

COURS DE MATHÉMATIQUES

---

TOME VI  
**TOPOLOGIE**

---

Mathématiques générales  
France ~ 2025  
*Écrit et réalisé par Louis Lascaud*



# Table des matières

<b>1 Espaces vectoriels normés</b>	<b>9</b>
1.1 Normes . . . . .	9
1.2 Limites . . . . .	9
1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	9
1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	10
1.3.2 Boules et hypercubes . . . . .	10
1.4 Applications continues . . . . .	11
1.4.1 Formes linéaires . . . . .	11
1.4.2 Projections scalaires . . . . .	12
1.4.3 Projections vectorielles . . . . .	12
1.5 Suites et séries de fonctions . . . . .	13
1.5.1 Convergence simple . . . . .	13
1.6 Convexité . . . . .	13
1.6.1 Jauge d'un convexe . . . . .	13
1.6.2 Convexes et applications . . . . .	15
1.6.3 Points extrémaux . . . . .	16
<b>2 Espaces métriques</b>	<b>19</b>
2.1 Distances . . . . .	19
2.1.1 Définition d'une distance . . . . .	19
2.1.2 Distance issue d'une norme . . . . .	20
2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties . . . . .	20
2.1.3.1 Définition . . . . .	20
2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie . . . . .	20
2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances . . . . .	24
2.1.4 Équivalence de distances . . . . .	27
2.2 Boules . . . . .	28
2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées . . . . .	28
2.2.2 Premières propriétés . . . . .	28
2.2.3 Propriétés géométriques . . . . .	28
2.3 Limites . . . . .	29

2.3.1	Limites de suites . . . . .	29
2.3.1.1	Sous-suites et valeurs d'adhérence . . . . .	30
2.3.1.1.1	Théorèmes de convergence grossière des suites . . . . .	30
2.4	Compacité . . . . .	33
2.4.1	Suites à valeurs dans un compact . . . . .	33
2.5	Complétude . . . . .	34
2.5.1	Suites de Cauchy . . . . .	34
2.5.2	Espaces complets . . . . .	34
2.5.3	Théorie de Baire dans le cas complet . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Topologie générale</b>	<b>39</b>
3.1	Définitions de base d'une topologie . . . . .	39
3.1.1	Ouverts et fermés . . . . .	39
3.1.2	Voisinages . . . . .	40
3.1.3	Comparaison de topologies . . . . .	41
3.1.3.1	Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble . . . . .	41
3.1.3.2	Topologies minimales et maximales . . . . .	41
3.1.4	Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité . . . . .	42
3.1.4.1	Réseaux topologiques . . . . .	42
3.1.4.2	Base d'ouverts . . . . .	42
3.1.4.3	Base de voisinages . . . . .	43
3.1.4.4	Axiomes de dénombrabilité . . . . .	44
3.1.4.5	Séparabilité . . . . .	44
3.1.5	Adhérence, intérieur, frontière . . . . .	45
3.1.5.1	Frontière ou bord . . . . .	45
3.1.5.2	Points limites, points d'accumulation, isolation . . . . .	45
3.1.5.3	Densité . . . . .	45
3.1.5.4	Adhérence et intérieur dans le produit . . . . .	45
3.1.5.5	Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence . . . . .	46
3.1.6	Applications continues . . . . .	47
3.1.6.1	Continuité globale . . . . .	47
3.1.6.2	Continuité en un point . . . . .	48
3.1.6.3	Homéomorphismes . . . . .	48
3.1.7	Irréductibilité d'un espace topologique . . . . .	49
3.2	Constructions de topologies . . . . .	51
3.2.1	Topologie engendrée . . . . .	51
3.2.2	Topologie initiale . . . . .	52
3.2.3	Topologie induite . . . . .	53
3.2.4	Topologie finale . . . . .	54
3.2.5	Topologie faible . . . . .	55

3.2.6	Topologie somme . . . . .	55
3.2.7	Topologie produit . . . . .	57
3.2.7.1	Cas fini . . . . .	57
3.2.7.2	Cas général . . . . .	58
3.2.7.3	Convergences . . . . .	59
3.2.8	Topologie quotient . . . . .	59
3.2.8.1	Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient . . . . .	60
3.2.8.2	Séparation des quotients . . . . .	62
3.2.8.3	Autres propriétés des quotients . . . . .	65
3.2.9	Quotient d'une topologie par une action de groupes . . . . .	65
3.3	Espaces topologiques classiques . . . . .	65
3.3.1	Peignes . . . . .	65
3.3.2	Boules, sphères . . . . .	65
3.3.3	Ruban de Möbius . . . . .	67
3.3.3.1	Variantes du ruban de Möbius . . . . .	69
3.3.4	Tore . . . . .	69
3.3.5	Bouteille de Klein . . . . .	70
3.3.6	Plans projectifs . . . . .	70
3.3.6.1	Droite projective réelle . . . . .	70
3.3.6.2	Plan projectif réel . . . . .	70
3.3.6.3	Sphère de Riemann . . . . .	70
3.3.6.4	$\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ . . . . .	70
3.3.6.5	Espaces projectifs généraux . . . . .	70
3.3.6.6	Sphère de Riemann . . . . .	74
3.3.7	Simplexes . . . . .	74
3.3.7.1	Simplexes standard . . . . .	75
3.3.7.2	Géométrie des simplexes . . . . .	77
3.3.7.3	Subdivisions barycentriques . . . . .	77
3.4	Constructions d'espaces topologiques . . . . .	77
3.4.1	Cylindres . . . . .	77
3.4.2	Cônes . . . . .	77
3.4.3	Suspensions, doubles cônes . . . . .	79
3.4.4	Écrasements . . . . .	80
3.4.5	Recollements, bouquets . . . . .	81
3.4.6	Joints . . . . .	85
3.5	Propriétés topologiques classiques . . . . .	86
3.5.1	Le caddie de contre-exemples . . . . .	86
3.5.1.1	Droite de Sorgenfrey . . . . .	86
3.5.1.2	Plan de Sorgenfrey . . . . .	86
3.5.1.3	Droite de Michael . . . . .	86

3.5.2	Séparation . . . . .	86
3.5.2.1	Autres axiomes de séparation . . . . .	88
3.5.2.1.1	Régularité complète . . . . .	88
3.5.3	Dénombrabilité . . . . .	88
3.5.4	Métrisabilité . . . . .	89
3.5.4.1	Produits d'espaces métrisables . . . . .	89
3.5.5	Compacité . . . . .	89
3.5.5.1	Compacts, quasi-compacts et applications continues . . . . .	90
3.5.5.2	Applications propres . . . . .	91
3.5.5.3	Produit d'espaces compacts . . . . .	92
3.5.5.4	Locale compacité . . . . .	94
3.5.5.5	Compactification d'Alexandrov . . . . .	95
3.5.5.6	Séquentielle compacité . . . . .	95
3.5.5.6.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	95
3.5.5.6.2	Généralisations . . . . .	95
3.5.5.7	Dénombrabilité à l'infini . . . . .	96
3.5.5.8	Paracompacité . . . . .	97
3.5.5.9	Théorème de la cornemuse . . . . .	99
3.5.6	Complétude . . . . .	99
3.5.7	Convexité . . . . .	99
3.5.8	Connexité par arcs . . . . .	99
3.5.9	Connexité . . . . .	103
3.5.9.1	Définition . . . . .	103
3.5.9.2	Opérations sur les connexes . . . . .	105
3.5.9.3	Connexes et applications . . . . .	108
3.5.9.4	Composantes connexes . . . . .	108
3.5.9.5	Totale discontinuité . . . . .	110
3.5.9.6	Lien avec la connexité par arcs . . . . .	111
3.5.9.7	Locale connexité et locale connexité par arcs . . . . .	114
3.5.10	Connexité simple . . . . .	118
3.5.11	Discrétion . . . . .	118
3.6	Exemples classiques de topologie . . . . .	118
3.6.1	Topologies cofinies . . . . .	118
3.6.1.1	Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$ . . . . .	118
3.6.1.2	Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ . . . . .	118
3.6.2	Topologie de Zariski . . . . .	118
3.6.3	Topologie compacte-ouverte . . . . .	120
3.6.3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	120
3.6.3.2	Enrichissement de Top . . . . .	123

<b>4 Topologie algébrique élémentaire</b>	<b>125</b>
4.1 Invariants simples en topologie algébrique . . . . .	125
4.1.1 Le $\pi_0$ . . . . .	126
4.2 Construction et opérations d'espaces topologiques . . . . .	126
4.3 Groupes topologiques . . . . .	126
4.3.1 Définition . . . . .	126
4.3.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe . . . . .	129
4.3.3 Propriétés des groupes topologiques . . . . .	130
4.3.3.1 Groupes compacts . . . . .	130
4.3.4 Groupes séparés . . . . .	131
4.3.5 Groupes topologiques distingués . . . . .	132
4.4 Espaces cellulaires . . . . .	132
4.4.1 Attachements cellulaires . . . . .	132
4.4.2 CW-complexe, espace cellulaire . . . . .	136
4.4.2.1 Définition générale . . . . .	136
4.4.2.2 CW-complexe fini, espace cellulaire fini . . . . .	141
4.4.2.3 Applications cellulaires . . . . .	143
4.4.2.4 Opérations sur les CW-complexes . . . . .	143
4.4.2.5 Orientation de cellules, coefficient d'incidence de cellules (hors-programme) . . . . .	144
4.4.2.6 Boucle d'oreille hawaïenne . . . . .	145
4.4.2.7 Point de vue catégorie des CW-complexes . . . . .	145
4.5 Homotopie . . . . .	145
4.5.1 Point de vue catégorique de la topologie . . . . .	145
4.5.2 Notion d'homotopie . . . . .	145
4.5.2.1 Applications homotopes . . . . .	145
4.5.2.2 Équivalence d'homotopie . . . . .	149
4.5.2.3 Isotopie . . . . .	152
4.5.3 Espaces contractiles . . . . .	152
4.5.3.1 Rétractions . . . . .	153
4.5.4 Propriété d'extension des homotopies . . . . .	155
4.6 Groupe fondamental . . . . .	160
4.6.1 Le groupe fondamental . . . . .	160
4.6.1.1 Homotopie entre chemins, lacets et boucles . . . . .	160
4.6.1.2 Bagage théorique pour la construction du GF . . . . .	160
4.6.1.3 Définition du groupe fondamental et du groupoïde fondamental .	162
4.6.1.4 Comportement du GF vis-à-vis des applications continues . .	164
4.6.1.5 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique .	165
4.6.1.6 Lien avec la connexité simple . . . . .	170
4.6.1.6.1 Espace localement simplement connexe . . . . .	171

4.6.1.7	Théorème du cône . . . . .	171
4.6.2	Groupes d'homotopie supérieurs . . . . .	172
4.7	Théorie élémentaire des revêtements . . . . .	172
4.7.1	Notion générale issue de la géométrie différentielle : fibrations, fibrés vectoriels . . . . .	172
4.7.1.1	Fibrations, revêtements différentiels, fibrés (vectoriels) . . . . .	172
4.7.1.2	Revêtement différentiel . . . . .	175
4.7.1.3	Fibrés vectoriels . . . . .	176
4.7.2	Définitions fondamentales sur les revêtements . . . . .	177
4.7.3	Le groupe fondamental du cercle . . . . .	180
4.7.4	Relèvement . . . . .	181
4.7.5	Degré d'une application . . . . .	181
4.7.6	Applications et conséquences en Analyse . . . . .	181
4.7.6.1	Préservation des bords . . . . .	181
4.7.6.2	Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine . . . . .	182
4.7.6.3	Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue . . . . .	182
4.7.6.4	Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon . . . . .	182
4.7.7	Théorie générale des revêtements . . . . .	182
4.7.8	Fibrés vectoriels . . . . .	182
4.7.8.1	Définition et premiers exemples. Fibrés particuliers . . . . .	182
4.7.8.2	Sections d'un fibré . . . . .	184
4.7.8.3	Constructions de fibrés . . . . .	186
4.7.8.4	Fibrés vectoriels euclidiens . . . . .	187
4.8	Théorème de van Kampen . . . . .	190
4.8.1	Version faible du théorème de Van Kampfen . . . . .	190
4.8.2	Théorème de van Kampen général . . . . .	192
4.8.2.1	Somme amalgamée dans une catégorie . . . . .	192
4.8.2.2	Le théorème de van Kampen fort . . . . .	194
4.9	Théorie générale des revêtements . . . . .	198
4.9.1	Conséquence sur la théorie générale des revêtements . . . . .	198
4.9.1.1	Morphismes de revêtements . . . . .	198
4.9.1.2	Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications . . . . .	199
4.9.1.3	Monodromie . . . . .	202
4.9.1.4	Classification des morphismes de revêtements . . . . .	202
4.9.1.5	Revêtements galoisiens . . . . .	206
4.9.1.6	Revêtements universels . . . . .	208
4.9.1.7	Revêtements images réciproques . . . . .	212
4.9.1.8	Classification des revêtements . . . . .	212

4.10	Notions introducives d'algèbre homologique . . . . .	212
4.10.1	Complexes associés à un espace topologique . . . . .	212
4.10.2	Homologie simpliciale . . . . .	213
4.10.2.1	$\Delta$ -complexe . . . . .	213
4.10.2.2	Complexes simpliciaux . . . . .	217
4.10.3	Vers l'homologie singulière . . . . .	218
<b>5</b>	<b>Homologie</b> . . . . .	<b>219</b>
5.1	Idée . . . . .	220
5.2	Homologie simpliciale . . . . .	220
5.3	Homologie singulière . . . . .	220
5.3.1	Groupes d'homologie . . . . .	220
5.3.1.1	Définition de l'homologie singulière . . . . .	220
5.3.1.2	Homologie singulière en basses dimensions . . . . .	223
5.3.1.3	Applications induites en homologie . . . . .	228
5.3.1.4	Quasi-isomorphie . . . . .	234
5.3.1.5	Groupes d'homologie réduits . . . . .	235
5.3.1.6	Groupes d'homologie relatifs . . . . .	236
5.3.2	Calcul pratique de l'homologie singulière . . . . .	243
5.3.2.1	Théorèmes d'excision . . . . .	243
5.3.2.2	Suite de Mayer-Vietoris . . . . .	246
5.3.2.3	Homologie d'une limite inductive . . . . .	253
5.3.2.4	Groupes d'homologie des sphères . . . . .	254
5.3.2.4.1	Calcul de l'homologie des sphères $S^n, n \in \mathbb{N}$ . . . . .	254
5.3.2.4.2	Degré d'une application entre sphères . . . . .	255
5.3.2.4.3	Degrés locaux . . . . .	258
5.3.2.4.4	Sphères homologie . . . . .	259
5.3.2.5	Comparaison entre homologie et homotopie . . . . .	259
5.3.3	Quelques invariants numériques de l'homologie singulière . . . . .	261
5.4	Homologie cellulaire . . . . .	262
5.4.1	Complexe de chaînes cellulaire . . . . .	262
5.4.2	Lien avec l'homologie simpliciale . . . . .	270
5.5	Généralisations de l'homologie singulière . . . . .	271
5.5.1	Homologie à coefficients quelconques . . . . .	271
5.5.2	Cohomologie des espaces topologiques . . . . .	274
5.5.3	Cohomologie cellulaire . . . . .	277
5.5.4	Théorème des coefficients universels, foncteurs topologiques d'extension et de torsion . . . . .	277
5.6	Algèbre homologique . . . . .	282
5.6.1	Complexes de modules . . . . .	282

5.6.2	Caractéristique d'Euler . . . . .	282
5.6.3	Axiomes d'Eilenberg-Steenrod . . . . .	283
<b>6</b>	<b>Homotopies</b>	<b>285</b>
6.1	Théorie de l'homotopie (supérieure) des espaces topologiques . . . . .	285
6.1.1	Prolégomènes : quelques faits sur le segment $[0,1]$ et ses amis les cubes .	286
6.1.2	Équivalence d'homotopie et théorie des catégories . . . . .	288
6.1.2.1	Homéomorphie . . . . .	288
6.1.2.2	Homotopie . . . . .	288
6.1.2.3	La catégorie d'homotopie . . . . .	289
6.1.2.4	Deux types d'isomorphie nouveaux . . . . .	291
6.1.2.5	Notion d'invariant topologique . . . . .	291
6.1.2.6	Catégories relatives . . . . .	293
6.1.3	Constructions topologiques catégoriques et constructions topologiques pointées . . . . .	295
6.1.3.1	Rappels : produits et coproduits topologiques . . . . .	296
6.1.3.2	Adjonctions topologiques pointées : curryfication et $\Sigma\text{-}\Omega$ . . . . .	297
6.1.3.3	Smash-produit. Lien avec la suspension . . . . .	305
6.1.4	Groupes d'homotopie supérieurs . . . . .	308
6.1.4.1	Construction formelle de l'homotopie supérieure . . . . .	308
6.1.4.2	Fonctorialité des groupes d'homotopie supérieurs . . . . .	317
6.1.4.3	Équivalences faibles d'homotopie . . . . .	317
6.1.4.4	$n$ -connexité . . . . .	318
6.1.5	Suites de fibres et de cofibres . . . . .	319
6.1.5.1	Suites exactes et coexactes dans les catégories concrètes . . . . .	319
6.1.5.2	Cônes, chemins et suites exactes de (co)fibres, de Puppe . . . . .	320
6.1.6	Fibrations et cofibrations . . . . .	325
6.1.6.1	Cofibrations ( $\cong$ paires de Borsuk) . . . . .	326
6.1.6.2	Fibrations ( $\cong$ revêtements) . . . . .	332
6.1.7	Calcul des groupes d'homotopie . . . . .	341
6.1.7.1	Homotopie relative . . . . .	341
6.1.7.2	Homotopie d'une fibration . . . . .	342
6.1.7.3	Groupes d'homotopie des sphères . . . . .	343
6.1.7.4	Fibrations de Hopf . . . . .	344
6.1.7.5	Lenticularité . . . . .	345
6.1.7.6	Homotopie du cercle polonais . . . . .	347
6.1.8	Un modèle simple : homotopie des <i>CW</i> -complexes . . . . .	348
6.1.8.1	Définition catégorique des complexes cellulaires . . . . .	348
6.1.8.2	Théorèmes homotopiques sur les complexes cellulaires . . . . .	355
6.1.8.3	Approximation cellulaire . . . . .	361

6.1.9	Lien entre homotopie supérieure et homologie simpliciale . . . . .	363
6.2	Homotopie des ensembles simpliciaux . . . . .	364
6.2.1	Espaces topologiques triangulés . . . . .	364
6.2.1.1	Introduction : les complexes simpliciaux . . . . .	364
6.2.1.2	Notion abstraite de triangulation . . . . .	368
6.2.1.3	Applications simpliciales . . . . .	371
6.2.1.4	$\Delta$ -complexes . . . . .	375
6.2.2	Construction des ensembles simpliciaux . . . . .	379
6.2.2.1	Catégories permettant de construire celle des ensemble simpliciaux	379
6.2.2.2	Opérations sur les ensembles simpliciaux . . . . .	386
6.2.2.3	Réalisation géométrique des ensembles simpliciaux . . . . .	390
6.2.2.4	Catégorie des ensembles simpliciaux . . . . .	391
6.2.2.5	Produit d'ensembles simpliciaux et décomposition prismatique .	398
6.2.2.6	Autoenrichissement des ensembles simpliciaux . . . . .	400
6.2.3	Exemples conceptuels d'ensembles simpliciaux . . . . .	402
6.2.3.1	Ensembles simpliciaux constants . . . . .	402
6.2.3.2	Ensembles simpliciaux singuliers . . . . .	403
6.2.3.3	Nerf d'une catégorie . . . . .	405
6.2.3.4	Correspondance de Dold-Kan . . . . .	408
6.2.4	Complexes de Kan et $\infty$ -catégories . . . . .	410
6.2.5	Homotopie simpliciale . . . . .	416
<b>7</b>	<b>Topologie des variétés</b> . . . . .	<b>429</b>
7.1	Compléments généraux sur les variétés topologiques grâce à l'homologie . . . . .	429
7.1.1	Propriétés locales algébrico-topologiques des variétés . . . . .	429
7.1.1.1	Définitions sur les variétés topologiques . . . . .	429
7.1.1.2	Lemmes locaux-globaux sur les variétés . . . . .	430
7.1.1.3	Locale contractibilité . . . . .	432
7.1.1.4	ENR et structures simpliciale et cellulaire des variétés compactes	433
7.1.2	Éléments de topologie différentielle . . . . .	434
7.1.2.1	Théorèmes de lissité en basses dimensions . . . . .	434
7.1.3	Orientations locales des variétés topologiques . . . . .	434
7.1.3.1	Définition topologique de l'orientabilité . . . . .	434
7.1.3.2	Le revêtement double d'orientation . . . . .	440
7.1.3.3	Homologie des variétés en degré de dimension . . . . .	443
7.1.3.4	$G$ -orientabilité . . . . .	444
7.1.3.5	Classes fondamentales . . . . .	446
7.1.4	Classification des variétés topologiques de très petites dimensions . . . . .	447
7.1.4.1	Sommes connexes de variétés . . . . .	447
7.1.4.2	Variétés topologiques de dimension nulle . . . . .	448

7.1.4.3	Variétés topologiques de dimension 1 . . . . .	448
7.1.4.4	Classification des surfaces topologiques . . . . .	449
7.1.4.4.1	Triangulation des surfaces . . . . .	450
7.1.4.4.2	Classification des surfaces topologiques compactes connexes . . . . .	450
7.1.4.4.3	Classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables . . . . .	452
7.1.4.4.4	Genre des surfaces . . . . .	456
7.1.4.4.5	Combinatoire des surfaces topologiques . . . . .	463
7.1.4.5	Classification des variétés topologiques de dimension $\geq 3$ . . . . .	466
7.2	Dualité de Poincaré et théorie des intersections . . . . .	466
7.2.1	Prolégomènes à la dualité de Poincaré . . . . .	466
7.2.1.1	Motivation : liens entre la cohomologie de Rham et l'homologie singulière . . . . .	466
7.2.1.2	Première approche : triangulation des variétés compactes . . . . .	468
7.2.1.3	Formalisme moderne des cup produit et cap produit . . . . .	469
7.2.2	Dualité de Poincaré . . . . .	474
7.2.2.1	Isomorphismes de Poincaré . . . . .	474
7.2.2.2	Dualité de Poincaré proprement dite . . . . .	479
7.2.2.3	Anneaux de cohomologie . . . . .	481
7.2.2.4	Signature d'une variété . . . . .	482
7.2.3	Autres formes de dualité . . . . .	484
7.2.3.1	Dualité de Poincaré pour les variétés à bord . . . . .	484
7.2.3.2	Dualité d'Alexander . . . . .	485
7.2.3.3	Dualité de Thom . . . . .	487
7.2.3.4	Quelques commentaires concernant variétés topologiques et variétés lisses . . . . .	487
7.2.4	Théorie des intersections . . . . .	489
7.2.4.1	Classes de Thom . . . . .	489
7.2.4.2	Classes d'Euler . . . . .	493
7.3	Cobordisme . . . . .	494
7.3.1	Homologie naïve des variétés à bord . . . . .	494
7.3.2	Notion de cobordisme . . . . .	494
7.3.2.1	Définition et exemples . . . . .	494
7.3.2.2	Cobordismes orientés . . . . .	496
7.4	Classes de Stiefel-Whitney . . . . .	498
7.4.1	Axiomes de Stiefel-Whitney . . . . .	498
7.4.2	Espace classifiant . . . . .	504
7.4.2.1	Grassmanniennes et fibrés universels . . . . .	505
7.4.2.2	Une structure cellulaire sur la grassmannienne . . . . .	510

<b>8 Théorie des noeuds</b>	<b>513</b>
8.1 Premières propriétés . . . . .	513
8.1.1 Définition . . . . .	513
8.1.2 Exemples fondamentaux . . . . .	514
8.1.3 Image miroir d'un nœud . . . . .	514
8.2 Diagrammes de nœud . . . . .	514
8.2.1 Axiomes des diagrammes de nœud . . . . .	514
8.2.2 Projections régulières des nœuds . . . . .	515
8.2.3 Mouvements de Reidemeister . . . . .	515
8.3 Invariants de nœud . . . . .	515
8.3.1 Groupe de nœud . . . . .	515
8.3.2 Polynôme d'Alexander . . . . .	515
8.3.3 Polynôme de Jones . . . . .	515
8.3.4 Polynôme de Kauffman . . . . .	515
8.4 Homologies de nœud . . . . .	515
8.4.1 Homologie de Khovanov . . . . .	515
<b>9 Exercices</b>	<b>517</b>



# Chapitre 1

## Espaces vectoriels normés

### Résumé

Les espaces vectoriels normés sont un cadre agréable pour une introduction à la topologie, classiquement dispensée en mathématiques spéciales, mais on comprend rapidement qu'ils sont en grande partie sans nouveauté par rapport aux espaces métriques, eux-mêmes qui se reformulent presque entièrement dans un vocabulaire topologique pur. Cependant, deux pans de la théorie se dégagent nettement : l'intérêt de la dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Riesz, et d'autre part, la gratuité de certains comportements des boules qui permettent une géométrie intuitive.

### 1.1 Normes

**Exemples.** (*Normes classiques, normes usuelles*)

1.

### 1.2 Limites

### 1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

**Proposition.** (*Normes non équivalentes en dimension finie*)

Un espace vectoriel  $E$  est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

▷ En exercice. ■

**Propriété.** (*Compacité locale des evn de dimension finie*)

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.

*Remarque.* En dimension infinie, on peut quand même trouver des parties compactes non comprises dans un sous-espace de dimension finie. Elle sont données, par exemple, dans  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , par le théorème d'Ascoli qui permet d'établir la compacité de familles libres de fonctions.

### Propriété. (*Théorème d'Heine-Borel*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

C'est en fait une équivalence !

### Propriété. (*Fermeture des sous-espaces vectoriels de dimension finie*)

Soit  $K$  un corps complet pour sa valuation. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel normé de dimension quelconque et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors  $F$  est fermé dans  $E$ .

C'est faux si  $K$  n'est pas complet ! En effet, on peut considérer  $K$  comme un  $K$ -ev de dimension 1. Il se plonge dans son complété qui est un ev et il est dense dedans donc non fermé.

#### 1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

##### Propriété. (*Convergence des suites bornées par les valeurs d'adhérence*)

Dans un espace de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

##### Exercice 1 (*Contre-exemples*)

Les hypothèses précédentes sont essentielles.

1. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de bornitude.
2. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de dimension.

##### ▷ Éléments de réponse.

Pour le premier cas, la suite définie par  $u_{2n} = 2n$  et  $u_{2n+1} = 0$  doit convenir. Pour le second cas, on peut considérer  $(1 - \sin(n\pi/2))X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite bornée qui ne converge pas mais admet 0 pour seule valeur d'adhérence.

#### 1.3.2 Boules et hypercubes

##### Lemme. (*Toute boule contient un hypercube*)

Soit  $n$  un entier naturel. On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme quelconque. Alors toute boule ouverte non vide ni réduite à un point de  $\mathbb{R}^n$  contient strictement un hypercube fermé ni vide ni réduit à un point et de même centre.

▷ Supposons d'abord que  $\mathbb{R}^n$  soit muni de sa topologie usuelle. On utilise l'intuition donnée dans le plan de ce que dans un cercle de rayon 1, on peut inscrire un carré de côté  $\sqrt{2}$ . Soit donc  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . On pose  $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^n [a_i - \frac{\sqrt{2}}{4}r, a_i + \frac{\sqrt{2}}{4}r]$ . Alors  $\mathcal{H}$  est un hypercube et convient.

Pour passer au cas général, on utilise l'équivalence des normes en dimension finie. ■

## 1.4 Applications continues

### 1.4.1 Formes linéaires

**Propriété. (Caractérisation de la discontinuité des formes linéaires)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f$  une forme  $\mathbb{K}$ -linéaire non nulle de  $E$ . Alors  $f$  est discontinue si et seulement si son noyau est dense dans  $E$ .

▷ D'après le théorème précédent, une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. De plus, si elle n'est pas nulle, son noyau est un hyperplan de  $E$ . Or un hyperplan est fermé ou dense, ces deux conditions s'excluant mutuellement, car le seul fermé dense est l'espace lui-même, qui n'est pas un hyperplan. Ainsi,  $f$  est non continue, si et seulement si,  $\text{Ker}(f)$  est dense. ■

On peut caractériser la réalisation de la distance au noyau d'une forme linéaire linéaire continue de la manière suivante.

**Proposition. (Réalisation de la distance à un hyperplan fermé)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $\phi \in E'$ . Alors la distance de  $u \in E \setminus \text{Ker}\phi$  à  $\text{Ker}\phi$  est atteinte si et seulement si la norme de  $\phi$  est atteinte (sur la sphère unité), c'est-à-dire s'il existe  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $|\phi(x)| = \|\phi\|$ .

▷ Notons  $H = \text{Ker}\phi$ . Soit  $u \in E$ . Remarquons d'abord que  $d(u, H) = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|}$ . On procède par double inégalité. D'une part,  $|\phi(u)| = |\phi(u - h)| \leq \|\phi\| \|u - h\| \quad \forall h \in H$  d'où  $\frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} \leq d(u, H)$ . Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par définition de la borne supérieur, il existe un vecteur unitaire  $s$  tel que  $|\phi(s)| \geq \|\phi\| - \varepsilon > 0$ . En prenant  $h = u - \frac{\phi(u)}{\phi(s)}s$ , on obtient  $d(u, H) \leq \|u - h\| = \frac{|\phi(u)|}{|\phi(s)|} \leq \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\| - \varepsilon}$  et l'on conclut par  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Concluons. Soit  $u \in E \setminus H$ . Si  $d(u, H)$  est atteinte en un certain point  $z \in E$ , alors  $z \neq u$ , car  $u \notin H$ , et l'on a  $d(u, H) = \|u - z\| = \frac{|\phi(u - z)|}{\|\phi\|}$ . Ainsi, puisque  $\|u - z\| \neq 0$ ,  $\|\phi\| = \frac{|\phi(u - z)|}{\|u - z\|} = \left| f \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right|$  en posant  $x = \frac{u - z}{\|u - z\|}$ . Quitte à remplacer  $x$  par  $-x$ , on peut toujours avoir  $\|\phi\| = f \left( \frac{x}{\|x\|} \right)$ , avec bien  $\|x\| = 1$ . De plus, si la norme de  $\phi$  est atteinte, il existe  $x$  de norme 1 tel que  $|\phi(x)| = \|\phi\|$ . On a en particulier, sauf cas trivial  $\phi$  nulle,  $E = \text{Ker}\phi \oplus \mathbb{K}x$  donc  $u = z + \lambda x$  où  $z \in \text{Ker}\phi$ . Par égalité de normes, on a  $\lambda = \|u - z\|$ . Ainsi  $x = \frac{u - z}{\|u - z\|}$  puis  $\phi(\frac{u - z}{\|u - z\|}) = \phi \frac{u}{\|u - z\|} = \phi(x) = \|\phi\|$ . Ainsi, il existe  $z \in H$  tel que  $\|u - z\| = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} = d(u, H)$  par le lemme. ■

**Remarque importante.** Remarquons la dichotomie du résultat précédent : soit toutes les distances des points hors du noyau au noyau sont atteintes, soit aucune ne l'est.

### 1.4.2 Projections scalaires

#### Théorème. (*Continuité des projections en dimension finie*)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  une base de  $E$ . Soit  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $p$  la projection selon la composante sur  $e_{i_0}$ . Alors  $p$  est continue.

▷ On sait que  $p$  est une forme linéaire. Or toute application linéaire partant d'un espace de dimension finie est continue, donc  $p$  est continue. ■

En dimension infinie, c'est facilement faux comme le montre le contre-exemple suivant.

#### Contre-exemple. (*Projection discontinue en dimension infinie*)

Une projection n'est pas continue en général.

On munit l'espace  $E = C([0,1], \mathbb{R})$  d'une base algébrique, forcément indénombrable, car la famille  $x \mapsto e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est libre. De cette base on extrait une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales sur  $[0,1]$ . Il est de dimension dénombrable ; soit donc  $e$  un vecteur de la base d'origine qui n'est pas cette extraction. Le noyau de la projection sur  $e$  contient l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est dense dans  $E$ , donc le noyau de cette projection est dense, en particulier il n'est pas fermé, donc elle n'est pas continue, et voilà.

Heuristiquement, ce n'est pas étonnant. Un tel résultat signifierait que toute application nilpotente d'ordre 2 serait continue, ce qui est curieux. □

#### Exercice 2

Est-ce que, plus généralement, un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si toutes les projections scalaires contre une base donnée sont continues ?

### 1.4.3 Projections vectorielles

#### Corollaire. (*Décomposition selon une projection continue*)

Soit  $p$  la projection sur la droite vectorielle engendrée par  $e_{i_0}$  dont on suppose qu'elle est continue. Alors il existe un supplémentaire de  $\text{Ker}(p)$  fermé dans  $E$ , donc une décomposition de  $E$  en deux sous-espaces fermés.

▷ On pose  $q = 1 - p$ . On sait que  $q$  est une projection, de plus,  $pq = p(1 - p) = p - p^2 = 0$  au sens de la composition. D'après le lemme des noyaux, puisque  $X$  et  $X - 1$  sont premiers entre eux,  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q) = E$ . Or  $\text{Ker}(p)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , car  $p$  est continue, et  $q$  est

également continue par opérations usuelles donc  $\text{Ker}(q)$  est également fermé dans  $E$ , ce qui termine la preuve. ■

*Remarque.* Le supplémentaire obtenu est bien la projection sur  $\text{Vect}(e_i, i \in I \setminus \{i_0\})$ , ce qui est commode dans la pratique la base ayant été fixée.

### Exercice 3

Vérifier explicitement le fait précédent.

## 1.5 Suites et séries de fonctions

### 1.5.1 Convergence simple

**Propriété. (*Limite simple d'applications linéaires*)**

Soient  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un espace vectoriel normé. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L(E, F)^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ . Alors  $f \in L(E, F)$ .

▷ C'est conséquence directe de la linéarité de la limite en un point. ■

## 1.6 Convexité

**D**ANS toute cette section, on se limite aux espaces vectoriels normés ***E sur un sur-corps valué de  $\mathbb{R}$*** . En vérité, toutes les interprétations géométriques des résultats, qui sont la règle, se font sur la restriction des théorèmes aux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

### 1.6.1 Jauge d'un convexe

Voilà une notion dont la principale application est la preuve du théorème de Hahn-Banach géométrique.

**Définition. (*Jauge d'un convexe*)**

Soit  $C \subseteq E$  un convexe contenant  $0_E$ . La *jauge*  $p$  de  $C$  est l'application  $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $p(x) = \inf \{t \geq 0, x \in tC\}$ .

*Remarque.* Si  $t \in I_x$ , pour tout  $s \geq t$ ,  $s \in I_x$ . En effet, si  $t \neq 0$ ,  $t \in I_x \iff x/t \in C \iff [0, x/t]_E \subseteq C \iff \forall s \geq t \quad x/s \in C \iff \forall s \geq t \quad s \in I_x$ .

**Propriété. (Définition de la jauge)**

$p$  est bien définie.

▷ Soit  $x \in E$  et  $I_x = \{t \geq 0, x \in tC\}$ . Si  $t$  est non nul, on l'écrit  $x/t \in C$ . Comme  $C$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(0_E, r) \subseteq C$  puisque  $0 \in C$ . Donc si  $x \in E$  est non nul,  $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in C$  c'est-à-dire que  $x \in \frac{2\|x\|}{r} C$  (★). Donc  $I_x \neq \emptyset$ . Puisque  $I_x \subseteq [0, +\infty)$ , donc  $p(x)$  est bien définie. ■

**Propriété. (Jauge en zéro)**

$p(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

▷ Clair et clair. ■

**Propriété. (Sous-additivité, homogénéité positive)**

$p$  vérifie les hypothèses du théorème analytique de Hahn-Banach réel.

▷  $p$  est positivement homogène. En effet,  $p(x) = \inf \{t \geq 0, x \in tC\}$ . Soit  $\lambda > 0$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda x \in \lambda tC \iff x \in tC$ . Donc  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ . ■

▷ Montrons que la jauge d'un convexe vérifie l'inégalité triangulaire (exercice classique de L2). Soient  $x, y \in E$  non nuls. Soient  $\varepsilon > 0$ , alors  $p(x) + \varepsilon \in I_x$  et  $p(y) + \varepsilon \in I_y$ , c'est-à-dire  $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ . Alors comme  $C$  est convexe,

$$\frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \frac{x}{p(x) + \varepsilon} + \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \frac{y}{p(y) + \varepsilon} = \frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C,$$

donc  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ . Donc  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ . ■

**Propriété. (Identification du convexe par la jauge)**

$C = \{x \in E, p(x) < 1\}$ .

▷ Montrons que  $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$ . Si  $x \in C$  non nul, comme  $C$  est ouvert, il existe  $\rho > 0$  tel que  $B(x, \rho) \subseteq C$ . Soit  $\lambda = \frac{\|x\| + \frac{1}{2}}{\|x\|} > 1$ . Alors  $\lambda x = x + \frac{1}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(x, l) \subseteq C$ . Donc  $\frac{1}{\lambda} \in I_x$  donc  $p(x) = \inf(I_x) < 1$ . On a montré que  $C \subseteq \{x, p(x) < 1\}$ . Réciproquement, si  $p(x) < 1$ ,  $I_x \supseteq [1, +\infty[$ , donc  $x \in C$ . ■

**Propriété. (Majoration de la jauge)**

Il existe  $M$  tel que  $p \leq M \|\cdot\|$ .

▷ La relation (★) donne  $p(x) \leq M \|x\|$  pour  $M = \frac{2}{r}$ . ■

**Propriété. (*Continuité de la jauge*)**

$p$  est lipschitzienne.

▷ Conséquence de la majoration précédente. ■

**Propriété. (*Norme issue d'une jauge*)**

La jauge d'un convexe compact symétrique par rapport à l'origine définit une norme dont la boule unité est ce convexe.

**Théorème. (*Homéomorphie des convexes*)**

Tous les convexes compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont homéomorphes, pour  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ On montre que  $C$  est homéomorphe à la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant la fonction  $x \mapsto \frac{j(x)}{\|x\|}x$ , bijection bicontinue de  $C$  sur la boule unité. ■

**Corollaire. (*Boules et point*)**

Toute boule de  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à un point.

**Heuristique**

La jauge d'un convexe permet de le déterminer dans l'espace.

## 1.6.2 Convexes et applications

**Exercice 4**

L'image d'un convexe par une application continue est-elle nécessairement convexe.

▷ **Éléments de réponse.**

Clairement pas. Pourtant, d'après les valeurs intermédiaires, un exemple de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ne suffit pas. On peut considérer simplement l'image de  $[-\pi, \pi]$  par l'exponentielle imaginaire, qui est la sphère du plan d'Argand-Cauchy, qui n'a rien de convexe, en cela que deux points distincts formeront toujours une corde sortant de la sphère.

**Propriété. (*Image d'un convexe par une application linéaire*)**

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels réels. Soit  $C$  un convexe de  $E$  et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f(C)$  est convexe.

### 1.6.3 Points extrémaux

#### Définition. (*Point extrémal*)

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $c \in A$  est *extrémal* (dans  $A$ ), ou que  $c$  est un *point extrême* de  $A$ , si  $A \setminus \{c\}$  est convexe.

*Remarque.* Cette définition n'a d'intérêt que si  $A$  est déjà connexe, mais elle n'est pas dépourvue de sens dans le cas général néanmoins.

#### Exercice 5

Trouver une partie non convexe du plan et exhiber l'un de ses points extrémaux.

▷ Éléments de réponse.

Prendre une boule et un point hors de la boule. Ce n'est pas une partie convexe du plan. Pourtant, le point hors de la boule est extrémal, car si on le retire, on obtient une boule, convexe.

#### Propriété. (*Caractérisation des points extrémaux*)

Soit  $A$  un convexe. Un point  $c \in A$  est extrémal, si et seulement si, pour tous  $c_1, c_2 \in A$ ,  
 $c = \frac{c_1+c_2}{2} \implies c_1 = c_2 = c$ .

▷ Supposons que  $c$  soit le milieu de deux points distincts de  $A$ , distincts de  $c$ ; en effet, si  $c_1 \neq c$ , alors  $c_2 \neq c$ . Alors  $A$  privé de  $c$  ne peut être convexe, car alors on aurait un segment liant deux éléments de  $A \setminus \{c\}$  dont le milieu n'est pas dans  $A \setminus \{c\}$ . Réciproquement, si  $A$  privé de  $c$  n'est pas convexe, alors il existe  $a, b \in A$ ,  $a, b \neq c$ , tel qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $x \notin A \setminus \{c\}$ . Remarquons que  $a \neq b$ . Puisque,  $A$  étant convexe,  $x \in [a, b] \subseteq A$ , on a  $x = c$ . Posons  $\rho = \min(\|x - a\|, \|x - b\|)/2$  et  $c_1 = \rho x + (1 - \rho)a$ , et  $c_2 = \rho x + (1 - \rho)b$ . Puisque  $x \neq a, b$ , on a  $\frac{c_1+c_2}{2} = x = c$  où ni  $c_1$ , ni  $c_2$  n'égale  $c$ . ■

#### Exercice 6

Quels sont les points extrémaux d'un triangle ?

▷ Éléments de réponse.

Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets (et non sa frontière!).

Voilà un exemple géométrique précisant la conception géométrique du point extrémal :

La notion de point extrémal apparaît dans le théorème de Krein-Milman dont nous donnons une version élémentaire.

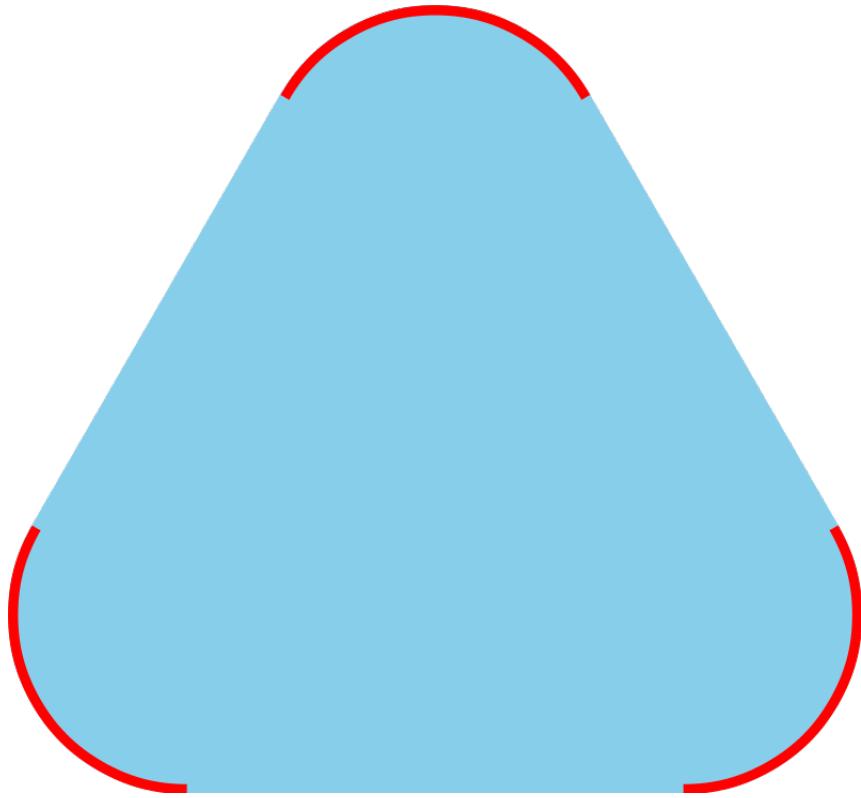


FIGURE 1.6.1 : Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière. — Les points extrémaux sont indiqués en surlignage rouge.

### Théorème. (*Théorème de Krein-Milman*)

Tout convexe compact en dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

▷ On procède par récurrence sur la dimension. En dimension nulle, il n'y a rien à faire : il n'y a que deux convexes,  $\emptyset$  et  $\{0\}$  ; c'est trivial dans les deux cas. Soit maintenant  $C$  un convexe compact dans un espace vectoriel normé réel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons le théorème vrai pour tout convexe compact inclus dans un sous-espace de dimension  $k < n$ . Soit  $m \in C$ . Montrons que  $m$  s'exprime comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $A$ , et cela suffit, car l'enveloppe convexe des points extrémaux de  $A$ , est a fortiori incluse dans  $A$ , convexe. Soit  $D$  une droite quelconque passant par  $m$ , par exemple,  $\mathbb{R}_-$ . L'ensemble  $C \cap D$  est alors un convexe inclus dans  $C$ . Puisque  $C$  et  $D$  sont fermés,  $C \cap D$  est un compact en tant que fermé dans le compact  $C$ . C'est donc un convexe compact d'un espace de dimension 1. Il est donc de la forme  $[a,b]$ , où  $a,b \in A$  et  $m \in [a,b]$ , naturellement. Or  $a,b$  sont sur la frontière du convexe  $C$ , car ils sont adhérents au complémentaire de  $C$ , autrement, on formerait une boule contenant un point de  $D$  dans  $C$  et non dans  $[a,b]$ , absurde. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc des hyperplans d'appuis  $H_a$  et  $H_b$  en ces points. Introduisons les convexes, par intersections de convexes,  $C_a = C \cap H_a$  et  $C_b = C \cap H_b$ . On remarque alors que tout point extrémal de  $C_a$  est encore un point extrémal de  $C$ . En effet, étant donné un point extrémal  $c$  de  $C_a$  et  $x,y \in C \setminus \{c\}$ . Si l'un au moins des deux points  $x,y$  n'est pas dans  $H_a$ , vu le caractère séparant de cet hyperplan, tout le segment ouvert  $]x,y[$  reste dans un seul demi-espace ouvert délimité par  $H_a$  et évite donc  $c$ . Si  $x,y \in H_a$  maintenant, puisque  $C_a \setminus \{c\}$  est convexe,  $[x,y]$  évite  $c$ . Dans tous les cas,

$[x,y]$  est entièrement dans  $C \setminus \{c\}$ , d'où l'observation. Elle tient également pour le convexe  $C_b$ .

Les convexes  $C_a, C_b$  étant inclus dans des hyperplans de dimension  $k - 1$ , on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi  $a$  est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $C_a$ , donc de  $C$ ; de même,  $b$  est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $C_b$  donc de  $C$ . Puisque  $m$  est barycentre à coefficients positifs de  $a$  et  $b$ , par associativité, le résultat est montré. ■

### Exercice 7

Donner un exemple graphique où, dans le théorème précédent,  $C_a$  ou  $C_b$  ne sont pas réduits à des points.

On retrouve le résultat suivant :

**Corollaire. (*Krein-Milman pour les polygones*)**

Tout polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

# Chapitre 2

## Espaces métriques

### Résumé

On donne quelques propriétés propres aux espaces métriques : notion de distance atteinte, propriétés des boules, complétude et théorie de Baire dans le cadre complet.

### 2.1 Distances

#### 2.1.1 Définition d'une distance

**Définition.** (*Majoration d'une distance*)

Soit  $(E,d)$  un espace métrique. Alors  $(E, \min(1,d))$  est une distance.

▷ Preuve facile. ■

#### Exercice 1

Ces deux espaces sont-ils homéomorphes ?

**Définition.** (*Distance de Manhattan*)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On pose pour tous  $x,y \in E$  :

$$d(x,y) = \|x - y\| \text{ si } x,y \text{ sont colinéaires, } d(x,y) = \|x\| + \|y\| \text{ sinon.}$$

▷ Il suffit de disjoindre les cas. ■

### 2.1.2 Distance issue d'une norme

#### Définition. (*Distance homogène*)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$  un corps valué. On dit qu'une distance  $d$  sur  $E$  est homogène si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

#### Propriété. (*Homogénéité des distances*)

Toute distance sur un espace normé issue d'une norme est homogène.

#### Exercice 2

La distance de Manhattan associée à la norme euclidienne est-elle issue d'une norme ?

#### Méthode. (*Montrer qu'une distance n'est pas issue d'une norme*)

Si une distance sur un espace normé n'est pas homogène en les scalaires, elle ne peut être issue d'une norme.

### 2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties

#### 2.1.3.1 Définition

On note que la distance à une partie est toujours définie en tant que borne inférieure d'une famille minorée non vide de réels.

#### 2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On introduit le problème d'optimisation suivant :

#### Définition. (*Distance à une partie atteinte*)

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x$  un point de  $E$ . On dit que la distance de  $x$  à  $A$  est atteinte, ou que  $x$  réalise la distance de  $x$  à  $A$ , s'il existe  $y \in A$  tel que

$$d(x, y) = d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z).$$

On remarque que l'hypothèse  $y \in A$  est tout le fond de cette définition.

#### Exercice 3

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace métrique  $E$  et  $x \in E$ . Existe-t-il toujours  $y \in E$  tel que  $d(x, A) = d(x, y)$ ? Que dire dans le cas d'un espace vectoriel normé?

Notons également que le problème de réalisation de la distance n'a de sens que dans un espace métrique (qui dit distance...)

Si le point considéré appartient à la partie, alors la distance est trivialement atteinte en ce point et la notion n'a aucun intérêt. Sans autre condition supplémentaire, la distance d'un point à une partie n'a aucune raison d'être atteinte. On a même le fait général suivant :

### Fait. (*Distance à un ouvert*)

Dans un espace normé, la distance à un ouvert d'un point n'appartenant pas à cet ouvert, n'est jamais atteinte.

Soit  $O$  un ouvert de  $E$  et  $x \notin O$ . Si  $O$  est vide,  $d(x,O) = +\infty$  ne peut être atteinte par une distance (finie). Sinon, supposons que  $d(x,O) = d(x,y)$  pour un certain  $y \in O$ . Par définition d'un ouvert il existe une boule  $B(y,\rho)$ ,  $\rho > 0$ , incluse dans  $O$ . Alors le point  $z = (1 - \frac{\rho/2}{d(x,y)})x + \frac{\rho/2}{d(x,y)}y$  est dans  $O$  et sa distance à  $x$  est strictement inférieure à  $d(x,y)$ , absurde.

Intuitivement, il faut des hypothèses de rigidité sur  $A$  pour que la distance soit atteinte : typiquement, fermeture, compacité, complétude. La distance à un compact est l'exemple le plus élémentaire de tous.

### Propriété. (*Distance à un compact*)

La distance d'un point à un compact non vide est atteinte.

▷ Soit  $x$  un point de  $E$  et  $K$  un compact. Il s'agit de remarquer que l'application  $x \rightarrow d(x,y)$  est continue, ce qui découle de ce qu'elle est 1-lipschitzienne, par la seconde inégalité triangulaire. L'image continue d'un compact étant compacte, donc fermée, l'infimum  $\inf_{z \in K} d(x,z)$  est un minimum, c'est-à-dire atteint. (On peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes qui est sensiblement la même chose.) ■

Par contre, la distance à un fermé peut facilement ne pas être atteinte.

### Contre-exemple. (*Distance à un fermé non atteinte : l'hyperbole polynomiale*)

Les propriétés suivantes montrent que, dans un espace vectoriel normé, on doit se placer en dimension infinie pour trouver un tel contre exemple.

Dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme infinie, la partie  $A = \{(1 + \frac{1}{2^n})X^n, n \in \mathbb{N}\}$  est fermée : elle est discrète et les points ne peuvent s'accumuler qu'au voisinage de l'infini. La distance au polynôme nul est clairement nulle, mais évidemment jamais atteinte. □

On dispose pourtant du résultat suivant.

**Proposition.** (*Distance à un fermé dans un espace métrique sympathique*)

On suppose que toutes les boules fermées de  $E$  sont compactes. Soit  $F$  un fermé de  $E$  et  $x \in E$ . Alors la distance à  $E$  est atteinte.

▷ La preuve est grossièrement la même que dans les espaces vectoriels de dimension finie, qui, par le théorème de Riesz, écopent de la propriété précédente. On laisse le soin au lecteur d'adapter la preuve ci-dessous, faite dans ce cas beaucoup plus pratique, mais fondamentalement inchangée. ■

On s'intéresse donc au cas des espaces vectoriels normés, où les choses se déroulent un peu mieux. Soit donc  $E$  un espace vectoriel normé par  $\|\cdot\|$ . On note  $d$  la distance issue de la norme.

**Propriété.** (*Distance à un fermé de dimension finie*)

Soit  $F$  un fermé de  $E$  inclus dans un sous-espace de dimension finie. Soit  $x \in E$ . Alors la distance de  $x$  à  $E$  est atteinte.

▷ Classique. ■

**Corollaire.** (*Distance à un sev de dimension finie*)

La distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie, est toujours atteinte.

▷ Puisque tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie est fermé dans  $E$ . ■

En dimension infinie, rien ne va plus, même si le sous-espace en question est fermé.

**Contre-exemple.** (*Distance à un sous-espace vectoriel fermé non atteinte*)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles de limite nulle muni de la norme infinie. La forme  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x_n$  est clairement linéaire, continue et non nulle ; son noyau est donc un hyperplan fermé de  $E$ . Pourtant, pour tout point  $x \notin H$ , la quantité  $d(x,H)$  n'est pas atteinte.

Vérifions-le. Soit  $x$  quelconque, hors de  $H$ . Remarquons que  $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$ . En effet, pour tout  $h \in H$ ,  $|f(u-h)| \leq \|f\| |u-h|$  d'où  $\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq d(x,H)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un vecteur unitaire  $s$  tel que  $|f(s)| \geq \|f\| - \varepsilon > 0$ . On a donc, en prenant  $h = u - \frac{f(u)}{\|f\|}s$ ,  $d(u,H) \leq \|u-h\| \leq \frac{\|f(u)\|}{\|f\|-\varepsilon}$ .

Par conséquent, si  $d(x,H)$  est atteinte, alors  $f$  atteint sa norme sur la sphère. En effet,  $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|f(u-z)|}{\|f\|}$ . Or la norme de  $f$  est 2 en considérant les  $(1,\dots,1,0,\dots)$ . Seulement,  $f$  atteint sa norme seulement en  $(1,\dots) \notin E$ . Par contraposée,  $d(x,H)$  n'est pas atteinte. □

On rappelle en parallèle du cours sur les espaces de Hilbert que l'on dispose du théorème très fort suivant dans les espaces préhilbertiens et complets :

**Théorème. (*Théorème de projection sur un convexe fermé*)**

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte.

En particulier :

**Corollaire. (*Distance à un sous-espace fermé dans un Hilbert*)**

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un sous-espace de Hilbert est toujours atteinte.

▷ En effet, un sous-espace de Hilbert est complet donc fermé ; de plus, un sous-espace vectoriel est convexe. ■

On voit d'abord que l'hypothèse de complétude était nécessaire. L'existence d'un produit scalaire est cruciale, de même que la convexité. Les trois contre-exemples suivants permettent de trancher dans les cas qui restent.

**Contre-exemple. (*Si l'on n'est plus dans un complet*)**

On considère l'espace pourtant préhilbertien  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$  muni de la norme 2. Alors le noyau  $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^1 f = 0\}$  de la forme linéaire  $f \mapsto \int_0^1 f$  est un convexe fermé, car  $f$  est continue et un espace vectoriel est convexe. La distance de 1 à  $F$  n'est pourtant pas atteinte.

Exercice : s'inspirer du contre-exemple précédent.

On a en fait le fait général suivant : la distance au noyau d'une forme linéaire continue d'un point ne lui appartenant pas est atteinte si et seulement si la norme de cette forme est atteinte. Nous démontrons ce résultat dans la partie sur les espaces vectoriels normés déjà vu si tout est normal. □

**Contre-exemple. (*Si l'on n'est plus dans un Hilbert*)**

On reprend l'exemple développé des suites qui tendent vers zéro et du noyau de la forme linéaire qui à  $x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ .

Puisque c'est un Banach. □

**Contre-exemple. (*Distance à un fermé dans un Hilbert*)**

On cherche donc une partie non convexe.

On a en fait en toute généralité : soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension infinie (tout Hilbert de dimension infinie convient alors). Alors la distance de l'origine à la sphère unité de  $E$  n'est pas atteinte. D'après le théorème de Riesz, la sphère unité de  $E$  n'est pas compacte, donc il existe une suite  $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$  qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. Posons  $x'_n = (1 + \frac{1}{n+1})x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $A = \{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Cette partie est un fermé de  $E$  (clairement non convexe,

d'ailleurs). En effet, si  $u$  est une suite convergente à valeurs dans  $A$ , soit elle admet un nombre fini de termes, auquel cas elle est stationnaire donc de limite dans  $A$ , soit elle admet un nombre infini de termes, auquel cas on peut en extraire une sous-suite qui est également une sous-suite de  $(x'_n)$ . Cependant, celle-ci tend vers l'infini, donc la sous-suite également, donc ne converge pas, ce qui est exclu.

De plus, et de façon immédiate, on observe que  $d(0, A) = 0$  en observant  $d(0, x'_n)$  qui tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini, mais que  $d(0, x'_n) = 1 + \frac{1}{n+1} \neq 1$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , donc la distance de 0 à  $A$  n'est pas atteinte.  $\square$

Grâce au contre-exemple général précédent, on peut énoncer sans autre justification la caractérisation suivante.

#### Propriété. (*Caractérisation de la dimension par les distances à fermés*)

Un espace vectoriel normé est de dimension finie, si et seulement si, la distance de tout point à tout fermé est atteinte.

##### 2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances

On se demande maintenant quelles conditions supplémentaires ajouter pour que, lorsque la distance d'un point à une partie est atteinte par un point dans cette partie, ce point d'atteinte soit unique.

Il n'y a aucune raison que ce soit le cas, en particulier on peut avoir une infinité de points en lequel la réalisation de la distance a lieu, comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple. (*Distance atteinte une infinité de fois*)

Dans  $\mathbb{R}^2$  le plan muni de la distance euclidienne, on considère la sphère unité  $A = S(0,1)$  et l'origine  $x = (0,0)$ . Alors  $d(A, x)$  est atteinte en un infinité de points.

Pour tout  $y \in A$ ,  $d(x, y) = 1$  par définition. Ainsi en passant à l'infimum,  $d(x, A) = 1$ . Or  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{R}$  (par exemple, elle contient  $\mathbb{U}_p$  pour tout nombre premier  $p$ ). On a le résultat.

Notons que  $A$  et donc l'ensemble des points de réalisation de la distance est même indénombrable.

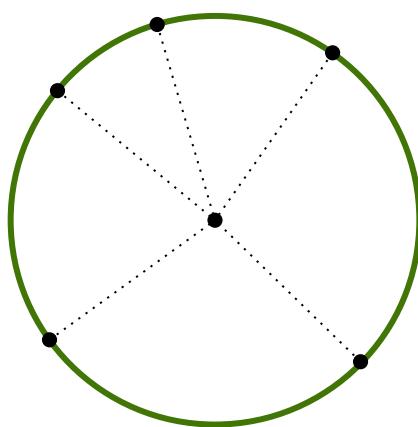


FIGURE 2.1.1 : *Distance de l'origine à la sphère unité.* —  
La distance de la sphère à son centre est atteint en une infinité de points.

De façon plutôt intuitive, le problème vient de ce que la partie  $A$ , globalement éloignée du point  $x$ , peut « s'approcher de  $x$  » plusieurs fois. Un exemple très simple est donné par la figure 2.1.2.

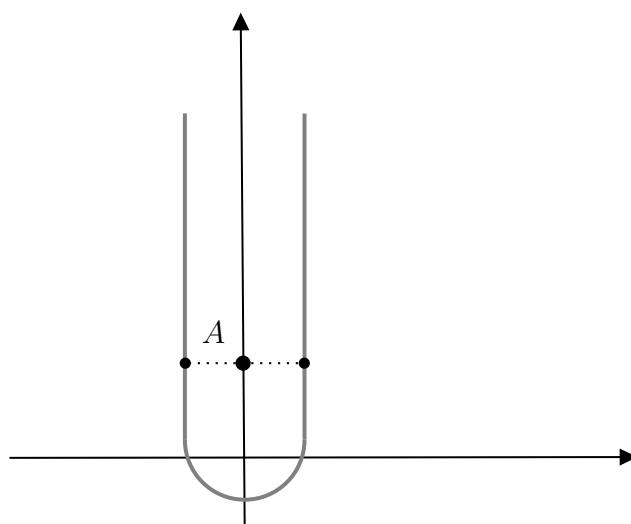


FIGURE 2.1.2 : *Distance de la fourche à un point de la bissectrice.* —  
Sur la figure ci-dessus, quitte à prendre le point  $A$  suffisamment éloigné du cul de la courbe en U, si tant est qu'il soit sur une droite équidistante à ses deux asymptotes, sa distance à la courbe est atteinte en deux points distincts opposés par symétrie de la figure.

On comprend que si la figure est convexe, une telle disposition ne peut se concevoir. On a le résultat suivant :

**Propriété. (*Distance à un convexe dans un espace préhilbertien*)**

On se place dans un espace préhilbertien. Si la distance d'un point à une partie convexe est atteinte, alors ce point est unique.

▷ Soient  $C$  un convexe d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $x \in E$ . Supposons que la distance de  $x$  à  $C$  soient atteintes en deux points  $y, y' \in C$ , c'est-à-dire  $d(x, C) = d(x, y) = d(x, y')$ . Soit  $z = \frac{y+y'}{2}$  le milieu de  $[y, y']$ . Alors  $z \in C$  par convexité. Montrons que  $d(x, z) \leq d(x, y) = d(x, C)$ . On a :  $2d(x, z) = 2\|x - z\| = \|2x - y - y'\| \leq \|x - y\| + \|x - y'\| = d(x, y) + d(x, y') = 2d(x, y')$  d'où le résultat. Si  $y \neq y'$ , on a même l'inégalité stricte, car le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire s'exprime, pour une norme issue d'un produit scalaire,  $x - y = \lambda(x - y')$  où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $x - y$  et  $x - y'$  ont la même norme, on obtient, si  $d(x, z) = d(x, y)$ ,  $\lambda = \pm 1$  d'où  $\lambda = 1$ . De plus, par le cas d'égalité,  $(1 - \lambda)x = y - \lambda y'$  en ramenant tout du bon côté, d'où  $y = y'$ . Mais  $d(x, z) < d(x, y)$  est exclu par définition de la distance à une partie. Par contraposée,  $y = y'$ . ■

Remarquons que la distance à un convexe n'est pas forcément atteinte : il suffit de considérer une boule ouverte et un point hors de cette boule.

#### Exercice 4

Fournir un contre-exemple dans le cas d'un convexe d'un espace non préhilbertien.

▷ Éléments de réponse.

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance associée à la norme  $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ , on choisit le point  $M = (1, 0)$  et la partie  $D = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ . Alors pour tout  $N = (0, y) \in D$ ,  $MN = \|(1, -y)\| = \max(1, |y|)$ . L'infimum de cet ensemble sur  $y \in \mathbb{R}$  est 1, qui est atteint pour tout  $N \in \{0\} \times [-1, 1]$ , soit une infinité de points.

Les deux énoncés suivant permettent également de garantir l'unicité du projeté.

#### Théorème. (*Théorème de projection sur un convexe fermé*)

En fait, dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte *en un unique point*.

Au vu des considérations précédentes, on peut aussi énoncer sans problème le fait suivant, déjà connu des élèves familiers du cours d'optimisation :

#### Propriété. (*Projection sur un compact convexe*)

Soit  $n$  un entier naturel quelconque. Soit  $K$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  un point. La distance de  $x$  à  $K$  est atteinte en un unique point.

▷ La compacité assure l'existence, la convexité l'unicité. ■

### 2.1.4 Équivalence de distances

**Définition.** (*Lipschitz-équivalence des distances*)

Deux distances sur  $E$  sont dites *Lipschitz-équivalentes*, s'il existe des constantes  $c$  et  $c'$  telles que  $cd_1 \leq d_2 \leq c'd_1$ .

**Observation.** (*Caractérisation de la Lipschitz-équivalence par l'identité*)

Deux distances  $d_1, d_2$  sur  $E$  sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si l'identité de  $E$  est un  $(d_1, d_2)$ -homéomorphisme.

**Définition.** (*Lipschitz-équivalence des distances*)

Deux distances sur  $E$  sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent les mêmes ouverts.

On peut montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, si et seulement si toute boule de l'une est incluse dans une boule de l'autre de même centre, et réciproquement. On a également une caractérisation séquentielle : deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente au sens de l'une converge au sens de l'autre. Par ailleurs, le cas échéant, les limites coïncident.

**Propriété.** (*Lipschitz-équivalence implique équivalence topologique*)

Deux normes Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

▷ Le vérifier. ■



Contrairement à ce qui se passe pour les normes, la réciproque est fausse en général pour des distances non issues de normes.

**Contre-exemple.** (*Distances topologiquement équivalentes non-Lipschitz-équivalentes*)

Prenons  $h : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$  un homéomorphisme quelconque. Prenons la distance  $d_1$  associée à la valeur absolue sur  $]0,1[$  et l'on définit :  $d_2(x,y) = |h(x) - h(y)|$ . Dans ce cas,  $d_1$  et  $d_2$  sont des distances sur  $]0,1[$  qui définissent la même topologie, mais ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

En effet, l'une est bornée mais l'autre non. □

## 2.2 Boules

### 2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées

#### Exercice 5 (*Extrêmement formateur*)

Donner une exemple de boule fermée qui soit ouverte mais ne soit pas une boule ouverte.  
On pourra se placer sur un sous-espace métrique du plan muni de la norme euclidienne.

▷ Éléments de réponse.

On prend comme indiqué  $E = [-1, -1] \times \{0\} \cup \{0\} \times ]1, 2]$  et la boule  $B = B_f(0, 1)$ .

### 2.2.2 Premières propriétés

### 2.2.3 Propriétés géométriques

#### Propriété. (*Inclusions réciproques des boules*)

Soit un espace métrique  $E$  et  $a \in E$ ,  $r < r'$  deux réels. Alors

$$B_0(a, r) \subseteq \overline{B_0(a, r)} \subseteq B_F(a, r) \subseteq B_0(a, r') \subseteq \overline{B_0(a, r')} \subseteq B_F(a, r').$$

#### Propriété. (*Propriété fondamentale des sous-boules*)

Soit un espace métrique  $E$ . Soient  $a, b$  deux points de  $E$  et  $r > 0$ . On suppose que  $b \in B(a, r)$ . Alors  $B(b, r - d(a, b)) \subseteq B(a, r)$ . De plus, si  $\rho = \frac{d(a, b)}{2}$ , alors

$$B(b, r - \rho) \subsetneq B(a, r).$$

#### Propriété. (*Intercalaison de sous-boules*)

Soit un espace métrique  $E$ . Soient  $a, b \in X$  et  $r, s > 0$ . Soit  $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$ . Soit  $\rho = \min(r - d(a, x), s - d(b, x))$ . Alors  $\rho > 0$  et  $B(x, \rho) \subseteq B(a, r) \cap B(b, s)$ .

#### Propriété. (*Homéomorphie des boules dans un evn*)

Dans un espace vectoriel métrique, les boules ouvertes forment une base de la topologie canonique.

#### Propriété. (*Déplacement de boules*)

Soit un espace **vectoriel**  $E$ . Soient  $a \in E$  et  $r > 0$ . Alors  $z \in B(0, 1) \iff rz + a \in B(a, r)$ .

**Corollaire.** (*Homéomorphie des boules dans un evn*)

Dans un espace vectoriel normé, toutes les boules sont homéomorphes.

## 2.3 Limites

### 2.3.1 Limites de suites

On dispose du résultat suivant, dont on s'étonne seulement qu'il ne soit pas plus généralement enseigné.

**Propriété.** (*Invariance de la limite par permutation*)

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On suppose que  $u$  tende vers  $l \in E$ . Alors pour toute permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$ , la suite  $(u_{\varphi(n)})$  est convergente de limite  $l$ .

▷ Reprenons les notations du théorème. Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut montrer qu'il existe un rang  $N$  à partir duquel tout  $n \geq N$ ,  $u_{\varphi(n)} \in B(l, \varepsilon)$ . Or par hypothèse, il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_n \in B(l, \varepsilon)$ . Comme  $\varphi$  est injective, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi(n) \geq N_0$  dès que  $n \geq N_1$ . En effet, supposons le contraire. Cela signifierait que pour tout entier naturel  $N_1$ , on peut trouver un entier  $n \geq N_1$  tel que  $\varphi(n) < N_0$ . Autrement dit, on peut construire un sous-ensemble infini  $X$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $\varphi(X) \subseteq \{1, 2, \dots, N_0 - 1\}$ . Mais l'image d'un ensemble infini par une application injective est infini, contradiction. Par conséquent, pour  $n \geq N_1$ ,  $u_{\varphi(n)} \in B(l, \varepsilon)$ . ■

Tous les termes de la suite sont dans le segment rouge à partir d'un certain rang

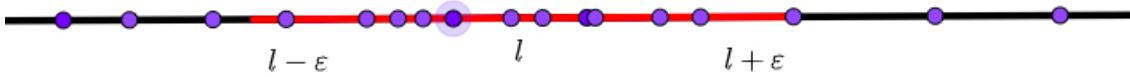


FIGURE 2.3.1 : *Invariance de la limite par permutation.* —

Par définition de la limite, tous les termes de la suite sont dans une boule centrée en la limite (ici, dans le cas de la droite réelle) à partir d'un certain rang. Ainsi, seulement un nombre fini de termes permuteds seront hors de la boule également.

*Remarque.* En observant la preuve, on se rend compte que l'on a montré le résultat pour toute application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injective. On retrouve en particulier le résultat sur les limites des suites extraites, puisque toute extractrice est strictement croissante, donc injective.

On se rend compte, en fait, que l'hypothèse d'injectivité est équivalente à ce que la nouvelle suite construite comporte une infinité des termes de la suite d'origine. Le théorème précédent énonce précisément que cette condition suffit à ce que la propriété asymptotique de limite soit inchangée.

Ceci se généralise, dans le cas où  $E = \mathbb{R}$ , à des limites infinies.

### Exercice 6

Montrer que, si une suite  $(u_n)$  diverge, alors pour toute permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$ ,  $(u_{\varphi(n)})$  diverge.

▷ **Éléments de réponse.**

Se ramener au théorème précédent.

#### 2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence

**Propriété.** (*Caractérisation de la limite par les sous-sous-suites*)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans l'espace métrique  $(E, d)$ . On suppose que de toute sous-suite de  $u$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge. Alors  $(u_n)$  converge.

▷ Supposons que  $u$  ne converge pas. Alors pour tout  $l \in E$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tel que  $d(u_{n_k}, l) > \varepsilon$ . En appliquant de façon itérée ceci à  $n_k$ , on extrait une sous-suite de  $u$  vérifiant  $d(u_{n_k}, l) > \varepsilon$  pour tout  $k \geq 0$ . Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente de  $(u_{n_k})$ , notée  $(u_{n_{k_l}})$ , convergeant vers  $m$ . Absurde, car ■

*Remarque.* Il est clair qu'il ne suffit pas de pouvoir extraire une sous-suite convergente de  $u$ , pour qu'elle soit convergente : considérer  $((-1)^n)$  bornée et la suite des termes pairs.

##### 2.3.1.1.1 Théorèmes de convergence grossière des suites

Dans cette section, on énonce trois théorèmes qui ne le sont jamais proprement dans n'importe quel cours élémentaire de mathématiques, mais qui le devraient être, tant ils ont la nécessité d'exister par leur évidence, et qu'ils facilitent l'emploi de la notion de sous-suite dans des cas particuliers. En particulier, il est important de retenir ces résultats et l'aisance à les établir lorsqu'on travaillera en topologie générale dans un espace métrique.

Les théorèmes sont de trois natures. Ils portent sur :

1. les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ;
2. les suites passant une infinité de fois sur la même valeur ;
3. les suites à valeurs dans l'image d'une suite.

Dans les trois cas, et de façon principale pour les deux premiers, on s'intéresse aux suites convergentes vérifiant l'une de ces conditions.

On dispose donc des propositions suivantes, qui, quoique largement ignorée, permet de manipuler avec des outils topologiques les ensembles de la forme  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Les choses ne sont pas si simples, mais avec un peu de travail, on s'y ramène dans trop de peine.



Une suite à support fini n'est pas nécessairement périodique à partir d'un certain rang !

### Contre-exemple. (*Suite à support fini non périodique même à pcr*)

La suite des décimales de  $\pi$  n'est pas périodique à partir d'un certain rang, sinon il existerait un entier  $n$  tel que  $10^n\pi$  soit rationnel, car sa suite de décimales serait périodique, et donc  $\pi$  le serait.  $\square$

On se servira du lemme suivant, qui découle des propriétés sur les ensembles discrets d'un espace métrique. On peut néanmoins le montrer par des moyens élémentaires.

### Lemme. (*Suites convergentes à support fini*)

Une suite convergente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est stationnaire.

► Soit  $u$  une suite d'un espace métrique  $E$ . On suppose que  $u$  converge et ne prend qu'un nombre fini  $n$  de valeurs. Montrons le résultat par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour un certain  $n$ . Soient  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  les valeurs prises par la suite. Si  $u$  ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur  $a_{n+1}$ , alors à partir d'un certain rang, elle ne prend plus que  $n$  valeurs : par hypothèse de récurrence, elle est donc stationnaire. Sinon, elle prend une infinité de fois la valeur  $a_{n+1}$ . On construit une sous-suite de  $u$  qui ne prend que la valeur  $a_{n+1}$  : on pose  $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k = a_{n+1}\}$  et  $\varphi(0), \dots, \varphi(p)$  étant construits, on pose  $\varphi(p+1) = \min\{k \in [\varphi(p)+1, +\infty], u_k = a_{n+1}\}$  qui existe, car si la partie considérée était finie,  $u$  prendrait au plus  $\varphi(p)+2$  fois la valeur  $a_{n+1}$ . On a donc une sous-suite qui converge trivialement vers  $a_{n+1}$ , donc la limite de  $u$ , supposée convergente, est  $a_{n+1}$ . Soit  $i \in [1, n]$ . Supposons que  $u$  prenne une infinité de fois la valeur  $a_i$ . Alors de même que précédemment, on construit une sous-suite constante égale à  $a_i \neq a_{n+1}$ , ce qui est absurde, car une suite convergente n'a qu'une limite. Ainsi, à partir du rang  $N_i < +\infty$ ,  $u$  ne prend plus la valeur  $a_i$ . Par conséquent, à partir du rang  $\max i \in [1, n] N_i < +\infty$ ,  $u$  ne prend plus que la valeur  $a_{n+1}$ , elle est donc stationnaire à  $a_{n+1}$ . ■

On peut donner une preuve plus topologique de ce résultat, qui montre bien qu'elle fonctionne grâce à l'axiome de séparation :

▷ Notons  $l$  la limite de la suite  $u$  qui ne prend que les valeurs deux à deux distinctes  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On peut noter  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $D = \text{Diam}(A)$ . Notons  $\rho = \frac{1}{2} \min_{i \neq j} d(x_i, x_j) = \frac{D}{2}$ . Alors à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de  $u$  sont dans  $B(l, \rho)$  qui ne peut par définition contenir deux termes distincts de  $A$ . S'il n'en contient aucun, c'est contradiction, car  $u_N \in B(l, \rho)$  et  $u_N \in A$ . C'est terminé. ■

Au regard de la première preuve du résultat précédent, on peut même énoncer le lemme précédent, qui a été démontré :

**Lemme. (*Suites convergentes repassant au même endroit à l'infini*)**

Une suite convergente qui prend une infinité de fois la valeur  $l$  converge vers  $l$ .

On peut surtout dire :

**Propriété. (*Suite à valeurs dans l'image d'une suite*)**

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On note  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ . Alors  $(a_n)$  est à support fini ou il existe une suite extraite de  $(a_n)$  qui est une sous-suite de  $(u_n)$ .

▷ Si  $(a_n)$  n'est pas à support fini, alors elle prend une infinité de termes d'indices distincts dans  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . De manière générale, par définition, il existe donc une correspondance quelconque (par forcément croissante)  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = u_{f(n)}$ . Par hypothèse, l'image de  $f$  est infinie. Construisons une sous-suite de  $(a_{\varphi(n)})$  de  $(a_n)$  qui soit une sous-suite de  $(u_n)$ . Posons  $\varphi(0) = 0$ . Maintenant, pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé,  $a_{\varphi(0)}, \dots, a_{\varphi(n)}$  étant construits, on pose  $\varphi(n+1) = \min\{k \in [\varphi(n)+1, +\infty[, a_k \neq a_{\varphi(0)}, \dots, a_k \neq a_{\varphi(n)} \text{ et } f(k) > f \circ \varphi(n)\}$ . Ce minimum existe, car par hypothèse,  $(a_k)_k$  n'est pas à support fini, donc n'est pas à support fini à partir du rang  $\varphi(n)+1$ , et si la partie considérée était vide, soit tous les termes à partir de ce rang seraient égaux à l'un de  $a_{\varphi(i)}$ , ce qui exclu, car ceux-ci sont en nombre fini, soit on aurait  $f(k) \leq f \circ \varphi(n)$  fixe, ce qui est absurde, car on a vu que  $f$  ne peut envoyer le complémentaire d'une partie finie sur une partie finie, autrement son image serait finie. L'extractrice  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  est bien strictement croissante par construction, donc  $(a_{\varphi(n)})$  est bien une sous-suite de  $a$ . De plus, on a imposé  $f \circ \varphi(n+1) > f \circ \varphi(n)$ , ce qui implique que  $f \circ \varphi$  est également une extractrice. Or pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{\varphi(n)} = u_{f \circ \varphi(n)}$ , donc  $(a_{\varphi(n)})$  est une sous-suite de  $u$ . ■

On en déduit ce qui suit :

**Conséquence. (*Suites convergentes à valeurs dans l'image d'une suite*)**

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On note  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente d'éléments de  $A$ . Alors  $(a_n)$  est stationnaire ou tend vers une valeur d'adhérence de  $u$ .

▷ Supposons  $(a_n)$  convergente. On note  $l$  sa limite. Si  $(a_n)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est stationnaire. Sinon, d'après la proposition précédente, elle admet une sous-suite qui est une sous-suite de  $u$ , qui converge également vers  $l$ , car toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite. Ainsi,  $u$  admet une sous-suite convergeant vers  $l$ , soit  $l$  est une valeur d'adhérence de  $u$ . ■

## 2.4 Compacité

### 2.4.1 Suites à valeurs dans un compact

On dispose de la proposition suivante, souvent oubliée, mais qui peut se révéler très utile.

**Propriété.** (*Suite compacte n'ayant qu'une valeur d'adhérence*)

Soit  $K$  un partie compacte de l'espace métrique  $E$ . Si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $K$  n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.

▷ Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit  $l$  l'unique valeur d'adhérence de  $u$ . Par définition de la limite, on peut écrire  $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N d(u_n, l) > \varepsilon$ . On construit donc aisément une extractrice et une sous-suite de  $u$  qui ne peut avoir  $u$  comme valeur d'adhérence, puisqu'elle reste hors de  $B(l, \varepsilon)$ . Cependant, cette sous-suite  $v$  a valeurs dans un compact donc admet une sous-suite  $w$  qui a une unique valeur d'adhérence. Celle-ci vaut forcément  $l$ , car  $w$  est aussi une sous-suite de  $u$ . Contradiction. ■

Conjointe à la propriété sur les valeurs d'adhérence d'une sous-suite, on obtient le théorème de caractérisation suivante dans les compacts :

**Théorème.** (*Caractérisation de la convergence dans les compacts*)

Soit  $u$  une suite à valeurs dans un compact. Alors  $u$  converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

▷ Le sens réciproque vient d'être traité. Pour le sens direct, on savait déjà qu'une suite convergente (à valeurs dans un ensemble quelconque) admet une unique valeur d'adhérence. ■

**Théorème.** (*Caractérisation des Banach par Banach*)

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

▷ Seul le sens direct nous intéresse véritablement. Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  telle que  $\sum |x_n|$  converge. Alors les sommes  $S_N = \sum_{n \leq N} x_n$  vérifient pour tout

$M \geq N$  :

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\|.$$

Or, la série  $\sum \|x_n\|$  étant convergente, les tranches de Cauchy du dernier membre tendent vers zéro lorsque  $M, N$  tendent vers  $+\infty$ . Ainsi, la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Comme  $E$  est complet, elle converge, c'est-à-dire que la série est convergente.

On donne la réciproque par souci d'exhaustivité. Supposons que toute série absolument convergente converge dans  $E$ . Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy à valeurs dans  $E$ . On peut extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  telle que  $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$ , en choisissant  $\varphi(n) = N$  le module associé à  $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ . On pose alors  $u_n = x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$  et la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Or  $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(0)} = \sum_{k=0}^n u_k$ , donc on déduit que la sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  converge. Comme toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge, on en déduit la convergence de  $(x_n)$ , et  $E$  est un espace de Banach. ■

## 2.5 Complétude

### 2.5.1 Suites de Cauchy

**Propriété. (Condition suffisante de non-Cauchitude)**

Si pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$   $i \neq j$ ,  $d(x_i, x_j) > \varepsilon > 0$ , alors non seulement  $(x_n)$  n'est pas de Cauchy mais n'admet aucune sous-suite convergente.

### 2.5.2 Espaces complets

**Exemples. (Espaces complets)**

1.  $\mathbb{R}$  muni de la distance dérivée de la valeur absolue est complet.
2.  $]0, 1]$  n'est pas complet.
3.  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  est complet pour la norme infinie.
4.  $\mathcal{C}_b^0((X_1, d_1), (X_2, d_2))$  est complet pour  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X_1} d_2(f(x), g(x))$  si  $(X_2, d_2)$  est complet.
5. Un ensemble borné en dimension finie est complet si et seulement s'il est compact.

### Contre-exemple. (*Un espace non complet*)

On considère  $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  pour  $p \in [1, \infty[$ . Prenons pour tous  $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Alors  $f_n \rightarrow f = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$  et par convergence dominée,  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m, q > n} \|f_q - f_m\|_p = 0$ .

La suite  $(f_n)$  est donc de Cauchy. Pourtant, elle ne converge pas dans  $\mathcal{C}^0([0,1])$ , puisque la limite n'est pas continue et unique dans  $L^p$ .  $\square$

*Remarque.* On verra que ceci montre que cet espace n'est pas fermé dans  $L^p$ .



On voit là la difficulté de traiter avec l'espace des fonctions continues sur un compact. Cet espace peut être muni de beaucoup de normes, en particulier, toutes les normes  $p$ , et se plonge ainsi dans tous les espaces  $L^p$  (qui, eux, par définition, ne peuvent être muni que de la norme  $L^p$ , ou de normes inférieures...).

### Propriété. (*Sous-espace complet d'un espace quelconque*)

Tout sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

▷ Soit  $F$  un sous-espace métrique complet d'un espace métrique  $E$  quelconque. Soit  $u$  une suite à valeurs dans  $F$  convergeant dans  $E$  vers  $l$ . Toute suite convergente est de Cauchy, dans n'importe quel espace, donc  $u$  est une suite de Cauchy de  $E$  à valeurs dans  $F$ . C'est extrinsèque :  $u$  est donc une suite de Cauchy de  $F$ . Puisque  $F$  est complet,  $u$  converge donc dans  $F$  vers  $l'$ . Par unicité de la limite,  $l = l' \in F$ , donc  $F$  est fermé. ■

### Propriété. (*Compact $\Rightarrow$ complet*)

Tout espace métrique compact est complet.

Plus généralement, toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

### 2.5.3 Théorie de Baire dans le cas complet

Pour s'échauffer, on énonce la propriété suivante :

### Propriété. (*Intersection finie d'ouverts denses*)

Dans un espace topologique quelconque, toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

▷ Soit  $O_1, \dots, O_n, n \in \mathbb{N}$ , des ouverts denses de l'espace  $E$ . Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque. On veut montrer  $(O_1 \cap \dots \cap O_n) \cap \Omega \neq \emptyset$ . On pourrait écrire :

$$(O_1 \cap \dots \cap O_n) \cap \Omega = (O_1 \cap \Omega) \cap \dots \cap (O_n \cap \Omega),$$

et chaque  $O_i \cap \Omega$  est non vide, mais cela ne suffit pas pour conclure. Par contre, on peut raisonner par récurrence :  $O_1 \cap \Omega$  est non vide, et  $O_{i+1} \cap [(O_i \cap \dots \cap O_1) \cap \Omega]$  est non vide, car  $O_{i+1}$  est dense et  $(O_i \cap \dots \cap O_1) \cap \Omega$  est un ouvert non vide, par intersection finie d'ouverts et car  $O_i \cap \dots \cap O_1$  est dense dans  $E$  par hypothèse. ■



On se rappellera de ce butoir dans la preuve qui justifie que la preuve du théorème de Baire utilise le théorème des fermés emboîtés : *on a besoin d'une densité jointe et non d'une densité ouvert par ouvert* qui donne éventuellement des ouverts disjoints, donc d'intersection vide.

Puisque la propriété duale de la densité et le fait d'être d'intérieur vide, on peut l'énoncer également de la manière suivante :

### Propriété. (*Réunion finie de fermés d'intérieur vide*)

Dans un espace topologique quelconque, toute réunion finie de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Plus généralement, la théorie de Baire se demande ce qui se passe dans le cas d'une intersection finie.

### Définition. (*Espace de Baire*)

On dit qu'un espace topologique  $E$  est un *espace de Baire* s'il vérifie la *propriété de Baire* énoncée comme suit : toute intersection d'ouverts dense est dense.

On énonce un lemme célèbre et utile pour la preuve du théorème de Baire, qui donne que les espaces métriques complets, **en particulier les espaces de Banach**, sont tous des espaces de Baire.

### Théorème. (*Théorème des fermés emboîtés*)

Dans tout espace métrique complet, toute intersection décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers zéro est réduite à un singleton.

▷ Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $(F_n)$  une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(F_n) = 0$  où  $\delta(F_n) = \sup_{(x,y) \in F_n^2} d(x,y)$ . Montrons qu'il existe

$x \in E$  tel que  $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est non vide donc il contient un élément  $x_n$  d'après l'axiome du choix dénombrable. Soit  $\varepsilon > 0$ . Les diamètres tendant vers zéro, on peut choisir  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta(F_N) < \varepsilon$ , et alors pour tous  $p, q > N$ ,  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ , car par décroissance de  $(F_n)$ ,  $x_p, x_q \in F_N$ . La suite des  $(x_n)$  est donc une suite de Cauchy.  $E$  étant complet, elle converge vers un élément  $x$  de  $E$ . Or pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $F_p$  est fermé et  $x_n \in F_p$  pour tout  $n \geq N$ , donc  $x$  appartient à  $F_p$ . On en déduit que  $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$ . Ainsi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est non vide. Supposons enfin que  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in F_n$  donc  $0 \leq d(x, y) \leq \delta(F_n)$ . En passant à la limite,  $d(x, y) = 0$  d'où par séparation  $x = y$ . On en déduit que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est le singleton  $\{x\}$ . ■

**Remarque importante.** On montre en fait un résultat plus fort. Sous les hypothèses du lemme, toute suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  adaptée à l'emboîtement des fermés, c'est-à-dire telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F_n$ , est convergente, de limite  $x$  telle que  $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

### Théorème. (*Théorème de Baire*)

Dans tout espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Autrement dit, tout espace métrique complet est de Baire.

▷ Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses dans  $E$ . Montrons que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  est dense dans  $E$ , c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide  $V$  de  $E$ ,  $V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$ . Soit donc  $V$  un ouvert de  $E$ . On construit par récurrence une suite  $(B_n)$  de boules fermées de  $E$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  est de rayon non nul inférieur à  $\frac{1}{2^n}$ , et d'autre part,  $B_0 \subseteq O_0 \cap V$  et  $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ . On notera que ces boules sont emboîtées.

L'ouvert  $O_0$  est dense dans  $E$  donc  $O_0 \cap V \neq \emptyset$ . Or cet ensemble est ouvert par intersection de deux ouverts, donc il existe une boule ouverte  $B(x_0, r) \subseteq O_0 \cap V$ . Si  $B_0$  est la boule fermé de centre  $x_0$  et de rayon  $r/2$  (ou 1 si  $r/2 > 1$ ), on a donc  $B_0 \subseteq O_0 \cap V$ . Supposons les boules  $B_0, \dots, B_n$  construites et vérifiant les propriétés voulues. L'ouvert  $O_{n+1}$  étant dense dans  $E$ ,  $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$  est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte  $B(x, r)$  incluse dans  $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ , et si l'on prend pour  $B_{n+1}$  la boule fermé de centre  $x$  et de rayon  $\min(r/2, \frac{1}{2^{n+1}})$ , on a  $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ , et  $B_{n+1}$  vérifiant bien les propriétés voulues.

Par construction,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de fermés non vides de  $E$  dont le diamètre tend vers 0. De plus,  $E$  est complet, donc d'après le théorème des fermés emboîtés, il existe  $x \in E$  tel que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x\}$ . Comme  $B_0 \subseteq V$ , on a en particulier  $x \in V$ . D'autre part, par construction,  $B_n \subseteq O_n$  pour tout  $n$ , donc  $x \in O_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent,  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  donc  $x \in V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ , ce qu'il fallait montrer. ■

### Contre-exemple. (*Théorème de Baire infirmé dans un pasbanach*)

En général, le théorème de Baire a besoin de la complétude.

On prend  $E = \mathbb{R}[X]$ . On pose  $\Omega_n = \mathcal{C}_E \mathbb{R}_n[X]$ . Puisque  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , c'est un fermé d'intérieur vide, donc  $\Omega_n$  est un ouvert dense de  $E$ . De plus,  $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$

donc  $\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ . Ainsi  $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n} = \emptyset \neq E$ !

On voit en particulier que  $\mathbb{R}[X]$  n'est pas un espace de Banach.  $\square$

### Contre-exemple. (*Théorème de Baire*)

Soit  $E = [0,1]$  compact donc complet. Soit  $O_x = [0,1] \setminus \{x\}$ , ouvert dense de  $E$ . Alors  $\bigcap_{x \in E} O_x = \emptyset$  est une intersection (indénombrable) d'ouverts dense, non dense.  $\square$

### Exercice 7 (*Éclaircissements*)

- Montrer que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  grâce au théorème de Baire.

**INDICATION** Utiliser la dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$ .

- En déduire qu'il n'y a aucune raison pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts dense soit dense.

**Remarque importante.** Tout espace homéomorphe à un espace métrique complet (on dit *complètement métrisable*) vérifie la propriété de Baire, sans qu'il doive être forcément complet.

### Reformulation pratique. (*Propriété de Baire pour les fermés d'intérieur vide*)

Toute réunion de fermés recouvrant un espace métrique complet non vide, contient au moins un fermé d'intérieur non vide.

▷ Il suffit de passer au complémentaire dans le théorème de Baire. ■

### Définition. (*Espace complètement de Baire*)

On dit qu'un espace topologique  $E$  est un *espace complètement de Baire* si tout sous-espace fermé de  $E$  est de Baire.

### Propriété. (*Complète Bairitude des espaces complètement métrisables*)

Tout espace complètement métrisable est complètement de Baire.

