **moment cinétique** est $J_\Delta \dot{\theta}$ où le **moment d'inertie** est $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$.
- *(Théorème de König-Huygens)* Soit un système de masse $M$, de centre de masse $G$ et $A$ un point à la distance $d$ de $G$. Alors les moments d'inertie se transportent :
$$J_A = J_G + Md^2.$$
- Le **moment dipolaire** est par définition $\vec{P} = q\overrightarrow{NP}$. L'approximation correspondante est celle des rayons significativement supérieurs à $NP$. Un champ extérieur dans lequel il est plongé induit un moment $\overrightarrow{M_O} = \vec{P} \wedge \overrightarrow{E_{ext}}$. La résultante des forces subies s'exprime $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}})$, d'où $\mathrm{Ep} = -\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}}$. De façon tout à fait analogue, les résultats se transposent à la magnétostatique, en posant le moment $\vec{M} = i\vec{S}$.
- La **force de Laplace** en induction s'exprime $\vec{f_L} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$.
- À une onde, on associe une **vitesse de phase** $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ et une **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$. Leur produit est constamment égale au carré de la vitesse de la lumière dans le cas des ondes électromagnétiques.
- *(Effet Doppler)* $f_{reçue} = f_{émise} \frac{c - v_{récepteur}}{c - v_{émetteur}}$.
- La **valeur efficace** d'un signal périodique est la racine carrée de la valeur moyenne de son carré.
- La **bande passante** rassemble les pulsations dont le gain est au-dessus de **3 dB**, c'est-à-dire où la fonction de transfert est plus grande que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Au premier ordre, **pulsations de coupure** et **de cassure** sont égales.

ÉLECTROMAGNÉTISME

- Si son rotationnel est identiquement nul, un **champ dérive d'un potentiel**.
- En régime statique, l'**équation de Poisson** s'écrit : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.
- La **densité volumique de force électromagnétique** est $\frac{\mathrm{d}\vec{f_L}}{\mathrm{d}\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ et la **puissance volumique** $\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}.\vec{E}$.
- Un plan infini génère de part et d'autre un champ électrique $\frac{\pm\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$.
- *(Capacité d'un condensateur)* $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, en Gaussifiant le résultat $E = \frac{U}{d}$. On rappelle que $q = Cu$.
- *(Résultats magnétostatiques fondamentaux)* Le champ magnétique créé par un **fil rectiligne** est $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$ ; par un **fil épais**, $\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\overrightarrow{u_\theta} & \text{pour r > R} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j R}{2}\overrightarrow{u_\theta} & \text{sinon} \end{cases}$, par un

**solénoïde** $\vec{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{u_z}$. L'**inductance propre d'une bobine**, vérifiant $\phi = L_P i$, s'écrit $L_P = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d}$.

- Le **vecteur de Poynting** d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement s'exprime en moyenne $< \vec{\Pi} > = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \overrightarrow{u_x}$. L'**équation locale** de Poynting exprime que les pertes d'énergie électro-magnétique sont dues à la fois à la dissipation par effet Joule et au rayonnement électromagnétique.
- Dans le **modèle de Drude**, la conductivité électrique est de $\frac{n_0 q^2 \tau}{m}$ où $\tau$ est le coefficient de frottement fluide linéaire. Cette loi d'Ohm locale est identique dans le modèle collisionnel qui fait appel aux probabilités continues.
- *(Effet Hall)* Un courant électrique traversant un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à ce dernier, de valeur $\frac{iB}{n_0 e \varepsilon}$ où $\varepsilon$ désigne l'épaisseur du matériau.
- Le **plasma** est un milieu composé d'électrons et d'ions positifs, localement neutre, sans frottements et à chocs rares, non relativiste et peu dense. La **conductivité complexe** du plasma est $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}$. La **relation de dispersion** s'écrit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P{}^2}{c_0{}^2}$ en posant $\omega_P^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ le carré de la pulsation de coupure.
- Dans un métal conducteur ohmique, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$. L'équation de dispersion s'écrit alors $\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma \omega$. Le conducteur ohmique en est un, de conductivité infinie. Les **relations de passage** s'y écrivent alors $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$ et $\vec{B}(M) = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \vec{n}$, $M$ proche.
- En physique quantique, l'**équation de Schrödinger** s'écrit : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V.\psi$.
- *(Théorème de Millman)* Le potentiel d'un nœud égale le barycentre des potentiels des nœuds voisins pondérés par les admittances qui les séparent.

## Optique physique et géométrique

- *(Prise en compte du retard)* On a $\underline{a}(P,t) = \underline{a}(M,t) e^{-j\frac{2\pi [MP]}{\lambda}}$.
- La **loi de Malus** à travers un polariseur d'angle $\alpha$ s'écrit $I' = I\cos^2(\alpha)$.
- La formule de Fresnel $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$ s'appliquent si les deux ondes proviennent de la même source, sont de même pulsation et si elles sont quasi synchrones, c'est-à-dire que le retard entre elles est inférieur au temps de cohérence, longueur temporelle du train d'ondes.
- Le **contraste** est leur rapport des moyennes géométrique et arithmétique. Il est donc, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, toujours inférieur à 1.
- La différence de marche sur l'écran après les trous d'Young vaut $\delta = \frac{ya}{D}$.
- La compensatrice de l'**interféromètre de Michelson** permet l'absence de différence de marche supplémentaire induite par la séparatrice.
- La **fonction de réseau** s'écrit $I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ où $\phi$ est le déphasage consécutif.
- *(Formule fondamentale des réseaux)* Un réseau par transmission éclairé sous incidence $i$ fait apparaître des pics aux angles tels que $a(\sin i - \sin\theta) = k\lambda$.

## Thermodynamique, chimie

- On peut exprimer selon la **fonction de partition** l'énergie moyenne $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ et l'écart quadratique énergétique moyenne $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$.
- Le **théorème d'équirépartition de l'énergie** annonce que l'énergie moyenne d'un système à l'équilibre vaut $\frac{1}{2}k_B T$ pour chacun de ses termes quadratiques indépendants.
- *(Entropie d'une phase condensée idéale)* $\mathrm{S} = C\ln(\mathrm{T}) + \mathrm{cste}$, où $C$ est la capacité thermique unique du système.
- Le **second principe de la thermodynamique** s'exprime, selon Clausius, de la manière suivante : « il n'existe pas de moteur monotherme ».
- Si toute **adiabatique réversible** est **isentropique**, la réciproque est fausse ; une transformation isobare pour un système à paroi mobile est forcément **monobare** ; une transformation isotherme pour un système non calorifugé est **monotherme**.
- La variation d'énergie d'une isochore est $\Delta U = Q$, la variation d'enthalpie d'une isobare ou monobare est $\Delta H = Q$.
- La **variation d'entropie d'une transformation d'un gaz parfait** s'obtient en créant un chemin réversible pour les fonctions d'état : $\mathrm{d}S = C_\mathrm{V}\frac{\mathrm{d}T}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V}$.
- Penser aux **lois de Joule** en présence d'un gaz parfait.
- *(Théorème des moments)* $x_{vap} = \frac{v-v_l}{v_g-v_l} = \frac{h-h_l}{\Delta_{vap}h} = \frac{s-s_l}{s_g-s_l} = T\frac{s-s_l}{\Delta_{vap}h}$.
- La résistance thermique d'un cylindre vaut $\frac{L}{\gamma S}$.
- *(Loi de Newton pour la convection)* $\phi = hS(T_p - T_\infty)$.