Feuille d'exercices 1
Calcul

Révisions du collège

☆☆☆☆☆ **Exercice 1** (Tables de multiplication). Donner, par calcul mental : 3×7 ; 8×6 ; 7×8 ; 8×9 ; 13×6 ; 16×20 ; 10000×1000.

☆☆☆☆☆ **Exercice 2** (Pourcentages).

1. Une grandeur Y égale aux $\frac{4}{5}$ de X. Que représente X en pourcentage de Y ? Calculer t le pourcentage d'évolution de Y à X et le coefficient multiplicateur associé au taux t.
2. Un blouson soldé bénéficie d'une réduction de 40%. Son prix de départ est de 94€. Le même blouson subit dans un deuxième magasin une baise de 60%, mais se rendant compte qu'il vend à perte, le commerçant augmente son nouveau prix de 20%. Où est-il finalement le plus avantageux d'acheter le blouson ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 3** (Arithmétique).

1. Le nombre 17 est-il premier ? Et le nombre 75789410 ?
2. Rappeler l'énoncé du théorème fondamental de l'arithmétique.
3. Effectuer la division euclidienne de 6894 par 299.
4. Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres 18 et 45. En déduire leur pgcd et leur ppcm. Quelle est la décomposition en facteurs premiers de 18×45 ?
5. Les entiers 12 et 135 sont-ils premiers entre eux ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 4** (Qui dit triangle...). Une voiture descend quinze kilomètres sur une pente rectiligne de 3 degrés. Quelle distance a-t-elle parcouru sur la carte ? Quelle est le pourcentage de la pente ? On arrondira au dixième près à chaque étape du calcul.

☆☆☆☆☆ **Exercice 5** (Un peu de logique). Dans un monde différent du nôtre, la météo est toujours la même d'une semaine sur l'autre. Par exemple, s'il pleut le mardi 16, alors il pleut également tous les autres mardis.
Sidonie possède un parapluie et suit le principe, très bien pensé, suivant :

P : "S'il pleut, Sidonie prend son parapluie".

Il pleut les mardis, les jeudis et les samedis. Les autres jours, il ne pleut pas. Seulement, Sidonie prend quand même son parapluie le dimanche, parce qu'il va bien avec son chapeau.

1. Quelle est la contraposée de la proposition P ?

2. Démontrer que la contraposée de P est vraie.

3. Quelle est la réciproque de la proposition P ?

4. Est-elle vraie ou fausse ?

5. Quelle est la *contra-réciproque* de la proposition P (la contraréciproque est définie comme la contraposée de la réciproque) ?

6. La réciproque d'une proposition vraie est-elle toujours vraie ?

7. La contraposée d'une proposition vraie est-elle toujours vraie ?

8. Que dire de la réciproque d'une proposition fausse ?

9. Que dire de la contraposée d'une proposition fausse ?

10. Donner un exemple de proposition (ou de théorème) vraie dont la réciproque est également vraie.

Exercice 6 (Jour de tonte). Aujourd'hui, à la ferme, on tond les 150 moutons du propriétaire. Parmi eux, 140 sont des brebis (moutons femelles). De plus, sur les 150 moutons, on sait que 25 ont la tête noire, tandis que les autres ont la tête blanche.
Le soir, tous les moutons sont tondus et il faut les faire rentrer un à un, pris au hasard, dans la bergerie. Le tondeur, qui a vu toutes les bêtes dans la journée, fait la réflexion suivante : "Seulement 23 brebis ont la tête noire". On fait entrer un premier mouton dans la bergerie.

1. Calculer la probabilité que ce mouton soit un bélier (*i.e.* un mouton mâle).

2. Calculer la probabilité que ce mouton ait la tête noire ou soit un bélier.

3. Calculer la probabilité que ce mouton ait la tête blanche et soit un bélier.

Ceci fait, on fait entrer un deuxième mouton dans la bergerie (toujours au hasard).

4. Calculer la probabilité que le premier mouton soit une brebis, et que le second mouton soit un bélier.

5. Calculer la probabilité que ces deux moutons soient une brebis et un bélier. Est-elle plus grande ou plus petite que la précédente ?