▷ Soit  $E$  un espace complètement métrisable en  $d$ . Soit  $F$  un sous-espace fermé de  $E$ . Alors, muni de la distance induite, c'est un sous-espace fermé de  $(E,d)$  qui est complet. Donc  $F$  est un espace métrique complet. Il vérifie donc la propriété de Baire d'après le théorème précédent. ■

# Chapitre 3

## Topologie générale

### Résumé

La topologie permet de formaliser la notion de *proximité*, et donc, celle de convergence et de continuité. En analyse, on s'intéresse à une topologie extrêmement souple, dite *topologie métrique*, où l'on mesure numériquement la distance entre deux points. En topologie générale, on ne connaît pas forcément la distance entre tous les points de l'espace, mais on est capable de dire, avec une certaine précision (dépendant de la donnée d'une *topologie*), s'ils sont proches.

### 3.1 Définitions de base d'une topologie

#### Définitions

1. Un espace est dit *nul* ou *vide* s'il est vide. Il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.
2. Un espace est dit *trivial* s'il est vide ou réduit à un singleton. Dans le cas où il n'est pas vide, il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.

#### 3.1.1 Ouverts et fermés

Cette définition est *minimale*, comme souvent en mathématiques. On verra d'autres définitions qui ne le sont plus, mais seront forcément plus intuitives.

*Remarque.* Le complémentaire induit une bijection involutive des ouverts d'un espace topologique sur l'ensemble de ses fermés.



A priori, il existe des parties de  $X$  qui ne sont ni ouvertes, ni fermées !

**Exemples. (*Topologies*)**

1. (*Topologie grossière, topologie triviale*) Sur tout ensemble  $X$  on peut définir la topologie grossière  $\{\emptyset, X\}$ .
2. (*Topologie discrète, topologie maximale*) Sur tout ensemble  $X$  on peut définir la topologie discrète  $\mathcal{P}(X)$ .



Ainsi, curieusement, les ouverts et les fermés en topologie générale ne passent pas à la limite ensembliste !

**Exercice 1**

Que dire d'une topologie dont les axiomes permettraient la stabilité par intersection quelconque d'ouverts ?

▷ **Éléments de réponse.**

On aurait alors la stabilité par réunion quelconque de fermés... Dans le cas où les singletons sont fermés, cela donne une topologie nécessairement grossière. Mais ce n'est pas forcément le cas (exemple?). Avec les lois de Morgan, on parvient à la même conclusion avec un peu plus de travail sur les ensembles.

Remarquons que les intersections croissantes et les réunions décroissantes sont tout à fait dépourvues d'intérêt (pourquoi?).

**Exercice 2**

1. Donner un exemple d'une intersection décroissante d'ouverts qui n'est pas ouverte.
2. Donner un exemple d'une réunion croissante de fermés qui n'est pas fermée.

**Propriété. (*Somme d'ouverts*)**

Dans un evn, la somme de deux ouverts est ouverte.

▷ Soient  $A, B$  deux ouverts. Alors  $A + B = \bigcup_{a \in A} \tau_a(B)$  où la translation  $\tau_b$  est un homéomorphisme. ■

**3.1.2 Voisinages**

**Mnémonik :** les ouverts sont exactement les ensembles qui sont voisinage d'eux-mêmes.

### 3.1.3 Comparaison de topologies

#### 3.1.3.1 Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble

##### Définition. (*Finesse, grossièreté*)

Soient  $E$  un ensemble et  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux topologies sur  $E$ , définies au moyen des ouverts.

- Si  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ , on dit que  $\mathcal{T}_1$  est *moins fine* ou *plus grossière* que  $\mathcal{T}_2$ .
- Si  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ , on dit que  $\mathcal{T}_1$  est *plus fine* ou *moins grossière* que  $\mathcal{T}_2$ .

##### Heuristique

On a vu qu'une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient beaucoup d'ouverts (ou beaucoup de fermés). Intuitivement, on peut penser les ouverts comme des patrons dont on connaît la grandeur et que l'on peut calculer sur l'espace, voir si des points leurs appartiennent, pour approximer la distance entre eux. Une topologie est plus fine qu'une autre si elle contient plus d'ouverts, autrement dit si le patronnage est plus détaillé.

##### Propriété. (*Caractérisation de la finesse par la continuité*)

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  deux topologies sur  $X$ . Alors  $\mathcal{O}_1$  est plus fine que  $\mathcal{O}_2$  si et seulement si  $id : (X, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2)$  est continue.

#### 3.1.3.2 Topologies minimales et maximales

##### Définition. (*Minimalité d'une topologie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $P$  un prédictat sur  $\mathcal{P}(X)$ . Alors la topologie minimale sur  $X$  vérifiant  $P$ , si elle existe, est la topologie la moins fine sur  $X$  vérifiant  $P$ .

*Remarque.* Si  $P = \top$ , la topologie  $\top$ -minimale sur  $X$  est la topologie grossière.

Dualemment :

##### Définition. (*Maximalité d'une topologie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $P$  un prédictat sur  $\mathcal{P}(X)$ . Alors la topologie maximale sur  $X$  vérifiant  $P$ , si elle existe, est la topologie la plus fine sur  $X$  vérifiant  $P$ .

*Remarque.* Si  $P = \perp$ , la topologie  $\perp$ -maximale sur  $X$  est la topologie discrète.

### 3.1.4 Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité

#### 3.1.4.1 Réseaux topologiques

#### 3.1.4.2 Base d'ouverts

*Remarque.* Toute base est évidemment une prébase.

#### Fait. (*Construire une base à partir d'une pré-base*)

Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $E \subseteq \mathcal{T}$ . Soit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $E$ . Alors  $E$  est une prébase de  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ .

#### Fait

Tout espace topologique admet des bases.

#### Propriété. (*Caractérisation des bases topologiques*)

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Soit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une prébase de  $\mathcal{T}$  si et seulement si :

1.  $\mathcal{B}$  est un recouvrement de  $X$ ,
2. l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{B}$  s'écrit toujours comme réunion (quelconque) d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

#### Méthode. (*Montrer qu'un truc est la base d'une topologie*)

Soit  $P$  une partie d'un espace topologique  $X$ . Alors pour que l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $P$  soit une base de la topologie de  $X$ , il suffit que  $P$  recouvre  $X$ .

#### Propriété. (*Critère pour qu'une pré-base soit une base*)

Soit  $X$  un ensemble,  $\mathcal{B}$  une partie de l'ensemble des parties de  $X$  telle que  $\bigcup \mathcal{B} = X$ . On suppose :

$$\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad x \in W \subseteq U \cap V.$$

Alors l'ensemble des unions d'éléments de  $\mathcal{B}$  est la topologie engendrée par  $\mathcal{B}$ . En particulier,  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

La notion de base est utile, car elle permet de montrer une propriété à vérifier sur tous les ouverts au moyen d'une collection réduite de ceux-ci. Donnons une illustration.

**Méthode. (*Montrer une densité grâce à une base*)**

Pour montrer que  $A$  est dense, il suffit de montrer que l'intersection de  $A$  avec tout ouvert d'une base est habitée. Ceci permet donc de montrer que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En fait, dans un espace métrique, c'est désuet : tout ouvert contient déjà une boule ouverte.

On démontre le lemme suivant, très utile :

**Théorème. (*Lemme de Lindelöf*)**

Tout espace à base dénombrable est de Lindelöf, c'est-à-dire : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement dénombrable.

▷ Soit  $\mathcal{B} = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de l'espace  $X$ . Soit  $\mathcal{O}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , il existe  $\omega \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \omega$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est une base, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \omega_i \subseteq \omega$ . Intuitivement, nous n'avons pas besoin de tous les éléments de  $\mathcal{O}$ , mais de seulement ceux qui contiennent un élément de  $\mathcal{B}$ , et dans ce cas, un seul élément de  $\mathcal{O}$  par élément de  $\mathcal{B}$  est nécessairement, clairement. De façon constructive, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega_i$  soit inclus dans un élément de  $\mathcal{O}$ , choisissons  $\Omega_i \in \mathcal{O}$  tel que  $\omega_i \subseteq \Omega_i$ . Pour conclure, l'ensemble  $\{\Omega_i, i \in I\}$  est un sous-ensemble dénombrable de  $\mathcal{O}$ . C'est un recouvrement. ■

**3.1.4.3 Base de voisinages****Définition. (*Base de voisinages d'un point*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . Une *base de voisinages* ou *système fondamental de voisinages* de  $x$  est un ensemble  $\mathcal{B}_x$  de voisinages de  $x$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $U \in \mathcal{B}_x$  tel que  $U \subseteq V$ .

On peut énoncer des propriétés similaires aux précédentes et créer un lien entre base d'ouverts et base de voisinages.

**Exercice 3**

Donner un exemple d'espace séparable qui n'est pas à bases dénombrables de voisinages.

▷ **Éléments de réponse.**

La topologie cofinie sur  $\mathbb{R}$  convient.

### 3.1.4.4 Axiomes de dénombrabilité

### 3.1.4.5 Séparabilité

La séparabilité est une notion un peu isolée mais tout à fait abordable dans les petites classes. Elle prend tout son sens dans le cadre des axiomes de dénombrabilité.



Ceci n'a rien à voir avec la notion de séparation !

#### Exercice 4 (*Un petit peu de clarté d'esprit*)

On vérifie l'assertion précédente.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparé non séparable.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable non séparé.

▷ Éléments de réponse.

$\ell^\infty$  n'est pas séparable (c'est bien connu), mais séparé, car métrique, puisque c'est un espace vectoriel normé !

Réciproquement, la topologie grossière sur  $\mathbb{Q}$  n'est pas séparé, mais clairement séparable.

#### Exercice 5 (*Non-affaiblissement des hypothèses*)

On montre que la réciproque repose véritablement sur la forme des ouverts, à savoir des boules.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparable qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable, qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité mais pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

▷ Éléments de réponse.

Pour le deuxième exemple, qui transcende le premier, il faut creuser un peu. Le lecteur intéressé pourra se pencher sur la construction de la droite de Sorgenfrey ou encore l'espace de Helly.

#### Méthode. (*Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable*)

On veut montrer que  $E$  n'est pas séparable, autrement dit, qu'il n'admet aucune partie dénombrable dense. On cherche une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints indexée par un ensemble indénombrable  $I$ . Dans ce cas, une partie dense  $A$  doit rencontrer chacun d'eux, d'où une injection d'un indénombrable  $I$  dans  $A$ , qui n'est pas dénombrable. Ainsi, aucune partie dense de  $E$  n'est dénombrable (ou aucune partie dénombrable n'est dense ;), donc  $E$  n'est pas séparable.

**Propriété. (*Produit d'espaces séparables*)**

Tout produit d'espaces séparables est séparable.

▷ Pour chaque  $X_i$ , soit  $A_i$  dénombrable dense. Alors le produit des  $A_i$  est dense par propriété de l'adhérence d'un produit (même infini). ■

### 3.1.5 Adhérence, intérieur, frontière

Ainsi l'adhérence et l'intérieur sont des ensembles extrémaux. En particulier, ils définissent des opérateurs de clôture.

**Lemme**

Une application constante sur une partie d'un espace topologique  $X$  est constante sur son adhérence.

#### 3.1.5.1 Frontière ou bord

**Propriété. (*Caractérisation de la frontière dans un espace métrique*)**

Soit  $A$  une partie d'un espace métrique  $E$ . Alors  $x \in \text{Fr}(A) \iff \exists \rho > 0 \ B(x, \rho) \cap A, B(x, \rho) \cap \complement_E A \neq \emptyset$ .

#### 3.1.5.2 Points limites, points d'accumulation, isolation

#### 3.1.5.3 Densité

#### 3.1.5.4 Adhérence et intérieur dans le produit

**Propriété. (*Adhérence, intérieur d'un produit*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques. Soient  $A_i$  une partie de  $X_i$  pour tout  $i$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  autres espaces topologiques. Soient  $A_1, \dots, A_n$  des parties respectives de ces espaces.

1.  $\overline{A_1 \times \dots \times A_n} = \overline{A_1} \times \dots \times \overline{A_n}$ .
2.  $(\overset{\circ}{A_1} \times \dots \times A_n) = \overset{\circ}{A_1} \times \dots \times \overset{\circ}{A_n}$ .
3.  $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ .
4. On n'a pas de propriété similaire pour le produit.

### 3.1.5.5 Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence

#### Méthode. (*Définition d'une topologie par les adhérences*)

Dans un ensemble  $E$ , toute application  $\dashv$  de  $\mathcal{P}(E)$  dans lui-même vérifiant pour toutes parties  $X, Y$  de  $E$  :

1.  $X \subseteq \overline{X}$ ;
2.  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ ;
3.  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ ;
4.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ;

permet de définir une topologie sur  $E$  dont les fermés sont les parties  $X$  telles que  $X = \overline{X}$  et donc  $\dashv$  est l'adhérence.

▷ Seule la propriété d'intersection est à démontrer : elle vient de la croissance de l'opérateur  $\dashv$  qui se déduit des axiomes précédents comme tout opérateur de préclôture. Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des fermés. Soit  $i \in I$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq X_i$ , d'où  $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \overline{X_i} = X_i$ , d'où  $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$  en passant à l'intersection sur  $I$  d'où l'égalité. ■

#### Propriété. (*Idempotence de $\text{Adh} \circ \text{Int}$* )

Soit  $E$  un espace topologique. Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

▷ On a, puisque l'intérieur est plus petit que la partie,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ . Par croissance de l'adhérence,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$  par idempotence de l'adhérence. Réciproquement, puisque l'adhérence est plus grand que la partie,  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{A}$  puis par croissante de l'intérieur,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$  et enfin, par croissante de l'adhérence,  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}} = \overline{A}$ . ■

#### Propriété. (*Idempotence de $\text{Int} \circ \text{Adh}$* )

Soit  $E$  un espace topologique. Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

▷ S'obtient grâce à la dualité adhérence-intérieur donnée par le passage au complémentaire. ■

Avec les mêmes arguments (et même moins élaborés), on obtient :

#### Propriété

Soit  $E$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$ .

**Propriété**

Soit  $E$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$ .

**Propriété**

De plus,  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$ .

**Propriété**

De plus,  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$ .

**Contre-exemple.** (*L'inclusion peut être stricte.*)

Il suffit de considérer  $E = \mathbb{R}$  et  $A = \mathbb{R}^*$ . □

### 3.1.6 Applications continues

#### 3.1.6.1 Continuité globale



Remarquer que la continuité sur une partie dépend de la topologie induite (ce qui ne pose pas de problème, car elle est canonique).

**Exemple.** (*Très classique*)

L'exponentielle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  muni de leurs topologies métriques éventuellement induites, est un homéomorphisme, mais pas une isométrie (elle ne préserve pas toutes les distances).

**Propriété**

Soit  $X$  un espace discret et  $Y$  un espace topologique quelconque. Alors toute application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue.

**Propriété**

Soit  $X$  un espace topologique quelconque et  $Y$  un espace grossier. Alors toute application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue.

**Exercice 6**

L'image d'une pré-image d'un ouvert par une application continue est-elle ouverte ?

▷ Éléments de réponse.

Non ! Mais c'est un ouvert de l'image, au vu de la formule pour l'image d'une préimage. Pour fournir un contre-exemple, considérer  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1.6.2 Continuité en un point

#### Définition. (*Continuité locale*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $x_0$  si pour tout voisinage  $V$  de  $f(x_0)$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$ .

De façon équivalente, pour tout voisinage  $V$  de  $f(x_0)$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que  $f(W) \subseteq V$ .

#### Théorème

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $A \subseteq X$ . Une application de  $X \rightarrow Y$  est continue sur  $A$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $A$  (ouf).

▷ Supposons  $f$  continue sur  $A$ . Soit  $x \in A$ . Soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ ; il contient un ouvert  $U$  contenant  $f(x)$ . Par continuité,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $A$ . Clairement, il contient  $x$ . Or  $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$  ensemblistement, donc  $f^{-1}(V)$  contient un ouvert contenant  $x$ , donc c'est un voisinage de  $x$ .

Réciproquement, supposons  $f$  continue en tout point de  $A$ . Soit  $U$  un ouvert de  $Y$ . Posons  $O = f^{-1}(U)$  et montrons que  $O$  est un ouvert de  $A$ , autrement dit, montrons que  $O$  est voisinage de chacun de ses points. Soit  $x \in O$ , c'est-à-dire  $f(x) \in U$ . Alors  $U$  est ouvert, donc c'est un voisinage de  $f(x)$ . Ainsi  $f^{-1}(U)$  est un voisinage de  $x$ , donc  $O$  est un voisinage de  $x$ , et c'est terminé. ■

### 3.1.6.3 Homéomorphismes

#### Propriété. (*Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une bijection continue. Alors  $f$  est un homéomorphisme, si et seulement si,  $f$  est ouverte, si et seulement si,  $f$  est fermée.

▷ En effet, si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}(f(O)) = O$  pour toute partie  $O$  de  $Y$ . ■

#### Propriété. (*Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une bijection continue. Alors  $f$  est un homéomorphisme, si et seulement si,  $f$  est ouverte, si et seulement si,  $f$  est fermée.

**Exercice 7**

Soit  $f$  une surjection ouverte. Existe-t-il toujours une section continue de  $f$ ? Soit  $f$  une injection ouverte. Existe-t-il toujours une rétraction continue de  $f$ ?

**3.1.7 Irréductibilité d'un espace topologique**

Voici une notion un peu étonnante qui sera principalement utile à l'heure des fondements de la géométrie algébrique.

**Définition. (*Espace topologique noethérien*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés de  $X$  est stationnaire.

**Propriété. (*Fermé d'un noethérien*)**

Tout sous-espace fermé d'un espace noethérien est noethérien.

**Propriété. (*Caractérisation des espaces noethériens par les ouverts*)**

Un espace topologique  $X$  est noethérien, si et seulement si, tout ouvert de  $X$  est quasi-compact.

▷ Soit  $X$  un espace noethérien, soit  $O$  un ouvert de  $X$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  ouverts de  $X$  qui recouvrent  $O \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Si  $I$  est fini, il n'y a rien à faire. Sinon,  $I$  est infini. Il contient une copie de  $\mathbb{N}$ . Si  $U_1$  recouvre  $O$ , c'est encore terminé. Sinon, il existe  $x \notin U_1$ ,  $x \in O$ , et  $x$  dans un certain  $U_i$ , qui quitte à re-numéroter, est  $U_2$ . Si  $U_1 \cup U_2$  recouvre  $O$ , c'est terminé. Sinon, on ré-itère le processus, de sorte que l'on obtient une suite strictement décroissante, grâce au point discriminé à chaque étape, de fermés  $\complement_X(U_1 \cup \dots \cup U_n)$ , mais c'est impossible, car  $X$  est noethérien ; donc le processus s'arrête et  $U_1, \dots, U_N$  recouvrent  $O$  pour un certain  $N$ , d'où la quasi-compacité.

Réciproquement, soit  $(F_n)$  une suite décroissante de fermés de  $X$ . Alors  $(O_n = \complement_X F_n)$  est une suite croissante d'ouverts de  $X$ . Sa réunion  $O$  est un ouvert de  $X$ . En particulier, il est quasi compact, donc il existe un  $N$  tel que  $O_1, \dots, O_N$  recouvre  $O$ . Par les propriétés basiques de la réunion, pour tout  $i > N$ ,  $O_i$  est inclus dans l'un des  $O_i$ , et par monotonie de  $(O_n)_n$ , on a  $O_i = O_N$ . Donc  $(O_n)$  est stationnaire, donc  $(F_n)$  est stationnaire. ■

**Heuristique**

On a donc là affaire à des topologies dont nous n'avons pas l'habitude. En particulier, elles ont peu de chances d'être séparées (pourquoi?).

**Définition. (*Espace topologique irréductible*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *irréductible* si  $X$  est vide ou si l'on ne peut pas écrire  $X = F_1 \cup F_2$  où  $F_1, F_2$  où  $F_1, F_2$  sont deux fermés (non nécessairement disjoints !) distincts de  $X$ .

**Propriété. (*Caractérisation des espaces irréductibles*)**

Un espace topologique  $X$  est irréductible, si et seulement si, pour tous ouverts non vides  $U, V$ , leur intersection  $U \cap V$  est non vide; autrement dit, si tout ouvert non vide est dense.

▷ Provient directement de la définition en passant au complémentaire sur  $X = F_1 \cup F_2$ ,  $F_1, F_2 \subsetneq X$ . ■

**Exemples. (*Espaces irréductibles*)**

1. L'espace vide est irréductible.
2. Tout singleton est irréductible.
3. Un ensemble fini de points du plan muni de la topologie induite par la topologie usuelle n'est pas irréductible.
4.  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ... ne sont pas irréductibles ; ils s'écrivent comme la réunion de deux demi-plans fermés respectivement réels et complexes.
5. Un ensemble algébrique déterminé par l'idéal engendré par un polynôme irréductible, muni de la topologie de Zariski, est un ensemble irréductible.
6. Munie de la topologie usuelle, une droite du plan  $\mathbb{R}^2$  n'est pas irréductible, mais munie de la topologie de Zariski, si.

**Proposition. (*Décomposition en composantes irréductibles*)**

Soit  $X$  un espace topologique noethérien. Alors on peut écrire  $X$  comme réunion finie de fermés irréductibles, décomposition unique à l'ordre près des facteurs si l'on impose qu'il n'y a aucune inclusion réciproque entre eux. De plus, ces composantes sont les fermés irréductibles de  $X$  maximaux pour l'inclusion.

▷ On raisonne par récurrence noethérienne : soit  $\Phi$  l'ensemble des fermés  $F \subseteq X$  tel que  $P(F)$  est fausse où  $P(F)$  : «  $F$  peut s'écrire comme réunion finie de fermés distincts irréductibles ». Supposons  $\Phi \neq \emptyset$ . Alors puisque  $X$  est noethérien, il existe  $F \in \Phi$ , minimal pour  $\subseteq$ . Comme  $P(F)$  est fausse,  $F$  n'est pas irréductible, dont on peut écrire  $F = F' \cup F''$  où  $F', F'' \subsetneq F$  sont fermés. Par minimalité de  $F$ ,  $F' \notin \Phi$  et  $F'' \notin \Phi$  donc  $P(F')$  et  $P(F'')$  sont vraies. Ainsi  $F'$  et  $F''$  admettent des décompositions, donc  $F$  aussi en prenant la réunion de celles-ci, donc  $P(F)$  est vraie. Absurde. Donc  $\Phi$  est vide, en particulier  $P(X)$  est vraie. La remarque finale vient alors tout naturellement d'après les définitions posées.

Pour l'unicité des composantes irréductibles : si l'on a deux décompositions, l'inclusion de l'une dans l'autre envoie chaque composante de la première dans une de la seconde ; en effet, une composante de la première qui serait envoyée à cheval sur plusieurs de l'autre ne serait pas irréductible, elle s'écrirait comme union d'un nombre fini de fermés (son intersection avec les composantes de la deuxième décomposition). Mais les composantes sont les irréductibles maximaux pour l'inclusion, d'où l'égalité. ■

### Proposition

Soit  $X$  un espace topologique qui admette un recouvrement ouvert fini par des sous-espaces noethériens. Alors  $X$  est noethérien.

▷ Il suffit d'appliquer la caractérisation duale (par les ouverts) d'espace noethérien et la suite vient naturellement par *divide et impera*. ■

## 3.2 Constructions de topologies

**S**YSTÉMATIQUEMENT, en construisant une nouvelle topologie à partir d'espaces topologiques donnés, nous cherchons :

- ★ à caractériser la topologie en fonction d'applications liant l'espace topologique de départ au nouveau, typiquement, projection ou inclusion,
- ★ à décrire explicitement les ouverts de la topologie,
- ★ à caractériser la continuité d'applications définies sur ou vers le nouvel espace considéré.

### 3.2.1 Topologie engendrée

#### Définition-propriété. (*Topologie engendrée par une partie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Alors l'intersection de toutes les topologies sur  $X$  contenant  $\Sigma$  est appelée *topologie engendrée* par  $\Sigma$  sur  $X$ . C'est la topologie la moins fine sur  $X$  telle que toute partie de  $\Sigma$  soit un ouvert.

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie engendrée*)

Soient  $X$  un ensemble et  $\Sigma$  une partie de  $X$ . Alors les ouverts de  $\langle \Sigma \rangle$  sont exactement les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de  $\Sigma$ .

▷ Par définition d'une topologie, une telle partie doit être ouverte. Réciproquement, par définition d'une topologie, une topologie doit contenir toutes les parties ouvertes. La proposition est démontrée. ■

**Remarque importante.** Par les propriétés de distributivités généralisées (*exercice*), il revient au même de dire que ce sont les intersections finies de réunions quelconques d'éléments de  $\Sigma$ .

**Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie engendrée*)**

Soient  $Y$  un espace topologique et  $\Sigma$  une partie de  $Y$  qui engendre la topologie de  $Y$ . Soit  $X$  un espace topologique. Alors si c'est définissable, une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si l'application  $f : X \rightarrow \Sigma$  est continue.

### 3.2.2 Topologie initiale

**Définition-propriété. (*Topologie initiale associée à une famille d'applications*)**

Soit  $X$  un ensemble et  $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout  $i \in I$ , une application  $f_i : X \rightarrow \mathcal{O}_i$ . On appelle *topologie initiale* associée aux  $(f_i)$ , ou *topologie engendrée par les  $f_i$* , la topologie la moins fine sur  $X$  qui rende toutes les applications  $f_i, i \in I$ , continues.

**Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie initiale*)**

La topologie initiale sur  $X$  engendrée par les  $f_i : X \rightarrow Y$  est la topologie engendrée (strictement) par les  $f_i^{-1}(U)$  pour  $U$  ouvert de  $\mathcal{O}_i$ , pour  $i$  parcourant  $I$ .

▷ Il est clair qu'une topologie rendant toutes les  $f_i$  continues contient toutes ces parties. Par minimalité de la topologie engendrée, on a le résultat. ■

**Propriété. (*Continuité des applications sous la topologie initiale*)**

On reprend les notations précédentes ; soit également  $Z$  un espace topologique et  $g : Z \rightarrow X$  une application. Alors  $g$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $f_i \circ g \rightarrow Y_i$  est continue.

▷ Le sens direct vient d'une simple composition d'applications continues. Pour le sens réciproque, soit  $U$  un ouvert de  $X$ , et il suffit de vérifier la condition dans le cas où  $U$  est dans une prébase de  $X$ . Puisque d'après la proposition précédente, une telle prébase est donnée par les  $f_i^{-1}(\Omega)$ , il existe  $i \in I$  et  $\Omega \in \mathcal{O}_i$  tel que  $U = f_i^{-1}(\Omega)$ . Alors  $g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(\Omega)$  ensemblistement, ouvert de  $Z$  par hypothèse. ■

Signalons les propriétés secondaires suivantes :

- Si  $\mathcal{B}_i$  est une base d'ouverts de  $Y_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$  est une prébase de  $X$ .
- Si  $x \in X$  et  $\mathcal{V}_i$  est une base de voisinages de  $f_i(x)$  pour tout  $i \in I$ , alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$  est un système fondamental de voisinages du point  $x$ .

Les topologies induite et produit sont des exemples fondamentaux de topologies initiales.

### 3.2.3 Topologie induite

Dans ce cas spécial, on retourne le procédé habituel.

#### Définition. (*Topologie induite à un sous-espace topologique*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . Alors la *topologie induite* (de  $X$ ) sur  $A$  est la topologie sur  $A$  donc les ouverts sont les  $A \cap U$  où  $U$  décrit l'ensemble des ouverts de  $X$ .

▷ C'est simple à faire par le calcul par associativité simple des opérations ensemblistes, mais il est plus judicieux d'attendre la caractérisation suivante qui fait le job. ■

#### Propriété. (*Caractérisation abstraite de la topologie induite*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . Alors la topologie induite sur  $A$  est la topologie la moins fine rendant l'inclusion canonique  $\iota : A \hookrightarrow X$  continue ; autrement dit, c'est la topologie initiale associée à  $(\iota, X)$ .

▷ Par définition de la topologie induite, si  $U$  est un ouvert de  $X$ , alors  $\iota^{-1}(U) = U \cap A$  est un ouvert de  $A$ . Réciproquement, vérifions que l'ensemble des parties de cette forme est déjà une topologie. Elle contient  $\emptyset$  et  $A$ . Elle est stable par réunion quelconque par distributivité et par intersection finie (en fait, quelconque) de même. ■

#### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie initiale*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors pour toute partie  $A \subseteq X$ , la restriction  $f : A \rightarrow Y$  est continue.

▷ Immédiat. ■



Il est clair que la réciproque est fausse en fixant  $A$  !

On énonce également :

#### Propriété. (*Propriété universelle de la topologie induite*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . La topologie induite est la topologie minimale sur  $A$  qui rend l'inclusion canonique continue.



Un ouvert pour la topologie induite n'a aucune raison d'être un ouvert dans le grand espace.

La topologie induite est la topologie *sous un certain angle*, celui du sous-espace.

### 3.2.4 Topologie finale

#### Définition-propriété. (*Topologie finale associée à une famille d'applications*)

Soit  $Y$  un ensemble et  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout  $i \in I$ , une application  $f_i : X_i \rightarrow Y$ . On appelle *topologie finale* associée aux  $(f_i)$ , la topologie sur  $X$  la plus fine qui rende toutes les applications  $f_i, i \in I$ , continues.

*Remarque.* Pour la topologie initiale, où l'on construisait une topologie sur la source, on demandait une topologie minimale ; dans le cas de la topologie finale, on demande une topologie la plus fine. En fait, c'est cohérent : pour rendre des applications données continues, il y a deux manières : soit l'on enlève des ouverts à l'arrivée, soit l'on en rajoute à la source.

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts dans la topologie finale*)

Un ensemble  $U \subseteq Y$  est ouvert si et seulement si  $f_i^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X_i$  pour tout  $i \in I$ .

▷ On note  $\mathcal{O}_Y$  la topologie finale sur  $Y$ . Soit  $U \subseteq Y$  tel que  $f_i^{-1}$  soit un ouvert des  $X_i$ . Alors  $\mathcal{O}_U = \{\emptyset, Y, U\}$  est une topologie sur  $Y$  telle que chacune des  $f_i$  est continue. Par définition,  $U \in \mathcal{O}_Y$ . Ceci suffit. ■

*Remarque.* C'est bien plus restrictif qu'avec la topologie initiale. Ceci explique en partie que tout se passe bien pour les topologies produits, mais mal en général dans les topologies quotients.

#### Propriété. (*Continuité des applications sous la topologie finale*)

On reprend les notations précédentes ; soit également  $Z$  un espace topologique et  $g : Y \rightarrow Z$  une application. Alors  $g$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $g \circ f_i : X_i \rightarrow Z$  est continue.

▷ Réciproquement, si  $g : Y \rightarrow Z$  est telle que  $g \circ f_i$  est continue, soit  $U$  un ouvert de  $Z$ . On a  $f_i^{-1}(g^{-1}(U))$  ouvert des  $X_i$ . Ainsi  $g^{-1}(U)$  est un ouvert dans  $Y$ , donc  $g$  est continue. ■

Les topologies somme et quotient sont des exemples fondamentaux de topologies finales.

### 3.2.5 Topologie faible

#### Définition-propriété. (*Topologie faible*)

Soit  $X$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$ . On suppose que chaque  $X_i$  est muni d'une topologie  $\mathcal{O}_i$  et l'on note  $f_i : X_i \longrightarrow X$  l'inclusion. La topologie finale sur  $X$  définie par les  $(f_i)_{i \in I}$  est appelée *topologie faible* définie par  $(X_i)_{i \in I}$ .

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie faible*)

On reprend les notations précédentes. Alors  $F \subseteq X$  est fermé (resp. ouvert) dans  $X$  pour la topologie faible si et seulement pour tout  $i \in I$ ,  $F \cap X_i$  est fermé (resp. ouvert) dans  $(X_i, \mathcal{O}_i)$ .

Autrement dit, la topologie faible est la topologie la plus fine qui induise toutes les topologies des  $X_i$ .

#### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie faible*)

Pour tout espace topologique  $Y$ , une application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue si et seulement si sa restriction  $f_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$  est continue pour tout  $i \in I$ .

#### Exercice 8

Montrons que  $X$  est discret si et seulement si sa topologie est la topologie faible définie par les singletons. Montrer que cette condition est équivalente à ce que la projection canonique  $\coprod_{x \in X} \{x\} \longrightarrow X$  soit un homéomorphisme.

#### Définition. (*Colimite topologique*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La *colimite* de la famille  $X$  est l'espace topologique  $\bigcup_{i \in I} U_i$  muni de la topologie faible définie par  $(X_i)_{i \in I}$ .

Ainsi,  $U \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$  est ouvert si et seulement si  $U \cap X_i$  est ouvert dans  $X_i$  pour tout  $i \in I$ .

*Remarque.* Le cas où  $I = \mathbb{N}$  et  $X_n \subseteq X_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est particulièrement utilisé. Attention alors : il ne s'agit ni de la topologie réunion disjointe, ni de la topologie faible sur les inclusions canoniques.

### 3.2.6 Topologie somme

On continue notre litanie de définitions.

### Définition-propriété. (*Somme topologique*)

Soit  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La somme  $\bigoplus_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$  est la réunion disjointe  $\bigsqcup_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$  munie de la topologie la plus fine qui rend chaque injection canonique continue, autrement dit, la topologie finale pour les inclusions canoniques.

*Remarque.* Dans ce cas, contrairement à la topologie produit, ce n'est plus la topologie engendrée par (...) mais littéralement la topologie dont les ouverts sont les sommes disjointes d'ouverts : même constat que pour la topologie induite.

Les conséquences sont grandes.

#### Propriété

Les inclusions canoniques dans la somme topologiques sont ouvertes et fermées.

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie somme*)

La topologie somme  $\mathcal{T}$  est telle que  $U \in \mathcal{T}$  si et seulement si pour tout  $i \in I$ , il existe  $U_i \in \mathcal{T}_i$  tel que  $U \cap (X_i \times \{i\}) = U_i \times \{i\}$ ; autrement, une partie est ouverte si chacune de ses traces est ouverte.

Il est clair alors que  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des  $\bigoplus_{i \in I} U_i$  pour  $U_i$  ouverts respectifs de  $\mathcal{T}_i$ .

#### Propriété. (*Applications continues sur la somme disjointe*)

Si  $X_i$  sont des espaces topologiques, on munit  $\coprod X_i$  de la topologie finale. On a  $\text{Hom}(\coprod X_i, Z) = \prod \text{Hom}(X_i, Z)$ .

▷ Ouf! ■

La topologie somme n'est jamais qu'un recollement d'espaces. La topologie est assez stable par somme, comme l'intuition le permet.

#### Proposition. (*Identification des parties d'une somme*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espace topologique. Soit  $\iota$  l'inclusion canonique de  $X_i$  dans  $\bigsqcup X$  pour un  $i \in I$ . Alors  $\iota$  est un homéomorphisme sur son image.

#### Proposition. (*Clopens d'une somme topologique*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espace topologique. Alors  $X_i \times \{i\}$  est un ouvert fermé de  $\bigsqcup X$ .

En particulier :

**Fait.** (*Non-connexité d'une somme topologique*)

Une somme d'espaces topologiques est non connexe dès que deux au moins des termes sont non vides.

### 3.2.7 Topologie produit

Les propriétés viennent toutes de la topologie initiale ; on les redémontre quand-même dans ces cas particuliers.

#### 3.2.7.1 Cas fini

**Définition-propriété.** (*Topologie produit fini*)

Soit  $n$  un entier naturel et  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur  $\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$  est la topologie la moins fine qui rende les projections canoniques  $p_i : \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i \longrightarrow X_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux  $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

**Propriété.** (*Description de la topologie produit fini*)

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *ouverts élémentaires* :  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ , où  $\Omega_1 \subseteq X_1, \dots, \Omega_n \subseteq X_n$  sont des ouverts respectifs de ces espaces.

Une prébase est donnée par les  $X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \Omega_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ .

▷ Conséquence du cas infini. ■

**Propriété.** (*Continuité des applications pour la topologie produit fini*)

Soient  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, Z$  des espaces topologiques. Une application  $f : Y \longrightarrow \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$  est continue.

▷ Le sens direct est clair par composition. Réciproquement, soit  $U$  un ouvert du produit. Il suffit de vérifier la condition dans le cas où  $U$  est dans une pré-base de cet espace ; ici, un ouvert élémentaire à une composante convient. Ainsi il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $U = p_i^{-1}(\Omega)$  pour  $\Omega$  ouvert de  $X_i$ . Ainsi,  $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(\Omega)) = (p_i \circ f)^{-1}(\Omega)$  est un ouvert de  $Y$  car ces applications sont continues par hypothèse. ■



On n'a pas de propriétés semblables pour les applications *partant* d'un espace produit ; le calcul différentiel nous le montre assez. En particulier, pour un produit infini non plus.

### Propriété. (*Ouverture des projections*)

Les projections sont ouvertes pour la topologie produit.

▷ On fait la preuve dans le cas général, puisqu'elle tient encore. Soit  $\prod_{i \in I} U_i$  un cylindre ouvert pour la topologie produit. Il est clair qu'à  $i$  fixé,  $p_i(\prod_{i \in I} U_i) = U_i$  est un ouvert de  $X_i$ . Puisque les cylindres forment une base, et que la réunion est stable par image réciproque, et qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, le résultat tient pour n'importe quel ouvert. ■

Cette propriété tient dans le cas général, mais on ne la ré-énoncera pas.

#### 3.2.7.2 Cas général

### Définition-propriété. (*Topologie produit fini*)

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique  $p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux  $(p_i)_{i \in I}$ .

### Propriété. (*Description de la topologie produit*)

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *cylindres (ouverts)* :

$\prod_{i \in I} U_i$ , où  $U_i$  est un ouvert de  $X_i$  pour tout  $i$  et il existe  $J$  fini tel que pour tout  $i \in I \setminus J$ ,

$$U_i = X_i$$

qui coïncident avec les ouverts élémentaires seulement dans le cas fini

Ils forment d'ailleurs une *base* de la topologie produit

▷ Il est nécessaire qu'une topologie rendant continue les projections canoniques contiennent les ouverts  $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i)$  pour  $U_i$  ouverts de  $X_i$ ,  $J$  fini. Ces ensembles sont exactement les cylindres ouverts. Par minimalité de la topologie produit, on en déduit le résultat. ■

### Théorème. (*Produit d'ouverts d'un espace produit*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Alors si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts pour tout  $i \in I$   $U_i$  de  $X_i$ , alors  $\prod_{i \in I} U_i$  est un ouvert du produit si et seulement si  $U_i = X_i$  pour tous les  $i \in I$  sauf éventuellement un nombre fini.

**Fait**

Tout ouvert du produit contient un produit d'ouverts élémentaires. Tout voisinage d'un point du produit contient un voisinage élémentaire de ce point.

**Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie produit*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}, Z$  des espaces topologiques. Une application  $f : Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$  est continue.

▷ Même preuve que dans le cas fini. ■

**Mnémonik :** tout se passe bien dans le produit, tout se passe mal dans le quotient.



Les propriétés vraies sur un produit d'espaces ne sont des équivalences que si l'on suppose le produit non vide, puisqu'un produit avec un terme vide est vide.

**3.2.7.3 Convergences****Propriété. (*Convergence dans l'espace produit*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques compacts. Soit  $(x_n = (x_{n,i})_{i \in I})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Soit  $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ . Alors  $(x_n)$  tend vers  $x$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ , la suite  $(x_{n,i})_n$  tend vers  $x_i$ .

▷ Le sens direct vient de la continuité des projections. Montrons le sens réciproque. Soit  $\Omega$  un ouvert contenant  $x$ . Il contient donc un cylindre  $C$  contenant  $x$ . Soient  $U_1, \dots, U_n$  les membres de ce produit non vide. Alors par hypothèse, pour tout  $i \geq n$ , il existe un rang  $N_i$  à partir duquel  $(x_{n,i})_i$  est dans  $U_i$ . Ainsi, à partir du rang  $\max N_i$ , la suite  $(x_n)$  est dans  $C$ , donc dans  $U$ . ■

**3.2.8 Topologie quotient**

Il n'y a rien de compliqué, une fois qu'on a défini la topologie quotient (voir sur Wikipédia). Une *quotient map*, le terme n'ayant pas d'équivalent en français, est une application continue et ouverte : une application est ouverte, si l'image de tout ouvert est ouverte.

C'est plutôt la régularité de la topologie quotient qui pose un réel problème en topologie.

### 3.2.8.1 Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient

#### Définition. (*Topologie quotient*)

Soit  $q : X \longrightarrow Y$  une application surjective entre deux ensembles, où  $X$  est un espace topologique. On définit sur  $Y$  la *topologie quotient* comme étant la topologie finale associée à l'application  $q$ .

#### Fait

$U \subseteq Y$  est ouvert si et seulement si  $q^{-1}(U)$  ouvert.  $F \subseteq Y$  est fermé si et seulement si  $q^{-1}(F)$  est fermé.

#### Remarques.

1. (*Cas particulier*) Si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , la projection canonique induit une topologie sur le quotient  $X/R$  grâce à cette définition. C'est le cas que nous étudierons dès à présent.
2. (*Cas particulier du cas particulier : géométrie du caoutchouc*) Si  $A \subseteq X$ , on définit la relation d'équivalence  $xR_Ay$  si et seulement si  $x = y$  ou  $x$  et  $y \in A$ . On peut alors définir le quotient  $X/A = X/R_A$ . Cela revient heuristiquement à ramasser une partie sur un point. Cette partie est quelconque (pas forcément simplement connexe)!!!

On ne demande absolument aucune rien sur  $R$ , c'est pourquoi les quotients topologiques, qui existent donc toujours, écotent en général de propriétés minables (pour les groupes, les espaces vectoriels au contraire, la structure descend, mais on demandait des propriétés fortes avant de quotienter). C'est en exigeant des compatibilités de  $R$  quant à la topologie de  $X$  que l'on aura des propriétés acceptables pour nos topologies quotients.



#### Exemples. (*Espaces topologiques quotients*)

1. Le tore est un quotient du plan par un réseau.
2. Les espaces projectifs sont des quotients d'espaces euclidiens par une relation d'équivalence.

La topologie quotient satisfait la propriété universelle suivante :

#### Propriété. (*Propriété universelle des topologies quotients*)

On reprend les notations précédentes. L'application  $q : X \longrightarrow X/R$  satisfait la propriété suivante : pour tout espace topologique  $Z$ , pour toute application  $f : X \longrightarrow Z$  continue et constante sur les classes d'équivalence, *i.e.*  $xRy \implies f(x) = f(y)$ , alors elle descend en un unique application continue sur le quotient, autrement dit,  $\exists ! \tilde{f} : X/R \longrightarrow Z$  tel

que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X/R & & \end{array}$$

▷ Comme d'habitude, en oubliant la structure topologique, on a le passage au quotient ensembliste qui donne une unique application de  $X/R \rightarrow Z$  tel que le diagramme commute dans la catégorie des ensembles qui donne  $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$  de façon indépendante du choix de  $x$ . Si  $U \subseteq Z$  est ouvert,  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ , et  $\tilde{f}^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$  ouvert. ■

### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie initiale*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence. On note  $Y = X/R$ . Pour tout espace topologique  $Z$ , une application  $f : Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si, l'application  $f \circ \pi$  est continue, en notant  $\pi$  la projection canonique.

▷ Conséquence de la propriété pour la topologie finale.

Redémontrons-le pour le fun. Puisque la projection canonique est continue, le sens direct vient d'une composition d'applications continues. Réciproquement, soit  $U$  un ouvert de  $Z$ . Alors  $V = f^{-1}(U) \subseteq Y = X/R$  est ouvert si et seulement si  $\pi^{-1}(V) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$  est ouvert, ce qui est le cas si  $f \circ \pi$  est bien supposée continue. ■

Le problème principal auquel on va se heurter, est que le quotient d'un espace séparé (ou même très régulier) n'est pas nécessairement séparé (en particulier pas métrisable). Pour cela, voir la section suivante.

### Définition. (*Saturation d'un ouvert*)

Soit  $E \subseteq X$ , le *saturé* de  $E$  est :

$$RE = \{y \in X, \exists x \in E, xRy\} = \bigcup_{x \in E} \bar{x} = q^{-1}(q(E)).$$

On dit que  $E$  est *saturé* si  $RE = E$ . Autrement dit, il existe  $A \subseteq X/R$  tel que  $E = q^{-1}(A)$ <sup>a</sup>. Ceci revient encore à dire que  $E$  contient tous les éléments équivalents à ses éléments.

<sup>a</sup> Le sens direct est donné par l'une des expressions ci-dessous. Réciproquement, toute partie de la forme  $q^{-1}(A)$  est saturé, car si  $\bar{x} \in A$  et  $y \sim x$ ,  $\bar{y} = \bar{x} \in A$  également.

*Toutes les choses qu'on voudraient vraies ne sont pas vraies, mais elles le deviennent si l'on rajoute saturé derrière.*

**Propriété. (*Images des ouverts dans le quotient*)**

1. Si  $O$  est un ouvert saturé dans  $X$ , alors  $q(O)$  est ouvert dans  $X/R$ .
2. Si  $F$  est fermé et saturé dans  $X$ , alors  $q(F)$  est fermé dans  $X/R$ .

▷ On a que  $RO = q^{-1}(q(O))$ . Si  $O$  est saturé,  $RO = O = q^{-1}(q(O))$ . Ainsi  $O$  est ouvert si et seulement si  $q(O)$  l'est. Le deuxième point est identique. ■

En général, l'hypothèse *saturé* ne peut être omise.

**Contre-exemple. (*Projection quotient non ouverte*)**

On considère la relation sur le tore  $\mathbb{T}^2$  définie par  $x' \sim y'$  s'il existe une droite  $D$  de pente  $\alpha$  joignant  $x$  à  $y$  et tels que  $\pi(x) = x'$  et  $\pi(y) = y'$ . On peut vérifier que si  $\alpha$  est rationnel ou infini,  $\pi(D)$  est un cercle, et sinon, son image est dense dans le tore et  $\pi$  induit une bijection continue sur son image, qui n'est pas un homéomorphisme. L'espace quotient est séparé si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ; dans le cas contraire, la topologie quotient est grossière. Naturellement, cet exemple convient, puisqu'on peut exhiber des ouverts dont l'image sur le tore ne l'est plus. □

En général, il est trop fort de demander que tout ouvert soit saturé.

**3.2.8.2 Séparation des quotients**

Les propriétés topologiques se conservent pas produit, même si, dans le cas infini, les preuves ne sont pas toujours évidentes. Par contre, elles sont extrêmement instable pour ce qu'il s'agit du quotient. En particulier, le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un réflexe.

Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On rappelle qu'un espace est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée dans son carré topologique.

**Propriété. (*Condition nécessaire de séparation du quotient*)**

Si  $X/\mathcal{R}$  est séparé, alors le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X \times X$ .

▷ En effet,  $\Gamma_{\mathcal{R}} = q^{-1} \times q^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$ . ■

**Propriété. (*Réciproque partielle à la propriété précédente*)**

Si le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X \times X$  et si  $q$  est ouverte, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.

▷ Si  $q$  est ouverte,  $q \times q(X \times X \setminus \Gamma_{\mathcal{R}}) = (X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}) \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}}$  est ouvert. Ainsi,  $\Delta_{X/\mathcal{R}}$  est fermée, donc  $X/\mathcal{R}$  est séparé. ■

*Remarque.* En toute généralité, un espace non séparé peut se quotienter en un espace séparé : prendre une espace non séparé et l'écraser sur lui-même. Pourtant, en pratique, on énoncera des théorèmes permettant de *préserver* la séparation au passage au quotient.

La condition n'est pas minimale ; il peut arriver que  $q$  ne soit pas ouverte mais que, par miracle, l'espace quotient soit séparé.

### Propriété. (*Caractérisation de la séparation des quotients par saturation*)

L'espace  $X/\mathcal{R}$  est séparé si et seulement si pour tous  $x \neq y$ , il existe des ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$  : on dit que  $X$  est *saturé-séparé*.

▷ Soient  $x,y \in X$  tels que  $q(x) \neq q(y)$ , soit  $(x,y) \notin \mathcal{R}$ . Si  $U_x, U_y$  sont des voisinages ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$ , alors  $q(U_x)$  et  $q(U_y)$  sont des ouverts de  $X/\mathcal{R}$  par saturation qui séparent  $q(x)$  et  $q(y)$  : puisque  $U_x$  est saturé,  $q(y) \notin q(U_x)$ . Réciproquement, si  $U_x, U_y$  sont des ouverts de  $X/\mathcal{R}$  qui séparent  $q(x), q(y)$ , alors on voit que  $q^{-1}(U_x)$  et  $q^{-1}(U_y)$  sont des ouverts saturés et disjoints qui séparent  $x$  et  $y$ . ■

### Proposition. (*Condition suffisante de séparation par compacts et fermés*)

Soit  $X$  séparé. Supposons que  $q$  satisfasse :

- (a)  $\forall x \in X \quad q^{-1}(q(x))$  est compacte,
- (b) pour tout fermé de  $X$ , son saturé est fermé.

Alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.

▷ Soient  $x,y \in X$ ,  $q(x) \neq q(y)$ . Posons  $C_x = q^{-1}(q(x))$  et  $C_y = q^{-1}(q(y))$  qui sont donc des compacts disjoints de  $X$ . Puisque  $X$  est séparé, il existe des ouverts  $U_x, U_y$  disjoints séparant ces compacts (propriété connue). On pose  $F_x, F_y$  les complémentaires de ces ouverts. Ce sont des fermés dont les saturés  $\mathcal{R}F_x$  et  $\mathcal{R}F_y$  sont donc également fermés, par hypothèse. On pose  $U'_x, U'_y$  les complémentaires respectifs de ces saturés, qui sont donc des ouverts. Ils sont disjoints, car contenus dans les premiers. Supposons que  $x \notin U'_x$ . Alors  $x \in \mathcal{R}F_x$ . Alors il existe  $z \in F_x$  tel que  $x \mathcal{R} z$  et  $z \in C_x = q^{-1}(q(x)) \subseteq U_x$ , contradiction. Ainsi  $x \in U'_x$ . De même  $y \in U'_y$  et tout est fait. ■

### Corollaire. (*Quotient par un compact*)

Soit  $X$  un espace topologique séparé et  $A$  une partie compacte de  $X$ . Alors  $X/A$  est séparé.

▷ Si  $x \notin A$ , alors  $q^{-1}(q(x)) = \{x\}$  est compact. Si  $x \in A$ ,  $q^{-1}(q(x)) = A$  est compact par hypothèse. L'autre hypothèse se vérifie facilement. ■

**Proposition. (Condition suffisante de séparation par compacts et fermés)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un fermé ou un ouvert de  $X$ . Alors la restriction  $\tilde{q} : X \setminus A \longrightarrow X/A$  est un homéomorphisme sur son image.

▷ On sait déjà que  $\tilde{q}$  est continue par restriction et elle est clairement bijective. Supposons  $A$  fermé. Alors un ouvert de  $X \setminus A$  est un ouvert de  $X$  qui est inclus dans  $X \setminus A$ . Pour un tel ouvert  $U$ ,  $\tilde{q}(U) = U$  est ouvert donc  $\tilde{q}^{-1}$  est continue. Le cas où  $A$  est ouvert est identique par caractérisation de la continuité par images réciproques de fermés. ■

*Remarque.* Soient  $f : X \longrightarrow Y$  continue et  $Y$  séparé. On définit  $r$  sur  $X$  par  $x \sim y$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$ . Alors  $\tilde{f} : X/r \longrightarrow Y$  est injective et  $X/r$  est séparé.

**Exemple. (Recollement du segment en un cercle)**

Soit  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  et  $f : [0,1] \longrightarrow S^1$  qui à  $t \mapsto e^{2\pi it}$ . Alors  $[0,1]/r = [0,1]/(0 \sim 1)$  et  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme de  $[0,1]/(0 \sim 1) \longrightarrow S^1$ .

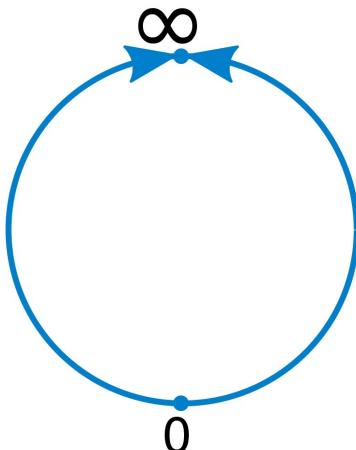


FIGURE 3.2.1 : Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle. —

**Propriété. (Condition suffisante de séparation du quotient)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $X'$  est un espace séparé et  $f : X \longrightarrow X'$  une application continue vérifiant  $x \sim y \iff R(x) = R(y)$ , alors  $X/R$  est séparé.

▷ En effet,  $f$  passe au quotient en  $\tilde{f} : X/R \longrightarrow X'$  et cette application est injective par hypothèse. Ainsi  $X/R$  s'identifie à un sous-espace de  $X'$  séparé. Puisque tout sous-espace d'un séparé est séparé,  $X'$  est séparé. ■

**Exemple. (*Séparation du tore*)**

Le tore  $\mathbb{T}^2$  est séparé.

En vertu donc de l'exponentielle complexe produit, qui permet de le définir.

**3.2.8.3 Autres propriétés des quotients**

Les propriétés du type image continue se préservent par passage au quotient par continuité de la projection canonique. Ainsi :

- ★ tout quotient séparé de compact est compact ;
- ★ tout quotient d'espace connexe, connexe par arcs, est connexe par arcs.

**3.2.9 Quotient d'une topologie par une action de groupes**

Tout un pan de la recherche mathématique étudie ces quotients : c'est un exemple fondamental pour lequel le quotient hérite encore une fois, a priori, d'une structure minable.

On étudie cette notion plus en détail dans la section de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

**3.3 Espaces topologiques classiques****3.3.1 Peignes****Définition. (*Peigne*)**

On appelle *peigne*, sans autre précision, un espace topologique de la forme suivante : le sous-espace topologique du plan euclidien :

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0,1].$$

Cet exemple se généralise à de nombreuses autres réalisations, y compris en dimensions supérieures. C'est la *philosophie du peigne* qui importe ici.

**3.3.2 Boules, sphères****Définition. (*Boule*)**

On appelle *boule* de dimension  $n$ , la boule unité de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , définie par  $\mathbb{B}^n = B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ .

**Définition. (*Sphère*)**

On appelle *sphère* de dimension  $n$ , ou  $n$ -*sphère*, la boule unité de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , définie par  $\mathbb{S}^{n-1} = S_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ .

→ *Convention.* On pose  $S-1 = \emptyset$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition. (*Passer de la boule à la sphère*)**

$\mathbb{S}^{n-1}$  est la frontière de  $\mathbb{B}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition. (*Inclusions relatives des sphères*)**

$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$ .

▷ En effet,  $\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1\} \subseteq \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \cap \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ . ■

**Proposition. (*Inclusions relatives des boules*)**

$\mathbb{B}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ .

**Proposition. (*Quotient d'une boule par une sphère*)**

$\mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$ .

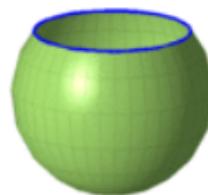


FIGURE 3.3.1 : Quotient d'un disque par sa frontière sphérique. —

**Proposition. (*Écrasement d'une demi-sphère sur un disque*)**

La demi-sphère large  $\mathbb{S}_+^n \simeq \mathbb{B}^2$ .

**Proposition. (*Recollement d'une sphère aplatie le long d'un bord*)**

$\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1] / \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \simeq B^n$ .

**Proposition.** (*Compacité de la boule*)

$\mathbb{B}^n$  est compact.

- ▷ Fermé borné en dimension finie. ■

**Proposition.** (*Connexité de la sphère*)

$\mathbb{S}^{n-1}$  est connexe par arcs pour  $n \geq 2$ .

- ▷ Première méthode : on le déduit de la convexité de  $\mathbb{B}^n$ . ■
- ▷ On peut raisonner par récurrence en montrant que tout point est reliable à l'équateur, en considérant un chemin donné par projection pour la première coordonnée et en ajustant avec la deuxième coordonnée : ceci est possible dès que  $n \geq 2$ . ■
- ▷ Le plus simple reste de considérer  $\frac{(1-t)x+tx}{\|(1-t)x+ty\|}$ . C'est possible seulement pour deux points non antipodaux. On en déduit le résultat en remarquant qu'un espace de dimension  $n \geq 2$  connaît toujours au moins deux vecteurs colinéaires ou anticolinéaires. ■

**Proposition.** (*Suspension de la sphère*)

$S(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{S}^n$ .

**Proposition.** (*Élasticité de la boule*)

$S(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq C(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq \mathbb{B}^n$ .

**3.3.3 Ruban de Möbius****Définition.** (*Ruban de Möbius*)

On appelle *ruban de Möbius* le quotient  $M = [0,1] \times [0,1]/\sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(0,s) \sim (1,1-s)$  (*voir schéma*).



FIGURE 3.3.2 : Un ruban de Möbius dans notre monde. —

*Remarque.* Le ruban de Möbius est l'unique espace topologique parmi les quatre issu du recollement d'un carré qui forme une variété à bord.

**Curiosité. (*Réalisation coprojective du ruban de Möbius*)**

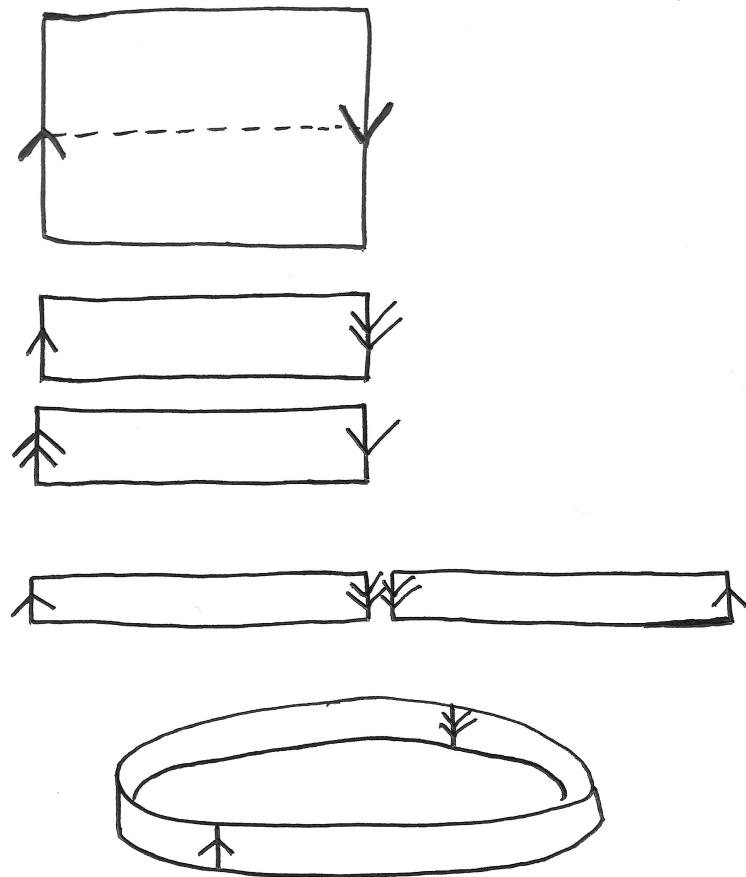
Le ruban de Möbius est le complémentaire d'un disque ouvert dans le plan projectif réel.

**Exercice 9** (*Couper et recoller... le ruban de Möbius*)

- Que se passe-t-il lorsqu'on coupe un ruban de Möbius en son milieu dans la longueur ?

▷ **Éléments de réponse.**

- On peut essayer chez soi et l'on se rend compte que l'on obtient un unique ruban cylindrique, de longueur double au Möbius initial.



Si on ne connaît pas la réponse, le plus simple est de raisonner grâce à un diagramme topologique, comme ci-dessus.

### 3.3.3.1 Variantes du ruban de Möbius

## 3.3.4 Tore

### Définition. (*Tore*)

On appelle *tore de dimension n*, le quotient d'espaces topologiques  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .

### Proposition. (*Séparation du tore*)

Tout tore est séparé.

▷ Le tore se décrit comme quotient de l'application  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2it_1\pi}, \dots, e^{2it_n\pi})$ . ■

### Proposition. (*Description alternative du tore*)

$\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$ . Ce n'est pas  $\mathbb{S}^n$ .

### Propriété

Le tore de dimension 1 est la sphère.

### Proposition. (*Obtention du tore par le carré unité*)

Le tore  $\mathbb{T}^2$  est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité  $K = [0,1] \times [0,1]$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$  (*voir schéma*).

Le tore qu'on connaît est le tore de première dimension.

### Heuristique

Le tore est sans coutures et de frontière vide.

### Usage du tore dans les jeux vidéos

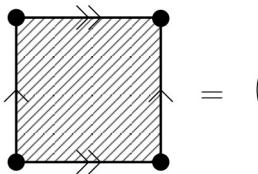
Dans le jeu vidéo Pacman,

### 3.3.5 Bouteille de Klein

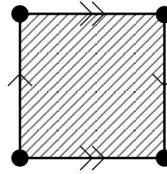
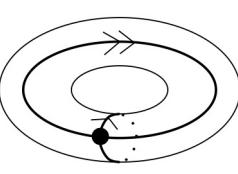
**Définition.** (*Bouteille de Klein*)

La bouteille de Klein  $\mathbb{K}_2$  est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,1-t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$  (voir schéma).

**Mnémonik :** la bouteille de Klein est le tore de Möbius.



(a) *Le tore simple.* —



(b) *La bouteille de Klein.* —

FIGURE 3.3.3 : Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes. —

### 3.3.6 Plans projectifs

#### 3.3.6.1 Droite projective réelle

#### 3.3.6.2 Plan projectif réel

#### 3.3.6.3 Sphère de Riemann

#### 3.3.6.4 $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

#### 3.3.6.5 Espaces projectifs généraux

**Définition.** (*Espace projectif réel*)

Soit  $n$  un entier naturel. L'*espace projectif réel de dimension n* est  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R})$  est le quotient de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la relation d'équivalence de colinéarité.

Puisque deux vecteurs sont colinéaires s'ils dirigent la même droite,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  peut être vu comme l'ensemble des droites vectorielles, c'est-à-dire des *directions*, de l'espace euclidien de dimension  $n + 1$ .

▷ En effet, si l'on supprime zéro, la relation de colinéarité est une équivalence. ■

**Proposition.** (*L'espace projectif réel est un quotient*)

$P_n(\mathbb{R})$  est le quotient  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$  où le groupe  $\mathbb{R}^\times$  agit sur cet espace par homothétie  $\lambda \cdot x \mapsto \lambda x$ . C'est l'ensemble des orbites sous cette action.

On retrouve que  $P_n(\mathbb{R})$  est en bijection avec l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$  passant par

zéro.

→ *Notation.* On note souvent  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = S^{n+1}/\{\pm 1_{n+1}\}$ .

Dans les premières dimensions, on a :

### Exemples. (*Espaces projectifs de petites dimensions*)

1. L'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est l'ensemble des directions du plan. Grâce au demi-cercle unité supérieur (car deux points antipodaux du cercle définissent la même droite), cet espace s'y identifie, pour toute droite non horizontale. Par le même argument, les deux points d'ordonnée nulle s'identifient ; par conséquent,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  s'identifie à  $\mathbb{S}^1$  sous espace de  $\mathbb{R}^2$ . **C'est faux en dimension supérieure !**

Plus précisément (*voir la suite*), l'homéomorphisme  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1(\pm 1)$  envoie une droite vectorielle sur la classe de ses intersections avec  $S^1$ . Identifions le demi cercle  $B' = \{e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  avec l'intervalle  $[-1,1]$  par projection sur l'axe des abscisses. Alors l'homéomorphisme  $B^1/x \sim -x \longrightarrow S^1/\pm 1$  est induit par l'inclusion  $B' \hookrightarrow S^1$ . Finalement,  $P^1$  est obtenu en attachant à  $P^0 = \{\pm 1\}$  une cellule  $B'$  le long de  $\partial B' = S^0$ .

De façon calculatoire, si  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \neq 0$ , on définit la relation d'équivalence engendrée par  $(x,y) \sim (\frac{x}{y}, 1)$  : c'est la *projection stéréographique*. Elle permet de définir des points à l'infini. Dans le cas de la dimension 2, mais celui-là seul encore, les deux points à l'infini coïncident.

2. Dans le cas  $n = 2$ , l'homéomorphisme  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2(/ \{\pm I_3\})$  envoie une droite sur la classe d'équivalence de ses deux points d'intersection avec la sphère de dimension 3  $S^2$ .

Identifions la demi-sphère supérieure  $\{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  avec le disque  $B'' \subseteq \mathbb{R}^2$  par  $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ . Alors l'homéomorphisme  $B''/(x \sim -x, x \in S' \subseteq B^2)$  est induit par l'inclusion  $B'' \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Notons d'ailleurs qu'on a une inclusion  $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$ . Si on attache  $B''$  à  $P^1$  le long de la projection  $S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , on obtient un espace homéomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

On peut enfin montrer que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ne se plonge pas dans le plan, dans un sens que l'on précisera pas ici. En effet, intuitivement, en prenant la demi-sphère supérieure, on ne peut pas recoller dans l'espace euclidien usuel la circonférence de sa base.

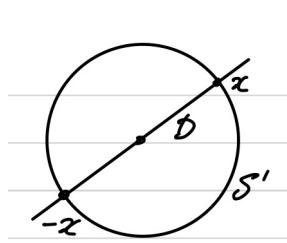
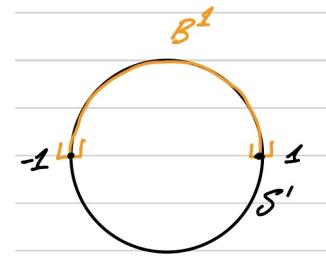
(a) Une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^2$ . —(b) Identification de  $\mathbb{P}^1$ . —

FIGURE 3.3.4 : Espace projectif de dimension 1. —

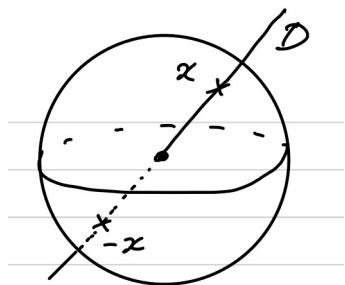
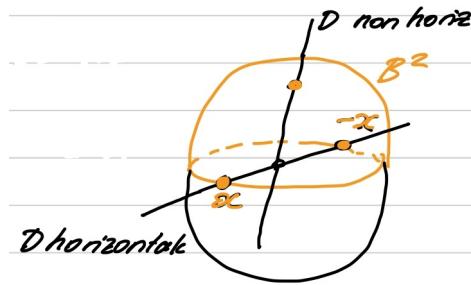
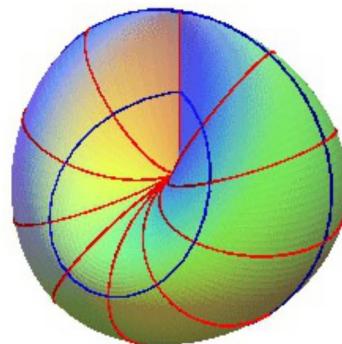
(a) Une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^3$ . —(b) Identification de  $\mathbb{P}^2$ . —

FIGURE 3.3.5 : Espace projectif de dimension 2. —

FIGURE 3.3.6 : Vue de  $\mathbb{P}^2$ . —

L'espace  $\mathbb{P}^2$  ne se plonge pas dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  (difficile). Puisque c'est une variété différentielle compacte, il reste simple de le plonger dans un espace euclidien, mais nécessairement plus grand.

On peut identifier les espaces projectifs de proche en proche de la manière suivante :

**Proposition. (*Identification des espaces projectifs*)**

On a les homéomorphismes suivants :

$$P_n(\mathbb{R}) \xleftarrow[\textcircled{1}]{\sim} S^n / \{\pm 1_{n+1}\} \xleftarrow[\textcircled{2}]{\sim} B^n / (x \sim -x, x \in S^{n-1}) \xleftarrow[\textcircled{3}]{\sim} P_{n-1}(\mathbb{R}) \coprod_{q^{n-1}} e_n,$$

où  $q^{n-1} : S^{n-1} \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$ , qui donnent donc inductivement la structure de *CW-complexes finis*.

▷ L'injection canonique  $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  induit  $S_n / \{\pm id\} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  qui est clairement bijectif et continu, quotient possible à gauche, car deux points antipodaux définissent la même droite. On a une application continue  $\alpha_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$  qui induit la bijection réciproque. Comme cette application qui l'induit est continue, on a le premier homéomorphisme.

On a l'application continue  $f : B^n \rightarrow S^n$  et  $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ . Par suite, elle induit une application continue bijective  $B^n / (\{x \sim -x\}) \rightarrow S^n / \{\pm I_{n+1}\}$  qui est un homéomorphisme. En effet, on a  $q \circ f(x) = q \circ f(y)$  si et seulement si  $x = y$  ou ( $y = -x$  et  $\|x\| = \|y\|$ ). En outre, l'espace  $B^n / (\dots)$  est quasi compact et  $S^n / \{\pm I_{n+1}\}$  est séparé, le graphe de l'action de  $\{\pm I_{n+1}\}$  étant fermé. D'où le résultat.

Soit  $Y = B_n / (x \sim -x \text{ si } x \in S^{n-1})$ , espace qui d'après le deuxième homéo égale  $P_n(\mathbb{R})$ . On a l'application composée  $S^{n-1} \hookrightarrow B^n \rightarrow Y$  continue qui en passant au quotient induit une application continue  $j_2 : P_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ . Soit  $j_1 : B^n \rightarrow Y$  l'application quotient canonique. On montre que  $Y$  avec ces applications est universel pour le diagramme ci-dessous, d'où  $Y = P_{n-1}(\mathbb{R}) \coprod_{q^{n-1}} B^n$ .

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}} & P_{n-1}(\mathbb{R}) & & \\ i_n \downarrow & & \downarrow j_2 & & \\ B^n & \xrightarrow{j_1} & Y & \xrightarrow{\exists h \text{ cont.}} & Z \\ & \searrow \scriptstyle{\forall \alpha_1 \text{ cont.}} & & \nearrow \scriptstyle{\forall \alpha_2 \text{ cont.}} & \\ & & & & t.q. \alpha_2 \circ q_{n-1} = \alpha_1 \circ i_n \end{array}$$

Comme  $j_1$  est surjectif, l'application  $h$  est unique si elle existe. Dans ce cas, on a  $h \circ j_1 = \alpha_1$  qui est continue, donc  $h$  est continue. Si on se donne  $\alpha_1, \alpha_2$  telle que demandées, alors pour  $x \in S^{n-1}$ , on a  $\alpha_1(x) = \alpha_1 \circ i_n(x) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(-x) = \alpha_1 \circ i_n(-x) = \alpha_1(-x)$ . Par la propriété universelle de  $j_1 : B \rightarrow Y$ , on obtient  $h : Y \rightarrow Z$  telle que  $h \circ j_1 = \alpha_1$  et pour  $u = q_{n-1}(v) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$h \circ j_2(u) = h \circ j_2 \circ q_{n-1}(v) = h \circ j_1 \circ i_n(v) = \alpha_1 \circ i_n(v) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(v) = \alpha_2(u),$$

et c'est fini. ■

**Corollaire**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est compact.

**Corollaire**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est connexe.

**Heuristique**

Il faut penser aux tentes Décathlon, qui sont des ronds, et que l'on le replie en huit jusqu'à en faire un point.

**Proposition. (*Projectivité complexe*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ .



$\mathbb{P}^n \mathbb{C} \not\cong \mathbb{P}^{2n} \mathbb{R}$  !

**3.3.6.6 Sphère de Riemann****3.3.7 Simplexes****Définition. (*Simplexe*)**

Soit  $E = \mathbb{R}^N$  où  $N \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle  $n$ -simplexe (géométrique) l'enveloppe convexe  $\sigma$  d'un ensemble de  $n + 1$  points  $\{V_0, \dots, V_n\}$  de  $\mathbb{R}^N$ , appelés *sommets* de  $\sigma$ , affinement indépendants. Le nombre  $n$  est la *dimension* du simplexe considéré.

→ *Convention.* Soit  $k$  un entier naturel. On appelle donc  $k$ -simplexe tout  $k$ -gone régulier dans  $\mathbb{R}^{k+1}$ .



A priori  $n \neq N$ .

**Fait. (*Fermeture des simplexes*)**

Tout simplexe est fermé.

En effet, c'est une enveloppe convexe d'un fermé borné en dimension finie.

→ *Notation.* Comme seule la donnée combinatoire des  $n + 1$  points  $V_0, \dots, V_n$  nous intéresse, nous noterons souvent un simplexe géométrique par  $\langle V_0, \dots, V_n \rangle$ .

**Définition. (*Face d'un simplexe*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\sigma = \langle V_0, \dots, V_n \rangle$  un  $n$ -simplexe géométrique. La  $i$ -ième *face* de  $\sigma$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  est le simplexe  $[V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]$  avec la notation habituelle d'omission. Plus généralement, si  $I \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$ , la  $I^e$  face du simplexe  $\sigma$  est le *sous- $k$ -simplexe* de  $\sigma$  engendré par  $(V_i)_{i \in I}$  où  $k = \text{card}(I)$ . Le  $j^e$  sommet de  $\sigma$  est la  $\{j\}^e$  face  $\langle V_j \rangle$  pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Une *face propre* de  $\sigma$  est un simplexe engendré par un sous-ensemble strict de  $\{V_0, \dots, V_n\}$ .

**Proposition. (*Bord d'un simplexe*)**

Le bord d'un simplexe est la réunion de toutes ses faces propres.

▷ Voici une propriété évidente pour n'importe quel topologue mais qu'il faut prendre avec des pincettes pour démontrer avec rigueur. Notons  $b$  la réunion des faces propres du simplexe  $\sigma$ . Soit  $x \in \sigma \setminus b$ . Notons  $d = d(x, \sigma)$ . Par convexité,  $B(x, d) \subseteq \sigma$ . Ainsi,  $x \in \partial\sigma$ . Soit maintenant  $x \in b$ . On a que  $x \in [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]$  pour un  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Supposons qu'une boule  $B(x, r)$  soit incluse dans  $\sigma$ . En particulier, en notant  $u$  un vecteur directeur unitaire de la droite portant  $[V_i, x]$ ,  $y = x + \frac{r}{2}u$  est dans  $B(x, r)$ . Il est donc dans  $\sigma$ . Cependant,  $\text{Conv}([V_i, x] \cup [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]) = \sigma$  ne contient pas  $y$ ; en effet,  $y \in \text{Conv}([V_i, y] \cup [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]) \supsetneq \text{sig}$  puisque  $[V_i, y] = [V_i, x] \sqcup [x, y]$ . Absurde, donc il n'existe pas de telle boule, donc  $x \in \partial\sigma$ . ■

**3.3.7.1 Simplexes standard****Définition. (*Simplexe standard*)**

Soit  $k$  un entier naturel. Le  $k$ -simplexe (géométrique) standard est

$$T^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k := \|x\|_1 = 1\}.$$

Autrement dit, c'est le  $k$ -simplexe associé à la base canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

→ *Notation.* On note aussi  $\Delta_n$ ,  $\Delta^n$ ,  $|\Delta^n|$  le  $n$ -ième simplexe standard pour  $n \in \mathbb{N}$ . On note alors  $\delta|\Delta^n|$  sa frontière, souvent appelée *bord* à cause de son application en homologie simpliciale.

**Fait. (*Bord du simplexe standard*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans le cas du  $n$ -simplexe standard, son bord est  $\bigcup_i \partial_i \Delta_n$  où  $\partial_i \Delta_n$  est la  $i$ -ième face de  $\Delta_n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'intérieur du  $n$ -simplexe standard est alors  $\Delta_n \setminus \partial\Delta_n$ .

**Exemples. (*Simplexes standard*)**

1. Pour  $k = 0$ , le 0-simplexe standard est le point.  
Il est réalisé par le point  $(1)$  dans  $\mathbb{R}^1$ .
2. Pour  $k = 1$ , le 1-simplexe standard est le segment.  
Il est réalisé par  $[(0,1),(1,0)]$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
3. Pour  $k = 2$ , le 2-simplexe standard est le triangle (plein).  
Il est réalisé par  $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$  dans  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ .
4. Pour  $k = 3$ , le 3-simplexe standard est le tétraèdre (plein).  
Il est réalisé par  $[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$  dans  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ .

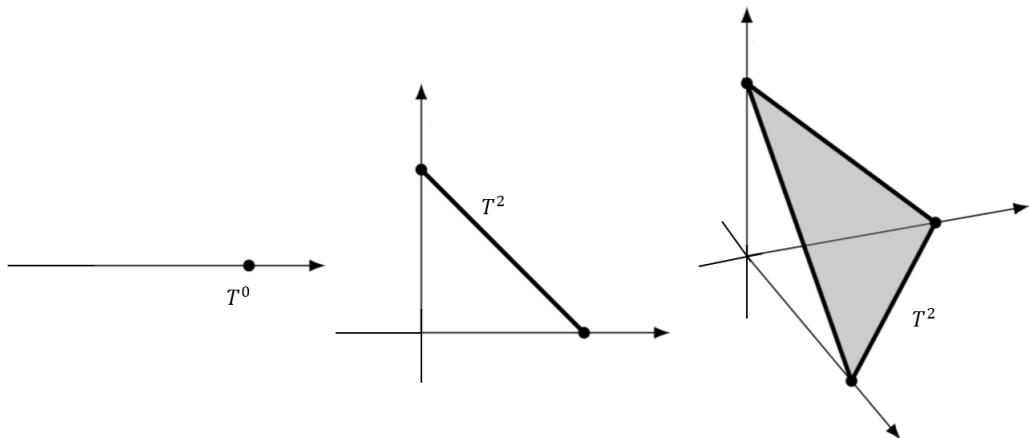


FIGURE 3.3.7 : Les trois premiers simplexes standards. —

**Exercice 10 (Volume du tétraèdre dans  $\mathbb{R}^4$ )**

Quelle est la mesure de Lebesgue de  $\Delta_3$  ?

*Remarque.* Les simplexes standards sont souvent orientés comme un graphe muni d'un unique cycle et leurs sommets sont alors caractéristiquement nommés.

### 3.3.7.2 Géométrie des simplexes

### 3.3.7.3 Subdivisions barycentriques

**Définition.** (*Subdivision barycentrique*)

Soit  $T^k$  un  $k$ -simplexe,  $k \in \mathbb{N}$ . Pour toute permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_{k+1}$ , on considère le  $k$ -simplexe  $\{(x_0, \dots, x_k) \in T^k \mid x_{\tau(0)} \leq x_{\tau(1)} \leq \dots \leq x_{\tau(k)}\}$ .

## 3.4 Constructions d'espaces topologiques

### 3.4.1 Cylindres

**Définition.** (*Cylindre d'une espace*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *cylindre de/sur/de base*  $X$  est l'espace produit

$$\mathfrak{C}(X) = \text{Cyl}(X) = X \times I$$

où  $I = [0,1]$  est muni de la topologie usuelle issue de  $\mathbb{R}$ .

### 3.4.2 Cônes

**Définition.** (*Cône d'une espace*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *cône* de  $X$  est l'espace quotient

$$C(X) = \text{Cone}(X) = \mathfrak{C}(X)/(X \times \{1\}).$$

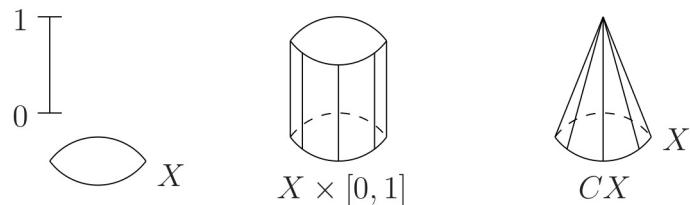


FIGURE 3.4.1 : Construction pas à pas du cône d'un espace  $X$ . —

**Proposition.** (*Isotropie des cônes*)

Soit  $X$  un espace topologique. On a aussi  $CX \simeq \mathfrak{C}/(X \times \{0\})$ .

▷ Il suffit d'exhiber un automorphisme au sens topologique de  $[0,1]$  qui envoie 0 sur 1, par exemple  $t \mapsto 1 - t$ . ■

### Proposition. (*Plongement d'un espace dans son cône*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors l'application  $X \rightarrow CX$  qui à  $x \mapsto \overline{(x,0)}$  est continue et un homéomorphisme sur son image.

▷ Cette application est continue par composition d'application continues. Elle est clairement injective. Or  $X \hookrightarrow X \times I \rightarrow CX$  est une application quotient par  $X \times \{1\}$ , qui est fermé dans  $X \times I$  : en notant  $i$  l'injection canonique,  $i(X) \subseteq X \times I \setminus X \times \{1\}$ . Ainsi  $X$  est un homéomorphisme sur son image. ■

*Remarque.* Pour tout  $s \in [0,1[$  en fait, l'application  $X \rightarrow CX$  qui à  $x \mapsto \overline{(x,s)}$  est un homéomorphisme sur son image.

### Définition. (*Sommet d'un cône*)

Le *sommet* d'un cône est le point  $\overline{(x,1)}$  de  $CX$  pour n'importe quel  $x \in X$ . Il est bien défini par construction.

### Proposition. (*Fonctorialité du cône*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, alors il existe une unique application continue  $CX \rightarrow CY$ ,  $Cid_X = id_{CX}$  et  $C(f \circ g) = Cf \circ Cg$ .

▷ On a  $f(X \times \{1\}) \subseteq Y \times \{1\}$ . On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times id} & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \xrightarrow{Cf} & CY \end{array}$$

par propriété universelle du quotient. ■

### Proposition. (*Séparation du cône*)

Le cône d'un espace séparé est séparé.

▷ Soit  $R$  la relation  $R_{X \times \{1\}}$ , c'est-à-dire,  $xRy \iff x = y$  ou  $x \neq y \in X \times \{1\}$ . Si  $F \subseteq X \times I$ , alors  $RF = F$  si  $F \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$  ou  $= F \cup (X \times \{1\})$  sinon. Soient  $a = (x,s)$  et  $b = (y,t)$  deux points de  $X \times I$  tels que  $\overline{(x,s)} \neq \overline{(y,t)}$ . On disjoint les cas.

Si  $s = 1$ , alors  $t \neq 1$ . Soient  $U, V$  des ouverts disjoints de  $[0,1]$  qui contiennent  $s = 1$  et  $t$  (c'est possible!). Alors  $X \times U$  et  $X \times V$  sont des ouverts saturés disjoints qui séparent  $a$  et  $b$ , et c'est fait.

Si  $t = 1$ , c'est pareil.

Si  $s,t \neq 1$  et  $s \neq t$ , soient  $U,V$  des ouverts disjoints de  $[0,1]$  qui séparent  $s$  et  $t$ . Alors  $X \times U$  et  $X \times V$  conviennent encore.

Si  $s,t \neq 1$  et  $s = t$ . Alors  $x \neq y$ . Soient  $V_x, V_y$  des ouverts de  $X$  qui séparent  $x$  et  $y$ ,  $X$  étant séparé. Alors  $V_x \times [0,1[$  et  $V_y \times [0,1[$  sont des ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$ . Tous les cas sont traités. ■

### Exemple. (*Cône d'une sphère*)

On a  $CS^{n-1} = B^n$ .

En effet, le cylindre d'une sphère est un cylindre, et son cône est homéomorphe à une boule.

### 3.4.3 Suspensions, doubles cônes

#### Définition. (*Suspension d'un espace*)

Soit  $X$  un espace topologique. La *suspension* de  $X$  est l'espace quotient  $S(X) = \Sigma(X) = X \times [-1,1]/R$  où :

$$(x,s)R(y,t) \iff (x,s) = (y,t), \quad s = t = 1, \quad s = t = -1.$$

Autrement dit :  $S(X) = X \times [-1,1]/X \times \{-1,1\}$ .

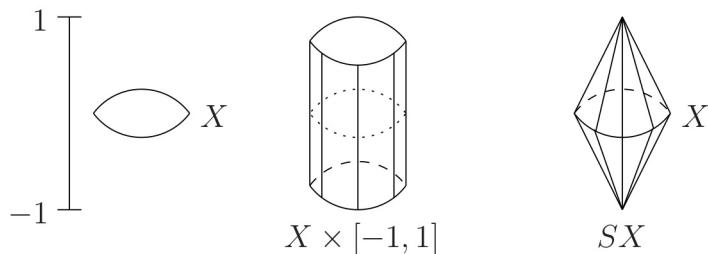


FIGURE 3.4.2 : Construction pas à pas de la suspension d'un espace  $X$ . —

#### Proposition. (*Plongement d'un espace dans sa suspension*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors l'application de  $X$  dans  $SX$  qui à  $x$  fait correspondre  $\overline{(x,0)}$  est un homéomorphisme sur son image.

*Remarque.* Même remarque que pour le cône avec  $s \in ]-1,1[$ .

**Proposition. (Fonctorialité de la suspension)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, alors il existe une unique application continue  $SX \rightarrow SY$ ,  $Sid_X = id_{SX}$  et  $S(f \circ g) = Sf \circ Sg$ .

**Proposition. (Séparation de la suspension)**

La suspension d'un espace séparé est séparée.

**Proposition. (La suspension est un double cône)**

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $S(X) \simeq CX/X \times \{0\}$ .

**Exemple. (Suspension de la sphère)**

On a  $SS^{n-1} = S^n$ .

**Exercice 11 (Homéomorphisme de renversement d'orientation)**

Montrer que  $(x,t) \mapsto (x,1-t)$  est un automorphisme de toute suspension.

**3.4.4 Écrasements**

Exemple très simple déjà rencontré en exemple dans la topologie quotient, on revient sur cette construction extrêmement classique.

**Définition. (Écrasement d'un espace sur une partie)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subseteq X$ . On appelle *écrasement de  $X$  sur  $A$*  l'espace topologique quotient  $X/A := X/\langle A \rangle$  où  $X$  est quotient par la relation d'équivalence :

$$x \sim_A y \iff x = y \text{ OU } (x,y) \in A^2.$$

C'est la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim y$  pour tous  $x, y \in A$ .



FIGURE 3.4.3 : Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule. — En vérité, les deux espaces étaient déjà homéomorphes...

**Proposition**

Si  $A$  est ouverte ou fermé, la restriction de la projection canonique à  $X \setminus A$  est un homéomorphisme sur son image.

**Proposition. (*Suspension par écrasement*)**

Le cône, la suspension sont des écrasements.

**3.4.5 Recollements, bouquets**

Une généralisation (la dernière propriété va vous surprendre!).

**Définition. (*Recollement le long d'un espace*)**

Soient  $X, Y$  et  $A$  des espaces topologiques. On prend des applications  $f : A \longrightarrow X$  et  $g : A \longrightarrow Y$  des applications continues. On note  $X \coprod_A Y$  le *recollement le long de  $A$* , par abus de notation (le recollement dépend d'une certaine application en fait, d'ailleurs non nécessairement injective), le quotient  $X \coprod_A Y / \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence engendrée par les  $\{f(a) \mathcal{R} g(a), a \in A\}$ .

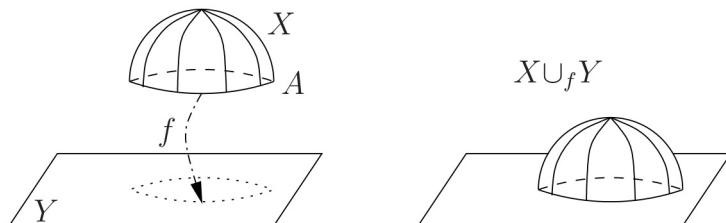


FIGURE 3.4.4 : *Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.* —

Une autre façon de voir les choses est la suivante :

**Propriété. (*Propriété universelle du recollement le long d'un espace*)**

On reprend les notations précédentes. Alors  $\iota_X : X \longrightarrow X \coprod_A Y$  est continue, de même pour  $\iota_Y$ . On a  $\iota_X \circ f = \iota_Y \circ g$ . De plus, pour tout espace  $Z$ , pour toutes  $j_X : X \longrightarrow Z$  et  $j_Y : Y \longrightarrow Z$ ,  $j_X \circ f = j_Y \circ g$  alors il existe une unique flèche continue  $h : X \coprod_A Y \longrightarrow Z$  telle que le diagramme suivant commute, i.e.  $h \circ \iota_Y = j_Y$  et  $h \circ \iota_X = j_X$ .

▷ Propriété universelle du quotient :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & X & & \\
 g \downarrow & & \downarrow \iota_X & & \\
 Y & \xrightarrow{\iota_Y} & X \coprod_A Y & & \\
 & & j_X \searrow & \nearrow h & \\
 & & & Z. &
 \end{array}$$

Il y a donc au moins trois façons pratiques de recoller des espaces :

- exhiber un recollement (une application  $f$ )
- vérifier la propriété universelle
- reconnaître un recollement usuel.



Il faut bien que les deux ensembles d'images coïncident !

Heuristiquement, on va utiliser le recollement dans le cas où les  $\iota$  sont injectives, où l'image de  $A$  est dans la frontière de l'espace et donc  $A$  pris comme sous-espace de  $X$  ou de  $Y$ . L'idée est de recoller des morceaux d'espaces le long de leurs bords.

### Exemples. (*Recollements*)

1. Soit  $X = Y = [0,1]$  et  $A = \{\star, \cdot\}$  muni de la topologie discrète. On prend  $f(\star) = 0 = g(\cdot)$  et  $f(\cdot) = 1 = g(\star)$ . Alors  $X \coprod_A Y \cong S^1$ .
2. (*Espace pointé, bouquets* ) Un espace topologique pointé<sup>a</sup> est une paire  $(X, x_0)$  où  $x_0 \in X$  est appelé *point base (identifié)* ou *IB* (pour *identified basepoint*). Soient  $(Y, y_0)$  un deuxième espace topologique pointé. Prenons le singleton  $A = \{\star\}$ . Pour  $f : A \longrightarrow X$  constante  $x_0$  et  $g$  de même, le *bouquet* de  $(X, x_0), (Y, y_0)$  est l'espace  $X \coprod_A Y$  dit *pointé par l'image de  $x_0 \neq y_0$* . On le note  $X \vee Y$  mais on dit souvent «  $X$  wedge  $Y$  » selon l'usage anglais, bien que ce ne soit pas un symbole de wedge en informatique. Intuitivement, on prend un point de chaque espace, on les identifie tous et on tient ce point au bout des doigts. Un bouquet est aussi appelé *rose* et chacun de ses termes *pétales*.

Formellement, on l'appelle également *somme pointée* et l'on note  $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) / R$  où  $R$  est engendrée par  $x_i \sim x_j$  pour tous  $i, j$ .

3. (*Attachement cellulaire*) Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant. Soit  $S^n$  la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $B^n$  la boule de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\partial B^n = S^{n-1}$  (pour se rappeler le décalage, écrire  $\text{Fr}(B^2) = S^1$ ).

Puisque  $B^n$  est fermé, on a une inclusion canonique de la  $(n-1)$ -sphère dans la

*n*-boule  $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$ . Si  $X$  est un espace topologique, et  $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$  est continue, on note  $X \cup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$  au moyen de  $\varphi$ ; dans le recollement, les applications  $f, g$  n'étaient pas les plus importantes; ici, c'est le contraire, l'espace  $A$  est toujours le même, c'est l'application  $\varphi$  qui est importante. On dit alors qu'on a *recollé une n-cellule à  $X$*  et qu'on obtient  $X \cup_{\varphi} e^n$  en attachant une *n-cellule le long de  $\varphi$* .

<sup>a</sup> Il existe une vraie dichotomie entre les espaces topologiques et les espaces topologiques pointés.

**Remarque importante.** On signale une définition alternative du recollement, ne faisant intervenir qu'une seule application.

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $A$  est une partie de  $X$  et  $f : A \longrightarrow Y$  une application continue. Le *recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$*  est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y) / \mathcal{R}$$

où  $\mathcal{R}$  et la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim f(x)$  pour tout  $x \in A$ .

### Proposition

On vérifie que si  $A$  est ouvert ou fermé, la projection canonique  $X \coprod Y \longrightarrow X \cup_f Y$  induit sur  $Y$  un homéomorphisme sur son image qui est de même nature.

Autrement, ce n'est pas clair.

### Curiosité. (*L'écrasement est un recollement*)

Si  $Y$  est réduit au point  $\star$  (notation homotopique), alors  $f$  est l'application constante la seule qui existe et l'inclusion de  $X$  dans  $X \coprod \star$  induit un homéomorphisme  $X / \langle A \rangle \simeq X \cup_f \{\star\}$ .

### Proposition

Si  $A$  est non vide, le recollement de deux connexes ou connexe par arcs est de même nature.

On verra d'autres exemples de recollements dans la partie sur les espaces cellulaires, tels que l'attachement cellulaire.

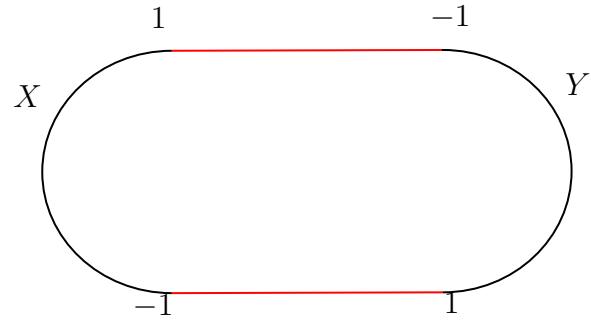


FIGURE 3.4.5 : Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle. —

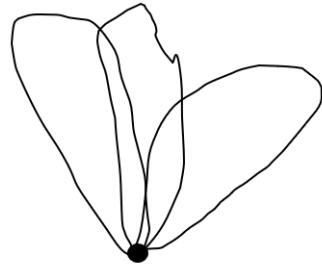


FIGURE 3.4.6 : Bouquet à trois fleurs. —  
Toutes les formes sont à prévoir à homéomorphie près.

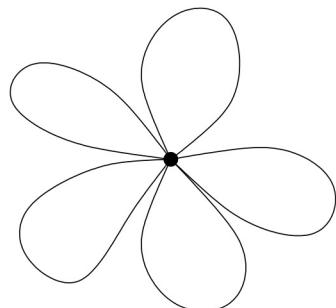
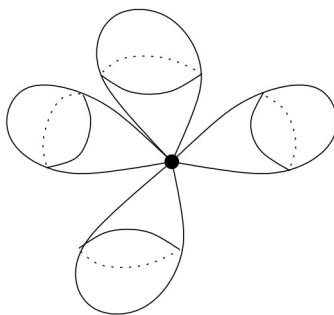


FIGURE 3.4.7 : Bouquet à cinq cercles. —  
C'est la vision la plus proche de l'intuition.

FIGURE 3.4.8 : *Bouquet à quatre sphères.* —

Noter qu'il est impossible de le représenter correctement en trois dimensions.

### 3.4.6 Joints

#### Définition. (*Joint*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Le *joint (topologique)* de  $X$  et  $Y$ , noté  $X * Y$ , est le quotient du cylindre  $X \times Y \times I$  par la relation engendrée par  $(x,y,1) \sim (x',y,1)$  pour tout  $y \in Y$  et  $(x,y,0) \sim (x,y',0)$  pour tout  $x \in X$ , i.e.  $X \times Y \times \{0\} \rightsquigarrow X$  et  $X \times Y \times \{1\} \rightsquigarrow Y$ .

**Mnémonik :** le joint de deux espaces est l'ensemble des segments entre  $X$  et  $Y$ .

#### Définition. (*Joint réduit*)

Soient  $(X,x_0), (Y,y_0)$  deux espaces topologiques pointé. Le *joint (topologique) réduit* de  $X$  et  $Y$ , noté toujours  $X * Y$ , est le quotient du cylindre  $X \times Y \times I$  par la relation engendrée par  $(x,y,1) \sim (x',y,1)$  pour tout  $y \in Y$ ,  $(x,y,0) \sim (x,y',0)$  pour tout  $x \in X$  et  $(x_0,y_0,t) = (x_0,y_0,t')$ , i.e.  $X \times Y \times \{0\} \rightsquigarrow X$ ,  $X \times Y \times \{1\} \rightsquigarrow Y$  et  $\{(x_0,y_0)\} \times I \rightsquigarrow \{(x_0,y_0)\}$ .

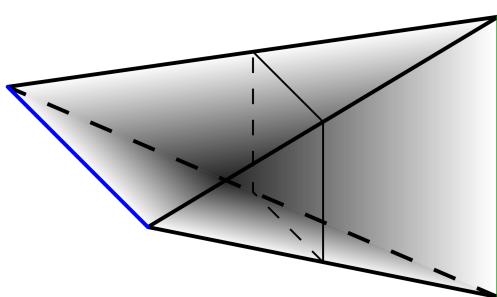


FIGURE 3.4.9 : *Joint topologique de deux segments.* —  
Le joint des deux segments bleu et vert est le polyèdre en gris.

**Propriétés. (*Cône et suspension via le joint*)**

1. Le cône est le joint à un point.
2. Le cône est le joint à deux points.

**Exercice 12 (*Cône à trois sommets*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Décrire  $X * \{0,1,2\}$  où  $\{0,1,2\}$  est muni de la topologie discrète.

## 3.5 Propriétés topologiques classiques

### 3.5.1 Le caddie de contre-exemples

#### 3.5.1.1 Droite de Sorgenfrey

#### 3.5.1.2 Plan de Sorgenfrey

#### 3.5.1.3 Droite de Michael

### 3.5.2 Séparation

**Définition. (*Espace séparé*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $X$  est séparé si pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe deux ouverts (ou, de façon équivalente, deux voisinages) disjoints qui contiennent  $x, y$  respectivement.

▷ Immédiat. ■

**Remarques.**

1. La topologie discrète est toujours séparée.
2. La topologie grossière n'est jamais séparée.

**Exemple. (*Dédoubllement du segment unité*)**

Soient  $0_-$  et  $0_+$  deux ensembles distincts n'appartenant pas à  $[0,1]$ . On considère  $X = ]0,1] \cup \{0_+\} \cup \{0_-\}$ . On note  $\mathcal{B}(x) = \{[x - 1/n, x + 1/n] \cap [0,1], n \in \mathbb{N}^*\}$  pour  $x \in ]0,1]$ ,  $\mathcal{B}(0_+) = \{\{0_+\} \cap ]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\mathcal{B}(0_-) = \{\{0_-\} \cap ]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Alors  $\mathcal{B}(x)$  est une base d'ouverts d'une topologie sur  $X$ . Autrement dit, on considère  $[0,1]$  muni de sa topologie induite auquel on adjoint une copie  $c$  du point 0 tel que  $c \cup ]0,1]$  ait la même topologie que  $[0,1]$ .

Alors  $X$  n'est pas séparé pour cette topologie.

En effet,  $0_+$  et  $0_-$  n'admettent pas de voisinages disjoints.

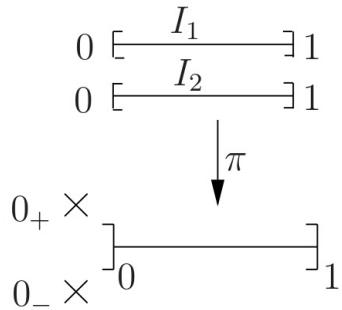


FIGURE 3.5.1 : *La suspension du segment unité, non séparée. — On parle de segment à deux origines.*

#### Propriété. (*Fermeture des singletons*)

Soit  $X$  un espace séparé. Alors les singletons sont fermés.

#### Contre-exemple. (*Topologie non séparée donc les singletons sont fermés*)

Soit  $X = \mathbb{C}$  que l'on munit de la topologie de Zariski  $\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad U = \{x \in \mathbb{C}, P(x) \neq 0\}\}$ . Alors les points du plan complexe sont Zariski-fermés mais la topologie de Zariski n'est pas séparée.  $\square$

#### Propriété. (*Stabilité de la séparation par induction*)

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

On montre qu'un produit d'espaces séparés est séparé. La preuve dans le cas fini est extrêmement élémentaire ; dans le cas infini, c'est plus dur.

#### Propriété. (*Produit fini d'espaces séparés*)

Le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

▷ Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2) \in X \times Y$  distincts. On peut, sans perte de généralité, supposer  $x_1 \neq x_2$ . Puisque  $X$  est séparé, on peut trouver deux ouverts  $U_1, U_2$  tels que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  et  $x_i \in U_i$ . Ainsi  $U_1 \times Y$  et  $U_2 \times Y$  sont des ouverts disjoints qui contiennent  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  respectivement. Ainsi  $X \times Y$  est séparé. ■

### Théorème. (*Produit d'espaces séparés*)

Soit  $I$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques non vides munis de leurs topologies respectives. Alors  $\prod_{i \in I} X_i$ , muni de la topologie produit, est séparé, si et seulement si, chaque terme  $X_i$  est séparé.

▷ Nous montrons le sens direct. Supposons les  $X_i$  séparés. Soient  $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$  tels que  $x \neq y$ . Par définition, il existe un certain  $i \in I$  tel que  $x_i \neq y_i$ . Puisque  $X_i$  est séparé, il existe  $U, V$  deux ouverts disjoints de  $X_i$  qui séparent  $x_i$  et  $y_i$ . Alors  $X \times X \times \dots \times U \times \dots \times X$  et  $X \times X \times \dots \times V \times \dots \times X$  sont deux ouverts disjoints de  $\prod_{i \in I} X_i$  contenant respectivement  $x$  et  $y$ .

Les injections canoniques forment des homéomorphismes sur leurs images. Ainsi les  $X_i$  s'identifient à des sous-espaces de  $\prod_{i \in I} X_i$ , qui sont donc séparés comme sous-espaces d'espaces séparés. ■

#### 3.5.2.1 Autres axiomes de séparation

##### Propriété. (*Caractérisation pratique des $T_0$* )

Un espace topologique  $X$  est  $T_0$  si et seulement si pour tous  $x, y \in X$ , si  $x \in \overline{\{y\}}$  et si  $y \in \overline{\{x\}}$ , alors  $x = y$ .

▷ Notons  $(\star)$  cette propriété.

$(\star) \implies T_0$  : supposons  $x \neq y$ . Alors quitte à renommer,  $x$  n'est pas dans l'adhérence de  $\{y\}$ . Ainsi,  $\{y\}^c$  est un voisinage ouvert de  $x$  qui ne contient pas  $y$ .

$T_0 \implies (\star)$  : supposons  $x \neq y$ . Alors quitte à renommer, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  qui ne contient pas  $y$ . Ainsi,  $V^c \ni y$ , donc  $\{y\} \subseteq V^c$  qui est fermé, d'où  $\overline{\{y\}} \subseteq V^c$  et donc  $\overline{\{y\}} \not\ni x$ . ■

##### 3.5.2.1.1 Régularité complète

###### Lemme

Tout espace localement compact est complètement régulier, en particulier régulier.

▷ Tout espace localement compact  $X$  étant séparé par définition, vérifions que  $X$  vérifie  $T_3 \frac{1}{2}$ . Soient  $x \in X$  et  $F$  un fermé de  $x$  ne contenant pas  $x$ , de complémentaire  $U$ . Notons  $X^*$  le compactifié de  $X$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $X^*$ , donc de  $C = X^* \setminus U$  est un fermé de  $X^*$  qui contient  $F$ . D'autre part,  $X^*$  est normal, car compact. Puisque  $\{x\}$  est fermé dans  $X^*$  par séparation de  $X^*$ , le lemme d'Urysohn donne une fonction continue  $X^* \rightarrow [0,1]$  telle que  $f(x) = 0$  et  $f(C) = 1$ . En considérant  $f|_X$ , le tour est joué. ■

#### 3.5.3 Dénombrabilité

Voir la première section : AXIOMES DE DÉNOMBRABILITÉ, SÉPARABILITÉ.

### 3.5.4 Métrisabilité

**Mnémonik :** un espace est métrisable s'il est maîtrisable.

#### Lemme

Tout espace topologique plongé dans un espace métrique est métrisable.

#### Propriété

Tout espace métrisable est séparé.

Réciproquement :

#### Théorème. (*Théorème de métrisation d'Urysohn*)

Tout espace topologique régulier à base dénombrable est métrisable.

#### 3.5.4.1 Produits d'espaces métrisables

Tout produit fini d'espaces métrisables est métrisable grâce à la distance produit. Dans le cas dénombrable, c'est encore possible grâce à un procédé diagonal. Dans le cas infini quelconque, c'est encore possible, grâce à l'axiome du choix ! Mais la métrique obtenue est bien loin des métriques élémentaires.

### 3.5.5 Compacité

*Remarque.* Il suffit de vérifier, pour montrer qu'une partie est compacte, que de tout recouvrement éventuellement dépassant, on peut extraire un recouvrement fini.

#### Méthode. (*Travailler un compact en topologie générale*)

Pour tout point  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U_x$  et la collection des  $U_x$  recouvre  $X$ . Souvent, par séparation, on a en fait un ouvert  $V_{f(x)}$  dual. Il en existe donc un nombre fini qui recouvre  $X$ . Alors l'intersection de leurs duals est encore un ouvert vérifiant la propriété voulue.

#### Propriété. (*Sous-espace compacts*)

Les sous-espaces (quasi-)compacts d'un espace séparé sont ses fermés.

▷ En effet, si  $X$  est compact et  $A \subseteq X$  est fermé, alors  $A$  est compact. D'autre part, si  $X$  est séparé et  $K \subseteq X$  est compact, alors  $K$  est fermé dans  $X$ . ■

Le fait que la notion de compacité soit extrinsèque, confirme que tous les sous-espaces d'un compact ne peuvent être compact.

Ceci d'autant plus que tout espace se plonge dans un espace compact, dans lequel il est n'est donc pas fermé...

On énonce maintenant une propriété qui rend compte du fait qu'un espace compact est en particulier localement compact.

### Lemme

Tout point d'un espace compact admettant un voisinage ouvert  $U$  admet un voisinage fermé  $V$  contenu dans  $U$ .

▷ Soit  $x$  un tel point et notons  $X$  l'espace compact dont il est question. On sait que  $\text{Fr}(U)$  est un fermé inclus dans  $X$ , donc il est compact. Par séparation, pour tout  $t \in U$ , il existe un voisinage ouvert  $V_t$  de  $t$  et un voisinage  $F_y$  de  $x$  dans  $U$  disjoints. Puisque  $(V_y)_{y \in \text{Fr}(U)}$  recouvre  $\text{Fr}(U)$ , on peut en extraire un sous-recouvrement fini indexé par disons  $t_1, \dots, t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $F_0 = F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_n}$  est un voisinage de  $x$  dans  $U$  ne rencontrant aucun des termes d'un recouvrement de  $\text{Fr}(U)$ , donc  $F := \overline{F_0} \subseteq U = \overline{U} \setminus \text{Fr}(U)$ . ■

### Propriété. (*Raffinement relativement compact d'un recouvrement*)



Soient  $X$  un espace compact et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  avec  $I$  un ensemble quelconque. Alors il existe un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in J}$  de  $X$  avec  $J \subseteq I$  fini,  $V_i \subseteq U_i$  pour tout  $i \in J$  et  $\overline{V_i} \subseteq U_i$  compact ; on dit que  $V_i$  est *relativement compact dans  $U_i$* . En particulier,  $(\overline{V_i})_{i \in J}$  est un recouvrement fini de  $X$  par des compacts qui est un raffinement de  $(U_i)_{i \in I}$ .

▷ Une façon de raisonner est d'utiliser la compacité locale d'un espace compact. Soit  $x \in X$ . Il existe  $i_x \in I$  tel que  $x \in U_{i_x}$ . D'après le lemme précédent, on peut trouver un voisinage  $F_{i_x}$  de  $x$  avec  $F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$ . Posons  $V_x = \overline{F_{i_x}}$  de sorte que  $x \in V_x$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $V_x$  est relativement compact, puisque son adhérence est un fermé inclus dans  $X$  qui est compact. La famille  $(V_x)_{x \in X}$  est un recouvrement de  $X$  dont on peut extraire un sous-recouvrement fini qui est bien par construction un raffinement de  $(U_i)_{i \in I}$ , de plus  $\overline{V_x} \subseteq \overline{F_{i_x}} = F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$  pour tout  $x$ , et toutes les conditions sont remplies. ■

#### 3.5.5.1 Compacts, quasi-compacts et applications continues

##### Contre-exemple. (*Un quasi-compact non séparé*)

Tout ensemble fini non séparé, par exemple,  $\{a, b\}$  muni de la topologie grossière, est quasi-compact sans être séparé, donc ne peut être dit *compact*. □

**Propriété. (*Image d'un quasi-compact*)**

L'image d'un quasi-compact par une application continue est quasi-compacte.

**Propriété. (*Image d'un compact*)**

L'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compacte.

C'est propriété est très forte, car l'image d'un fermé par une application continue n'a aucune raison d'être fermée, même dans l'image. La compacité permet de rendre les choses bien plus fortes. On en déduit une propriété suivante.

**Théorème. (*Isomorphisme de compact*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques, et  $f : X \rightarrow Y$  une application bijective continue.

Si  $X$  est quasi-compact et  $Y$  est séparé, alors  $f$  est un homéomorphisme.

▷ Montrons que  $f$  est fermée. Soit  $F$  un fermé de  $X$ , c'est un compact. Ainsi  $f(F)$  est un compact, donc un fermé. ■

**Heuristique**

L'idée selon laquelle un compact est petit est trompeuse, tout simplement car la taille est une notion relative. Il est plus intéressant de remarquer qu'un espace n'est pas compact s'il lui manque quelque chose ; de là on déduit qu'un compact ne peut pas « s'étendre à l'infini ».

À méditer, les plongements suivants :

$$B_{\mathbb{C}}(0,1) \hookrightarrow \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où les espaces compacts de cette suite sont  $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$  et  $\mathbb{CP}^1$ , le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{C}$ .

**3.5.5.2 Applications propres****Fait**

Toute application propre est fermée.

**Propriété. (*Caractérisation de la propriété par les fibres*)**

Soit  $Y$  un espace séparé et localement compact. Soit  $X$  un espace quelconque. Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est propre si et seulement si  $f$  est fermée et les fibres de  $f$  sont fermées au-dessus de chaque élément de  $Y$ .

### 3.5.5.3 Produit d'espaces compacts

On signale le lemme du tube, parfois utilisé.

#### Lemme. (*Lemme du tube*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $Y$  quasi-compact. Soit  $x \in X$ . Alors tout ouvert contenant  $\{x\} \times Y$  contient un ouvert élémentaire  $U \times Y$  contenant cette partie.

▷ Soit  $O$  un ouvert de  $X \times Y$  contenant  $\{x\} \times Y$ . Par définition, pour tout  $y \in Y$ ,  $(x,y) \in O$ . Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert élémentaire  $U_y \times V_y$  contenant  $(x,y)$  contenu dans  $O$ . En particulier,  $(V_y)_y$  est un recouvrement ouvert du quasi-compact  $Y$ . On peut en extraire un sous-recouvrement fini, indexé par  $Z$ . Posons  $U = \bigcap_{y \in Z} U_y$ . Alors l'ouvert  $U$  contient  $x$  et la réunion des  $V_y$ ,  $y \in Z$  vaut  $Y$  donc  $U \times Y \subseteq O$ . ■

#### Remarques.

1. C'est faux dans le cas général ! L'hypographe avec l'axe des abscisses de la fonction inverse, contient la droite des ordonnées ; elle ne contient aucun tube contenant la droite des ordonnées.
2. On peut montrer que le lemme du tube équivaut à la quasi-compacité de  $Y$  : pour tout  $Y$  non quasi-compact, on peut trouver un  $x$  ne vérifiant pas la propriété du lemme.

#### Propriété. (*Produit fini d'espaces compacts*)

Le produit de deux espaces quasi-compacts est quasi-compact.

▷ (*Preuve sans le lemme du tube (explicitement).*) Soient  $X, Y$  deux espaces quasi-compacts. Soit  $(O_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X \times Y$ . Pour tous  $(x,y) \in X \times Y$ , je choisis  $i(x,y) \in I$  tel que  $(x,y) \in O_{i(x,y)}$  et des ouverts  $U_{(x,y)}$  et  $V_{(x,y)}$  de  $X$  et  $Y$  contenant  $x$  et  $y$  tels que  $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq O_{i(x,y)}$ . Si on fixe  $x$ , les  $V_{i(x,y)}$ ,  $y \in Y$  recouvrement ouvert de  $Y$ . Puisque  $Y$  est quasi-compact, il existe un sous-ensemble fini  $Y_x \subseteq Y$  tel que les  $V_{i(x,y)}$ ,  $y \in Y_x$  recouvrent  $Y$ . Or, pour  $U_x = \bigcap_{y \in Y_x} U_{i(x,y)}$ ,  $y \in Y_x$  forment un recouvrement de  $X$  par des ouverts, car  $Y_x$  est fini. Donc il existe  $X_0 \subseteq X$  tel que  $(U_x)_{x \in X_0}$  est un recouvrement fini de  $X$ . Ainsi, les  $O_{i(x,y)}$ ,  $y \in Y_x$ ,  $x \in X_0$  forment un recouvrement ouvert fini de  $X \times Y$ . ■

Dans le cas général (assez surprenant par ailleurs!), on a besoin de l'axiome du choix.

On montre d'abord un lemme technique.

**Théorème. (*Théorème de compacité d'Alexander*)**

On dit qu'un mauvais recouvrement d'un espace topologique  $X$  est un recouvrement dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini. Clairement, un espace séparé est compact si et seulement s'il n'admet aucun mauvais recouvrement ouvert.

Soit  $A$  une prébase d'ouverts de  $X$ . On prétend que si  $X$  admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de  $A$ .

▷ En effet : soit  $M$  l'ensemble des mauvais recouvrements ouverts de  $X$  ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit  $(U_j)_{j \in J}$  une famille totalement ordonnée d'éléments de  $M$ . Soit  $U = \bigcap_{j \in J} U_j$ . Alors  $U$  majore les  $U_j$ . C'est un mauvais recouvrement ouvert de  $X$ , sinon, il contiendrait un sous-recouvrement fini  $V_1, \dots, V_n$ . En prenant  $V_i \in U_{j_i}$  et si  $\beta \in J$  vérifie  $U_{i_\beta} \subseteq U_\beta$  pour chacun, alors  $U_\beta$  aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction. Donc  $M$  est inductif. Par le théorème de Zorn, soit  $U^*$  un élément maximal de  $M$ . En particulier, pour tout ouvert  $V \notin U^*$ , le recouvrement  $U^* \cup V$  n'est pas mauvais, donc il existe  $U_1, \dots, U_n$  dans  $U^*$  tel que  $\{V, U_1, \dots, U_n\}$  recouvre  $X$ .

Pour terminer la preuve du lemme, remarquons deux choses. D'abord, pour tous ouverts  $V, V'$  de  $X$ , si  $V \notin U^*$  et  $V' \notin U^*$ , alors  $V \cap V' \notin U^*$ . En effet, soient  $U_1, \dots, U_n$  et  $U'_1, \dots, U'_n$  comme dans la remarque précédente. Alors  $V \cap V', U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_n$  recouvre  $X$ , et comme  $U^*$  est mauvais,  $V \cap V' \notin U^*$ . Remarquons également que pour tous ouverts  $V, V'$  de  $X$ , alors si  $V \notin U^*$  et  $V \subseteq V'$ , alors  $V' \notin U^*$ , puisque si  $V, U_1, \dots, U_n$  recouvre  $X$ , alors  $V', U_1, \dots, U_n$  recouvrirait  $X$  aussi. Montrons enfin que  $A \cap U^*$  recouvre  $X$ . Soit  $x_0 \in X$ . Comme  $U^*$  recouvre  $X$ , il existe  $T \in U^*$  tel que  $x_0 \in T$ . Comme  $A$  est une prébase, il existe  $V_1, \dots, V_n$  dans  $A$  tels que  $x_0 \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq T$ . Par les remarques précédentes, il existe  $i$  tel que  $V_i \in U^*$ . Donc  $x_0 \in V_i \in A \cap U^*$ . Enfin, comme  $U^*$  est mauvais,  $A \cap U^*$  l'est aussi. ■

**Théorème. (*Théorème de Tychonov*)**

Un produit non vides d'espaces compacts est compact si et seulement si chaque facteur est compact.

▷ Encore une fois le sens direct se déduit de la continuité des projections et de l'image continue d'un compact. Montrons donc le sens réciproque.

Revenons à la preuve. Alors le produit des espaces compacts, donc séparés,  $X_i, i \in I$ , est séparé, par produit quelconque de séparés. S'il n'était pas compact, alors par le lemme technique, il existerait un mauvais recouvrement de ce produit  $X$  par des éléments de la prébase  $A = \{p_j^{-1}(V), j \in I, V$  ouvert de  $X_j\}$ . Pour  $j \in J$ , soit  $\mathcal{A}_j$  l'ensemble des ouverts  $V$  de  $X_j$  tels que  $p_j^{-1}(V) \in U$ . Si  $\mathcal{A}_j$  recouvre  $X_j$ , par compacité de  $X_j$ , il existe  $V_1, \dots, V_n$  dans  $\mathcal{A}_j$  recouvrant  $X_j$ . Mais alors  $p_j^{-1}(V_1) \cup \dots \cup p_j^{-1}(V_n) = p_j^{-1}(X_j) = X$ , ce qui contredit le fait que  $U$  est mauvais. Soit donc  $x_j \in X_j$  tel que  $x_j \notin \mathcal{A}_j$ . On pose  $x = (x_j)_{j \in J} \in X$ . Comme  $U$  recouvre  $X$ , il existe  $j \in I$  et  $V$  ouvert de  $X_j$  tel que  $x \in p_j^{-1}(V) \in U$ . Ceci est une contradiction. Donc  $\prod_{i \in I} E_i$  est un espace compact, ce qu'il fallait montrer. ■

### 3.5.5.4 Locale compacité

#### Définition. (*Espace localement compact*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement compact* s'il est séparé et tout point admet un voisinage compact.

#### Théorème. (*Riesz*)

Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.

▷ Le sens direct vient du théorème Bolzano-Weierstrass. Montrons en quoi le théorème de Riesz implique la réciproque. Supposons que 0 admette voisinage compact, alors soit une boule fermée non triviale inclus dans ce voisinage. C'est un fermé d'un compact donc compact. Il existe donc une boule fermé non triviale compacte. Par homéomorphisme, la boule unité fermée est compacte, donc  $E$  est de dimension finie. ■

#### Propriété. (*Système de voisinages compacts*)

Un espace séparé  $X$  est localement compact si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

▷ La réciproque est claire. Soit  $X$  localement compact. Soit  $x \in X$  et  $F$  un voisinage compact de  $x$ . Pour tout ouvert  $U$  avec  $x \subseteq U \subseteq F$ , il suffit de montrer qu'il existe un voisinage  $W$  de  $x$  fermé, contenu dans  $U$ ; il est alors automatiquement compact.

Comme  $X$  est séparé, si  $y \neq x$ , soient  $V$  et  $V'$  des voisinages de  $x$  et  $y$  respectivement les séparant. Alors  $y \notin \overline{V}$ : en effet, sinon, pour tout voisinage de  $y$ , en particulier  $V'$ ,  $V \cap V' \neq \emptyset$ . Ainsi  $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V}$ . Par conséquent,  $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$ . Par compacité de  $F$ , il existe des voisinages  $V_1, \dots, V_n$  de  $x$  tels que  $(X - U) \cap \overline{V_1} \cap \dots \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$ . Alors  $\overline{V_1} \cap \dots \cap \overline{V_n} \cap F$  convient. ■

#### Corollaire. (*Ouvert dans un localement compact*)

Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.

Plus généralement :

#### Proposition. (*Sous-espace d'un espace localement compact*)

Un sous-espace topologique d'un espace topologique localement compact est localement compact si et seulement si on peut l'écrire comme différence de deux fermés.

### 3.5.5.5 Compactification d'Alexandrov

**VOC** On appelle *point à l'infini* d'un espace topologique, l'unique élément de  $\tilde{X} \setminus X$  relatif à une construction d'un compactifié.

#### Propriété. (*Compactifié de l'espace*)

Le compactifié de l'espace  $\mathbb{R}^n$  est la  $n$ -sphère.

#### Fait. (*Topologie de l'espace dans son compactifié*)

Les ouverts de  $X$  sont tous des ouverts de  $\tilde{X}$ .

Les fermés de  $X$  qui sont des fermés de  $\tilde{X}$  sont les compacts inclus dans  $X$ .

Ces deux faits découlent directement de la construction de la topologie sur  $\tilde{X}$ .

#### Contre-exemple

$\mathbb{R}^2$  est un fermé du plan... mais pas son image dans son compactifié  $S^2$ , qui est justement la sphère privée d'un pôle!

□

### 3.5.5.6 Séquentielle compacité

#### 3.5.5.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

On l'énonce.

#### Exercice 13

Un espace compact peut-il contenir un infini discret ?

▷ Éléments de réponse.

Oui : l'image de  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dans  $[0,1]$ .

#### 3.5.5.6.2 Généralisations

On fait ce qu'on peut.

#### Exercice 14

Montrer qu'il existe un espace compact non séquentiellement compact.

▷ Éléments de réponse.

Soit  $I = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . Soit  $X = \{0,1\}$ . Pour  $i \in I$ , on note  $i_n$  sa  $n$ -ième composante. Considérons la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $X$  définie par  $f_n(i) = i_n$ . Soit  $(f_{n_k})_k$  une suite extraite de  $f$  qui converge dans  $X$ . Notons  $K$

l'image dans  $\mathbb{N}$  de la suite  $(n_k)_k$ . Soit  $j \in I$  tel que  $j_m = 0$  si  $m \in 2K$ , et  $j_m = 0$  sinon. On détermine l'image de  $(f_{n_k})(j)$  et on montre qu'elle ne converge pas dans  $X$ .

### 3.5.5.7 Dénombrabilité à l'infini

#### Définition. (*Espace dénombrable à l'infini, $\sigma$ -compact*)

Un espace topologique  $X$  est *dénombrable à l'infini* ou  *$\sigma$ -compact* s'il existe une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de compacts tels que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

#### Exercice 15 (*Dénombrabilité à l'infini vs $\sigma$ -compacité*)

Parfois, on réserve le terme de *dénombrabilité à l'infini* au cas où il existe une suite exhaustive de compacts  $(K_i)_{i \in I}$  tels que  $K_i \subseteq K_{i+1}^\circ$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Montrer que dans le cas où  $X$  est séparé, ces deux notions sont les mêmes. Contre-exemple sinon ?

#### Lemme

Un espace dénombrable à l'infini et localement compact admet un recouvrement dénombrable d'ouverts relativement compacts  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sorte que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{U_i} \subseteq U_{i+1}$ .

▷ Soit  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un recouvrement dénombrable de  $X$  par des compacts. On construit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  par récurrence. On pose  $U_0 = \emptyset$ . Supposons qu'on ait construit  $U_1, \dots, U_n$  comme demandé. En particulier,  $Q_n = \overline{U_n} \cup K_{n-1} \subseteq X$  est compact. Pour tout  $x \in Q_n$ , soit  $U_x$  un voisinage ouvert de  $x$ . Par compacité locale, on peut le remplacer par  $V_x$  d'adhérence compacte  $\overline{V_x} \subseteq U_x$  et l'on a encore un recouvrement de  $Q_n$ . Comme  $Q_n$  est compacte, il existe  $J$  fini tel que  $(V_x)_{x \in J}$  recouvre encore  $Q_n$ , et la réunion  $U_{n+1} = \bigcup_{x \in J} V_x$  est donc un voisinage ouvert de  $Q_n$ , en particulier de  $\overline{U_n}$ . De plus,  $\overline{U_{n+1}}$  est bien compact, car  $\overline{\bigcup_{x \in J} V_x} = \bigcup_{x \in J} \overline{V_x}$ . Il reste à voir que  $(U_i)_{i \in I}$  ainsi obtenue est un recouvrement de  $X$ . Or par construction, les  $U_{i+1}$  contiennent les  $Q_i$  et donc les  $K_i$  qui forment eux-mêmes un recouvrement, donc c'est bon. ■

#### Propriété. ( $\sigma$ -compact $\implies$ Lindelöf)

Dans un espace dénombrable à l'infini, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

#### Curiosité

Un espace séparé à la fois de Baire et  $\sigma$ -compact est localement compact en au moins un point.

En particulier, dans le cas d'un groupe topologique, il est localement compact.

### Propriété. (*Produit d'espaces $\sigma$ -compact*)

Tout produit fini d'espaces  $\sigma$ -compacts est  $\sigma$ -compacts.

### Contre-exemple. (*Produit de $\sigma$ -compacts pas $\sigma$ -compact*)

L'espace  $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1]$  est  $\sigma$ -compact. Cependant, on montre que  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  n'est pas  $\sigma$ -compact.  $\square$

#### 3.5.5.8 Paracompacité

### Définition. (*Espace paracompact*)

Un espace topologique  $X$  est *paracompact* si et seulement si tout recouvrement ouvert admet un raffinement « localement fini », i.e. étant donné  $(V_i)_{i \in I}$ , pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U \ni x$  tel que  $\{i \in I \mid V_i \cap U \neq \emptyset\}$  est fini.

*Remarque.* Un compact est paracompact.

Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$ , soit  $\bigcup_{i \in I} V_i = X$ , un *raffinement* est un recouvrement  $(V'_j)_{j \in J}$  tel que pour tout  $j$ , il existe  $\varphi(j) \in I$  tel que  $V'_j \subseteq V_{\varphi(j)}$ . Un sous-recouvrement est un raffinement particulier.

Si l'on remplace *localement fini* par *fini* dans la définition, on retombe clairement sur la notion de compacité. Plus étonnant, si l'on remplace *raffinement* par *sous-recouvrement* dans la définition précédente, on retombe également sur la notion de compacité !

▷ Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Soit  $V \in \mathcal{U}$  non vide contenant  $x$  et posons  $\mathcal{V} = \{G \cup V, G \in \mathcal{U}\}$ . Alors  $\mathcal{V}$  est clairement un recouvrement ouvert de  $X$ , mais puisque chacun de ses membres contient  $V$ , aucun sous-recouvrement ne peut être localement fini en  $x$  à moins qu'il soit lui-même fini. Par suite,  $\mathcal{U}$  admet un sous-recouvrement non seulement localement fini (par hypothèse) mais fini (par ce que l'on vient de dire). Ainsi,  $X$  est compact. ■

### Fait. (*Réunion disjointe de paracompacts*)

Toute réunion disjointe d'espaces paracompacts est paracompacte. Il suffit de l'écrire.

### Lemme. (*Localement compact + $\sigma$ -compact $\Rightarrow$ paracompact*)

Un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact.

▷ Soit  $X$  un tel espace. Par un lemme sur la dénombrabilité à l'infini, on sait que  $X$  possède un recouvrement dénombrable  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'ouverts relativement compacts avec  $\overline{V_i} \subseteq V_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Remarquons en particulier que  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  est compact quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  quelconque. En tant que recouvrement de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ , ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  indexé par  $J_n \subseteq I$ . On considère  $\mathcal{U}_n = \{U_i \cap (V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}})\}$ , qui est bien un recouvrement ouvert de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ . Posons  $\mathcal{U}$  la famille des  $\mathcal{U}_n$ , pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ . C'est un raffinement de  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . En effet, tout  $\mathcal{U}_n$  est contenant dans l'un des  $U_i$  par construction. C'est encore un recouvrement, car elle recouvre  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et par construction de  $(V_i)_i$ ,  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  recouvre  $X$ . Enfin, elle est localement finie, car tout point  $x \in X$  admet un voisinage ouvert de la forme  $V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}}$  et puisque par construction ce recouvrement a une intersection triviale avec les points de  $\mathcal{U}$  pour  $i \geq n + 3$  et comme tous les  $\mathcal{U}_n$  sont finis, de sorte que  $\bigcup_{k < n+3} U_k$  est fini. ■

### Reformulation pratique. (*Paracompacité dans le cas lclc*)

Soit  $X$  un espace topologique localement compact et localement connexe. Alors  $X$  est paracompact, si et seulement si, chaque composante connexe est dénombrable à l'infini.

▷ Il s'agit d'abord de remarquer qu'un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact. Oh, mais on vient de le faire. Le sens réciproque du théorème vient donc facilement. En effet, chaque composante connexe est fermée. Elle est donc localement compacte. Puisqu'elle est dénombrable à l'infini par hypothèse, elle est donc paracompacte. Par réunion disjointe de paracompacts, elle est paracompacte.

Le sens direct est plus complexe. On a besoin d'une propriété additionnelle : un espace est dit *fortement paracompact*, si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un raffinement  $*$ -fini, autrement dit tel que chaque membre n'intersecte qu'un nombre fini de membres de la collection. On peut vérifier en exercice qu'un espace paracompact et localement compact est fortement paracompact. Par suite, les composantes connexes de  $X$  sont fortement paracompactes pour les mêmes arguments que dans la preuve de la réciproque. De plus,  $C$  étant connexe, il a la propriété de Lindelöf, et donc par compacité local,  $C$  est  $\sigma$ -compact. ■

### Exercice 16

Un espace paracompact est-il nécessairement à base dénombrable de voisinages ?

### 3.5.5.9 Théorème de la cornemuse

## 3.5.6 Complétude

### 3.5.7 Convexité

#### Propriété. (*Produit de convexes*)

Tout produit de convexes est convexe.

▷ Car tout produit de segment fait l'affaire. ■

### 3.5.8 Connexité par arcs

Les notions de connexité s'énonce tout aussi bien dans un espace topologique que dans un espace métrique ou vectoriel normé. On impose directement le formalisme général.

La notion de connexité par arcs, contrairement à celle de connexité, s'introduit au moyen de celle de composante connexe (par arcs) : dans cette section, on parlera de composante connexe pour, en toute rigueur, *composante connexe par arcs*.

#### Définition-propriété. (*Composantes connexes (par arcs), connexité par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $C$  une partie de  $X$ . On définit la relation sur  $C$  : *être connecté par un chemin*, ou *il existe un chemin continu entre*, s'il existe  $a < b \in \mathbb{R}$ , et l'on peut sans perte de généralité fixer  $[0,1]$  à cette étape, et un arc paramétré  $\gamma : [a,b] \rightarrow C$  (!) de classe continue tel que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ .

Cette relation est d'équivalence ; ses classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes (par arcs)* de  $C$ . On dit que  $C$  est *connexe par arcs*, ou connexe s'il n'y a pas d'ambiguïté, s'il y a une unique composante connexe : lui-même dans ce cas.

Ainsi,  $X$  est connexe par arcs si deux points quelconques de  $X$  sont toujours reliés par un chemin continu.

On montrera avec la propriété de réunion de connexe par arcs que les composantes connexes par arcs sont les parties connexes par arcs maximales pour l'inclusion.

▷ Trouver les bonnes transformations d'application pour montrer la transitivité. ■

#### Heuristique

La connexité par arcs est une notion extrinsèque.

### Exemples. (*Connexes par arcs*)

1. L'ensemble vide, les singletons sont connexes par arcs.
2. Tout espace vectoriel normé, tout espace affine est connexe par arcs.
3. Tout convexe, toute partie étoilée est connexe par arcs.

On a des propriétés analogues à celles générales sur les connexes. Elles se démontrent toutefois bien plus facilement.

### Propriété. (*Connexité par arcs des réunions*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $(C_i)_{i \in I}$  des connexes par arcs de  $X$ .

1. Si les  $C_i$  se rencontrent deux à deux, leur réunion est connexe par arcs.
2. Si l'intersection des  $C_i$  est non vide, même conclusion.
3. Si  $I$  est dénombrable et  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ , même conclusion.
4. Si  $I$  est fini et même hypothèse, même conclusion.

▷ Dans le cas dénombrable ou fini, il s'agit d'appliquer un nombre fini de fois la transitivité de la relation d'équivalence définissant la connexité par arcs. Dans le premier cas, il suffit de l'appliquer... une seule fois. ■

### Contre-exemple. (*Complémentaire d'un connexe*)

Le complémentaire d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs.

Par exemple, le complémentaire de l'axe des abscisses, connexe par arcs puisqu'espace affine, dans le plan a exactement deux composantes connexes : les deux demi-plans supérieur et inférieur. □



L'intersection de deux connexes par arcs, même non disjoints (hi hi), n'a aucune raison de l'être !



L'adhérence d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs : le sinus du topologue le démontre.

### Propriété. (*Produit de connexes par arcs*)

Un produit non vide d'espaces topologiques non vides est connexe par arcs si et seulement chaque composante est connexe par arcs.

▷ C'est très rapide ! L'inclusion directe n'est pas dure par image continue d'un connexe par arcs par les projections ; la réciproque vient de la caractérisation de la continuité des applications à valeurs dans un produit, et il suffit alors de considérer l'application produit. ■

**Propriété. (*Image d'un connexe par une application continue*)**

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

- ▷ Découle directement de la définition. ■

**Corollaire. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)**

Soit  $X$  une espace topologique connexe par arcs et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors l'image de  $f$  est un intervalle.

- ▷ Découle du TVI version connexe. ■

**Corollaire. (*Somme de deux connexes par arcs*)**

Soient  $A, B$  deux connexes par arcs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $A + B$  est connexe par arcs.

- ▷ C'est l'image de  $A \times B$  par la somme, continue. ■

*Remarque.* On a donc une propriété similaire pour les connexes.

**Corollaire. (*Connexité par arcs dans  $\mathbb{R}$* )**

Les connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont exactement les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

- ▷ Soit  $C$  un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ . Alors c'est un connexe, comme on le verra plus tard, donc un intervalle.

Réiproquement, montrons qu'un intervalle est connexe par arcs. Soit  $I$  cet intervalle et  $a < b \in I$ . Par définition,  $[a,b] \subseteq I$ . Alors le chemin affine  $\gamma : [0,1] \rightarrow [a,b] \subseteq I$ ,  $t \mapsto (1-t)a + tb$  convient. ■

**Corollaire**

En dimension 1, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident (en dimension 2, non plus).

On énonce le théorème suivant, valable dans les espaces vectoriels normés.

**Définition. (*Connexité par lignes brisées*)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est *connexe par lignes brisées* ou *polygonales* si pour tous  $x, y \in A$ , il existe  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $[x, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, y]$  soient tous inclus dans  $A$ .

**Propriété. (*Connexité par lignes brisées des ouverts d'un evn*)**

Soit  $\Omega$  un ouvert d'une espace vectoriel normé  $X$ . Alors  $\Omega$  est connexe si et seulement s'il est connexe par lignes brisées. Il est alors connexe par arcs affines par morceaux, donc  $C_{pm}^1$ .

▷ Il suffit d'observer la preuve du résultat suivant, donné dans la partie de la Connexité sur le lien entre connexité et connexité par arcs. Il est clair sinon que la connexité par lignes brisées implique la connexité par arcs et donc la connexité. ■



Dans un espace vectoriel normé, les boules sont convexes, donc connexes par lignes brisées et simplement connexes, donc connexes par arcs, et même connexes. En revanche, **une boule d'un espace métrique n'a aucune raison d'être connexe par arcs !**

**Exercice 17 (Co-connexité des hyperplans)**

Montrer que dans un evn  $E$ , pour tout hyperplan  $H$ ,  $H$  est fermé si et seulement si  $E \setminus H$  n'est pas connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit  $H$  un hyperplan fermé de  $E$ . C'est le noyau de  $\phi$ , forme linéaire continue non nulle. Posons  $U = \{x \in E, \phi(x) > 0\}$  et  $V = \{x \in E, \phi(x) < 0\}$ . Alors  $U, V$  sont clairement des ouverts disjoints, non vides par non nullité. Ils sont connexes, car images réciproques de connexes par des applications continues : non, non et non ! Comment m'avez-vous cru ? Ils sont connexes puisque convexes donc connexes par arcs. Ainsi  $E \setminus H$  a deux composantes connexes non triviales, donc n'est pas connexe, donc n'est pas connexe par arcs.

Réciproquement, soit  $H$  un hyperplan non fermé. Soient  $x, y \in E, x, y \notin H$ . On peut supposer  $x \neq y$ . Quitte à multiplier par un scalaire et invoquer un argument de convexité le long d'une droite, on peut supposer  $|x - y| = 1$ . On construit par récurrence une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E \setminus H$  qui vérifie  $x_0 = y$ ,  $|x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$  et  $x_{n+1} - x_n \in H$ . L'initialisation est déjà faite. On suppose les  $k$  premiers termes construits.  $H$  est dense dans  $E$ , donc il existe  $v \in H$  tel que  $|(x - x_k) - v| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ . On pose alors  $x_{k+1} = x_k + v$  qui n'est pas dans  $H$ , autrement,  $x_k \in H$ , et cela vérifie toutes les conditions. On définit enfin  $f(0) = x$ ,  $f(\frac{1}{2^n}) = x_n$  et  $f$  affine entre deux de ces points. Alors  $f(1) = y$  et  $f$  relie  $x$  à  $y$  dans  $E \setminus H$ .

### 3.5.9 Connexité

#### 3.5.9.1 Définition

##### Définition. (*Espace connexe*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *connexe* ou, si le contexte n'est pas clair, *connexe général*, si les seuls ouverts fermés de  $X$  sont  $\emptyset$  et  $X$ .

##### Reformulation pas pratique. (*Connexité par les frontières*)

Un espace topologique est connexe si et seulement si la frontière de toute partie non vide ou étendue à l'espace tout entier est non vide.

##### Propriété. (*Caractérisations de la connexité*)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est connexe,
2. il n'existe pas de partitions de  $X$  en ouverts disjoints non triviaux,
3. il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux ouverts disjoints non triviaux,
4. il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux fermés disjoints non triviaux,
5. toute application continue de  $X \rightarrow Y$  est constante où  $Y$  est un espace discret fixé,
6. toute application continue de  $X \rightarrow D$  est constante où  $D$  est un ensemble dénombrable, muni de la topologie discrète, fixé,
7. toute application continue de  $X \rightarrow \{0,1\}$  est constante.

▷ Supposons qu'il existe une partition de  $X$  en ouverts disjoints non triviaux. On en choisit un  $O_1$  et on note  $O_2$  la réunion de tous les autres ; on a alors une partition en deux ouverts disjoints non triviaux. Alors  $O_1$  est un ouvert de  $X$  et un fermé de  $X$ , car son complémentaire est un ouvert ( $O_2$ ) de  $X$ . Puisque ni  $O_1$  ni  $O_2$  ne sont vides,  $O_1$  n'est pas égal à  $\emptyset$  et  $X$ .

Une partition en deux ouverts disjoints non triviaux est une partition en deux fermés disjoints non triviaux, puisque que le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue non constante où  $Y$  est un espace discret donné. Soit  $x$  une valeur prise par  $f$ . Alors  $f^{-1}(x)$  est un fermé, car  $f$  est continue. Soit  $Y'$  le complémentaire de  $\{x\}$  dans  $Y$ . Puisque  $Y$  est discret,  $Y'$  est fermé. Ainsi  $f^{-1}(Y')$  est un fermé, et c'est le complémentaire de  $f^{-1}(x)$ . Donc  $f^{-1}(x)$  est un ouvert fermé non trivial, car  $f^{-1}(Y')$  contient au moins un point par non-constance, de  $X$ .

Les implications suivantes sont immédiates.

Soit  $A$  un ouvert fermé non trivial de  $X$ . Alors  $f = \mathbb{1}_A$  est une application non constante de  $X$  dans  $\{0,1\}$ . En plus, elle est continue : en effet,  $f^{-1}(1) = A$  est un ouvert et  $f^{-1}(0) = \complement A$  est un ouvert en tant que complémentaire d'un fermé. ■

##### ▷ Éléments de réponse.

On s'intéressera notamment aux parties d'un espace topologique connexe ; il n'y a aucune raison qu'elles soient connexes. **On dit que  $A \subseteq X$  est connexe si elle l'est pour la topologie induite. . En particulier,**

la connexité est une notion extrinsèque.

Intuitivement, les connexes sont les parties d'un seul tenant (de même que les parties connexes par arcs, bien que les deux notions ne coïncident pas...). On se représente aisément les propriétés générales sur les connexes par des dessins de patatoïdes dans le plan.

### Contre-exemple. (*Un ensemble non connexe pas trivial*)

$\mathbb{Q}$  est non connexe.

En effet,  $\sqrt{2}$  n'est pas dans  $\mathbb{Q}$ . Ainsi  $\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[ \cap \mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[ \cap \mathbb{Q})$  partition en deux ouverts disjoints non vides de  $\mathbb{Q}$  : ils contiennent respectivement 1 et 2.  $\square$

### Méthode. (*Montrer qu'une partie n'est pas connexe*)

Cette technique est fondamentale, car il est plus simple d'exhiber des ouverts disjoints non vides d'un espace général plutôt que des ouverts relatifs.

Pour montrer que  $A \subseteq X$  est non connexe, il faut et il suffit d'exhiber deux ouverts de  $X$  non vides, disjoints  $O_1, O_2$  tels que  $O_1 \cap A, O_2 \cap A \neq \emptyset$  et  $A \subseteq O_1 \cup O_2$ .

Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles. La preuve n'est absolument pas triviale.

### Théorème. (*Connexes de $\mathbb{R}$* )

Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

▷ Soit  $C$  un connexe de  $\mathbb{R}$ . Alors  $C$  est un intervalle. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait  $a, b \in C$  et  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a < x < b$  et  $x \notin C$ . Ainsi  $C \subseteq ]-\infty, x[ \cup ]x, +\infty[$ , donc  $C$  se partitionne en  $C \cap ]-\infty, x[$  et  $C \cap ]x, +\infty[$  qui sont deux ouverts de  $C$ , donc  $C$  ne serait pas connexe.

Réciproquement, montrons que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont connexes : ce n'est pas évident. Si  $I$  intervalle est un singleton, c'est déjà fait. D'autre part,  $I^\circ \subseteq I \subseteq \overline{I^\circ} = \overline{I}$ , donc il suffit de montrer que tout intervalle ouvert  $]a, b[$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  est connexe. Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Si  $f$  n'était pas constante, il existerait  $x, y \in I$  vérifiant  $a < x < y < b$  tels que  $f(x) \neq f(y)$ . Pour fixer les idées, prenons  $f(x) = 0$  et  $f(y) = 1$ . On pose :

$$A = \{z \in I, z \geq x \text{ et } \forall t \in [x, z] \quad f(t) = 0\}.$$

L'ensemble  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , car elle contient  $x$ , majorée par  $y$ . Soit  $c$  sa borne supérieure. Par continuité de  $f$ ,  $f(c) = 0$ . Mais  $f$  étant continue à droite en  $c$ , il existe  $\eta$  tel que pour tout  $t \in [c, c + \eta[, |f(t) - f(c)| < \frac{1}{2}$ . Par conséquent pour tout  $t \in [c, c + \eta[, f(t) = 0$ , d'où  $f(c + \eta/2) = 0$ , ce qui contredit la maximalité de  $c$ . Ainsi,  $f$  est constante, donc par caractérisation,  $I$  est connexe, ce qu'il fallait montrer. ■

**Propriété. (*Connexité de  $\emptyset$* )**

L'ensemble vide est connexe.

**Propriété. (*Connexité des singletons*)**

Tout singleton est connexe.

**3.5.9.2 Opérations sur les connexes**

La connexité est stable par quelques opérations bien choisies.

**Propriété. (*Réunion de connexes qui s'entendent bien*)**

Toute réunion (quelconque) de connexes dont les intersections deux à deux sont non vides est connexe.

▷ Soient  $X$  un espace topologique et  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de connexes de  $I$  dont on suppose que  $\forall i, j \in I \quad i \neq j \implies C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . Soit  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts disjoints non vides de  $X$  tels que  $R = \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Si  $I$  est vide,  $R$  est vide et  $R$  est connexe. Sinon, soit  $i_0 \in I$ . Alors  $C_{i_0} \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Par connexité de  $C_{i_0}$ , et sans perte de généralité, on a  $C_{i_0} \subseteq \Omega_1$ . Soit  $i \in I$ . Puisque  $C_i$  est connexe, on a  $C_i \subseteq \Omega_1$  ou  $C_i \subseteq \Omega_2$ . Or  $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ , donc on ne peut avoir  $C_i \subseteq \Omega_2$ , puisque  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont disjoints ; ainsi  $C_i \subseteq \Omega_1$ . En passant à la réunion,  $R \subseteq \Omega_1$ . ■

**Corollaire. (*Réunion de connexes qui piquent-niquent*)**

Toute réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

▷ Elle vérifie en particulier les hypothèses de la propriété précédente. ■

Dans le cas d'un ensemble dénombrable, on peut faire mieux.

**Propriété. (*Réunion dénombrable de connexes à la queue leu leu*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $X$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est connexe.

▷ Pour tout  $i \in I$ , étant donnée une application constante  $f : \bigcup_{i \in I} C_i \longrightarrow \{0\}$ , on a  $f|_{C_i} = f|_{C_{i+1}}$  au sens de son unique valeur comme fonction continue sur un connexe. Par récurrence, pour tout  $i \in I$ , la valeur de  $f$  sur  $C_i$  est celle sur  $C_0$ . Donc  $f$  est constante. ■

**Propriété. (*Réunion finie de connexes non disjoints*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C_1, \dots, C_n$ ,  $n$  un entier naturel, des connexes de  $X$  tels que  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$  pour tout  $i = 1, \dots, n - 1$ . Alors  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  est connexe.

▷ Il suffit d'adapter un peu la preuve générale. ■



Attention ! L'intersection de deux connexes n'a aucune raison d'être connexe.

**Propriété. (*Connexité des parties intercalées entre la fermeture*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie connexe de  $X$ . Alors toute partie  $B$  telle que  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  est connexe.

▷ Soit  $f : B \rightarrow \{0,1\}$  une application continue. Elle se restreint en une application continue sur  $A$ . Puisque  $A$  est connexe,  $f$  est constante sur  $A$ ; sans perte de généralité, supposons  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in A$ . Par continuité,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \overline{A}$ : en effet,  $f^{-1}(\{0\})$  est un fermé contenant  $A$ , donc contient  $\overline{A}$ . En particulier,  $f$  est constante sur  $B$ , ce qu'il fallait montrer. ■

▷ On peut également donner une preuve calculatoire de ce fait. ■

**Corollaire. (*Connexité de l'adhérence d'un connexe*)**

L'adhérence d'un connexe est connexe.

Attention, on verra qu'on n'a pas de propriétés semblables pour l'adhérence d'un simple connexe par arcs.

**Contre-exemple. (*Partie non connexe dont l'adhérence est connexe*)**

Deux boules ouvertes tangentes conviennent. □

**Propriété. (*Produit d'espaces connexes*)**

Un produit fini non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes sont connexes.

▷ On donne donc d'abord la preuve dans le cas fini, plus simple. Notons que le sens direct est direct par image continue d'un connexe par les projections.

On fixe  $(x,y) \in X \times Y$ , ce produit étant non vide par hypothèse. Alors  $\{x \times Y\}$  est connexe. En effet, il est homéomorphe à  $X$  ! Ainsi, pour tous  $b,b' \in Y$ ,  $(x,b)$  et  $(x,b')$  sont dans la même composante connexe. De même, puisque  $X \times \{y\}$  est connexe, pour tous  $a,a' \in X$ ,  $(a,y),(a',y)$  sont dans la même composante connexe. Soient donc en général  $(a,b),(a',b') \in X \times Y$ . Alors  $(a,b) \sim (a',b') \sim (a',b')$  pour la

relation être dans la même composante connexe. Ainsi  $X \times Y$  n'a qu'une composante connexe. ■

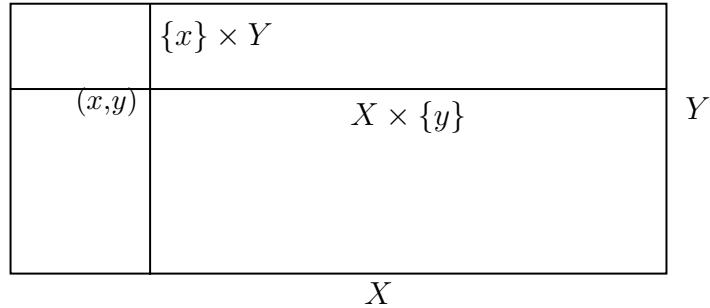


FIGURE 3.5.2 : Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes. —  
On considère l'espace produit  $X \times Y$ , un point  $(x,y)$  et les deux fibres convoquées par lui.

### Théorème. (*Produit d'espaces connexes*)

Un produit non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes le sont.

▷ De même, le sens direct est donné par la continuité des projections. Réciproquement, supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $E_i$  soit un espace topologique connexe. Montrons que le produit est connexe. Soient  $a, b \in \prod_{i \in I} E_i$  avec  $J = \{j \in I, a_j \neq b_j\}$  fini. Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi: \prod_{j \in J} E_j &\longrightarrow \prod_{i \in I} E_i \\ x &\longmapsto a_i \text{ si } i \in I \setminus J, x_i \text{ sinon}\end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image. Son image est donc connexe. Comme elle contient  $a$  et  $b$ , on en déduit que la composante connexe de  $a$  contient l'ensemble  $A = \{b, J \text{ est fini}\}$ . Or par hypothèse le produit est non vide. Montrons simplement maintenant que  $\overline{A} = \prod_{i \in I} E_i$ , dont on déduira que  $\prod_{i \in I} E_i$  est connexe. Soit  $x$  un élément du produit. Soit  $R(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$  un rectangle contenant  $x$ . Alors  $R \cap A$  contient au moins  $x'$  qui vaut  $x_i$  si  $i = i_1, \dots, i_k$  et  $a_i$  sinon. ■

On termine par un résultat rigolo appelé *théorème du passage à la douane*.

### Théorème. (*Théorème du passage des douanes*)

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie  $A$  et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de  $A$ .

▷ Soit  $C$  un connexe de l'espace topologique  $X$ . On suppose que  $C \cap A \neq \emptyset$  et que  $C \cap \mathbb{C}_X A \neq \emptyset$  pour une partie quelconque  $A$  de  $X$ . Alors  $\emptyset \neq \overline{C \cap A} \subseteq \overline{C} \cap \overline{A}$  et de même  $\emptyset \neq \overline{C} \cap \overline{\mathbb{C}_X A} = \mathbb{C}_X \mathring{A}$ . On rappelle que  $\overline{C}$  est connexe. Si  $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}_X A}$  est tel que  $C \cap Fr(A) = \emptyset$ , alors encore  $\overline{C} \cap Fr(A) \neq \emptyset$ , car une frontière est fermé. Par suite, comme  $\mathring{A}, Fr(A), \mathbb{C}_X \mathring{A}$  est une partition de  $X$ ,  $\overline{C} \cap \mathring{A}, \overline{C} \cap \mathbb{C}_X \mathring{A}$  est une partition de  $\overline{C}$  en deux ouverts non vides disjoints, contradiction. ■

### 3.5.9.3 Connexes et applications

**Propriété.** (*Image d'un connexe par une application continue, théorème de Bolzano*)

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces topologiques  $X, Y$ . On suppose  $X$  connexe. Montrons  $f(X)$  connexe. Soit  $g : f(X) \rightarrow \{0,1\}$  une application continue. Alors  $g \circ f : X \rightarrow \{0,1\}$  est bien définie, continue par composition et donc constante, car  $X$  est connexe. Alors  $g$  est constante : en effet, si  $y \in f(X)$ ,  $y = f(x)$  d'où  $g(y) = g \circ f(x) = C$ . C'est démontré. ■

*Remarque.* On retrouve les caractérisations 5 à 7 de la connexité. En effet, *les composantes connexes d'un espace discret sont les singletons*.

**Corollaire.** (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit  $X$  une espace topologique connexe et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors l'image de  $f$  est un intervalle.

La notion de connexité, parmi d'autres, est l'une des notions fondamentales qui permet de passer du global au local. Un premier exemple.

**Théorème.** (*Applications localement constantes*)

Soit  $X$  un espace connexe. Soit  $f$  une application localement constante sur  $X$ , alors  $f$  est constante.

▷ On remarque d'abord qu'une telle application  $f : X \rightarrow Y$  est continue. Soit en effet  $x \in X$ . Soit  $W$  un voisinage de  $f(x)$  dans  $Y$ . On choisit  $V$  un voisinage de  $x$  sur lequel  $f$  est constante. Alors  $f(V) \subseteq W$  trivialement.

Par définition des applications non vides  $X$  est non vide. Sinon, soit  $x_0$  un point de  $X$  et  $c = f(x_0)$ . On note  $A = \{x \in X, f(x) = c\}$ . Alors  $A$  est non vide et c'est un fermé par continuité de  $f$ . Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $x \in A$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $t \in V$ ,  $f(t) = c$ , soit  $V \subseteq A$ . Ce qui termine la preuve. ■

### 3.5.9.4 Composantes connexes

**Lemme.** (*Composante connexe*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . Alors il existe une plus grande partie connexe  $C_x$  contenant  $x$ . C'est la réunion de tous les parties connexes de  $X$  contenant  $x$ . On dit parfois que  $C_x$  est *maximalement connexe*.

▷ Découle de la propriété sur les réunions de connexes ayant tous un point en commun. ■

**Lemme**

Toute partie non vide ouverte fermée et connexe d'un espace topologique en est une composante connexe.

▷ Par maximalité. ■

Ce lemme n'est pas utile.

**Définition-propriété. (*Composantes connexes*)**

Soit  $x \in X$ ; l'ensemble  $C_x$  est appelé *composante connexe* de  $x$ . Les  $C_x$  sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence  $x \sim y$  si  $x \in C_y$ , aussi définissable par : il existe  $C$  connexe tel que  $x, y \in C$ . En particulier, les composantes connexes de  $X$  forment une partition de  $X$ .

▷ Rapide. ■

Ainsi, un espace se décompose toujours en réunion de connexes.

On peut se demander la structure topologique (ouverte, fermée) des composantes connexes dans l'espace.

**Propriété. (*Fermeture des composantes connexes*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Alors  $C$  est fermée dans  $X$ .

▷ Vient de ce que l'adhérence d'un connexe est connexe. ■

**Propriété. (*Ouverture des composantes connexes en nombre fini*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Si  $X$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ Puisqu'une réunion finie de fermée est fermée. ■

**Propriété. (*Ouverture des composantes connexes si localement connexe*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Si  $X$  est localement connexe, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ C'est évident : soit  $x \in C$ . Alors  $X$  est trivialement voisinage de  $x$ ; soit un voisinage ouvert connexe de  $x$ . Par maximalité, ce voisinage est tout entier contenu dans  $C$ , donc  $C$  est voisinage de chacun de ces points. ■

En particulier, dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

On verra d'autres résultats sur les composantes connexes d'un ouvert dans le cas localement connexe.

#### Propriété. (*Composantes connexes du produit*)

Dans un produit d'espaces topologiques  $\prod_{i \in I} E_i$  la composante connexe du point  $x$  est le produit des composantes connexes de  $x_i$  dans  $E_i$ .

▷ Par continuité des projections. ■

#### 3.5.9.5 Totale discontinuité

On introduit une notion qui traduit un défaut puissant de connexité.

#### Définition. (*Espace totalement discontinu*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons (ou « points », légèrement improprement).

Un espace totalement discontinu ayant au moins deux éléments n'est jamais connexe, ni connexe par arcs.

Tout espace discret est totalement discontinu. Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple fondamental. ( $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu)

En effet, soient  $x \leq y \in \mathbb{Q}$ . On suppose que  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe  $C$ . Alors tout connexe contenant  $x$  et  $y$  est inclus dans  $C \subseteq \mathbb{Q}$ . En particulier,  $[x,y] \subseteq C \subseteq \mathbb{Q}$ . Ceci n'est pas possible dès que si  $x < y$ .

Un autre exemple, un peu moins évident :  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  est totalement discontinu.

#### Exercice 18

Montrer que  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  est totalement discontinu.

#### Exercice 19 (*Un connexe dénombrable*)

On souhaite montrer qu'il existe un espace topologique connexe non discret, non grossier, séparé et dénombrable. Pour cela, soient  $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$  et  $Y = \mathbb{Q} \times \{0\}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,

$y = (q,0) \in Y$ , posons  $B(y,\varepsilon) = \{(p,0) \in Y, |p - q| < \varepsilon\}$ . Pour  $x = (p,q) \in X - Y$ , notons  $T_x$  le triangle équilatéral du plan dont les trois sommets sont  $x(p,q)$ ,  $(d(x),0) = p+q/\sqrt{3},0$ ,  $(g(x),0) = (p-q/\sqrt{3},0)$ . On pose alors  $B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(s,0) \in Y, |s - d(x)| < \varepsilon\} \cup \{(s,0) \in Y, |s - g(x)| < \varepsilon\}$ . On munit donc  $X$  de la topologie engendrée par ces boules. Montrer que  $X$  est connexe.

### 3.5.9.6 Lien avec la connexité par arcs

**Propriété.** (*Connexe par arcs  $\implies$  connexe*)

Tout espace connexe par arcs est connexe.

▷ Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs. Si  $X$  est vide, c'est terminé. Sinon, soit  $x \in X$ . On écrit  $X$  comme la réunion  $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0,1])$  où pour tout  $y$ ,  $\gamma_y \in C^0([0,1],X)$  est tel que  $\gamma_y(0) = x$  et  $\gamma_y(1) = y$ , cette existence étant garantie par la connexité par arcs. Or les  $\gamma_y[0,1]$  sont connexes comme images continues (démontré) d'intervalle donc connexe (démontré). De plus, ils ont tous le point  $x$  en commun. Ainsi,  $X$  est connexe. ■

La réciproque est fausse, mais, conformément à l'intuition, les exemples que l'on peut trouver sont gravement pathologiques.

**Exemple fondamental. (*Sinus du topologue*)**

On considère le graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ . On peut sans problème se restreindre au graphe sur  $]0,1]$ . On peut facilement vérifier que son adhérence est  $\Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$ .

En effet, pour un point  $(0,y)$ , on pose  $t_n = \frac{1}{2\pi n + c}$ ; alors  $(t_n, f(t_n)) = (t_n, y) \longrightarrow (0, y)$  est une suite d'éléments de  $A$ . Enfin, il est clair que pour tout autre point, il existe une boule centrée en ce point qui sort de  $A$ .

Soit donc  $A = \Gamma \cup \{(0,0)\}$ . On remarque que  $\Gamma \subseteq A \subseteq \overline{\Gamma}^a$ . Alors  $A$  est connexe mais non connexe par arcs.

$\Gamma$  est connexe par arcs, par image continue  $x \mapsto (x, f(x))$  du connexe par arcs  $]0,1]$ . Il est donc connexe. Ainsi,  $A$  est connexe puisque contenu entre lui et son adhérence.

Cependant,  $A$  n'est pas connexe par arcs. Soit  $x$  le point  $(0,0)$  et  $y = (1, \sin(1))$ . Supposons qu'il existe un arc continu  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$ . Alors  $\gamma(t) = (u(t), \sin(1/u(t)))$  dès que  $u(t) \neq 0$ . On note  $t_0 = \sup\{t \geq 0, u(t) = 0\}$  le dernier instant où le chemin passe en zéro. Alors par continuité de  $\gamma$ ,  $u(t_0) = 0$ , d'où  $v(t_0) = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$ . Alors par le TVI, il existe  $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  avec  $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$  et  $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ . Remarquons simplement qu'alors  $v(t_1) = -1$  et  $v(t_2) = 1$ . Soit donc  $b \in [-1,1]$  tel que  $|b| > \frac{1}{2}$ . Par le TVI encore, il existe  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  tel que  $v(t) = b$  et donc  $|v(t)| > \frac{1}{2}$ . Ceci valant pour tout  $\varepsilon$ , il y a une grosse contradiction. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue

par morceaux est connexe parcs si et seulement si elle est prolongeable par continuité.

On vérifie maintenant que  $A$  n'est pas localement connexe. En effet, le point  $(0,0)$  n'a pas de voisinage ouvert connexe dans  $A$  contenu dans  $B(0, \frac{1}{2})$ . On voit très distinctement sur un dessin que l'intersection de toute boule de rayon  $< 1$  avec  $A$  contient une branche de  $A$  qui ne se relie à rien d'autre.

<sup>a</sup> L'ensemble  $\bar{\Gamma}$  est parfois appelée *courbe fermée du topologue*, est compacte, mais elle vérifie des propriétés semblables à la nôtre.

### Exemple. (*Le cercle polonais*)

On ajoute à la courbe sinus fermée du topologue un arc continu joignant le point  $(1, \sin(1))$  au point  $(0, -1)$ . Alors cet espace est connexe par arcs, donc connexe, mais pas localement connexe, ni donc localement connexe par arcs.

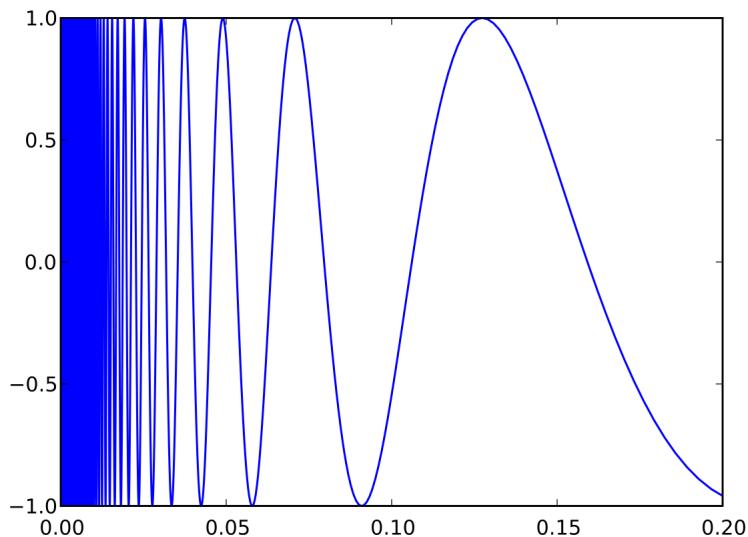


FIGURE 3.5.3 : *Le sinus fermé du topologue*. —

Un espace topologique connexe, mais ni localement connexe, ni connexe par arcs.

On a quand même une certaine régularité sur la topologie propre aux espaces normés :

### Propriété. (*Ouverts connexes*)

Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

▷ On peut en fait montrer exactement de la même manière (en changeant l'expression de  $A$ ) que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs par lignes brisées. On laisse le lecteur adapter la rédaction.

Soit  $X$  un espace vectoriel normé et  $C$  un ouvert connexe. Si  $C$  est vide, c'est terminé. Sinon, soit  $x \in C$ . On note  $A = \{y \in C, x \sim y\}$  où  $\sim$  est la relation « il existe un chemin continu... ». Montrons que  $A$  est un ouvert fermé de  $C$  : puisqu'il est non vide, cela suffira. Soit  $y \in A$ . Alors puisque  $C$  est

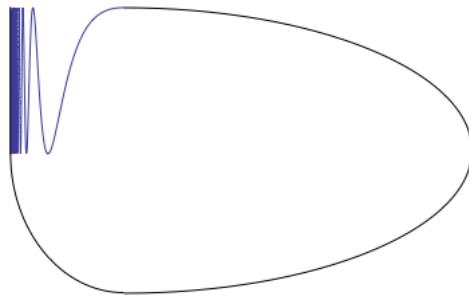


FIGURE 3.5.4 : *Le cercle polonais.* —  
Un espace topologique connexe par arcs mais non localement connexe.

ouvert, il existe une boule  $B$  centrée en  $y$  incluse dans  $C$ . Soit  $t \in B$ . Puisqu'une boule est connexe par arcs,  $t \sim y$ . Or  $y \sim x$ , donc  $t \sim x$ . Ainsi  $t \in A$ , donc  $B$  est incluse dans  $A$ . Ainsi  $A$  est ouverte. Montrons qu'elle est fermée. Soit  $y \in C \setminus A$ . Comme  $C$  est ouvert, il existe une boule  $B$  dans  $C$  centrée en  $y$ . S'il existait  $t \in B$  tel que  $t \in A$ , soit  $t \sim x$ , alors puisque  $B$  est connexe,  $t \sim y$ , donc  $y \sim x$ , contradiction, donc  $B$  est dans  $C \setminus A$ . Donc  $C \setminus A$  est ouverte, donc  $A$  est bien fermée. ■

▷ (*Autre méthode.*) On montre directement que si  $x \in \overline{A}$  dans  $C$ , alors par définition de l'adhérence par des voisinages,  $x \in A$ . ■

Ce constat s'étend assez peu aux autres structures.

En fait :

**Fait.** (*Lien entre les composantes connexes et connexes par arcs*)

Les composantes connexes par arcs sont incluses dans les composantes connexes (sans déborder).

Exactement de même que dans le cas connexe, on peut démontrer :

**Propriété.** (*Ouverture des composantes connexes par arcs en milieu localement connexe par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe par arcs de  $X$ . Si  $X$  est localement connexe par arcs, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ Même que pour le cas connexe tout court. ■

**Les composantes connexes par arcs n'ont aucune raison d'être fermées**, la branche principale du sinus du topologue nous le montre.

### 3.5.9.7 Locale connexité et locale connexité par arcs

#### Définition. (*Espace localement connexe*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement connexe* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes.

#### Contre-exemple. (*Tout point admet un voisinage connexe*)

Dans un espace localement connexe, assez facilement, *tout point admet un voisinage ouvert connexe*.

La réciproque ne suffit pas à caractériser les espaces localement connexes. Prenons le peigne :  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ . Cet espace est connexe car connexe par arcs, mais pas localement connexe<sup>a</sup> : on citera également le sinus du topologue ci-dessous qui vérifie cette propriété cheloue. Pourtant, tout point de  $A$  possède un voisinage ouvert connexe, à savoir  $A$  lui-même.  $\square$

<sup>a</sup> En effet,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  n'admet pas de bases de voisinages connexes. Soit  $V$  un voisinage de ce point dans le peigne induit par une boule ne rencontrant par l'axe des ordonnées, par exemple, une boule de rayon  $\frac{1}{4}$ . Alors l'application  $(x,y) \in V \mapsto y$  est continue sur  $V$  à valeurs rationnelles, donc constante. Ainsi  $V$  est contenu dans une seule dent du peigne, ce qui est absurde, car  $V$  est induit par une boule qui contient une infinité de points d'ordonnées rationnelles de même abscisse que  $\frac{1}{2}$ .

#### Exemple

$\mathbb{Q}$  n'est pas localement connexe. En fait, ce n'est pas une conséquence d'autre chose comme on pourrait s'y attendre.

Même un espace métrique, même une partie d'un espace vectoriel normé peut n'être pas localement connexe.

#### Propriété. (*Locale connexité des evn*)

Tout espace vectoriel normé est localement connexe (par arcs).

▷ Puisque les boules sont connexes (par arcs). ■



Les notions de connexité et de locale connexité n'ont rien à se dire. Bien évidemment, un espace localement connexe n'a aucune raison d'être connexe (exemple : le plan privé d'une droite). Réciproquement, le sinus du topologue est connexe mais pas localement connexe ! Ainsi, connexe n'implique pas localement connexe.

#### Propriété. (*Composantes connexes d'un ouvert en milieu lc*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $X$  est localement connexe, si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , les composantes connexes de  $U$  sont ouvertes.

▷ Elles sont alors fermées (pourquoi ?). Cependant cette condition ne suffirait pas. ■

### Preuve.

▷ Soit  $X$  un espace topologique localement connexe et  $U$  un ouvert de  $X$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $U$ . Soit  $x \in C$ . Puisque  $U$  est ouverte, il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $U$  inclus dans  $U$ . Par locale connexité, il existe  $V'$  un voisinage connexe de  $x$  tel que  $x \in V' \subseteq V$ . Par maximalité de la composante connexe contenant  $x$ ,  $V' \subseteq C$ , donc  $C$  est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert (on a déjà montré cela dans la partie précédente).

Réciproquement, soit  $x \in X$ . Soit  $V$  un voisinage de  $x$  que l'on peut prendre ouvert. Alors les composantes connexes de  $V$  sont ouvertes et partitionnent  $V \ni x$ . Soit  $C$  une composante connexe dans laquelle se trouve  $x$ . Alors  $C$  est un voisinage de  $x$  connexe et contenu dans  $V$ . ■

On se servira évidemment davantage du sens direct de ce théorème.

### Théorème. (*Connexion des fermés par une unique branche*)

Soit  $X$  un espace topologique connexe et localement connexe. Soient  $A, B$  deux fermés disjoints non vides de  $X$ . Alors il existe une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence intersecte à la fois  $A$  et  $B$ .

▷ On montre ce lemme : si  $Y$  est un espace localement connexe,  $F$  un fermé de  $Y$ , et  $U$  un ouvert connexe de  $Y$  disjoint de  $F$ . Alors pour toute composante connexe  $V$  de  $U \setminus F$ ,  $\emptyset \neq F \cap \partial_U V \subseteq F \cap \partial_Y V$ . En effet, puisque  $Y$  est localement connexe, les composantes de  $U \setminus F$  sont connexes. Puisque  $U$  est connexe, et  $U \cap F \neq \emptyset$ , une composante  $V$  de  $U \setminus F$  ne peut être ouverte dans  $U$ , d'où  $\partial_U V = (\partial V) \cap U \neq \emptyset$ . Mais en tant que composante connexe,  $V$  est fermée dans  $U \setminus F$ , donc, puisque  $V$  est également ouverte,  $\emptyset = \partial_{U \setminus V} V = (\partial V) \cap (U \setminus V)$ . Ainsi,  $\emptyset \neq \partial_U V = (\partial V) \cap U = (\partial V \cap U \setminus F) \cup (\partial V \cap (U \cap F)) = (\partial V) \cap (U \cap F)$ .

Appliquons le lemme à notre situation. Soit  $M$  l'union de  $A$  avec toutes les composantes connexes de  $X \setminus (A \cup B)$  qui intersectent  $A$ . Alors  $M$  est ouverte. Il est clair que tout point de  $M$  qui appartient à l'une des composantes connexes de  $X \setminus (A \cup B)$  est un point intérieur de  $M$ , puisque ces composantes sont ouvertes. Il reste à voir que  $A \subseteq \overset{\circ}{M}$ . Soit  $a \in A$ , et soit  $U$  un voisinage ouvert connexe de  $a$  qui ne rencontre pas  $B$ . Alors  $U \subseteq M$ . Si  $C$  est une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  rencontrant  $U$ , soit  $W$  une composante connexe de  $U \cap C$ , et  $V$  la composante connexe de  $U \setminus A$  contenant  $W$ . Alors  $C \cup V$  est connexe, et  $(C \cup V) \cap (A \cup B) = \emptyset$ , donc  $V \subseteq C$ . Par le lemme,  $\emptyset \neq A \cap \partial V = A \cap \overline{V} \subseteq A \cap \overline{C}$ , donc  $C \subseteq M$ . Avec le même argument,  $N \cup B$  et toute composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence rencontre  $B$  est ouverte. Puisque  $X = M \cup N$ , et ni  $M$  ni  $N$  n'est vide, il suit que  $M \cap N \neq \emptyset$ . Cela signifie qu'il existe une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence rencontre à la fois,  $A$  et  $B$ . ■

### Définition. (*Espace localement connexe par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement connexe par arcs* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

### Exercice 20 (*Un contre-exemple type sinus du topologue pour la connexité par arcs*)

Montrer que l'ensemble  $\{(x, rx), x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$  est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

▷ Éléments de réponse.

La partie  $A$  considérée est étoilée en  $(0,0)$  donc en particulier connexe par arcs. Montrons pourtant qu'il existe un voisinage de  $(1,1) = (x, rx)$  où  $x = r = 1$  qui ne contient aucun voisinage connexe par arcs. Prenons simplement un voisinage  $V$  ne contenant pas  $(0,0)$ , par exemple, induit par une boule centrée en  $(1,1)$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . Alors l'application continue  $(x,y) \mapsto y/x$  est continue sur  $V$ , à valeurs rationnelles, donc constante. Le voisinage  $V$  est donc inclus dans la droite de pente  $r$ , absurde, car le voisinage choisi est induit par une boule non vide qui contient des points d'autres pentes.

### Propriété. (*Composantes CPA d'un ouvert en milieu lcpa*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est localement connexe par arcs,
2. pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , les composantes connexes par arcs de  $U$  sont ouvertes.

### Lemme

Toute partie ouverte d'un espace localement connexe est un espace localement connexe.

- ▷ Il suffit de prendre la trace d'une base de voisinages disjoints. ■
- ▷ Pour montrer l'équivalence entre les deux points, il suffit de copier la preuve précédente en remplaçant connexe par connexe par arcs, en remarquant que les composantes par arcs sont également les parties maximales connexes par arcs ■

### Propriété. (*Ouvert connexe en milieu lcpa*)

Soit  $X$  un espace topologique localement connexe par arcs. Alors tout ouvert connexe de  $X$  est connexe par arcs.

- ▷ On reprend la preuve dans les evn. ■



Localement connexe ne suffit pas !

**Théorème. (*Connexe + lcpa  $\Rightarrow$  connexe par arcs*)**

Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

▷ Si  $X$  est connexe et localement connexe par arcs, prenons  $x \in X$ . Alors la composante connexe par arcs contenant  $x$  est ouverte, en milieu lcpa. Comme elles partitionnent l'espace, elles sont fermées. Comme  $X$  est connexe, il n'y en a qu'une, donc  $X$  est connexe par arcs. ■

**Exercice 21**

Donner un exemple d'espace connexe, localement connexe mais non connexe par arcs.

Remarquer qu'un tel exemple fournit également un exemple d'espace localement connexe non localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Parce que moi je cherche encore.

**Propriété. (*Composantes connexes dans un espace lcpa*)**

Soit  $X$  un espace topologique localement connexe par arcs. Alors les composantes connexes et connexes par arcs coïncident (on dit que l'espace est à *bonnes composantes connexes*).

▷ On applique : la deuxième caractérisation, le lemme, le théorème précédent. Ou, plus explicitement : pour tout  $x \in X$ ,  $C_x^{cpa}$  est connexe par arcs donc connexe donc  $C_x^{cpa} \subseteq C_x^c$ . Réciproquement,  $C_x^c$  est connexe et ouvert, car composante connexe d'un espace localement connexe (car localement connexe par arcs). Or d'après le théorème un connexe lcpa est connexe par arcs, donc de même que précédemment, par maximalité,  $C_x^c \subseteq C_x^{cpa}$ . ■

*Remarque.* Cette propriété est très pratique. On en fait souvent l'hypothèse dans l'étude des groupes de Lie.

On termine avec une propriété à retenir dans le coin de sa tête :

**Corollaire. (*Quotient d'espace localement connexe*)**

Tout quotient d'un espace localement connexe est localement connexe.

**Ce qu'il faut retenir**

→ **Tout espace** se décompose comme la réunion disjointe de ses composantes connexes.

### 3.5.10 Connexité simple

#### Définition. (*Espace simplement connexe*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet tracé sur  $X$  est homotope à un point. De façon équivalente,  $X$  est connexe par arcs et pour tous points  $x,y \in X$ , deux chemins de  $x$  à  $y$  sont toujours homotopes.

Intuitivement, un connexe par arcs est simplement connexes s'il est *sans trou, ni poignée*.

### 3.5.11 Discrétion

#### Propriété. (*Caractérisation de la discréton*)

Un espace est discret si et seulement si tous les singletons sont ouverts.

Il existe des espaces dénombrables qui ne sont pas discrets (l'adhérence de la suite harmonique, l'ensemble des rationnels).

#### Propriété. (*Produit d'espaces discrets*)

Tout produit d'espaces discrets est discret.

▷ Définition. Plus précisément : tous les singletons + produit des espaces entiers sont ouverts. Par réunion dénombrable, n'importe quel singleton du produit est un ouvert. ■

## 3.6 Exemples classiques de topologie

### 3.6.1 Topologies cofinies

#### 3.6.1.1 Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$

#### 3.6.1.2 Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$

### 3.6.2 Topologie de Zariski

#### Définition. (*Topologies de Zariski*)

Soit  $k$  un corps commutatif et  $n \in \mathbb{N}$ . La *topologie de Zariski* sur  $\mathbb{A}^n(k) := k^n$  est définie par l'ensemble de ses fermés, qui sont de la forme :

$$\{x \in \mathbb{A}^n(k) \mid \forall i \in I \quad P_i(x) = 0\}$$

pour une certaine famille  $(P_i)_{i \in I}$ ,  $I$  quelconque, de polynômes de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

▷ L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant égal à 1. La réunion de deux fermés de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes indexée par le produit des ensembles d'indexation valant le produit de deux polynômes en chaque couple. L'intersection est évidente. ■

### Théorème. (*Description simple de la topologie de Zariski*)

Tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'un polynôme de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

▷ Le théorème du Nullstellensatz de Hilbert garantit que tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille finie de polynômes. Il suffit ensuite de considérer leur produit. ■

### Propriété. (*Topologie de Zariski en dimension 1*)

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{C}$  est la topologie cofinie.

▷ Soit  $E$  un ensemble fini d'éléments de  $k$ . Alors  $\prod_{x \in E}^{X-x}$  est un polynôme de  $k[X]$  dont les zéros sont exactement les éléments de  $E$ . ■

On peut s'intéresser aux fermés et ouverts de Zariski de  $\mathbb{R}^n$  lorsqu'on munit  $\mathbb{R}^n$  de la topologie usuelle.

### Propriété. (*Comparaison des topologies réelle et de Zariski*)

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{R}^n$  est plus grossière que la topologie usuelle, au sens suivant : tout ouvert de Zariski est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  pour la topologie usuelle.

▷ Soit  $F$  un fermé de Zariski. Alors  $F = P^{-1}(\{0, \dots, 0\})$  où  $P$  est un polynôme, donc une application continue de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . ■

### Propriété. (*Densité des ouverts de Zariski*)

Tout ouvert de Zariski non vide est dense dans  $\mathbb{R}^n$  pour sa topologie usuelle. En particulier, tout ouvert de Zariski non vide est dense dans  $\mathbb{R}^n$  pour la topologie de Zariski même.

▷ On montre que tout fermé non trivial de Zariski est d'intérieur vide pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  s'annule sur une boule ouverte. D'après le lemme d'annulation des polynômes à plusieurs variables, si  $P$  s'annule sur  $A_1 \times \dots \times A_n$  où chaque  $A_i$  est de cardinal  $> \deg_i(P)$ , alors  $P$  est nul. En particulier, si  $A_1 \times \dots \times A_n$  est un hypercube non trivial, alors  $P$  est nul. Or toute boule de  $\mathbb{R}^n$  contient un hypercube. Donc  $P$  est nul, donc le fermé considéré est égal à  $\mathbb{R}^n$ . Pour montrer que notre ouvert non vide de Zariski est également dense pour la topologie de Zariski, on suppose que sa Zariski-adhérence ne soit pas  $\mathbb{R}^n$ . Par comparaison, c'est également un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui contredit la minimalité de la  $\mathbb{R}^n$  adhérence. ■

### Corollaire

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  n'est pas séparée pour  $n > 0$ .

▷ On montre plus fortement que deux ouverts disjoints non vides de Zariski s'intersectent toujours. Soient  $U, V$  tels. Montrons  $U \cap V \neq \emptyset$ , donc montrons  $U^c \cup V^c \neq \mathbb{R}^n$ . Supposons que ce soit le cas.  $U^c \cup V^c$  n'est jamais que l'ensemble des zéros communs à un polynôme  $PQ$  où  $P$  a pour lieu d'annulation  $U^c$  et  $Q$   $V^c$ . Ainsi  $PQ$  s'annule sur  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $\mathbb{R}$  est infini, le morphisme fonction polynomiale est injectif, donc on peut dire que  $PQ = 0$ , d'où  $P = Q = 0$  par intégrité. Donc  $U^c$  et  $V^c$  sont égaux à  $\mathbb{R}^n$ , donc  $U$  et  $V$  sont vides, ce qui était pourtant exclu, d'où le résultat.

On aurait aussi pu utiliser le résultat précédent pour avoir immédiatement, car  $U$  dense et  $V$  ouvert,  $U \cap V \neq \emptyset$ . ■

### 3.6.3 Topologie compacte-ouverte

#### 3.6.3.1 Définition et premières propriétés

##### Définition-propriété. (*Topologie compacte-ouverte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. La *topologie compacte-ouverte* sur  $\mathcal{C}(X, Y)$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$  est définie comme suit : pour tout  $K \subseteq X$  compact et  $U \subseteq Y$  ouvert, on note  $W(K, U) := \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subseteq U\}$ . Les  $W(K, U)$  sont alors la prébase d'une topologie constituée des intersections finies de  $W(K, U)$ ,  $K$  compact de  $X$ ,  $U$  ouverts de  $U$ .

▷ D'après la caractérisation des bases, il suffit de montrer que les  $W(K, U)$  recouvrent  $\mathcal{C}(X, Y)$ . C'est immédiat, car il contiennent  $\mathcal{C}(X, Y) = W(\emptyset, Y)$ . ■

#### Remarques.

1. On rappelle bien évidemment que,  $Y$  n'étant pas inclus a priori dans un espace plus grand, un *ouvert de  $Y$*  n'est autre qu'un élément de la topologie de  $Y$  et un *compact de  $X$*  n'est autre qu'un compact inclus dans  $X$ , car la compacité est une notion intrinsèque.
2. Le fait que la topologie compacte-ouverte soit définie par la donnée d'une base, permet de ne vérifier des propriétés relatives à cette topologique que sur une classe réduite d'ouverts.
3. La topologie compacte-ouverte est agréable : elle contrôle les images de ses points (qui sont des fonctions), car un point (de l'espace de départ) est un fini donc un compact.
4. Cette topologie qui paraît un peu bizarre vérifie une propriété universelle relative à la continuité de l'évaluation, que nous énoncerons plus tard.
5. En général, la topologie compacte-ouverte n'est pas si pure que ça. On supposera souvent que l'on travaille sur des espaces localement compacts, ce qui est très souvent

le cas en topologie utile.

### Proposition

Soient  $Y$  un espace topologique et  $\{\star\}$  le singleton standard. Alors  $\mathcal{C}(\{\star\}, Y)$  muni de la topologie compacte-ouverte est  $\simeq Y$ .