Exercice 7 (Paradoxe de Rogers). Un jour, pendant les vacances d'été, Roger décide de parcourir un trajet reliant Limoges à Lubersac à pied et à monocycle, en faisant quelques détours. Lorsqu'il est à pied, il garde son monocycle sous le bras. Le trajet proposé par Mappy est divisé en portions sur lesquelles Roger se déplace à vitesse constante.

Chacune des portions mesure exactement 15 kilomètres de long. Tout le long de la portion A, Roger se déplace à monocycle. Sur la portion B, il se déplace ensuite à pied, puis, le long de la portion C, il se déplace à monocycle ; sur la portion D, à pied, etc. Voilà les temps de parcours de Roger sur chacune des portions avec le véhicule correspondant :

A	1 heure 30
B	30 min (Roger est en forme)
C	55 minutes
D	1 heure
E	1 h 10
F	4 heures (Roger est un peu fatigué)

1. Calculer au dixième près la vitesse moyenne de Roger sur chacune des portions.

2. En déduire la vitesse moyenne parcourue par Roger à monocycle, notée v_m, définie comme la moyenne (simple) des vitesses de Roger sur les trois portions qu'il parcourt à monocycle, et la vitesse moyenne parcourue par Roger à pied définie de la même manière, notée v_p.

Le dimanche suivant, Roger veut refaire le même trajet, mais lorsqu'il arrive à la portion D, il décide de la parcourir à monocycle afin d'améliorer ses performances. Cependant, manque de chance, il refait exactement les mêmes temps sur chaque portion, y compris la portion D.

3. Calculer les nouvelles vitesse moyenne à monocycle et vitesse moyenne à pied, notées respectivement v'_m et v'_p.

4. Expliquer comment cette situation illustre l'énoncé suivant : "lorsqu'on déplace un élément d'un ensemble vers un autre, il est possible que les moyennes des *deux* ensembles augmentent".

☆☆☆☆☆ **Exercice 8** (Les Chinois sont tous forts en maths)**.** Selon une idée commune, les Chinois seraient tous très doués en mathématiques. Posons-nous la question : on se demande s'il est possible que l'ensemble des Asiatiques de la planète soient au-dessus de la moyenne générale en mathématiques de toute l'humanité. On fait les approximations suivantes : 60% des 7 milliards d'humains sont Asiatiques. On admet ceci : le niveau général en maths de tous les Asiatiques est de 16 (note sur 20), tandis que le niveau général en maths de tous les autres êtres humains est de 6.

Population considérée	Asiatiques	Non-Asiatiques
Niveau en maths	16	6
Niveau en anglais	10	14
Niveau en biologie	14	8

1. Combien y a-t-il de données dans la série statistique considérée ici ?

2. Quel est le pourcentage d'humains non asiatiques ? Calculer l'effectif de chaque donnée.

3. Rappeler la définition de la médiane.

4. Quelle est la médiane de cette série ?

5. Quelle est la moyenne générale en mathématiques de tous les êtres humains ? On admettra que c'est la moyenne de la série statistique considérée.

6. La moyenne fait-elle partie des valeurs de la série ?
7. La médiane et la moyenne de cette série sont-elles égales ?
8. Répondre au problème posé.

Révisions de Seconde

Exercice 9 (Juste pour être sûr). Énoncer et redémontrer les trois identités remarquables de développement/factorisation.

Exercice 10. Factoriser : $4^n - 1$ où n est un entier naturel.

Exercice 11 (Éliminer une racine au dénominateur : méthode de l'expression conjuguée). Soient x,y deux rationnels quelconques. Après avoir précisé lorsqu'elle est définie, simplifier l'expression : $\frac{1}{x+\sqrt{2}y}$.

Exercice 12. On considère $B_n = \frac{(9^{n+1}+9^n)^2}{(3^{2n+1}-3^{2n})^2}$, $n \in N$. Calculer les termes de cette suite.

Exercice 13 (Calcul numérique). Calculer à la main :

1. $a = 10 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^5} + \frac{4}{10^7} + \frac{5}{10^9}$
2. $b = \frac{1}{24} - \frac{5}{12} - 2\left(\frac{7}{21} + 3\frac{2}{9} - \frac{1}{3}\right)$
3. $c = (150^2 - 50^2)^2$
4. $d = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{75}+9}{3\sqrt{3}}$
5. $e = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{5}}}}$.