▷ Considérons  $\Phi: \mathcal{C}(\{\star\}, Y) \longrightarrow Y$  et  $\Psi: Y \longrightarrow \mathcal{C}(\{\star\}, Y)$ . Clairement,  $\Phi$  et  $\Psi$

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f(\star) \\ & & y & \longmapsto & \star \mapsto y \end{array}$$

sont bijections réciproques l'une de l'autres. Soit maintenant  $U$  un ouvert de  $Y$ . Alors  $\Phi^{-1}(U)$  n'est autre que  $W(\{\star\}, U)$  où  $\{\star\}$  est fini, donc compact, donc  $\Phi^{-1}(U)$  est bien un ouvert de  $\mathcal{C}(\{\star\}, Y)$ , donc  $\Phi$  est continue. Réciproquement, soit  $W(K, U)$  un ouvert de  $\mathcal{C}(\{\star\}, U)$ , ce qui impose en particulier  $K = \emptyset$  ou  $\{\star\}$ . Dans le premier cas,  $\Psi^{-1}(W(\emptyset, U)) = Y$  et dans le second cas,  $\Psi^{-1}(W(\{\star\}, U)) = U$ , un ouvert dans tous les cas, donc  $\Psi$  est continue. ■

### Propriété. (*Continuité de la composition*)

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces avec  $Y$  localement compact. L'application de composition

$$\begin{array}{ccc} \circ : & \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) & \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ & (f, g) & \longmapsto f \circ g \end{array}$$

est continue.

▷ On munit donc  $\mathcal{C}(Y, Z)$ ,  $\mathcal{C}(X, Y)$  et  $\mathcal{C}(X, Z)$  des topologies compactes-ouvertes et  $\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y)$  de la topologie produit. Soient  $K$  un compact de  $X$  et  $W$  un ouvert de  $Z$  afin de considérer l'ouvert  $W(K, W)$  de  $\mathcal{C}(X, Z)$ . Soit  $(f, g)$  dans l'image réciproque de cet ouvert, notée  $\Omega$ . Notons que puisque  $f$  et  $g$  sont continues,  $f^{-1}(W)$  est un ouvert de  $Y$  et  $g(K)$  est compact. De plus, par hypothèse,  $g(K) \subseteq f^{-1}(W)$ . Notons que  $f^{-1}(W)$  est localement compact en tant qu'ouvert de  $Y$  localement compact. Pour tout  $x \in g(K)$ , il existe un voisinage compact  $C_x$  de  $x$  dans  $f^{-1}(W)$ , donc compact tout court, avec donc ouvert  $x \in U_x \subseteq C_x$  où  $U_x$  est ouvert de  $f^{-1}(W)$ , mais aussi donc de  $Y$ . Les  $U_x$  recouvrent  $g(K)$ , donc par compacité, il existe une famille finie  $F$  de  $x \in g(K)$  avec :

$$g(K) \subseteq U_{f,g} = U := \bigcup_{x \in F} U_x \subseteq C_{f,g} = C := \bigcup_{x \in F} C_x \subseteq f^{-1}(W).$$

Considérons l'ouvert  $W(C, W) \times W(K, U)$ . Alors par construction,  $(f, g) \in W(C, W) \times W(K, U)$ . Réciproquement, si  $(f', g') \in W(C, W) \times W(K, U)$ , alors  $g' \in W(K, U)$  d'où  $g'(K) \subseteq U \subseteq C \subseteq f'^{-1}(W)$ , car  $f' \in W(C, W)$ . Autrement dit,  $\Omega = \bigcup_{(f,g) \in \Omega} W(C, W) \times W(K, U)$  qui est bien un ouvert de  $\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y)$ . Donc  $\circ$  est continue. ■

**Exercice 22** (*Continuité du pullback et du pushout*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On note, comme souvent en topologie, exponentiellement les espaces de fonctions continues.

1. Montrer que le pullback  $f^* : Z^Y \rightarrow Z^X$  est continu pour les topologies compactes-ouvertes.
2. Montrer que le pushout  $f_* : X^Z \rightarrow Y^Z$  est continu pour les topologies compactes-ouvertes.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On rappelle que  $f^* : g \mapsto g \circ f$ . Si  $K$  est un compact de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $Z$ ,  $f^{*-1}(W(K,U)) = \{g : Y \rightarrow Z \mid g \circ f(K) \subseteq U\} = W(f(K),U)$  et  $f(K)$  est bien un compact de  $Y$ , car  $f$  est continue.
2. On rappelle que  $f_* : g \mapsto f \circ g$ . Si  $K$  est un compact de  $Z$  et  $U$  un ouvert de  $Y$ ,  $(f_*)^{-1}(W(K,U)) = \{g : Z \rightarrow Y \mid f \circ g(K) \subseteq U\} = W(K,f^{-1}(U))$  et  $f^{-1}(U)$  est bien un ouvert de  $X$ , car  $f$  est continue.

**Propriété.** (*Continuité de l'évaluation*)

Soit  $X$  un espace localement compact. Soit  $Y$  un espace topologique. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev : \quad \mathcal{C}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue.

▷ L'œil aiguisé aura vu que c'est une conséquence des deux propriétés précédentes. Mais on peut le redémontrer indépendamment pour se la péter un peu.

On munit donc  $\mathcal{C}(X,Y)$  de la topologie compacte-ouverte et  $\mathcal{C}(X,Y) \times X$  de la topologie produit. Soit  $U$  un ouvert de  $Y$ . Alors  $ev^{-1}(U) = \{(f,x) \mid f(x) \in U\} = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times \{x\}$ , où  $f(x) \in U \iff f \in W(\{x\},U)$ . Or  $X$  est localement compact, donc pour tout  $x \in X$ , pour toute  $f \in W(\{x\},U)$ , i.e.  $f(x) \in U$ ,  $x \in f^{-1}(U)$  qui est ouvert, car  $f$  est continue, donc il existe un compact  $K_x$  de  $X$  tel que  $x \in K_x \subseteq K_x \subseteq f^{-1}(U)$ . Alors  $ev^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times K_x \subseteq ev^{-1}(U)$ , car si  $f(x) \in U$ , pour tout  $t \in K_x$ ,  $f(t) \in U$  par construction. D'où  $ev^{-1}(U) = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times K_x$  qui est un ouvert de  $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ , car  $\{x\}$  est un compact de  $X$ . ■

**Propriété.** (*Propriété universelle de la topologie compacte-ouverte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $Y$  localement compact. On note  $Y^X$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$ . On note  $\mathcal{C} - \mathcal{O}$  la topologie compacte-ouverte sur  $Y^X$ . Alors l'application d'évaluation  $ev : (Y^X \mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X \rightarrow Y$  est continue et pour toute topologie  $\mathcal{T}$  sur  $Y^X$  telle que  $ev' : Y^X \times X \rightarrow Y$  soit continue,  $Y^X \times X$  étant munie de la topologie  $\mathcal{T} \times \mathcal{O}_X$ , il existe une unique application continue  $\psi : (Y^X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O})$

telle que  $ev \circ (\psi \circ id_X) = ev'$ , autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} (Y^X, \mathcal{T}) \times X & \xrightarrow{ev} & Y \\ \downarrow \psi \times id_X & & \\ (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X & \xrightarrow{ev} & Y \end{array}$$

commute.

▷ Montrons-le par analyse-synthèse. Il est clair que si  $\psi$  existe, ce n'est autre que l'identité, car  $ev = ev'$  ensemblistement. Il n'y a plus qu'à vérifier que l'identité  $(Y^X, \mathcal{T}) \xrightarrow{id_{Y^X}} (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O})$  est continue. ■

### 3.6.3.2 Enrichissement de Top

On essaie maintenant d'« enrichir » les espaces topologiques sur eux-mêmes. Cette notion catégorique signifie grossièrement que l'on peut rester dans la catégorie en considérant les espaces de morphismes. On rappelle que dans le cas des ensembles, on a, pour tout ensemble  $Y$ , une adjonction  $? \times Y \dashv (-)^Y$  grâce à des bijections naturelles  $\text{Hom}_{\text{Ens}}(X \times Y, Z) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}}(X, Z^Y := \text{Hom}_{\text{Ens}}(Y, Z))$  qui correspondent ni plus ni moins à une opération de curryfication. Autrement dit, Ens est une catégorie monoïdale cartésienne fermée (et donc enrichie au-dessus d'elle-même). On souhaite remplacer Ens par Top dans cette identité, ce qui n'est pas immédiat, même si l'on peut la prendre pour base puisque Top est localement petite.

**Fait. (Adjonction produit-fonctionnelle dans Top)**

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction  $? \times Y : \text{Top} \rightleftarrows \text{Top} : (-)^Y$  grâce à des bijections naturelles  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z))$ .

Les techniques sont classiques, alors on les explicite. On vérifie qu'une application  $f : X \times Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si sa curryfiée  $\check{f} : X \rightarrow Z^Y$  l'est, en munissant  $Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z)$  de la topologie compacte-ouverte. Cela suffira à montrer que l'adjonction de curryfication vaut dans Top, et c'est bien une adjonction à partir de ce que l'on en sait dans Ens. Soit  $f$  une telle application continue. Soit  $W(K, U)$  un ouvert de la base de  $Z^Y$ ,  $K$  compact de  $Y$  et  $U$  ouvert de  $Z$ . Alors  $\check{f}^{-1}(W(K, U)) = \{x \in X \mid f(x, K) \subseteq U\}$ , ce qui signifie que  $\{x\} \times K \subseteq f^{-1}(U)$  qui est ouvert dans  $X$ , puisque  $f$  est continue. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert  $V$  contenant  $x$  tel que  $V \times K \subseteq f^{-1}(U)$ , d'où  $V \subseteq \check{f}^{-1}(W(K, U))$ , qui est donc ouvert, donc  $\check{f}$  est continue. Réciproquement, soit  $f : X \rightarrow Z^Y$  continue pour la topologie compacte-ouverte. Alors on peut décomposer

$$\tilde{f} : X \times Y \xrightarrow{f \times id_Y} Z^Y \times Y \xrightarrow{ev} Z$$

où  $ev$  est continue, car  $Y$  est localement compact, donc par composition,  $\tilde{f}$  l'est également.

On en déduit le théorème suivant, qui précise le précédent : les bijections d'adjonction sont en fait bicontinues.

**Théorème. (*Loi d'exponentiation topologique*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques localement compacts. Alors pour tout espace topologique  $Z$ , en notant exponentiellement les espaces de fonctions continues,

$$Z^{X \times Y} \simeq (Z^Y)^X$$

pour les topologies compactes-ouvertes, ce qui signifie  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, Z^Y)$ . Plus précisément, dans l'adjonction produit-fonctionnelle dans Top, les bijections naturelles de curryfication sont des homéomorphismes, autrement dit, sont bicontinues.

▷ Montrons que la curryfication dans le sens  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  est continue. On sait que, puisque  $X \times Y$  est localement compact, l'évaluation  $Z^{X \times Y} \times (X \times Y) \rightarrow Z$  est continue. En la voyant sous la forme  $(Z^{X \times Y} \times X) \times Y \rightarrow Z$ , par adjonction produit-exponentielle dans Top, l'application adjointe induite  $Z^{X \times Y} \times X \rightarrow Z^Y$  est continue. En recommençant pour  $X$ , on a  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  continue, et c'est bien l'application de curryfication en explicitant sur les éléments les étapes précédentes.

Montrons maintenant que la curryfication dans le sens  $(Z^Y)^X \rightarrow Z^{X \times Y}$  est une application continue. Partons de l'évaluation  $(Z^Y)^X \times X \rightarrow Z^Y$ . En multipliant par l'application  $id_Y$ ,  $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \rightarrow Z^Y \times Y$  est continue et quitte à la composer par l'évaluation  $Z^Y \times Y$ , c'est une application  $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \rightarrow Z$  continue, donc  $(Z^Y)^X \rightarrow Z^{X \times Y}$  est continue. De même, en explicitant ce que sont ces fonctions, on trouve bien que c'est la curryfication inverse. Vérifions-le cette fois pour les sceptiques. La première application est  $(f : X \rightarrow Z, x) \mapsto f(x) : Y \rightarrow Z$ , qui devient  $(f, x, y) \mapsto (f(x), y) \mapsto f(x)(y)$ . Par curryfication directe, on obtient  $f \mapsto [(x, y) \mapsto f(x)(y)]$ . ■



On avait prouvé que les curryfiées et les curryfiées inverses étaient continues ; là, on a prouvé que la curryfication et la curryfication inverse sont continues.

▷ (*Une autre preuve catégorique*) Illustrons comment le lemme de Yoneda permet aussi de conclure ; il n'est pas gênant en effet de fournir une preuve de nature catégorique, car il signifie dans toute catégorie monoïdale fermée, les bijections naturelles sont internes.

En appliquant l'adjonction produit-fonctionnelle de Top pour tout espace topologique  $A$ , on obtient, toujours en ne considérant que des morphismes continus,  $\mathcal{C}(A, Z^{X \times Y}) \simeq \mathcal{C}(A \times X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(A \times X, Z^Y) \simeq \mathcal{C}(A, (Z^Y)^X)$ . Or Top étant localement petite, le foncteur de  $\text{Top} \rightarrow \text{Fun}(\text{Top}^{\text{op}}, \text{Ens})$ ,  $W \mapsto (A \mapsto \mathcal{C}(A, W))$  est pleinement fidèle, ainsi l'application continue  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  est bien un homéomorphisme. ■

# Chapitre 4

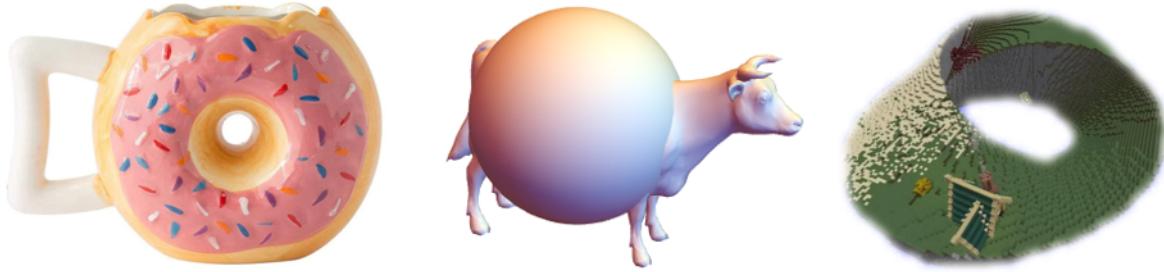
## Topologie algébrique élémentaire

### Résumé

Contrairement à la topologie analytique qui s'intéresse aux notions de convergence, la topologie algébrique prend un point de vue extérieur tout à fait distinct où l'on étudie les espaces topologiques pour eux-mêmes. Typiquement,

$$\text{ensembles} \subseteq \text{topologie} \subseteq \text{géométrie}$$

et l'on se situe au centre de cet emboîtement. Grâce à la notion d'homotopie, on peut définir le groupe fondamental qui associe des invariants algébriques à la catégorie Top. Dans un second temps, grâce à la notion d'homologie, on peut définir toute une suite d'invariants, beaucoup plus abstraits, mais extrêmement pratiques.



### 4.1 Invariants simples en topologie algébrique

Définition. (*Invariant d'homéomorphie*)

### 4.1.1 Le $\pi_0$

## 4.2 Construction et opérations d'espaces topologiques

## 4.3 Groupes topologiques

**L**A théorie des groupes topologiques permet notamment d'obtenir des résultats (propriétés, structures) sur des objets de base de façon simple.

### 4.3.1 Définition

#### Définition. (*Groupe topologique*)

Un *groupe topologique* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une topologie, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continues.

#### Méthode. (*Montrer qu'un groupe est un groupe topologique*)

Cela revient seulement à montrer la continuité d'opérations dans un certain espace topologique (voir l'exemple 3 ci-dessous).

#### Définition. (*Groupe de Lie*)

Un *groupe de Lie* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une structure de variété différentiable réelle, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient différentiables.

#### Propriété. (*Continuité des translations dans un groupe topologique*)

Dans un groupe topologique, les translations

$$x \mapsto a * x \text{ et } x \mapsto x * a$$

sont des homéomorphismes.

▷ Les applications partielles d'une application continue sont continues. Or ce sont des bijections qui ont la même forme que leurs réciproques. ■

On en déduit :

#### Fait

La topologie d'un groupe topologique est déterminée par la donnée des voisinages de l'élément neutre  $e$ .

**Propriété. (*Séparation d'un groupe topologique*)**

Un groupe topologique  $G$  est séparé si et seulement si  $\{e_G\}$  est fermé dans  $G$ .

▷ Si  $G$  est séparé, le singleton  $\{e\}$  est fermé. Réciproquement, si  $\{e\}$  est fermé, alors la diagonale de  $G$  est l'image réciproque de ce fermé par l'application continue  $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ . Elle est donc fermée, donc  $G$  est séparé. ■

**Exemples. (*Groupes topologiques*)**

- 1. Tout groupe est un groupe topologique pour la topologie discrète.**
- 2.** Heureusement, il y a d'autres exemples intéressants. Dans la section suivante, on étudiera l'action de la sphère unité du plan complexe sur la sphère de l'espace par rotation.
- 3.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe topologique pour la topologie induite de  $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ; c'en est d'ailleurs un ouvert, ses ouverts sont donc les ouverts de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  inclus dans  $GL_n(\mathbb{R})$ . Il a deux composantes connexes (par arcs)  $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{R})$ <sup>a</sup>. Il agit continûment (**on omettra cette précision régulièrement dans la suite**) sur  $\mathbb{R}^n$ , on note simplement  $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ , et transitivement sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dans ce cas sur  $\mathbb{R}^n$  il y a deux orbites :  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
- 4.** Tout groupe de Lie est en particulier un groupe topologique.

Le cinquième problème de Hilbert pose la question suivante : pour une variété topologique munie d'une structure de groupe topologique, existe-t-il une structure différentiable telle que ce groupe soit de Lie ? La réponse est oui, ce qui a été démontré au début des années 1950.

- 5.** Si  $Y$  est compact,  $(\text{Aut}(Y), \circ)$  est un groupe topologique muni de la topologie compacte-ouverte.

<sup>a</sup> On peut redémontrer ce résultat grâce à la théorie des groupes topologiques.

**Lemme**

Soit  $G$  un groupe topologique et  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes connexes par arcs. Alors  $H = \langle H_i, i \in I \rangle$  est connexe par arcs.

▷ Soit  $J \subseteq I$  fini. Alors  $H_J = \langle H_i, i \in J \rangle = \text{Im}(\prod_{i \in J} H_i \longrightarrow G)$  qui à  $(h_1, \dots, h_j) \mapsto h_1 \dots h_j$ .

Puisque  $\prod_{i \in J} H_i$  est connexe par arcs et que la multiplication est continue par axiome, alors  $H_J$  est connexe par arcs. Or  $H$  est l'union des  $H_J$  qui ont tous le neutre en commun, donc  $H$  est connexe par arcs. ■

Clairement, il y a au moins deux composantes connexes par arcs, car  $\mathbb{R}^*$  c'est pas connexe. Cela ne nous apporte rien. Montrons que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  et  $GL_n^-(\mathbb{R})$  est connexe par arcs. On remarque que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  engendré par  $D = \text{Diag}(\mathbb{R}_+, 1, \dots, 1)$  et  $T_{ij} = \{id + tE_{ij}, t \in \mathbb{R}\}$ . Il est donc connexe par arcs, puisque  $D \simeq \mathbb{R}_+$  et  $T_{ij}$  est clairement homéomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ , donc ils sont tous deux connexes par arcs. De même,  $GL_n^-(\mathbb{R})$  est connexe par arcs, puisqu'il est homéomorphe à  $GL_n^+(\mathbb{R})$  en tant qu'espace topologique, via la multiplication par  $\text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$ .

### Contre-exemple. (*Groupe topologique qui n'est pas de Lie*)

Au sens : naturellement pour les mêmes lois.

□

**Mnémonik :** Les groupes topologiques, c'est fait pour les grands groupes.

### Heuristique

Foncièrement, pour un groupe fini, seule la topologie discrète peut être appliquée pour en faire un groupe topologique.

### Définition. (*Action continue sur un G-espace*)

Soit  $G$  un groupe topologique et  $X$  un espace topologique. Une action continue de  $G$  sur  $X$  est une action de groupe de  $G$  sur  $X$  telle que l'application :

$$G \times X \longrightarrow X$$

soit continue.

Un *G-espace* est un espace topologique muni d'une action continue de  $G$ .

### Exemple. (*Action du cercle sur la sphère*)

On voit immédiatement que  $U(1) := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  (notation physicienne) est un groupe topologique pour la multiplication de  $\mathbb{C}$ . Il agit continûment sur la 2-sphère :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}.$$

par rotation autour de l'axe  $Oy$ .

Cette action est fidèle, mais pas transitive.

### Propriété. (*Continuité de l'action discrète*)

Soit  $G$  un groupe muni de la topologie discrète agissant sur un ensemble  $X$ . Alors l'action considérée est continue si et seulement si pour tout  $g \in G$ ,  $x \mapsto g \cdot x$  est continue.

### Définition. (*Isomorphisme de groupes topologiques*)

Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que groupes par une application bicontinue.

### 4.3.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe

#### Définition. (*Quotient par une action de groupe*)

Soit  $G$  un groupe topologique et  $X$  un espace topologique telle que  $G$  agisse sur  $X$ . On définit le *quotient de  $X$  par l'action de  $G$* , et on note  $X/G = X/R_G$ , où :

$$xR_Gy \iff \exists g \in G \quad x = g \cdot y.$$

C'est l'ensemble des orbites de  $X$  sous l'action de  $G$ , dépendant de  $G$ , muni de la topologie quotient sur  $X$ , indépendante de  $G$  dans sa construction.

#### Propriété. (*Quotient par une action transitive*)

Si l'action de  $G$  sur  $X$  est transitive, alors  $X/G$  est réduit à un point.

▷ Il n'y a rien à faire. ■

#### Exemples. (*Actions topologiques*)

1.  $\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R}) = \{\{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$  n'est pas séparé. Il est même grossier non trivial.
2. La plupart des actions de groupes matriciels sont topologiques. Par exemples :
  -

#### Propriété

Soit  $X$  un  $G$ -espace séparé et  $G$  un groupe quasi-compact où l'action de  $G$  est transitive. Alors pour tout  $x \in X$  la bijection canonique  $G/G_x \simeq X$  est un homéomorphisme.

▷ On a  $G/G_x \longrightarrow X$  continue par propriété universelle. Puisque  $G/G_x$  est quasi-compact (on le verra plus tard) et  $X$  est séparé, la bijection est un homéomorphisme. ■

#### Corollaire

Soit  $X$  un  $G$ -espace séparé et  $G$  un groupe quasi-compact agissant sur  $X$ . Alors pour tout  $x \in X$  la bijection canonique  $G/G_x \simeq \Omega_x$  est un homéomorphisme.

#### Exemple fondamental. (*La sphère est quotient de groupes spéciaux orthogonaux*)

On a  $SO(n+1)$  le sous-groupe spécial orthogonal d'ordre  $n+1$  agit sur  $S^n$  la sphère (unité) de  $\mathbb{R}^n$ ; par exemple,  $SO(2) \curvearrowright S^1$  par rotation.

Cette action est transitive.

C'est clair, mais une autre façon de le voir est de dire que pour  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x = A \cdot e_1$  si  $x$  est la première colonne de  $A$  et  $A$  est prise dans  $SO(n+1)$  en complétant les autres colonnes; réciproquement,

le stabilisateur de  $1$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  où  $B \in SO(n)$ .

En appliquant le théorème précédent, on obtient l'homéomorphisme très important :

$$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n).$$

### 4.3.3 Propriétés des groupes topologiques

#### 4.3.3.1 Groupes compacts

**Définition.** (*Groupe compact*)

Un *groupe compact* est un groupe topologique compact.

**Exemples.** (*Groupes compacts*)

1. Les groupes finis discrets (ce sont les seuls parmi eux!).
2.  $U(n)$  l'ensemble des matrices unitaires  $n \times n$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , telles que  $M\overline{M}^T = id$ .  
On remarque que  $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Ce sont des groupes compacts.

#### Propriété

Soient  $G$  un groupe topologique,  $X$  un  $G$ -espace.

- (a) Si  $X$  est quasi-compact,  $X/G$  aussi.
- (b) La surjection canonique est ouverte.
- (c) Si  $X, G$  sont compacts,  $X/G$  aussi.

▷ La première affirmation est vraie pour tous les quotients, puisque la projection canonique  $q$  est surjective et continue.

Soit  $V \subseteq X$  un ouvert. Alors  $q^{-1}(q(V)) = \sum_{g \in G} g \cdot V$  est ouvert par réunion d'ouverts : en effet, les translations sont des homéomorphismes.

Il suffit de montrer que  $X/G$  est séparé. Montrons que  $\Gamma_G \subseteq X \times X$  est fermé. Puisque  $X \times X$  est compact, en fait il est équivalent de dire que  $\Gamma_G$  est compact. Or ce graphe est l'image par  $(g, x, y) \mapsto (x, gy)$  de  $G \times \Delta_X$ . Comme  $X$  est séparé,  $\Delta_X$  est séparé donc compact donc  $G \times \Delta_X$  est compact. D'où le résultat. ■

**Propriété.** (*Compacité du groupe quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H \subseteq G$  un sous-groupe de  $G$ . Si  $G$  est compact et  $H$  est fermé,  $G/H$  est compact.

▷ Découle directement de la proposition précédente. ■

#### 4.3.4 Groupes séparés

##### Propriété. (*Séparation du groupe quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H \subseteq G$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $G/H$  est séparé si et seulement si  $H$  est fermé.

▷ Si  $G/H$  est séparé, alors pour tout  $x \in G$ ,  $q(x)$  est fermé dans  $G/H$  par ouverture, donc  $q^{-1}(q(1_G)) = H$  est fermé. Si  $H$  est fermé maintenant, soit  $\beta : (x,y) \mapsto yx^{-1}$ . Alors  $\beta^{-1}(H) = \Gamma_H$  ! d'où le résultat. ■

##### Théorème. (*Groupe topologique quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . Alors  $G/H$  est un groupe topologique.

▷ L'inverse est continue, induite par le diagramme suivant où la flèche horizontale du bas est continue.

$$(\cdot)^{-1} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow q \\ G/H & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

Pour la multiplication, c'est un peu moins trivial : on utilise les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \downarrow & & \downarrow q \\ (G \times G)/(H \times H) & \xrightarrow{\quad} & G/H \\ \downarrow f & & \nearrow m_{G/H} \\ G/H \times G/H & & \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G/H \times G/H \\ \downarrow & & \nearrow f \\ (G \times G)/(H \times H) & & \end{array}$$

et le théorème est démontré. ■

### 4.3.5 Groupes topologiques distingués

#### Proposition

Tout sous-groupe distingué d'un groupe connexe est commutatif.

Soient  $G$  un groupe topologique.

Soit  $X$  un  $G$ -espace.

On considère  $X/G$  l'espace topologique (ensemble des orbites).

Soit  $H$  un sous-groupe (topologique) de  $G$ .

On considère  $G/H$  l'espace topologique (ensemble des classes à gauche).

#### TROIS FAITS GÉNÉRAUX :

- La surjection canonique est toujours ouverte de  $X \rightarrow X/G$ .
- Si  $H$  est distingué,  $G/H$  est un groupe topologique.
- $G$  est séparé ssi  $\{e\}$  est fermé.

<i>Hypothèse sur <math>X</math></i>	<i>Hypothèse sur <math>G</math></i>	<i>Conséquence sur le quotient</i>
$X$ séparé	$G$ compact	?
$X$ q-compact	$G$ quelconque	$X/G$ q-compact
$X$ compact	$G$ compact	$X/G$ compact
<i>Hypothèse sur <math>G</math></i>	<i>Hypothèse sur <math>H</math></i>	<i>Conséquence sur le quotient</i>
$G$ quelconque	$H$ fermé	$G/H$ séparé
$G$ q-compact	$H$ quelconque	$G/H$ q-compact
$G$ compact	$H$ fermé	$G/H$ compact

TABLE 4.1 : Récapitulatif sur les groupes topologiques. —  
Liens entre compacité et séparation.

## 4.4 Espaces cellulaires

La philosophie des espaces cellulaires est d'obtenir des espaces topologiques grands par recollements de certaines de leurs parties.

On introduit en particulier une classe d'espaces topologiques comprenant la plupart des espaces topologiques rencontrés dans ce cours, à homéomorphisme près.

### 4.4.1 Attachements cellulaires

On conseille au lecteur de revoir la partie sur la topologie somme disjointe et sur les recollements le long d'un espace ou d'une partie. En particulier :

- ★ la somme disjointe de deux espaces topologiques  $X, Y$  a pour ouverts les sommes (= unions disjointes) d'ouverts ;

- ★ pour des applications continues  $f,g : A \longrightarrow X$ , le recollement  $X \cup_{f,g} Y = X \coprod Y / R$  consiste à quotienter la somme disjointe par la relation d'équivalence vérifiant  $f(a)R(g(a))$  pour tout  $a \in A$ . Intuitivement,  $A$  est une copie de parties de  $X,Y$  et l'on identifie ces copies entre elles. Formellement, on peut se passer d'une des deux applications en prendre la relation engendrée par  $x \sim g(a)$  : cela revient au même ;
- ★ si  $A$  est fermé dans  $X$ , l'application canonique  $Y \longrightarrow X \cup_g Y$  est un homéomorphisme sur son image, fermée dans  $Y$  ;
- ★ si  $X$  est un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  un ensemble de parties topologiques, on définit la topologie faible par :  $F \subseteq X$  est fermé dans  $X$  si et seulement si  $F \cap X_i$  est fermé dans  $X_i$  pour tout  $i$ , de même pour les ouverts. Une application est continue ssi toutes les restrictions aux  $X_i$  sont continues.

Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant : l'attachement cellulaire, déjà rencontré dans le section CONSTRUCTION D'ESPACES TOPOLOGIQUES, paragraphe RECOLLEMENTS. Soit  $S^n = \mathbb{S}_n$  la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $B^n = \mathbb{B}_n$  la boule de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\partial B^n = S^{n-1}$  (pour se rappeler du décalage, écrire  $\text{Fr}(B^2) = S^1$ ).

Puisque  $B^n$  est fermé, on a une inclusion canonique de la  $(n-1)$ -sphère dans la  $n$ -boule  $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$ .

### Définition. (*n-cellule*)

Une *cellule de dimension n*, ou *n-cellule*, est un espace topologique homéomorphe à la boule unité fermée de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note souvent  $e_n$  une  $n$ -cellule.

Une *n-cellule ouverte* ou encore *cellule ouverte de dimension n* est un espace homéomorphe à  $\mathbb{B}_n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ .

D'après le théorème d'invariance du domaine (admis), tout homéomorphisme de la boule préserve son bord. On peut définir ainsi :

### Définition. (*Bord d'une n-cellule*)

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Si  $e$  est une cellule, notons  $\partial e$  son *bord*, c'est-à-dire l'image de la frontière de  $\mathbb{B}_n$ , si  $e$  est une  $n$ -cellule, par n'importe quel homéomorphisme de  $e$  dans  $\mathbb{B}_n$ .

On note également  $\mathring{e} = e - \partial e$ .

Si  $f : e \longrightarrow X$  est une application continue, on note  $\partial f$  la restriction  $f|_{\partial e}$  de  $f$  au bord de  $e$ .

On définit maintenant la notion la plus importante de cette section.

**Définition.** (*Attachement cellulaire, recollement d'une n-cellule le long d'une application*)

Si  $X$  est un espace topologique, et  $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$  est continue, on note

$$X \bigcup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$$

le recollement au moyen de  $\varphi$ .

On dit alors qu'on a *recollé une n-cellule à  $X$*  et qu'on obtient  $X \cup_{\varphi} e^n$  en *attachant une n-cellule le long de  $\varphi$* .

On a en particulier  $X \bigcup_{\varphi} e^n = X \coprod B^n / R$ , où  $R$  est la relation d'équivalence engendrée par les  $\varphi(a)Ri_n(a)$ ,  $a \in S^{n-1}$ .

▷ En effet, c'est la définition du recollement. ■

Dans le recollement général, les applications  $f, g$  n'étaient pas les plus importantes, car souvent des inclusions canoniques ; ici, c'est le contraire, l'espace  $A$  où l'on applique le recollement est toujours le même, c'est la sphère, et c'est l'application  $\varphi$  qui joue un rôle important.

Encore par définition du recollement :

**Fait.** (*Classes des points remarquables d'un recollement cellulaire*)

Ainsi,

1. pour  $x \in X$ , sa classe d'équivalence est  $cl(x) = \{x\} \coprod i_n(\varphi^{-1}(x))$
2. et pour  $b \in \mathring{B}^n$ , on a  $cl(b) = \{b\} \coprod \emptyset$  (on touche pas au dedans).

Plus précisément, on a la propriété de base suivante.

**Proposition.** (*Plongement de  $X$  et de la boule ouverte dans leur attachement cellulaire*)

Les applications  $X \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$  et  $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$  sont des homéomorphismes sur leurs images.

▷ On note  $q : X \coprod B^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$  la projection canonique. Alors sa restriction  $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$  est continue et injective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit  $U \subseteq \mathring{B}^n$  un ouvert. Par ouverture de l'intérieur, cela revient à prendre un ouvert de  $B^n$ . Comme on a  $\varphi = q \circ i_{B^n}$ , on remarque que  $i_{B^n}(U) = \emptyset \coprod U$  est un ouvert de  $X \coprod B^n$ , qui de plus est saturé. On a donc  $\phi(U) = q(\emptyset \coprod U)$  ouvert car  $\phi = q \circ i(B^n) : B^n \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$ .

Maintenant, montrons que  $\alpha_X : X \longrightarrow X \bigcup_{\varphi} e_n$  est injective. Si  $cl(x) = cl(y)$ , alors  $\{x\} \cup i_n(\varphi^{-1}(x)) = cl(x) = cl(y) = \{y\} \cup i_n(\varphi^{-1}(\{y\}))$ . Il suffit de montrer que  $j_X : X \longrightarrow j_X(X)$  est fermée. Soit  $F$  un fermé de  $X$ . On a  $j_X = q \circ i_X(F) = F \coprod \emptyset$ . De plus,  $q^{-1}(q(F \coprod \emptyset)) = F \coprod \varphi^{-1}(F)$  est un fermé de  $X \coprod B^n$ . Donc  $j_X(F) \subseteq j_X(X)$  est un fermé de  $j_X(X)$ . ■

### Proposition

Si  $X$  est pointé par  $x_0$  et  $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$  est constante de valeurs  $x_0$ , alors on a un homéomorphisme  $X \cup_{\varphi} e^n \simeq X \vee S^n$ , où  $S^n \simeq B^n / S^{n-1}$  est pointé par  $q(S^{n-1})$ .

On précise cette notion en généralisant et itérant le processus un nombre quelconque de fois.

### Définition. (*Espace topologique obtenu par recollement de cellules*)

On dit qu'un espace topologique est *obtenu par recollement de cellules* de dimension  $n$  sur un espace topologique  $Y$  s'il existe une famille  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille quelconque de cellules de dimension  $n$ , munie d'une famille d'applications continues  $g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow Y$ , telle qu'il existe un homéomorphisme :

$$X \simeq (\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y.$$

(Notons que les  $g_\alpha$  ne sont pas supposés injectifs.)

### Remarques.

1. La donnée de  $(e_\alpha, g_\alpha)$  est de l'homéomorphisme liant  $X$  et l'espace est appelée *décomposition cellulaire* de  $X$  relative à  $Y$ . Elle est le plus souvent sous-entendue.
2. Si  $f_\alpha : e_\alpha \longrightarrow X$  est l'application induite, alors  $f_\alpha$  est continue et on l'appelle *application caractéristique* de  $e_\alpha$ . (De même, ce ne sont pas toujours des homéomorphismes sur leurs images.)
3. En revanche, sa restriction  $f_{\alpha|e_\alpha^\circ}$  est un homéomorphisme sur son image qui est donc un ouvert de  $X$ .
4. Si  $Y$  est séparé, l'image de  $g_\alpha$  est un compact de  $Y$ , donc un fermé de  $Y$ .
5. Si  $Y$  est séparé, la topologie de  $X$  est la topologie faible définie par la famille  $\{Y\} \cup \{f_\alpha(e_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ .
6. Les  $e_\alpha$ , par abus avec  $f_\alpha(e_\alpha)$ , s'appellent les *cellules* de  $X$  relativement à  $Y$ . De même, en identifiant son intérieur avec son image dans  $X$ , on l'appelle *cellule ouverte* de  $X$  relative à  $Y$ . Les cellules ouvertes sont les composantes connexes de  $X \setminus Y$ .
7. L'application  $\partial f_\alpha = g_\alpha : \partial e_\alpha \longrightarrow Y \subseteq X$  est appelée *application d'attachement* de la cellule  $e_\alpha$  de  $X$  sur  $Y$ .

Si par exemple  $n = 0$ , alors  $X$  est homéomorphe à la somme disjointe de  $Y$  et de l'ensemble d'indices  $A$  muni de la topologie discrète.

On énonce un lemme de construction. On rappelle que dans un bouquet de sphères, la restriction de projection canonique à chaque sphère  $S_i$  est un homéomorphisme sur son image, et qu'à homéomorphisme près, le bouquet de sphères ne dépend pas des points bases choisis.

### Lemme

Si un espace topologique  $X$  est obtenu par recollement de cellules de dimension  $n$  sur un espace topologique  $Y$ , alors le quotient  $X/\langle Y \rangle$  de  $X$  par la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim y$  pour tous  $x, y \in Y$  est un espace topologique discret si  $Y$  est vide, et un bouquet de sphères de dimension  $n$  sinon.

▷ C'est immédiat sur  $Y$  est vide, auquel cas  $n = 0$ ,  $X$  est discret et  $X/\langle Y \rangle \simeq X$ . Sinon, soit  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  une décomposition cellulaire de  $X$  relative à  $Y$ . Soit  $\sim_\alpha$  la relation d'équivalence sur la  $\alpha$ -ième cellule engendrée par  $x \sim y$  si  $x$  et  $y$  sont tous deux dans le bord. Alors  $S_\alpha := e_\alpha / \sim_\alpha$  est homéomorphe à une sphère, que nous munissons du point base image de  $\partial e_\alpha$ . L'inclusion  $\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \longrightarrow \left( \coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \right) \cup \coprod_{\alpha \in A} Y$  induit clairement par passage au quotient un homéomorphisme ( $\sim$  étant engendrée par l'identification des points bases) :

$$\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha := \left( \coprod_{\alpha \in A} S_\alpha \right) / \sim \simeq \left( \coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \right) \cup \coprod_{\alpha \in A} g_\alpha Y / \langle Y \rangle.$$

Ceci conclut. ■

## 4.4.2 CW-complexe, espace cellulaire

### 4.4.2.1 Définition générale

#### Définition. (CW-complexe, espace cellulaire)

Un *espace cellulaire*, *complexe cellulaire* ou *CW-complexe* (pour *closure-finite weak-topology*), est un espace topologique  $X$  muni d'une famille  $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces, en utilisant la convention  $X^{(-1)} = \emptyset$ , si :

1.  $X^{(n)}$  est obtenu par recollement de cellules de dimension  $n$  sur  $X^{(n-1)}$ , par des applications appelées *applications d'attachement* ou *de recollement* ;
2.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  et la topologie de  $X$  coïncide avec la topologie faible définie par la famille  $(X^{(n)})_n$ .

Voici quelques définitions et propriétés générales des *CW-complexes*.

### Remarques.

1. Le sous-espace  $X^{(n)}$  s'appelle le  $n$ -squelette de  $X$ . Il est fermé dans  $X$ . Le 0-squelette  $X^{(0)}$  est un espace discret.
2. Nous appellerons *partition* ou *décomposition cellulaire* ou encore *cellularisation* de  $X$  la donnée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'une décomposition cellulaire de  $X^{(n)}$  relative à  $X^{(n-1)}$ . Elle est le plus souvent sous-entendue, les propriétés qui suivent des *CW-complexes* n'en dépendent pas. Les cellules, cellules ouvertes, applications caractéristiques, applications d'attachement de (la décomposition cellulaire fixée de)  $X$  sont celles

de  $X^{(n)}$  relativement au précédent. L'ensemble  $X$  est donc réunion disjointe de ses cellules ouvertes, qui sont les composantes connexes de  $X^{(n)} - X^{(n-1)}$ .

Attention, les (images par les applications caractéristiques des) cellules de  $X$  sont fermés de  $X$ , mais les cellules ouvertes n'en sont pas forcément des ouverts.

3. Une cellule de dimension 0 est appelé un *sommet* de  $X$ . Une cellule ou cellule ouverte de  $X$  de dimension 1 est appelée *arête* ou *arête ouverte* de  $X$ . La frontière d'une arête ouverte est fermée d'un ou deux sommets de  $X$ , appelés les *extrémités* de l'arête.
4. La topologie de  $X$  est la topologie faible définie par la famille de ses cellules.
5. La *dimension* de  $X$  est la borne supérieure des dimensions de ses cellules ouvertes, ce qui est bien définir par le théorème d'invariance du domaine. Un *graphe topologique* est un *CW-complexe* de dimension  $\leq 1$ .

### Méthode. (*Montrer qu'un truc est un CW-complexe*)

Première étape, on identifie grâce à l'intuition géométrique la structure cellulaire de notre espace : pour une surface, son polygone fondamental ; pour un simplexe, son graphe avec des faces... etc.

Ensuite, il faut justifier sur le papier. C'est tractable si et seulement si le *CW-complexe* est fini (*voir la définition suivante*).

Pour attacher une cellule à un truc, on écrit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow i_1 \\ B^n & \xrightarrow{i_2} & X' \end{array}$$

où  $\iota$  est toujours l'inclusion canonique,  $i_1, i_2$  ne sont pas importantes et sont données par construction du pushout ; il suffit donc d'expliciter  $f$ , qui correspond grossièrement aux applications d'attachement ou aux applications caractéristiques, ou plutôt à leur composante  $\varphi_k$  sur la cellule que l'on attache. Cette application correspond au plongement de  $S^n$  dans notre espace cellulaire. Par définition, on a alors  $X' = X \sqcup B^n/f(x) \sim x \in \tilde{B}^n = X \cup_f B^n$ .

Pour chaque cellule de dimension  $n$  on fait cela indépendamment les unes des autres et l'espace obtenu en intégrant formellement cette opération (*i.e.* en les ordonnant) et le squelette de dimension  $n$ . On commence par  $n = 0$  et on fait ça pour chaque dimension dans l'ordre.

### Théorème. (*CW-complexe, formulation simplifiée pour l'homologie cellulaire*)

Un *CW-complexe* séparé est exactement un espace topologique  $X$  séparé, non vide, muni d'une partition dont les éléments s'appellent *cellules (ouvertes)* vérifiant les conditions suivantes :

- (i) pour toute cellule  $C$ , il existe un entier  $n \geq 0$  appelé la *dimension* de  $C$  et une application  $\varphi_C = \varphi : D^n \rightarrow X$  appelée *application caractéristique* de  $X$  tels que  $\varphi|_{\overset{\circ}{D}^n}$  fournit un homéomorphisme entre  $\overset{\circ}{D}^n$  et  $C$  ( $n$  est alors nécessairement unique et  $\varphi : D^n \rightarrow \overline{C}$ , parfois appelée abusivement *cellule fermée*, ce que nous ferons librement, est bien définie) et que de plus l'image du bord  $S^{n-1}$  de  $D^n$  soit contenue dans une réunion finie de cellules de dimension  $\leq n-1$ ; en outre  $\varphi : D^n \rightarrow \overline{C}$  est alors automatiquement une surjection continue, autrement dit les cellules fermées sont les images des applications caractéristiques; de plus  $\varphi(S^{n-1}) \subseteq \partial C$ ;
- (ii)  $A \subseteq X$  est fermé si et seulement si pour toute cellule  $C$ , l'intersection  $A \cap \overline{C}$  est une fermé dans  $\overline{C}$ , autrement dit les fermés de la topologie de  $X$  sont les parties rencontrant toute cellule fermée en un fermé (de  $X$ ), c'est donc la topologie faible relative à toutes les cellules fermées.

L'ensemble des cellules de  $X$  est alors la décomposition cellulaire  $X$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la réunion de toutes les cellules de dimension  $\leq k$  est le  $k$ -squelette du  $CW$ -complexe  $X$ .

▷ L'unicité de  $n$  découle de l'invariance du domaine. Par continuité de  $\varphi$ ,  $\varphi(\overset{\circ}{D}^n = D^n) \subseteq \overline{C}$  d'où la viabilité de cette corestriction.

Soit  $C$  un cellule. On sait que  $C \subseteq \varphi_C(D^n)$  qui est compacte par image séparée d'un compact dans un séparé donc fermée donc  $\overline{C} \subseteq \varphi_C(D^n)$ . Par suite,  $\varphi_C(D^n) = \varphi_C(\overset{\circ}{D}^n) = \overline{\varphi_C(\overset{\circ}{D}^n)} = \overline{C}$ . ■

### Heuristique

Les  $CW$ -complexes sont des objets combinatoires et c'est comme ça qu'il faut les apprêhender pour être utile.

Le théorème précédent énonce qu'on est pas obligé de recoller les cellules dans l'ordre des dimensions et que l'on obtient la même notion.

### Exercice 1

Montrer que, dans un  $CW$ -complexe séparé, toute cellule fermée (*i.e.* toute adhérence de cellule) est compacte.

▷ **Éléments de réponse.**

La séparation du  $CW$ -complexe  $X$  est cruciale. En effet, toute cellule fermée  $C_0$  est l'image d'une application caractéristique  $\varphi : D^n \rightarrow X$ . Puisque  $D^n$  est compacte et  $X$  est séparée,  $C_0$  est compacte.

### Exercice 2

Montrer que, dans un  $CW$ -complexe séparé, toute cellule  $C$  qui n'est pas un sommet est non fermée, en particulier  $C \subsetneq \overline{C}$ , mais les sommets le sont.

▷ **Éléments de réponse.**

$C \simeq \dot{D}^n$  pour  $n > 0$  n'est pas compact, mais si  $C$  était fermée, elle serait compacte, car dans le compact  $\varphi_C(D^n)$ . D'autre part, les 0-cellules sont des points, donc fermés en milieu séparé.

**Fait. (*Écrasement des applications caractéristiques*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $\varphi_i : D^k \rightarrow X$  l'application caractéristique d'une cellule  $c_i$ . On a un homéomorphisme

$$\tilde{\varphi}_i : D^k / S^{k-1} \rightarrow \overline{e_i} / (\overline{e_i} \setminus e_i).$$

En effet, les applications caractéristiques passent au quotient par hypothèse dans la définition des  $CW$ -complexes. L'application quotient est une bijection continue d'un quasi-compact sur un séparé, donc c'est un homéomorphisme.

**Définition. (*Sous-CW-complexe*)**

Un sous- $CW$ -complexe de  $X$  est un sous-espace topologique  $Y$  de  $X$ , tel que si  $Y^{(n)} = X^{(n)} \cap Y$ , alors  $(Y^{(n)})_n$  est un  $CW$ -complexe.

*Remarque.* Il faut et il suffit pour cela que  $Y$  soit union de cellules ouvertes de  $X$  dont l'adhérence est contenue dans  $Y$ .

**Exemple fondamental. (*Sous-CW-complexe squelettique*)**

Par exemple,  $X^{(k)}$  est un  $CW$ -complexe de dimension  $\leq k$ .

**Exemple. (*Toy model : surface de Boy*)**

$\mathbb{P}^0\mathbb{R} = \{*\}$ , puis  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = S^1$  et  $\mathbb{P}^0\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ . Ensuite,  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ , etc.

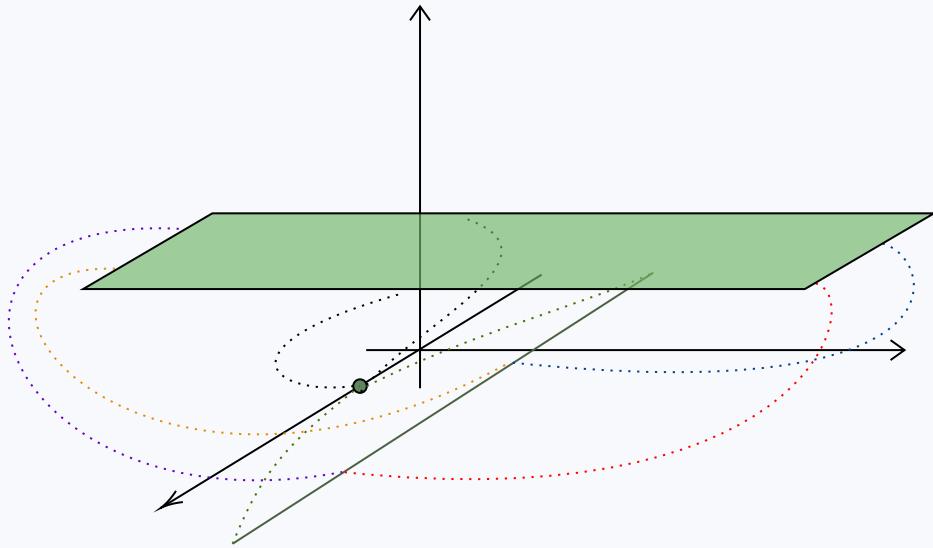


FIGURE 4.4.1 : *Structure cellulaire du plan projectif.* —  
Structure cellulaire du plan projectif

Ainsi,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{R}^1$ , avec chacun des termes donnés deux à deux disjoints. Les applications caractéristiques ne sont pas explicitées, mais il est clair qu'on a là une décomposition cellulaire de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ , puisque tout espace euclidien est homéomorphe à une boule ouverte.

Pour expliciter les attachements, il faut procéder par récurrence.  $\mathbb{P}^0\mathbb{R}$  est clairement un point. Au rang  $n$ ,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  peut être obtenu en prenant (c'est classique)  $D^n$  fermé et identifiant les points diamétralement opposés de son bord  $S^{n-1}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  est l'union disjointe d'une cellule  $\mathring{D}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ . Par suite l'application caractéristique est donnée par celles de  $\mathbb{P}^{n-1}$  et la projection quotient  $D^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ . Ainsi la structure cellulaire de  $\mathbb{P}^{\mathbb{C}}$  possède une unique cellule en chaque dimension.

**Mnémonik :** les espaces projectifs sont tordus.

On dit que le *CW-complexe* est fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Il est alors de dimension finie. La seconde condition des *CW-complexes* est automatiquement vérifiée si le *CW-complexe* est fini, comme ce sera le cas dans la plupart des exemples. Ceci permet d'énoncer la définition suivante :

#### 4.4.2.2 *CW-complexe fini, espace cellulaire fini*

##### Définition. (*Espace cellulaire fini, CW-complexe fini*)

Un *espace cellulaire fini*, ou *CW-complexe fini*, est un espace obtenu à partir d'un nombre fini de points, les 0-cellules, en recollant par ajout itératif un nombre fini de cellules.

Autrement dit, un espace cellulaire est fini si et seulement s'il est de dimension finie et que chaque  $n$ -squelette résulte du recollement de seulement un nombre fini de  $n$ -cellules.

##### Exemples. (*Espaces cellulaires finis*)

1. Tout graphe combinatoire est un espace cellulaire de dimension 1.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^n$  est muni d'une structure de *CW-complexe*. En particulier la droite réelle est un *CW-complexe*.

$\mathbb{R}$  est muni d'une structure cellulaire de dimension 1 avec pour 0-cellules les points de  $\mathbb{Z}$  et l'on recolle une infinité dénombrable de segments  $\simeq B^1$ , chacun en le recollant le long de ses extrémités sur  $n$  et  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . On peut raisonner alors par récurrence : pour  $R^2$ , on recolle des cellules  $B^2$  le long de chaque maille du réseau  $\mathbb{Z}^2$ , etc.

Plus théoriquement, pour construire la structure cellulaire de  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $X_{-1} = \emptyset$ ,  $X_0 = \mathbb{Z}^n$ , puis un recolle une 1-cellule  $\simeq I = [0,1] \simeq B^1$  le long de tout  $A = (i_1, \dots, i_n)$  et  $B = (i_1, \dots, i_i \pm 1, \dots, i_n)$  pour  $i$  parcourant  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $i_1, \dots, i_n$  parcourant  $\mathbb{Z}^n$ . L'application d'attachement  $\varphi : \{0,1\} = \partial I \rightarrow X_0$  est donnée par  $0 \mapsto A$  et  $1 \mapsto B$ . On obtient alors  $X_1$ . Pour obtenir le 2-squelette (en s'arrêtant après cela, on aurait que le plan), on attache des 2-cellules à tous  $A, B, C = (i_1, \dots, i_j \mp 1, \dots, i_n)$  et  $D = (i_1, \dots, i_j \overline{pm} 1, \dots, i_i \pm 1, \dots, i_n)$  où  $j \neq i$  parcourant  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\mp$  est un signe choisi indépendamment de  $\pm$ . L'attachement est alors  $\varphi : \partial I^2 \longrightarrow X_1$ . Pour

$$(t_1, t_2) \longmapsto (i_1, \dots, i_j \mp t_1, \dots, i_i \pm t_2, \dots, i_n)$$

obtenir le  $k$ -squelette, plus généralement, à partir du  $k-1$ -squelette, on utilise les attachements

$$\partial I^k \longrightarrow X^{(k-1)} \quad \text{pour } (i_1, \dots, i_k) \text{ parcourant } \mathbb{Z}^k \text{ et } (\pm_k)$$

$$(t_1, \dots, t_k) \longmapsto i_1, \dots, i_1 \pm_1 t_1, \dots, i_2 + t_2, \dots, i_k \pm_k t_k, \dots, i_n)$$

parcourant  $\{0,1\}^k$ . **Remarquons que les points choisis de recollement sont automatiquement donnés par les applications d'attachement !** C'est un bon exercice d'inférence de décrire soi-même les applications d'attachement dans le cas général. Décrivons la solution. Notons au passage qu'il est possible en s'accrochant un peu plus de décrire la structure cellulaire d'un espace euclidien tronqué, avec des cellules manquantes, etc. ce qui sera facilité la notion d'opérations sur *CW-complexes*.

Cependant,  $\mathbb{R}^n$  n'est pas *CW-complexe fini*.

3. Toute sphère est un espace cellulaire (fini, *i.e.* avec un nombre fini d'attachements et de cellules). Pour  $n \geq 1$ , l'application d'attachement  $\pi : S^{n-1} \longrightarrow pt$ ,  $S^n = B^n \coprod_{\pi} \{N\}$  confère à  $S^n$  une structure de *CW-complexe fini* ayant un sommet  $N$  et une et une seule  $n$ -cellule ; si  $n = 0$ , on considère simplement l'application vide. Heuristiquement, il suffit de recoller le bord de la boule sur un point pour obtenir la sphère. C'est d'ailleurs un *CW-complexe de dimension  $n$* .

(Décomposition équatoriale) Ce n'est pas la seule manière naturelle de mettre une structure cellulaire sur la sphère  $S^n$ . On pourrait aussi recoller deux  $n$ -cellules le long de leurs bords  $S^{n-1}$  qui constituerait alors l'équateur de la sphère. On peut alors raisonner par récurrence :  $S^{n-1}$  étant un espace cellulaire  $X$ , on considère l'application d'attachement du bord de la  $n$ -cellule  $S^{n-1}$  vers  $X$  comme l'identité. On refait la même chose une deuxième fois avec même l'attachement inclusion canonique  $S^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1} \cup_i dB^n$ . On a la sphère, qui est un double tambour disjoint bien que formellement sans épaisseur !

4. Les bouquets de sphère sont donc des espaces cellulaires complexes. En effet, un bouquet de sphères pointées de dimension  $n$ , indexées par un ensemble  $S$ , admet une structure de  $CW$ -complexe, avec un seul sommet et  $\text{card}(S)$  cellules de dimension  $n$ , dont les applications d'attachements sont les applications constantes sur le sommet.
5. Le tore  $\mathbb{T}^2$  admet une structure de  $CW$ -complexe fini ayant une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule. Il est donc de dimension 2. En effet, le tore  $\mathbb{T}^2$  est par définition homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité  $K = [0,1] \times [0,1]$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$ . La 0-cellule est l'image de  $(0,0)$ , les deux 1-cellules sont les applications de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{T}^2$  obtenues par passage au quotient des applications  $t \mapsto (t,0)$  et  $t \mapsto (0,t)$ . La 2-cellule est la projection canonique de  $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{T}^1$ .
6. La bouteille de Klein  $\mathbb{K}_2$  admet une structure de  $CW$ -complexe fini ayant aussi un sommet, deux arêtes et une cellule de dimension 2. En effet, par définition, elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,1-t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$ . Les cellules sont données par les mêmes opérations.

Les 1-squelettes de  $\mathbb{K}_2$  et de  $\mathbb{T}^2$  sont naturellement homéomorphes, mais l'application d'attachement de la 2-cellule de  $\mathbb{K}_2$  n'est pas homotope à l'application d'attachement de la 2-cellule de  $\mathbb{T}^2$ .

7. Un autre exemple est l'espace projectif réel. On l'étudie en détail dans la section consacrée, dans la section ESPACES PROJECTIFS GÉNÉRAUX mais on en a donné déjà au moins deux modèles fondamentaux ci-dessus.

L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est obtenu par quotient de  $S^{2n+1}$  par l'action naturelle de rotation de  $S^1$  où  $S^{2n+1} \subseteq C^{n+1}$  et de même c'est classique mais il peut être vu comme la boule  $D^{2n}$  fermée dont on a identifié les points de la frontière  $S^{2n-1}$  sous l'action de  $S^1$  (en effet,  $A \subseteq S^{2n+1}$  de points de dernière coordonnée  $z_{n+1} \in \mathbb{R}_+$  est homéomorphe à  $\overline{D^{2n}}$  graphe de  $z \mapsto \sqrt{1 - |z|^2}$  est équivalent sous  $S^1$  à l'ensemble des points de coordonnée  $z_{n+1} = 0$ , et tout point de  $S^{2n+1}$  de dernière coordonnée non nulle équivaut sous  $S^1$  à un unique point de dernière coordonnée dans  $\mathbb{R}_+^*$ ). Ainsi  $\mathbb{P}^n\mathbb{C} = D^{2n} \sqcup \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$  et on attache par l'application quotient  $D^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  et par récurrence :  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  a une structure de  $CW$ -complexe avec une unique cellule en

dimension paire et aucune cellule en dimension impaire.

### Corollaire

Tout espace cellulaire fini est séparé. En particulier, c'est un espace cellulaire.

### Corollaire

Tout espace cellulaire fini est compact.

### Contre-exemple

$\mathbb{R}^n$  n'est pas un *CW-complexe fini*. □

### Exercice 3

Montrer que tout sous-espace compact d'un *CW-complexe* n'intersecte qu'un nombre fini de cellules.

### Propriété. (*Plongement des CW-complexes finis*)

Tout *CW-complexe fini* se plonge dans un espace euclidien.

#### 4.4.2.3 Applications cellulaires

##### Définition. (*Application cellulaire*)

Soient  $X, Y$  deux *CW-complexes*. Une application continue de  $X$  dans  $Y$  est dite *cellulaire* si elle envoie le  $n$ -squelette de  $X$  dans le  $n$ -squelette de  $Y$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit aussi que c'est un *morphisme de CW-complexes*. On en déduit même la *catégorie des CW-complexes*.

#### 4.4.2.4 Opérations sur les *CW-complexes*

Les opérations autorisées sur les *CW-complexes* sont les suivantes :

- ★ produit de *CW-complexes* ;
- ★ réunion de *CW-complexes* ;
- ★ somme directe = coproduit de *CW-complexes* en particulier ;
- ★ sous-*CW-complexe* ;
- ★ quotient de *CW-complexe* = écrasement d'un *CW-complexe* sur un sous-*CW-complexe* ;
- ★ revêtement d'un *CW-complexe* ;
- ★ quotient d'un *CW-complexe* par une relation d'équivalence cellulaire ;
- ★ recollement de *CW-complexes* le long d'une application cellulaire ; en particulier :
- ★ cylindre, cône, suspension d'un *CW-complexe* ;

★ attention pas de passage au  $\mathfrak{hom}$  en  $CW$ -complexes.

#### 4.4.2.5 Orientation de cellules, coefficient d'incidence de cellules (hors-programme)

Pour comprendre la construction suivante, on a besoin de connaître l'homologie (singulière) des sphères afin de définir le DEGRÉ d'une application continue  $S^n \rightarrow S^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pourra sans problème admettre qu'une telle quantité est définie au signe près dans  $\mathbb{Z}$ .

##### Définition-propriété. (*Orientation d'une cellule*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , pour chaque  $k$ -cellule de  $X$ , il y a deux classes d'équivalence d'application caractéristiques  $\varphi, \psi : D^k \rightarrow X$  pour  $\deg(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = 1$ .

En effet,  $\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k / S^{k-1} \rightarrow D^k / S^{k-1}$  est un homéomorphisme et  $D^k / S^{k-1} \simeq S^k$  par un homéomorphisme fixé uniquement, donc son degré est  $\pm 1$  défini absolument.

Une *orientation* d'une  $k$ -cellule de  $X$  est un choix d'une des deux classes d'équivalence d'application caractéristiques de cette cellule. Sous couvert d'un choix d'orientation, on dit qu'une  $k$ -cellule est *orientée* ou *non orientée* si l'on ne précise pas d'orientation.

##### Définition. (*Coefficient d'incidence de cellules*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soient  $\sigma$  une  $k$ -cellule et  $\tau$  une  $(k-1)$ -cellule de  $X$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le *coefficient d'incidence*  $[\sigma : \tau]$  est le degré de l'application

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi|_{S^{k-1}}} X^{(k-1)} \xrightarrow{\pi} X^{(k-1)} / (X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau') \xrightarrow{\sim} \bar{\tau} / (\bar{\tau} \setminus \tau) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{\tau}^{-1}} D^{k-1} / S^{k-2} \simeq S^{k-1}$$

où  $\varphi : D^k \rightarrow X$  est une application caractéristique de  $\sigma$ .

##### Heuristique

Prenons une 2-cellule, c'est-à-dire un disque  $D^2$ , et singularisons une arête. L'application de recollement envoie son bord le cercle  $S^1$  sur le 1-squelette de  $X$ , c'est-à-dire ses arêtes. Écrasons ce dernier relativement à tout le squelette inférieur (ici seulement les points) ainsi que les autres arêtes que celle considérée. Après cet écrasement, il ne reste que l'arête aux extrémités écrasées (puisque l'on a écrasé les extrémités, qui sont des points). Ce truc n'est autre qu'un cercle, d'où une application de  $S^1 \rightarrow S^1$  en composant tout cela. Le coefficient d'incidence de la 2-cellule par rapport à l'application est alors le degré de cette application autour du cercle.

Ainsi, l'information importante est contenue dans la façon comment  $\varphi$  envoie le bord de  $\sigma$  sur  $\tau$ , i.e.  $S^{k-1} \rightarrow X^{(k-1)} / (X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau')$ .

*Remarque.* Il est défini donc a priori au signe près. Si l'on veut fixer son signe, on oriente  $\sigma$  et  $\tau$  et l'on doit fixer une façon standard de choisir un générateur des groupes  $\tilde{H}_k(S^k)$  où  $S^k$  est

le bord de  $D^{k+1}$  et  $\tilde{H}_k(S^k)$  où  $S^k = D^k/S^{k-1}$ , en particulier par le même espace  $S^k$ .

Ces définitions permettent de calculer l'homologie de *CW*-complexes simples, comme on le verra en temps venu.

#### 4.4.2.6 Boucle d'oreille hawaïenne

**Contre-exemple.** (*Homotopiquement équivalent mais pas homéomorphe à un CW-complexe*)

Le *hérisson* est homotope à un *CW*-complexe mais n'a pas de décomposition cellulaire puisqu'il n'est pas localement contractile.  $\square$

#### 4.4.2.7 Point de vue catégorie des *CW*-complexes

On conseille maintenant au lecteur de se référer au cours sur les *CW-COMPLEXES* en *THÉORIE DE L'HOMOTOPIE*. On y apprendra notamment à construire les espaces cellulaires par pushout, ce qui formalise la notion d'attachement de façon plus systématique (et un peu imbuvable)

### 4.5 Homotopie

**Motivation.** En topologie, contrairement à la géométrie, on s'intéresse peu à la taille des objets mais à leurs possibilités de déformation. Ainsi, deux espaces homéomorphes sont les mêmes, mais on voudrait maintenant décrire des applications donnant que deux espaces sont *presque* homéomorphes (c'est l'*homotopie*), mais les mêmes à déformation près. Par exemple, un plongement de la sphère dans le plan ne peut être homéomorphe, mais quitte à agrandir son image jusqu'à l'infini, on dira que la sphère et le plan sont les mêmes, à déformation près. On définit ainsi une relation plus faible que l'*homéomorphie* et bien utile au topologue.

#### 4.5.1 Point de vue catégorique de la topologie

**Définition.** (*Catégorie des espaces topologiques*)

On note  $\mathcal{C} = \text{Top}$ , la catégorie de tous les espaces topologiques. Dans ce cas, pour tous objets  $X, Y$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  sont les applications continues  $= C(X, Y)$ .

### 4.5.2 Notion d'homotopie

#### 4.5.2.1 Applications homotopes

→ *Notation.* Si  $X$  est un espace topologique, on note  $\star_X$  *n'importe quel point* arbitrairement fixé

de  $X$ . Si  $X$  est évident, en particulier si  $X$  est le seul espace mis en jeu, on note simplement l'étoile  $\star$ .

### Définition. (*Homotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications continues (cela va de soi dans la catégories des espaces topologiques). Une *homotopie* entre  $f$  et  $g$  est une application continue :

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

où  $I = [0,1]$ , telle que  $H(x,0) = f(x)$  et  $H(x,1) = g(x)$  pour tout  $x \in X$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes* s'il existe une homotopie entre  $f$  et  $g$ , et l'on écrit  $f \cong g$ , ou, si le contexte est clair (ce qui arrive souvent, puisqu'on parle d'applications maintenant),  $f \simeq g$ .

Le paramètre  $t$  peut, mais ce n'est pas fondamental, représenter le temps. On dit parfois *au premier instant* et *au dernier instant* pour parler des temps  $t = 0$  et  $t = 1$ , conformément au formalisme de la MÉCANIQUE.

Intuitivement,  $H$  est une application continue qui « interpole » entre  $f$  et  $g$ . Aussi,  $f$  et  $g$  ne sont pas les mêmes, mais il existe une collection de chemins continus qui ramène continûment le chemin  $f$  au chemin  $g$ .

Remarque : avec la phrase précédente, on a traduit que les deux applications partielles doivent être continues. Mais, d'après la définition, cela ne suffit pas tout à fait.

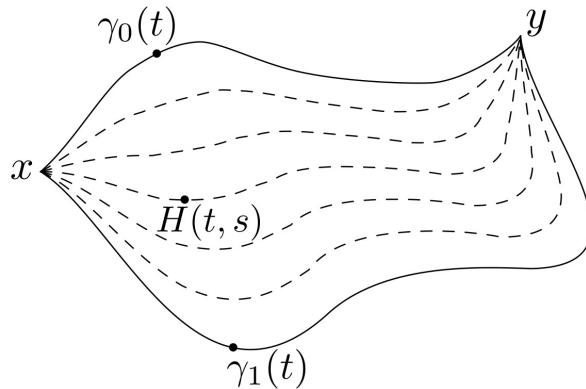


FIGURE 4.5.1 : Deux applications homotopes. —

On reprend les notations de l'énoncé. Ici, l'homotopie est prise relativement à deux points  $\{x,y\}$ . L'idée est de déformer continûment  $f$  en  $g$ . Non seulement je peux le faire sur tous les points, j'ai peux le faire de manière simultanément cohérente pour tous les points ( $H$  est continue).



L'homotopie entre deux applications n'est pas équivalente avec l'existence d'un chemin continu de  $f$  à  $g$  dans  $C(X,Y)$ , mais presque (mais quelle topologie donner à cet espace ?). C'est vrai si l'on suppose  $X$  localement compact (raisonnable) et si l'on munit  $C(X,Y)$  de la topologie compacte-ouverte (raisonnable également).

Clairement :

### Proposition. (*Relation d'homotopie*)

L'homotopie est une relation d'équivalence.

▷ Bah, pour la réflexivité, il suffit de prendre  $H(x,t) = f(x)$  (là on voit qu'il faut  $f$  continue sinon ça déconne). Pour la symétrie, considérer  $H'(x,t) = H(x,1-t)$  continue par composition. Pour la transitivité, faire appel à une ruse de fouine semblable à la connexité par arcs. ■

*Remarque.* L'homotopie s'énonce également avec  $[a,b]$  au lieu de  $I$ . Il y a bien sûr équivalence entre les deux définitions.

### Exemples. (*Homotopies*)

1.  $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est homotope à l'application constante  $0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Pour voir, la structure topologique de  $\mathbb{R}^n$  est tellement basique que  $\mathbb{R}^n$  est homotope à un point (pour l'équivalence d'homotopie, que nous définirons plus bas). On peut *réaliser l'homotopie* par  $H : \mathbb{R}^n \times I : (x,t) \longmapsto xt$ .
2. Deux segments d'un espace vectoriel normé sont toujours homotopes (le faire). On peut même imposer que les chemins interpolateurs soient également des segments.
3. On verra que dans des espaces gentils tels que  $\mathbb{R}^n$  où l'application identité est homotope à une application constante, on parlera d'espace *contractile*, tout lacet est homotope à un lacet constant. C'est le cas du plan complexe, où l'on retrouve un théorème sur l'intégration des fonctions holomorphes.

Ce n'est plus vrai dans certains autres espaces. Par exemple, dans le cercle  $S^1$  réalisé dans le plan complexe, la situation n'est pas équivalente à la précédente. Si un fil parcourt une boucle autour d'un cercle, il n'est pas possible de modifier le nombre de tours compté algébriquement sans que le fil ne se brise ou quitte la surface de la sphère. Ce *nombre de tours* est formellement défini de la manière suivante : l'application de  $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2i\pi t}$  étant un homéomorphisme local, tout lacet  $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$  possède un unique relèvement continu  $\bar{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\bar{\gamma}(0) = 0$ . Le degré du lacet est alors  $\bar{\gamma}(1)$ . Si deux tels lacets sont homotopes, on démontre, en relevant de même cette homotopie, qu'ils ont le même degré.

Ainsi, deux applications homotopes ne sont pas égales, mais interchangeables, en un point à préciser.

**Exercice 4 (L'homotopie n'est pas une notion ensembliste)**

1. Une bijection peut-elle être homotope à une application constante ?
2. (*Très difficile*) Montrer que toute application est homotope à une injection, respectivement à une surjection. En particulier, les notions de cardinal, d'injection et de surjection, ne font pas sens à homotopie près.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Oui. On dira bientôt qu'un espace  $X$  où  $id_X \sim cst_{x_0}$  pour un  $x_0 \in X$  est contractile.
2. C'est une conséquence du théorème de factorisation en cofibration, respectivement en fibration, en théorie avancée de l'homotopie des espaces topologiques, traitée dans le chapitre HOMOTOPIES.

**Définition. (Homotopie relative)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \rightarrow Y$ . Soit  $A \subseteq X$ , telles que  $f|_A = g|_A$ . On dit que  $f$  est homotope à  $g$  relativement à  $A$ , et l'on note  $f \cong_A g$  ou  $f \simeq_A g$ , si il existe une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(x, 0) = f(x)$  et  $H(x, 1) = g(x)$ , et  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  pour tous  $a \in A$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Proposition. (Relation d'homotopie relative)**

Avec les notations précédentes, l'homotopie relativement à  $A$  est une relation d'équivalence.

▷ La réflexion vient de ce qu'on peut prendre  $H(x, t) = f(x)$ . Pour la symétrie, si  $H$  est une homotopie (relativement à  $A$ )  $f \simeq g$ , alors  $H(x, 1-t)$  convient. On définit  $H'(x, t) = H(x, 2t)$  si  $t \in [0, \frac{1}{2}[$ ,  $H'(x, t) = H(x, 2(t - \frac{1}{2}))$  sinon. C'est une homotopie de  $f$  à  $h$ . C'est déjà pas mal! ■

**Définition. (Candidats d'homotopie relative)**

Soit  $\psi : A \rightarrow X$ . On note alors  $C(X, Y)_\psi$  l'ensemble des applications continues de  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $f|_A = \psi$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications pour laquelle l'homotopie relative à  $A$  avec  $\psi$  fait sens.

**Définition. (Quotient d'homotopie relative)**

On note  $[X, Y]_\psi$  le quotient de  $C(X, Y)_\psi$  par la relation d'homotopie relative à  $A$ .

**Exemple. (Quotient d'homotopie trivial)**

Cherchons  $[\star, X]$  dans le cas  $C(\star, X) = X$ . Une homotopie dans ce cas est un chemin comme on connaît : on note  $\pi_0(X) = [\star, X]$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . Et, héhé, on touche du doigt la suite des événements...



L'homotopie n'est pas une notion extrinsèque (on n'en doutait pas) ! Un cercle du plan est homotope à un point ; un cercle embrassant le tore, non.

### Lemme. (*Conservation de l'homotopie par compositions*)

Soient,  $T, X, Y, Z$  des espaces topologiques et

$$T \xrightarrow{k} X \xrightarrow{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}} Y \xrightarrow{h} Z$$

Si  $f \simeq g$ , alors  $h \circ f \circ k \simeq h \circ g \circ k$ .

▷ Soit  $H$  une homotopie de  $f$  à  $g$ . Alors  $h \circ H \circ (id \times h)$  est une homotopie de  $h \circ f \circ k$  sur  $h \circ g \circ k$ . ■

On cite aussi.

### Lemme. (*Composition d'homotopies*)

Si  $f \simeq g$  et  $h \simeq k$ ,  $h$  est composable à  $f$  et  $k$  à  $g$ , alors  $h \circ f \simeq k \circ g$ .

▷ La preuve est sans malice : pour composer deux homotopies  $H$  et  $K$ , on considère  $\Theta(t,x) = K(t,H(t,x))$ . ■

### Exercice 5 (*Homotopie et cylindre, cône et suspension*)

1. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  est équivalente à la donnée d'une application continue  $\mathfrak{C}(X) \rightarrow Y$ .
2. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  dont la première est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue  $C(X) \rightarrow Y$ .
3. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  dont la seconde est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue  $\Sigma(X) \rightarrow Y$ .

#### 4.5.2.2 Équivalence d'homotopie

On peut maintenant, à la mode catégorique, transformer les notions que l'on connaît en notions vraies à homotopies près. Le lecteur se convaincra qu'en topologie, c'est la bonne manière de considérer les choses.

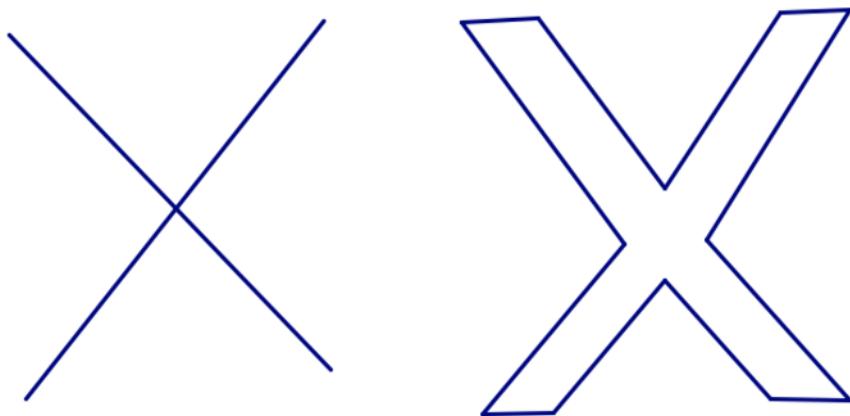


FIGURE 4.5.2 : Deux espaces homotopiquement équivalents non homéomorphes. —

Si l'on enlève le point central de l'espace de gauche, on obtient quatre composantes connexes. Cependant, si l'on enlève un point quelconque à l'espace de droite, on garde un espace connexe par arcs.

### Définition. (*Équivalence d'homotopie*)

On dit qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est une *équivalence d'homotopie*, s'il existe une application continue  $Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \simeq id_Y$  et  $g \simeq f \simeq id_X$ .

Moins formellement, une équivalence d'homotopie est une application continue inversible à homotopie près.

Deux espaces topologiques  $A, B$  sont dits *homotopes* s'il existe une équivalence d'homotopie entre eux. C'est clairement une relation d'équivalence. On note  $A \cong B$  et nous proscrivons l'usage  $\simeq$  similaire à l'homéomorphie.

### Principe

L'équivalence d'homotopie ne voit pas les largeurs.

### Fait. (*Homotopie et homéomorphie*)

Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

Les notions de convergence, internes, ne sont pas conservées par l'équivalence d'homotopie. En revanche, les considérations extérieures (trous, composantes connexes, etc.), le sont : c'est un peu la « morale de l'équivalence d'homotopie ».

### Exemples. (*Équivalences d'homotopie*)

1. Comme on a vu,  $\star \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une équivalence d'homotopie pour tout point  $\star \mapsto a$

$a \in \mathbb{R}^n$ . L'homotopie représente donc bien cette idée topologique de géométrie du caoutchouc : peu importe la taille, des choses très petites, atomiques, sont homotopes à des choses très grandes, infinies.

2. (*Homotopiquement équivalent  $\not\Rightarrow$  homéomorphes*)  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est une équivalence d'homotopie. On pose  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ , qui à  $x$  fait correspondre  $\frac{x}{\|x\|}$ . Alors  $g \circ f = id$  et  $f \circ g \neq id$ . On pose  $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  qui à  $(x,t) \mapsto (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$ . Alors  $f \circ g$  est homotope à l'identité. Pourtant, il est clair que  $S^1$  et  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas homéomorphes ; en effet, le premier, privé de deux points, n'est plus connexe par arcs ; le second, si.

### Définition. (*Catégorie des espaces topologiques homotopique*)

On raffine la catégorie des espaces topologiques en la *catégorie d'homotopie*  $C = \text{Top}_H$  dont les objets sont encore les espaces topologiques et pour tous objets  $X,Y$ ,  $\text{Hom}_C(X,Y) = [X,Y] := [X,Y]_\emptyset$  : les morphismes sont les applications continues définies à homotopie près.

Les isomorphismes de la catégorie  $C$  sont les équivalences d'homotopie.

### Heuristique

L'homotopie est une sorte de *morphisme entre les morphismes*, ce qui fait gagner un troisième cran d'abstraction dans les catégories.

On donne quelques propriétés pratiques pour établir des homotopies.

### Propriété. (*Cas trivial dans $\mathbb{R}^n$* )

Toute application continue d'un convexe dans lui-même est homotope à l'identité.

▷ Soit  $X$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une application continue  $X \rightarrow X$ . Alors l'homotopie  $(1-t)x + tf(x)$  convient. ■

### Propriété. (*Type d'homotopie par changement de point de vue*)

Soient  $X,Y$  deux espaces topologiques et  $g : Y \rightarrow X$ . On ne parvient pas à construire  $f : X \rightarrow Y$  directement de façon continue. On choisit un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X'$  et l'on pose  $f : X' \rightarrow Y$ . On suppose  $(f \circ \varphi) \circ g = id_Y$ . Alors il suffit de montrer  $g \circ f \simeq \varphi^{-1}$  pour en déduire que  $X,Y$  sont homotopiquement équivalents.

▷ En effet, il suffit de montrer  $(g \circ f) \circ \varphi \simeq id_X$  et l'on conclut par relation d'équivalence. ■

### 4.5.2.3 Isotopie

#### Définition. (*Isotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. On dit que deux homéomorphismes  $f, g$  sont *isotopes* s'ils sont homotopes par  $H$  de façon que pour tout  $t \in [0,1]$ ,  $H(-,t)$  soit un homéomorphisme.

#### Définition. (*Isotopie ambiante*)

Deux plongements  $\alpha, \beta$  d'un espace  $Z$  dans un espace  $X$  sont *isotopes (de manière ambiante)* s'ils se prolongent en deux homéomorphismes  $f, g$  de  $X$  isotopes.

#### Proposition

Deux plongements  $\alpha, \beta$  d'un espace  $Z$  dans un espace  $X$  sont *isotopes* si et seulement s'ils diffèrent d'un isotopiquement nul, *i.e.* s'il existe  $h$  un autohoméomorphisme de  $X$  isotope à  $id_X$  et tel que  $h \circ \alpha = \beta$ .

### 4.5.3 Espaces contractiles

#### Définition. (*Espace contractile*)

On dit qu'un espace topologique  $X$  est *contractile* s'il est homotope (= homotiquement équivalent) à un point, c'est-à-dire si  $X \simeq \star$  dans  $\text{Top}_H$ .

#### Heuristique

Le seul espace topologique homéomorphe à un point est le point, qui est d'ailleurs unique à homéomorphisme près : il est discret, grossier, compact, connexe, séparé, à base dénombrable.

On se rappelle donc que l'équivalence d'homotopie est bien plus faible que l'homéomorphie ; en particulier, elle ne restreint pas le cardinal.

#### Exemples. (*Contractiles*)

1. Il s'agit de montrer :  $X \cong \{\emptyset\}$ .
2. Tout cône d'une espace topologique est contractile (l'écrire. En fait, par définition, **le cône est le paradigme d'espace contractile**).
3. Tout espace affine est contractile.
4. Tout convexe de  $\mathbb{R}^n$  est contractile.
5. Toute boule est donc contractile.
6. Toute sphère privée d'un point est contractile.

**Propriété. (*Caractérisation de la contractibilité*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est contractile ;
- (ii)  $\text{id}_X \sim \text{cst}_{x_0}$  pour un  $x_0 \in X$  ; on dit que  $\text{id}_X$  est *homotopiquement nulle* ;
- (iii)  $\text{id}_X \sim \text{cst}_{x_0}$  pour chaque  $x_0 \in X$  ;
- (iv)  $X$  se rétracte par déformation sur n'importe lequel de ses points.
- (v)  $C(X)$  se rétracte par déformation sur  $X$  ;
- (vi) toute fonction continue dans  $X$  est homotopiquement nulle ;
- (vii) toutes les fonctions continues dans  $X$  sont homotopes.

**4.5.3.1 Rétractions****Définition. (*Paire topologique*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$  avec  $A \subseteq X$ . Alors on dit que  $(X, A)$  est exactement une *paire topologique*. Une *application continue* entre deux paires topologiques  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) \subseteq B$ .

**Définition. (*Rétract*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$ , on dit que  $A$  est un *rétract* de  $X$ , ou que  $A$  est *rétracte*, ou que  $X$  se *rétracte* sur  $A$  si l'inclusion a une *rétraction topologique stricte*, i.e. s'il existe  $\tau : X \rightarrow A$  continue telle que  $\tau \circ i = \text{id}_A$ , ce qui signifie aussi exactement qu'il existe une application continue  $r : X \rightarrow A$  avec  $r|_A = \text{id}_A$ , ce qui peut sembler bizarre, mais

**Définition. (*Rétract absolu*)****Définition. (*Rétracts par déformation (forte)*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$ , on dit que  $A$  est un *rétract* de  $X$ , ou que  $A$  est un *rétract par déformation* si c'est une rétract et sa rétraction  $\tau : X \rightarrow A$  est une section telle que  $i \circ \tau \simeq \text{id}_X$ .

On dit encore que  $A$  est un *rétract par déformation fort* si de plus  $i \circ \tau \simeq_A \text{id}_X$ .

**Fait**

Ainsi rétract par déformation fort  $\implies$  rétract par déformation  $\implies$  rétract.

*Remarque.* Pour ne pas avoir l'homéomorphisme, on comprend bien que c'est la condition la plus forte que l'on peut demander.

**Remarque importante.** Dans le cas du rétract par déformation,  $i$  et  $\tau$  sont des équivalences d'homotopie. Ainsi, une **rétraction par déformation est un cas particulier d'identité du type d'homotopie**, et même assez courant : il correspond grossièrement au cas où l'une des  $f \circ g \sim id$  est une égalité.

### Exercice 6

L'équateur de la sphère usuelle en est-il un rétract par déformation ? Un rétract ?

#### Exemples. (*Rétracts*)

1. Tout point est un rétract de son milieu de vie.
2.  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est un rétract par déformation.
3.  $S^1$  est un rétract par déformation du ruban de Möbius.
4. Pour tout  $x \in S^1$ ,  $\{x\} \times S^1$  est un rétract de  $\mathbb{T}^2$ . De même,  $S^1 \times \{x\}$  est un rétract de  $\mathbb{T}^2$ . Cependant, aucun des deux n'est un rétract par déformation.
5. (*Rétraction sur le cône*) Tout espace topologique  $X$  est un rétract par déformation forte de son cylindre  $X \times I$ .

En effet, en considérant  $i : X \hookrightarrow X \times I$ ,  $x \mapsto (x,0)$ , on a une rétraction  $r : (x,t) \mapsto x$  telle donc que  $ri = id_X$  et continue sur  $X \times I$ . C'est un rétract, car  $ir : X \times I \rightarrow X \times I$ ,  $(x,t) \mapsto (x,0)$  est  $\sim id_X$  par  $H : (X \times I) \times I \longrightarrow X \times I$ . La rétraction par déformation est même forte puisque pour  $((x,t),t') \mapsto (x,tt')$

$t = 0$  i.e. sur  $X$ ,  $H((x,t),t') = (x,0) = id_X(x,t) = ir(x,t)$  pour tout  $t' \in [0,1]$ .

Il n'est pas difficile de constater que  $X$  est également un rétract par déformation de son cône  $C(X)$  écrasé au temps  $t = 1$ . Toutes les applications mises en jeu passent au quotient sur  $X \times \{1\}$  y compris l'homotopie, qui reste relative. Semblablement,  $X$  est un rétract par déformation de sa suspension  $\Sigma(X)$ .

6.  $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$  est un rétract par déformation de  $S^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$ .

On note  $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$ . Considérons  $r : (x_1, \dots, x_4) \mapsto (0,0, \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}})$ . Elle est bien définie par hypothèse d'exclusion sur  $B$  et bien à valeurs dans  $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ . On a presque par construction  $ri = 0$  en notant  $i : (0,0,x_3,x_4) \hookrightarrow (0,0,x_3,x_4)$ . D'autre part,  $ir(x) = (0,0, \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}})$ . Considérons  $H(x,t) = \frac{(tx_1, tx_2, x_3, x_4)}{\|(tx_1, tx_2, x_3, x_4)\|}$  qui est une homotopie de  $id_{S^3 \setminus B}$  à  $ri$ . La rétraction par déformation est forte, car sur  $S^1$ , cette homotopie vaut bien  $id$ .

### Proposition

Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  continue,  $X$  un espace topologique. Alors  $f$  se prolonge en une application continue  $g : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow X$  si et seulement si  $f \simeq \star$  l'application constante.

▷ Si un tel  $g$  existe, on pose :

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{B}^{n+1} \times I &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto g(tx) \end{aligned}$$

qui est une homotopie entre  $g$  et l'application constante  $x \mapsto g(0)$ . Par restriction, on en déduit une homotopie entre  $f$  et  $g(0)$ .

Réiproquement, si  $f \simeq x_0$ , soit  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$  cette homotopie. On pose :

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{B}^{n+1} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \begin{cases} H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right) \text{ si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ x_0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et voilà. ■

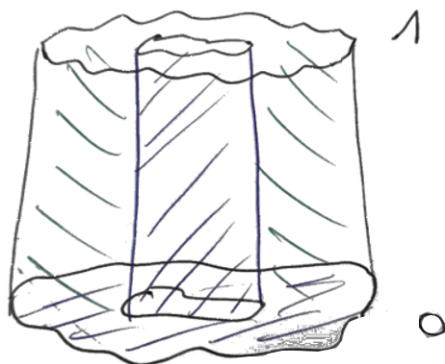


FIGURE 4.5.3 : Illustration de la notion de rétraction. —

### 4.5.4 Propriété d'extension des homotopies

**Définition.** (*Propriété d'extension des homotopies, peh*)

Soient  $Y$  un espace topologique et  $X \subseteq Y$  un sous-espace. On dit que  $(Y, X)$  a la *propriété d'extension des homotopies* ou de *prolongement des homotopies* si pour tout  $g : Y \rightarrow Z$  (continue) et pour toute application continue  $H : X \times I \rightarrow Z$  telle que  $H(-, 0) = g|_X$ , alors il existe une homotopie  $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow Z$  vérifiant :  $\tilde{H}|_{X \times I} = H$  et  $\tilde{H}(-, 0) = g$ . On

dit alors que  $\tilde{H}$  étend  $H$  avec conditions initiales.

Si  $Z$  est fixé, on dit que  $(Y, X)$  a la PEH relativement à  $Z$ . Une paire topologique a donc la PEH si et seulement si elle a la PEH relativement à tout espace.

On dit parfois que  $(X, A)$  est une *cofibration*. Elle est *stricte* si  $A$  est fermée dans  $X$ . On parle aussi de *paire de Borsuk* et de *bonne paire topologique*.

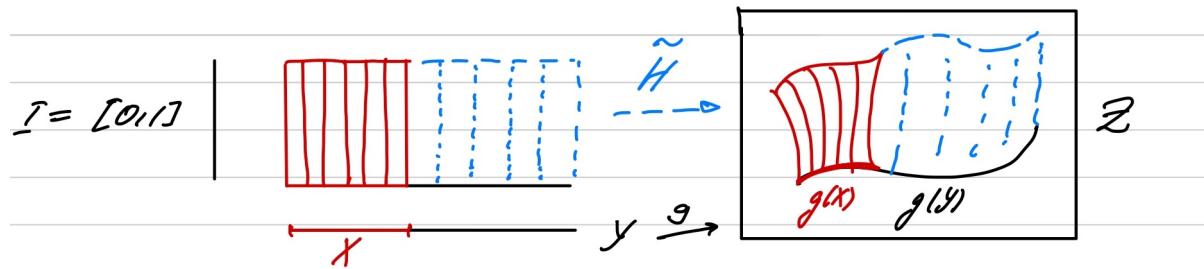


FIGURE 4.5.4 : Propriété d'extension des homotopies. —

### Remarques.

1. Si  $X$  est fermé dans  $Y$ , par recollement de continues sur un recouvrement de deux fermés,  $g$  et  $H$  donnent une application continue

$$(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z.$$

Autrement, ce n'est pas clair (contre-exemple : prendre  $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R}$ ).

2. Si  $(Y, X)$  a cette propriété, alors l'inclusion canonique  $i$  de  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \hookrightarrow Y \times I$  s'étend (en effet, on a une application continue  $g = i|_{Y \times \{0\}}$  et une homotopie  $H = i|_{X \times I}$  qui vérifient les hypothèses) en une application continue qui est par construction une rétraction de  $i$  donc par définition  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  est un rétract de  $Y \times I$ . Réciproquement, s'il existe une rétraction  $\tau : Y \times I \longrightarrow (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$ , en composant avec  $\tau$ , toute application continue  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \uparrow & & \nearrow \\ Y \times I & & \end{array}$$

s'étend en une application continue sur  $Y \times I$  donnée par  $f \circ \tau$ . Or d'après la remarque précédente la donnée d'une application continue  $g$  et d'une homotopie  $H$  vérifiant les hypothèses de la définition est équivalente à la donnée d'une application continue  $f$  de  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  dans le cas  $A$  fermé. On peut donner une preuve dans le cas général, mais c'est nettement plus laborieux. On le fait dans le chapitre HOMOTOPIES.

Ainsi,

$(Y, X)$  a la PEH si et seulement si  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  est un rétract de  $Y \times I$ .

Le cas échéant, c'est même un rétract par déformation.

3. Schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\tilde{f}_0} & X \\ \uparrow p_0 & \nearrow \tilde{f} & \uparrow i \\ Y^I & \xleftarrow{f} & A. \end{array}$$

4. (*Passage au produit dans la PEH*) En exercice : si  $(Y, X)$  a la propriété d'extension des homotopies, alors  $(Y \times Z, X \times Z)$  aussi.

### Proposition

Si  $Y$  est séparé et  $(Y, X)$  a la peh, alors  $X$  est fermé dans  $Y$ .

▷  $Y$  est séparé si et seulement si  $\Delta_Y$  est fermée dans  $Y \times Y$ . On a une rétraction donnée par la figure ci-dessous. Soit  $F : Y \times I \longrightarrow (Y \times I) \times (Y \times I)$  qui  $x \mapsto (x, \tau(x))$ . On a  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) = F^{-1}(\Delta_{Y \times I})$  fermé.

$$Y \times I \xrightarrow[p]{} (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \xrightarrow{} Y \times I$$

En prenant l'intersection avec le fermé  $Y \times \{1\}$ , on obtient que  $X$  est fermé. ■

*Remarque.* Dans ce cas, une application  $f : (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z$  est continue ssi  $f|_{X \times I}$  et  $f|_{Y \times \{0\}}$  le sont.

### Proposition

$(B^n, S^{n-1})$  a la P.E.H.

▷ On a une rétraction par déformation  $\tau : \underbrace{B^n \times I}_{\text{gobelet plein}} \longrightarrow \underbrace{(S^{n-1} \times I) \cup (B^n \times \{0\})}_{\text{gobelet}}$  en utilisant la projection radiale. ■

### Exercice 7

$(B^n, \mathring{B}^n)$  a-t-il la P.E.H. ?

En faisant le quotient d'un espace par une partie, on identifie cette dernière à un point. Intuitivement, si cette partie est contractile, on obtiendrait un espace homotopiquement équivalent au précédent. C'est faux ! On a besoin de la propriété d'extension pour énoncer proprement cette propriété.

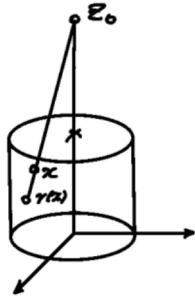


FIGURE 4.5.5 : La projection radiale du gobelet plein sur le gobelet. —

### Propriété

Si  $(Y,X)$  a la PEH et  $X$  est contractile, alors  $Y$  et  $Y/X$  sont homotopiquement équivalents.

▷ On montre que  $q : Y \rightarrow Y/X$  est une équivalence d'homotopie. Soit  $i : X \rightarrow Y$  et puisque  $X$  est contractile,  $H : X \times I \rightarrow X$  entre  $id_X$  et l'application constante  $c_{x_0}$ . On a donc  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $i$  et  $c_{x_0}$ . Par extension, il existe  $K : Y \times I \rightarrow Y$  qui satisfait en particulier  $K(x,1) = x_0$  pour tout  $x \in X$ . On pose  $g : y \mapsto K(y,1)$  de  $Y$  dans  $Y$ .  $g$  est constante sur  $X$  donc elle passe au quotient en  $\tilde{g} : Y/X \rightarrow Y$  et  $\tilde{g} \circ q = g$ . Donc  $\tilde{g} \circ q$  est homotope via  $K$  et  $id_Y$ . De plus, pour tous  $(x,t) \in X \times I$ , on a  $q \circ K(x,t) = q(x_0) \in Y/X$ . Ainsi par extension,  $Y \times I \rightarrow (Y/X \times I)$  et  $Y \times Y \rightarrow Y/X$  permet la factorisation  $\tilde{g} \circ K$  qui est une homotopie entre  $id_{Y/X}$  et  $q \circ \tilde{g}$ . ■

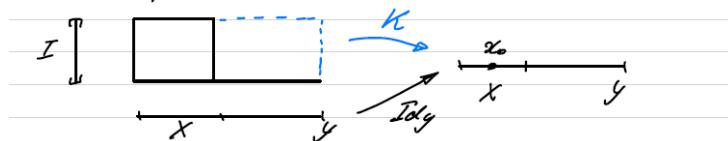


FIGURE 4.5.6 : Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne. —

### Propriété. (Transitivité de la PEH)

Si  $(Y,X)$  et  $(Z,Y)$  ont la PEH alors  $(Z,X)$  aussi.

### Lemme. (PEH d'un recollement)

Supposons que  $(B,A)$  a la PEH et  $f : A \rightarrow X$ . On pose  $Y = X \coprod_A B$ . Alors  $(Y,X)$  a la PEH.

▷ La donnée de  $H : B \times I \rightarrow Z$  donne  $H^\# : B \rightarrow C(I,Z)$  qui à  $b \mapsto (t \mapsto H(b,t))$ . Par la PEH,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\forall H^\#} & C(I, Z) \\ \downarrow & K^\# \nearrow & \downarrow ev_0 \\ B & \xrightarrow{\forall g} & Z \end{array}$$

tel que  $\forall H^\# \forall g : ev_0 \circ H^\# = g \circ i \exists K^\# \quad ev_0 K^\# = g$  et  $K^\# \circ i = H^\#$ . Alors :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{H^\#} & C(I, Z) \\ \downarrow i & & \downarrow j_X & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{j_B} & B \coprod_A X & \xrightarrow{L^\#} & Z \end{array}$$

car  $K$  a la PEH par  $(B, A)$ , et  $L^\#$  est obtenue par propriété universelle du quotient. Donc  $(B \coprod_A X, X)$  a la PEH. ■

### Conséquence. (*Propriété d'écrasement des CW-complexes*)

Si  $Y$  est obtenu à partir de  $X$  en attachant des cellules, et si  $X$  est contractile, alors  $Y/X \cong Y$ .

### Propriété. (*Homotopie des recollements par des homotopes*)

Soient  $A \subseteq B$  des espaces topologiques ; on suppose que  $(B, A)$  a la propriété d'extension des homotopies et que  $f, g : A \longrightarrow X$  sont homotopes. Alors il existe une équivalence d'homotopie

$$X \coprod_f B \cong X \coprod_g B.$$

▷ Soit  $H$  une homotopie de  $f$  vers  $g$ . Avec  $Z = (B \times I) \coprod_H X$ , on a

$$\begin{array}{ccc} X \coprod_f B & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & \swarrow & \\ X \coprod_g B & & \end{array}$$

On a une rétraction par déformation  $\tau : B \times I \longrightarrow B \times \{0\} \cup (A \times I)$  qui induit une rétraction par déformation,  $(B \times I) \coprod_H X \longrightarrow (B \times \{0\}) \cup (A \times I) \coprod_H X = B \coprod_f X$ . On a donc  $B \coprod_f X \cong Z \simeq B \coprod_g X$ . La propriété est démontrée. ■

## 4.6 Groupe fondamental

### 4.6.1 Le groupe fondamental

#### 4.6.1.1 Homotopie entre chemins, lacets et boucles

##### Définition. (*Homotopie entre chemins*)

Soit  $X$  une espace topologiques. Deux chemins (continus)  $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow X$  sont dit *homotopes* si

$$\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma',$$

autrement dit, s'il existe une homotopie de  $\gamma$  vers  $\gamma'$  qui fixe leurs extrémités.

En particulier, l'homotopie entre deux chemins n'a de sens que s'ils ont (déjà) les mêmes extrémités.

On note  $[\gamma]$  la classe d'homotopie d'un chemin.

Le premier dessin illustrant l'homotopie dans ce polycopié illustre en fait déjà ce cas.

##### Définition. (*Lacet, boucle*)

Soit  $X$  une espace topologiques et  $\gamma$  un chemin de  $X$ . On dit que  $\gamma$  est un *lacet* ou une *boucle* si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

Attention ! On peut imaginer une homotopie entre deux lacets fixant les extrémités de ces deux là, mais ne fixant par celles des lacets intermédiaires. Cette notion ne nous intéressera pas.

#### Exercice 8 (*Les lacets sont les applications continues $S^1 \rightarrow X$* )

Montrer qu'un lacet en  $x_0$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'une application continue pointée de  $S^1 \rightarrow (X, x_0)$ .

##### ▷ Éléments de réponse.

Soit  $f : [0,1] \rightarrow X$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ . Par propriété universelle de la somme topologique écrasée, on en déduit une application continue  $f : [0,1]/\{0,1\} \simeq S^1 \rightarrow X$  où  $\simeq$  est l'homéomorphie. En pointant  $S^1$  par  $\bar{1} = \bar{0}$ ,  $f$  est pointée de  $(S^1, \bar{0}) \rightarrow (X, x_0)$ . Réciproquement, si  $f : (S^1, t_0) \rightarrow (X, x_0)$  est pointée, en composant par une paramétrisation exponentielle de  $S^1$  autour de  $t_0$  bien choisie, disons  $t \mapsto t_0 e^{2\pi i t}$ , on obtient une application continue de  $[0,1]$  dans  $X$  telle que  $f(0) = f(1) = x_0$ .

#### 4.6.1.2 Bagage théorique pour la construction du GF

Faire des dessins !

**Définition. (*Inverse d'un chemin, opposé d'un chemin*)**

Soit  $X$  une espace topologiques et  $\alpha$  un chemin dans  $X$ . On note  $\bar{\alpha} : t \mapsto \alpha(-t)$  qui est un chemin de  $\alpha(1) \rightarrow \alpha(0)$ .

**Définition. (*Chemin constant*)**

Soit  $X$  une espace topologique. On note  $c_\star : t \mapsto \star$  un chemin constant en  $\star \in X$ .

**Définition. (*Composition des chemins*)**

Si  $\beta$  est une chemin avec  $\beta(0) = \alpha(1)$ , on note  $(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2(t - \frac{1}{2})) & \text{sinon.} \end{cases}$  On pose

$[\alpha] \star [\beta] = [\alpha \star \beta]$  s'il existe bien défini, où  $[\cdot]$  est la classe d'homotopie d'un chemin (qui est clairement une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins continus dans  $X$ ).

Cette formule n'est pas canonique, mais c'est la plus simple que l'on puisse trouver dans le commerce.

Le lemme suivant assure en particulier la bonne définition de la composition. Elle montre que les classes d'homotopie de chemins ne dépendent pas de leur paramétrage, ce qui est très puissant.

**Lemme**

Soit  $\varphi : I \longrightarrow I$  telle que  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = 1$ , alors  $\varphi$  est homotope à  $id_I$  relativement à  $\{0,1\}$ .

▷ Prenons  $H : I \times I \longrightarrow X$  qui à  $(t,s) \longmapsto st + (1-s)\varphi(t)$ . ■

*Remarque.* Si  $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$  est un chemin  $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$ , on dit que  $\gamma \circ \varphi$  est un *reparamétrage de  $\gamma$  par précomposition*.



La composition des chemins n'est pas associative par raison de reparamétrisation ; intuitivement, on a bien le même dessin, mais on ne parcourt pas les mêmes sections à la même vitesse, ce qui fait que, rigoureusement, les fonctions ne sont pas les mêmes.

**Lemme**

Avec les notations précédentes,  $([\alpha] \star [\beta]) \star [\gamma] = [\alpha] \star ([\beta] \star [\gamma])$ .

▷ On obtient  $(\alpha \star \beta) \star \gamma$  à partir de  $\alpha \star (\beta \star \gamma)$  par reparamétrage. ■

**Lemme**

$[\alpha] \circ [\bar{\alpha}] = [c_{x_0}]$  avec  $x_0 = \alpha(0)$  et  $c_{x_0}$  l'application constante en  $x_0$ .

**4.6.1.3 Définition du groupe fondamental et du groupoïde fondamental****Définition. (*Groupoïde*)**

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

**Définition. (*Automorphismes*)**

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $x \in \mathcal{C}$ . On note  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$  l'ensemble des isomorphismes de  $x \rightarrow x$ . Alors en particulier, dans un groupoïde,  $\text{Hom}(x,x) = \text{Aut}(x,x)$  pour tout  $x \in X$  (condition non suffisante bien sûr pour avoir un groupoïde).

**Exemple fondamental. (*Groupoïde d'un groupe*)**

Si  $G$  est un groupe, on définit une catégorie  $C_G$  telle que  $\text{Ob}(C_G) = \{\star\}$  et  $\text{Hom}(\star, \star) = G$  est un groupoïde.

**Définition. (*Groupoïde fondamental*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* d'un espace  $X$ , est un groupoïde  $\Pi(X)$  dont les objets sont les éléments de  $X$   $\text{Ob}(\Pi(X)) = X$ , les morphismes entre deux points  $\text{Hom}(x,y)$  sont les classes d'homotopie des chemins de  $x$  vers  $y$  basés aux extrémités, la composition est  $\star$  comme définie dans la section précédente et l'identité d'un point  $x$  est  $\text{id}_x = [c_x]$ .

**Définition. (*Groupe fondamental*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie* basé en  $x_0 \in X$  dit *point base* de  $X$ , noté  $\pi_1(X, x_0)$ , est  $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x_0) = \text{Aut}_{\Pi(X)}(x_0)$  (puisque c'est un groupoïde).

Autrement dit, c'est l'ensemble, qui forme un groupe, des classes d'homotopie (de chemins) de lacets autour de  $x_0$ .



Ainsi on définit le groupe fondamental à travers les classes d'homotopie basées aux extrémités. On parle alors d'*homotopie libre* pour ce que nous appelons homotopie simplement. Certains auteurs peu scrupuleux oublient de fixer les lacets intermédiaires  $H(x,1) = x_0 = H(x,1) \quad \forall x$ , mais c'est mal : dans ce cas, tout espace connexe par arcs aurait un groupe fondamental trivial.

*Remarque.* Si  $x, y \in C$ ,  $f$  un isomorphisme de  $x \rightarrow y$ , alors il existe un isomorphisme de groupe  $\text{Aut}(x) \simeq \text{Aut}(y)$ ,  $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ . Dans  $\mathcal{C} = \Pi(X)$ , un isomorphisme de  $x$  vers  $y$  n'est

autre un chemin de  $x$  vers  $y$  puisqu'il est clair que tout chemin est inversible pour la loi de composition définie dans la section précédente. On en déduit le fait suivant.

**Fait. (*Groupe fondamental et composantes connexes par arcs*)**

$x$  et  $y$  sont isomorphes dans  $\Pi(X)$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont dans la même composante par arcs.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \Pi_1(X,x) &\simeq \Pi_1(X,y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}], \end{aligned}$$

ceci n'étant pas canonique (car dépend de la conjugaison, c'est-à-dire du chemin  $\gamma : x \longrightarrow y$ ).

→ *Notation.* Si  $X$  est connexe par arcs et non vide, si  $x_0 \in X$ , on peut donc noter  $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ .

Parfois, les cours introduisent seulement le groupe fondamental et montre qu'il ne dépend pas du point base sur une même composante par arcs, à isomorphisme près. C'est dommage, car le groupoïde fondamental est plus canonique, ne dépendant que de l'espace  $X$  absolument, et a toutes les informations puisque cette catégorie contient toutes les informations des catégories des groupes de Poincaré dans ses morphismes.

Par exemple, on ne devrait pas dire que le groupe fondamental du cercle (voir ci-dessous) est  $\mathbb{Z}$ . On devrait dire que le groupe fondamental du cercle, basé en 0, est  $\mathbb{Z}$ , mais c'est un peu redondant, car ils sont tous isomorphes (et encore plus canoniquement puisque dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , la conjugaison n'agit pas par abélianité).

**Exemples. (*Groupes fondamentaux*)**

1. On pose  $X = \mathbb{S}^1$ . On prend la base  $x_0 = 0$ . On montrera plus tard l'isomorphisme

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \Pi_1(S^1, 0).$$

$$k \longmapsto [t \mapsto e^{2ik\pi t}]$$

Intuitivement, le groupe fondamental détecte (en ce qu'il est non trivial) la non-trivialité des topologies : ici, la non-contractilité : on peut tourner avec un lacet autour du trou.

**À propos. (*Interprétation du groupe fondamental*)**

- ★ Le groupe fondamental est nul si l'espace est sans trous.
- ★ Le groupe fondamental a de la torsion (en particulier fini) s'il existe une zone que

l'on peut parcourir un certain nombre de fois dans un seul sens... de sorte que l'on retombe au point de départ.

- ★ Lorsque le groupe fondamental est indénombrable, il y a des chances pour qu'il y ait de la totale discontinuité.
- ★ Le groupe fondamental est abélien... c'est plus difficile à voir.

#### 4.6.1.4 Comportement du GF vis-à-vis des applications continues

**Définition-propriété.** (*Application induite sur les groupes fondamentaux*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $x_0 \in X$  et  $\varphi(x_0) = y_0$ , on définit une *application induite (par postcomposition)* sur les groupes fondamentaux par  $\varphi_*(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

$$[\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma]$$

On note parfois  $\varphi_*(f) = \pi_1(f)$ .

On en déduit également une application induite sur les groupoïdes fondamentaux.

▷ Il est clair que l'opération de postcomposition transforme un lacet en un lacet. Pour montrer qu'elle envoie deux lacets homotopes sur deux lacets homotopes, rien de bien compliqué non plus. ■

**Fait.** (*Fonctorialité du groupe fondamental*)

$$\pi_1(id_X) = id_{\pi_1(x)} \text{ et } (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

Si  $f$  est injective, respectivement surjective, respectivement bijective, l'application induite n'est pas nécessairement injective, respectivement surjective, respectivement bijective.



Cependant, on verra que si  $A$  est un rétract de  $X$  et  $a \in A$  l'application induite  $\pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  est injective.

→ *Notation.* Si  $X$  est connexe par arcs, on s'autorise à noter  $\pi(X) = \pi(X, x)$  pour tout  $x \in X$ .

**Lemme**

Soient  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  deux applications homotopes entre deux espaces topologiques. Pour tout  $x \in X$ , il existe un isomorphisme de groupes  $\chi : \pi_1(Y, \varphi(x)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \psi(x))$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, \varphi(x)) & \xrightarrow{\chi} & \pi_1(Y, \psi(x)) \\ \varphi_* \swarrow & & \searrow \psi_* \\ \pi_1(X, x). & & \end{array}$$

En particulier, si  $\varphi \equiv_{\{x\}}$ , alors  $\varphi_* = \psi_*$ .

**Propriété. (*Groupes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents*)**

Si  $f$  est une équivalence d'homotopie entre deux espaces topologiques,  $f_*$  est un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux basés respectivement en n'importe quel point et son image par  $f$ .

▷ Plus tard. ■

**Corollaire. (*Groupe fondamental d'un espace contractile*)**

Un espace topologique est contractile si et seulement s'il est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial.

**Exemples. (*Groupes fondamentaux*)**

1.  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ .
2.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{star}\} \cong S^{n-1}$ . En particulier  $\mathbb{S}^n \setminus \{\star, *\} \cong S^{n-1}$ , car  $\mathbb{S}^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$  (homéomorphisme fort!).

**4.6.1.5 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique**

Dans une optique toute moderne, les catégories peuvent être vues en toute généralité comme des espaces topologiques dont les objets sont des points. Ainsi, les morphismes sont les classes des chemins. Nous voulons généraliser cette analogie en définissant dans la théorie des catégories, la notion d'application continue et d'homotopie.

**Définition. (*Foncteur*)**

Soit  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  des catégories. Un **foncteur**  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  est une chose qui à tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , associe un objet  $F(x) \in \mathcal{D}$ , et à tout morphisme  $f : x \rightarrow y$ , associe un morphisme  $F(f) : F(x) \rightarrow F(y)$ . On impose également que pour tous morphismes  $f, g$ ,  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ .

et  $\forall x \in \mathcal{C}, F(id_X) = id_{F(x)}$ . Rappelons que dans notre cas des petites catégories, toutes ces choses sont des applications.

On peut également définir la composition entre foncteurs pour  $F : C \rightarrow D$  et  $G : D \rightarrow E$ , on définit  $GF$  de façon évidente. De plus pour toute catégorie  $C$ , il existe un foncteur identité  $id_C$  qui ne touche à rien. Ainsi, un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible<sup>a</sup>.

Les foncteurs sont l'analogue des applications continues dans l'analogie ci-haut.

---

<sup>a</sup> Ainsi dans le cas petit deux catégories isomorphes induisent par oubli une bijection  $\text{Ob}(C) \simeq \text{Ob}(D)$ . De même que l'homéomorphie ce n'est pas une bonne définition...

On a pour tout  $(x,y) \in \mathcal{C}$ , une application de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x),F(y))$ . En particulier,  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}}(F(x))$  est un morphisme de groupes.

### Remarques.

1. On considérera particulièrement le foncteur d'oubli  $\text{Top} \longrightarrow \text{Ens}$ . On considérera également le foncteur de Top dans  $\text{Top}_h$  qui à  $x \mapsto x$  et à  $f \mapsto [f]$ .
2. Le groupe fondamental est un foncteur partant de la catégorie des espaces topologiques pointés :  $\text{Top}^* \longrightarrow \text{Grp}$ .
3. (*Hors-programme*) Le groupoïde fondamental  $\Pi(\cdot) : \text{Top} \longrightarrow \text{Groupoid}$  (où, attention, les objets sont des catégories). Ainsi si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application continue,  $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$  est un foncteur défini par  $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$  définie par  $(x \rightarrow y) \mapsto f(x) \xrightarrow{[f \circ \gamma]} f(y)$ . En particulier,  $\Pi_1(X, x_0) = \text{Aut}_{\Pi(X)}(x_0) \longrightarrow \text{Aut}_{\Pi(Y)}(f(x)) = \Pi_1(Y, f(x_0))$ .

### Définition. (*Produit de catégories*)

Le produit  $C \times D$  de deux catégories, est défini par  $\text{Ob}(C \times D) = \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$  et  $\text{Hom}((x,x'),(y,y')) = \text{Hom}(x,y) \times \text{Hom}(x',y')$ .

### Lemme. (*Groupoïde fondamental du produit*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors :

$$\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y).$$

Comme dans beaucoup d'autres cas, l'isomorphisme proposé est tellement tautologique qu'en pratique, on écrit souvent l'égalité.

**Lemme.** (*Groupoïde fondamental de deux espaces homéomorphes*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes par  $f$ . Alors  $\Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  est un isomorphisme de groupes.

**Définition.** (*Transformation naturelle*)

Soient  $F, G : C \rightarrow D$  deux foncteurs. Une transformation naturelle  $\eta : F \rightarrow G$  est telle que pour tout  $x \in C$ , on ait un morphisme dans  $D$ ,  $\eta_x : F(x) \rightarrow G(x)$  tel que  $\forall f : x \rightarrow y (\in \text{Hom}_C(x,y))$ ,

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(f)} & G(y) \end{array}$$

Si  $C, D$  sont petites, alors il existe une catégorie  $\text{Fun}(C, D)$  dont les objets sont les foncteurs  $C \rightarrow D$ , et les morphismes sont les transformations. De même qu'avec les foncteurs, on peut parler d'isomorphismes naturels, etc.

Les transformations naturelles sont l'analogue des homotopies continues dans l'analogie ci-haut.

**Propriété**

Une transformation naturelle  $\eta : F \rightarrow G$  est inversible si et seulement si pour tout  $x \in C$ ,  $\eta_x \in \text{Hom}(F(x), G(x))$  est un isomorphisme.

**Heuristique**

En introduisant la théories des catégories, EILENBERG et MACLANE poursuivaient des questions de topologie algébrique. On se rappelle d'ailleurs qu'ils leur tenait à cœur de définir la notion de naturalité. Voyons comment elle apparaît naturellement en théorie de l'homotopie.

En topologie algébrique, on associe à un espace topologique un invariant algébrique. On dispose donc d'un foncteur (ici on a rencontré  $\pi_0, \pi_1, \Pi_1$ , et il y en a d'autres : les  $\pi_n$  et  $\Pi_n$ , les groupes d'homologie  $H_n$ , de cohomologie de de Rham  $H^n$ , etc.). Ce qui nous intéresse est en fait de comparer les invariants. On a donc des transformations naturelles entre foncteurs, par exemple

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{F(f)} & \pi_1(Y) \\ \eta_X \uparrow & & \uparrow \eta_Y \\ H_1(X) & \xrightarrow{G(f)} & H_1(Y) \end{array}$$

compare le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie. (On verra plus tard que  $\eta$  est ici l'abélianisation !)

### Théorème

Soit  $f, g : X \rightarrow Y$  continues et soit  $H : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $f$  et  $g$ . Pour tout  $x \in X$ , on note  $\eta_x$  le chemin de  $f(x)$  vers  $g(x)$ , défini par  $t \mapsto H(x, t)$ . Alors  $\eta$  est un isomorphisme naturel de  $\Pi(f)$  vers  $\Pi(g)$ .

▷ Soit  $\gamma$  un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $X$ . On veut montrer que<sup>1</sup>

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(\gamma)} & f(y) \\ \downarrow \eta_x & & \downarrow \eta_y \\ g(x) & \xrightarrow{g(\gamma)} & g(y) \end{array}$$

commute (homotopie d'applications et non relative/de chemins, qui ne préservent pas les extrémités). Voir le dessin. Les chemins  $f(\gamma) \times \eta_y$  et  $\eta_x \times g(\gamma)$  sont homotopes par  $I \times I \rightarrow Y$  qui à  $(s, t) \mapsto H(\gamma(s), t)$  (puisque l'isomorphie naturelle est donnée par les coordonnées). Remarque : on a dit, grâce à  $\eta$  qui recolle les bouts, que  $f(\gamma)$  et  $g(\gamma)$  sont homotopes en partant de ce que  $f$  et  $g$  sont homotopes. ■

Cette équivalence entre diagrammes et schémas d'homotopie est fondamentale.

### Définition. (*Équivalence de catégories*)

Soient  $C, D$  de catégories. Une équivalence de catégorie est un foncteur  $F : C \rightarrow D$  s'il existe  $G : D \rightarrow C$  tel que  $FG \simeq id_D$  et  $DG \simeq id_C$  par des isomorphismes naturels.

On dit que  $G$  est un quasi-inverse. Le quasi-inverse, de même que l'homotopie est unique à homotopie près mais pas à unique homotopie près (il est donc essentiellement unique, mais pas canonique). Plus précisément, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; et même le quasi-inverse fixé, l'homotopie de la composition à l'identité n'est pas unique.

La proposition suivante est une conséquence de la propriété rappelée en dessous dont on incite les étudiants à refaire la preuve catégorique.

### Corollaire. (*Fonctorialité du groupe fondamental*)

Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $\Pi(f)$  est une équivalence  $\Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  ; autrement dit, le groupoïde fondamental est aussi fonctoriel.

<sup>1</sup> Ce diagramme est en fait tout à fait visuel ! On peut le voir comme pris dans un l'espace  $Y$ , « l'image par la transformation naturelle (globale) » du chemin  $\gamma$  entre  $x$  et  $y$  vu dans l'espace  $X$ . Dans le carré qu'il forme, parallèlement aux lignes verticales, on dispose d'une infinité de chemins continus.

Car : si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie,  $\Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_2(Y, f(x_0))$  est un isomorphisme.

▷ Par le théorème, si  $H$  est une homotopie entre  $f \circ g$  et  $id_Y$ ,  $g : Y \rightarrow Y$ , par le théorème,  $H : \text{Fun}(\Pi(Y), \Pi(Y)) \ni \Pi(f \circ g) \simeq \Pi(id_Y) \in \text{Fun}(\Pi(Y), \Pi(Y))$  par  $H$ , donc  $\Pi(f) \circ \Pi(g) \simeq id_{\Pi(Y)}$ . Donc  $\Pi(f)$  est une équivalence, car elle est pleinement fidèle et  $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) \simeq \text{Hom}_{\Pi(Y)}(f(x_0), f(x_0))$ . ■

### Théorème

Un foncteur  $F : C \rightarrow D$  est une équivalence ssi  $F$  est pleinement fidèle :  $\forall x, y \in C \quad \text{Hom}_C(x, y) \xrightarrow{f} \text{Hom}_D(F(x), F(y))$  est bijectif; et essentiellement surjectif :  $\forall y \in D \exists c \in C \quad F(c) \simeq y$ .

Tout ce dictionnaire entre catégories et topologie permet de coder des relations plus riches entre espace, l'équivalence (d'homotopie), et notamment le groupe fondamental capture ces notions sur le type d'homotopie, et d'après le corollaire, il suffit que des groupes fondamentaux soient équivalents pour qu'ils soient isomorphes, au sens suivant : **si deux espaces connexes par arcs sont homotiquement équivalents, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.** En particulier, on a déjà un critère : si deux groupes fondamentaux d'espaces ne sont pas isomorphes, alors les espaces ne sont pas homotiquement équivalents.

### Définition. (*Sous-catégorie pleine*)

Soit  $C$  une (petite) catégorie, et  $S \subseteq \text{Ob}(C)$ . La *sous-catégorie pleine*  $C_S$  de  $X$  est telle que  $\text{Ob}(C_S) = S$  et pour tous  $x, y \in S$ ,  $\text{Hom}(x, y) = \text{Hom}_C(x, y)$ .

*Remarque.* Il y a une foncteur évident  $C_S \rightarrow C$  qui est pleinement fidèle.

Par exemple, si  $A \subseteq X$  un espace topologique, on pose  $\Pi(X, A)$  la sous-catégorie pleine  $\Pi(X)_A$ . En particulier, si l'on prend  $A$  un point, on retombe sur le groupe fondamental, et c'est cool.

### Propriété

Si  $A$  est un rétract de  $X$ , alors  $\Pi_1(A, a_0) \rightarrow \Pi_1(X, a_0)$  est injectif.

Si  $A$  est un rétract par déformation, il est de plus un isomorphisme.

### Exemple

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1) = \mathbb{Z}.$$

### Exemple. (*Tore vide et tore plein*)

$\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ , mais le groupe fondamental du tore plein est  $\mathbb{Z}$ , car  $S^1 \cong$  à cet espace !

Cette propriété n'a rien de vrai si  $A$  n'est pas un rétract mais si l'on a seulement une injection (même canonique). En effet,  $S^1$  se plonge dans  $\mathbb{Z}$  mais le groupe fondamental du cercle ne se plonge pas dans celui de  $\mathbb{C}$ , qui est trivial !

▷ Si  $\tau : X \longrightarrow A$  est un retract de  $i : A \longrightarrow X$ , alors  $\tau \circ i = id_A$ . Donc  $\Pi(\tau \circ i) = id_{\Pi_A}$ . Dans le cas du retract par déformation, on a une équivalence d'homotopie par la propriété précédente. ■

Le fait que deux espaces aient groupe d'homotopie isomorphes, ne garantit pas l'équivalence d'homotopie. Il faut d'abord trouver une application entre les deux qui induit ces isomorphismes, et alors, c'est automatiquement une équivalence.

#### Corollaire. (*Groupoïdes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents*)

Soient  $X, Y$  du même type d'homotopie. Alors  $\Pi(X), \Pi(Y)$  sont des catégories équivalentes.

##### 4.6.1.6 Lien avec la connexité simple

#### Reformulation pratique. (*Connexité simple*)

On dit qu'un espace topologique  $X$  est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si  $\Pi_1(X, x_0)$  est trivial pour tout  $x_0 \in I$ .

Une remarque pas très intéressante :

#### Propriété. (*Contractile $\implies$ simplement connexe*)

Si  $X$  est contractile, alors  $X$  est simplement connexe.

#### Contre-exemple. (*Espace simplement connexe non contractile*)

La sphère  $S^2$  convient. □

#### Contractilité et groupe fondamental

On peut définir  $\Pi_2$  comme le groupe des classes d'homotopie d'un chemin dans lui-même. De proche en proche, on peut définir les groupes d'homotopie supérieurs (qui, d'ailleurs, sont abéliens). Alors si  $X$  est contractile, tous les  $\Pi_n$  sont triviaux. La réciproque est vraie pour les CW-complexes selon un théorème de WHITEHEAD mais fausse en général, ce que montre par exemple le cercle polonais.

Être contractile, en topologie algébrique, revient à être trivial, alors qu'il y a toute une littérature sur les espaces simplement connexes, qui peuvent être très intéressants. Ces deux notions n'ont donc pas grand-chose à voir.

En général, les groupes fondamentaux non triviaux, même d'espaces simplement connexes, ne se calculent pas comme ça. On va devoir introduire le concept suivant pour espérer décrire des groupes fondamentaux simples.

#### 4.6.1.6.1 Espace localement simplement connexe

#### 4.6.1.7 Théorème du cône

Tout cône est simplement connexe, car contractile. Affinons.

##### Définition. (*Conifié d'une paire topologique*)

Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On note

$$X \cup CA = (X \coprod C(A)) / \sim$$

où  $C(A)$  est le cône de  $A$ ,  $\sim$  est l'équivalence identifiant tout point  $a \in A \subseteq X$  avec le point  $(a, 0) \in C(A)$ . Ce n'est autre que le cône de l'application  $A \hookrightarrow X$  défini en théorie de l'homotopie.

On note  $CA$  l'image de  $C(A)$  dans  $X \cup CA$ .

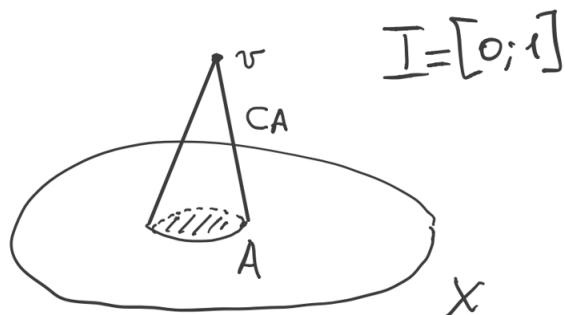


FIGURE 4.6.1 : *Conification d'une partie d'un espace.. —*

##### Théorème. (*Théorème du cône*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $A$  une partie de  $X$  connexe par arcs, non nécessairement une composante connexe par arcs. On note  $i : A \hookrightarrow X$  canonique et  $i_*$  le morphisme  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$  induit. Alors  $\pi_1(X \coprod CA) = \pi_1(X) / \langle\langle i_* \rangle\rangle$ .

## 4.6.2 Groupes d'homotopie supérieurs

**Définition.** (*Équivalence faible d'homotopie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  deux espaces topologiques et une application pointée  $f(x) = y$ . On dit que  $f$  est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes induits  $f_n : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$  sont des isomorphismes.

**Fait.** (*Équivalence d'homotopie  $\Rightarrow$  équivalence faible d'homotopie*)

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

## 4.7 Théorie élémentaire des revêtements

### 4.7.1 Notion générale issue de la géométrie différentielle : fibrations, fibrés vectoriels

#### 4.7.1.1 Fibrations, revêtements différentiels, fibrés (vectoriels)

À mi-chemin du faisceau (topologie ensembliste) et du revêtement (topologie algébrique), la géométrie différentielle a la fibration.

**Définition.** (*Fibration, base d'une fibration, espace total et fibre type*)

Soient  $E, B, F$  des variétés différentielles de classe  $C^p$ .  $E$  et  $F$  peuvent être seulement espaces topologiques, en adaptant les hypothèses ci-dessous. Une *fibration (localement triviale)* ou *fibré* ou *espace fibré* de *base/sur*  $B$ , *espace total*  $E$  et *fibre de type*  $F$  est la donnée d'un morphisme surjectif parfois dit *de projection*  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^p$  tel que pour tout  $b \in B$ , il existe un ouvert  $U = U_b \ni b$ , parfois dit *trivialisant*, tel qu'il y a un  $C^p$ -difféomorphisme  $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F, \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ U & & \end{array}$$

soit  $pr_1 \circ \phi = p$ , autrement dit,  $p$  coïncide avec la première coordonnée de  $\phi$ . On dit donc aussi que  $p$  est une application *localement triviale*, au sens que  $F$  est localement un produit. On note  $p : E \xrightarrow{F} B$  ou encore  $F \hookrightarrow E \longrightarrow B$ , notation purement formelle. Remarquons que  $p$  est une application ouverte.

**Exemple.** (*Toy-model des fibrés*)

Le ruban de Möbius  $E = \frac{I \times [-1,1]}{(0,x) \sim (1,-x)} \xrightarrow{p} S^1$ .

**Remarques.**

1. Pour tout  $b \in B$ , la fibre  $F_b := p^{-1}(b)$  (qui parfois partage son nom, avec malheur, avec la fibre type) est difféomorphe à  $F$ . En effet, immédiatement,  $\phi|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \simeq \{b\} \times F \simeq F$  (par un difféomorphisme).
2. Autrement dit, pour tout  $e \in E$ ,  $p(e) = pr_1(\phi(e))$  et  $e \in p^{-1}(b) \iff \phi(e) \in pr_1^{-1}(b) \simeq F$ .
3. Remarquons que l'on peut parfois définir la fibration avec une fibre type variant selon l'ouvert trivialisant. Dans ce cas, la remarque précédente vaut (avec  $F = F(b)$ ), et l'on a :  $F(b) \simeq F(b')$  au sens des difféomorphismes (**et, en topologie, au sens de l'équivalence d'homotopie**) dès que  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ . En effet, le type d'homéomorphisme, et en particulier le cardinal, des fibres est localement constant sur la base.
4. L'application  $p$  est toujours une submersion. En effet, le fait d'être une submersion est une propriété locale, disons en  $x$ ; restreignons  $p$  au-dessus d'un ouvert trivialisant contenant  $b = p(x)$ . Or, en notant  $\psi(x) = (b, u)$ , le foncteur tangent transforme le diagramme définitionnel en :

$$\begin{array}{ccc} T_x p^{-1}(U) & \xrightarrow{T_x \psi} & T_b U \times T_u F \\ T_x p \downarrow & & \nearrow T_{(b,u)} pr_1 \\ T_b U & & \end{array}$$

dont  $T_x p$  est surjective.

5. (*Les revêtements sont les fibrations à fibres discrètes.*) En effet, soit  $\pi : E \longrightarrow B$  un revêtement. Pour tout  $b \in B$ ,  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \pi^{-1}(b)} V_\alpha$  tel que  $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \simeq U_b$  et donc  $\pi^{-1}(b) = F$  a la topologie discrète. Ainsi  $\phi : \pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  par  $x \in V_\alpha \mapsto (\pi|_{V_\alpha}, \alpha)$ . Réciproquement, si l'on a  $E \longrightarrow B \supseteq U_b \ni b$  et  $\pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$  via  $\phi$ ,  $F$  discret, on peut supposer  $U_b$  connexe par la connexité locale des variétés topologiques. Ainsi  $\pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  par  $\phi$  de sorte que  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{f \in F} \pi^{-1}(U_b \times \{f\})$  et  $\pi|_{\pi^{-1}(U_b \times \{f\})} : \pi^{-1}(U_b \times \{f\}) \simeq U_b$ .

Autrement dit, un revêtement (avec fibre constante) est un fibré de fibre discrète.

6. Parfois, on impose que  $B$  soit paracompacte.

### Définition. (*Morphisme de fibrations*)

Soient  $(E, B, F)$  et  $(E', B, F')$  des fibrations de base  $B$ . Un *morphisme de fibrations* (de base  $B$ ) est une application  $C^p$  :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

telle que  $p' \circ f = p$ . Ainsi, pour tout  $b \in B$ ,  $f$  envoie  $p^{-1}(b)$  dans  $p'^{-1}(b)$ .

Si de plus  $f$  est un difféomorphisme,  $f^{-1}$  est aussi un morphisme et l'on dit que  $f$  est un *isomorphisme de fibrations*.

### Exemples. (*Fibrations*)

1. (*Fibration triviale*) Soient  $B, F$  deux variétés et  $E = B \times F$ . Alors pour  $p = pr_1 : E \rightarrow B$ , pour tout  $b \in B$ ,  $pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$ .

**Par définition, une fibration quelconque est localement isomorphe à une fibration triviale.**

La fibration du ruban de Möbius par le cercle est le premier exemple de fibration non triviale.

2. L'application  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est une fibration de fibre de type  $\mathbb{R}^\times$ . En effet, on a introduit les ouverts  $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  avec les  $U_i = p(V_i)$  formant un atlas.

$$\begin{array}{ccc} V_i = p^{-1}(U_i) : (v_1, \dots, v_{n+1}) = \underline{v} & \xrightarrow{\phi} & U_i \times \mathbb{R}^k : (p(\underline{v}), v_i) \\ & \searrow & \swarrow \\ & U_i : [(v_1, \dots, v_{n+1})] = [(\frac{v_1}{v_i}, \dots, 1, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_i})] & \end{array}$$

3. L'application  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  qui à  $t \mapsto e^{it}$  est une fibration de type  $2\pi\mathbb{Z}$ . On constate l'analogie avec la théorie des revêtements topologiques (*que nous explorerons ci-après*).

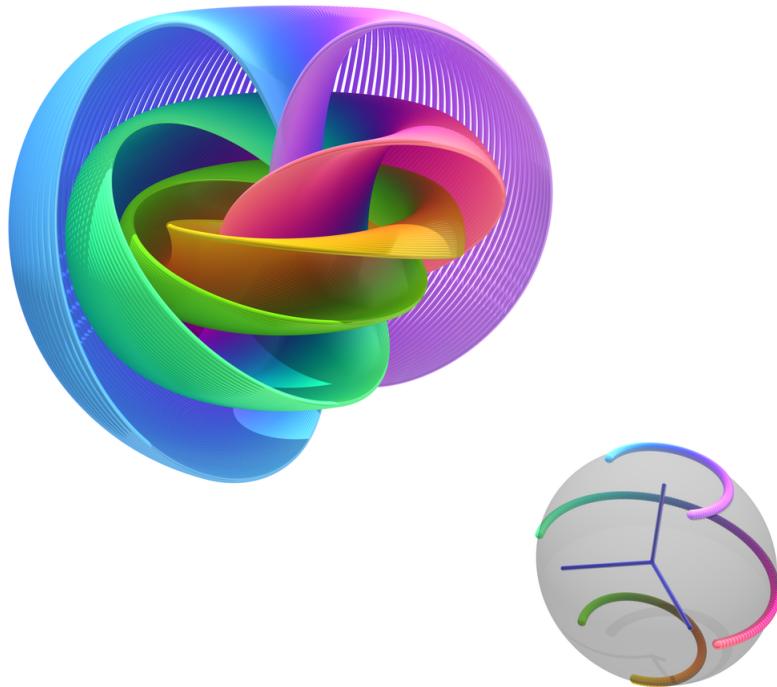
4.  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$  est une fibration.

Le revêtement = fibration à fibre discrète  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^d \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{R}$  admet un analogue complexe qui n'est plus un revêtement mais un fibré.

### Proposition. (*Fibration de Hopf complexe*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  est un fibré.

▷ On exhibe l'application où  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}$ , définie par  $(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \mapsto [x_0 + iy_0 : \dots : x_n + iy_n]$ . ■

FIGURE 4.7.1 : *Fibration de Hopf classique.* —

*Remarque.* Dans le cas  $n = 1$ , c'est la fibration de Hopf classique, qui s'écrit :

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2.$$

#### 4.7.1.2 Revêtement différentiel

On introduit la notion de revêtement en topologie différentielle. Elle est semblable à celle de la topologie.

##### Définition. (*Revêtement différentiel*)

Soient  $E, B$  des variétés de classe  $C^p$ . Soit  $p : E \rightarrow B$  une application surjective et de classe  $C^p$ . On dit que  $(E, B, p)$  est un revêtement si pour tout  $b \in B$ , il y a un ouvert *trivialisant*  $U \ni b$  tel que la fibre  $p^{-1}(U)$  est une réunion d'ouverts  $V_i, i \in I$ , les *feuilles*, deux à deux disjoints, et *bien revêtus*, soit tels que  $p_{V_i} : V_i \rightarrow U$  est un  $C^p$ -difféomorphisme. En particulier,  $p$  est ouverte.

*Remarque.* Un revêtement est toujours un difféomorphisme local. La réciproque est fausse. Par contre, un difféomorphisme global est un revêtement, à un seul feuillet.

**Exemples. (*Revêtements différentiels*)**

1. (*Revêtement trivial*) Soit  $B$  un variété et  $F$  un ensemble discret. Soit  $pr_1 : B \times F \longrightarrow B$ . Localement, on est dans cette situation avec  $F = I$  :

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\simeq U \times I \\ V_i &\longmapsto U \times \{i\} \\ x &\longmapsto (p(x), i). \end{aligned}$$

2. Pour  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$  est un revêtement différentiel à  $n$  feuillets.
3. La projection canonique  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  fournit un revêtement à deux feuillets pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme on va le voir.
4. De même, la projection canonique  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par  $\mathbb{Z}^2$ . Plus généralement, la projection canonique  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par  $\mathbb{Z}^n$ .
5. Si  $K$  est la bouteille de Klein, on a un revêtement  $\mathbb{T}^2 \rightarrow K$  à deux feuillets.
6. On en déduit un revêtement  $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$  à fibre dénombrable.
7. L'application  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2i\pi t}$  est un revêtement à fibres dénombrables.
8. L'application exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto e^z$  définit un revêtement holomorphe. Chaque fibre ici est infinie dénombrable :  $\pi^{-1}(p(x)) = x + 2i\pi\mathbb{Z}$ .

On rappelle :

**Théorème. (*Revêtement par une action proprement libre*)**

Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact  $M$ . Alors  $p : M \longrightarrow M/G$  est un revêtement (topologique).

**Exemples. (*D'autres revêtements différentiels*)**

1. Pour  $M = S^n$  et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agissant par  $x \mapsto -x$ , donc librement. Alors  $M/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Alors  $S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un revêtement (*à deux feuillets*) de classe  $C^\infty$ .

**4.7.1.3 Fibrés vectoriels**

On renvoie à la section finale du chapitre ouvrant sur la GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.

### 4.7.2 Définitions fondamentales sur les revêtements

La théorie des revêtements est véritablement une théorie de Galois pour les espaces topologiques : il existe comme un dictionnaire entre les sous-groupes du groupe fondamental et les *revêtements* de l'espace topologique.

#### Définition. (*Revêtement général*)

Soit  $X$  un espace topologique. Un revêtement de  $X$  (par  $Y$ ) est une application continue  $P : Y \rightarrow X$  qui est localement triviale. Autrement dit, pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $P^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  où les  $U_i$ ,  $i \in I$  ensemble, sont ouverts, dits *feuilles*, et  $P|_{U_i}$  est un homéomorphisme sur  $U_i$ . On dit alors que  $U$  est un *ouvert trivialisant* (de  $x$ ), et que les  $U_i$  sont bien revêtus.

Une telle application est nécessairement surjective et ouverte, et même un homéomorphisme local. Les  $U_i$  sont les composantes connexes de l'image réciproque de  $U$ .

Le cardinal du revêtement est le cardinal de l'ensemble de ses feuilles, en particulier *fini*, *dénombrable*...

On appelle  $Y$  l'*espace total* du revêtement et  $X$  la *base* du revêtement. Pour tout  $b \in X$ , on note  $F_n := P^{-1}(b)$  la *fibre* en/au-dessus de  $b$  du revêtement.

Intuitivement, il faut que la fibre au-dessus d'un point soit discrète, ou plutôt indexée par un ensemble (qui n'a pas de topologie) : on ne doit pas pouvoir sauter d'un point à un autre comme ça.

En fait, un espace vérifiant à peu près cette propriété est un *espace fibré*. Dans le cas du revêtement, on impose que les fibres soient discrètes, heu... pour que ça marche.

#### Propriété. (*Caractérisation des revêtements finis en milieu séparé*)

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un homéomorphisme local avec  $Y$  séparé. Si les fibres des éléments de  $X$  par  $f$  sont toutes finies = compactes ici et  $f$  est fermée, alors  $f$  est un revêtement. En particulier, si les fibres des éléments de  $X$  par  $f$  ont toutes le même cardinal fini, alors  $f$  est un revêtement.

Ainsi, si  $Y$  est séparé, un homéomorphisme local est un recouvrement fini si et seulement si c'est une application propre.

#### Contre-exemple. (*Pas un revêtement*)

Soit  $\Delta$  le disque unité strict. L'application  $\Delta \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2}\}) \rightarrow \Delta \setminus \{0\}$  est un homéomorphisme local, surjective mais n'est pas un revêtement.

En effet, le cardinal des fibres devrait être constant, car la base est connexe.

On peut aussi le voir ainsi : pour  $z = \frac{1}{4}$ , si  $U = D(\frac{1}{4}, r)$ ,  $p^{-1}(U) = f(U) \setminus \{\frac{1}{2}\} \sqcup -f(U)$  pour  $r$  assez petit

et qui existe bien, où  $f : z \mapsto e^{\frac{1}{2}\text{Log}(p(z))}$  où  $\text{Log}$  est une détermination sur  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  et tout cela a un sens pour  $r$  encore assez petit. Le problème est que  $p$  n'induit pas d'homéomorphisme de  $U_1 = f(U) \setminus \{\frac{1}{2}\}$  sur  $U$ .  $\square$

### Exemple. (*Toy-model des revêtements*)

Si  $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ , alors  $P$  est un revêtement. Elle induit un homéomorphisme déjà rencontré  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$ .

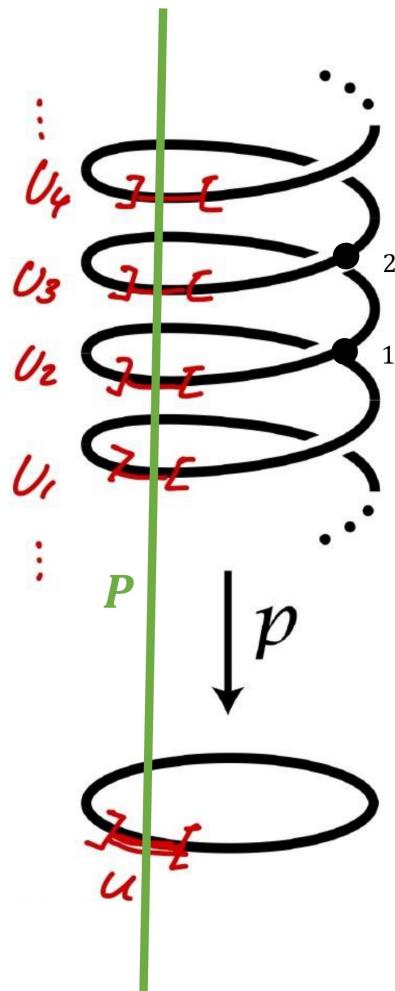


FIGURE 4.7.2 : Revêtement canonique du cercle. —  
Le cercle est revêtu par la droite réelle ici représentée en tire-bouchon.

Les revêtements vérifient la propriété d'équivalence des homotopies.

### Propriété

Soit  $P : Y \rightarrow X$  une revêtement, et  $H : Z \times I \rightarrow X$  une application continue et on pose  $g : H(-,0) : Z \rightarrow X$ . Si  $g$  se relève en  $\tilde{g} : Z \rightarrow Y$ ,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ & \searrow g & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

alors  $H$  aussi :  $\tilde{H} : Z \times I \rightarrow Y$ .

▷ Soit  $z_0 \in Z$ . Comme  $H$  est continue, il existe pour tout  $t$  un ouvert  $V_t \times W_t \subseteq Z \times I$  qui contient  $(z_0, t)$  et tel que  $H(V_t, W_t)$  soit contenu dans un ouvert trivialisant de  $X$  de  $H(z_0, t) = x_0$ , c'est-à-dire un ouvert  $U$  tel que  $P^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  et  $P|_{U_i} \simeq U$ . Comme  $\{z_0\} \times I$  est compact, on peut trouver un voisinage ouvert de  $z_0$  dans  $Z$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  une subdivision telle que  $H(V \times [t_i, t_{i+1}])$  est contenue dans un seul des  $W_i$ . Supposons qu'on a étendu  $H$  à  $Z \times [0, t_i]$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} : Z \times [0, t_i] & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow P \\ & & X \end{array}$$

et  $H(Z \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$  est un ouvert trivialisant et  $P^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{U}_j$  et  $\tilde{H}(z_0, t_i) \in \tilde{U}_j$  pour un certain  $j$ . Mais  $P|_{U_j} \simeq U_i$ , et l'on définit  $\tilde{H}$  sur  $Z \times [t_i, t_{i+1}]$  en tirant  $H$  en ouvert via  $p$ .

On montre de la même façon que  $\tilde{H}$  est unique. ■

### Propriété. (*Restriction d'un revêtement*)

Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement : si  $A \subseteq X$  est un sous-espace,  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  est aussi un revêtement.

Notons aussi que l'espace total est toujours plus gros que la base.

### Fait

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement.

1.  $\text{card}(E) \geq \text{card}(B)$ .
2. Si  $E$  est compact,  $B$  l'est.
3. Si  $E$  est dénombrable à l'infini,  $B$  l'est.

Voilà enfin la propriété fondamentale de relèvement selon un revêtement, qui permet de faire le lien entre revêtements et groupe fondamental.

**Corollaire. (*Décomposition selon une projection continue*)**

Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement et  $\gamma : I \rightarrow X$  un chemin. Soit  $x_0 = \gamma(0)$ . Alors pour tout  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma}$  qui relève  $\gamma$  et tel que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ .

De plus, pour toute homotopie relativement à  $\{0,1\}$ ,  $\gamma \simeq \gamma'$ , chemins de source  $x_0$ , il existe une unique homotopie relative  $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma}'$  qui la relève en notant  $\tilde{\cdot}$  le relèvement sur  $\tilde{x}_0$ . (On démontrera cela plus tard.)

▷ C'est un corollaire du théorème précédent si  $Z = *$ , avec le diagramme  $* \times I \rightarrow Y \rightarrow X$  et  $* \times I \rightarrow X$ . Pour le deuxième point, on prend  $Z = I$ . ■

On peut le réénoncer autrement :

**Proposition. (*Propriété universelle des revêtements : relèvement unique des chemins*)**

Tout revêtement  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété universelle suivante : pour tout chemin  $\varphi : I \rightarrow B$  où  $I = [0,1]$  dans  $B$ , pour tout  $x \in E$  tel que  $\varphi(0) = p(x)$ , i.e.  $x \in p^{-1}(\varphi(0))$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\varphi} : I \rightarrow E$  dans  $E$  de départ  $x$ , i.e.  $\tilde{\varphi}(0) = x$ , et relevant  $\varphi$ , c'est-à-dire tel que  $p\tilde{\varphi} = \varphi$ .

**Lemme. (*Nombre de Lebesgue*)**

Pour tout espace métrique compact  $(E,d)$ , pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $E$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ , il existe  $i \in \tilde{I}$  avec  $B(x,\varepsilon) \subseteq U_i$ . Autrement dit, tout recouvrement d'un espace métrique compact admet un *nombre de Lebesgue* qui vaut  $\varepsilon$ .

**Preuve.**

▷ Puisque  $\varphi$  est continue,  $(\varphi^{-1}(U_{\varphi(t)}))_{t \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $I$ . Or  $I$  est un espace métrique compact ; soit  $\varepsilon$  le nombre de Lebesgue associé à ce recouvrement. On divise  $I = [0,1]$  en  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  tel que  $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrons par récurrence sur  $k$  qu'il existe une unique  $\psi_k : [0, t_k] \rightarrow E$  telle que  $\psi_k(0) = x$  et  $p\psi_k = \varphi|_{[0, t_k]}$ . Pour  $k = 0$ , c'est trivial. Supposons  $\psi_k$  construite. Il existe  $t \in I$  tel que  $]t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon[ \subseteq \varphi^{-1}(U_{\varphi(t)}) \iff \varphi([t_k, \varepsilon, t_k + \varepsilon]) \subseteq U_{\varphi(t)}$ . Notons  $C$  la composante connexe contenant  $\psi_k(t_k)$ . Puisque  $p|_C : C \rightarrow U_{\varphi(t)}$  est un homéomorphisme, il y a une unique manière d'étendre  $\psi_k$  en  $\psi_{k+1}$ , en posant pour  $t_k \leq s \leq t_{k+1}$  :  $\psi_{k+1}(s) = (p|_C)^{-1}(\varphi(s))$  et pour  $0 \leq s \leq t_k$  :  $\psi_{k+1}(s) = \psi_k(s)$ . ■

### 4.7.3 Le groupe fondamental du cercle

Cet exemple n'a rien de trivial.

**Théorème. (*Groupe fondamental du cercle*)**

On a<sup>a</sup> :  $\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ .

<sup>a</sup> L'égalité est prise au sens d'un représentant dans la classe d'isomorphie.

▷ On montre ça à partir du revêtement canonique  $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ . Si  $\gamma$  est une boucle basée en 1, remarquons que  $P(0) = 1$ . D'après le théorème, il existe un relèvement  $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{\gamma}(0_{(I)}) = 0_{(\mathbb{R})}$ . Soit  $n = \tilde{\gamma}(1) \in P^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ . Le chemin  $\omega_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  est un chemin de 0 à  $n$

$$t \longmapsto nt$$

dans  $\mathbb{R}$  et il est homotope à  $\tilde{\gamma}$ , de façon immédiate car  $\mathbb{R}$  est simplement connexe. Ainsi  $w_n = P \circ \tilde{\omega}_n$  et  $[w_n] = [\gamma]$ . Il reste à montrer que  $[w_n] = [w_m] \implies m = n$ . Or il est clair que  $[w_n][w_m] = [w_{n+m}]$ . Donc  $\mathbb{Z} \longrightarrow \Pi_1(S^1, 1)$  est un morphisme surjectif bien défini. Ainsi, il suffit de montrer que ce morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans le groupe fondamental du cercle est un objet injectif, autrement dit, qu'à deux chemins homotopes de cette forme correspondent le même entier, et c'est la partie difficile.

Soit  $H$  une homotopie entre  $w_n$  et  $w_m$ . Alors d'après le théorème précédent, il existe une homotopie  $\tilde{H}$  entre  $\tilde{\omega}_n$  et  $\tilde{\omega}_m$ . Ainsi  $m = n$ , car si non, ils n'ont même pas les extrémités, donc ne peuvent être homotopes. ■

#### 4.7.4 Relèvement

Intuitivement, on a des points d'un espace topologique en bas, et on essaie de les *relever* en des points d'un espace topologique en haut.

#### 4.7.5 Degré d'une application

#### 4.7.6 Applications et conséquences en Analyse

##### 4.7.6.1 Préservation des bords

##### Exercice 9 (*Un exemple : bords d'une couronne*)

Pour  $r > 0$ , on note  $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ . Soient  $r' > r > 1$  et  $f : C_r \rightarrow C_{r'}$  un homéomorphisme. Le but est de montrer que  $f$  envoie  $\partial C_r$  dans  $\partial C_{r'}$ .

1. Soient  $D_n = C_{1+2^{-n}(r-1)}$  et  $E_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + 2^n(r' - 1) \leq |z| \leq r'(1 - 2^{-n})\}$ .

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est une partie compacte de  $C_{r'}$  et que pour  $n$  assez grand,  $C_{r'} \setminus E_n$  a deux composantes connexes.

2. Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $k \geq n$ ,  $f(D_k) \subseteq C_{r'} \setminus E_N$ .
3. Conclure en utilisant la connexité de  $D_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.7.6.2 Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine

#### 4.7.6.3 Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue

#### 4.7.6.4 Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon

### 4.7.7 Théorie générale des revêtements

On aura besoin du THÉORÈME DE VAN KAMPEN pour cette description.

### 4.7.8 Fibrés vectoriels

Parlons de topologie algébrique... avec l'algèbre linéaire.

On aura besoin de la notion de VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE et de FIBRÉ TANGENT pour appréhender les notions suivantes dans leur contexte.

#### 4.7.8.1 Définition et premiers exemples. Fibrés particuliers

##### Définition. (*Fibré vectoriel*)

Un fibré (*vectoriel*) (*réel*), en anglais (*fiber*) *bundle* de classe  $C^p$  est une fibration  $(E, B, F)$  de classe  $C^p$  telle que  $F$  est un espace vectoriel, les fibres  $p^{-1}(b)$  sont des espaces vectoriels et les difféomorphismes  $\phi$  de trivialisation locale

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F, \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ U & & \end{array}$$

induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels entre les  $p^{-1}(b)$  et  $F$ .

Par définition, le *rang* du fibré vectoriel est la dimension de  $F$ .

##### Reformulation pratique. (*Fibré vectoriel, isomorphismes de fibrés*)

Un fibré vectoriel  $\xi$  sur un espace topologique  $B = B(\xi)$  est une variété  $E = E(\xi)$  la donnée d'une projection  $\pi : E \rightarrow B$  continue telle que pour tout  $b \in B$ ,  $\pi^{-1}(B) := F_b(\xi)$  est un espace vectoriel et pour tout  $b \in B$ , il existe  $U$  voisinage de  $b$  dans  $B$  et  $n \in \mathbb{Z}$  et un homéomorphisme  $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tel que pour tout  $b \in U$ ,  $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto h(b, x) \in \pi^{-1}(b)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.  $h$  est appelée *trivialisation locale*. Si  $U = B$  alors  $\xi$  est le *fibré vectoriel trivial*.

Si  $n$  est le même pour tout  $b$  on parle parfois de  $\mathbb{R}^n$ -fibré.

Deux fibrés vectoriels  $\xi, \eta$  sur  $B$  sont *isomorphes* si et seulement si il existe un homéomor-

phisme  $f$

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\quad} & E(\eta) \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

tel que  $F_b(\xi) \xrightarrow{f} F_b(\eta)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

### Exemples. (*Fibrés vectoriels*)

1. (*Fibré trivial*) Donné par  $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ .
2.  $S^1 \times \mathbb{R}$  est un fibré vectoriel trivial. C'est le cercle tangenté par un cylindre infini.
3. Le ruban de Möbius fournit un premier exemple de fibré vectoriel non trivial. Sûr que c'est un fibré ?
4. (*Fibré tangent*) Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^p$ , de dimension  $n = \dim(M)$ . Alors l'espace tangent  $TM$  est une variété  $C^p$  de dimension  $2n$  et la projection  $\pi : TM \rightarrow M$  est un fibré vectoriel  $C^{p-1}$ , de rang  $n$ . De plus,  $\pi^{-1}(x) = T_x M$  est un espace vectoriel et si  $U$  est une carte, alors  $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$  est une localisation triviale de  $TM$ .

En effet, on considère l'atlas de  $TM$  construit à partir d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)$  de  $M$

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow & & \\ U_i & & \end{array}$$

où l'on prend  $(\varphi_i^{-1} \times id) \circ \varphi_i$ .

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{\quad} & U_i \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & U_i. & \end{array}$$

5. Soit  $G = GL_n(\mathbb{R})$  ou  $SL_n(\mathbb{R})$  ou  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $TG$  est trivialisable :  $TG \rightarrow G \times_{T_{id}G} G$  grâce à  $(g, v) \mapsto (g, g^{-1}v)$ .
6. On peut définir le *fibré normal* d'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  : le fibré normal de  $M$  est le sous-espace de  $M \times \mathbb{R}^n$  formé des paires  $(x, v)$  telles que  $v \perp T_x M$ . On le note souvent  $\nu$ .

**VOC** Si le rang est 1, on parle de *fibré en droites*. Si le rang est 2, on parle de *fibré en plans*. Si  $F = S^1$  dans le cas des fibrations, on parle de *fibré en cercles*, etc.

### Définition. (*Fibré trivialisable*)

Un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe à un fibré trivial.

**Exemple. (Le fibré vectoriel tautologique sur l'espace projectif)**

Soit  $E = \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in [x]\}$  et  $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la restriction de la première projection. Alors  $E$  est une sous-variété de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un fibré vectoriel de fibre type  $\mathbb{R}$ .

On considère l'atlas  $(U_i, \phi_i)$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  habituel, d'où un atlas  $U_i \times \mathbb{R}^{n+1}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  donnée par les  $\phi_i \times id$ . On veut voir que  $(\phi_i \times id)(U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  est une sous-variété. Prenons  $[y] = [y_1, \dots, y_{n+1}] \in U_i$ , avec  $y_i \neq 0$ . Alors  $\phi_i([y]) = (\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$  sans le  $i$ -ième terme. Alors  $(\phi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) = \{(z, v), v_k = v_i z_k, k \leq i + 1, v_k = v_i z_{k-1}, k \geq i + 1\}$  avec  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ . C'est donné par  $n$  équations, i.e. par une application  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Comme les différentielles de ces  $n$  équations sont linéairement indépendantes,  $F$  est une submersion et l'on a donc une sous-variété. Ainsi  $E$  est une variété et  $\dim(E) = n + 1$ , avec  $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $[x]$ ,  $\Pi^{-1}([x]) = \mathbb{R}x$  une droite vectorielle. On obtient une trivialisation locale sur  $\Pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}$  donnée sur  $U_i \times \mathbb{R}$  par  $[(u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_{n+1})], t) \mapsto ([u], (tu_1, \dots, t, \dots, tu_{n+1}))$ .

#### 4.7.8.2 Sections d'un fibré

**Définition. (Section d'un fibré vectoriel)**

Une *section (croisée)*  $s$  d'un fibré vectoriel  $\xi$  est une application continue  $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$  qui envoie  $b \mapsto s(b) \in F_b(\xi)$ .

Une section est *nulle part nulle* si  $s(b) \neq 0$  pour tout  $b \in B$ .

**VOC** Une section du fibré tangent est un *champ de vecteurs*.

*Remarque.* Tout fibré a une section, au moins la *section nulle* partout nulle.

**Exemple. (Section du fibré trivial linéaire)**

Un fibré trivial (ici en droites) a une section nulle part nulle :

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \xi \\ s(b)=1 \curvearrowleft & \downarrow & \nearrow \tilde{s}=hos \\ B & & \end{array}$$

qui vaut toujours 1 et  $\tilde{s}$  est également nulle part nulle.

**Théorème. (Fibré en droites du plan projectif)**

Dans le cas de  $\mathbb{RP}^n$ , le fibré en droites canonique  $\wp'_n$  est le  $\mathbb{R}$ -fibré donné par le sous-ensemble de  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  formé par les  $(x, v)$  tels que  $v$  est sur une droite  $(x, -x)$ . Alors  $\wp'_n$  n'est pas trivial.

▷ Il suffit de montrer que  $\wp'_n$  n'a pas de section partout non nulle. Soit  $s : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \wp'_n$ . Pour tout section  $f : S^n \xrightarrow{t} \mathbb{R}\mathbb{P}^n \xrightarrow{s} \wp'_n$ ,  $f(x) = (\{\pm x\}, t(x) \cdot x)$  tel que  $t(-x) = -t(x)$ . Prenons un chemin dans  $S^n$  entre  $x$  et  $-x$ .  $t(x)$  et  $t(-x)$  ont des signes opposés. Il existe  $x_0$  sur le chemin tel que  $t(x_0) = 0$ , donc  $s(x_0) = (x_0, 0)$ . ■

### Exemple

Le cas  $n = 1$  est celui du ruban de Möbius.

### Lemme

Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés vectoriels sur  $B$ . Si  $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$  est continue et envoie  $F_b(\xi) \simeq F_b(\eta)$  en tant qu'isomorphisme, alors ils ont le même rang et  $f$  est un homéomorphisme  $\xi \simeq \eta$ .

▷  $f$  est une bijection continue :

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

et l'on veut montrer que  $f^{-1}$  est continue. On considère

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{f} \pi^{-1}(U) \xleftarrow{h} U \times \mathbb{R}^n$$

où  $h^{-1}fg$  est continue et envoie  $(b, v) \mapsto (b, M(b)v)$ . La matrice  $M^{-1}(b)$  existe et dépend continûment de  $b$ , donc l'inverse  $g^{-1}f^{-1}h$  est continue, donc  $f^{-1}$  l'est. ■

### Définition. ()

Une collection  $(s_1, \dots, s_n)$  de sections d'un fibré vectoriel  $\Xi$  est *nulle part interdépendante* si

$$\forall b \in B \quad s_1(b), \dots, s_n(b) \text{ sont linéairement indépendants.}$$

### Théorème. (*Caractérisation des fibrés triviaux*)

Un  $\mathbb{R}^n$ -fibré  $\xi$  est trivial si et seulement si il admet  $n$  sections nulle part dépendantes.

▷ Si tel est le cas, définissons  $f : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$  qui est une bijection

$$(b, x) \longmapsto x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$$

et réciproquement, si  $h : B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} E$ , les  $s_i(b) = h(b, (0, \dots, 1, \dots, 0))$  sont nulle part interdépendantes. ■

**Corollaire**

$TS^2$  n'est pas trivial.

**4.7.8.3 Constructions de fibrés**

Construisons des fibrés.

**Propriété. (*Restriction des fibrés*)**

Si  $\xi$  est un fibré sur  $B$  et  $\overline{B} \subseteq B$  est une sous-variété alors  $\xi|_{\overline{B}}$  est un fibré vectoriel sur  $\overline{B}$ .

**Exemple**

Si  $B, \overline{B}$  sont lisses,  $TB|_{\overline{B}}$  est bien définie.

**Propriété. (*Fibré vectoriel induit par pull-back*)**

Si  $\xi$  est un fibré sur  $B$  et  $f : B_1 \rightarrow B$  continue, on définit le *fibré induit par tirage en arrière*  $f^*\xi$  sur  $B_1$  par  $E_1(f^*\xi) \subseteq B_1 \times E(\xi)$ ,  $(b, e) \in E_1(f^*\xi)$  si et seulement si  $f(b) = \pi(e)$ .

$$\begin{array}{ccc} E_1(f^*\xi) & \xrightarrow{\hat{f}(b,e)=e} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} e \\ \downarrow \\ b \end{array}$$

Une trivialisation locale de  $f^*\xi$  est donné comme suit : si  $b$  est dans l'imag de  $f$ , on prend la trivialisation locale  $(u, h)$  autour de  $b$  pour  $\xi$  comme suit :  $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$ . Considérons  $U_1 = f^{-1}(U)$  et  $h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1) \subseteq E_1 \subseteq B_1 \times E$ .

$$(b_1, x) \mapsto (b_1, h(f(b_1) = b, x))$$
**Définition. (*Application fibrée*)**

Une *application fibrée* entre deux fibrés  $\eta$  et  $\xi$  est une application continue  $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$  qui envoie chaque fibre  $F_b(\xi)$  isomorphiquement sur  $F_b(\eta)$ .

**Fait**

Une application fibrée induit une application continue sur les bases  $\bar{g} : B(\eta) \rightarrow B(\xi)$ ,  $b \mapsto b'$ .

**Lemme**

Si  $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$  est une application fibrée et  $\bar{g}$  l'application correspondance sur les espaces de base, alors  $\eta \simeq \bar{g}^*\xi$ .

▷

$$\begin{array}{ccc} E(\bar{g}\xi) & \xrightarrow{\sim} & \eta \\ \downarrow & \swarrow & \\ B(\eta) & & \end{array}$$

On considère  $h: E(\eta) \longrightarrow E(\bar{g}^*\xi)$ . Sur chaque fibre  $F_b(\eta) = \pi^{-1}(b)$ , on a  $h(F_b(\eta)) = e \longmapsto (\pi(e), g(e))$

$(b, g(F_b(\eta))) = (b, F_{\bar{g}(b)}(\xi))$  isomorphe en tant qu'espaces vectoriels, donc  $\eta$  and  $\bar{g}^*\xi$  sont isomorphes donc  $h$  est continue et un isomorphisme sur les fibres. ■

### Définition. (*Fibré vectoriel produit*)

Soient  $\xi_1, \xi_2$  deux fibrés sur  $B_1, B_2$ . On peut définir le *produit cartésien fibré*  $\xi_1 \times \xi_2$  d'espace de base  $B_1 \times B_2$ , d'espace total  $E(\xi_1) \times E(\xi_2)$ , d'application projection  $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ .

La fibre au-dessus de  $(b_1, b_2)$  sera  $F_{b_1}(\xi_1) \times F_{b_2}(\xi_2)$ .

### Définition. (*Fibré vectoriel somme (de Whitney)*)

Soient  $\xi_1, \xi_2$  deux fibrés sur la même base  $B$ . Posons  $d : B \rightarrow B \times B$  l'application diagonale  $b \mapsto (b, b)$ . Posons  $\xi_1 \oplus \xi_2 := d^*(\xi_1 \times \xi_2)$  la *somme de Whitney* de  $\xi_1$  et  $\xi_2$ .

On a alors  $F_b(\xi_1 \oplus \xi_2) \simeq F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2)$ .

### Définition. (*Sous-fibré vectoriel*)

Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés sur  $B$  avec  $E(\xi) \subseteq E(\eta)$ . On dit que  $\xi$  est un *sous-fibré* de  $\eta$  si toute fibre  $F_b(\xi)$  est un sous-espace vectoriel de  $F_b(\eta)$ .

### Lemme. (*Caractérisation de la somme de Whitney*)

Si  $\xi_1, \xi_2$  sont deux sous-fibrés de  $\eta$  tels que toute fibre  $F_b(\eta)$  est la somme directe de  $F_b(\xi_1)$  et  $F_b(\xi_2)$ , alors  $\eta \simeq \xi_1 \oplus \xi_2$ .

▷ On considère  $f(b, e_1, e_2) = e_1 + e_2$ . C'est continu et préserve la structure d'espace vectoriel des fibres. ■

#### 4.7.8.4 Fibrés vectoriels euclidiens

### Définition. (*Fibré vectoriel euclidien*)

Un *fibré vectoriel euclidien* est un fibré vectoriel réel  $\xi$  muni d'une fonction continue  $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ , quadratique et définie positive sur chaque fibre.

**Remarques.**

1. Ceci définit un produit à l'intérieur de chaque fibre qui varie continûment avec le point base. On l'appelle *métrique euclidienne* sur  $\xi$ , *riemannienne* si sur  $TM$ .
2.  $\mathbb{R}^n$  a la métrique standard qui se restreint à une métrique sur toute sous-variété  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .
3. Si  $\xi$  est un  $\mathbb{R}^n$ -fibré trivial et  $\mu$  une métrique euclidienne, alors il existe  $n$  sections orthogonales nulle part nulles.

En effet, le procédé de Gram-Schmidt est continu.

**Définition-propriété. (*Orthogonal d'un fibré*)**

Si  $\xi \subseteq \eta$  sont deux fibrés euclidiens de dimensions respectivement  $k$  et  $n$ , alors on définit le *fibré supplémentaire orthogonal*  $\chi^\perp \subseteq \eta$  dont l'espace total est la réunion des  $F_b(\xi)^\perp \subseteq F_b(\eta)$ . C'est un fibré.

**Théorème**

$$\chi \oplus \chi^\perp \simeq \eta.$$

▷ En chaque  $b$  on peut prendre un petit voisinage  $U$  tel que  $\chi$  et  $\eta$  soient tous deux triviaux sur  $B$ . On a  $s_1, \dots, s_k$  des sections orthonormales nulle part nulles de  $\chi$  définies sur  $U$ . Sur  $b$ , elles peuvent être étendues à des sections linéairement indépendantes de  $\eta$  via  $s_1(b), \dots, s_k(b), s_{k+1}(b)', \dots, s_n'(b)$ . Sur un petit voisinage  $V$  de  $b$ , ces  $n$  sections de  $\eta$  resteront nulle part dépendantes. On utilise Gram-Schmidt pour obtenir des orthonormales  $s_1, \dots, s_n$ . Ensuite, on peut utiliser  $s_{k+1}, \dots, s_n$  pour obtenir une trivialisation locale pour  $\xi^\perp : V \times \mathbb{R}^{n-k} \ni (b, x) \mapsto (b, x_1 s_{k+1}(b) + \dots + x_{n-k} s_n(b))$ . ■

**Exercice 10**

Si  $M \subseteq N$  sont des variétés lisses et  $N$  est riemannienne, avec  $TM \subseteq TN$ , le fibré normal de  $M$  dans  $N$  est  $(TM)^\perp = \nu$  et  $TN|_M \simeq TM \oplus \nu$ .

**Lemme**

Pour tout immersion  $f : M \rightarrow N$  avec  $N$  riemannienne, il existe une décomposition en somme de Whitney  $f^*TN \simeq TM \oplus \nu_f$  et  $\nu_f$  est appelée le fibré normal de l'immersion  $f$ .

**Définition. (*Foncteur continu*)**

Un *foncteur continu*  $T : \theta \times \dots \times \theta \rightarrow \theta$  où  $\theta$  est une catégorie donc les objets sont les fibrés vectoriels et les morphismes sont les isomorphismes de fibrés vectoriels, est tel que :

1. Étant donnés  $n$  fibrés vectoriels,  $T(v_1, \dots, v_n)$  est un fibré vectoriel.

2. Si l'on a  $f : v_i \rightarrow w_i$  alors on a un isomorphisme  $T(f_i) : T(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow T(w_1, \dots, w_n)$ ,  $T(id) = id$  et  $T(f_i \circ g_i) = T(f_i) \circ T(g_i)$ .
3.  $T(f_i)$  dépend continûment de  $f_i$ .

### Théorème

Soit  $T$  un foncteur continu de  $n$  espaces vectoriels et  $n$  fibrés vectoriels sur  $B$   $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Il existe un fibré vectoriel sur  $B$  dont la fibre est  $T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_n))$ , donné par  $\pi : E \rightarrow B$  où  $E = \bigcup_{n \in B} T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_n))$  est muni d'une topologie en faisant un fibré vectoriel.

▷ Prenons  $(U_1, h_1), \dots, (U_k, h_k)$  une trivialisation locale pour  $\xi_1, \dots, \xi_k$ . Pour tout  $b \in U$ , on définit  $h_{i,b} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \Gamma_b(\xi_i)$  donnée par  $h_{i,n}(x) = h_i(b, x)$ . Alors on a un isomorphisme  $T(h_{1,b}, \dots, h_{k,b}) : T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow F_b$ . La correspondance  $(b, x) \mapsto T(h_{1,b}, \dots, h_{k,b})(x)$  définit une correspondance bijective  $h : U \rightarrow T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ . On rappelle qu'étant donné  $f : X \rightarrow Y$  avec  $Y$  un espace topologique, il y a une topologie induite sur  $X$  rendant  $f$  continue. On veut que  $\pi^{-1}$  d'un ouvert soit ouvert et  $h$  d'un ouvert soit ouverte.  $U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \xrightarrow{h_1} \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \xleftarrow{h_2} U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k})$  et  $h_1 \circ h_2^{-1} : U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k})$  doit être continue, ce qui suit. ■

### Exemples

1. (*Fibré vectoriel produit tensoriel*)  $\xi \otimes \eta$
2. De même, le fibré vectoriel produit extérieur est celui sur les fibres.
3. (*Fibré vectoriel dual*)  $V \rightarrow \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ ,  $\xi \mapsto \xi^*$  est un fibré vectoriel.

### Proposition. (*Dualité des fibrés vectoriels*)

Si  $\xi$  est euclidien sur un espace de métrique  $m_b(\cdot, \cdot)$ , alors  $\xi \simeq \xi^* = \text{Hom}(\xi, \mathbb{R})$ .

▷ Car  $\xi_b \ni (b, v) = (b, m_b(v, \cdot)) \in \xi_b^*$  d'où  $\xi_b \simeq \xi_b^*$ . ■

### Fait

Sur un fibré vectoriel réel sur un espace paracompact, on peut définir une métrique euclidienne grâce à une partition de l'unité.



Ce n'est pas le cas pour des fibrés vectoriels complexes !

### Contre-exemple

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & & g^*(E(\xi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

où  $g$  est différentiable, mais en général  $g^*\xi$  n'est pas isomorphe à  $\xi$ . Contre-exemple : cylindre et tore, considérons  $g$  qui échange les deux cercles.  $\square$

## 4.8 Théorème de van Kampen

**O**N calcule du groupe fondamental par une méthode diviser pour régner. L'idée générale est, pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique, de découper celui-ci en petits sous-espaces, calculer les groupes fondamentaux de ces espaces pour le recoller ensuite.

On démontre plusieurs versions, de différentes forces, du théorème de van Kampen.

### 4.8.1 Version faible du théorème de Van Kampfen

#### Théorème. (*Théorème de van Kampen faible*)

Soit  $X$  une espace topologique et on suppose que  $U, V$  sont deux ouverts connexes par arcs de  $X$  d'intersection non vide et connexe par arcs qui recouvrent  $X$ . Soit  $x_0 \in U \cap V$ . Par fonctorialité du groupe fondamental, on a des morphismes  $\Pi_1(U, x_0), \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ .

Alors  $\Pi_1(X, x_0)$  est engendré par les images de ces morphismes.

▷ Soit  $\gamma : I \rightarrow X$  une boucle basée en  $x_0$ . On a  $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$  et, en notant  $I_i$ ,  $I_j$  des intervalles ouverts,  $\gamma^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} I_i$  et  $\gamma^{-1}(V) = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ , donc l'union des  $I_i$  avec l'union des  $I_j$  est un recouvrement de  $I$ . Par compacité de  $I$  (subtilité qui n'apparaissait pas dans le schéma, qui n'a donc pas tout à fait valeur de preuve... loin de là), on extrait un recouvrement fini de la forme  $[0,1] = [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cup \dots \cup [s_n, 1]$  où les  $s_i$  sont ordonnés et  $u_i < s_{i-1} \quad \forall i \geq 1$ ; en choisissant  $t_i \in [u_{i+1}, s_i]$ , on obtient un recouvrement de la forme suivante :  $I = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_n, 1]$  tel que  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$  ou  $V$  par connexité, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , pour des  $t_i \in I$ . On peut de plus supposer que  $\gamma(t_i) \in U \cap V$ . Comme  $U \cap V$  est connexe par arcs par hypothèse, il existe un chemin  $\alpha_i$  dans  $U \cap V$  reliant  $x_0$  à  $\gamma(t_i)$ . Alors puisque  $[0,1] \simeq [0, t_1]$ , en notant  $\gamma([0, t_1])$ ,  $\gamma$  restreint à  $U$  ou  $V$ , la composition étant licite car  $[\alpha_1 \alpha_1^{-1}][c_{x_0}]$ , on a  $\gamma = \gamma([0, t_1]) * \gamma([t_1, t_2]) * \dots * \gamma([t_n, 1])$ . Ainsi  $[\gamma_1 \times \alpha_1^{-1} \times \alpha_1 \times \gamma_2 \dots \times \gamma_n] = [\gamma]$ . On peut supposer  $\gamma_1 \subseteq U$  où  $\alpha_1 \subseteq U$ , donc  $\gamma_1 \alpha_1^{-1} \subseteq U$ . Et  $[\gamma_1 \alpha_1^{-1}] \in \Pi_1(U, x_0)$  pour une boucle basée en  $x_0$ . De même,  $\alpha_i \gamma_{i+1} \alpha_{i+1}^{-1} \in \Pi_1(V, x_0)$  donc  $A = U$  ou  $A = V$ . ■

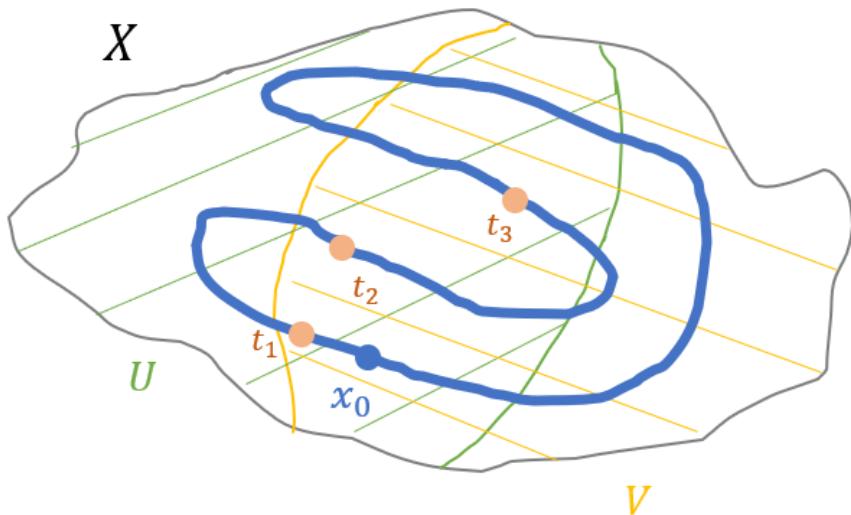


FIGURE 4.8.1 : *Démonstration du théorème de van Kampen, version faible.* —  
L’intersection des deux ouverts est supposée connexe.

*Remarque.* Ce théorème faible ne s’applique pas dans le cas du cercle ! On aura besoin des groupoïdes ici.

**Corollaire. (*Corollaire faible de van Kampen faible*)**

Avec les hypothèses précédentes, si  $X = U_1 \cup U_2$  et  $U_1 \cap U_2$  est connexe par arcs et si  $\Pi_1(U_1, x_0)$  et  $\Pi_2(U_2, x_0)$  sont triviaux, alors  $\Pi_1(X, x_0)$  aussi.

Autrement dit, un espace réunion de deux ouverts simplement connexes dont l’intersection est connexe par arcs est simplement connexe.

Ceci a pour conséquence :

On peut toutefois appliquer le théorème à la *sphère* en dimension supérieure ou égale à 3.

**Théorème. (*Simple connexité de la sphère*)**

Pour  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^n$  est simplement connexe.

▷ On prend pour ouverts, la sphère privée du pôle Nord, respectivement du pôle Sud. Alors ces ouverts sont contractiles car homéomorphes au plan par projection stéréographique et leur intersection est bien connexe par arcs (exercice). D’où le résultat. ■

On obtient donc un des plus simples exemples du fait suivant :

**Contre-exemple. (*Le GF ne caractérise pas le type d'homotopie*)**

$\mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{S}^3$  ont le même groupe fondamental. Pourtant, elles n'ont pas le même type d'homotopie.

La façon la plus simple de le voir est d'en calculer les groupes d'homologie supérieurs. (Il est possible de calculer des groupes d'homotopie supérieure en petites dimensions, mais c'est difficile, et c'est encore ouvert pour le cas général.) On a  $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$  tandis que  $H_2(\mathbb{S}^3) = 0 \not\simeq \mathbb{Z}$ .  $\square$

Cette asymétrie avec le cercle n'est pas sans surprise : le cercle privé de deux points n'est plus connexe par arcs, la sphère, si. Plus topalgébriquement, on ne peut plus tourner autour du cercle privé d'un point, mais on peut autour de la sphère privé d'un point. Remarque : pourtant, on peut toutes les deux les déformer en un point !

**Théorème. (*Théorème faible de van Kampen pour les groupoïdes*)**

Soient  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1, U_2$  deux ouverts et  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Alors  $\Pi(X)$  est engendré au sens des catégories par les images au sens des catégories de  $\Pi(U_1)$  et  $\Pi(U_2)$  par les foncteurs  $\Pi(\iota_i) : \Pi(U_i) \longrightarrow \Pi(X)$  induits par les inclusions  $U_i \longrightarrow X$ .

▷ Même preuve, et même un peu plus simple, que dans le cas des groupes fondamentaux. ■

*Remarque.* On peut déduire le théorème classique par passage à des sous-groupoïdes pleins.



Un espace de groupe fondamental non trivial peut être engendré par des groupes triviaux ! C'est ce qui se passe pour le cercle

## 4.8.2 Théorème de van Kampen général

On aura besoin de quelques notions catégoriques.

*Remarque.* Même si le groupe fondamental était un invariant complet (ce qui arrive pour les noeuds), c'est inutile, car on est incapable de dire si deux groupes définis par présentation et relations sont les mêmes, ou même nul.

### 4.8.2.1 Somme amalgamée dans une catégorie

**Définition. (*Somme amalgamée de catégories, pushout*)**

Soient  $C$  une catégorie et supposons qu'on ait entre objets et morphismes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

et bien la somme amalgamée, si elle existe, est dans ce cas un objet noté  $Y \underset{X}{\cup} Z$ , et la donnée des morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ g \downarrow & & \downarrow g' & & \\ Z & \xrightarrow{f'} & Y \cup_X Z & \xrightarrow{h_1} & W \\ & & \searrow h_2 & \nearrow & \\ & & & & W \end{array}$$

tels que tout le diagramme commute (soit quatre identités).

*Remarque.* Si ça existe, c'est unique à unique isomorphisme près.

**Exemples**

- Si  $X$  est l'union de deux ouverts  $U_1, U_2$ , alors

$$\begin{array}{ccc} U_1 \cap U_2 & \longrightarrow & U_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

est une somme amalgamée où  $X = U_1 \cup_{U_1 \cap U_2} U_2$ .

Ici  $f : U_1 \longrightarrow Y$  et  $g : U_2 \longrightarrow Y$ . On définit  $h : X \longrightarrow Y$  par recollement de  $U_1$  et  $U_2$  où par hypothèse  $f$  et  $g$  coïncident sur  $U_1 \cap U_2$  d'où la bonne définition.

Dans la catégorie des espaces topologiques pointés  $\text{Top}^*$ , si  $(X, x_0)$  est un objet avec  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ , soit  $(X, x_0) = (U_1, x_0) \cup (U_2, x_0)$  par abus, alors  $X = (U_1, x_0) \cup_{(U_1 \cap U_2, x_0)} (U_2, x_0)$ .

**Théorème. (*Produit amalgamé de groupes*)**

Dans la catégorie des groupes, les sommes amalgamées existent toujours (et on l'appelle plutôt *produit amalgamé*).

▷ On définit le produit libre  $G * H = G *_1 H$  via le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \star H \end{array}$$

où  $G \star H$  est l'ensemble des mots dits alternés, de la forme  $g_1 h_1 g_2 \dots$  finie ou  $h_1 g_1 h_2 \dots$  finie, avec aucune interaction entre les  $g$  et les  $h$ , mais bien sûr les règles de calcul au sein de  $H$  et de  $G$ . Autrement dit, si  $G = \langle S \mid R \rangle$ ,  $H = \langle S' \mid R' \rangle$  où  $G \star H = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle$ . Il est clair que l'une ou l'autre de ces descriptions vérifie bien la propriété universelle demandée. Il faut maintenant vérifier le reste de la propriété universelle. Si  $f : K \longrightarrow G$  et  $g : K \longrightarrow H$ , on pose le produit amalgamé au-dessus de  $K$  :  $G \star_K H = G \star H / \langle f(h) = g(h), h \in K \rangle$ , i.e.  $G \star_K H = \langle S \cup S', R \cup R' \cup \{f(k)g(k)^{-1}, k \in K\} \rangle$ . (Si  $K$  est trivial, on retombe bien sur le groupe libre.) ■

*Remarque.* Le produit libre est le coproduit = libre dans Grp.

### Exemples. (*Produits libres, produits libres amalgamés de groupes*)

1.  $\star_{\{0\}} = \star$  : le produit libre amalgamé sur le groupe nul est le produit libre.
2.  $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2$ .
3. Plus généralement,  $\star_n \mathbb{Z} = F_n$ .
4.  $\{0\} = 1$  est neutre pour le produit libre, mais pas pour le produit libre amalgamé. En général,  $G$  n'est pas forcément neutre du produit libre amalgamé sur  $G$ . Contre-exemple :  $1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . En effet, compter deux éléments : le mot vide et le neutre.
5.  $1 \star_{\mathbb{Z}} 1 = 1$ . Preuve :  $\pi_1(S^2) = 0$ . Plus généralement,  $1 \star_G 1 = 1$ .
6.  $\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ . Preuve :  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Attitude pas idiote à généraliser !
7.  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 = 1 \rangle$ . En effet, par exemple,  $abb^{-1}aaaba^{-1} = aaba^{-1} = ba^{-1}$ . Ainsi un mot s'écrit toujours (sous forme *normale* ou *canonique*) comme  $b^{k_1}ab^{k_2}a\dots b^{k_n}$  avec  $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{Z}$ ,  $h_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .
8. Seuls les produits libres (tout court) de groupes finis par des groupes triviaux sont finis. Même  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est infini.
9.  $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

#### 4.8.2.2 Le théorème de van Kampen fort

##### Théorème. (*Théorème de van Kampen*)

Soit  $X$  une espace topologique et on suppose que  $U_1, U_2$  sont deux ouverts quelconques de  $X$  qui le recouvrent, tels que  $U_1 \cap U_2$  soit connexe par arc. Soit  $x_0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Alors  $\Pi_1(X, x_0) \simeq \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \Pi_1(U_2, x_0)$ .