Exercice 14 (Simplification). Simplifier les expressions suivantes :

1. $(2x-1) \times \frac{-1}{2-x}$ où $x \in \mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$;
3. $(x^{200})^{300}$ où $x = -2$. Bonus : comparer $(x^{200})^{300}$ et $x^{200^{300}}$;
4. $(-a^{-1})^{-2}$ où $a \in \mathbb{R}^*$;
5. $\sqrt{\frac{(-a)^2}{(ab^{-2})^3}}$ où $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$;
6. $\frac{(ab)^{-3}}{a^3b^3}$ où $a,b \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 15 (Calcul littéral). On considère l'expression $A(x) = (3x+1)(x-2)+(x-2)(x-5)$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$, puis mettre $A(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   - $A(x) = 0$;
   - $A(x) = 4x^2 + 7$;
   - $A(x) = 2x + 8$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 16.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{-x+2}{3} - \frac{1-x}{2} = x - 1$;
2. $-2x^2 + 7x = 0$;
3. $(2x+1)^2 + 2x + 1 = 0$;
4. $\frac{2x+1}{x+3} = 1$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 17** (Résolution d'équation par analyse-synthèse). Déterminer les carrés dont la valeur de l'aire est égale à 2 moins la valeur de son côté.

☆☆☆☆☆ **Exercice 18** (Modélisation d'un problème). Dans un magasin, un gros oiseau coûte deux fois plus qu'un petit oiseau. Une cliente achète trois petits oiseaux et cinq gros oiseaux et paie deux cents euros plus cher que si elle avait acheté cinq petits oiseaux et trois gros oiseaux. Combien coûte chaque oiseau ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 19** (Équations de droite).

1. Donner une équation de la droite passant par les points (5,3) et (2, - 1).
2. Donner une équation de la droite perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OA}$, où $A = (-1,1)$ et O est l'origine du repère, et passant par le point (1,1).

☆☆☆☆☆ **Exercice 20** (Résolution d'inéquations). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-3x^2 + 6x - 3 \leqslant 0$;
2. $4x^2 \leqslant 1$;
3. $\begin{cases} 3 - 2x \geqslant -5 \\ 3x - 2 > -1 \end{cases}$;
4. $-\frac{1}{3} \leqslant 4 - 3x \leqslant \frac{1}{2}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 21** (Composée de transformations affines). Soient $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto cx + d$ deux fonctions affines où a,b,c,d sont des nombres réels. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par g de l'image par f de x. Est-elle forcément égale à l'image par f de l'image par g de x ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 22** (Géométrie sur le cercle). Soient $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un même cercle. Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 23** (Une identité vectorielle). Toutes les lettres capitales désignent des points du plan. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ et M un point hors de (AB). Soient C,D tels que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$.

1. Deviner la première question.
2. *(Échauffement)* Démontrer l'égalité suivante : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AIMC$.
4. Montrer que M est milieu de $[CD]$.
5. Montrer que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BM}$.

6. Soit E le symétrique de I quant à M. Traduire cette égalité de façon vectorielle (sans démonstration) et démontrer : $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IE}$.

★★★★☆ **Exercice 24** (Progression arithmétique). Un étang cylindrique étanche de 9000 mètres cubes et dix mètres de profondeur est rempli le premier janvier aux deux tiers. Sale époque, il pleut tous les jours, en continu, du 8 millimètres[1] par heure. Quel jour verra-t-on l'étang déborder ?

★★★★★ **Exercice 25** (Pour travailler l'informatique). On reprend le problème précédent mais on suppose que, tous les trois jours (y compris le premier janvier), la commune vient et pompe trois cent mille litres d'eau. Écrire un programme Python pour répondre à la question sous ces nouvelles hypothèses. Même exercice, en supposant qu'il ne pleut qu'une semaine sur deux, puis une semaine sur trois, etc. Quelle est la fréquence de pluie maximale de sorte que l'étang connaisse au moins un assèchement ?

[1] Cette unité correspond au litre d'eau par mètre cube.