▷ Conséquence du théorème pour les groupoïdes (plus tard). ■

### Exemples

1. (*Groupe fondamental d'un espace multiplement pointé*) On prend  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ , alors  $\Pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \emptyset \rangle$ .
2. (*Groupe fondamental d'un bouquet*)  $\pi_1(X \wedge Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$ .
3. (*Groupe fondamental du plan projectif réel*) Soit  $X = \mathbb{RP}^2 = D^2 / (x \sim -x, x \in S^1)$ .  
 $\Pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) = 1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  
 Alors avec les ensembles évidents  $\Pi_1(U_2, x_0) = 1$  et  $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathbb{Z}$ . Or  $U_1$  est un rétract par déformation de  $S^1 / (x \sim -x)$ , mais  $S^1 / (x \sim -x) \cong S^1$  par  $z \mapsto z^2$ . Ainsi  $\Pi_1(U_1, x_0) = \Pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z}$ . On a donc  $\Pi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Pi_1(U_1)$ , soit  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , qui à  $1 \mapsto z$ .
4.  $\pi_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est infini.

Intuitivement, il sera beaucoup plus difficile de trouver des espaces non simplement connexes dont le groupe fondamental est fini, ou même de torsion ; cela signifierait, par définition du GF, qu'il existe des boucles non homotopes à un point qui, parcourues plusieurs fois, le deviendraient.

*Remarque.* Ce théorème ne s'applique toujours pas au cercle.

### Théorème. (*Produit amalgamé de groupoïdes*)

Les produits amalgamés existent aussi dans la catégorie des groupoïdes.

▷ Voir la preuve du théorème suivant. ■

### Théorème. (*Théorème de van Kampen pour les groupoïdes*)

Si  $X = U_1 \cup U_2$  un espace topologique,  $U_i$  deux ouverts. Alors

$$\Pi(X) \simeq \Pi(U_1) \star_{\Pi(U_1 \cap U_2)} \Pi(U_2).$$

▷ On reprend les notations de l'énoncé. Pour  $f : U_1 \rightarrow Y$ ,  $g : U_2 \rightarrow Y$ , on veut faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \Pi(U_1) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Pi(U_2) & \xrightarrow{\quad} & \Pi(X) \xrightarrow{g^*} \Pi(Y) \\
 & \searrow f^* & \\
 & & \Pi(Y)
 \end{array}$$

Soient  $x, y \in X$ , un *chemin généralisé* est un objet de la forme  $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ ,  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que  $\alpha(l) = y$ . Alors par reparamétrage  $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \alpha(tl)$  est un chemin au sens usuel. On note  $l_x$  le chemin constant,  $[0, l] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x$ . Soit  $P(X)$  ( $P$  pour *path*) la *catégorie des chemins* de  $X$ , dont les objets sont les éléments de  $X$  et les morphismes  $x \rightarrow y$  les chemins généralisés. La composition

est définie pour  $\alpha : [0, l_1] \rightarrow X$  un chemin de  $x \rightarrow y$  et  $\beta : [0, l_2] \rightarrow X$  un chemin de  $y \rightarrow z$ , avec  $\alpha \star \beta : [0, l_1 + l_2] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [0, l_1] \\ \beta(t - l_1) & \text{si } t \in [l_1, l_1 + l_2] \end{cases}$ , et l'on définit l'identité par  $id_x = 0_x$ . Dans ce cas,  $P(X)$  est une catégorie, mais pas un groupoïde. On a cependant un foncteur  $P(X) \rightarrow \Pi(X)$ , et  $\Pi(X)$  est le quotient par la relation :  $\alpha \sim \beta$ , s'il existe des chemins constants  $l_y, l'_y$  tels que  $l_y \circ \alpha$  et  $l'_y$  soient homotopes. On a :

$$\begin{array}{ccc} P(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & P(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(U_2) & \xrightarrow{\quad} & P(X) \\ & \searrow F_1 = P(g) & \swarrow F_2 = P(f) \\ & & P(Y) \end{array}$$

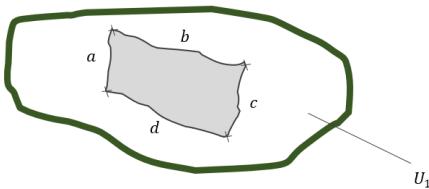
et l'on pose donc  $G(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x \in U_1 \\ F_2(x) & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$  bien définie par hypothèse du théorème. Comme dans

les preuves précédentes, si  $\gamma : x \rightarrow y$  est généralisé, on peut trouver une subdivision  $0 < t_1 < \dots < t_n = l$  telle que  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_1$  ou  $U_2$ . On pose  $\gamma_i(t) = \gamma(t_i + t)$ . On a  $\gamma = \Gamma_{n-1} \times \dots \times \gamma_1$ . On pose donc  $G(\gamma) = F_{j_n}(\gamma_n) \dots F_{j_1}(\gamma_1)$  où  $j_h = 1$  ou  $2$ .

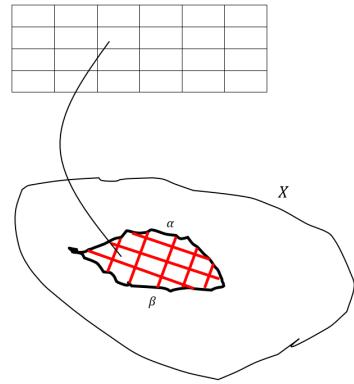
Il reste à montrer que  $G$  passe au quotient.

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \longrightarrow & \Pi(Y) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Pi(X) & & \end{array}$$

Primo,  $G$  envoie les chemins constants sur les identités. Secundo, soit  $H : I \times I \rightarrow U_j$ . Puisque  $I \times I$  est un carré, soit  $a, c, d, b$  ses côtés. Alors  $F_i(a)F_i(b) = F_i(c)F_i(d)$ .



Tertio, si  $\alpha, \beta : [0, l] \rightarrow X$  et  $H : [0, l] \times I \rightarrow X$  est une homotopie de  $\alpha \rightarrow \beta$ ,



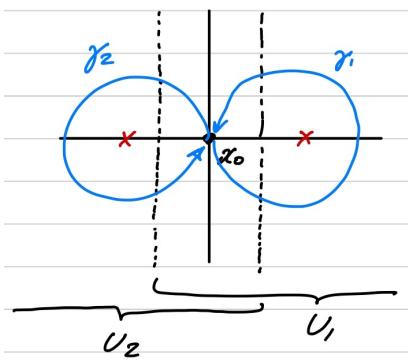
où l'on découpe  $[0,l] \times I$  comme sur la figure de telle sorte que l'un d'eux s'écrive comme  $\in H^{-1}(U_1)$  ou  $H^{-1}(U_2)$ . En utilisant le deuxième point sur chaque petit carré, on déduit  $G(\alpha\alpha') = G(\beta'\beta)$ , si  $\alpha$  et  $\beta$  son thomotopes à extrémité fixés,  $G(\alpha) = G(\beta)$  puis  $G$  descend à  $\Pi(X)$ .

Par suite,  $\Pi(X)$  satisfait la propriété universelle de  $\Pi(U_1) * \Pi(U_2)$  sur  $\Pi(U_1 \cap U_2)$ .

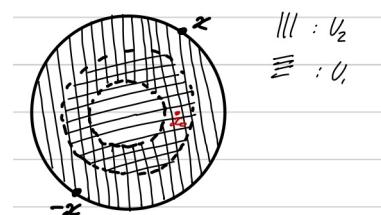
En particulier, ce produit amalgamé existe comme on l'avait prétendu. ■

### Application

Retrouvons le groupe fondamental du cercle. Soit  $X = S^1$ . Alors  $\Pi_1(S^1) = \Pi_1(U_1) *_{\Pi_1(I) * \Pi_1(J)} \Pi_1(U_2) \simeq \Pi_1(U_1, x_0, x_1)$  où  $I, J$  sont dans l'intersection  $U_1 \cap U_2$ , sur les côtés opposés du cercle. Or en notant  $c_1, c_2$  les chemins (quelconques) sur les demi-arcs respectifs, on a  $\text{Hom}_{\Pi(U_1)}(I, J) = \{[c_1]\}$  et  $\text{Hom}_{\Pi(U_2)}(I, J) = \{[c_2]\}$ . Par suite,  $\text{Hom}_{\Pi(S^1)}(I, J) = \langle [c_1][c_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$ .



(a) *Le plan doublement pointé.* —



(b) *Le plan projectif réel.* —

FIGURE 4.8.2 : *Applications du théorème de van Kampen.* —

### Reformulation pratique. (*van Kampen formulé avec un groupe présenté*)

Soit  $M = M_1 \cup M_2$  la réunion de deux espaces topologiques connexes par arcs ouverts dans l'espace  $M$  et tels que  $I = M_1 \cap M_2$  soit connexe par arcs. On suppose que  $\pi_1(M_1) = \langle \gamma_1, \dots | r_1, \dots \rangle$  et  $\pi_1(M_2) = \langle \delta_1, \dots | s_1, \dots \rangle$ . On suppose que  $\pi_1(I)$  est engendré par les  $\eta_i$ . On écrit chaque  $\eta_i$  comme  $\varphi_{i,1}$  en utilisant les générateurs de  $\pi_1(M_1)$  et  $\varphi_{i,2}$  en utilisant ceux de  $\pi_1(M_2)$ . Alors

$$\pi_1(M) = \left\langle \gamma_1, \dots, \delta_1, \dots \mid r_1, \dots, s_1, \dots, \varphi_{i,1}\varphi_{i,2}^{-1} \right\rangle$$

## 4.9 Théorie générale des revêtements

### 4.9.1 Conséquence sur la théorie générale des revêtements

Une bonne référence complémentaire (à lire absolument) est TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE de Frédéric Paulin.

Soit  $X$  un espace topologique ; on s'intéresse aux revêtements de  $X$ .

#### Définition. (*Revêtement CALCA*)

Soit  $P : E \longrightarrow X$  une application continue surjective,  $E$  un espace topologique. On rappelle que  $P$  est un *revêtement*, si tout point  $x \in X$  a un voisinage ouvert  $U$  tel que  $P^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$ ,  $PU_i \simeq U$ .

On dit que ce revêtement est *CALCA* (connexe par arcs localement connexe par arcs) si  $E$  et  $X$  sont connexes par arcs et localement connexe par arcs. **On suppose toujours cela à partir de maintenant.**

On appelle  $P$  la *projection*,  $P^{-1}(x)$  la *fibre au-dessus de  $x$* ,  $U$  un *ouvert trivialisant*, car localement au voisinage de  $x$ ,  $P|_{U_i} \simeq U_i \times X \longrightarrow X$ . Les  $U_i$  s'appellent les *feuilles* au-dessus de  $U$ .

On conseille au lecteur de revoir cette partie avant de continuer.

#### 4.9.1.1 Morphismes de revêtements

#### Définition. (*Morphisme de revêtements*)

Soit  $P_1 : E_1 \longrightarrow X$  et  $P_2 : E_2 \longrightarrow X$  deux revêtements d'un même espace  $X$ . Un *morphismisme de revêtements* ou *transformation de Deck* est un diagramme commutatif

(d'applications continues) comme suit.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ P_1 \searrow & & \swarrow P_2 \\ & X & \end{array}$$

On note  $\text{Hom}(P_1, P_2)$  ces morphismes.

Si  $P$  est un revêtement, on a  $\text{Aut}(P)$  le groupe des automorphismes. Un automorphisme de revêtement  $P$  est exactement une bijection bicontinue  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $P = P \circ f$ . En effet, il faudrait aussi imposer  $P \circ f^{-1} = P$ , mais c'est conséquence de  $P = P \circ f$ .

On a donc la *catégorie des revêtements* à base fixée.

**Remarque importante.**  $\text{Aut}(P) := \text{Deck}(p)$  agit sur  $P^{-1}(x)$  pour tout  $x \in X$

#### 4.9.1.2 Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications

**VOC** Un revêtement pointé est un revêtement pointé. Tout revêtement est canoniquement un revêtement pointé en choisissant un point base de l'espace total (pas de la base).

**Définition. (Propriété de relèvement des homotopies)**

(PHR)

On dit alors que  $\tilde{H}$  relève  $h$  avec conditions initiales.

**Remarques.**

1. Schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ id_X \times \{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Par suite, le relèvement des homotopies est la propriété duale de leur extension.

Il existe une généralisation

**Définition. (Propriété d'extension de relèvement des homotopies)**

**Théorème. (*Propriété de relèvement des homotopies*)**

Toute boucle dans  $X$  basée en  $x$  se relève de façon unique en un chemin dans  $E$  basé en n'importe quel point de  $P^{-1}(x)$ .

Les homotopies se relèvent aussi.



Les lacets se relèvent en des chemins a priori ! (Il suffit de penser au cercle pour ne pas stresser.)

**Corollaire. (*Plongement des groupes fondamentaux*)**

Soient  $x \in X$ ,  $x_0 \in P^{-1}(x)$ . Alors le morphisme  $\Pi_1(E, x_0) \xrightarrow{P^*} \Pi_1(X, x)$  est injectif.

Autrement dit, dans le cas d'un revêtement, le groupe fondamental de l'espace total est un sous-groupe du groupe fondamental de la base.

▷ Soit  $\gamma$  une boucle de  $E$  basée en  $x_0$ , sa projection  $P(\gamma)$  est une boucle basée en  $x$ , et il existe un unique chemin qui relève cette boucle d'extrémité donnée. Soit  $\tilde{\Gamma}$  l'unique chemin qui relève  $P(\gamma)$  basé en  $x_0$ . On a  $P(\tilde{\gamma}) = P(\gamma)$ , donc ils sont homotopes. Donc  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ , donc c'est une boucle. ■

Si  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement, on cherche enfin à savoir si  $f : Y \rightarrow X$  se relève en une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ , i.e. telle que  $p\tilde{f} = f$ .

**Fait**

Si  $Y$  est connexe, deux relèvements de  $f$  qui coïncident en au moins un point sont égaux.

Et oui.

*Remarque.*  $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  est injective.

**Corollaire. (*Relèvement des applications*)**

Soit  $f : Y \rightarrow X$  ( $Y$  CALCA) une application continue avec  $x_0 = f(y_0)$  et  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ .

Alors  $f$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  (de façon unique avec  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ )ssi  $f^*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p^*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  le *sous-groupe définitif du recouvrement*, inclus dans  $\pi_1(X, x_0)$ . Soit :

$$\begin{array}{ccc} y_0 \in Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \ni \tilde{x}_0 \\ & \searrow & \downarrow P \\ & & X \ni x_0 \end{array}$$

▷ **Preuve complètement brouillon** Si  $y \in Y$ ,  $\alpha : y_0 \rightarrow y$ ,  $f^*(\alpha)$  est un chemin dans  $X$  de  $x_0$  vers  $x$ . On peut le relever en un chemin basé en  $x_0$ . On voudrait que  $\tilde{f}(y) = x$ . On cherche  $F_x$ . Par exemple, l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ssi  $f^*(\Pi_1(Y, y_0)) = 1$ .

Dans  $Y$ , soient  $y_0, y$  et deux chemins  $\gamma'$  et  $\gamma$  les reliant chacun. Dans le relèvement (penser à  $\mathbb{R}$ ),  $x = f(y)$  et  $\tilde{x}_0$  est dans la fibre, tout comme  $\tilde{f}(y)$ . Il existe  $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$  tel que  $\gamma' = \alpha \times \gamma$ , car tout isomorphisme entre deux objets est obtenu par précomposition par un automorphisme du premier à un isomorphisme fixé (résultat élémentaire valable dans toute catégorie). Si l'image de  $[\alpha]$  dans  $\Pi_1(X, x)$  est inclus dans  $P^*(\Pi_1(E, \tilde{x}_0))$ . Si  $x$  est l'image de  $y$  obtenue en utilisant  $\gamma$  et  $x'$  par  $\gamma'$ , alors l'unique relèvement  $\tilde{\alpha}$  de  $f^*([\alpha])$  est un chemin de  $x$  vers  $x'$ , or  $x = x'$  équivaut à  $\tilde{\alpha}$  est une boucle, lui-même équivalant à  $\alpha \in P^*(\Pi_1(E, \tilde{x}_0))$ . ■

*Remarque.* Pour un autre point base  $\tilde{x}_0'$ , les sous-groupes définitifs sont conjugués. En toute bonne fois, le sous-groupe définitif est donc la donnée d'une classe de conjugaison (l'espace étant supposé connexe).

### Corollaire

Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $f : Z \rightarrow X$  une application continue. On suppose que  $Z$  est simplement connexe. Alors  $f$  se relève en  $Z \rightarrow Y$ .

### Application. (*Relèvement sur le cercle*)

Si  $Y$  est connexe, une application continue  $f : Y \rightarrow S^1$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow R$  si et seulement si  $f$  est simplement homotope à une application constante, autrement dit si elle ne fait pas le tour du cercle.

Remarque : toute application  $Y \rightarrow S^n$ ,  $n \geq 2$ , admet un relèvement.

### Propriété. (*Équivalence des revêtements*)

Soient  $X_1, X_2, Y$  trois espaces où  $Y$  est connexe par arcs. Soient  $p_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $p_2 : X_2 \rightarrow Y$  deux revêtements tels que  $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ ,  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ . Alors il existe un homéomorphisme  $F : X_1 \rightarrow X_2$  tel que  $p_2F = p_1$  et  $F(x_1) = x_2$  si et seulement si  $p_{1*}(\pi_1(X_1, x_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2, x_2))$ .

On énonce des corollaires du théorème de relèvement.

### Corollaire

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, pour toute application continue  $f : Y \rightarrow B$  telle que  $Y$  soit localement connexe par arcs et simplement connexe, pour tous les  $x \in X$  et  $y \in Y$  tels que  $p(x) = f(y)$ , il existe un et un seul relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  de  $f$  tel que  $\tilde{f}(y) = x$ .

### Corollaire. (*Unicité du revêtement universel*)

Deux revêtements  $p : X \rightarrow B'$  et  $p' : X' \rightarrow B$  tels que  $X$  et  $X'$  soient simplement connexes et localement connexes par arcs, sont isomorphes. Soient  $x \in X$  et  $x' \in X'$  tels que  $p(x) = p'(x')$ . Il existe un unique isomorphisme de revêtements  $\phi : X \rightarrow X'$  avec  $\phi(x) = x'$ .

### 4.9.1.3 Monodromie

#### Théorème. (*Action de monodromie*)

On a une action à droite (c'est-à-dire qui renverse la composition)  $P^{-1}(x) \times \Pi_1(X,x) \longrightarrow P^{-1}(x)$ , dite *action de monodromie*, donnée pour  $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ ,  $x_0 \in P^{-1}(x)$ , par  $x_0 \cdot [\alpha]$  : l'extrémité de l'unique chemin relevant  $\alpha$ , basé en  $x_0$ .

▷ Rien à faire. ■

#### Théorèmes

1.  $\text{Stab}(x_0) = P^*(\pi_1(E,x_0)) \subseteq \pi_1(X,x)$ .
2. Cette action est transitive. En particulier  $p^{-1}(x)$  est en bijection avec  $\pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(E,x))$ .
3. Les groupes  $\{P^*(\pi_1(E,x_0)), x_0 \in P^{-1}(x)\}$ , forment une classe de conjugaison dans  $\pi_1(X,x)$ .

▷ Successivement :

1. Si  $x_0 \cdot [\alpha] = x_0$ , c'est exactement que le relèvement de  $\alpha$  dans  $E$  basé en  $x_0$  est une boucle, soit  $[\alpha] \in P^*(\pi_1(E,x_0))$ .
2. Soient  $x_0, x_1 \in P^{-1}(x)$ .  $E$  est connexe par arcs, donc il existe  $\gamma$  dans  $E$  de  $x_0 \rightarrow x_1$ . Soit  $\alpha = P^*(\gamma)$ , boucle basée en  $x$ . Par définition,  $x_0 \cdot [\alpha] = x_1$ .
3. Soit  $\gamma$  un chemin de  $x_0$  sur  $x_1$  avec  $\alpha = P^*(\gamma)$ . Alors  $P^*(\pi_1(E,x_0))$  et  $P^*(\pi_1(E,x_1))$  sont conjugués par  $[\alpha]$ . Réciproquement, si un tel  $\alpha$  existe, on peut relever ça en un chemin basé en  $x_0$ , en posant  $x_1 = \gamma(1)$ . ■

#### Corollaire. (*Validité du revêtement universel*)

Si  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement, si  $E$  est CPA et  $X$  simplement connexe, alors  $p$  est un homéomorphisme.

### 4.9.1.4 Classification des morphismes de revêtements

**Remarque importante.** Tout  $f \in \text{Hom}(p_1, p_2)$  est un relèvement de  $p_1$  au-dessus de  $p_2$ . En effet, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E_2 & \\ f \nearrow & \downarrow p_2 & \\ E_1 & \xrightarrow{p_1} & X \end{array}$$

et en particulier si  $E_1$  est connexe, deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux.

**Lemme**

Soit  $f \in \text{Hom}(P_1, P_2)$ ,  $x \in X$ . Alors  $f_x : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$ ,  $\tilde{x}_1 \mapsto f(\tilde{x}_1)$  est compatible avec  $=$  invariante sous l'action de  $\pi_1(X, x)$ .

▷ Soit  $x_1 \in P_1(x)$  et  $x_2 = f(x_1) \in P_2^{-1}(x)$ . Soit  $\gamma \in P_1(X, x)$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  un relèvement dans  $E_1$  de  $\gamma$  basé en  $x_1$ , avec  $x_1 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_1(1)$  et  $\tilde{\gamma}_2$  un relèvement de  $\gamma$  dans  $E_2$ , avec donc  $x_2 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_2(1)$ . Or  $f$  est un morphisme de revêtements,  $f_X(\tilde{\gamma}_1)$  est un relèvement de  $\gamma$  dans  $E_2$ , et comme  $f(\tilde{\gamma}_2(0)) = x_1 = \tilde{\gamma}_1(0)$ ,  $f^*(\tilde{\gamma}_1)$  est basé en  $x_2$ , c'est même égal à  $f^*(x_1 \cdot [\gamma]) = f^*(x_1) \cdot [\gamma]$ . ■

*Remarque.* On peut le dire ainsi : les actions de  $\text{Aut}(P)$  et de  $\pi_1(X, x)$  sur  $P^{-1}(x)$  commutent.

**Théorème. (*Théorème fondamental de la monodromie*)****L'application**

$$\text{Hom}(P_1, P_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\pi_1(X, x)}(P_1^{-1}(x), P_2^{-1}(x))$$

induite par la restriction à  $F = P_1^{-1}(x)$  est une bijection.

En particulier,  $\text{Aut}(P) \simeq \text{Aut}_{\pi_1(X)}(P^{-1}(x_0))$  est un isomorphisme de groupes.

**Lemme**

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement, de base  $B$  connexe et localement connexe par arcs. Si  $C$  est une composante connexe de  $X$ , alors  $p|_C : C \rightarrow B$  est un revêtement.

**Preuve.**

▷ L'injectivité vient de la connexité de  $E_1$ . Soit  $x_1 \in P_1^{-1}(x)$ . Soit  $h : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$ . Si  $h$  commute avec l'action de  $\pi_1(X, x)$ , alors elle est déterminée par  $h(x_1)$ . Soit  $x'_1 \in P_1^{-1}(x)$ , il existe  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  tel que  $x'_1 = x_1 \cdot [\gamma]$ . On a  $h(x'_1) = h(x_1) \cdot [\gamma]$ . Fabriquons un morphisme de revêtements. On a donc nos revêtements  $P_1 : E_1 \longrightarrow X$  et  $P_2 : E_2 \longrightarrow X$ . Or on a vu qu'un morphisme  $\tilde{P} : E_1 \longrightarrow E_2$  existe si et seulement si  $P^*(\pi_1(E_1, x_1)) \subseteq P_2^*(\pi_1(E_2, x_2))$  en tant que cas particulier de relèvement d'applications. Soit  $\gamma_1$  un lacet dans  $E_1$  basé en  $x_1$ . On a  $x_1 \cdot [P_1 \gamma_1] = x_1$ . Ainsi  $h(x_1 \cdot [P_1 \gamma_1]) = P_2^*(\Pi(E_2, x_2)) = x_2$ . ■

**Corollaire**

Sous ces hypothèses, la restriction à la fibre induit une bijection de l'ensemble des isomorphismes de revêtements de  $p$  sur  $p'$  à valeurs dans des bijections  $\pi_1(B, b)$ -équivariantes de la fibre  $F$  sur la fibre  $F'$ .

### Corollaire

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, de base  $B$  connexe et localement connexe par arcs, s'il existe  $b \in B$  tel que l'action de  $\pi_1(B, b)$  sur  $F = \pi^{-1}(b)$  soit triviale, alors  $p$  est un revêtement trivial.

### Corollaire. (*Propreté du revêtement universel*)

Tout revêtement d'un espace simplement connexe et localement connexe par arcs est trivial.

D'autre part :

### Corollaire

Si  $p_1, p_2$  sont des revêtements CALCA de base  $X \ni x$ , où  $\tilde{x}_i \in p_i^{-1}(x)$ , il existe un isomorphisme  $f$  de  $p_1$  vers  $p_2$  si et seulement si  $(p_1)_*(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$ .

### Heuristique

Un automorphisme de revêtements commute avec les projections, donc agit sur les fibres ; le groupe fondamental aussi ; ce que l'on dit, c'est qu'ils agissent de la même façon, en ce qu'ils se déterminent l'un l'autre.

Autrement dit, un automorphisme de revêtements est caractérisé par ce qu'il fait sur la fibre, puisque chaque fibre est reliée, par connexité par arcs (hypothèse CALCA), à tout le revêtement.

Récapitulons : prenons pour exemple en esprit  $X$  le cercle et  $E$  son revêtement canonique par la droite réelle représentée en tire-bouchon. On a vu que pour toute boucle de  $X$ , il y a une unique de façon de la relever dans le revêtement  $E$ , mais alors en un chemin. Intuitivement, les boucles dans  $E$  vont donc constituer le noyau de cette action (si c'est une boucle et non seulement un chemin, c'est que c'était seulement un point).

### Proposition

Soient  $p : X \rightarrow B$  un revêtement,  $b \in B$  et  $F = p^{-1}(b)$  la fibre au-dessus de  $b$ . Pour  $x \in F$  et  $g \in \pi_1(B, b)$  on note  $xg = \tilde{\alpha}(1)$  l'extrémité de l'unique relèvement de  $\alpha$  d'origine  $x$ .

Si  $B$  est connexe par arcs, l'application de  $F$  dans  $\pi_0(X)$  qui à  $x \in F$  associe sa composante connexe par arcs dans  $X$  induit une bijection

$$F/\pi_1(B, b) \simeq \pi_0(X)$$

entre  $\pi_0(X)$  et l'ensemble des orbites de  $\pi_1(B, b)$  dans  $F$ .

**Corollaire**

Si  $X$  est connexe par arcs, pour tout  $x \in F$ , l'application de  $\pi_1(B,b)$  dans  $F$  définie par  $g \mapsto xg$  induit une bijection  $p_*\pi_1(X,x) \setminus \pi_1(B,b) \simeq F$ .

En particulier, si  $X$  est connexe par arcs et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $p$  est un revêtement à  $n$  feuillets si et seulement si  $p_*\pi_1(X,x)$  est un sous-groupe d'indice  $n$  de  $\pi_1(B,b)$ .

**Corollaire**

Si  $X$  est connexe par arcs, alors  $p$  est un homéomorphisme si et seulement si  $p_* : \pi_1(X,x) \rightarrow \pi_1(B,b)$  est un isomorphisme de groupes, sa surjectivité suffisant.

**Corollaire. (*Construction du revêtement universel*)**

Un revêtement connexe par arcs d'un espace simplement connexe est un homéomorphisme.

**Proposition**

Soient  $G$  un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique  $X$  séparé et connexe par arcs par homéomorphismes,  $p : X \rightarrow B = G \setminus X$  la projection canonique,  $b \in B$  et  $x \in F = p^{-1}(b)$ . Pour tout  $\gamma \in \pi_1(B,b)$ , il existe un unique  $g_\gamma \in G$  tel que  $x\gamma = g_\gamma x$ . L'application  $\pi_1(B,b) \rightarrow G$  définie par  $\gamma \mapsto g_\gamma$  est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau  $p_*\pi_1(X,x)$ .

**Corollaire. (*Groupe fondamental par action de groupes*)**

Soient  $G$  un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique  $X$  séparé et simplement connexe, et  $B = G \setminus X$ . Alors  $\pi_1(B,b) \simeq G$ .

En particulier, un groupe fini agissant librement sur un espace séparé simplement connexe comme une variété simplement connexe, est le groupe fondamental de son quotient.

**Exemples. (*Groupes fondamentaux par revêtements*)**

1.  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . En effet,  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et la projection canonique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un revêtement. Plus généralement,  $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ .
2.  $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

D'autres corollaires :

**Corollaire**

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, d'espace total  $X$  connexe et localement connexe par arcs, si  $x \in X$ , alors  $\text{Aut}(p)$  et  $p_*(\pi_1(X,x)) \setminus N(p_*\pi_1(X,x))$  sont isomorphes.

Voici ce dont nous aurons besoin dans la suite

### Proposition

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement, d'espace total  $X$  connexe et séparé et  $B$  localement connexe. Le groupe discret  $\Gamma = \text{Aut}(p)$  des automorphismes de  $p$  agit continument proprement et librement sur  $X$ . Si  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $\Gamma$  et si  $f : \Gamma' \setminus X \rightarrow B$  est l'application induite par  $p$ , alors  $f$  est un revêtement, et la projection canonique  $\pi : X \rightarrow \Gamma' \setminus X$  est un morphisme de revêtements de  $p$  sur  $f$ .

### Proposition

Soient  $p : X \rightarrow B$  et  $p' : X' \rightarrow B$  deux revêtements d'espaces totaux  $X$  et  $X'$  respectivement connexes et de base  $B$  commune localement connexe. Si  $\phi : X \rightarrow X'$  est un morphisme de revêtements  $p \rightarrow p'$ , alors  $\phi$  est un revêtement.

#### 4.9.1.5 Revêtements galoisiens

Une référence : *Topologie algébrique élémentaire* de PAULIN.

#### Théorème. (*Compatibilité de revêtements*)

Soit  $P : E \rightarrow X$  un revêtement (connexe par arcs). Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $\exists x \in E \quad \pi_1(E, x) \subseteq \pi_1(X, P(x))$  est distingué ;
2.  $\forall x \in E \quad \Pi_1(E, x) \subseteq \pi_1(X, P(x))$  est distingué ;
3. Le groupe  $\text{Aut}(P)$  agit transitivement sur  $P^{-1}(x_0)$ .

▷ Les deux premiers points sont équivalents, car on a vu que tous les  $\pi_1(E, x)$  sont conjugués dans  $\pi_1(X, P(x))$ . Le deuxième point équivaut à ce que si  $\tilde{x}, \tilde{y} \in P^{-1}[x_0]$ ,  $P(\pi_1(E, \tilde{x})) = P(\pi_1(E, \tilde{y}))$ , d'où  $\exists f \in \text{Aut}(P)$  tel que  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . La réciproque est claire. ■

*Remarque.* L'action de  $\text{Aut}(P)$  est en toute généralité libre (elle agit sans point fixe). La transitivité de l'action par monodromie est donc équivalente à sa simple transitivité.

#### Définition. (*Revêtement galoisien*)

On dit qu'un revêtement est *galoisien*, ou *régulier*, ou *normal*, s'il vérifie l'une des propriétés précédentes.

*Remarque.* Si  $P$  est galoisien, on a une bijection  $\text{Aut}(P) = \pi_1(X)/\pi_1(E)$  ensembliste où  $\pi_1(E) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ .

**Fait**

À un homomorphisme surjectif de groupes  $\pi_1(B, b_0) \rightarrow G$  on associe un revêtement régulier  $\pi : E \rightarrow B$ .

**Théorème. (*Revêtements galoisiens et monodromie : théorème fondamental qui font de ces revêtements des objets « normaux »*)**

Si  $P$  est galoisien, l'action par monodromie induit un isomorphisme de groupe  $\text{Aut}(P) \simeq \pi_1(X, x)/P^{-1}(\pi_1(E, \tilde{x}))$ , où  $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$ .

▷  $\text{Aut}(P) = \text{Aut}_{P_1(X)}(P^{-1}(x))$ . On veut un morphisme  $\pi_1(X, x) \longrightarrow \text{Aut}_{\pi_1(X, x)}(P^{-1}(x))$ . Si  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ ,  $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$ , on relève  $\gamma$  en un chemin  $\tilde{\gamma}$  dans  $E$  basé en  $\tilde{x}$ , et soit  $\tilde{y}$  son extrémité. Puisque  $P$  est galoisien, il existe (par transitivité simple) un unique  $f_\gamma \in \text{Aut}(P)$  tel que  $f_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Comme tous les  $\pi_1(E, \tilde{x})$  sont égaux (dans  $\pi_1(X, x)$ ). Ainsi,  $f_\gamma$  ne dépend que de  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ . On a donc construit une application  $\pi_1(X, x) \longrightarrow \text{Aut}(P)$ . Par construction, c'est un morphisme de groupe. Or  $f_\gamma = id$  si et seulement si  $\tilde{\gamma}$  est une boucle, si et seulement si  $\gamma \in \pi_1(E, \tilde{x})$ . Par le théorème d'isomorphisme, on a alors  $\pi_1(X, x)/\pi_1(E, \tilde{x}) \simeq \text{Aut}(P)$ . ■

Le théorème suivant conclut cette section.

**Définition. (*Action totalement discontinue*)**

Soit  $G$  un groupe discret. L'action de  $G$  sur un espace  $X$  est continue si et seulement si pour tout  $g \in G$ ,  $g$  agit par homéomorphisme.

On dit que l'action de  $G$  est *totalement discontinue* si  $\forall x \in X \ \exists U \in \gamma(x) \quad U \cap g \cdot U \neq \emptyset, \ g = id$ .

*Remarque.* Dans ce cas, l'action de  $G$  est libre, mais c'est encore plus fort.

**Théorème. (*Les revêtements galoisiens CALCA sont des quotients de trucs connexes par des groupes discrets*)**

Soit  $G$  agissant sur  $E$  CALCA de façon totalement discontinue. Alors  $P : E \longrightarrow E/G$  est un revêtement galoisien, et  $\text{Aut}(P) = G$ .

▷ On avait vu que  $P$  est une application ouverte. Soit  $x \in E$ . Soit  $U \in \gamma(x)$ ; pour tout  $g \neq id$ ,  $g \cdot U \cap U = \emptyset$ . Or  $U$  est ouvert, donc  $P(U)$  est ouvert. Par construction,  $P^{-1}(P(U)) = \coprod_{g \in G} g \cdot U$  et  $g \cdot U \simeq U$ .

Secundo, on a un morphisme de  $G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ . Par construction, c'est un élément de  $\text{Aut}(P)$ , c'est-à-dire  $P(x) = P(g \cdot x)$ . Comme l'action de  $G$  libre, ce morphisme est injectif. Montrons qu'il est surjectif. Soit  $f \in \text{Aut}(P)$  et soit  $\tilde{x}_0 \in E$  et  $x_0 = P(\tilde{x}_0)$ . Comme  $f(\tilde{x}_0) \in P^{-1}(x_0)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $f(\tilde{x}_0) = g \cdot \tilde{x}_0$ . L'action de  $f$  sur  $P^{-1}(x_0)$  coïncide avec l'action de  $g$ . Comme  $E/G$  est connexe, alors l'action de  $f$  et de  $g$  coïncident partout. ■

*Remarque.* On a  $G \simeq \pi_1(X,x)/\pi_1(E,\tilde{x}) = \pi_1(E/G, q(x))/q_*(\pi_1(E,x))$  où  $q : E \rightarrow E/G$  par le théorème précédent.

L'analogie à la théorie de Galois des extensions de corps apparaît ici : cette remarque, en tant que réciproque du théorème précédent, dit que tous les revêtements de Galois sont précisément de cette forme. Ainsi :

$$\{\text{revêtements galoisiens}\} \longleftrightarrow \{\text{sous-groupes distingués de } \Pi(X,x)\}.$$

### Exemples

1. Si  $E$  est simplement connexe,  $\pi_1(E/G) = G$ .
2.  $\mathbb{Z}^n$  agit sur  $\mathbb{R}^n$  par translation. On a  $(S^1) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  le  $n$ -tore, d'où  $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$ . On retrouve aussi le groupe fondamental du cercle (ce qui n'était pas trivial).
3. Le théorème nous dit autre chose, dont avec la précédente, deux propositions qui ont l'air bien différentes et dont aucune n'est triviale. Les revêtements fermés de  $S^1$  sont donnés par  $P_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ . Le groupe d'automorphisme est  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On a  $P_n^* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ,  $k \longmapsto nk$ . Grâce au théorème, à équivalence près, ce sont les seuls.

### Corollaire

Soit  $P : E \longrightarrow X$  un revêtement galoisien. Alors  $\text{Aut}(P) := A(P)$  agit de façon totalement discontinue et  $P : E/A(P) \longrightarrow X$  est un homéomorphisme.

#### 4.9.1.6 Revêtements universels

##### Fait. (*Transitivité des revêtements*)

Tout revêtement d'un revêtement est un revêtement.

Tout produit de deux discrets est un discret.

##### Définition. (*Revêtement universel*)

Soit  $X$  un espace topologique CALCA. Un *revêtement universel* de  $X$  est un revêtement  $P : E \longrightarrow X$  avec un espace total  $E$  simplement connexe. Autrement dit, c'est le recouvrement de groupe définitif trivial.

##### Lemme

Un revêtement universel est galoisien.

On peut réénoncer un corollaire précédent par :

### Proposition

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement d'espace total  $X$  simplement connexe, alors  $p$  est universel, au sens suivant : soit  $B$  un espace connexe et localement connexe par arcs. Un revêtement universel de  $B$  est un revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$  d'espace total  $\tilde{B}$  connexe et tel que pour tout revêtement  $p : X \rightarrow B$  d'espace total  $X$  connexe, pour tout  $\tilde{b} \in \tilde{B}$  et  $x \in X$  tels que  $\pi(\tilde{b}) = p(x)$ , il existe un morphisme de revêtements  $\phi : \tilde{B} \rightarrow X$  de  $\pi$  sur  $p$  tel que  $\phi(\tilde{b}) = x$ . (S'il existe, il est unique, puis unique à isomorphisme près, isomorphisme unique une fois effectué un choix de point base dans la fibre au-dessus d'un point base de  $B$ .)

Justifions l'usage de l'article défini ci-dessus.

### Proposition

Soit  $p_u : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement universel et  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in E, \tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ . Il existe un unique  $f \in \text{Hom}(p_u, p)$  tel que  $f(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$ .

### Corollaire

Si  $X$  admet un revêtement universel  $E$ , alors

$$\begin{aligned} & \{\text{classes d'isomorphismes de revêtements}\} \longleftrightarrow \\ & \{\text{classes de conjugaison dans l'ensemble des sous-groupes de } \pi_1(X, x)\}, \end{aligned}$$

soit  $G \subseteq \Pi(X, x) \rightsquigarrow E/G$ .

*Remarque.* De plus, les classes d'isomorphismes de revêtements finis sont en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini du  $\pi_1$ .

### Heuristique

Soit  $\Gamma$  le GF. Si  $H \leq G$  est d'indice  $d$ ,  $\Gamma$  agit sur l'ensemble des coensembles  $\Gamma/H$  qui sont finis de cardinal  $d$ . On obtient donc une représentation de  $\Gamma$  à travers  $\mathfrak{S}(\Gamma/H)$ , notée  $\rho_H$ . Changer  $H$  par un conjugué  $H' = zHz^{-1}$  induit une bijection  $c_z : \mathfrak{S}_d(\Gamma/H) \rightarrow \mathfrak{S}_d(\Gamma/H')$ . On note  $C_z$  la conjugaison par  $z$ . On a donc un opérateur d'entrelacement entre représentations :

$$c_z \circ \rho_H = \rho_{H'} \circ C_z$$

et l'on peut aussi observer que le stabilisateur du coensemble  $H$  est le sous-groupe  $H$  lui-même, et que  $\text{Stab}(gH) = C_g(H)$ .

### Conséquence. (*Unicité du revêtement universel*)

Un revêtement universel est unique à isomorphisme près.

### Corollaire

Tout recouvrement d'un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe lui est homéomorphe.

Plus généralement :

### Théorème

Le groupe des automorphismes de revêtements de  $\tilde{X} \rightarrow X$  est isomorphe à  $\langle\langle p_*(\pi_1(\tilde{X}))\rangle\rangle / p_*(\pi_1(\tilde{X}))$ .

**VOC** Un revêtement dont le sous-groupe définitif est normal est appelé *revêtement régulier* ou *normal*. En particulier le revêtement universel est normal et son groupe d'automorphismes est  $\pi_1(X)$ .

### Exemple. (*Revêtement normal*)

Le disque unité épointé  $D^*$  est recouvert par le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  qui est son revêtement universel, via  $t \mapsto e^{2\pi it}$ . Le groupe fondamental  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{H}$  par translations entières. Le revêtement régulier correspondant au sous-groupe engendré par  $e^{2\pi im}$  est encore le disque, avec un groupe de revêtement isomorphe à  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Ainsi, les revêtements finis de  $D^*$  sont équivalents aux  $z \mapsto z^m, m \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 11

Trouver les revêtements réguliers du tore recouvert par le plan.

### Définition. (*Espace des chemins*)

Soit  $X$  un espace topologique CALCA et séparé, et  $x_0 \in X$ . On appelle *espace des chemins*  $P(X, x_0)$  l'ensemble des chemins de  $x$  basé en  $x_0$  (c'est une pieuvre).

On a  $P : P(X, x_0) \longrightarrow X, \gamma \longmapsto \gamma(1)$  surjectif, car  $X$  est CALCA, et un revêtement. C'est simplement connexe.

### Exemples

1.  $P(S^1, 1) = \mathbb{R}$ . Classification des revêtements de  $S^1$ .
2. Classification des revêtements à deux feuillets d'un bouquet de cercle.

Voilà une illustration des considérations précédentes qui démontre au passage la supériorité définitive de la topologie sur l'algèbre. Il existe une preuve algébrique imbuvable du résultat suivant, qui ne peut que pâlir devant la concision apportée par la preuve de la topologie algébrique.

**Théorème. (*Nielsen-Schreier*)**

Tout sous-groupe de  $F_2$  est libre.

▷ On fait une preuve sans détail.  $F_2$  est le groupe fondamental du bouquet de sphères  $S^1 \vee S^1$  pointées en 1, par le théorème de van Kampen. Cet espace admet bien un revêtement universel : en effet, on peut le représenter comme un graphe infini sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $b$  l'axe des abscisses ( $\bar{b} = b^{-1}$ ) dans le sens opposé, et  $a$  dans l'axe des abscisses ; la donnée d'un mot sur  $F_2$  correspond exactement à un chemin partant de l'origine et fini sur ce revêtement, que nous notons  $\Gamma$  (il faudrait en fait définir la topologie sur des arbres). Ainsi, d'après le théorème précédent, prendre un revêtement de  $S^1 \vee S^1$  revient à prendre des sommets de ce graphe et à les attacher (quotient par l'action d'un sous-groupe  $G \subseteq F_2$ ). Par exemple,  $abaab \in G$  peut se refermer en une boucle par un autre chemin, d'ailleurs très arbitraire. Donc  $\Gamma/G$  est un bouquet de cercles, éventuellement un nombre infini. Si on a  $n$  cercles,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , c'est facile (puis il faut généraliser au cas dénombrable). Ainsi,  $\pi_1(\Gamma/G, x_0) = \star_n \mathbb{Z} = F_n$ . Ainsi  $G \simeq F_n$  est donc libre. ■



Contrairement aux cas des groupes abéliens libres =  $\mathbb{Z}$ -modules libres, un sous-groupe d'un groupe libre n'est pas forcément engendré par un ensemble de plus petit cardinal ! Contre-exemple :

**Proposition**

Soit  $X$  séparé CALCA. Alors  $X$  admet un revêtement universel si et seulement s'il est *semi-localement simplement connexe* si pour tout  $x \in X$ , il existe  $U \in \mathcal{V}(X)$  tel que  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  soit triviale.

**Corollaire**

Tout espace topologique séparé, connexe et localement contractile admet un revêtement universel.

**Exercice 12**

Soient  $M_1, M_2$  deux variétés ayant le même revêtement universel  $\tilde{M}$  avec des projections  $p_1 : \tilde{M} \rightarrow M_1$  et  $p_2 : \tilde{M} \rightarrow M_2$ . On note  $G_1 = \text{Aut}(p_1)$  et  $G_2 = \text{Aut}(p_2)$ . Montrer que si  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$  est un homéomorphisme, on peut le relever en un automorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{M}$  de sorte que  $G_2 = \tilde{\varphi} \circ G_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ .

**Théorème**

Soit  $p : E \longrightarrow B$  un revêtement simplement connexe et localement connexe par arcs. Alors  $\pi_1(B) \simeq \text{Aut}(p)$ .

### Application

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

#### 4.9.1.7 Revêtements images réciproques

#### 4.9.1.8 Classification des revêtements

## 4.10 Notions introductives d'algèbre homologique

### 4.10.1 Complexes associés à un espace topologique

Soit  $R$  un anneau commutatif. Pour une suite exacte donnée, l'image est facile à construire, le noyau facile à tester ; l'égalité entre les deux revient à construire les solutions d'une équation de la forme  $f(x) = 0$ . L'algèbre homologique va permettre de quantifier la connaissance de ces solutions.

On rappelle qu'un groupe abélien correspond exactement à la notion de  $\mathbb{Z}$ -module.

Un *complexe de  $R$ -module* est une suite de  $R$ -modules :

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} \dots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où les  $d_i$  indexés par  $\mathbb{N}$  sont des morphismes de modules tels que  $d_i d_{i+1}$ , soit  $\text{Im}(d_{i+1}) \subseteq \text{Ker}(d_i)$ . On note  $(C, d)$  (parfois, par convention, on utilise  $(M_0, d_0)$ ) et l'on indexe la chaîne par  $\mathbb{Z}$ .

On définit pour  $n = i$  l'*espace des cycles*  $Z_n(C, d) = Z_n = \text{Ker}(d_n)$  et on appelle les *bords*  $B_n(M_0, d_0) = \text{Im}(d_{n+1})$ . On a  $B_n \subseteq Z_n$  et on appelle *homologie* de  $(C, d)$  les quotients  $H_n = H_n(C, d) = Z_n / B_n$ , le  $n$ -ième groupe d'*homologie*. On appelle  $d$  en général la *différentielle*.

On dit que le complexe est *exact* en  $C_n$  si et seulement si  $H_n = 0$ .

On dit que  $(C, d)$  est *exact*, ou *acyclique*, si  $H_n = 0$  pour tout  $n$ , c'est-à-dire s'il est exact en chacun de ses termes.

Un *morphisme de complexes* avec la définition précédente, noté  $f : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ , est une collection de morphismes  $f_i : C_i \longrightarrow C'_i$  qui commute avec la différentielle :

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i-1} \\ C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} \end{array}$$

commutatif. Un tel morphisme induit  $[f_i] : H_i \longrightarrow H'_i$ .

On dit que le morphisme de complexe de modules  $f$  est un *quasi-isomorphisme* si les  $[f_i]$  sont des isomorphismes.

## 4.10.2 Homologie simpliciale

### 4.10.2.1 $\Delta$ -complexe

On utilise la notion de SIMPLEXE, qui permet de former de manière combinatoire des espaces topologiques.



Un « simplexe » qui n'a pas la bonne orientation, n'en est pas un.

#### Définition. ( $\Delta$ -complexe)

Une structure de  $\Delta$ -complexe sur  $X$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{A}$ , d'applications continues  $\sigma_\alpha : \Delta_{n_\alpha} \longrightarrow X$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tels que :

1.  $\sigma_\alpha|_{\Delta_{n_\alpha}^*}$  soit injective,
2.  $\forall x \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad x \in \text{Im}(\sigma_\alpha)$ ,
3.  $\forall i \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \sigma_{\alpha|\partial_i \Delta_{n_\alpha}} = \sigma_\beta$  pour un certain  $\beta \in \mathcal{A}$ ,
4.  $A \subseteq X$  est ouvert ssi  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  sont tous ouverts, autrement dit, la topologie sur  $X$  est la topologie finale associée à  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ .

$\mathcal{A}$  est un ensemble d'indices.

On dit :  $e_{n_\alpha}$  est un simplexe dans  $E$  si on le plonge naturellement dans un espace  $E$ .

#### Fait

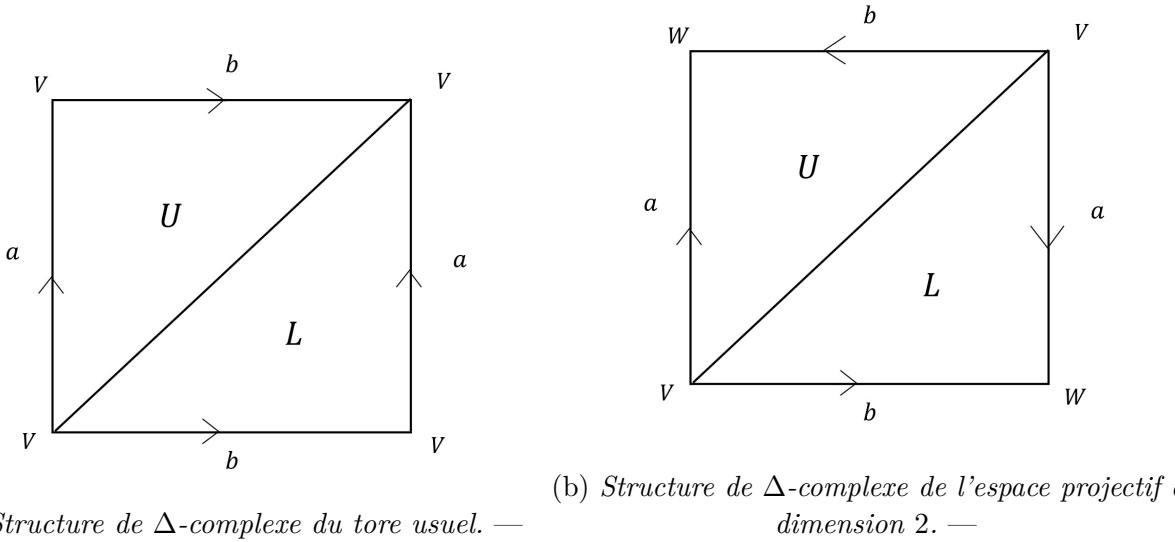
La quatrième condition est automatiquement vérifiée dans le cas d'une famille  $\mathcal{A}$  finie.

#### Exemples. ( $\Delta$ -complexe)

1. La sphère  $S^1$  est un  $\Delta$ -complexe : elle est composée d'un 0-simplexe, un point, et d'un 1-simplexe, le segment, dont les deux extrémités sont jointes sur ce point.
2. Le tore admet une structure de  $\Delta$ -complexe, composée d'un 0-simplexe, de 3 1-simplexes et de 2 2-simplexes.

En effet, il suffit de recoller deux triangles égaux sur leurs hypoténuses respectives, et l'on obtient un carré. Il suffit enfin de prendre les segments des côtés, qui vont être deux à deux égaux, et la diagonale pour 1-complexes, et l'on peut faire le même artifice de recollement d'un carré que pour la structure de CW-complexe du tore.

3. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^2$  est un  $\Delta$ -complexe (*voir le schéma ci-dessous*).

FIGURE 4.10.1 : Exemples de  $\Delta$ -complexes classiques. —**Propriété. (Lien CW-complexe et  $\Delta$ -complexe)**

Tout  $\Delta$ -complexe est en particulier un CW-complexe.

**Remarque importante.** Tout ce dont on va parler ne dépend pas vraiment des  $\sigma_\alpha$ , mais seulement de leurs images + des informations combinatoires concernant la position des sommets + l'ordre des sommets/l'orientation des arêtes.

**Définition. (Complexe de chaîne simplicial)**

Étant donnée une structure de  $\Delta$ -complexe sur  $X$ , on définit un *complexe de chaînes* :

$$C_n^\Delta(X) = \left\{ \sum_{\text{finies}} n_i \underbrace{e_n^\alpha}_{=\sigma_\alpha(\Delta_n), \alpha \in \mathcal{A}, \text{ tel que } n_\alpha = n} \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

et on définit la différentielle sur ce simplexe de chaînes  $\delta_n$  par :

$$\partial_n \sigma(\Delta_n) = \sum_i (-1)^n \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]).$$

**Exemples. (Complexes de chaîne, différentielles)**

- On considère le 1-simplexe (segment) de sommets  $V_0, V_1$ , orienté de  $V_0$  à  $V_1$ . Sa différentielle est  $[V_1] - [V_0]$ .
- On considère le 2-simplexe (triangle) de sommets  $V_0, V_1, V_2$ , orienté de  $V_0$  à  $V_1$ , de  $V_1$  à  $V_2$  et de  $V_0$  à  $V_2$ . Alors sa différentielle s'exprime :  $[V_0V_1] + [V_1V_2] - [V_0V_2]$ .

**Lemme**

C'est bien un complexe de modules, i.e.  $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ .

▷ Soit  $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ . Alors  $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n])$ , puis  $\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_n])$ . ■

**VOC** On appelle et l'on note  $H_n^\Delta$  le  $n$ -ième groupe d'homologie simpliciale de  $(X, \Delta)$ , le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $(X, \Delta)$ .

**Exemples. (*Groupes d'homologie simpliciaux*)**

1. Dans le premier cas, la différentielle vaut  $b - a + d - c + f - d$ .
2. Dans le deuxième cas, la différentielle vaut  $[ab] + [bc] + [cd] + [de] + [ea] = 0$ .
3. La concaténation cyclique de trois 1-simplexe ne donne pas un 2 simplexe, faute d'orientation. L'alternance dans la somme de la différentielle permet de rectifier cette construction.

Plus explicitement, dans le troisième cas présenté, les 1-cycles sont les cycles dans  $X$ . La différentielle vaut  $[ab] + [bc] + [ca] = [ab] + [bc] - [ac]$ . On remarque que  $[ab]$  correspond au 1-simplexe de sommets  $a, b$  orienté de  $a$  à  $b$ , et  $[ba]$  au 1-simplexe d'orientation opposée.

Généralement, en homologie singulière, la plaie est le choix des signes...

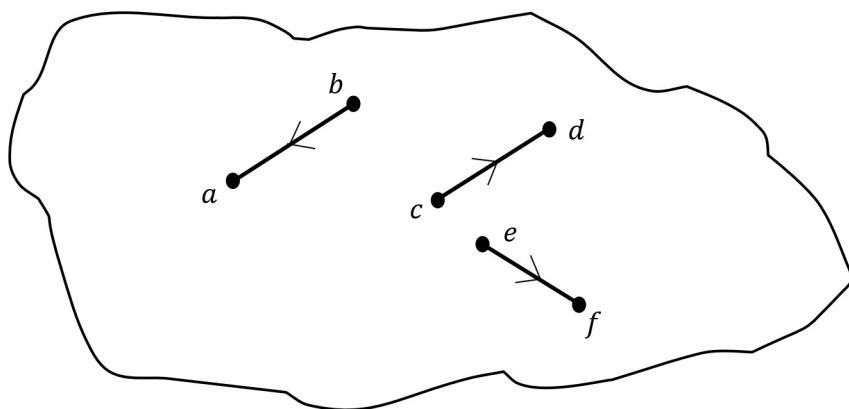


FIGURE 4.10.2 : Différentielle simpliciale sur trois branches. — Un premier exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

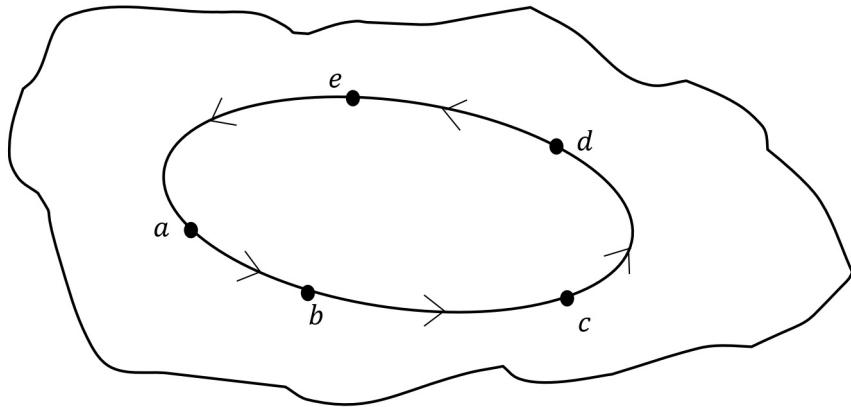


FIGURE 4.10.3 : Différentielle simpliciale sur le pentagone. —  
Un deuxième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

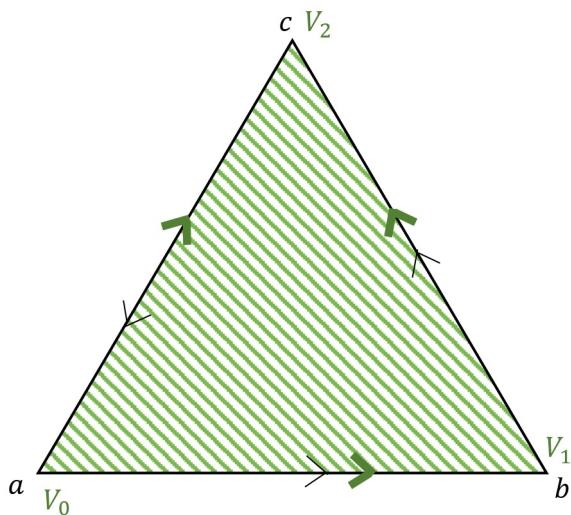


FIGURE 4.10.4 : Différentielle simpliciale sur le triangle. —  
Un troisième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

**Exemples. (Toy-models : homologie de la sphère, du tore et du plan projectif)**

1. (*Homologie de la sphère*) Prenons la sphère de sommet  $V$  selon le 1-simplexe  $a$ , orientée dans le sens anti-horaire. Alors  $\partial(a) = [V] - [V] = 0$ . On a  $C_0^\Delta = \mathbb{Z}$ ,  $C_1^\Delta = \mathbb{Z}$ , d'où la chaîne  $\dots 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow 0$ . Ainsi,  $H_0^\Delta = \mathbb{Z} = H_1^\Delta$ .
2. (*Homologie du tore*) Dans le cas du tore (on reprend les notations de la figure précédente),  $\partial_1(a) = [U] - [U] = 0$ ,  $\partial_1(b) = 0$ , puis  $\partial_2(U) = \partial_2(V) = a + b - c$ . On en déduit la chaîne  $\dots \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow 0$ . Ainsi,  $H_0 = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \mathbb{Z}^2$  et  $H_2 = \mathbb{Z}$ .
3. (*Homologie du ruban de Möbius*)

4. (*Homologie du plan projectif*) Dans le cas du plan projectif (on reprend les notations de la figure précédente),  $\partial_1(a) = [W] - [V] = \partial_1(b)$ ,  $\partial_1(c) = 0$ , puis  $\partial_2(U) = c + b - a$  et  $\partial_2(L) = c + a - b$ , ces deux derniers étant linéaires indépendants. D'où la chaîne  $0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} 0$ . Ainsi  $\text{Im}(\partial_1) = \langle [W] - [V] \rangle$ ,  $\text{Ker}(\partial_2) = 0 = \text{Im}(0)$ . Ainsi  $H_2 = 0$ . De plus,  $\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}^2 = \langle c, a - b + c \rangle$  et  $\text{Im}(\partial_2) = 2c$  d'où  $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est le premier exemple de groupe d'homologie qui n'est pas un groupe libre. D'ailleurs,  $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ .

#### 4.10.2.2 Complexes simpliciaux

On généralise les  $\Delta$ -complexes en ne prenant plus, plus que des simplexes standards.

##### Définition. (*Complexe simpliciel*)

Un *complexe simpliciel*  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  est une collection de simplexes dans  $\mathbb{R}^N$  tel que toute face de  $K$  est aussi dans  $K$  et l'intersection de deux simplexes est une face de chacun d'eux.

##### Propriété. (*Lien $\Delta$ -complexe et complexe simpliciel*)

Tout  $\Delta$ -complexe est en particulier un complexe simpliciel. Réciproquement, tout complexe simpliciel est homéomorphe à un  $\Delta$ -complexe.

▷ Il s'agit de trianguler des polygones, tétraédriser des polyèdres, etc. On utilise ensuite que tous les convexes compacts sont homéomorphes dans  $\mathbb{R}^N$ . ■

##### Définition. (*Structure de complexe sur un complexe simpliciel*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $K$  un complexe simpliciel. Une structure de  $K$ -complexe sur  $X$  est la donnée d'application  $\Delta \longrightarrow X$ ,  $\Delta \in K$  injectives. Pour tout  $x \in X$ , il existe  $\Delta \in K$  tel que  $x$  est dans l'image de  $\Delta$ .

Soyons plus formels :

##### Définition. (*Complexe simplicial géométrique*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un *complexe simplicial géométrique* dans  $\mathbb{R}^n$  est une collection  $\mathcal{K}$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  telle que :

- ★ toute face d'un simplexe dans  $\mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{K}$  ;
- ★ l'intersection de deux simplexes dans  $\mathcal{K}$  est toujours leur face commune ;
- ★ la collection  $\mathcal{K}$  est localement finie.

Le *support*  $\mathcal{K}$  d'un complexe simplicial géométrique  $\mathcal{K}$  est la réunion dans  $\mathbb{R}^n$  de tous les simplexes de  $\mathcal{K}$ . Un *sommet* de  $\mathcal{K}$  est un 0-simplexe de  $\mathcal{K}$ .

**Définition. (*Complexe simplicial*)**

Un *complexe simplicial* est un espace topologique homéomorphe au support d'un complexe simplicial géométrique.

**4.10.3 Vers l'homologie singulière**

On définit  $C_n(X)$ , le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par toutes les applications continues  $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ . On définit la différentielle  $\partial$  de la même façon.

**Théorème**

L'application évidente

$$(C^\Delta(X), \partial) \longrightarrow (C(X), \partial)$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce théorème, dont l'application calculatoire est éminemment intéressante, ne connaît pas de preuve élémentaire.

**Théorème. (*Hurewicz*)****Exercice 13**

Montrer que l'abélianisé de  $F_n \star_n \mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}^n$ .

# Chapitre 5

## Homologie

### Résumé

En mathématiques, l'homologie est une manière générale d'associer une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets mathématiques tels que des espaces topologiques. Les groupes d'homologie ont été définis à l'origine dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique, mais c'est chez nous qu'il convient le mieux de l'introduire. La motivation initiale pour définir les groupes d'homologie était l'observation que deux formes peuvent être distinguées en examinant leurs trous. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est solide et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un trou bidimensionnel alors que le cercle renferme un trou unidimensionnel. Cependant, étant donné qu'un trou n'est « pas là », définir un trou et distinguer différents types de trous n'est pas évident. L'homologie était à l'origine une méthode mathématique rigoureuse pour définir et classer les trous dans une variété. Sommairement, un cycle est dans ce formalisme une sous-variété fermée, une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une classe d'homologie, qui représente un trou, est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un trou, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle, mais qui « n'est pas là ». Il existe de nombreuses théories d'homologie. Un type particulier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées. Lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique, à l'instar des espaces topologiques, le  $n$ -ième groupe d'homologie représente le comportement dans la dimension  $n$ . La plupart des groupes d'homologie ou des modules peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective abstraite, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée.

## 5.1 Idée

**L**'homologie quantifie l'inexactitude des suites de morphismes.

### Exercice 1

- Soit  $G$  un groupe de Lie. Notons  $\Delta$  la projection diagonale  $G \times G, x \mapsto (x,x)$ . Montrer que l'on peut compléter la suite

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{?} ? \longrightarrow 0$$

de sorte qu'elle soit exacte scindée.

- Est-ce vrai pour un groupe topologique en général ?

▷ **Éléments de réponse.**

- Le problème revient à trouver un automorphisme (difféomorphique) de  $G \times G$  tel que pour un certain  $x_0 \in G$ , on ait  $(x,x_0) = (x,x)$  pour tout  $x \in G$ . On pose  $(x,y) \mapsto (x,x+y)$  et  $x_0 = 0$ .
- Non. On peut considérer  $G = S^2$ .

## 5.2 Homologie simpliciale

**O**n a développé en détail cette théorie simplifiée de l'**HOMOLOGIE SINGULIÈRE** dans l'introduction à l'homologie du chapitre **TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE**.

On aura l'occasion de préciser en quoi elle est un cas particulier de l'homologie générale des espaces topologiques, dite homologie singulière, après l'étude de l'homologie cellulaire qui en est elle-même un cas particulier.

## 5.3 Homologie singulière

### 5.3.1 Groupes d'homologie

**Mnémonik :** les groupes d'homotopie sont faciles à introduire, les groupes d'homologie sont faciles à calculer. Personne n'est parfait...

#### 5.3.1.1 Définition de l'homologie singulière

L'homologie singulière est l'*homologie générale des espaces topologiques*. De même que l'homotopie au sens du groupe fondamental, elle est définie sans aucune hypothèse sur l'espace, en particulier, on n'a pas besoin de prendre un espace séparé. Cela dit, on étudiera en premier lieu la topologie des variétés qui sont des espaces séparés, à base dénombrable de voisinages, localement compacts et localement connexes par arcs.

→ *Notation.* Soit  $k$  un entier naturel. On note  $T^k$  le  $k$ -simplexe standard, notion introduite dans la section sur les SIMPLEXES de la TOPOLOGIE GÉNÉRALE. Dans ce contexte, on note souvent  $(v_0, \dots, v_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Définition. (*Simplexe singulier*)

Soit  $k$  un entier naturel. Soit  $\sigma : T^k \rightarrow X$  une application continue, où  $X$  est un espace topologique. On dit que c'est un  $k$ -simplexe singulier de  $X$ .

**VOC** Le terme *singulier* marque le fait que, contrairement à l'homologie simpliciale, on n'a pas besoin que le plongement de  $T^k$  dans  $X$  ait aucune régularité : il peut être non injectif, avoir des singularités, en un mot, il est quelconque.

### Heuristique

Si  $k = 2$ , on a affaire à une *quasi-triangulation*.

### Définition. (*Chaîne singulière dans un espace*)

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -chaîne singulière dans un espace topologique  $X$  est une somme finie formelle

$$n_1\sigma_1 + \dots + n_m\sigma_m$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des  $k$ -simplexes singuliers de  $X$ . L'ensemble des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  forme donc un groupe abélien libre de base  $X^{T^k}$ , que l'on peut aussi voir comme un  $\mathbb{Z}$ -module, et que l'on note  $C_k(X)$ .

Le *support* d'une chaîne singulière est la réunion de la réunion des images des simplexes singuliers apparaissant dans sa décomposition.

### Définition-propriété. (*Complexe de chaînes singulières*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\mathcal{C}(X)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  et pour tout  $\sigma$   $i$ -simplexe singulier de  $X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\partial_i(\sigma) := \sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_i)}$$

où  $\Delta_{(v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_i)}$  décrit un plongement affine de  $T^{i-1} \rightarrow T^i$  en omettant le sommet  $v_j$ . Le morphisme *differentielle* ou *bord*  $\partial_i$  est alors définie sur tout  $C_i(X)$  par linéarité<sup>a</sup>. On note  $\partial$  ou  $\partial^X$  la donnée des  $(\partial_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_k(X) = \begin{cases} \text{Ker}(\partial_k) & \text{si } k \geq 1 \\ C_0(X) & \text{sinon}^b \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien des cycles de ce complexe dit *k-cycles* de  $X$ ,  $B_k(X) = \text{Im}(\partial_{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des bords de ce complexe *k-bords* ou *k-limites* de  $X$  et  $H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$  le  $k$ -ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle *k-ième groupe d'homologie (singulière) de X*. C'est un quotient d'un sous-groupe de  $C_k(X)$ . Bien sûr,  $\mathcal{C}(X)$  est exact en  $k \in \mathbb{N}$  si et seulement si  $H_k(X) = 0$ .

Deux cycles, qui sont des chaînes singulières, sont *homologues* si leur différence est un bord. Un cycle est *homologue à zéro* si c'est un bord.

<sup>a</sup> Dans toute la suite, on utilisera librement que, tous les objets en jeu étant encore des sous-groupes (noyau, image, quotients, etc.), il suffit de vérifier les inclusions sur une famille génératrice, à savoir les simplexes singuliers qui engendent les chaînes singulières.

<sup>b</sup> Ce qui revient à compléter le complexe à droite par  $C_0(X) \xrightarrow{\partial_0=0} 0$ , procédé classique en homologie lorsqu'on a affaire à un complexe arrêté.

▷ Pour affirmer que  $\mathcal{C}(X)$  est un complexe, ce qui permet la construction des groupes d'homologie, puisqu'il faut avoir  $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$  pour parler du quotient, il faut vérifier que  $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$  pour tout entier  $i \geq 0$ . C'est un calcul classique de différentielle par somme alternée. ■

→ *Notation.* En général, pour un espace  $X$ , on note  $C_*(X)$  le  $*$ -ième groupe de chaînes singulières de  $X$ , sans fixation nécessaire à un rang. Cette notation s'étend aux groupes  $H_*(X)$  d'homologie et aux complexes relatifs.

### Remarques.

1. L'image d'un simplexe standard de  $X$  est toujours incluse dans l'une des composantes connexes de  $X$ . C'est ce fait qui permet de voir le complexe de chaînes de  $X$  comme une somme de complexes sur chaque composante connexe, ce qui permet grossièrement de se ramener au cas  $X$  connexe.
2. Le groupe des 0-chaînes singulières  $C_0(X)$  est donc le groupe abélien libre engendré par les points de  $X$ . On l'appelle parfois *groupe des diviseurs de X*. Par définition, tous les 0-simplexes singuliers de  $X$ , i.e. tous les points de  $X$ , sont des 0-cycles. Un 0-simplexe singulier n'est jamais un 0-bord. En effet, une 0-chaîne singulière est un 0-bord si et seulement si on peut l'écrire comme la différence de deux points dans la même composante connexe (*voir le calcul de l'homologie en degré nul*).
3. L'ensemble des 1-simplexes singuliers peut-être vu sans problème comme l'ensemble des chemins (continus)  $\gamma : [0,1] \rightarrow X$  grâce à l'identification  $[v_0, v_1] \simeq [0,1]$ . C'est un 1-cycle si et seulement si  $\gamma$  est un lacet (continu) de  $X$ , car  $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$ . Il n'existe pas de caractérisation évidente des 1-bords parmi les 1-simplexes singuliers, mais remarquons qu'un chemin constant dans  $X$  en  $c_0 \in X$  est toujours un bord : il suffit de considérer la 2-chaîne singulière constituée seulement du 2-simplexe singulier constant en  $c_0$  (*voir les lemmes du théorème d'Hurewicz*). On dit par extension que

chemins dans  $X$  sont *homologues* si leur différence en tant que chaînes est un 1-bord. En particulier, on dit qu'un chemin est *homologue à zéro* si elle est homologue à un chemin constant, lui-même homologue à 0. Une condition suffisante est qu'il soit contractile, *i.e.* homotopie à un chemin constant, car on verra que l'homotopie entraîne l'homologie.

4. Le groupe  $C_2(X)$  est engendré par les 2-simplexes singuliers de  $X$  qui sont des applications définies sur des triangles.

### 5.3.1.2 Homologie singulière en basses dimensions

**Lemme.** (*Homologie d'une décomposition en composantes connexes*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  l'ensemble de ses composantes connexes. Alors on a un isomorphisme de  $H_n(X)$  sur  $\bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisqu'un simplexe standard a toujours une image connexe par arcs donc connexe,  $C_n(X)$  se décompose comme la somme directe des sous-groupes  $C_n(X_\alpha)$  en séparant la base  $X^{T^k}$  selon la composante dans laquelle se trouve l'image de chaque simplexe singulier. Il est évident par sa définition que la différentielle préserve cette décomposition, autrement dit que  $\partial_n|_{C_n(X_\alpha)}$  est bien définie et à valeurs dans  $C_{n-1}(X_\alpha)$ , puis alors que les bords et les limites se scindent également, et donc que les groupes d'homologies se décomposent :  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{\alpha} Z_n(X_\alpha) / \bigoplus_{\alpha} B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus_{\alpha} Z_n(X_\alpha) / B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus_{\alpha} H_n(X_\alpha)$  en remarquant que l'ensemble des simplexes singuliers de  $X_\alpha$  est exactement l'ensemble des simplexes singuliers de  $X$  à valeurs dans  $X_\alpha$ . Dans le cas  $n = 0$ , il y a encore moins à faire puisque les 0-cycles sont tous les points de  $X$ . ■

**Propriété.** (*Calcul de l'homologie au rang nul*)

Si  $X$  est un espace topologique connexe par arcs non vide,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .

Plus généralement, si  $X$  est un espace non vide quelconque,

$$H_0(X) = \mathbb{Z}^c$$

où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ . Autrement dit, c'est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes de  $X$ , ensemble de cardinal  $c$  a priori quelconque.

▷ Par définition,  $H_0(X) = C_0(X)/\text{Im}(\partial_1)$ . Posons  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  le degré comme on le définira systématiquement ci-après, défini par  $\varepsilon(\sigma) = 1$  sur toute chaîne singulière. Puisque  $X$  est non vide,  $\varepsilon$  est surjective. Montrons que  $\text{Ker}(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$  pour conclure par théorème d'isomorphisme. Or si l'on a une application  $\sigma : T^1 = [v, v'] \rightarrow X$ ,  $\partial_1(\sigma) = [v_0] - [v_1]$  d'où  $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = 1 - 1 = 0$ .

Réiproquement, soit  $x = \sum_{i=1}^n n_i \sigma_i \in \text{Ker}(\varepsilon)$ . On a donc  $\sum_{i=1}^n n_i = 0$ . Notons que les  $\sigma_i$  sont des 0-simplexes, *i.e.* des points de  $X$ . Pour tout  $i$ , soit  $\tau_i : [0,1] \rightarrow X$  un chemin continu de  $x_0$  à  $\sigma_i(v_0)$  par connexité pour  $x_0$  fixé définitivement dans  $X \neq \emptyset$ . Soit  $\sigma_0$  le 0-simplexe standard d'image  $x_0$ . On peut voir  $\tau_i$  comme un 1-simplexe standard qui n'est autre qu'une application continue  $[v_0, v_1] \rightarrow X$ . Alors  $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$ . Ainsi  $\partial(x) = \sum_i n_i \sigma_i - \underbrace{\sum_i n_i \sigma_0}_{= 0 \cdot \sigma_0} = x$ , donc  $x \in \text{Im}(\partial_1)$ .

On généralise en utilisant le lemme précédent permettant de casser l'homologie sur les composantes connexes par arcs. ■

### Exemples. (*Homologies triviales*)

1. (*Homologie singulière du vide*)  $H_n(\emptyset) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\emptyset^{T^k} = \emptyset$ ,  $C_n(\emptyset) = \langle \emptyset \rangle = 0$  à tout rang.

2. (*Groupes d'homologie singulière d'un point*) Soit  $X = \{\star\}$  le singleton standard de

la catégorie des espaces topologiques. Alors  $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$

Si  $n = 0$ ,  $H_n(X) = \mathbb{Z}$ , car un point est connexe par arcs. Soit  $n \geq 1$ . Notons  $\sigma_n$  l'unique application de  $\{\star\}^{T^n}$ . Alors  $\partial_n(\sigma_n) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \sigma_{n-1}$ . Par suite,  $\text{Im}(\partial_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$  et

$\text{Ker}(\partial_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$  En particulier,  $H_n(\{\star\}) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1}) = 0 = 0/0 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  dans tous les cas.

3. (*Groupes d'homologie d'un discret*) Soit  $X$  un espace topologique discret, ou plus généralement un espace totalement discontinu, en particulier un espace fini séparé.

Alors  $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{card}(X)} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$

En conjuguant le lemme précédent et le calcul des groupes d'homologie ponctuels.

On peut d'ores et déjà aller plus loin et élaborer un premier lien, assez fondamental, entre homologie et homotopie.

### Théorème. (*Théorème d'Hurewicz*)

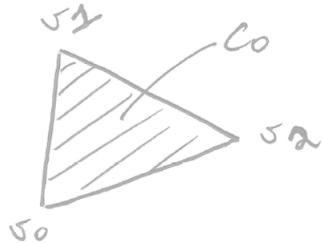
Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs non vide. Soit  $x_0 \in X$ . Alors le *morphisme de Hurewicz* :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto \bar{\gamma} \end{aligned}$$

envoyant la classe d'homotopie d'un lacet basé en  $x_0$  sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant est bien défini, un morphisme de groupes est induit un isomorphisme entre  $H_1(X)$  et l'abélianisé  $\pi_1(X, x_0)^{ab}$  du groupe fondamental de  $X$ , autrement dit,

$$H_1(X) = \pi_1(X)/D(\pi_1(X)).$$

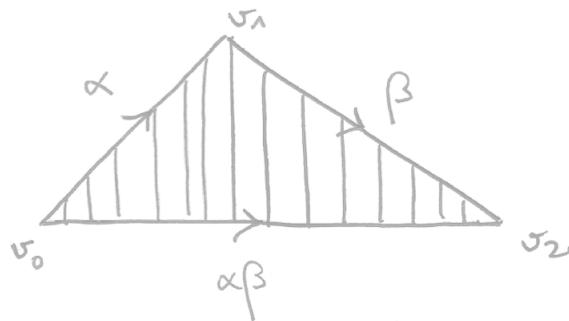
▷ On identifie librement les chemins dans  $X$  aux 1-simplexes singuliers. On rappelle qu'un chemin constant est toujours homologue à zéro, grâce à l'illustration suivante.



### Lemme

Soient  $\alpha, \beta$  deux chemins composables dans  $X$ , i.e. tels que  $\beta(0) = \alpha(1)$ . On rappelle que  $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta$  désigne alors le chemin parcourant  $\alpha$  jusqu'au temps moitié puis  $\beta$  dans le temps restant. Alors il existe une 2-chaîne singulière  $c \in C_2(X)$  telle que  $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$ .

▷ En effet, considérons une application de  $\Delta^2$  dans  $X$  donnée par  $\alpha$  sur  $[v_0, v_1]$ , par  $\beta$  sur  $[v_1, v_2]$  et  $\alpha\beta$  sur  $[v_0, v_2]$ , les chemins pris dans cet ordre. À l'intérieur du 2-simplexe, on la définit constante sur chaque segment parallèle à  $[v_1, \frac{v_0+v_2}{2}]$ , étant donné que ses extrémités ont même image par construction. Alors ce simplexe  $c$  est bien une application continue et immédiatement  $\partial c = \beta - \alpha\beta + \alpha$ , ce qu'il fallait montrer. ■

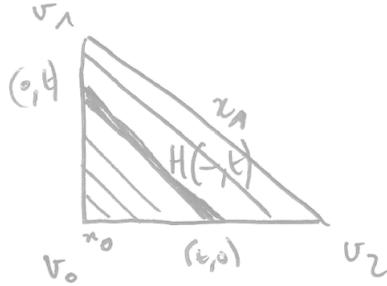


Enfin,

### Lemme

Enfin, soient  $\alpha, \beta$  deux chemins homotopes par  $H : [0,1]^2 \rightarrow X$ , avec donc  $H(0, -) = \alpha$ ,  $H(1, -) = \beta$ ,  $H(-, 0) = x_0$  et  $H(-, 1) = x_1$  les extrémités de ces chemins. Alors il existe une 2-chaîne singulière  $c$  telle que  $\alpha = \beta + \partial c$ .

▷ Considérons  $\sigma$  définie sur le triangle  $T^2$  par  $H(-,t)$  sur le segment  $([t,0],[0,t])$  et a fortiori constante en  $x_1$  sur  $[v_1,v_2]$  et vaut  $x_0$  en  $v_0$ . Alors  $\partial\sigma = \beta + cste_{x_1} - \alpha$  où  $cste_{x_1} = \partial\tau$  car un chemin constant est toujours homologue à zéro, d'où  $\beta - \alpha = \partial(\sigma - \tau)$ . Ainsi  $\alpha - \beta$  est un bord en prenant  $c = \sigma - \tau$ . ■



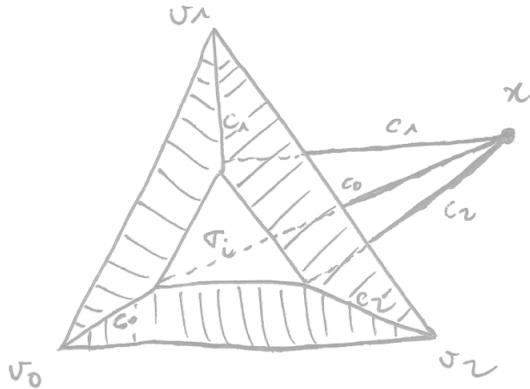
Posons donc  $[\gamma] \mapsto \bar{\gamma}$  comme dans l'énoncé. Par le lemme précédent, cette application est bien définie, car deux chemins homotopes sont dans la même classe d'homologie, puisqu'ils diffèrent à un bord près et  $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$ . D'après le lemme surprécédent, c'est même un morphisme de groupes.

Concluons. Montrons que  $\varphi$  est surjectif. Soit  $n_1\sigma_1 + \dots + n_k\sigma_k$  un 1-cycle singulier quelconque, et montrons qu'il est homologue à un lacet. Quitte à multiplier chacun des termes et comme  $-[\sigma]$  est homologue à  $[\sigma^{-1}]$ , on peut supposer que  $n_i = 1$  pour tout  $i \in [1,k]$ . Comme par hypothèse  $\partial(\sigma_1 + \dots + \sigma_k) = 0$ , si  $\sigma_i$  n'est pas un lacet, il existe  $j$  tel que  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  soient composables, et comme  $\sigma_i + \sigma_j$  est homologue à  $\overline{\sigma_i}\sigma_j$ , par récurrence immédiate, on peut prendre tous les  $\sigma_i$  des lacets ; enfin, si l'on fixe  $x \in X$ , pour tout  $i$ , soit  $\alpha_i$  un chemin dans  $X$  de  $x$  à l'origine de  $\sigma_i$  ;  $\overline{\alpha_i}\sigma_i\overline{\alpha_i}$  étant homologue à  $\alpha_i$ , on peut supposer que  $\sigma_i$  est un lacet en  $x$ . Alors à homologie près  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k$  est un lacet en  $x$ , évidemment maintenant.

Pour appliquer le théorème d'isomorphisme, il suffit de montrer que  $\text{Ker}(\varphi) = D(\pi_1(X,x_0))$ . Puisque  $H_1(X)$  est abélien, tout commutateur est dans le noyau de  $\varphi$ . Réciproquement, soit  $\alpha$  un lacet de  $X$  tel que  $\overline{\alpha}$  soit nul, i.e.  $\alpha$  un lacet homologue à 0. Soit également  $\sum_{i=1}^k n_i\sigma_i$  un 2-cycle singulier tel que

$\partial(\sum_{i=1}^k n_i\sigma_i) = \alpha$ , qui existe donc par cette hypothèse. Chaque  $\sigma_i$  est homotope à un 2-simplexe singulier dont les trois sommets sont égaux à  $x \in X$  fixé pour tous. En effet, en notant  $\lambda_t$  l'homotopie de rapport  $t$  et de centre le barycentre de  $\Delta_2$ , on considère  $c_0, c_1, c_2$  les chemins joignant  $x$  à  $\sigma_i(v_0), \sigma_i(v_1), \sigma_i(v_2)$ . Pour  $s \in [0,1]$ , considérons l'application continue  $h_s$  de  $\Delta_2$  dans  $X$  valant  $\sigma_i \circ \lambda_{\frac{1+s}{2}}$  sur  $\lambda_{\frac{1+s}{2}}(\Delta_2)$ ,  $c_j(t)$  sur  $[\lambda_{\frac{1+s}{2}}(e_j), e_j]$  pour  $j = 0, 1, 2$  et sur chaque composante connexe  $C$  du complémentaire dans  $\Delta_2$  de la réunion de ces ensembles, constant sur les segments perpendiculaires aux côtés de  $\Delta_2 \subseteq \overline{C}$ , ce qui montre ceci. En particulier,  $\sigma_i$  est homologue à un tel simplexe singulier (*car homotopie implique homologie, ce que nous verrons indépendamment mais plus tard*), et l'on peut supposer que les sommets des  $\sigma_i$  sont égaux à  $x$ . Supposons que  $\alpha = \partial(\sigma_i)$  c'est-à-dire que la somme soit réduite à un unique  $\sigma_i$ . On a  $\alpha = \partial\sigma_i = \sigma_{i,0} - \sigma_{i,1} + \sigma_{i,2}$  qui sont trois lacets en  $x$ . Par unicité de la décomposition selon une base,  $\alpha = \sigma_{i,0}$  ou  $\sigma_{i,2}$ , prenons  $\sigma_{i,0}$  sans perte de généralité. Alors  $\sigma_{i,0}$  est homotope à zéro : en effet,  $\sigma_i$  fournit une réalisation par  $\Delta_2 \simeq [0,1]^2$  d'une homotope entre  $\sigma_{i,0}$  pris sur son bord du simplexe et le

chemin constant en  $x$  pris sur le sommet opposé. Ainsi  $\alpha$  est homotope à zéro, et c'est fini.



Traitons maintenant le cas général où  $\alpha$  est la différentielle d'une somme de simplexes. On peut supposer que tous les  $n_i = 1$  comme précédemment. Notons systématiquement  $\sigma_{i,j}$  la  $j$ -ième face propre de  $\sigma_i$ , de sorte que  $\partial\sigma_i = \sigma_{i,0} - \sigma_{i,1} + \sigma_{i,2}$ . On a alors  $\alpha = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \sigma_{i,j} = \sum_{i,j} (-1)^j \sigma_{i,j}$ . Notons  $\tilde{\alpha}$  l'image dans le groupe abélianisé et utilisons la notation multiplicative, bien que ce groupe soit commutatif. On a  $\tilde{\alpha} = \prod_i \sigma_{i,0} \tilde{\sigma}_{i,1}^{-1} \tilde{\sigma}_{i,2}$ . Dans  $\alpha$ , toutes les faces des  $\sigma_i$  s'annulent par regroupement deux à deux, ne venant, a priori, pas du même simplexe, par unicité de la décomposition. Mais puisque les termes du produit précédent commute, ce qui est crucial, on peut donc les réordonner pour réaliser ces annulations et il ne reste plus que  $\tilde{\alpha}$  égal à un des  $\sigma_{i,j}$ , qui est homotope au chemin constant par le même argument que précédemment, d'où  $\tilde{\alpha} = 0_{\pi_1(X)^{ab}}$ . ■

### Corollaire

Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs, non vide et de groupe fondamental abélien. Alors  $\pi_1(X) = H_1(X)$ .

**VOC** On parle parfois de *théorème de Hurewicz en degré 0* pour désigner le résultat déjà démontré :  $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{card}(\pi_0(X))}$ .

### Exercice 2 (Naturalité du morphisme de Hurewicz)

Montrer que si  $X, Y$  sont deux espaces topologiques pointés en  $x$  et  $y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée, alors en notant  $\varphi_X, \varphi_Y$  respectivement les morphismes de Hurewicz de  $X$  et  $Y$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\varphi_X} & H_1(X) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f_{*,1} \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & H_1(Y) \end{array}$$

commute, en notant  $f^*$  l'application induite sur les groupes fondamentaux et  $f_{*,1}$  l'application induite en homologie au degré 1.

### Exemples. (*Calcul des homologies en basses dimensions*)

1. (*Premiers groupes d'homologie du cercle*) On retrouve  $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .
2. (*Premiers groupes d'homologie des sphères*) On a  $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_1(S^n) = 0$  pour  $n \geq 2$  et pour  $n = 0$ ,  $H_0(S^0) = H_1(S^0) = 0$ .
3. Si  $X$  est simplement connexe, alors  $H_1(X) = 0$ .  
En effet,  $\pi_1(X) = 0$  lui-même.
4. (*Premiers groupes d'homologie du ruban de Möbius*) De même,  $H_0(\mathbb{M}) = H_1(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$ .
5. (*Premiers groupes d'homologie du tore*) De même,  $H_0(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Plus généralement, si  $G$  est un groupe topologique connexe par arcs, son groupe fondamental est abélien, donc  $H_0(G) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(G) = \pi_1(X)$ .
7. (*Premiers groupes d'homologie des espaces projectifs*) En outre,  $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour tout entier  $n \geq 2$ . De même,  $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .
8. Si  $X$  est un bouquet de  $n \in \mathbb{N}$  cercles,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  et  $\pi_1(X) = F_n$  donc  $H_1(X) = F_n^{ab} = \mathbb{Z}^n$ .



Les groupes d'homotopie supérieurs en ordre à 2 sont tous abéliens... mais ils n'ont en général rien à voir avec les  $H_n$  (enfin... affaire à suivre).

#### 5.3.1.3 Applications induites en homologie

##### Fait. (*Applications induites dans le complexe de chaînes singulières*)

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme  $f_\# : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$  « en homologie singulière » donné pour  $\sigma$  simplexe singulière de  $X$ , par  $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$ .

Il faut vérifier que la collection de morphismes  $f_\#$  est bien un morphisme de complexes, *i.e.* qu'on ait la commutation du diagramme rectangulaire infini suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(X) \\ & & f_{\#,k+1} \downarrow & & f_{\#,k} \downarrow & & \dots \downarrow & & f_{\#,0} \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(Y) & \longrightarrow & C_k(Y) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(Y). \end{array}$$

On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_{*,k} \circ \partial_{k+1} = \sum_{j=0}^k f \circ \sigma \circ \Delta_{v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n}$  : il suffit de l'écrire, et l'on trouve que ces deux quantités sont égales, en tout  $\sigma \in C_{k+1}(X)$ , à  $\sum_{j=0}^k f \circ \sigma \circ \Delta_{v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n}$ .

Ce morphisme induit donc pour tout entier  $k \geq 0$  un morphisme  $f_{*,k} : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$

dont on note la donnée  $f_* = (f_{*,k})_{k \in \mathbb{N}}$  dite *application induite en homologie (singulière)*. En effet, ce morphisme passe donc au quotient simultanément : si  $\sigma \in B_k(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = \partial_{k+1}(\sigma_0)$  où  $\sigma_0 \in C_{k+1}(X)$ . Alors avec les notations non indicées, menteuses mais pas tant que ça,  $\partial' f_*(\sigma) = f_* \partial(\sigma) = f_*(0) = 0_{Z_k(Y)}$ , soit  $f_*(\sigma) \in B_k(Y)$ .



À partir d'ici, il est conseillé de connaître les bases d'**HOMOLOGIE** dans les **CATÉGORIES ABÉLIENNES**.

### Propriétés. (*Fonctorialité de l'application induite en homologie singulière*)

Soient  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  deux applications continues entre trois espaces topologiques.

1. On a  $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(g \circ f)_{\#,k} = g_{\#,k} \circ f_{\#,k}$ .
2. On a  $id_{X\#} = id_{C(X)}$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(id_X)_{\#,k} = id_{C_k(X)}$ .

De plus :

1. On a  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k}$ .
2. Pour tout  $k \geq 0$ ,  $(id_X)_{*,k} = id_{H_k(X)}$ .

▷ Successivement :

1. Par covariance de la post-composition.
2. Immédiat.
3. Corollaire du premier point en passant au quotient.
4. Immédiat. ■

### Corollaire

Tout diagramme commutatif entre espaces topologiques induit un diagramme commutatif en homologie singulière.

### Corollaire. (*Application induite en homologie par une rétraction*)

Soit  $i : A \rightarrow X$  un rétract topologique. Alors  $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  est injective pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ En effet, s'il existe  $r : X \rightarrow A$  continue telle que  $ri = id_A$ , alors  $r_*i_* = id_{A_*}$  et un morphisme rétractable, même ensemblistement soit dit en passant, est toujours injectif. ■

### Corollaire

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  n'est pas un rétract de  $D^{n+1}$ .

▷ Il faut connaître l'homologie des sphères, qui vaut  $\mathbb{Z}$  au rang  $n$ , et celle d'un convexe, qui est contractile, donc est nulle aux rangs non nuls. Si l'on sait ceci, l'implication induite par l'inclusion canonique au rang  $n$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans 0, qui ne peut être injectif. ■

Le théorème suivant est fondamental, en ce qu'il fait le lien entre topologie (homotopie) et algèbre (homologie).

### Propriété. (*Propagation de l'homotopie dans le complexe de chaînes singulières*) ↗

Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications continues entre deux espaces topologiques. Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors  $f_\#$  et  $g_\#$  sont homotopes en tant que morphismes de complexes de chaînes.

En particulier, ils induisent les mêmes morphismes en homologie, i.e.  $f_* = g_*$ .

▷ Il y a quelque chose à faire dans :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(X) \\ & & \swarrow f_{\#, k+1} \downarrow g_{\#, k+1} & & \swarrow f_{\#, k} \downarrow g_{\#, k} & & \swarrow f_{\#, 0} \downarrow g_{\#, 0} \\ & & C_{k+1}(Y) & \longrightarrow & C_k(Y) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(Y). \end{array}$$

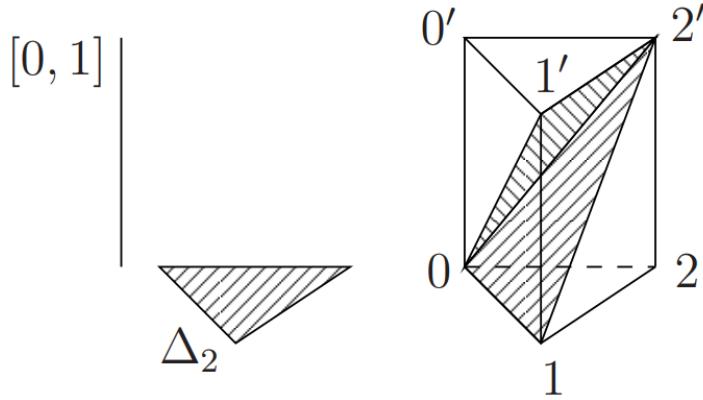
Par hypothèse, il existe une homotopie  $H$  de  $f$  à  $g$ . On veut construire des applications  $h_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  de sorte que  $f_{\#, k} - g_{\#, k} = \partial_{k+1}^Y h_k + h_{k-1} \partial_k^X$ . Il suffit de la définir sur un simplexe  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ . Remarquons que  $H$  induit une application  $P : \Delta^k \times I \rightarrow Y$ , en notant  $I$  le segment  $[0,1]$  définie par  $(x,t) \mapsto H(\sigma(x),t)$  du *prisme*  $\Delta^k \times I$  dans  $Y$ , avec  $P(-,0) = f_{\#, k}(\sigma)$  et  $P(-,1) = g_{\#, k}(\sigma)$ . On peut voir  $f_{\#, k}(\sigma)$  comme la face du bas du prisme et  $g_{\#, k}(\sigma)$  sa face du haut ; cela dit, ce vocabulaire est impropre, car le prisme n'est pas un simplexe.

Nous allons donc décomposer le prisme en simplexes, dont on pourra calculer algébriquement la frontière. Notons  $a_0, \dots, a_k$  les sommets du simplexe  $\Delta^k \times \{0\}$  et  $b_0, \dots, b_k$  ceux de  $\Delta^k \times \{1\}$ , dans le même ordre. Pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , on définit un  $n+1$ -simplexe par

$$\sigma^i = P \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] : \Delta^{k+1} \rightarrow Y$$

où  $[a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] : \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times I$  désigne l'unique application linéaire qui envoie les sommets de  $\Delta^k$  sur  $a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k$  dans cet ordre. On peut alors poser

$$h_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i P \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k].$$

FIGURE 5.3.1 : *Décomposition du prisme.* —

Par exemple, la décomposition de  $\Delta_2 \times [0,1]$  est en trois tétraèdres de sommets  $(0,0',1',2'), (0,1,1',2'), (0,1,2,2')$ .

Ceci s'étend en un morphisme  $h_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$  par linéarité, en prenant conventionnellement  $h_{-1} = 0$ . Il reste à prouver la relation d'homotopie voulue. On la montre sur les simplexes  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ , ce qui suffit.

On a :

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{k+1}^Y (H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k]) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1}] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_{j-1}^k, \dots, b_k^k] \\ \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_j^k, \dots, b_k^k] \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} h_{k-1} \circ \partial_k^X(\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j h_{k-1}(\sigma \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k]) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k-1} (-1)^{i+j} P \circ ([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ ([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k-1} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_{i+1}^k, b_{i+1}^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_j^k, \dots, b_k^k] \\ h_{k-1} \circ \partial_k^X(\sigma) &= - \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_j^k, \dots, b_k^k]. \end{aligned}$$

En sommant ces deux relations, les termes où  $i \neq j$  s'annulent, et il vient :

$$\begin{aligned} (\partial_{k+1}^Y \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k^X)(\sigma) &= \sum_{i=0}^k P \circ [a_0^k, \dots, a_{i-1}^k, b_i^k, \dots, b_k^k] - \sum_{i=0}^k P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_{i+1}^k, \dots, b_k^k] \\ &= P \circ [b_0^k, \dots, b_k^k] - P \circ [a_0^k, \dots, a_k^k] \\ &= H \circ (\sigma \times id) \circ [b_0^k, \dots, b_k^k] - H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0^k, \dots, a_k^k] \\ (\partial_{k+1}^Y \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k^X)(\sigma) &= H \circ (\sigma \times 1) - H \circ (\sigma \times 0) = g \circ \sigma - f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Rejustifions enfin dans ce cas particulier que deux morphismes de complexes de chaînes homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie. Prenons  $\sigma = \partial_{k+1}^X(\sigma_0)$ . Alors  $f_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) - g_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) + h_{k-1} \circ \partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$  où  $h_{k-1} \circ \partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$  est nul par structure de complexe et  $\partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = 0$  dans  $Z_k^Y / \text{Im}(\partial_{k+1}^Y)$ , d'où  $f_{\#,k}(\sigma) = g_{\#,k}(\sigma) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ . ■

Cette preuve utilise une méthode qui sera utilisée plusieurs fois dans des preuves importantes de les théories topologico-algébriques.

### Méthode. (*Triangulation du prisme*)

Le cylindre sur le  $k$ -simplexe  $T^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , appelé *prisme*, se *triangule* au sens clair des complexes simpliciaux en  $k+1$  simplexes de dimension  $k+1$ . Ce sont les  $\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k \rangle$  pour  $i$  parcourant  $\llbracket 0, k \rrbracket$  où la base du prisme est  $T^k \times \{0\} = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  et la base opposée est  $T^k \times \{1\} = \langle w_0, \dots, w_k \rangle$ . Remarquons que deux de ces simplexes de la triangulation sont les cônes de sommets un point de la base, sur la base opposée : l'autre étant le contraire. On conseille au lecteur de faire le dessin.

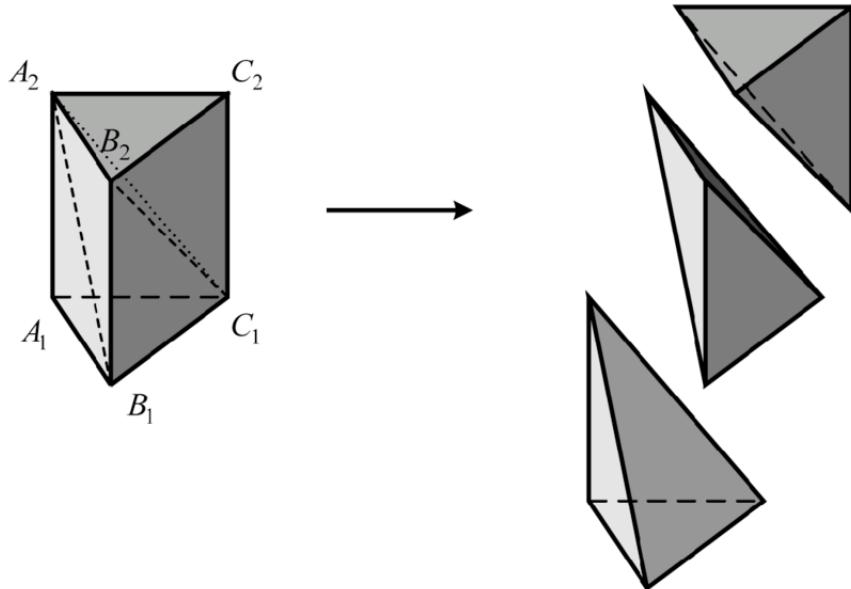


FIGURE 5.3.2 : *Triangulation du prisme sur le triangle.* —

**Corollaire.** (*Simplexes homotopes et classes d'homologie*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma, \sigma'$  deux  $n$ -simplexes singuliers d'un espace  $X$  homotopes en tant qu'applications continues. On suppose que ce sont des cycles en tant que chaînes singulières. Alors  $[\sigma] = [\sigma']$  dans  $H_n(X)$ , i.e.  $\sigma, \sigma'$  sont homologues.

**Mnémonik :** homotope  $\implies$  homologue.

**Corollaire.** (*Type d'homotopie et isomorphisme de complexes*) 

Deux espaces homotopiquement équivalents  $X \cong Y$ , en particulier deux espaces homéomorphes, ont des complexes de chaînes singulières isomorphes dans la catégorie homotopique des complexes de chaînes singulières. En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$H_k(X) \simeq H_k(Y).$$

Ainsi, l'homologie du complexe de chaînes singulières est un invariant d'homotopie (de la catégorie des) des espaces topologiques.

▷ En effet, soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  une paire d'équivalence d'homotopie. On a  $f \circ g \cong id_Y$  et  $g \circ f \cong id_X$ . Par la proposition précédente,  $(f \circ g)_{*,k} = f_{*,k} \circ g_{*,k} = id_{H_k(Y)}$  et  $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k} = id_{H_k(X)}$ , autrement dit  $f_{*,k} = g_{*,k}$  sont une paire d'isomorphie de groupes, d'où  $H_k(X) \simeq H_k(Y)$ . ■

→ *Notation.* Dans le cadre de l'homologie singulière, on identifie deux groupes d'homologie isomorphes par un signe  $=$ .

**Corollaire.** (*Homologie d'un espace contractile*)

Soit  $X$  un espace contractile. Alors  $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$

▷ C'est l'homologie singulière d'un point. ■

**Exemple**

En particulier  $H_k(\Delta^n)$ ,  $H_k(I^n)$  et  $H_k(B^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  sont nuls dès que  $k > 0$ .

Cette propriété nous donne envie de définir :

### 5.3.1.4 Quasi-isomorphie

#### Définition. (*Quasi-isomorphisme*)

Un *quasi-isomorphisme* est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques qui induit pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , elle induise un isomorphisme  $f_{*,k} : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ .

Cette définition ne coïncide qu'en apparence avec celle donnée pour des complexes de chaînes dans les catégories abéliennes. En effet, ici  $f$  n'est pas un morphisme de complexes *i.e.* dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  mais un morphisme de  $\mathcal{A}$  qui en induit un sur le complexe grâce à la première remarque de cette section, ce qui n'a rien d'automatique en théorie générale de l'homologie.



On rappelle également qu'un *isomorphisme de complexes de chaînes singulières*, *i.e.* la donnée d'isomorphismes réciproques entre les complexes de chaînes singulières à tout degré et commutant avec les différentielles, est un quasi-isomorphisme au sens des complexes de chaînes mais que la réciproque est fausse.

D'après ce qui précède, donc :

#### Fait. (*Équivalence d'homotopie $\Rightarrow$ quasi-isomorphisme*)

Toute équivalence d'homotopie, en particulier tout homéomorphisme est un quasi-isomorphisme.

C'est le corollaire suprécédent.

#### Contre-exemple. (*Équivalences d'homotopie, quasi-isomorphismes, réciproques en homotopie*)

La réciproque est fausse : un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie.

Montrons le fait suivant : ~~soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces connexes par arcs. Alors  $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$  est un isomorphisme induit, i.e.  $f$  est un quasi-isomorphisme.~~ On écrit  $H_0(X) = \mathbb{Z}[x]$  où  $[x]$  est la classe d'homologie de n'importe quel point vu comme un 1-simplexe standard  $\Delta^1 \rightarrow X, t \mapsto x$ . Alors l'application induite  $f_* := f_{*,0}$  envoie  $k[x]$  sur  $k[f(x)]$ . On a aussi  $H_0(Y) = \mathbb{Z}[y]$  de même que pour  $X$ , et puisque  $f(x)$  est également un point de  $Y$ ,  $[f(x)] = [y] \dots$  donc  $f(k[x]) = k[y]$ . Ainsi,  $f$  est « l'identité » si l'on identifie  $H_0(X) = H_0(Y) = \mathbb{Z}$ , mais il est moins cavalier de simplement dire que  $f$  est un isomorphisme de groupes, car elle envoie une base sur une base.

Et même, l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque.

Le contre-exemple précédent convient également d'après la remarque qui suit directement.

De plus, ces deux énoncés étaient équivalents !

Notons  $P$  : « un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie » et  $Q$  : « l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-

isomorphismisme réciproque ». Il est clair que  $Q \implies P$ . Réciproquement, soit  $f$  un quasi-isomorphisme qui ne soit pas une équivalence d'homotopie. Alors montrons qu'il n'a pas de quasi-isomorphisme réciproque. En effet, si  $fg = gf = id$  en homologie, cela signifie que  $f$  et  $g$  sont équivalences d'homotopie réciproques, en particulier que  $f$  est une équivalence d'homotopie.  $\square$

### Proposition

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Cette assertion sera démontrée dans le cours d'HOMOTOPIE. ■

On retrouve donc :

### Corollaire

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

*Remarque.* La réciproque est vraie pour des espaces qui se comportent bien, tels les  $CW$ -complexes, comme le précise un théorème de WHITEHEAD.

#### 5.3.1.5 Groupes d'homologie réduits

##### Définition-propriété. (*Complexe de chaînes singulières augmenté*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\tilde{\mathcal{C}}(X)$  ou encore  $\mathcal{C}(X)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  et  $\varepsilon$  est la somme des coefficients.

En considérant les groupes d'homologie de ce nouveau complexe de chaînes, on obtient par définition les *groupes d'homologie réduits*  $\tilde{H}_k(X)$  de  $X$ .

▷ Il est clair que  $\varepsilon$  est un morphisme de groupes car de type degré. Il suffit de vérifier que  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ , ce qui est immédiat : si  $\sigma = \partial_1(\sigma_0)$ ,  $\sigma = \sigma_0(1) - \sigma_0(0)$  d'où  $\varepsilon(\sigma) = 1 - 1 = 0$ . ■

Ce formalisme se justifie en fait plus naturellement que celui du complexe non augmenté : l'ensemble des simplexes de degré  $-1$  est vide, donc le groupe abélien libre engendré par leur ensemble est égal à  $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ .

*Remarque.* On a en particulier  $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$  si  $k \geq 1$ , mais a priori  $\tilde{H}_0(X) \neq H_0(X)$ . Ainsi, l'homologie réduite ne concerne que l'homologie en degré nul, qui se restreint aux 0-chaînes de « degré  $\varepsilon$  » nul, à savoir  $\boxed{\tilde{H}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon)/\text{Im}(\partial_1)}$ .

**Fait.** (*L'homologie réduite est plus petite que l'homologie singulière*)

Pour tout espace topologique  $X$ ,  $\tilde{H}_0(X) \subseteq H_0(X)$ .

Tout est en fait réglé par :

**Proposition.** (*Lien homologie réduite-homologie singulière*)

Pour tout espace topologique non vide  $X$ ,  $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ .

En particulier,  $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{nombre de composantes connexes par arcs de } X - 1}$ .

▷ Technique classique : soit  $x_0 \in X$ . On la suite exacte courte  $0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\tilde{i}} H_0(X) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ , puisque  $\tilde{i} : \text{Ker}(\partial_0)/\text{Im}(\partial_1) \rightarrow C_0(X)/\text{Im}(\partial_1)$  descend injectivement évidemment,  $\tilde{\varepsilon}$  est a fortiori surjective évidemment et par construction  $\text{Ker}(\tilde{\varepsilon}) = \text{Im}(\tilde{i})$ . Elle scinde par  $n \mapsto n[x_0]$ ,  $n[x_0]$  n'étant pas un 1-cycle, d'où le résultat. ■

**Exemples.** (*Groupes d'homologie réduits triviaux*)

1. Si  $X$  est connexe par arcs,  $\tilde{H}_0(X) = 0$ .
2. (*Homologie réduite du point*) Soit  $X$  un espace contractile. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{H}_k(X) = 0$ . C'est pour eux que l'on a inventé l'homologie réduite !

### 5.3.1.6 Groupes d'homologie relatifs

On constate que l'inclusion d'une partie  $A$  dans un espace  $X$  induit une suite exacte courte de complexes de chaînes  $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A) \longrightarrow 0$ . Elle induit donc une suite exacte en homologie. Ce nouveau complexe singulier prenant en compte l'influence d'une partie choisie est l'homologie de  $X$  relative à  $A$ .

Soit  $(X, A)$  une paire topologique, et notons  $\iota$  l'inclusion canonique. Il n'est pas difficile de voir que les colonnes de

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow & C_1(A) \longrightarrow & C_0(A) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow & C_1(X) \longrightarrow & C_0(X) \end{array}$$

sont exactes, autrement dit que les morphismes induits par l'inclusion canonique sont injectifs, ce qui est sans détour. En définissant  $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut alors compléter grâce aux projections canoniques  $\pi_k : C_k(X) \rightarrow C_k(X, A)$  le diagramme précédent

en

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_1(A) \longrightarrow C_0(A) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_1(X) \longrightarrow C_0(X) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & C_{k+1}(X,A) & & C_k(X,A) & & C_1(X,A) & C_0(X,A) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

où les colonnes sont encore exactes. De plus, la suite  $(C_k(X,A))_{k \in \mathbb{N}}$  est naturellement munie d'une structure de complexe notée  $\mathcal{C}(X,A)$  en posant pour différentielle d'ordre  $k \in \mathbb{N}$   $\partial_{k\mathcal{C}(X,A)}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$  où  $\sigma'$  est un représentant de la classe  $\sigma$  (*voir la preuve suivante*), autrement dit en notant  $\pi_k^{-1}$  une section ensembliste de  $\pi_k$ ,  $\partial_{k\mathcal{C}(X,A)} = \pi_k \circ \partial_{kX} \circ \pi_{k+1}^{-1}$ .

Vérifions que l'application bord sur  $C(X,A)$  est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour  $\sigma, \sigma'$  dans  $C_{k+1}(X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que  $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$ , i.e.  $\sigma = \sigma' + c$  où  $c \in C_{k+1}(A)$ , on a  $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$ . C'est en fait immédiat, car  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$  étant  $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$  et alors  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$  où  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$ .

D'autre part, montrons que  $\pi_{k-1}\partial_{k-1}^X\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X\pi_{k+1}^{-1}$  est nulle. On ne peut dire que  $\pi_k^{-1}\pi_k = id_{C_k(X,A)}$ , car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute  $k+1$ -chaîne  $\sigma$  de  $X$ ,  $\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X(\sigma) = \partial_k^X(\sigma) + c$  où  $c \in C_k(A)$ . En passant la différentielle  $\partial_{k-1}^X$ , le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne  $\partial_{k-1}^X(c)$  qui est dans  $C_{k-1}(A)$ , donc est tuée par  $\pi_{k-1}$ .

Ainsi le grand diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \downarrow 0 \\
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(A)}} & C_k(A) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_1(A) \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(A)}} C_0(A) \\
 & \downarrow \iota_{*,k+1} & & \downarrow \iota_{*,k} & & \downarrow \iota_{*,1} & \downarrow \iota_{*,0} \\
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(X)}} & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(X)}} C_0(X) \\
 & \downarrow \pi_{k+1} & & \downarrow \pi_k & & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_0 \\
 \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(X,A)}} & C_k(X,A) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_1(X,A) \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(X,A)}} C_0(X,A) \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \downarrow 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

est commutatif, par construction.

▷ Vérifions que l'application bord sur  $C(X,A)$  est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour  $\sigma, \sigma'$  dans  $C_{k+1}(X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que  $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$ , i.e.

$\sigma = \sigma' + c$  où  $c \in C_{k+1}(A)$ , on a  $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$ . C'est en fait immédiat, car  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$  étant  $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$  et alors  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$  où  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$ .

D'autre part, montrons que  $\pi_{k-1}\partial_{k-1}^X\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X\pi_{k+1}^{-1}$  est nulle. On ne peut dire que  $\pi_k^{-1}\pi_k = id_{C_k(X,A)}$ , car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute  $k+1$ -chaîne  $\sigma$  de  $X$ ,  $\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X(\sigma) = \partial_k^X(\sigma) + c$  où  $c \in C_k(A)$ . En passant la différentielle  $\partial_{k-1}^X$ , le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne  $\partial_{k-1}^X(c)$  qui est dans  $C_{k-1}(A)$ , donc est tuée par  $\pi_{k-1}$ . ■

### Définition-propriété. (*Groupes d'homologie relatifs*)

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs* de  $(X,A)$  sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative*  $\mathcal{C}(X,A)$  défini comme dans le laïus précédent. On note  $H_k(X,A)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie relatif de  $X$  par rapport à  $A$ .

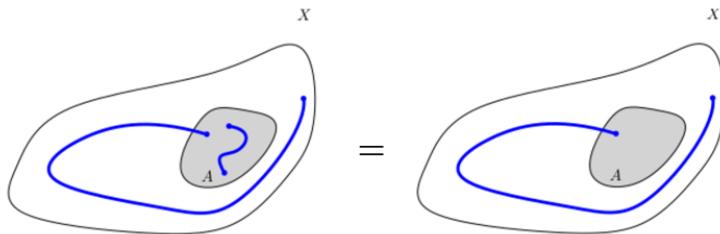


FIGURE 5.3.3 : Une seule et même 1-chaîne de  $\mathcal{C}(X,A)$ . —

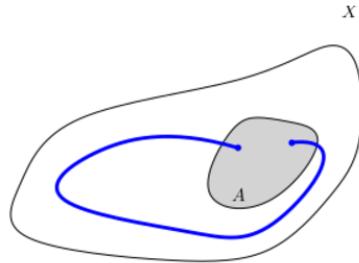


FIGURE 5.3.4 : Un 1-cycle de  $\mathcal{C}(X,A)$ . —

On peut en même temps appliquer le théorème fondamental de l'homologie qui nous donne la

**Propriété.** (*Suite exacte homologique de la paire  $(X,A)$* )

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie, terminée par  $H_0(A) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$ . De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre paires.

▷ On conseille au lecteur de redémontrer le théorème fondamental de l'algèbre homologique, pour l'hygiène. Quant à nous, explicitons les flèches, ce qui est bien important.

La discussion faite a donc exhibé un morphisme de complexes  $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \xrightarrow{i_\#} \mathcal{C}(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow 0$ , car les différentielles commutent avec  $i_\#$  et  $\pi$ . Les applications  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  ne sont autre que les applications induites en homologie par le morphisme de chaînes  $i_\#$ , donc a fortiori ce sont celles induites par l'inclusion  $i \in \mathbb{N}$ ; à une classe d'homologie de cycle dans  $A$ , on associe celle induite dans  $X$ .

Pour  $H_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X,A)$ , ce sont les applications induites en homologie  $H(\pi)$  par le morphisme de complexes de chaînes  $\pi$ : autrement dit, à une classe d'homologie de cycle dans  $A$ , on associe celle induite dans  $C(X)/C(A)$  modulo (attention!) la différentielle induite.

Construisons enfin le connectant  $\delta_{k+1} : H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_k(A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $x \in Z_{k+1}(X,A)$ , par surjectivité de  $\pi_{k+1}$ , il existe  $y \in C_{k+1}(X)$  tel que  $\pi_{k+1}(y) = x$ . On a alors  $\pi_k(\partial_{k+1}(y)) = \partial_{k+1}\pi_{k+1}(y) = \partial_{k+1}x = 0$  par hypothèse. Donc  $\partial_{k+1}(y)$  est dans  $\text{Ker}(\pi_k)$ . Par exactitude de la suite courte de complexes, il est dans  $\text{Im}(\iota_{*,k})$ . Soit donc  $z \in C_k(A)$  tel que  $\iota_{*,k}(z) = \partial_{k+1}(y)$ . On peut montrer que l'élément  $z$  est bien un cycle, que deux homologues ont la même image et que l'on définit bien là un morphisme. ■

Si  $(X,A)$  est une paire topologique, on a un morphisme  $H_k(X) \rightarrow H_k(X,A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $H_{k-1}(A) = 0$ , c'est une inclusion, et si  $A$  est quasi-isomorphe à un contractile, c'est un isomorphisme.

*Remarque.* En particulier,  $H_0(X,A)$  est un sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $\mathbb{Z}^c$  où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ .



Si  $(X,A)$  est un paire topologique, en général,  $H_k(A)$  n'est pas un sous-groupe de  $X$ , sauf si par exemple si  $A$  est une composante connexe de  $X$ , ou encore si  $(X,A)$  est un rétract, ce que l'on a déjà vu. Il est donc délivrant d'espérer écrire en toute généralité  $H_k(X,A) \simeq H_k(X)/H_k(A)$ .

**Exercice 3** (*Propriétés de l'homologie relative*)

Soit  $(X,A)$  une paire topologique.

1. (*Homologie relative en degré nul*) Montrer que  $H_0(X,A) = 0$  si et seulement si  $A$  rencontre toutes les composantes connexes par arcs de  $X$ .
2. (*Homologie relative de degré 1*) Montrer que  $H_1(X,A) = 0$  si et seulement si l'application homologique induite par l'inclusion  $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$  est surjective et toute composante connexe par arcs de  $X$  contient au plus une composante connexe par arcs de  $A$ .
3. Montrer que l'inclusion canonique est un quasi-isomorphisme si et seulement si l'homologie relative est identiquement nulle.

▷ Éléments de réponse.

1. Par définition,  $H_0(X,A) = C_0(X,A)/\text{Im}(\partial_{0C(X,A)})$ . Ainsi,  $H_0(X,A) = 0 \iff \text{Im}(\partial_{0C(X,A)}) = C_0(X)/C_0(A)$ . En déroulant la définition de  $\partial_{0C(X,A)}$ , cela signifie exactement pour tout  $\sigma' \in C_0(X)$ , en fait il suffit de prendre  $\Sigma'$  un 0-simplexe singulier dans  $X$ , i.e. un point, il existe  $\sigma \in C_1(X)$ ,  $c' \in C_0(A)$  et  $c \in C_1(A)$  tels que  $\partial_0(\sigma + c) = \sigma' + c$ . Il est immédiat de voir qu'il est inutile de considérer  $c \in C_1(A)$  en plus, car  $C_1(A) \subseteq C_1(X)$ .

Ceci étant vu, supposons que  $A$  rencontre toutes les composantes connexes par arcs de  $X$ . Soit donc  $\sigma' \in X$ . Soit  $a$  un point de l'intersection de  $A$  avec la composante connexe par arcs de  $\sigma'$ . Soit  $\gamma : \sigma' \rightarrow a$  un chemin. Alors  $\partial_0(\gamma) = \sigma' - a = \sigma' + (-a)$  où  $-a \in C_0(A)$ . Réciproquement, soit  $C$  une composante connexe par arcs de  $X$ . Puisque par construction  $X \neq \emptyset$ , soit  $\sigma' \in X$ . Alors il existe toute cette ribambelle de trucs avec  $\partial_0(\sigma) = \sigma' + c'$ . Or  $\sigma$  est une somme de chemins, dont les images sont des différences de points. Puisque  $\sigma' + c'$  est une somme contenant un seul point de  $X \setminus A$  a priori et ensuite des points à coup sûr dans  $A$ , il existe un chemin dans la somme  $\sigma$  dont l'image est une différence d'un point de  $A$  avec  $\sigma'$ , autrement dit par unicité de la décomposition selon une base, c'est un chemin continu de  $\sigma'$  à un point de  $A$ , ce qu'il fallait montrer.

2. Si  $H_1(X,A) = 0$ , par la suite exacte en homologie de la paire  $(X,A)$ , l'application  $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$  est surjective, puisque suivie par l'application nulle. Considérons la suite  $0 \xrightarrow{f} H_0(A_i) \xrightarrow{g} H_0(X_i) \xrightarrow{h} H_0(X_i, A_i) \xrightarrow{0} 0$  pour toute composante connexe  $X_i$  de  $X$  et composante connexe  $A_i$  de  $A$  contenue dans  $X_i$ , de sorte que  $(X_i, A_i)$  soit une *sous-paire connexe* de  $(X, A)$ ; le premier terme est bien nul, car assez clairement  $H_1(X, A) = 0 = \sum_{i \in I, j \in J_i} H_1(X_i, A_j)$  où  $I$  indexe les composantes connexes de  $X$

et  $J_i$  les composantes connexes de  $A_i$  contenues dans  $X$ , sachant qu'une composante connexe de  $A$  est toujours incluse dans une de  $X$ , d'où  $H_1(X_i, A_i) = 0$ . Puisque  $f = 0$ ,  $g$  est surjective. Puisque  $X_i$  est connexe par arcs,  $H_0(X_i) = \mathbb{Z}$ . Si  $X_i$  contient plus d'une composante  $A_i$ , disons  $n > 1$ , alors  $\text{Im}(g) \simeq \mathbb{Z}^n$  d'après le théorème de Hurewicz, ce qui contredit  $\text{Im}(g) = H_0(X_i) = \mathbb{Z}$ .

Réciproquement, considérons la suite exacte :  $H_1(A) \xrightarrow{f} H_1(X) \xrightarrow{g} H_1(X, A) \xrightarrow{h} H_0(A) \xrightarrow{i} H_0(X)$  où  $H_0(A) = \sum_{j \in J_i, i \in I} H_0(A_j)$  et  $H_0(X) = \sum_{i \in I} H_0(X_i)$ . Puisque  $X_i$  contient au plus une  $A_i$ ,  $i$  est injective, d'où  $\text{Ker}(i) = 0$  : en effet, si  $x, y \in A$  et  $x - y = 0$  dans  $H_1(X)$ , il existe un chemin continu dans  $X$  joignant  $x$  et  $y$ , et comme  $x, y \in A$ , ce chemin continu est inclus dans l'unique composante connexe de  $A$  contenue dans  $X$ , donc  $x = y$  dans  $H_1(A)$ . Puisqu'aussi par hypothèse  $f$  est surjective,  $\text{Im}(g) = H_1(X) = \text{Ker}(g) = H_1(X)$ , d'où  $g = 0$  et  $\text{Im}(g) = 0 = \text{Ker}(h)$ . Ainsi,  $H_1(X, A) = H_1(X, A)/\text{Ker}(h) = \text{Im}(h) = \text{Ker}(i) = 0$ .

3. Si  $H_k(X, A) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par caractérisation des isomorphismes par exactitude, on a  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  un isomorphisme en tout  $k \in \mathbb{N}$ . Or c'est le morphisme induit par l'inclusion canonique, qui est donc un quasi-isomorphisme par définition. Réciproquement, supposons que ce soit le cas. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Im}(H_k(A) \rightarrow H_k(X)) = H_k(X) = \text{Ker}(H_k(X) \rightarrow H_k(X, A))$  qui est donc l'application nulle. De même de l'autre côté,  $\text{Ker}(H_k(A) \rightarrow H_k(X)) = 0 = \text{Im}(H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_k(A))$

qui est donc l'application nulle. On a donc  $\star \xrightarrow{0} H_k(X,A) \xrightarrow{0} \star$  et l'exactitude de cette suite donne  $H_k(X,A) = 0$ .

**Corollaire. (*Homologie relative d'un rétract*)**

Si  $(X,A)$  est un rétract, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X) = H_k(X,A) \oplus H_k(A)$ .

▷ En effet, on a vu que  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  était injective pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus,  $H_k(X) \rightarrow H_k(X,A)$  est surjective, puisque  $H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_k(A)$  est alors nulle. On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(X,A) \longrightarrow 0$$

qui est scindée à gauche par  $r_*$  l'application induite en homologie par une rétraction  $r : X \rightarrow A$ . Comme on parle de  $\mathbb{Z}$ -modules, la suite est tout simplement scindée, d'où  $H_k(X) = H_k(X,A) \oplus H_k(A)$ . ■

L'homologie relative englobe grossièrement l'homologie tout court, par la remarque suivant :

**Corollaire. (*Récupération des groupes réduits par l'homologie relative*)**

Considérons  $X$  un espace topologique. Soit  $x_0 \in X$ . Alors

$$H_k(X,x_0) := H_k(X,\{x_0\}) \simeq \tilde{H}_k(X)$$

pour tout  $k \geq 0$ .

▷ En effet, on prend  $A = \{x_0\}$  dans la preuve précédente, ce qui donne grâce  $H_k(A) = 0$  pour tout  $k \geq 1$  des suites exactes  $H_{k+1}(A) = 0 \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,x_0) \longrightarrow H_k(A) = 0$ . Autrement dit, la flèche du milieu est injective et surjective ; c'est un isomorphisme, d'où  $H_{k+1}(X) \simeq H_{k+1}(X,x_0)$ . Reste à traiter le cas  $k = 0$ . D'après le point précédent,  $\{x_0\}$  étant un rétract de  $X$ ,  $H_0(X,\{x_0\}) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$  puisque  $H_0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ , et puisque en degré 0 ce n'est que du calcul de  $\mathbb{Z}^d$ , on a bien  $H_0(X,\{x_0\}) = \tilde{H}_0(X)$ . ■

*Remarque.* On peut même récupérer l'homologie singulière non réduite en considérant  $A = \emptyset$ .

En effet, le raisonnement pour  $k \in \mathbb{N}^*$  dans la preuve précédente tient également pour  $k = 0$ , car la suite exacte longue en homologie de  $(X,A)$  se prolonge à droite par des applications nulles.

Ainsi, **l'homologie relative est le type le plus général d'homologie topologique**.

**Fait. (*Application induite en homologie relative*)**

Toute application continue  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$ , i.e.  $f : X \rightarrow Y$  continue et telle que  $f(A) \subseteq B$ , induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(A) & \longrightarrow & H_{k+1}(X) & \longrightarrow & H_{k+1}(X,A) & \longrightarrow & H_k(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & f_{|A_{*,k+1}} \downarrow & & f_{*,k+1} \downarrow & & \downarrow & & f_{|A_{*,k}} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(B) & \longrightarrow & H_{k+1}(Y) & \longrightarrow & H_{k+1}(Y,B) & \longrightarrow & H_k(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où la flèche manquante est construite à partir du diagramme à deux entrées de l'homologie relative. On note encore  $f_{*,k}$  et l'on dit que c'est l'application induit (sur les groupes) d'homologie (singulière) relative. On note bien sûr  $f_*$  la donnée entière des  $f_{*,k}$ .

En effet, on a en trois dimensions entre les deux diagrammes à deux entrées de  $(X,A)$  et  $(Y,B)$ , des applications  $f'_\# : C_k(A) \rightarrow C_k(B)$  et  $f_\# : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$  en tout  $k \in \mathbb{N}$ , qui passe au quotient et ce de manière commutative automatiquement. En effet si  $\sigma = \sigma' + \tau$  où  $\sigma, \sigma' \in C_k(X)$  et  $\tau \in C_k(b)$ ,  $f_\#(\sigma) = f_\#(\sigma') + f_\#(\tau)$  où  $f_\#(\tau) \in C_k(B)$ .

On a donc un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes. Il donne naissance à un morphisme en homologie  $H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_{k+1}(Y,B)$  et celui-ci fait commuter automatiquement le diagramme donné s'il existe.

À ce stade, il est peut-être plus sage d'utiliser les notations non indicées. Pour  $[x] \in H(X,A)$  dans  $\text{Ker}(\partial) \subseteq C(X,A)$ , il existe  $y \in C(X)$  tel que  $x = \pi(y)$ . Alors  $f_\#(y) \in C(Y)$ . Prenons  $\pi f_\#(x) \in C(Y)/C(B)$ . Alors  $\pi f_\# \in \text{Ker}(\partial)$ , car  $\partial \pi f_\#(x) = \pi f_\# \partial(x) = 0$ , car  $\partial(x) = 0$ . On peut donc prendre la classe dans  $H(Y,B)$ . Ceci est alors muni de la structure de morphisme. Reste à vérifier qu'il est bien défini. Si  $x = x' + \partial(c)$ , prenons des antécédants  $y, y'$  respectivement de  $x, x'$  et notons  $d = y - y'$ . Alors  $y = y' + d$  avec chacun des termes antécédant de  $x = x' + \partial(c)$ . On suppose  $y, y' \in \text{Ker}(\partial)$ . Alors  $f_\#(y) = f_\#(y') + f_\#(d)$  puis  $\pi f_\#(y) = \pi f_\#(y') + \pi f_\#(d)$ . Mais  $\pi f_\#(d)$  est dans le noyau de la différentielle relative de  $C(Y,B)$ , car  $d$  dans celle de la différentielle relative de  $C(X,A)$ , en vertu de la commutation de la strate la plus basse du rectangle commutatif.

**Propriété. (*Type d'homotopie et isomorphisme de complexes relatifs*)**

Si  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  est une application continue entre paires topologiques qui est une équivalence d'homotopie et telle que  $f_{|A \rightarrow B}$  est aussi une équivalence d'homotopie, alors  $f_* : H_k(X,A) \rightarrow H_k(Y,B)$  induit un isomorphisme

$$H_k(X,A) \simeq H_k(Y,B)$$

pour tout  $k \geq 0$ .

▷ Application directe du lemme des cinq dans le diagramme de l'application induite en homologie relative (en écrivant dans notre représentation une colonne de plus à droite). ■

**Définition. (*Triplet topologique*)**

Un *triplet topologique* est un triplet  $(X,A)$  tel que  $(X,A)$  et  $(A,B)$  soient des paires topologiques, i.e.  $X,A,B$  sont trois espaces topologiques tels que  $X \supseteq A \supseteq B$ .

**Propriété. (*Suite exacte homologique associée au triplet*  $(X,A,B)$ )**

Soit  $(X,A,B)$  un triplet topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A,B) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie relative, terminée par  $H_0(A,B) \longrightarrow H_0(X,B) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$ . De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre triplets.

▷ Explicitons simplement les flèches. La première flèche représentée est induite par l'inclusion  $(A,B) \hookrightarrow (X,B)$ . La seconde est induite quant à elle par  $(X,B) \hookrightarrow (X,A)$ . La troisième est la composée  $H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A,B)$ . On peut montrer qu'elles forment une suite exacte. ■

**Corollaire. (*Suite exacte d'homologie réduite associée à la paire*  $(X,A)$ )**

On obtient la suite exacte associée à une paire topologique  $(X,A)$  où  $A \neq \emptyset$  pour les groupes d'homologie réduits :

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(A) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \longrightarrow \dots$$

où seuls les  $H_i(X,A)$  n'ont pas de tildes. De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre paires.

▷ Puisque  $A \neq \emptyset$ , on peut prendre  $B \subseteq A$  ponctuel et le résultat s'ensuit par le corollaire de récupération de l'homologie réduite par la relative. ■

### 5.3.2 Calcul pratique de l'homologie singulière

#### 5.3.2.1 Théorèmes d'excision

**D efinition-propriété. (*Complexe de chaînes subordonné*)**

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  tel que  $(\overset{\circ}{U}_i)_{i \in I}$  soit un recouvrement ouvert de  $X$ . On peut considrer le complexe de chaînes, parfois dit *complexe subordonné au recouvrement*  $\mathcal{U}$ , noté  $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$  où l'on se restreint dans chaque groupe abélien libre aux simplexes singuliers dont l'image est contenue dans au moins l'un des  $U_i$ , sachant qu'au même au même ordre, nul besoin pour additionner deux simplexes qu'ils soient contenus dans un même ouvert.

▷ Il est évident que la différentielle est encore bien définie, car un simplexe inclus dans un ouvert à toutes ses faces encore dedans. On a encore une différentielle par simple descente (nul quotient ici). ■

→ *Notation.* On note  $H_k^U(X)$  où  $H_k(X^U)$  les groupes d'homologie pour  $k \in \mathbb{N}$  du complexe de chaînes subordonné au recouvrement  $\mathcal{U}$  de l'espace  $X$ .

### Théorème. (*Théorème des petites chaînes*)

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $X$  dont les intérieurs forment un recouvrement de  $X$ . Alors l'inclusion canonique  $\text{inc} : \mathcal{C}^U(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$  est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. En particulier, ce morphisme induit des isomorphismes sur leurs groupes d'homologie.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La preuve repose sur la notion de subdivision barycentrique. ■

On peut le récrire sous la forme plus pratique :

### Reformulation pratique. (*Théorème d'excision*)

On considère un triplet  $(X, A, V)$  où  $V$  est *fortement inclus* dans  $A$ , i.e.  $\bar{V} \subseteq \mathring{A}$ . Alors l'inclusion  $i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$  induit pour tout entier  $k \geq 0$  un isomorphisme  $i_* : H_k(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow H_k(X, A)$ , et l'on dit ici que  $U$  peut être *excisé*, c'est-à-dire qu'un tel isomorphisme a lieu.

### Méthode. (*Comment exciser un non-excisable*)

Supposons que  $(X, A, V)$  ne soit pas tel que  $V$  soit fortement inclus dans  $A$ . Alors si  $(X, A', V')$  est une paire topologique avec  $V'$  fortement inclus dans  $A'$  et  $V' \subseteq V$  est un rétract par déformation de  $V$  et  $A' \subseteq A$  un rétract par déformation de  $A$ , on a un isomorphisme pour tout  $k \in \mathbb{N}$  de  $H_k(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_k(X, A)$ .

▷ En effet, l'homologie et l'homologie relative se comportent bien vis-à-vis de l'équivalence d'homotopie en raison la suite exacte longue en homologie relative qui ne varie alors que d'un terme et il suffit de lui appliquer un petit lemme des cinq. ■

### Corollaire. (*Homologie d'un conifié*)

Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On rappelle que le conifié  $X \cup CA$  est  $(X \coprod C(A)) / \sim$  où  $C(A)$  est le cône de  $A$  et  $\sim$  est l'équivalence identifiant tout point  $a \in A \subseteq X$  avec le point  $(a, 0) \in C(A)$ .

L'inclusion  $(X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$  induit pour tout entier naturel  $k$  un isomorphisme entre les groupes d'homologie  $H_k(X, A) \rightarrow H_k(X \cup CA, CA)$ .

▷ En effet, les hypothèses du théorème d'excision sont vérifiées :  $\{v\}$  où  $v$  est le sommet du cône  $CA$  est un fermé inclus dans l'intérieur de  $CA$ . ■

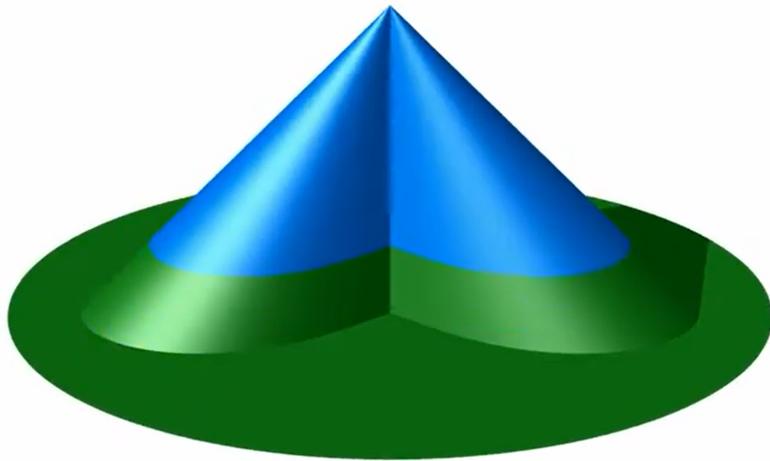


FIGURE 5.3.5 : Homologie d'un conifié par l'excision. —

On rappelle que si  $(Y,X)$  a la PEH et  $X$  est contractile, alors  $Y$  et  $Y/X$  sont homotopiquement équivalents. Plus généralement :

**Proposition. (*Théorème d'écrasement*)**

Soit  $(X,A)$  une paire de Borsuk, i.e.  $(X,A)$  a la propriété d'extension des homotopies et éventuellement  $A$  est fermée dans  $X$ . Alors la projection  $p : X \rightarrow X/A$  induit un isomorphisme

$$H_k(X,A) \simeq \tilde{H}_k(X/A)$$

pour tout entier naturel  $k$ .

Ainsi, le théorème d'excision a pour conséquence que dans le cas d'une bonne paire topologique, on peut retrouver à partir de l'homologie relative l'homologie absolue, quoique réduite.

▷ On montre qu'elle induit plus précisément un isomorphisme  $H_k(X,A) \rightarrow H_k(X/A, A/A)$ . ■

**Exercice 4**

Retrouver la propriété rappelée au-dessus : si  $(Y,X)$  est une paire de Borsuk avec  $X$  contractile,  $Y \cong Y/X$ , grâce au théorème d'excision.

Une application importante du théorème d'excision est le calcul des groupes d'homologie singulière des sphères que nous verrons avant la fin du chapitre.

### 5.3.2.2 Suite de Mayer-Vietoris

#### Définition. (*Somme directe de complexes de chaînes*)

La somme directe de complexes de chaînes est définie terme à terme par la somme directe en tant que  $\mathbb{Z}$ -modules de chaque terme.

Généralisons ce que nous avons vu pour la décomposition en composantes connexes.

#### Propriété. (*Homologie d'une somme disjointe*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X \sqcup Y) = H_k(X) \oplus H_k(Y)$ .

Plus généralement, si  $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$  est une somme topologique d'espaces  $(X_i)_{i \in I}$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X) = \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i)$ .

#### Propriété. (*Suite de Mayer-Vietoris*)

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ , en particulier deux ouverts recouvrant  $X$ . On pose  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . La suite exacte courte suivante de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A \cap B) \longrightarrow \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

produit une suite exacte longue de groupes d'homologie :

$$\dots \longrightarrow H_k(A \cap B) \longrightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0$  dite *suite de Mayer-Vietoris*.

De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues.

▷ C'est un corollaire du théorème d'excision. ■

#### Heuristique

La suite de Mayer-Vietoris est l'analogue homologique du théorème de van Kampen.

### Méthode. (*Calcul d'homologie par la suite de Mayer-Vietoris*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- ★ Le morphisme  $H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(X)$  envoie  $\iota_*(\alpha) \oplus \iota'_*(\beta)$  sur  $\alpha + \beta$  en notant  $\iota : A \rightarrow X$  et  $\iota' : B \rightarrow X$  sont les inclusions.
- ★ Le morphisme  $H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B)$  envoie  $\alpha$  sur  $\iota_*(\alpha) \oplus (-\iota'(\alpha))$ .
- ★ Si  $k \geq 1$ , le morphisme  $H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B)$  est la composée du morphisme naturel  $H_k(X) \rightarrow H_k(X, B)$ , de l'isomorphisme  $H_k(X, B) \simeq H_k(X^{\{A, B\}}, B) = H_k(A, A \cap B)$  du théorème des petites chaînes puis le morphisme de bord  $\delta : H_k(A, A \cap B) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B)$  de la suite exacte longue homologique de  $(A, A \cap B)$ .

### Application. (*Homologie singulière du tore*)

Calculons l'homologie du tore  $\mathbb{T}^2$ . On le recouvre par deux ouverts qui sont des tubes qui ne se refendent pas sur eux-mêmes, un rouge et un bleu disons pour concorder avec la figure suivante. Ils se rencontrent en l'union disjointe de deux tels tubes. Le procédé est semblable à la décomposition d'un cercle, mais ici avec un tore.

On a donc un recouvrement de Mayer-Vietoris par deux ouverts cylindriques qui se rétractent par déformation sur des cercles ; de plus, l'intersection est la réunion disjointe de deux cylindres, donc homotopiquement équivalente à  $S^1 \sqcup S^1$ .

On écrit

$$\begin{array}{ccccc} & & & \cdots & \\ 0 = 0 \oplus 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 = 0 \oplus 0 & \xrightarrow{\quad} & H_2(\mathbb{T}^2) \\ & \swarrow & \searrow & & \\ \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\quad} & H_1(\mathbb{T}^2) \\ & \swarrow & \searrow & & \\ \mathbb{Z}^2 & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z} \end{array}$$

la suite exacte longue homologique de ce recouvrement, où la colonne gauche est l'homologie de  $S^1 \sqcup S^1$  et la colonne du milieu est la somme de deux homologies de  $S^1$ . Bon, c'est pareil, mais peu importe. On a clairement  $H_{\geq 3}(\mathbb{T}^2) = 0$  puisque ces groupes sont isolés dans des termes nuls dans la suite. On a  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  par connexité et  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$  par le théorème d'Hurewicz. Reste à déterminer  $H_2(\mathbb{T}^2)$ . Puisque le terme précédent est nul,  $H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  est injective donc  $H_2(\mathbb{T}^2)$  s'identifie à son image dans l'homologie en degré 1 de  $S^1 \sqcup S^1 \simeq \pi_1(S^1 \sqcup S^1)$  par commutativité, écriture un peu impropre puisque  $S^1 \sqcup S^1$  n'est pas connexe par arcs. Or par exactitude cette image est encore le noyau de  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  la somme des homologie en degré 1 des deux tubes du recouvrement. Or cette application envoie un lacet  $\gamma$  d'un petit tube de l'intersection sur  $\gamma \oplus -\gamma$  son image dans chacun des grands tubes du recouvrement. Il se passe exactement la même chose pour l'autre petit tube de l'intersection. Matriciellement, cette application

s'écrit donc  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Son noyau est donc  $\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d'où  $H_2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{pour } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } k = 2 \\ 0 & \text{pour } k \geq 3. \end{cases}$$

Remarquons que la dualité de Poincaré (*voir ce chapitre en ANALYSIS SITUS pour la découvrir*) est respectée :  $\mathbb{T}^2$  est une variété compacte orientable de dimension 2 et son homologie est sans torsion, d'où  $H_{2-p}(\mathbb{T}^2) = H_p(\mathbb{T}^2)$  pour chaque  $p \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .

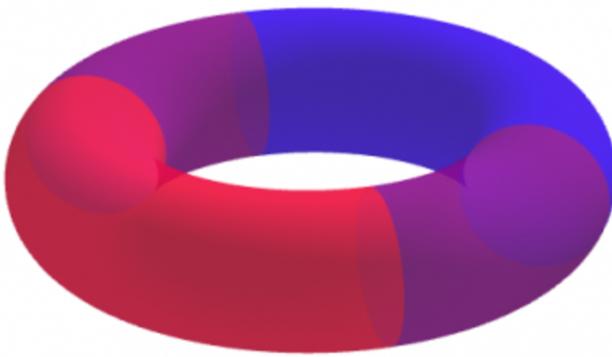


FIGURE 5.3.6 : Homologie du tore par Mayer-Vietoris. —

## Application. (*Homologie du plan projectif réel*)

On considère que  $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{M} \cup D^2$  où  $\mathbb{M} \cap D^2$  dans  $\mathbb{RP}^2$  est une bande qui se rétracte par déformation sur  $S^1 = \partial\mathbb{M}$  que l'on appelle sans surprise *âme* comme pour un matelas, et l'âme de  $\mathbb{M}$  est alors son intérieur en tant que variété à bord. Alors :  $H_i(\mathbb{M} \cap D^2) = H_i(S^1)$  qui est nul pour  $i \geq 2$  et  $H_i(D^2)$  est nul pour  $i \geq 1$ . De plus,  $H_i(\mathbb{M}) = H_i(S^1)$  car  $\mathbb{M} \cong S^1$ . La suite de Mayer-Vietoris prend la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_3(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & H_1(S^1) & \xleftarrow{\quad} & H_1(S^1) \oplus H_1(D^2) \\ & & & & & \swarrow & \longrightarrow \\ & & & & H_0(S^1) & \xleftarrow{\quad} & H_0(S^1) \oplus H_0(D^2) \\ & & & & & \swarrow & \longrightarrow \\ & & & & & & H_0(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où donc  $H_i(\mathbb{RP}^2) = 0$  dès que  $i \geq 3$ ,  $H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$  par connexité par arcs et  $H_1(\mathbb{RP}^2) =$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par le théorème de Hurewicz. On cherche  $H_2(\mathbb{RP}^2)$  pour conclure. On se ramène à la sous-suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où par la méthode précédente,  $\beta : \bar{1} \mapsto \iota_*(\bar{1}) \oplus 0$  envoie le générateur positif de  $H_1(S^1)$  groupe d'homologie au premier ordre de  $\mathbb{M} \cap D^2$  sur le lacet parcourant deux fois l'âme de  $\mathbb{M}$ , i.e.  $\beta = \times 2$ . Elle est en particulier injective, donc  $H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$  est nulle, d'où l'exactitude de  $0 \longrightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$  et  $H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Remarquons que la dualité de Poincaré, même en retirant les parties de torsion, n'est pas respectée :  $\mathbb{RP}^2$  est une variété compacte de dimension 2 mais n'est pas orientable et la dualité ne s'applique pas.

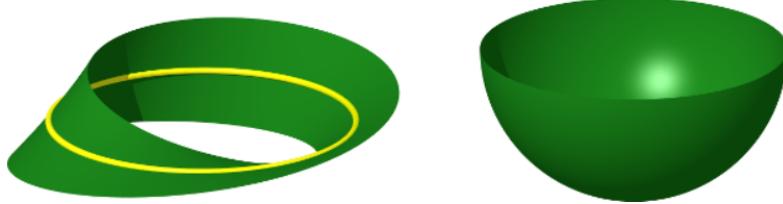


FIGURE 5.3.7 : *Plan projectif et ruban de Möbius.* —

### Proposition. (*Suite de Mayer-Vietoris réduite*)

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $A \cap B \neq \emptyset$  et  $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$ . Alors on a une suite exacte longue de groupes d'homologie :

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_k(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B) \longrightarrow \tilde{H}_k(X) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $\tilde{H}_0(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$ .

### Application. (*Homologie d'un bouquet de sphères*)

On cherche l'homologie de  $X = S^2 \vee S^2$ . On utilise une décomposition  $A, B$  donnée à la van Kampen en dépassant de chaque côté. Peu importe, car  $A$  et  $B$  seront homotopiquement à

une sphère, ce qui est attendu puisque les calottes rajoutées se rétractent par déformation sur leur sommet. On dresse alors la suite de Mayer-Vietoris où la colonne de gauche est l'homologie de  $A \cap B$  le point base identifié et la colonne du milieu est la somme des homologie de deux 2-sphères :

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdots & & \\ & 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} 0 \\ & & \searrow & & \\ & 0 & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\quad} H_2(X) \\ & & \searrow & & \\ & 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} H_1(X) \\ & & \searrow & & \\ & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z}. \end{array}$$

On obtient que  $H_{\geq 3}(X) = 0$ . De plus, la suite donne par exactitude  $H_2(X) = \mathbb{Z}^2$ . Enfin,  $H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = (0 * 0)^{ab} = 0^{ab} = 0$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(S^2 \vee S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

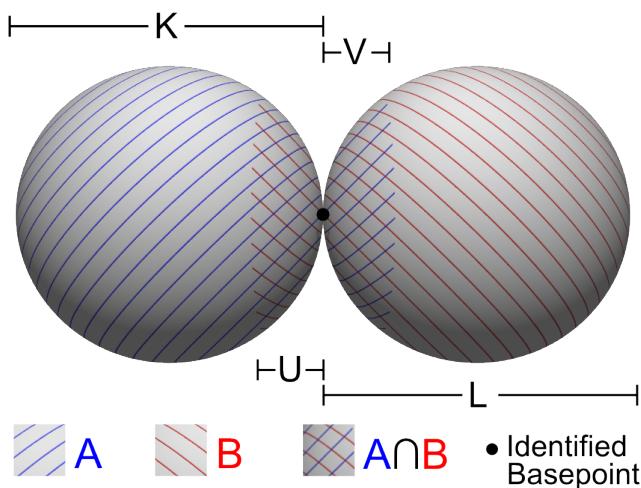


FIGURE 5.3.8 : Homologie d'un bouquet de deux sphères par Mayer-Vietoris. —

**Application. (*Homologie de la suspension*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On décompose sa suspens  $\Sigma X$  de la manière suivante : un ouvert  $A$  où  $\Sigma X$  est privé de son sommet de temps 1 et  $\Sigma X$  est privé de son sommet de temps 0, comme représenté ci-dessous dans le cas  $X = S^0$  ce qui est un peu bizarre aussi. Alors  $A$  et  $B$  se rétractent par déformation sur leur unique sommet et sont donc contractiles tandis que  $A \cap B$  se rétracte par déformation sur sa base et donc  $A \cap B \cong X$ . Envahis par des contractils, on dresse plutôt la suite de Mayer-Vietoris réduite :

$$\begin{array}{ccccc} & & & \cdots & \\ & \tilde{H}_2(X) & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_2(\Sigma X) \\ & \tilde{H}_1(X) & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_1(\Sigma X) \\ & \tilde{H}_0(X) & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_0(\Sigma X) \end{array}$$

où la colonne du milieu et la somme de deux homologies réduites de contractiles. On obtient directement que pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $\tilde{H}_k(\Sigma X) = \tilde{H}_{k-1}(X)$ . Enfin, puisque  $\Sigma X$  a autant de composantes connexes de  $X$ , comme  $[0,1]$  est connexe,  $\tilde{H}_0(\Sigma X) = \tilde{H}_0(X)$ . Pour résumer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\tilde{H}_k(\Sigma X) = \begin{cases} \tilde{H}_{k-1}(X) & \text{pour } k \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) & \text{pour } k = 0. \end{cases}$$

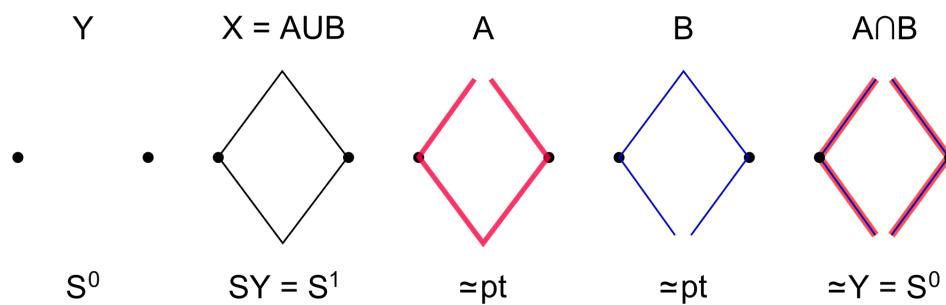


FIGURE 5.3.9 : *Homologie de la suspension par Mayer-Vietoris.* —

On donne un autre exemple où il faut raisonner sur les applications non triviales de la suite exacte longue en homologie et ce n'est pas simple.

### Application. (*Homologie de la bouteille de Klein*)

On décompose la bouteille de Klein comme recollement de deux rubans de Möbius  $A, B$  représentés respectivement en bleu et rouge sur la figure ci-dessous, le long de leur bord qui est un cercle. Alors  $A, B$  et  $A \cap B$  sont homotopiquement équivalents à des cercles, d'où la suite de Mayer-Vietoris pour  $\mathcal{K}$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & \dots & \longrightarrow & H_3(\mathcal{K}) \\ & & \searrow & & \\ 0 & \longleftarrow & 0 = 0 \oplus 0 & \longrightarrow & H_2(\mathcal{K}) \\ & & \searrow & & \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_1(\mathcal{K}) \\ & & \searrow & & \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_0(\mathcal{K}) \end{array}$$

où la colonne de gauche est l'homologie d'un cercle et celle du milieu la somme de deux homologies de cercle. Or  $H_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$  par connexité. Décrivons l'application  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  à la ligne de dimension 1. On peut identifier les  $H_1$  aux  $\pi_1$  puisque les cercles ont des groupes fondamentaux commutatifs. Cette application envoie 1 sur  $(2, -2)$  par le simple fait que le bord d'un ruban de Möbius s'enroule deux fois autour du cercle médian sur lequel on l'a rétracté. En particulier,  $\alpha$  est injective, donc l'image de  $H_2(X)$  dans  $\mathbb{Z}$  est nulle. Or le terme précédent  $H_2(X)$  étant nul,  $H_2(X)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , qui est donc le groupe nul.

De l'autre côté, l'application  $\beta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_1(X)$  est surjective donc  $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^2 / \text{Ker}(\beta)$ . Or  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ . En prenant  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (1, -1)$  pour base de  $\mathbb{Z}^2$ , l'image de  $\alpha$  s'écrit  $2e_2\mathbb{Z}$ , d'où  $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^2 / (0 \oplus 2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

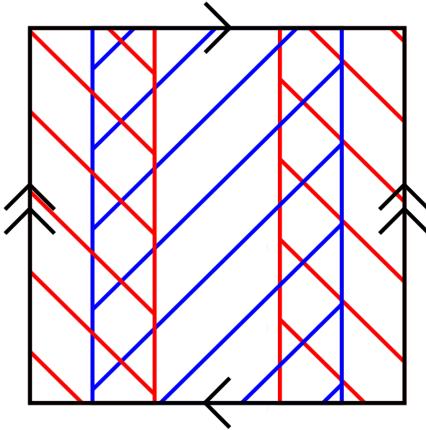


FIGURE 5.3.10 : Homologie de la bouteille de Klein par Mayer-Vietoris. —

### 5.3.2.3 Homologie d'une limite inductive

**Propriété.** (*Homologie d'une limite inductive*)

Soit  $X$  un espace topologique séparé. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille inductive<sup>a</sup> complète de parties de  $X$ , i.e. telle que tout compact de  $X$  est inclus dans l'une d'elles. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\varinjlim H_n(X_i) \simeq H_n(X).$$

---

<sup>a</sup> i.e. telle que l'ordre induit par l'inclusion  $i \leq j \iff X_i \subseteq X_j$  soit inductif au sens des ensembles ordonnés inductifs.

▷ On considère donc la famille inductive  $(X_i, f_{ij})_{i \in I, i \leq j}$  où  $f_{ji} : X_i \rightarrow X_j$  est l'inclusion. Alors il n'est pas difficile de voir que  $(H_n(X_i), (f_{ij})_*)_i$  est une famille inductive de modules et de morphismes de modules, en prenant des  $\mathbb{Z}$ -modules si l'on travaille encore sur les groupes abéliens. Si  $f_i : X_i \rightarrow X$  est l'inclusion, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ji}} & X_j \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & X & \end{array}$$

est commutatif donc induit un commutatif en homologie. En particulier,  $\phi = \sum_{i \in I} (f_i)_* : \sum_{i \in I} H_n(X_i) \rightarrow H_n(X)$  passe au quotient en un morphisme  $\tilde{\phi} : \varinjlim H_n(X_i) \rightarrow H_n(X)$  où l'on rappelle que la limite inductive d'une famille inductive de modules, i.e. une famille  $(E_i, g_{ij})$  indexée par un ensemble inductif  $I$  avec une famille de morphismes  $(g_{ji} : E_i \rightarrow E_j)_{i \leq j}$  tels que  $g_{ii} = id_{E_i}$  et pour tous  $i \leq j \leq k$ ,  $g_{ki} = g_{kj} \circ g_{ji}$ , est le quotient des sommes presque nulles par le sous-module engendré par les  $g - g_{ij}(x)$  dès que  $i \leq j$  et  $x \in E_i$ .

Vérifions que  $\tilde{\phi}$  est un isomorphisme. Comme  $X$  est séparé, toute chaîne singulière de  $X$  est à support dans un compact de  $X$  par réunion finie d'images compactes, donc par complétude de  $(X_i)_i$ ,

dans un certain  $X_i$ , et ceci implique que  $\tilde{\varphi}$  est surjective après passage au quotient. Soit maintenant  $c = \sum_{i \in I} c_i$  une somme presque nulle de chaînes singulières avec  $c_i$  à valeurs dans  $X_i$  dès que non nulle. Supposons que  $\tilde{\phi}(c) = 0$ , i.e.  $c = \partial b$  est un bord dans  $X$ . On utilise qu'il existe  $k \in I$  par inductivité tel que  $X_k$  contienne le support de  $b$  c'est-à-dire les  $X_i$  tels que  $c_i$  soit non nulle. Donc  $c$  est une chaîne singulière dans  $X_k$  qui est un bord dans  $X_k$ . Donc  $\tilde{\varphi}$  est injective. ■

### 5.3.2.4 Groupes d'homologie des sphères

#### 5.3.2.4.1 Calcul de l'homologie des sphères $S^n, n \in \mathbb{N}$

**Théorème.** (*Groupes d'homologie des sphères*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De plus,  $H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En termes de groupes réduits, on a pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

▷ Utilisons la suite de Mayer-Vietoris. De même qu'avec le théorème de van Kampen, la sphère de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est la réunion de deux ouverts :  $U = S^n \setminus \{N\}$  et  $V = S^n \setminus \{S\}$  où  $N, S$  sont respectivement les pôles Nord et Sud de  $S^n$ . Ces deux ouverts sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$  qui est contractile. De plus, leur intersection  $U \cap V$  est une couronne homotopiquement équivalente à  $S^{n-1}$ . La suite de Mayer-Vietoris version réduite donne

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \cdots & \\ & & & & & & \\ \tilde{H}_k(S^{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{H}_k(S^n) & & \\ & & \swarrow & & & & \\ & & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{H}_{k-1}(S^n) \\ & & & & \swarrow & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & \swarrow & & \\ \tilde{H}_0(S^{n-1}) & \xrightarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{H}_0(S^n) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

exacte. Pour  $n = 1$ ,  $\tilde{H}_0(S^1) = 0$ ,  $\tilde{H}_1(S^1) = \mathbb{Z}$  par le théorème de Hurewicz. Ensuite,  $\tilde{H}_1(S^0) = 0$  d'où l'exactitude  $0 \longrightarrow \tilde{H}_2(S^1) \longrightarrow 0$  qui donne  $\tilde{H}_2(S^1) = 0$ . Pour  $\tilde{H}_3(S^1)$ , on utilise  $\tilde{H}_2(S^0) = 0$  et cetera puisque  $S^0$  est soi-disant contractile. Supposons que  $\tilde{H}_k(S^n) = \delta_k^n \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Calculons  $\tilde{H}_k(S^{n+1})$ . En lisant un peu en diagonale la suite, on a  $0 \longrightarrow \tilde{H}_k(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n) \longrightarrow 0$

en tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'où  $\tilde{H}_{k+1}(S^{n+1}) \simeq \tilde{H}_k(S^n) = \delta_k^n \mathbb{Z} = \delta_{k+1}^{n+1} \mathbb{Z}$ , ce que l'on voulait. Par récurrence, on a la résultat pour toutes les sphères et à tout rang. ■

▷ (*Autre preuve*) On peut utiliser aussi le théorème d'écrasement. On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ . Ainsi, on a une suite exacte courte en homologie relative

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) & & 0 \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & \tilde{H}_k(S^n) & & \end{array}$$

dont le résultat découle facilement par la même récurrence que dans la preuve précédente. ■

### Application. (*Homologie du ruban de Möbius*)

Le ruban de Möbius  $\mathbb{M}$  est rétract par déformation de son bord le cercle, d'où  $\mathbb{M} \cong S^1$ . En particulier, on a

$$H_k(\mathbb{M}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ pour } k = 0, 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

#### 5.3.2.4.2 Degré d'une application entre sphères

##### Définition-propriété. (*Degré d'un endomorphisme de la sphère*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. L'application induite  $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$  est à isomorphisme près un morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Les générateurs de  $\tilde{H}_n(S^n)$  sont simultanément fixés à celui dont l'image par l'isomorphisme  $\tilde{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  choisi est  $1_{\mathbb{Z}}$ , ce morphisme s'écrit de manière unique sous la forme  $n \mapsto dn$  avec  $d \in \mathbb{Z}$ . On appelle  $d$  le *degré* de  $f$  et l'on note  $d = \deg(f)$ .

Si l'on ne fixe pas les générateurs simultanément, le degré n'est définir qu'au signe près, et souvent, on le prend alors positif.

##### Heuristique

Le degré d'une application de la sphère calcule le nombre de fois qu'elle s'enroule sur elle-même sous l'action de cette application.

##### Fait. (*Constance du degré sur les classes d'homotopie*)

Deux applications homotopes entre sphères de même dimension ont le même degré.

Elles induisent exactement la même application en homologie, et c'est de là que l'on part pour définir le

degré de l'application.

### Proposition. (*Degré d'une composée*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f, g : S^n \rightarrow S^m$  deux applications continues. Alors  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ .

▷ Découle immédiatement de la définition du degré ■

### Corollaire. (*Degré d'un automorphisme*)

Soit  $f : S^n \rightarrow S^n, n \in \mathbb{N}$  un automorphisme, ou plus généralement une équivalence d'homotopie. Alors  $\deg(f) = \pm 1$ .

▷ En effet, le degré de l'identité est 1, car  $id_{S^n*}, n = id_{\tilde{H}_n(S^n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

### Propriété. (*Degré d'une surjection*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une surjection continue. Alors  $\deg(f) \neq 0$ .

▷ Par contraposée, si  $f$  n'atteint pas le point  $x$ ,  $f : S^n \rightarrow S^n \setminus \{x\}$  reste alors bien définie. Or  $S^n \setminus \{x\}$  est contractile, donc  $f$  est homotope à zéro, donc de degré nul. ■

### Contre-exemple. (*Applications surjectives de degré nul*)

Une application de degré nul entre sphères de même dimension peut être surjective.

Rien que dans  $S^1$ , un lacet peut faire plusieurs fois le tour du cercle et se renrouler avant la fin du temps. □

### Lemme. (*Degré d'une suspension*)

Soit  $f$  une application de la sphère  $S^n$  sur elle-même. On sait que  $\Sigma S^n = S^{n+1}$  à homéomorphisme près. Alors  $\deg(f) = \deg(\Sigma f)$ .

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ ,  $H_{n+1}(\Sigma S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  est un isomorphisme donné par la suite de Mayer-Vietoris associée à la sphère  $S^{n+1}$ . Par fonctorialité des suites exactes homologiques, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \\ \times \deg(\Sigma f) = \Sigma f_* \downarrow & & \downarrow f_* = \times \deg(f) \\ \mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

commute. Alors  $f_*$  et  $\Sigma f_*$  ne diffèrent que par un isomorphisme de  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , i.e. l'identité, d'où l'identité des degrés. ■

### Exemples

1. (*Degré de l'identité*) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\deg(id_{S^n}) = 1$ .
2. (*Degré des contractiles*) Soit une application contractile de  $S^n$  dans elle-même,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\deg(f) = 0$ .

En effet, le morphisme induit par l'application constante est constant, donc nul.

3. Dans le cas  $n = 1$ , c'est la notion de (*degré d')**enroulement* d'un lacet sur  $S^1$ . Car  $S^1 \rightarrow S^1$  n'est autre qu'un lacet  $S^1 \rightarrow S^1$ .
4. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . En identifiant  $S^1 \simeq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^k$  restreinte et corestreinte à  $\mathbb{U}$  est continue et a degré  $k$ .

En effet, dans ce cas, c'est un revêtement et  $H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ .

5. Le degré d'une réflexion à travers un hyperplan vectoriel  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$  est  $-1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Cela peut se faire par récurrence : le degré de  $z \mapsto -z = \frac{1}{z}$  dans  $\mathbb{U}$  est  $-1$ , puisqu'au lacet générateur antihoraire de  $S^1$ , elle fait correspondre le lacet générateur horaire. On peut ensuite passer  $S^n$  à  $S^{n+1}$  grâce à l'identité du degré d'une application avec celle de sa suspension, en remarquant qu'une réflexion à travers un hyperplan suspendue est encore une réflexion par rapport à la coordonnée de même indice dans la suspension.

Par suite, l'application antipodale  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$  a degré  $(-1)^{n+1}$ .

On a en effet  $A = f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$  où les  $f_i$  représentent les réflexions par rapport à  $\{x_i = 0\}$  pour  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .

Plus généralement, toute application sans point fixe est de degré  $(-1)^{\dim(S^n)+1}$ .

En effet, soit  $f$  sans point fixe. Elle est alors homotope à l'antipodale par  $H(x, t) = \frac{tf(x) + (1-t)A(x)}{\|tf(x) + (1-t)A(x)\|}$ , qui est définie partout, car si  $tf(x) + (1-t)A(x) = 0$ ,  $tf(x) = (1-t)x$ , d'où  $t = 1 - t$  en norme puis  $f(x) = x$  ce qui est exclu.

### Exercice 5 (*Applications entre sphères avec ou sans points antipodaux*)

1. Montrer que si  $f : S^n \rightarrow S^n$  vérifie  $f(x) \neq -x$  pour tout  $x$ , alors  $f$  est homotope à l'identité.
2. Montrer que si  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  est sans point fixe alors il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) = -x_0$ .

#### ► Éléments de réponse.

1. Recopier à un signe près la preuve de ce que toute application sans point fixe est homotope à l'antipodale.
2. Soit  $f$  une fonction sans point fixe et telle que  $f(x) \neq -x$  pour tout  $x \in S^{2n}$ . Alors  $f$  est à la fois homotope à l'identité et à l'antipodale, qui sont alors homotopes. Mais l'antipodale a pour degré  $(-1)^{2n+1} = -1 \neq 1 = \deg(id_{S^{2n}})$ , contradiction.

**Exercice 6** (*Théorème de la boule chevelue*)

1. Soit  $n$  un entier naturel impair. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs (tangents) sur  $S^n$  continu et ne s'annulant pas.
2. Soit  $n$  un entier naturel pair. Montrer que tout champ de vecteurs tangents continu sur  $S^n$  s'annule en au moins un point.
3. En déduire que l'on ne peut peigner la boule  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$  sans lui faire d'épi.

▷ Éléments de réponse.

1. Puisque  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  où donc  $n+1$  est pair, on considère le champ qui à  $v = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1}) \mapsto (-s_2, s_1, -s_4, s_3, \dots, -s_{n+1}, s_n)$ . Il est bien tangent à  $S^n$ .
2. Soit  $V \in \Gamma(S^n, TS^n)$  ne s'annulant pas. On pose l'application  $f : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto \frac{x+V(x)}{\|x+V(x)\|}$ . Par hypothèse, elle est sans point fixe : en effet, si  $\frac{x+V(x)}{\|x+V(x)\|} = x$ ,  $V(x) = [\|x+V(x)\| - 1]x$  d'où par produit scalaire à  $x$ ,  $\|x+V(x)\| = 1$ , puis  $V(x) = 0$  : donc  $f \sim A_n$  l'antipodale. De plus,  $f \sim id_{S^n}$  par  $(x, t) \mapsto \frac{x+tV(x)}{\|x+tV(x)\|}$ , absurde par signe de leurs degrés.
3. C'est simplement un habillage plaisant du cas  $n=2$ .

**5.3.2.4.3 Degrés locaux****Définition-propriété. (*Degré local d'une application entre sphères*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. Soit  $x \in S^n$ . Alors  $f$  induit une application  $f_* : H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{f(x)\})$ . On identifie  $H_n(S^d, S^d \setminus \{\star\}) \simeq H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  par l'isomorphisme donné par la suite exacte longue en homologie relative. Alors  $f_*$  est donnée par la multiplication par une constante  $d$  appelée *degré local* de  $f$  en  $x$  et l'on note  $d = \deg(f)_*$ .

▷  $f$  induit bien une telle application de paire sans aucun argument nécessaire. Les identifications suivantes viennent de ce que  $S^n \setminus \{\star\}$  est contractile, donc la suite exacte longue en homologie relative est une suite de  $0 \longrightarrow H_n(S^d, S^d \setminus \{\star\}) \simeq H_n(S^n) \longrightarrow 0$ . On choisit pour isomorphismes ces inclusions comme dit souvent quoique induites par la projection canonique, et l'on fixe un unique isomorphisme  $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  qui détermine ainsi univoquement le degré local. ■

**Théorème. (*Somme des degrés locaux*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. Soit  $y \in S^n$  tel que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  soit fini de cardinal  $k \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{x_i}.$$

▷ Notons que par l'excision, au lieu de calculer le degré local en  $x_i$  par  $H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ , on peut choisir un voisinage  $U_i$  de  $x_i$  et un voisinage  $V$  de  $x_i$  tels que  $f(U_i) \subseteq V$ , et s'intéresser à

l'application

$$f_* : H_d(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{y\})$$

à la place. En outre, puisque  $S^n$  est séparé, on peut prendre les  $U_i$  disjoints. Considérons le grand diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ H_n(S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n \setminus \{y\}) \\ e \uparrow & & \uparrow \\ H_n(\coprod_{i=1}^k U_i, \coprod_{i=1}^k (U_i \setminus \{x_i\})) & & \uparrow \sim \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \bigoplus_{i=1}^k H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{\bigoplus f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\}) \end{array}$$

où  $e$  est donnée par l'excision. Les isomorphismes fournis sont clairs et les applications non notées encore plus. On regarde le générateur positif de  $H_n(S^n)$  : par définition, son image dans  $H_n(S^n)$  est le degré de  $f$ , mais aussi son image dans  $\bigoplus H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  est  $(1, \dots, 1)$ . L'application du bas envoie ce vecteur sur  $\sum \deg(f)_{x_i}$ , de sorte que par les isomorphismes, il suit  $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{x_i}$ . ■

#### 5.3.2.4.4 Sphères homologie

##### Définition. (*Sphère d'homologie*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une *sphère d'homologie* de dimension  $n$  est une variété topologique connexe ayant la même homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  que  $S^n$ , explicitement, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  :

$$H_i(X) = \delta_i^n H_n(X).$$

#### 5.3.2.5 Comparaison entre homologie et homotopie

##### Définition. (*Homologie*)

Deux espaces topologiques sont *homologues* s'ils ont même homologie (singulière).

Le lien fondamental entre algèbre et homotopie dit que :

##### Propriété. (*Homotopie $\Rightarrow$ homologie*)

Deux espaces topologiques homotopiquement équivalents ont même homologie singulière.

**Exercice 7 (Incomplétude de l'homologie singulière)**

Montrer que l'on peut avoir même homologie sans être homotopiquement équivalents.

▷ **Éléments de réponse.**

Considérons  $X = S^2 \vee \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g \text{ fois}}$  et  $Y$  l'unique surface topologique orientable de genre  $g$ , qui pour par exemple  $g = 1$  donne  $Y = \mathbb{T}^2$  le tore et  $X = S^2 \vee S^1$  le bouquet d'une sphère et d'un cercle. Alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas homotopiquement équivalents puisqu'ils n'ont pas le même groupe fondamental, mais ils ont des groupes d'homologie isomorphes, ce que l'on peut montrer en admettant des résultats ultérieurs : en tant que CW-complexes de dimension 2, l'homologie est nulle aux rangs  $\geq 3$ . L'homologie au rang nul coïncide par connexité par arcs. Au rang 1, l'abélianisé de  $\{\ast\} \times_{\{\ast\}} \mathbb{Z}$  est bien  $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2) = H_1(\mathbb{T}^2)$ . Enfin,  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  en tant que surface orientable et l'homologie du bouquet  $S^2 \wedge S^1$  est  $0 \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$  comme une sphère bointée est une sphère de Borsuk, d'où l'identité des suites d'homologie singulière.

Cet exemple montre au passage que les invariants homotopiques et homologiques ne sont que très peu liés et l'un n'est pas vraiment plus fort que l'autre.



Ainsi, contrairement à ce que l'on peut entendre de prêcheurs peu scrupuleux, l'homologie ne comprend pas la théorie de l'homotopie (ce n'est pas ce que dit le diagramme suivant!). Cependant, le théorème de Hurewicz en capture l'essence.

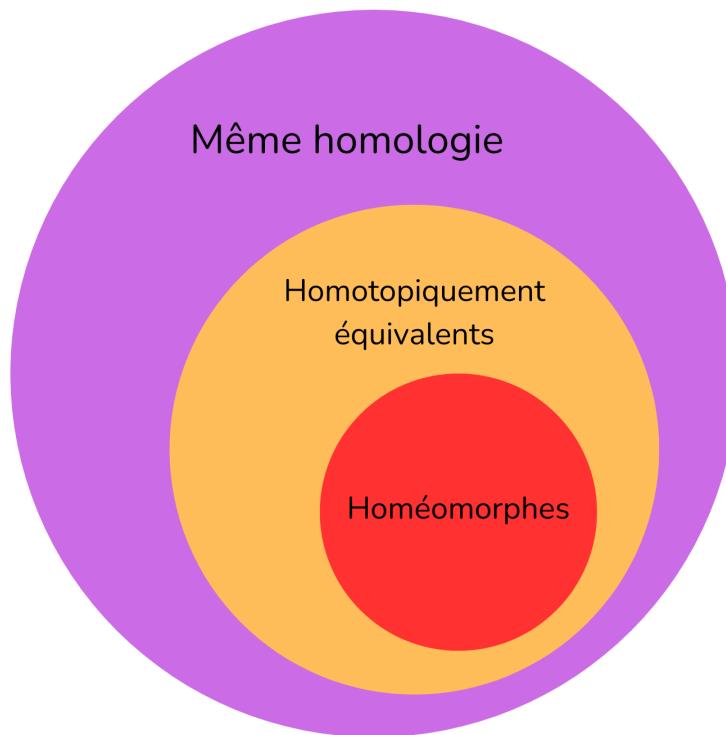


TABLE 5.1 : Diagramme de Venn : topologie générale, homotopie et homologie. — Les inclusions sont strictes, comme finit de le montrer l'exemple précédent.

### 5.3.3 Quelques invariants numériques de l'homologie singulière

#### Définition. (*Nombres de Betti*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On suppose que le groupe  $H_i(X)$  est de type fini. En particulier,  $H_i(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{= H_i(X)^{\text{libre}} = H_i(X)/H_i(X)^{\text{tor}}} \oplus \underbrace{A}_{= H_i(X)^{\text{tor}}}$  où  $A$  est un groupe abélien fini. On appelle  $i$ -ième *nombre de Betti* de  $X$  l'entier  $r = \text{rg}(H_i(X))$  et l'on note  $r = \beta_i(X)$  où  $\beta_i$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Cette définition se généralise naturellement aux coefficients quelconques au cas où  $\mathbb{Z}$  devient un anneau principal en utilisant le théorème de Krönecker.

#### Exemple. (*Plus petit nombre de Betti*)

Pour tout espace topologique  $X$  ayant un nombre fini de composantes connexes,  $\beta_0(X) = \text{card}(\pi_0(X))$ .

#### Définition. (*Caractéristique d'Euler-Poincaré*)

Soit  $X$  un espace topologique. On suppose que les groupes d'homologie de  $X$  sont de type fini et presque tous nuls. La somme alternée  $\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \beta_i(X)$  s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de  $X$ . On la note  $\chi(X)$  où  $\chi$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

#### Fait. (*Caractéristique d'Euler dans le cas des espaces vectoriels*)

Si l'homologie singulière d'un espace  $X$  est incluse dans  $F\text{-Vect}$ ,  $F$  un corps, et s'annule à partir d'un certain rang, alors  $\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim_F(H_i(X; F))$ .

Le seul point à vérifier est que l'on peut remplacer l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  par l'homologie à coefficients dans  $F$ . On remarque simplement que le futur théorème des coefficients universel pour l'homologie donne  $H_i(X; F) \simeq H_i(X; \mathbb{Z})$ , car  $F$  est un module libre, donc la torsion  $(H_{i-1}(X), F)$  est nulle. Autrement dit, l'homologie étant par hypothèse libre, donc sans torsion, les coefficients de Betti sont indépendants du corps de base et coïncident avec ceux à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

#### Exemple fondamental. (*Caractéristique d'Euler des sphères*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$ ,  $\chi(S^0) = 2$  et si  $n \geq 1$ ,  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .

Car  $H_0(\S^0) = S^2$  et son unique homologie non nulle et pour  $n \geq 1$ ,  $H_k(S^n) = (\delta_k^0 + \delta_k^n)\mathbb{Z}$ .

## 5.4 Homologie cellulaire

### 5.4.1 Complexe de chaînes cellulaire

On conseille vivement de relire le cours introductif sur les *CW-COMPLEXES* pour apprécier cette introduction.

#### Lemme. (*Homologie d'un bouquet agréable*)

Soit  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  une collection d'espaces pointés telle que  $(X_i, x_i)$  soit une paire de Borsuk pour tout  $i \in I$ . Alors

$$\tilde{H}_k(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_k(X_i)$$

en tout entier naturel  $k$ .

▷ On note  $\bigvee_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in I} X_i / \coprod_{i \in I} \{x_i\}$ . On utilise la suite exacte de  $(\coprod_{i \in I} X_i, \coprod_{i \in I} \{x_i\})$  et la relation  $\tilde{H}_k(\bigvee_{i \in I} X_i) = H_k(\coprod_{i \in I} X_i, \coprod_{i \in I} \{x_i\})$  venant du théorème d'écrasement. Le petit problème aux rangs 0,1 est réglé par la réduction. ■

*Remarque.* La condition un peu bizarre que  $(X, x)$  soit une paire de Borsuk, signifie que pour toutes applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  telles que  $f(x), g(x)$  soient reliés par un chemin  $\gamma$ ,  $f$  et  $g$  sont homotopes et il existe une homotopie  $H$  entre elles telle que  $H(x, -) = \gamma$ .

#### Contre-exemple. (*Espace pointé qui n'est pas une bonne paire*)

Pour  $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ , la paire  $(X, \{0\})$  n'a pas la propriété d'extension des homotopies.

Soit une rétraction  $r$  de l'inclusion  $i : (\{0\} \times X) \cup (I \times \{0\}) \hookrightarrow I \times X$ . Alors  $r(t, \frac{1}{n}) = (0, \frac{1}{n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$  mais en considérant  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $r$  ne peut être continue. □

#### Exercice 8 (*Caractérisation des espaces pointés qui sont des bonnes paires*)

Montrer qu'un espace pointé en  $x$  est une bonne paire si et seulement s'il est localement contractile en  $x$ .

#### Lemme

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ C'est le théorème d'écrasement avec  $B^n/S^{n-1} \simeq S^n$  et l'homologie des sphères. Cela fonctionne encore bien pour  $n = 0$ . ■

**Corollaire. (*Homologie relative d'un squelette*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition-propriété. (*Complexe de chaînes cellulaires*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. On considère la suite

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \underbrace{H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})}_{= \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}} \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $\dots H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$  où, pour tout entier  $k \geq 1$ , le morphisme  $\partial_k$  provient de la suite exacte du triplet  $(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$ . C'est un complexe de chaînes dont les groupes d'homologie s'appellent *groupes d'homologie cellulaires* de  $X$ . On note encore  $H_k(X)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie cellulaire de  $X$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, sinon  $H_k^{\text{cellulaire}}(X)$ . On a  $H_k^{\text{cellulaire}}(X) = \text{Ker}(\partial_k^{\text{cellulaire}})/\text{Im}(\partial_{k+1}^{\text{cellulaire}})$ .

De plus, ce complexe est fonctoriel dans la catégorie des  $CW$ -complexes dont les morphismes sont les applications cellulaires.

*Remarque.* L'identité  $H_0(X^{(0)}) = H_0(X^{(0)}, X^{(-1)})$  où  $X^{(-1)} = \emptyset$  par convention justifie la définition concise du complexe cellulaire.

Le complexe cellulaire d'un espace (cellulaire) est constitué... de groupes d'homologie. Son homologie est donc une homologie quotient de groupes d'homologie, quoique relatifs. De plus, attention ! Le morphisme  $\partial_k$  vient d'une suite exacte longue différente en chaque termes, le triplet considéré changeant ; il n'est donc pas évident même qu'on ait un complexe. Et a fortiori, on n'aura pas toujours une suite exacte, ce qui est plus intéressant que si l'homologie cellulaire était toujours acyclique, c'est-à-dire nulle.

**Preuve.**

▷ En effet, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ . On rappelle ici que l'application  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$  issue de la suite exacte longue homologique associée au triplet est la composée  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\delta'_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}) \xrightarrow{i_{k-1,*}} H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2})$  où le premier est la différentielle de la suite exacte longue homologique associée à la paire et le second est induit par

l'inclusion. Il suffit donc d'observer la commutation de

$$\begin{array}{ccccc}
 & H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) & & & \\
 & \downarrow \partial'_{k+1} & \searrow \partial_{k+1} & & \\
 H_k(X^{(k)}) & \xrightarrow{i_{k,*}} & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & & \\
 & & \downarrow \partial'_k & \searrow \partial_k & \\
 & & H_{k-1}(X^{(k-1)}) & \xrightarrow{i_{k-1,*}} & H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}).
 \end{array}$$

Or par la suite exacte longue de  $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ ,  $H_k(X^{(k)}) \xrightarrow{i_{k,*}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial'_k} H_{k-1}(X^{(k-1)})$  est exacte, en particulier  $\partial'_k \circ i_{k,*} = 0$ , ce qui correspond aux deux flèches centrales de l'escalier ci-dessus. On a donc bien un complexe. ■

### Corollaire. (*Homologie d'un CW-complexe lacunaire*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  un CW-complexe sans  $k$ -cellules. Alors  $H_k(X) = 0$ .

▷ En effet, le  $k$ -squelette  $X^{(k)}$  est vide, donc  $H_k(X^{(k)}) = 0$ , donc  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = 0$ . ■

### Corollaire. (*Homologie en grand degré des complexes cellulaires*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  un CW-complexe de dimension  $n$ . Alors pour tout  $k > n$ ,  $H_k(X) = 0$ .

On vérifie que l'homologie cellulaire des CW-complexes coïncide avec leur homologie singuliére.

### Théorème. (*Homologie cellulaire = homologie singulière*)

Les groupes d'homologie du complexe de chaînes singulières sont isomorphes terme à terme aux groupes d'homologie singulière de  $X$ .

En particulier, tous les éventuels complexes cellulaires sont d'un même espace topologique et sont quasi-isomorphes.

Cela ne signifie pas que les complexes cellulaires et singuliers coïncident ! Sinon d'ailleurs, la théorie cellulaire n'aurait aucun intérêt en homologie.

Remarquer que les termes du complexe d'homologie singulière sont quasi toujours à base grossièrement indénombrable, tandis que pour un CW-complexe fini, ceux du complexe cellulaire sont de type fini.

On vérifiera ce théorème sur deux exemples en calculant l'homologie cellulaire du tore et de la bouteille de Klein.



**Corollaire. (*Nombres de Betti d'un CW-complexe*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $X$  ait un nombre fini  $c_i$  de  $i$ -cellules.

Alors  $H_i(X)$  est de type fini et  $\beta_i(X) \leq c_i$ .

En particulier, tout  $CW$ -complexe fini admet une caractéristique d'Euler.

▷ En effet, d'après la définition du complexe cellulaire,  $H_i^{cellulaire}(X)$  est un quotient d'un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{c_i}$ , puisque le complexe cellulaire n'est autre que

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_{i+1}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_i} \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_{i-1}} \longrightarrow \dots$$

et ainsi  $H_i^{cell}(X)$  ne peut donc être de rang  $> i$ . ■

Puisque tout sous-module d'un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $\mathbb{Z}^n$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $\simeq \mathbb{Z}^k$ , avec  $k \leq n$ , l'homologie est un quotient d'un sous-modules de la forme  $\mathbb{Z}^u$  donc de la forme  $\mathbb{Z}^v$ . Normalement, le lecteur aura sursauté. En effet, le problème se trouve dans «  $\simeq \mathbb{Z}^k$  » ! Le sous-groupe  $2\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  est pourtant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\simeq 0$ ... En particulier les groupes d'homologie cellulaire peuvent bel et bien avoir de la torsion.

Cependant, notons que l'on dispose du théorème du rang pour les groupes abéliens.

**Exercice 9 (*Caractéristique d'Euler d'un CW-complexe*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe fini. On note  $c_i$  le nombre de  $i$ -cellules de  $X$  est fini. Montrer qu'alors

$$\sum_i (-1)^i \beta_i(X) := \chi(X) = \sum_i (-1)^i c_i.$$

En déduire qu'en particulier, la caractéristique d'Euler d'un  $CW$ -complexe définie par la deuxième formule, ne dépend pas de la structure cellulaire fixée pour lui. En déduire de plus que, si  $G = (S, A)$  est un graphe,  $\chi(G) = S - A$  (*formule SA*). De même, si  $X$  est un polyèdre à  $F$  faces,  $A$  arêtes et  $S$  sommets,  $\chi(X) = F - A + S = S - A + F$  (*formule sommets-arêtes-faces*). On peut donc voir un  $CW$ -complexe fini comme un polytope.

▷ **Éléments de réponse.**

En effet, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_i(X) = \text{rg}(H_i^{cellulaire}(X)) = \text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) - \text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))$ . D'autre part,  $c_i = \text{rg}(H_i(X^{(i)}, X^{(i-1)})) = \text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) + \text{rg}(\text{Im}(\partial_i))$ . Ainsi,  $\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) - \text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i))) - \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i))) + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^{i+1} (\text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1})))}_{= \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i (\text{rg}(\text{Im}(\partial_i)))} = c_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) + \text{rg}(\text{Im}(\partial_i))) = c_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i c_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i c_i$ .

**Exemples. (*Caractéristiques d'Euler de CW-complexes*)**

1. La sphère est triangulée par quatre triangles de la manière suivante : deux triangles par hémisphère qui se tiennent les mains et se touchent la tête. On a alors une triangulation à 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, d'où  $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ . Sur cet exemple simple, on peut apprécier la magie de ce que n'importe quelle triangulation aurait donné ce même nombre. De plus, on n'est pas forcément obligé de prendre une triangulation : n'importe quelle décomposition polygonale fonctionne, ou même des choses plus bizarres qui rentrent dans le spectre des décompositions cellulaires.
2. On sait si l'on est cultivé que le tore  $T^2$  est triangulé de façon minimale d'ailleurs par 9 sommets, 27 arêtes et 18 faces, d'où une caractéristique de  $\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$ .
3. (*Relation de la caractéristique d'Euler des simplexes*) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le  $n$ -simplexe évidé  $\partial T^n$  est homéomorphe à  $S^{n-1}$ . Sa caractéristique est, d'après son homologie,  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ . D'autre part, il a  $n+1$  sommets et  $n+1$  faces de dimension maximales  $n$ . Plus généralement, il a  $\binom{n+1}{k}$  faces de dimension  $k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . On obtient la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1 + (-1)^{n+1}$$

que l'on aurait pu calculer par une simple formule de Pascal.

4. On rappelle que les 5 solides platoniciens ici pris évidés sont le tétraèdre  $\partial T^3$ , le cube  $I^3$ , l'octaèdre  $O$ , le dodécaèdre  $D$  et l'icosaèdre  $\mathbb{I}$ . Ils sont tous homéomorphes à  $S^2$ , donc de caractéristique 2. Vérifions-le manuellement par la formule sommets-arêtes-faces :

- \*  $\chi(\partial T^3) = 4 - 6 + 4 = 2$  ;
- \*  $\chi(I^3) = 8 - 12 + 6 = 2$  ;
- \*  $\chi(O) = 6 - 12 + 8 = 2$  ;
- \*  $\chi(D) = 20 - 30 + 12 = 2$  ;
- \*  $\chi(\mathbb{I}) = 12 - 30 + 20 = 2$ .

Et quelle belle symétrie apparaît.

**Exercice 10 (*Calculs de la caractéristique d'un CW-complexe*)**

Soient  $X, Y$  deux CW-complexes finis.

1. (*Caractéristique d'Euler d'une réunion de complexes*) Montrer que  $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$ . En particulier,  $\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$ .
2. (*Caractéristique d'Euler d'un produit de complexes*) Montrer que  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ .
3. (*Caractéristique d'Euler d'un quotient de complexes*) Si  $X \subseteq Y$  est un sous-complexe, montrer que  $\chi(X) - \chi(Y) + \chi(Y/X) = 1$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On note  $c_i^K$  le nombre de  $i$ -cellules d'un  $CW$ -complexe  $K$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Alors  $c_i^{X \cup Y} = c_i^X + c_i^Y - c_i^{X \cap Y}$ , car le nombre de  $i$ -cellules de  $X \cup Y$  est le nombre de  $i$ -cellules de  $A$  ou de  $B$  mais on a alors compté deux fois les  $i$ -cellules de  $A \cap B$ , et donc on les retire une fois. L'égalité ayant lieu terme à terme dans la somme  $\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i c_i$ , on a l'identité des caractéristiques.
2. Par définition du produit de deux  $CW$ -complexes finis, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , les  $i$ -cellules correspondent bijectivement aux paires constituées d'une  $k$ -cellule de  $X$  et d'une  $i-k$ -cellule de  $Y$  pour  $k$  parcourant  $\llbracket 0, i \rrbracket$ , d'où  $c_i^{X \times Y} = \sum_{k=0}^i c_k^X c_{i-k}^Y$ . La formule s'ensuit immédiatement par produit de Cauchy.
3. En exercice, la technique étant semblable aux précédentes.

**Exercice 11** (*Caractéristique d'Euler d'un revêtement entre CW-complexes*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $p : X \rightarrow Y$  un revêtement à  $d$  feuillets. On suppose que  $Y$  est un  $CW$ -complexe fini. Montrer que  $X$  est un  $CW$ -complexe fini et que  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Puisque  $\pi_1(D^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on peut relever les applications caractéristiques  $\varphi_\alpha : D^k \rightarrow Y$  au revêtement  $X \rightarrow Y$ .

Il y a alors exactement  $d$  relèvements de  $\varphi_\alpha$  dans  $X$ . Ainsi, pour toute  $k$ -cellule  $e^k$  de  $Y$ , il correspond  $d$   $k$ -cellules dans la structure de  $X$ , car la restriction d'un revêtement sur la base est un revêtement. Soit  $C_k$  le nombre de  $k$ -cellules de la structure de  $X$  et soit  $C'_k$  celui de  $Y$ . On a donc  $C_k = dC'_k$ . Alors :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i C_i + \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i dC'_i = d\chi(Y)$$

comme voulu.

Grâce à la notion d'**ORIENTATION DES CELLULES** grâce au **DEGRÉ D'UNE APPLICATION DE  $S^n$  DANS ELLE-MÊME** et celle de **COEFFICIENT D'INCIDENCE**, on peut exprimer la différentielle de manière close.

**Proposition.** (*Expression floue de la différentielle du complexe cellulaire*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $\sigma$  une  $k$ -cellule orientée de  $X$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\partial_k \sigma = \sum_{\tau} \pm [\sigma : \tau] \tau$ , somme évidemment indexée sur les  $k-1$ -cellules de  $X$ .

Souvent, cette expression floue suffit. Mentionnons aussi :

**Propriété.** (*Differentielle du complexe de chaînes cellulaire*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $H_n(X_n, X_{n-1})$  est un groupe abélien libre engendré les  $n$ -cellules de  $X$  par le premier corollaire de cette section, pour une telle  $n$ -cellule  $e_n^\alpha$ , soit  $\chi_n^\alpha : \partial e_n^\alpha \simeq S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  l'application de recollement et considérons les

composées

$$\chi_n^{\alpha\beta} : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}/(X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta) \simeq S^{n-1}$$

où  $e_{n-1}^\beta$  est une  $(n-1)$ -cellule de  $X$  et la deuxième application identifie  $X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta$  à un point y compris s'il est vide. L'application bord  $d_n : H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$  est alors donnée par la formule

$$d_n(e_n^\alpha) = \sum_\beta \deg(\chi_n^{\alpha\beta}) e_{n-1}^\beta.$$

### Application. (*Homologie cellulaire du tore*)

Le tore, d'après son carré fondamental  $ABCD$ , constitué d'une unique 0-cellule  $A = B = C = D$ , de deux 1-cellules  $e_1, e_2$  et d'une 2-cellule  $e$ , de sorte que son complexe cellulaire s'écrive

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}.$$

Attention à cette étape à ne pas le confondre avec l'homologie du tore. Explicitons  $d_1, d_2$  pour en calculer l'homologie.

Remarquons d'abord que  $d_2 = 0$ . En effet,  $e_1$  et  $e_2$  sont recollées sur  $A$  par la même application de recollement  $\varphi_1 = \varphi_2$  constantes en  $A$  l'unique 0-cellule. Ainsi les  $\chi^{\alpha\beta}$  sont constantes, donc de degré nul.

L'application de recollement de  $S^1 \simeq \partial I^2 \rightarrow X^{(1)}(\mathbb{T}^2)$  est donnée par  $(t_1, 0)(t_1, 1) \mapsto t_1 \in e_1$  et  $(0, t_2)(1, t_2) \mapsto t_2 \in e_2$ . Les degrés de  $\chi^{ee_1}$  et  $\chi^{ee_2}$  sont nuls : par symétrie, traitons le cas de  $\chi^{ee_1}$ . Selon l'homéomorphisme  $\partial I^2 \simeq S^1$ , en écrasant sur un point les côtés  $BC$  et  $AD$ ,  $\chi^{ee_1}$  parcourant  $AB = CD$  dans un sens la première moitié du temps, puis revient, donc n'a fait aucun tour autour de la sphère. C'est d'ailleurs un exemple concret de surjection de degré nul. Donc  $d_1$  est nulle. Ainsi, l'homologie cellulaire du tore est nulle, donc elle coïncide avec le complexe de chaînes cellulaire, ce qui nous arrange bien.

### Application. (*Homologie cellulaire de la bouteille de Klein*)

Soyons malins : suffit de changer un signe dans le raisonnement précédent, le carré fondamental de  $\mathcal{K}$  différant de celui de  $\mathbb{T}^2$  par un unique sens de flèche.

En effet, l'application de recollement de  $S^1 \simeq \partial I^2 \rightarrow X^{(1)}(\mathbb{T}^2)$  est donnée par  $(t_1, 0)(t_1, 1) \mapsto t_1 \in e_1$  et  $(0, t_2) \mapsto t_2 \in e_2$  mais  $(1, t_2) \mapsto -t_2 \in e_2$ . L'application caractéristique donne lieu à  $\chi^{ee_1}$  de degré nul pour l'argument exact donné précédemment, mais  $\chi^{ee_2}$  est alors de degré 2 : en effet, au lieu de revenir en arrière à la moitié du temps, le point mobile continue son trajet pour faire un deuxième tour, d'où le doublement du degré. Ainsi  $d_n(e) = 0.e_1 + 2.e_2$ . On en déduit que  $H_1^{cell}(\mathcal{K}) = \text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}^2/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}^2/(0 \oplus 2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et l'on retrouve encore ce que l'on voulait.

**Exercice 12** (*Homologie du plan projectif complexe*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k \in [0, 2n] \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## ▷ Éléments de réponse.

On sait qu'il existe une structure cellulaire de  $\mathbb{CP}^n$  constituée d'une unique  $k$ -cellule pour tout  $k \in [0, 2n]$  pair et d'aucune autre cellule. Le complexe de chaînes cellulaire s'écrit donc

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{degré } 2n} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \dots \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

En particulier, toutes les applications de bord sont nulles, car leur domaine ou leur image sont alternativement nulles. Ainsi, l'homologie du complexe coïncide avec terme à terme, ce qu'il fallait montrer.

**Exercice 13** (*Homologie du plan projectif réel*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \text{ et } k = n \text{ si } n \text{ est impair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \in [1, n-1], k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## ▷ Éléments de réponse.

On connaît, et c'est le toy-model d'espace cellulaire, une décomposition cellulaire de  $\mathbb{RP}^n$  ayant exactement une  $n$ -cellule en toute dimension  $i$  pour  $i$  parcourant  $[0, n]$  et aucune autre. On a donc un complexe cellulaire de la forme :

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{degré } n} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Pour calculer le morphisme de bord  $\partial_i$  où  $i \in \mathbb{N}^*$ , il suffit de calculer le degré de l'application composée

$$\chi : S^{i-1} \xrightarrow{f|_{\partial D^i}} \mathbb{RP}^{i-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{i-1}/\mathbb{RP}^{i-2} \simeq S^{i-1}$$

où l'application  $f$  est induite par l'application de recollement et est donnée sur  $D^i$  par  $(x_0, \dots, x_{i-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - [x_0^2 + \dots + x_{i-1}^2]})$  par restriction au bord  $\partial D^i = S^{i-1}$ , où  $\mathbb{RP}^{i-1} = S^i/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

On peut alors utiliser la formule de somme des degrés. En effet, tout point a exactement deux antécédents par  $q$ , un dans l'hémisphère nord, un dans l'hémisphère sud, car  $q$  est constante sur l'équateur  $S^{i-2}$  de  $S^{i-1}$ . On peut s'être affranchi du cas  $i = 1$  plus tôt si besoin. Ainsi  $\deg(q) = \deg(q|_{U \ni N}) + \deg(q|_{V \ni S})$ . Or très visuellement, dans l'hémisphère nord,  $q$  est homotope à l'identité et dans l'hémisphère sud,  $q$  est homotope à l'antipodale. Ainsi  $\deg(q) = 1 + (-1)^i$  où  $i = (i-1) + 1$ . Autrement dit,  $\deg(q) = 0$  si  $i$  est impair et 2 si  $i$  est pair. Par suite, le complexe de chaînes cellulaires s'écrit :

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Il n'est pas difficile de conclure à partir de là.

### Exercice 14

En déduire l'homologie de  $\mathbb{CP}^\infty$  qui est pour ceux qui l'ignorent la colimite topologique de tous les espaces projectifs complexes. De même, en déduire l'homologie de  $\mathbb{RP}^\infty$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On utilise simplement la formule pour l'homologie d'une limite inductive. Il s'agit simplement de « faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  » : on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $H_k(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Z}$  si  $k$  est pair et 0 sinon.
2. De même, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $H_k(\mathbb{RP}^\infty) = \mathbb{Z}$  si  $k = 0$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $k$  est impair et 0 sinon.

On peut définir aussi dans le cas de l'homologie cellulaire, l'homologie cellulaire à coefficients quelconques, sans aucun problème conceptuel. La même remarque vaut pour l'homologie simpliciale. Quant à la cohomologie cellulaire, on aura une section consacrée.

#### 5.4.2 Lien avec l'homologie simpliciale

**Fait.** (*Orientation cellulaire d'un complexe simplicial*)

Soit  $X$  un complexe simplicial fini. On numérote tous les sommets de  $X$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  de  $X$ , on a un unique homéomorphisme envoyant sommet sur sommet  $\underbrace{T^k}_{\simeq D^k} \rightarrow \sigma^k$  qui préserve les ordres de sommets.

Par suite, canoniquement, un complexe simplicial est un *CW-complexe* fini dont les cellules sont orientées.

**Reformulation pratique.** (*Homologie simpliciale d'un complexe simplicial*)

Les groupes d'homologie cellulaire du *CW-complexe* sous-jacent d'un complexe simplicial s'appellent les *groupes d'homologie simpliciale* du complexe simplicial considéré.

La proposition suivante montre que cette définition est équivalente à celle donnée de l'**HOMOLOGIE SIMPLICIALE** introduite en **TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE**.

**Proposition.** (*Lien homologie simpliciale-homologie cellulaire*)

Pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  d'un complexe simplicial  $X$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , la différentielle du complexe de chaînes cellulaire de  $X$  s'écrit

$$\partial\sigma^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k)$$

où  $\Gamma_i(\sigma^k)$  est la  $i$ -ième face de codimension 1 de  $\sigma^k$ .

**Corollaire. (*Lien homologie simpliciale-homologie singulière*)**

Les groupes d'homologie simpliciale d'un complexe simplicial sont isomorphes  ses groupes d'homologie singulière.

## 5.5 Généralisations de l'homologie singulière

### 5.5.1 Homologie  coefficients quelconques

Soit  $G$  un groupe abélien, en particulier un anneau commutatif  $\mathbb{A}$ , un module sur un anneau  $A$  ou un espace vectoriel sur un corps  $K$ .

**Définition. (*Chaîne singulière d'un espace  coefficients dans  $G$* )**

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -chaîne singulière dans un espace topologique  $X$   coefficients dans  $G$  est une somme finie formelle

$$g_1\sigma_1 + \dots + g_m\sigma_m$$

o r  $m \in \mathbb{N}$ ,  $g_1, \dots, g_m \in G$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des  $k$ -simplexes singuliers de  $X$ . L'ensemble des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  est un groupe abélien libre, noté  $C_k(X; G)$ .

**Définition-propriété. (*Complexe de chaînes singulières  coefficients dans  $G$* )**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$   coefficients dans  $G$  est le complexe  $\mathcal{C}(X; G)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X; G) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; G)$$

o r pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$   coefficients dans  $G$  et pour tout  $\sigma$   $i$ -simplexe singulier de  $X$   coefficients dans  $G$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\partial_i(\sigma)$  est définie comme dans le cas de  $\mathbb{Z}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_k(X; G) = \begin{cases} \text{Ker}(\partial_k) & \text{si } k \geq 1 \\ C_0(X) & \text{sinon} \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien

des cycles de ce complexe,  $B_k(X; G) = \text{Im}(\partial_{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des bords de ce complexe et  $H_k(X; G) := Z_k(X; G)/B_k(X; G)$  le  $k$ -ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle  $k$ -ième *groupe d'homologie (singulière) de  $X$   coefficients dans  $G$* .

▷ Rien de nouveau en fait. ■

**Définition. (*Groupes d'homologie relatifs*)**

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs à coefficients dans  $G$*  de  $(X,A)$  sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative à coefficients dans  $G$*   $C(X,A;G)$  défini de manière évident. On note  $H_k(X,A;G)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie relatif à coefficients dans  $G$ .

De même, on peut :

- ★ parler d'homologie réduite, reliée tout aussi bien à l'homologie tout court ;
- ★ calculer l'homologie des contractiles, qui est concentrée en  $G$  en degré nul ;
- ★ induire des applications dans l'homologie à coefficients généraux. Les résultats sont identiques, en copiant les preuves mot pour mot ;
- ★ on dispose de toutes les suites exactes longues que l'on peut imaginer.
- ★ Comme mentionné, les homologies cellulaire et simpliciale s'énoncent sans problème avec des coefficients, où grossièrement, il s'agit de remplacer les occurrences de  $\mathbb{Z}$  par celles de  $G$ . Attention toutefois, les résultats peuvent changer après coup dans les calculs, car  $\mathbb{Z}$  est trop gentil : c'est un anneau principal.

→ *Notation.* L'homologie singulière classique est l'homologie à coefficients dans  $G = \mathbb{Z}$ . Ainsi,  $C_k(X) = C_k(X;\mathbb{Z})$ , notations parfois utilisées dans les calculs, aussi pour  $H_k(X) = H_k(X;\mathbb{Z})$ ,  $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(X;\mathbb{Z})$  et  $H_k(X,A) = H_k(X,A;\mathbb{Z})$ .

Les théorèmes déjà vus se généralisent en traduisant  $Z \rightsquigarrow G$ . Par exemple :

**Propriété. (*Calcul de l'homologie à coefficients au rang nul*)**

Si  $X$  est un espace non vide quelconque,

$$H_0(X) = G^c$$

où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ .

**Exercice 15** (*Quelques homologies généralisées des espaces projectifs*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Soit  $G$  un groupe abélien. Calculer l'homologie à coefficients dans  $G$  de  $\mathbb{CP}^n$ .
2. Soit  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Calculer l'homologie à coefficients dans  $G$  de  $\mathbb{RP}^n$ .

▷ **Éléments de réponse.**

1. On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{CP}^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, il suffit de calculer l'homologie cellulaire à coefficients dans  $G$ . Rien ne change sensiblement, le  $G$ -complexe cellulaire est toujours nul un terme sur deux :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G$$

d'où le résultat.

2. On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, c'est guère plus difficile : le  $G$ -complexe cellulaire s'écrit :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

mais les morphismes de bord sont tous nuls en réexaminant la preuve du cas  $G = \mathbb{Z}$ , car ce sont des morphismes nous ou des multiplications par 2 qui meurent dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , d'où le résultat.

### Contre-exemple. (*Même homologie dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$* )

$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  et  $\{\ast\}$  ont homologie singulière dans  $\mathbb{Q}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$ .

En effet, leurs homologies à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  sont semblablement

$$\mathbb{Q}, 0, 0, \dots$$

mais dans  $\mathbb{Z}$ , celle de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \dots$$

et celle de  $\{\ast\}$  est

$$\mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

qui diffèrent. □

### Contre-exemple. (*Même homologie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$* )

$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  et  $S^1 \vee S^2$  ont homologie singulière dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$ .

En effet, leurs homologies à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont semblablement

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

mais dans  $\mathbb{Z}$ , celle de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \dots$$

et celle de  $S^1 \vee S^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

qui diffèrent. □

Des arguments de cohomologie donnés par le THÉORÈME DES COEFFICIENTS UNIVERSELLENSES montrent que la réciproque est vraie : deux espaces homologues dans  $\mathbb{Z}$ , seront homologues en tous coefficients.

### 5.5.2 Cohomologie des espaces topologiques

Pour définir la cohomologie singulière, on utilise l'opérateur de dualisation classique Hom. On considère toujours  $G$  un groupe abélien afin de définir directement la cohomologie en coefficients quelconques.

**Définition. (*Cochaîne singulière d'un espace à coefficients dans  $G$* )**

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -cochaîne singulière dans un espace topologique  $X$  à coefficients dans  $G$  est une fonction qui associe à tout  $k$ -simplexe singulier de  $X$  un élément de  $G$ , autrement dit, le *groupe* des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  est  $C^k(X; G) := \text{Hom}(C_k(X), G)$ .

*Remarque.* Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a la bijection  $\text{Hom}(C_k(X; G), G) \simeq \mathcal{F}(X^{T^k}, G)$  par l'adjonction oubli-libre.

**Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes singulières à coefficients dans  $G$* )**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de cochaînes singulières* de  $X$  à coefficients dans  $G$  est le complexe  $\mathcal{C}^\bullet(X; G)$  :

$$\dots \longleftarrow C^{k+1}(X; G) \xleftarrow{\delta^{k+1}} C^k(X; G) \xleftarrow{\delta^k} \dots \xleftarrow{\delta^1} C^0(X; G)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  à coefficients dans  $G$  et pour toute  $c$   $i$ -cochaîne singulière de  $X$  à coefficients dans  $G$ , pour tout  $\sigma$   $i+1$ -simplexe singulier de  $X$  à coefficients dans  $G$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$(\delta^{i+1}(c))(\sigma) := \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1})}).$$

Le morphisme *différentielle* ou *de cobords*  $\delta^i$  est alors définie sur tout  $C_i(X)$  par linéarité. On note  $\delta$  ou  $\delta_X$  la donnée des  $(\delta^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z^k(X; G) = \begin{cases} \text{Ker}(\delta^k) & \text{si } k \geq 1 \\ C^0(X) & \text{sinon} \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien des *cocycles* de ce complexe,  $B^k(X; G) = \text{Im}(\delta^{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des *cobords* de ce complexe et  $H^k(X; G) := Z^k(X; G)/B^k(X; G)$  le  $k$ -ième groupe abélien de cohomologie de ce complexe (de cochaînes) que l'on appelle  $k$ -ième *groupe de cohomologie (singulière) de  $X$  à coefficients dans  $G$* .

▷ Si  $a \in C_{k+1}(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors on obtient directement par double linéarité de  $\partial^{k+1}(c)$  d'une part et de  $c$  d'autre part, que  $\langle \delta^{k+1}c, a \rangle = \langle c, \partial_{k+1}a \rangle$ . En particulier,  $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$ . ■

Cette formule montre que :

### Proposition

Les morphismes de cobords sont duaux des morphismes de bords, i.e.  $\partial^* = \delta$ .



On a redémontré que le foncteur Hom transforme un complexe de chaînes en complexe de cochaînes.

→ *Notation.* On note parfois encore  $\delta_k = \delta^k$  par commodité le morphisme de cobords.

→ *Convention.* Souvent, la cohomologie se note de gauche à droite, i.e.

$$C^0(X; G) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_k} C^k(X; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} C^{k+1}(X; G) \longrightarrow \dots$$

→ *Notation.* En général, pour un espace  $X$ , on note  $C^*(X)$  le  $*$ -ième groupe de cochaînes singulières de  $X$ , sans fixation nécessaire à un rang. Cette notation s'étend aux groupes  $H^*(X)$  de cohomologie et aux complexes relatifs.

On peut considérer le complexe de cohomologie augmenté afin de définir la cohomologie réduite.

### Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes singulières augmenté*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de cochaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet(X; G)$  ou encore  $\mathcal{C}^\bullet(X; G)$  :

$$G \xrightarrow{\varepsilon'} C^0(X; G) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_k} C^k(X; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} C^{k+1}(X; G) \longrightarrow \dots$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  et  $\varepsilon'$  associe à tout  $g \in G$  la fonction constante  $g$  définie sur l'ensemble des 0-cochaînes singulières de  $X$ .

En considérant les groupes de cohomologie de ce nouveau complexe de cochaînes, on obtient par définition les *groupes de cohomologie réduits*  $\tilde{H}^k(X)$  de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

On dispose également des groupes de cohomologie relative ainsi que des suites exactes longues associées.

### Propriété. (*Suite de Mayer-Vietoris cohomologique*)

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ , en particulier deux ouverts recouvrant  $X$ . On pose  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . On a une suite exacte longue de groupes

de cohomologie :

$$\dots \longleftarrow H^k(A \cap B) \longleftarrow H^k(A) \oplus H^k(B) \longleftarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k-1}(A \cap B) \longleftarrow \dots$$

terminée par  $H^0(A \cap B) \longleftarrow H^0(A) \oplus H^0(B) \longleftarrow H^0(X) \longleftarrow 0$  dite *suite de Mayer-Vietoris*. De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues.



On ne peut dualiser l'homologie d'un complexe après coup : en général,  $H^n(X; G)$  et  $\text{Hom}(H_n(X), G)$  ne sont pas isomorphes, comme on aura largement l'occasion de l'illustrer. Cependant :

### Fait. (*Morphisme de la cohomologie dans l'homologie duale*)

Soient  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe abélien. On a un morphisme

$$h : H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G).$$

On le définit de la façon suivante : si  $\alpha \in H^n(X; G) = H_n(X)$  est représenté par un morphisme

$\varphi : \underbrace{C_n(X; G)}_{\supseteq Z_n \text{ le sous-groupe des } n\text{-cycles de } X} \rightarrow G$  tel que  $\delta\varphi = 0$ , on a par dualisation des morphismes de cobords

$\varphi \circ \partial = 0$ , donc  $\varphi$  s'annule sur  $\underbrace{B_n(X; G)}_{\text{le sous-groupe des } n\text{-bords de } X} \subseteq C_n(X; G)$ . La restriction  $\varphi_0 = \varphi|_{Z_n(X; G)}$  induit

donc un morphisme  $\overline{\varphi_0} : H_n(X; G) = Z_n(X; G)/B_n(X; G) \rightarrow G$  qui est un élément de  $\text{Hom}(H_n(X; G), G)$ .

Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant  $\varphi$  de  $\alpha$  : si  $\varphi \in \text{Im}(\partial)$ , on a  $\varphi : \partial\psi = \psi\partial$ , donc  $\varphi$  est nul sur  $Z_n(X; G)$ .

### Application. (*Cohomologie cellulaire du tore*)

#### Lemme

Le morphisme canonique de la cohomologie singulière dans l'homologie duale est surjectif.

▷ En effet, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et espace topologique  $X$ , la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n(X; G) \longrightarrow C_n(X; G) \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0$$

est scindée, donc il existe une projection  $p : C_n(X; G) \rightarrow Z_n(X; G)$ . Par conséquent, on peut étendre les morphismes définis sur  $Z_n(X; G)$  à  $C_n(X; G)$ . Dans le cas d'un morphisme qui s'annule sur  $B_n(X; G)$ , on obtient un élément de  $\text{Ker}(\delta)$ . Ceci donne

$$\text{Hom}(H_n(X; G), G) \longrightarrow \text{Ker}(\delta) \xrightarrow{\text{pr}} H^n(X; G).$$

En composant ce morphisme avec  $h$ , on obtient l'identité. ■

**Fait.** (*Suite exacte courte scindée du morphisme de la cohomologie*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un espace topologique et  $h$  le morphisme canonique. On a suite exacte courte scindée  $0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$ .

*Remarque.* Attention : la section de cette suite n'est pas naturelle, au sens de l'universalité.

### 5.5.3 Cohomologie cellulaire

### 5.5.4 Théorème des coefficients universels, foncteurs topologiques d'extension et de torsion

On cherche à reconstruire l'homologie à coefficients quelconques à partir de l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . C'est possible au rang  $n$ , si on connaît aux rangs  $n-1$  et  $n+1$ . Il est un peu surprenant, mais pas pour longtemps, que l'énoncé exacte de cet correspondance passe par la cohomologie.

**Fait.** (*Résolution libre de l'homologie singulière*)

Supposons que le complexe de chaînes singulières de l'espace topologique  $X$  soit un complexe de groupes abéliens libres. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Observons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_{n+1}(X; G) & \longrightarrow & C_{n+1}(X; G) & \longrightarrow & B_n(X; G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \delta & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & Z_n(X; G) & \longrightarrow & C_n(X; G) & \longrightarrow & B_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les suites horizontales courtes sont scindées. On en déduit par dualisation par  $\text{Hom}(\cdot, G)$  une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & Z_{n+1}(X; G)^* & \longleftarrow & C_{n+1}(X; G)^* & \longleftarrow & B_n(X; G)^* \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow 0 & & \uparrow \delta & & \uparrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & Z_n(X; G)^* & \longleftarrow & C_n(X; G)^* & \longleftarrow & B_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow 0 \end{array}$$

d'où la suite exacte longue

$$\dots \longleftarrow B_n(X; G)^* \xleftarrow{i_n^*} Z_n(X; G)^* \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow B_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow Z_{n-1}(X; G)^*$$

où  $i_n : B_n(X; G) \longrightarrow Z_n(X; G)$  est l'inclusion canonique. On obtient

$$0 \longleftarrow \text{Ker}(i_n^*) \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow \text{Coker}(i_{n-1}^*) \longleftarrow 0.$$

On a  $\text{Ker}(i_n^*) \simeq \text{Hom}(H_n(X; G), G)$ , car  $\text{Ker}(i_n^*)$  est formé des morphismes  $Z_n(X; G) \rightarrow G$  qui s'annulent sur  $B_n(X; G)$ . L'application  $H^n(X; G) \rightarrow \text{Ker}(i_n^*)$  s'identifie avec  $h$ .

Par suite, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B_{n-1}(X; G) \xrightarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0$$

peut être vue comme résolution libre de  $H_{n-1}(X; G)$ . En dualisant, on obtient

$$0 \longleftarrow B_{n-1}(X; G)^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow \text{Hom}(H_{n-1}(C), G) \longleftarrow 0.$$

Cette suite n'est pas forcément exacte au terme  $B_{n-1}(X; G)^*$ . On considère donc<sup>a</sup> le conoyau  $\text{Coker}(i_{n-1}^*) = \text{Ker}(h) = \text{Ext}(H_{n-1}(X; G), G)$  le *groupe d'extension* ( $H, G$ ).

<sup>a</sup> Si  $\mathcal{F} : \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$  est une résolution libre de  $H$ , on obtient  $\dots \longleftarrow F_2^* \longleftarrow F_1^* \longleftarrow F_0^* \longleftarrow H^* \longleftarrow 0$ . Les groupes d'homologie de ce complexe de chaînes ne dépendent pas de la résolution libre choisie et cette résolution est nulle sauf éventuellement en  $F_1^* := \text{Ext}(H, G)$ .

### Exercice 16 (Propriétés calculatoires des groupes d'extension)

Soient  $H, H'$  deux groupes abéliens. Montrer que

1.  $\text{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$  ;
2.  $\text{Ext}(H, G) = 0$  dès que  $H$  est libre ;
3.  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Théorème. (Formule des coefficients universels (cohomologique))

Soient  $X$  un espace topologique,  $G$  un groupe abélien. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a une suite exacte courte scindée :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow G.$$

En particulier,  $H^n(X; G) \simeq \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G)$ .

### Corollaire. (Formule des coefficients universels en type fini)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini, alors

$$H^n(X) \simeq \left( H_n(X) / H_n(X)^{\text{tor}} \right) \oplus H_{n-1}(X)^{\text{tor}}.$$

**Corollaire. (*Formule des coefficients universels sans torsion*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini et sans torsion, alors  $H^n(X) = H_n(X)$ .

En particulier, si l'homologie singulière d'un espace est de type fini et sans torsion, elle coïncide avec sa cohomologie singulière.

**Corollaire. (*Nombres de Betti cohomologiques*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini, alors les parties libres de  $H_n(X)$  et  $H^n(X)$  sont isomorphes et  $\text{rg}(H^n(X)) = \beta_n(X)$ .

**Exercice 17 (Propriétés calculatoires des produits de torsion)**

Soient  $A, A', B$  trois groupes abéliens. Montrer que

1.  $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(B, A)$  ;
2.  $\text{Tor}(A \oplus A', B) = \text{Tor}(A, B) \oplus \text{Tor}(A', B)$  ;
3.  $\text{Tor}(A, B) = 0$  dès que  $A$  ou  $B$  est libre ;
4.  $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(A^{\text{tor}}, B)$  ;
5.  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Ker}(A \xrightarrow{\times n} A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème. (*Formule des coefficients universels pour l'homologie*)**

Soient  $X$  un espace topologique,  $G$  un groupe abélien. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a<sup>a</sup> une suite exacte courte scindée :

$$0 \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0.$$

En particulier,  $H_n(X; G) \simeq (H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G)$ .

---

<sup>a</sup> Si  $\mathcal{F} : \dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H$  est une résolution libre de  $H$ , on a le complexe de chaînes  $\mathcal{F} \otimes G : \dots F_2 \otimes G \longrightarrow F_1 \otimes G \longrightarrow F_0 \otimes G \longrightarrow H \otimes G \longrightarrow 0$  qui est exacte sauf éventuellement en  $\text{Tor}(H, G) := F_1 \otimes G = H_1(\mathcal{F} \otimes G)$  le *produit de torsion*  $(H, G)$ .

Ne pas se précipiter sur la formule des coefficients universels : c'est un marteau-pilon !



Lorsqu'on sait calculer explicitement l'homologie dans  $\mathbb{Z}$ , on sait a priori le faire en tout coefficients : les coefficients universels ne servent que lorsque les groupes d'homologie, et non le complexe singulier, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  sont seulement donnés.

### Corollaire. (*Indépendance des coefficients pour les nombres de Betti*)

Les nombres de Betti à coefficients dans un corps ne dépendent de  $K$  que par sa caractéristique. Si les groupes d'homologie singulière de l'espace sont sans torsion, alors ils sont indépendants de  $K$ .

En particulier, si l'homologie d'un espace  $X$  est de type fini et sans torsion, pour tout corps  $K$ ,  $H^i(X; K) \simeq H_i(X; \mathbb{Z}) \simeq H_i(X; K) \simeq H_i(X; \mathbb{Z})$ . C'est vrai en particulier pour  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Mnémonik :** le lien entre la torsion et les nombres de Betti est donné par le théorème des coefficients universels.

### Corollaire. (*Homologue $\Rightarrow$ G-homologue*)

Si deux espaces ont même homologie singulière (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ), alors ils ont même homologie à coefficients dans  $G$  pour tout groupe abélien  $G$ .

### Méthode. (*Calcul de l'homologie par la cohomologie*)

Soient  $X$  un espace topologique d'homologie de type finie et  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

- ★  $H^k(X; \mathbb{Z})$  et  $H_k(X; \mathbb{Z})$  ont même rang ;
- ★ si  $k \geq 1$ , le sous-groupe de torsion de  $H^k(X; \mathbb{Z})$  est isomorphe à celui de  $H_{k-1}(X; \mathbb{Z})$ .

### Exemples. (*Cohomologies des espaces classiques*)

1. (*Cohomologie du vide*) La cohomologie du vide est identiquement nulle.

Il s'agit de dualiser de l'identiquement nul.

2. (*Cohomologie des contractiles*) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\{\star\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon..} \end{cases}$

3. (*Cohomologie du tore*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{T}^n) = H_k(\mathbb{T}^n)$ .

En effet, l'homologie du tore est de type fini et sans torsion ! La symétrie dans cette suite traduit l'orientabilité de cette variété compacte : la dualité de Poincaré s'applique.

4. (*Cohomologie de la bouteille de Klein*) On a :  $H^0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ ,  $H^1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$  et  $H^2(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ; au-delà, toute la cohomologie de  $\mathcal{K}$  est nulle.

Le complexe d'homologie cellulaire de la bouteille de Klein est  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$ , quitte à continuer à compléter avec des 0 à gauche. En dualisant, on trouve le complexe de cohomologie

$$(\text{cellulaire}) \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, on retrouve l'homologie de la bouteille :  $H_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H_2(\mathcal{K}) = 0$ .

Il suffit d'appliquer la méthode précédente : la suite des parties libres homologiques est  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \dots$

et celle des parties de torsion homologiques  $0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, 0, 0, \dots$ , d'où le résultat.

L'asymétrie dans cette suite traduit la non-orientabilité de cette variété : la dualité de Poincaré ne s'applique pas, d'ailleurs, en aucun couple des termes donnés.

- 5.** (*Cohomologie des espaces projectifs complexes*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

En effet, le complexe cellulaire de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est très lacunaire, ce qui ne change pas avec la dualisation.

On aurait aussi pu appliquer la formule des coefficients universels en type fini et sans torsion.

- 6.** (*Cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des espaces projectifs réels*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{pour } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Le complexe d'homologie cellulaire de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}$  en alternant des nuls et des multiplications par 2, de sorte que le dernier morphisme à droite soit nul. En dualisant dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on obtient le complexe de cohomologie  $0 \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  identiquement nul aux morphismes, d'où le résultat..

Remarque malicieuse : dans ce premier cas, la dualité de Poincaré s'applique ! En effet, toute variété est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientable.

On a déjà calculé l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des espaces projectifs réels.

- 7.** (*Cohomologie singulière des espaces projectifs réels*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \in [1, n-1] \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De même, on obtient ces formules en observant l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{R}$  des  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  et en appliquant le théorème des coefficients universels pour la cohomologie, le calcul des Ext étant possible grâce à  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

On observe que la dualité de Poincaré s'applique et est vérifiée si et seulement si  $n$  est impair, i.e.  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  est orientable, ce qui est assez joli.

### Contre-exemple. (*Homologie et cohomologie non isomorphes*)

La cohomologie de la bouteille de Klein ne coïncide pas avec son homologie. En effet,  $H^1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H_1(\mathcal{K})$ .

Ceci s'explique par ce que, même si toute son homologie est de type fini, la bouteille de Klein admet des groupes d'homologie avec de la torsion, à savoir  $H_1(X)$ . □

## 5.6 Algèbre homologique

### 5.6.1 Complexes de modules



La théorie de l'homologie énoncée dans le cadre général des catégories abéliennes peut être étudiée indépendamment des théories de l'homologie topologiques développées précédemment. On invite le lecteur à s'y référer de temps à autre pour prendre un certain recul sur les notions présentées.



### 5.6.2 Caractéristique d'Euler

**Définition.** (*Caractéristique d'Euler d'un complexe*)

Soit  $C$  un complexe de cochaînes de modules libres, par exemple de groupes abéliens libres ou d'espaces vectoriels. On note  $(H^i)_{i \in \mathbb{N}}$  son homologie. La *caractéristique (d'Euler)-Poincaré* de  $C$  est la somme alternée

$$\chi = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim(H^i)$$

en posant  $\chi = \infty$  si  $(\dim(H^i))_i$  n'est pas presque toute nulle.

Si  $C$  est canoniquement associé à un espace topologique  $X$ , typiquement si  $C$  est le complexe d'homologie singulière, on note  $\chi = \chi(X)$ . On peut préciser en indice le type d'homologie considéré.

Généralisons les propriétés montrées pour des  $CW$ -complexes.

**Propriété.** (*Caractéristique d'Euler d'un produit*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $\chi(X \times Y)$ ,  $\chi(X)$  et  $\chi(Y)$  sont finies, alors

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

**Propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une somme directe*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $\chi(X \sqcup Y)$ ,  $\chi(X)$  et  $\chi(Y)$  sont finies, alors

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y).$$

▷ Tout espace topologique est faiblement homotopiquement équivalent à un *CW-complexe*. Or la caractéristique d'Euler ne faisant intervenir que les groupes d'homologie, cette identification nous suffit. ■

### 5.6.3 Axiomes d'Eilenberg-Steenrod



# Chapitre 6

## Homotopies

### Résumé

Le but de cette leçon intitulée THÉORIES DE L’HOMOTOPIE est de développer deux premiers exemples de théories de l’homotopie : celle des espaces topologiques et celle des ensembles simpliciaux. L’approche choisie est de les présenter d’une façon uniforme menant à leur généralisation sous la forme de catégorie de modèles. Le second but caché est de donner assez de matière au lecteur à propos des ensembles simpliciaux pour ouvrir la porte à l’étude de la théorie des catégories de plus grandes dimensions, via la notion de  $\infty$ -catégorie. Les théories de cette envergure permettent de classer les espaces topologiques à équivalence d’homotopie près. Toutes ces notions ont, de nos jours, un grand avenir, tant la théorie de l’homotopie irriguent les mathématiques, de sorte que, si au XX<sup>e</sup> siècle, on était convaincu que les mathématiques allaient être fondées sur les bases de la théorie des ensembles, nous pensons que celles du XXI<sup>e</sup> siècle le seront sur celles de la théorie de l’homotopie. En effet : la notion d’ $\infty$ -catégorie stable surpassé aujourd’hui celle de catégorie triangulée ; en ses termes, on peut enfin formuler le but final du programme de Langlands ; la géométrie algébrique qui en dérive pourrait donner un sens à la notion de tangente en un point singulier ; les  $\infty$ -groupoïdes infinis donnent naissance à la théorie de Lie et à la théorie de la déformation, et d’autres choses encore.

### 6.1 Théorie de l’homotopie (supérieure) des espaces topologiques

Un premier problème est qu’il existe des espaces assez différents au niveau du type d’homotopie et qui auront des groupes fondamentaux identiques, autrement dit  $\pi_1$  n’est pas un invariant total. La théorie de l’homotopie supérieure permet d’associer des homotopies entre homotopies et de continuer ce processus à l’infini afin de prendre en compte des paramètres de degré supérieur que le groupe fondamental ne voit pas, typiquement, le  $\pi_n$  pourra détecter des trous « de dimension  $n$  », la sphère  $S^2$  ayant par exemple un « trou de dimension 2 » que le  $\pi_1$  ne voit pas.

### 6.1.1 Prolégomènes : quelques faits sur le segment $[0,1]$ et ses amis les cubes

→ *Notation.* On note  $I = [0,1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle donc  $I^n$  le  $n$ -cube ou *cube de dimension n*.

#### Proposition. (*Décomposition du cube en sous-cubes*)

Pour tous entiers  $0 \leq k \leq n$ ,  $I^n \simeq I^k \times I^{n-k}$ .

▷ Cette identité ensembliste est une identification bénigne, et elle se transmet aux espaces topologiques par associativité de la topologie produit. ■

#### Proposition. (*Propriété différentielle de la frontière*)

Soient  $0 \leq k \leq n$  deux entiers. Alors

$$\partial I^n \simeq (\partial I^k \times I^{n-k}) \cup (I^k \times \partial I^{n-k}).$$

▷ Il est assez visuel (dites cela à  $n = 4$ ) mais en tout cas pas très difficile à vérifier au moyen d'argument de topologie des espaces vectoriels normés, que  $\partial I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\}$ . Le résultat s'ensuit, car  $\llbracket 1, n \rrbracket \simeq \llbracket 1, k \rrbracket \cup \llbracket 1, n - k \rrbracket$  et la réunion traduit bien la disjonction logique. ■

On utilisera aussi :

#### Lemme. (*Le n-cube écrasé sur son bord est la n-sphère*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I^n / \partial I^n$  est un modèle de la sphère de dimension  $n$ , i.e.  $I^n / \partial I^n \cong S^n$ .

▷ En effet,  $S^n = \partial D^{n+1} \simeq \partial I^{n+1} \simeq I^n / \partial I^n$ , la deuxième identité venant de ce qu'un  $n$ -cube est une  $n$ -boule à homéomorphisme près. Montrons le dernier homéomorphisme. Raisonnons par récurrence. La frontière  $\partial I^{n+1}$  du  $(n+1)$ -cube est constituée de  $2(n+1)$  faces homéomorphes à  $I^n$ . On peut choisir l'une d'elles et étendre sa frontière pour couvrir les  $2(n+1) - 1$  autres faces, ce qui donne le dernier homéomorphisme. Explicitement, on considère la face  $F = \{x_{n+1} = 0\}$ . Sa frontière est  $\{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\}$ . Considérons donc l'arête  $\{x_i = b\}$  contenue dans  $\{x_i = b\}$  face de  $I^{n+1}$ . Il est clair que la face  $\{x_i = b\}$  du cube se rétracte par déformation forte par une simple dilatation orthogonale sur la face opposée à  $F$  définie par  $\{x_{n+1} = 1\}$ . Il reste donc à traiter le cas de la face  $\{x_{n+1} = 1\}$ , car tous les points de la frontière de cette face appartiennent à une autre face, dont on déjà été contractés par le procédé précédent. Par hypothèse de récurrence, cette face est homéomorphe à  $I^n \cong I^{n-1} / \partial I^{n-1}$ , et donc de fil en aiguille à  $I^0 / \partial I^0 = \{*\}$ , autrement dit est contractile. D'où le résultat. ■

**Exercice 1** (*Universalité de l'intervalle [0,1]*)

Un espace topologique bipointé muni d'une duplication est un quintuplet  $(X, \mathcal{T}, x_0, x_1, \delta_X)$  où  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique,  $x_0, x_1 \in X$  et  $\delta_X$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $(X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0, x_1}$  où  $\mathcal{R}_{x_0, x_1}$  est la relation d'équivalence engendrée par celle qui identifie  $x_0$  dans la première copie de  $X$  à  $x_1$  dans la deuxième copie de  $X$ . Un morphisme d'espaces topologiques bipointés munis d'une duplication entre  $(X, \mathcal{T}, x_0, x_1, \delta_X)$  et  $(Y, \mathcal{T}', y_0, y_1, \delta_Y)$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$  et faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ (X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0, x_1} & \xrightarrow{f \coprod f} & (Y \coprod Y)/\mathcal{R}_{y_0, y_1}, \end{array}$$

i.e.  $\delta_Y \circ f = f \coprod f \circ \delta_X$  où  $f \coprod f$  est l'application canonique  $X \coprod X \rightarrow Y \coprod Y$  passée simultanément au quotient, ce qui est possible par hypothèses de pointage.

1. Vérifier que la collection des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication forme une catégorie concrète.
2. Montrer que l'espace topologique bipointé  $([0,1], 0, 1)$  est naturellement muni d'une duplication.
3. Justifier que l'on a une théorie de l'homotopie en remplaçant  $[0,1]$  par n'importe quel espace topologique bipointé muni d'une duplication.
4. Soit  $(X, x_0, x_1, \delta_X)$  un espace topologique bipointé. Exhiber un morphisme  $(X, x_0, x_1, \delta_X) \rightarrow ([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$ .
5. En déduire que  $([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$  est terminal dans la catégorie des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication.

**À propos.** (*Choix de  $[0,1]$  par rapport à un intervalle compact*)

- ★ Le choix de  $[0,1]$  plutôt que de n'importe quel intervalle compact de  $\mathbb{R}$  est purement conventionnel, en témoigne les définitions alternatives de chemins choisies avec  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$  deux réels qui ne changent rien. En pratique, changer  $[\alpha, \beta]$  en  $[a, b]$  par précomposition avec  $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  un homéomorphisme entre les deux,  $a < b$  deux réels avec a priori  $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$ , est une *reparamétrisation*.
- ★ Dans un monde ouvert d'esprit où un lacet est une application  $H : X \times [0, \lambda] \rightarrow Y$  avec  $\lambda > 0$  quelconque, il n'y a pas de problème, mais pour nous, la composition des lacets n'est pas associative stricto sensu (se rappeler un petite diagramme rectangulaire bien connu de ceux qui ont scrupuleusement construit le groupe fondamental).

## 6.1.2 Équivalence d'homotopie et théorie des catégories

On commence par formuler la théorie de l'homotopie connue en topologie algébrique élémentaire grâce au langage des catégories.

### 6.1.2.1 Homéomorphie

#### Définition. (*Homéomorphie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de Top. On dit que  $f$  est un *homéomorphisme* si  $f$  est un isomorphisme dans Top, autrement dit s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  dans Top telle que  $g \circ f = id_X$  et  $f \circ g = id_Y$ .

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont *homéomorphes* s'ils sont isomorphes dans Top, autrement dit s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f = id_X$  et  $f \circ g = id_Y$ . On note  $X \simeq Y$ .

### 6.1.2.2 Homotopie

#### Reformulation pratique. (*Formulation catégorique de la notion d'homotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \rightarrow Y$  continues. Alors  $f$  et  $g$  sont homotopes si et seulement si on peut trouver une application continue  $H$ , qui est alors une homotopie entre  $f$  et  $g$ , faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

où  $\iota_0$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 0)$  et  $\iota_1$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 1)$ .

→ *Notation.* On notera systématiquement  $\iota_0, \iota_1$  les applications d'inclusion en 0 et 1 de  $I$ .

On retrouve alors très visuellement :

#### Proposition

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. L'homotopie est une relation d'équivalence sur  $\text{Top}(X, Y)$ . L'ensemble quotient est noté  $[X, Y]$ .

▷ En effet :

\* si  $f = g$ , alors on peut prendre  $H : X \times I \rightarrow Y$  constante :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow \text{cste} & \swarrow f & \\ & & Y & & \end{array}$$

qui est continue et fait commuter trivialement chaque triangle du diagramme.

★ Pour la symétrie, il suffit d'observer que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \nearrow g & \uparrow & \swarrow f & \\
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\
 & \searrow f & \downarrow & \swarrow g & \\
 & & Y & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 H(?, -\bullet) \\
 \vdash
 \end{array}$$

mais surtout

★ pour montrer que l'homotopie est transitive, on concatène :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I \xleftarrow{\iota_1} X \\
 & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & & \searrow h & \swarrow H' \\
 & & Y & & & & 
 \end{array}$$

dont on déduit à réparamétrisation près

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times [0, \frac{1}{2}] & \xleftarrow{\iota_{\frac{1}{2}}} & X & \xleftarrow{\iota_{\frac{1}{2}}} & X \times [\frac{1}{2}, 1] \xleftarrow{\iota_1} X \\
 & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & & \searrow h & \swarrow \iota_1 \\
 & & Y & & & & 
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 H'' = H \oplus H' \\
 \vdash
 \end{array}$$

où  $X \times I = X \times [0, \frac{1}{2}] \oplus X \times [\frac{1}{2}, 1]$  avec la définition évidente,

ce qui démontre bien que la relation d'homotopie est une équivalence. ■

→ **Notations.** Pour  $X, Y$  deux espaces topologiques, on note  $\text{Top}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ . De même, on notera  $h\text{Top}(X, Y) = \text{Hom}_{h\text{Top}}(X, Y)$  comme on va le définir juste maintenant.

### 6.1.2.3 La catégorie d'homotopie

**Définition.** (*Nouvelle introduction de la catégorie Top modulo homotopie*)

On note  $h\text{Top}$ , ou  $ho\text{Top}$ , et l'on appelle *catégorie homotopique des espaces topologiques*, la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et la classe des morphismes entre  $X$  et  $Y$  est  $[X, Y]$ , i.e. la catégorie  $\text{Top}$  quotientée par la congruence d'homotopie.

En fait, sans cette dernière remarque, on n'a pas là une catégorie a priori (il faut des identités, une associativité, etc.). La proposition précédente éclaire ce point et justifie la construction précédente.

### Proposition

Considérons la projection  $H_0 : \text{Top} \longrightarrow h\text{Top}$  qui à un espace topologique associe ce même espace et parallèlement à une application continue  $f : X \rightarrow Y$  associe  $[f] \in [X, Y]$ . Alors il existe une unique structure de catégorie sur  $h\text{Top}$  telle que  $H_0$  soit un foncteur.

▷ On raisonne par analyse synthèse. Si une telle structure existe, alors  $H_0(id_X) = id_{H_0(X), H_0} = [id_X]$  et

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{H_0} & \downarrow [f] \\ Y & & Y \\ g \downarrow & \xrightarrow{H_0} & \downarrow [g] \\ Z & & Z \end{array}$$

d'où  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$  ce qui définit au plus une structure de catégorie sur la classe des objets et des morphismes  $H_0$ . Réciproquement, la composition est bien définie de cette manière, car si l'on a

$$X \xrightarrow{f \sim f'} Y \xrightarrow{g \sim g'} Z$$

avec  $H(-, 0) = f, H(-, 1) = f', K(-, 0) = g, K(-, 1) = g'$ , alors  $g \circ f \sim g' \circ f'$  par  $N : X \times I \longrightarrow Z$ ; en effet,  $N((-0), 0) = g \circ f$  et  $N((-1), 1) = f$ . ■  
 $(x, t) \longmapsto K(H(x, t), t)$

*Remarque.* La preuve précédente fixe des concepts et des notations, il faut s'y référer sans regimber.

### Définition. (*Diagramme homotopiquement commutatif*)

Un diagramme est dit *homotopiquement commutatif* s'il commute modulo la relation d'homotopie, par exemple dans  $\text{Top}$  :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

est homotopiquement commutatif si son image dans  $h\text{Top}$  l'est, i.e.  $gf \simeq kh$ .

*Remarque.* La commutativité est plus forte que la commutativité modulo homotopie.

#### 6.1.2.4 Deux types d'isomorphie nouveaux

##### Définition. (*Équivalence d'homotopie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un flèche de Top. On dit que  $f$  est une *équivalence d'homotopie* si  $H_0(f)$  est un isomorphisme dans  $h\text{Top}$ , autrement dit s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  dans Top telle que  $g \circ f \sim id_X$  et  $f \circ g \sim id_Y$ .

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont *homotopiquement équivalents* ou *ont le même type d'homotopie* s'ils sont isomorphes dans  $h\text{Top}$ , autrement dit s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f \sim id_X$  et  $f \circ g \sim id_Y$ . On note  $X \cong Y$  ou plus simplement  $X \sim Y$ .

##### Définition. (*Rétract par déformation*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $X \subseteq Y$  et  $i : X \hookrightarrow Y$  l'inclusion canonique. On dit que  $X$  est un *rétract par déformation* de  $Y$  s'il existe  $r : Y \rightarrow X$  qui soit une rétraction de  $i$  dans Top et une équivalence d'homotopie, *i.e.* soit telle que  $ri = id_X$  et  $ir \sim id_Y$ .

##### Exemple

Tout espace topologique  $X$  est un rétract par déformation de son cylindre  $X \times I$ , identifié à n'importe quelle hauteur de tranche.

#### 6.1.2.5 Notion d'invariant topologique

On souhaite définir la notion d'invariant d'un espace topologique. On veut qu'il envoie non seulement un espace topologique sur un objet d'une certaine catégorie, mais qu'il soit fonctoriel en envoyant une flèche sur une flèche entre deux objets. On souhaite de plus que deux espaces homotopiquement équivalents soient envoyés sur deux objets isomorphes.

##### Définition. (*Invariant topologique*)

On appelle *invariant topologique* un foncteur de  $h\text{Top}$  sur  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

##### Exemples. (*Invariants topologiques*)

1.  $\pi_0$  est un invariant topologique à valeurs dans Ens.
2.  $\pi_1$  est un invariant topologique *pointé* (*voir la section suivante*) dans Grp, donc presque un invariant topologique.  $\Pi_1$  est un invariant topologique dans la catégorie des groupoïdes.
3. Plus généralement,  $\Pi_n$  est un invariant topologique pour  $n \geq 1$ .
4. Les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie forment également une classe d'invariants topologiques.

**Propriété. (Propriété universelle de l'homotopie)**

Un invariant est donc un foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  une catégorie donnée qui se factorise par  $h\text{Top}$ , visuellement :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{H_0} & h_0\text{Top} \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

$h\text{Top}$  vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur  $\text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  envoyant une équivalence d'homotopie de  $\text{Top}$  sur un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  se factorise par  $h\text{Top}$  et réciproquement tout foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  se factorisant par  $h\text{Top}$  envoie les équivalences d'homotopie sur des isomorphismes.

▷ Supposons que  $F$  envoie une équivalence d'homotopie sur un isomorphisme. Sur les objets, on a forcément  $F(X) = \tilde{F}(\underbrace{H_0(X)}_{=X})$  et donc on pose  $\tilde{F}(X) = F(X)$  pour tout espace topologique  $X$ .

Soit maintenant  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, alors on pose  $\tilde{F}([f]) = F(f)$  par

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & [f] \\ & \swarrow & \downarrow \tilde{F} \\ & & F(f) \end{array}$$

qui est bien définie, car  $f \xrightarrow{H} g$ , soit  $F(f) = F(g)$ , équivaut à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow & \swarrow f & \\ & & Y & & \end{array}$$

qui par composition à  $F$  devient

$$\begin{array}{ccccc} & & F(r) & & \\ & \swarrow F(\iota_0) & & \nearrow F(\iota_1) & \\ F(X) & & F(X \times I) & & F(X) \\ & \searrow F(f) & \downarrow F(H) & \swarrow F(g) & \\ & & F(Y) & & \end{array}$$

d'où  $F(f) = F(H) \circ F(\iota_0) = F(H) \circ F(\iota_1) = F(g)$  avec de plus  $r\iota_0 = r\iota_1$ ,  $r$  étant la rétraction par déformation commune  $(x,t) \mapsto x$  et donc  $F(r)$  est un isomorphisme d'où  $F(\iota_0) = F(\iota_1)$ , car  $F(r)F(\iota_0) = F(r)F(\iota_1)$ .

Réciproquement, si  $F = \tilde{F} \circ H_0$ , si  $f$  morphisme de  $\text{Top}$  est une équivalence d'homotopie, par définition  $H_0(f)$  est un isomorphisme, donc  $F(f) = \tilde{F}(H_0(f))$  l'est, simplement parce que  $\tilde{F}$  est un foncteur. ■

Puisque toute catégorie vérifiant cette propriété universelle est isomorphe à  $h\text{Top}$ , on a :

**Fait. (*Identification de hTop*)**

$h\text{Top}$  définie par sa propriété universelle est uniquement à isomorphisme près : c'est la catégorie localisée  $\text{Top}[h - \text{eq}^{-1}]$  de  $\text{Top}$  par rapport à  $h - \text{eq}$  l'ensemble des équivalences d'homotopie.  $h\text{Top}$  est la catégorie dérivée de  $\text{Top}$ .

Rappelons qu'une telle construction est obtenue en considérant les chaînes finies de morphismes de  $h\text{Top}$  et de leurs inverses formels :

$$X \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow Y$$

prises modulo la relation d'équivalence engendrée par la composition des morphismes

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \approx X \xrightarrow{gf} Z,$$

l'inversion formelle à droite

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow[\sim]{f^{-1}} X \approx id_X$$

et l'inversion formelle à gauche

$$Y \xleftarrow[\sim]{f^{-1}} X \xrightarrow{f} Y \approx id_Y.$$

**6.1.2.6 Catégories relatives****Définition. (*Catégorie relative*  $\text{Top}_{(2)}$ )**

La *catégorie relative*  $\text{Top}_{(2)}$  a pour objets les couples d'espaces topologiques  $(X,A)$  où  $A \subseteq X$  et pour morphismes  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  les applications continues  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $f(A) \subseteq B$ .

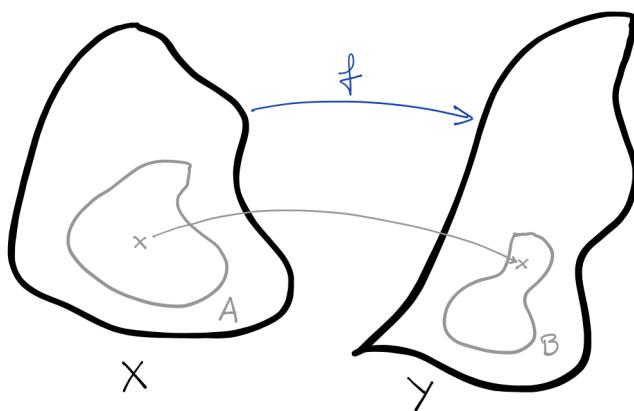


FIGURE 6.1.1 : Illustration de la catégorie relative avec une paire topologique et un morphisme de paires. —

**Remarque importante.**  $\text{Top}_{(2)}$  a la catégorie des espaces topologiques pointés  $\text{Top}_*$  pour sous-catégorie pleine, en prenant comme  $A$  l'ensemble des sous-espaces ponctuels de  $X$ . Un morphisme de  $(X,x_0)$  dans  $(Y,y_0)$  est alors tel que  $f(x_0) = y_0$ . On rappelle au passage que  $\text{Top}_*$  n'est autre que le quotient dual de  $\text{Top}$  par l'objet singleton standard.

### Définition. (*Homotopie dans la catégorie relative*)

Une *homotopie* (encore) entre flèches  $f,g : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  de  $\text{Top}_{(2)}$  est une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  et  $g$  telle que  $H(a,t) \in B$  pour tout  $a \in A$  pour tout  $t \in I$ .

En particulier, on peut définir  $h\text{Top}_{(2)}$  et  $[h\text{Top}_*]$ . On note  $[X,Y]_* = h\text{Top}_*(X,Y)$ .

### Définition. (*Invariant topologique pointé*)

On appelle *invariant topologique pointé* un foncteur de  $h\text{Top}_*$  sur  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

### Propriété. (*Propriété universelle de l'homotopie pointée*)

Un invariant pointé est donc un foncteur  $F : \text{Top}_* \rightarrow \mathcal{C}$  une catégorie donnée qui se factorise par  $h\text{Top}_*$ , visuellement :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_* & \xrightarrow{H_{0*}} & h_0\text{Top}_* \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

$h\text{Top}_*$  vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur  $\text{Top}_* \rightarrow \mathcal{C}$  envoyant une équivalence d'homotopie pointée de  $\text{Top}_*$  sur un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  se factorise par  $h\text{Top}_*$  et réciproquement tout foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  se factorisant par  $h\text{Top}_*$  envoie les équivalences d'homotopie pointées sur des isomorphismes.

▷ À expliciter soi-même. ■

On pourrait même définir plus générale la notion d'*invariant topologique relatif*, mais sans grand intérêt.

Cette notion de *relativité* n'est pas idéale. On lui préfère :

### Définition. (*Homotopie relative à une partie*)

Soient  $X,Y$  deux espaces topologiques et  $f,g : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}$  telles que  $f|_A = g|_A$ . Une *homotopie relative à  $A$*   $H$  entre  $f$  et  $g$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$  telle que  $H(a,t) = f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in A$ , pour tout  $t \in I$ . On note  $f \sim g$  rel  $A$ .



Une homotopie relative n'est pas une homotopie dans la catégorie relative ! Une homotopie relative est en particulier une homotopie dans la catégorie relative, mais c'est une notion strictement plus forte.

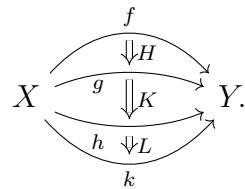
### Définition. (*Rétract par déformation forte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $X \subseteq Y$  et  $i : X \hookrightarrow Y$  l'inclusion canonique.

On dit que  $X$  est un *rétract par déformation forte* de  $Y$  s'il existe  $r : Y \rightarrow X$  qui soit une rétraction de  $i$  dans Top et une équivalence d'homotopie de plus relative à  $X$  à droite, *i.e.* soit telle que  $ri = id_X$  et  $ir \sim id_Y$ , avec de plus  $ir \sim id_Y$  rel  $X$ .

*Remarque.* On souhaiterait aussi définir  $\text{Top}_{(3)}$ ,  $\text{Top}_{(4)}$ , etc. Pour ne pas perdre d'informations cruciales, allons-y doucement.

(*Vers des catégories d'homotopie d'ordre supérieur*) Considérons la suite composable d'homotopies



On peut définir la composition d'homotopies sans problème par reparamétrisation. De même que dans le cas des lacets et du groupe fondamental, dans un monde ouvert d'esprit où une homotopie est une application  $H : X \rightarrow [0, \lambda] \rightarrow Y$  pour un  $\lambda > 0$  quelconque, la composition des homotopies serait associative, mais ce n'est pas le cas a priori sans reparamétrisation. Ainsi, on préfère considérer plutôt que les homotopies, les homotopies modulo l'homotopie relativement à  $X \times \partial I$ . On obtient alors une 2-catégorie  $\Pi(X, Y)$ , dite *2-catégorie d'homotopie des espaces topologiques*, dont les objets sont les espaces topologiques, les 1-morphismes les applications continues et les 2-morphismes sont les classes d'homotopie entre applications continues modulo l'homotopie décrite ci-dessus.

Il est intuitif que continuer ce processus en considérant les homotopies entre homotopies entre homotopies, on peut obtenir une 3-catégorie, puis une  $n$ -catégorie, puis une  $\infty$ -catégorie, en un sens à préciser quand même dans la suite. La donnée d'une telle catégorie permettra de caractériser le type d'homotopie d'espaces gentils comme les *CW-complexes* !

### 6.1.3 Constructions topologiques catégoriques et constructions topologiques pointées

Faisons un pas de côté et voyons quelles constructions catégoriques peuvent être menées à bien dans Top, typiquement, quelles limites et colimites existent.

### 6.1.3.1 Rappels : produits et coproduits topologiques

**Propriétés.** (*Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans Top*)

1. Top admet des produits finis et si  $X, Y \in \text{Top}$ , l'espace topologique produit  $X \times Y$  est l'espace topologique sur  $X \times Y$  dans Ens muni de la topologie produit qui est la topologie la moins fine rendant les projections canoniques continues.
2. Top admet des coproduits finis et si  $X, Y \in \text{Top}$ , l'espace topologique produit  $X \sqcup Y$  est l'espace topologique sur la réunion disjointe  $X \sqcup Y$  dans Ens munie de la topologie somme qui est la topologie la plus fine rendant les inclusions canoniques continues.
3. Top admet des produits fibrés et si  $X, Y, Z, f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z \in \text{Top}$ , le pullback  $X \times_Z Y$  est l'espace topologique sur  $\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$  munie de la topologie la moins fine rendant  $f$  et  $g$  continues.
4. Top admet des sommes amalgamées et si  $X, Y, Z, f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y \in \text{Top}$ , le pushout  $X \sqcup_Z Y$  est l'espace topologique sur  $X \sqcup Y \diagup_{f(z) \sim g(z)}, z \in Z$  munie de la topologie la plus fine rendant  $f$  et  $g$  continues.

On va essayer de construire les objets topologiques classiques (cylindre, cône, suspension...) au sein de la catégorie pointée, ce qui est assez bénin, mais permet une reformulation simple des objets de l'homotopie (chemins, lacets, groupe fondamental) qui nécessitent l'existence d'un point base dans leur définition.

**Propriétés.** (*Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans Top<sub>\*</sub>*)

1. (*Produit pointé*) Dans  $\text{Top}_*$ , le produit de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est donné par :

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0))$$

muni de la topologie produit.

2. (*Bouquet, wedge-produit*) Dans  $\text{Top}_*$ , le coproduit = somme disjointe de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est donnée par :

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y \diagup_{x_0 \sim y_0}, x_0 = y_0).$$

Rappelons le plongement naturel  $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$  par  $x \mapsto (x, y_0)$  et  $y \mapsto (x_0, y)$ .

3. (*Produit fibré pointé*) Dans  $\text{Top}_*$ , le produit fibré de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  le long de  $(Z, z_0)$  est donnée par :

$$(X, x_0) \times_{(Z, z_0)} (Y, y_0) = (X \times_Z Y, (x_0, y_0)).$$

4. (*Somme amalgamée pointée*) Dans  $\text{Top}_*$ , la somme amalgamée de  $(X,x_0)$  et  $(Y,y_0)$  le long de  $(Z,z_0)$  est donnée par :

$$(X,x_0) \sqcup_{(Z,z_0)} (Y,y_0) = (X \sqcup_Z Y, x_0 \sim y_0).$$



En L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, le symbole du wedge-produit est appelé « vee », en anglais. Celui du smash-produit qui lui est lié et que nous allons introduire bientôt, qui est un  $\wedge$ , est appelé « wedge ».

#### 6.1.3.2 Adjonctions topologiques pointées : curryfication et $\Sigma$ - $\Omega$

**Lemme.** (*Composition d'applications pointées*)

La composition de deux applications pointées est pointée.

▷ Symboliquement,  $g(f(x_0)) = g(y_0) = z_0$ . ■

On conseille au lecteur de relire la définition de la TOPOLOGIE COMPACTE-OUVERTE ainsi que son rôle dans l'ADJONCTION TOPOLOGIQUE DE CURRYIFICATION.

**Théorème.** (*Adjonction produit-fonctionnelle dans Top*)

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction

$$? \times Y : \text{Top} \rightleftarrows \text{Top} : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $\text{Top}(X \times Y, Z) \simeq \text{Top}(X, Z^Y := \text{Top}(Y, Z))$ .

Autrement dit, le produit d'espaces localement compacts étant localement compact, la sous-catégorie des espaces topologiques localement compacts est une catégorie monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même ..

**Corollaire.** (*Adjonction produit-fonctionnelle dans hTop*)

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \times Y : h\text{Top} \rightleftarrows h\text{Top} : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $h\text{Top}(X \times Y, Z) \simeq h\text{Top}(X, Z^Y := h\text{Top}(Y, Z))$ .

▷ Il est clair que ces foncteurs adjoints sont bien définis : si  $f, g : X \rightarrow X'$  sont homotopes,  $f \times id_Y$  et  $g \times id_Y$  sont homotopes par  $X \times Y \times I \rightarrow X' \times Y \times I, (x, y, t) \mapsto (H(x, t), y)$ . Similairement,  $f_*$

et  $g_*$  sont homotopes par  $X^Y \times I \rightarrow X'^Y, (\varphi, t) \mapsto (y \mapsto H(\varphi(y), t))$ .

Attention, il faut aussi vérifier que les bijections d'adjonction passent à la catégorie quotient. Pour cela, il suffit de voir que  $f, g : X \times Y \rightarrow Y$  sont homotopes si et seulement si leurs curryfiées le sont. Or si  $f \sim g$  par  $H$ , alors  $(x, t) \mapsto H(x, y, t)$  est une homotopie entre  $\check{f}$  et  $\check{g}$ , et réciproquement, si  $K$  est une homotopie entre  $\check{f}$  et  $\check{g}$ , alors  $(x, y, t) \mapsto K(x, t)(y)$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ . Elle est bien continue, car c'est une évaluation sur  $Y$  qui est localement compact. ■

On en déduit au passage un fait très intéressant :

### Propriété. (*Autodualité de l'homotopie*)

On dit que deux applications  $f, g : X \rightarrow Y$  dans Top sont *cohomotopes* si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y \end{array}$$

où  $e_0(y) = y(0)$  et  $e_1(y) = y(1)$ . Alors deux applications sont homotopes si et seulement si elles sont cohomotopes.

▷ C'est la bifonctorialité : fonctorialité dans un sens, puis l'autre fonctorialité pour la condition réciproque, de l'adjonction de curryification dans Top que l'on utilise. ■

→ *Notation.* On notera systématiquement  $e_0, e_1$  les applications d'évaluation en 0 et 1 de  $I$ .

### Corollaire

Les théorie de l'homotopie et de la cohomotopie des espaces topologiques sont équivalentes.

### Exercice 2

1. Soient  $X, Z, A$  trois espaces topologiques. Pour tout  $a \in A$ , soit  $c_a$  l'application constante  $Z \rightarrow A$  en  $a$ . Montrer que l'application  $\psi : X^Z \times A \longrightarrow (X \times A)^Z$   $(\varphi, a) \mapsto (\varphi, c_a)$  est continue.
2. Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $H$  une homotopie entre  $f, g : X \rightarrow Y$  dans cet ordre. Soit  $Z$  un troisième espace. Montrer que  $H^Z$  définie pour tout  $t \in H$  par le pushout  $H^Z(-, t) := H(-, t)_*$  est une homotopie de  $f_*$  à  $g_*$ . De même, montrer que  $Z^H$  définie pour tout  $t \in H$  par le pullback  $Z^H(-, t) := H(-, t)^*$  est une homotopie de  $f^*$  à  $g^*$ .
3. En déduire que le pushout et le pullback d'une équivalence d'homotopie sont aussi des équivalences d'homotopie.

▷ Éléments de réponse.

1. Si  $K$  est un compact de  $Z$  et  $U \times V$  un ouvert de  $X \times A$ , alors  $\psi^{-1}(W(K, U \times V)) = W(K, U) \times V$ .
2. Sans astuce.
3. Conséquence directe.

### Une généralisation bénigne

Ces résultats restent vrai dans une sous-catégorie de Top plus large que celle des espaces localement compacts, qui contient également tous les *CW-complexes*. Il s'agit de considérer les espaces topologiques *X faiblement Hausdorff compactement engendrés (CHWF)*. Ils vérifient les deux conditions suivantes :

- ★ (*faiblement Hausdorff*) toute application continue  $f : E \rightarrow X$  où  $X$  est compact (en particulier séparé) a une image fermée. Tout espace séparé est faiblement Hausdorff et tout espace faiblement Hausdorff est  $T_1$ , i.e. les points y sont fermés ;
- ★ (*compactement engendrés*)  $X$  est un quotient d'une somme topologique d'espaces compacts, ou, ce qui est équivalent, la topologie sur  $X$  est la topologie finale relativement à toutes les applications continues  $f : K \rightarrow X$  pour  $K$  parcourant la catégorie des espaces topologiques compacts.

Dans cette catégorie complète et cocomplète, l'Hom interne existe ce qui rend la catégorie des espaces topologiques faiblement Hausdorff compactement engendrés monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même.

On se demande maintenant si cela vaut encore dans  $\text{Top}_*$  et alors  $h\text{Top}_*$ . Mais il faut pouvoir construire un certain produit dans cette catégorie vérifiant qu'entre espaces pointés  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ , on a une application continue pointée  $X \times Y \longrightarrow Z$  si et seulement si

$$(x_0, y_0) \longmapsto z_0$$

on en a une  $(X, x_0) \longrightarrow (Z^Y, \text{cste}_{z_0})$ , l'application constante  $y \mapsto z_0$  étant naturellement le point base de  $Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z)$ . Or ce n'est pas vrai pour le simple produit. On définit par suite le

### Définition. (*Smash-produit*)

Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est

$$X \wedge Y := X \times Y /_{\{(x_0) \times Y \cup X \times (y_0)\}},$$

pointé en  $\overline{(x_0, y_0)}$ .

Alors :

**Fait. (*Adjonctions produit-fonctionnelle dans  $\text{Top}_*$  et  $h\text{Top}_*$* )**

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : \text{Top}_* \rightleftarrows \text{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq \text{Top}_*(X, Z^Y := \text{Top}_*(Y, Z))$ . De plus, lorsque  $X$  est lui-même localement compact,  $Z^{X \wedge Y} \simeq Z^{Y^X}$  est un homéomorphisme pointé (*loi d'exponentiation pointée*).

De même, si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : h\text{Top}_* \rightleftarrows h\text{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $h\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq h\text{Top}_*(X, Z^Y := h\text{Top}_*(Y, Z))$ .

Par construction du smash-produit, on a des bijections naturelles  $\text{Hom}_{\text{Ens}_*}(X \wedge Y, Z) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}_*}(X, Z^Y)$  qui induisent donc des bijections d'adjonction dans  $\text{Top}_*$ . Plus explicitement, à  $f : X \wedge Y \rightarrow Z$  pointée en  $f(x_0, y_0) = z_0$ , on associe  $g : X \rightarrow Z^Y$  définie sans problème par  $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$ . Elle est bien pointée, car  $g(x_0)$  à  $y$  fait correspondre  $f(x_0, y) = z_0$ , car  $(x_0, y) = (x_0, y_0)$ . Réciproquement, à  $g : X \rightarrow Z^Y$  on associe  $f(x, y) = g(x)(y)$ , qui est bien définie, car  $f(x_0, y) = z_0$  toujours et  $f(x, y_0) = g(x)(y_0) = z_0$  toujours, car  $g(x)$  est pointée par hypothèse ! Enfin,  $f$  est bien pointée elle-même, car  $g(x_0)(y_0) = g(x_0)(y_0) = z_0$ , car  $g(x_0) = \text{cste}_{z_0}$ . Ces applications sont, sans différence avec la curryfication classique, réciproques l'une de l'autre, donc sont bien des bijections d'adjonction, et de même sont fonctorielles.

La loi d'exponentiation se montre mot à mot comme celle du cas non pointé. Enfin, l'adjonction dans  $h\text{Top}_*$  se déduit de celle de  $\text{Top}_*$  par les mêmes arguments donnés pour avoir l'adjonction de  $h\text{Top}$  à partir de celle de  $\text{Top}$ .

**Heuristique**

Le smash-produit est le produit tensoriel de la catégorie des espaces topologiques pointés.

On peut donner d'autres adjonctions, plus restrictives mais qui sont classiques.

**Définition. (*Cylindre d'un espace topologique pointé*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *cylindre (pointé)* :

$$\text{Cyl}(X, x_0) = \mathfrak{C}(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I}, (x_0, t) \right).$$

*Remarque.* Comme souvent, on note  $t$  pour ne pas trop induire en erreur, même si c'est légèrement dépourvu de sens : on pourrait écrire  $(x_0, 1)$  à la place. Mais on pourrait aussi prendre  $(x_0, 0)$ , et même  $(x_0, \frac{1}{3})$ , et en fait, n'importe quel  $(x_0, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , d'où la notation.

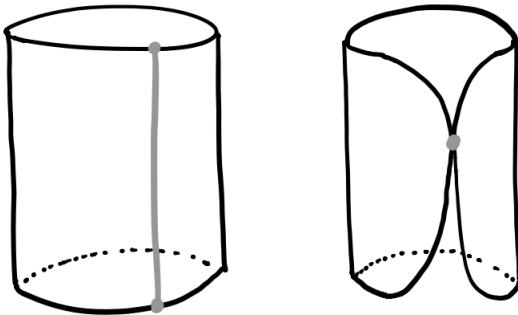


FIGURE 6.1.2 : *Cylindre pointé*. —  
On représente classiquement  $\text{Cyl}(S^1, *)$ .



Ne nous leurrons pas. Nous ne l'appelons cylindre que parce que l'on veut qu'il vérifie des propriétés similaires au cylindre pour les espaces topologiques non pointés. Même remarque pour le cône pointé et la suspension pointée à venir.

### Proposition. (*Le cylindre représente les homotopies pointées*)

On a la bijection  $\text{Top}_*(\text{Cyl}(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \end{array} \right\}$ .

### Définition. (*Cône d'un espace topologique pointé*)

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *cône* (*pointé*) :

$$\text{Cone}(X, x_0) = C(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\}}, (x_0, t) \right).$$

### Proposition. (*Le cône (co)représente les homotopies pointées depuis une constante*)

On a la bijection  $\text{Top}_*(\text{Cone}(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \\ H(x, 0) = y_0 \quad \forall x \end{array} \right\}$ .

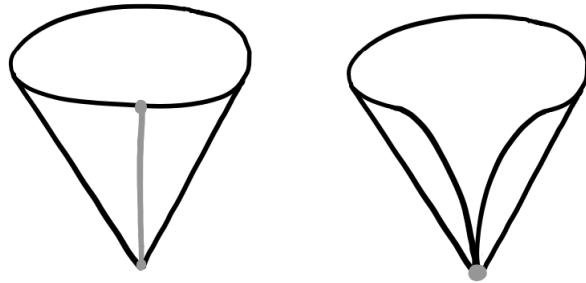


FIGURE 6.1.3 : *Cône pointé.* —  
On représente classiquement  $\text{Cone}(S^1, *)$ .

**Définition. (*Suspension d'un espace topologique pointé*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit sa *suspension (pointée)* :

$$\Sigma(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I}, (x_0, t) \right).$$

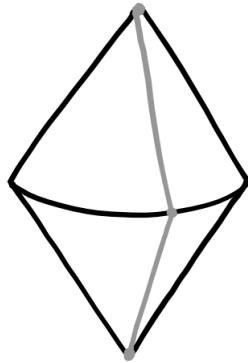


FIGURE 6.1.4 : *Suspension pointée.* —  
On représente classiquement  $\Sigma(S^1, *)$ .

**Proposition. (*La suspension (co)représente les homotopies pointées entre deux constantes*)**

On a la bijection  $\text{Top}_*(\Sigma(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 & \forall t \\ H(x, 0) = y_0 & \forall x \\ H(x, 1) = y_0 & \forall x \end{array} \right\}$ . En effet,  $\partial I = \{0\} \cup \{1\}$ .

Pour énoncer proprement le rôle de ces trois constructions pointées, introduisons deux espaces déjà rencontrés plus haut avec un formalisme systématique.

**Définition. (*Espace des chemins*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *espace des chemins (pointés)* :

$$\text{Path}(X) = \text{Chemins}(X) = (\{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0\}, cste_{x_0}).$$

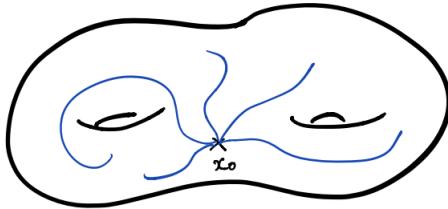


FIGURE 6.1.5 : *Chemin pointé.* —

**Définition. (*Espace des lacets*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *espace des lacets (pointés)* :

$$\text{Loop}(X) = \text{Lacets}(X) = \Omega X = (\{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0 = \varphi(1)\}, cste_{x_0}).$$

*Remarque.* Ces deux dernières constructions sont des sous-objets de  $\text{Top}_*(I, X)$  en considérant un espace  $X$ .

**Exercice 3 (Fonctorialité des cylindres, cônes, suspensions, Hom pointés, chemins et lacets)**

Montrer que les six constructions pointées :  $\text{Cyl}(X)$ ,  $\text{Cone}(X)$ ,  $\Sigma X$ ,  $\text{Top}_*(I, X)$ ,  $\text{Path}(X)$  et  $\text{Loop}(X)$  sont fonctorielles, *i.e.* chacune d'elle, notée ici  $F$ , pour toute application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ , induit  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  de façon compatible avec la composition et l'identité.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Soient  $X, Y$  deux espaces pointés par  $x_0, y_0$  respectivement et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée. On pose  $f : \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(Y)$  définie par  $f(x, t) = (f(x), t)$ . Elle est bien définie, car pour  $f(x_0, t) = (f(x_0), t) = (f(x_0), t) = f(x_0, t)$  en tous  $t, t' \in I$ . On voit au passage que  $f$  est bien pointée, car  $f(x_0, t) = (y_0, t)$  puisque  $f(x_0) = y_0$ . Il est clair que  $f$  envoie l'identité sur  $\text{id}_{C(X)}$  et commute avec la composition.
2. Même chose, en vérifiant un peu plus mais sans aucune difficulté que  $f$  est bien définie.
3. Encore une fois, c'est la même chose.
4. Il suffit de considérer la postcomposition :  $f : X \rightarrow Y$  continue pointée induit  $f_* : X^I \rightarrow Y^I$  par  $g \mapsto f \circ g$ . On sait déjà que  $\cdot_*$  est un foncteur. Reste à vérifier qu'il est pointé, ce qui est immédiat, car  $f \circ cste_{x_0} = cste_{f(x_0)} = cste_{y_0}$ .
5. Le foncteur précédent se restreint bien aux chemins basés au point base.

6. Et également aux lacets basés au point base.

### Exercice 4

Construire des transformations naturelles  $\text{Cyl} \rightarrow \text{Cone} \rightarrow \Sigma$ . De même, construire des transformations naturelles  $\Omega \rightarrow \text{Path} \rightarrow (-)^I$ .

▷ Éléments de réponse.

Pour tout espace  $X$ , on passe de  $\text{Cyl}(X)$  à  $\text{Cone}(X)$  par un passage au quotient. De même, on passe de  $\text{Cone}(X)$  à  $\Sigma(X)$  par un passage au quotient. Pour l'autre suite de transformations, on considère la suite donnée par  $\Omega X \hookrightarrow \text{Path}(X) \hookrightarrow X^I$ .

On a :

### Proposition

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques, avec  $Y$  localement compact. Alors :

1. (*Adjonction cylindre-applications*) On rappelle que  $Y^I := \text{Top}_*(X, Y)$  est pointé par l'application constante. Alors :

$$\text{Top}_*(\text{Cyl}(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, Y^I)$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une homotopie pointée entre deux applications pointées  $f, g$  équivaut à une application pointée  $\check{H} : (X, x_0) \rightarrow (Y^I, \text{cste})$  satisfait au diagramme commutatif dans  $\text{Top}_*$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y. \end{array}$$

2. (*Adjonction cône-chemins*) On constate que  $\text{Path}(Y, y_0)$  est pointé par l'application constante. Alors

$$\text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, \text{Path}(Y)).$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une homotopie pointée de l'application constante à une application pointée  $f$  équivaut à une application pointée  $\check{H} : (X, x_0) \rightarrow (\text{Path}(X), \text{cste})$  telle que  $e_1(\check{H}) = f$ . On parle aussi d'adjonction Cone-Path.

3. (*Adjonction suspension-lacets*  ) On constate que  $\text{Loop}(Y, y_0)$  est pointé par l'application constante. Alors

$$\text{Top}_*(\Sigma(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, \text{Loop}(Y)).$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une

homotopie pointée de l'application constante à elle-même équivaut à une application pointée  $X \rightarrow \Omega Y$ . On parle aussi d'adjonction  $\Sigma\text{-}\Omega$ .

De plus, si  $X$  est localement compact également, les bijections d'adjonction précédentes sont des homéomorphismes en munissant les espaces des topologies compactes-ouvertes.

▷ Il n'y a en fait rien à faire ! Les adjonctions sont toutes vraies ensemblistement, et se déduisent au niveau topologique pointé des considérations générales précédentes sur l'adjonction de curryification topologique. ■

### Corollaire. (*Adjonction homotopique suspension-lacets*)

On a une adjonction

$$\Sigma : h\text{Top}_* \rightleftarrows h\text{Top}_* : \Omega$$

dont les bijections d'adjonction sont internes.

### Exercice 5

Décrire l'unité  $\eta_{\Sigma\text{-}\Omega} : X \rightarrow \Omega\Sigma X$  et la co-unité  $\varepsilon_{\Sigma\text{-}\Omega} : \Sigma\Omega X \rightarrow X$  de l'adjonction  $\Sigma\text{-}\Omega$ .

#### 6.1.3.3 Smash-produit. Lien avec la suspension

##### Définition. (*Smash-produit*)

Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est

$$X \wedge Y := X \times Y / \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\},$$

pointé en  $\overline{(x_0, y_0)}$ .

*Remarque.* On notera l'analogie formelle avec le bouquet, aussi appelée wedge-produit.

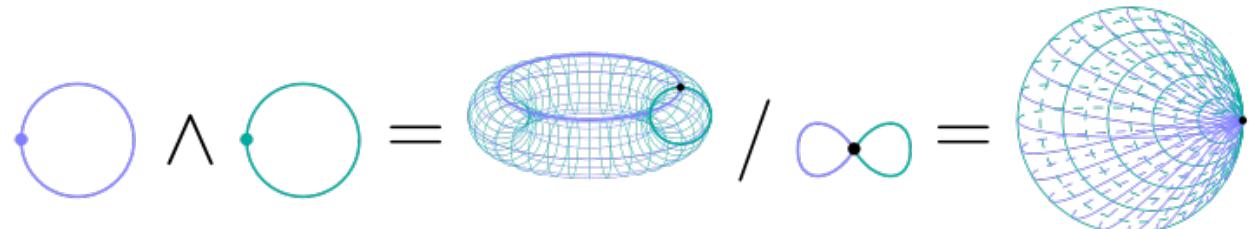


FIGURE 6.1.6 : *Smash-carré du cercle  $S^1$* . —

On considère le produit  $S^1 \times S^1$  qui est un tore, puis on l'écrase selon le protocole proposé. On trouve la sphère  $S^2$ .

**Exemples. (*Smash-produits*)**

1.  $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$ .

En effet, il s'agit d'écraser le tore  $S^1 \times S^1$  sur la réunion rencontrée en un unique point deux cercles génératrices.

2. Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors  $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ .

**Propriété. (*Lien wedge-produit et smash-produit*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques pointés. Alors

$$X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

▷ Puisque  $X \vee Y = \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} \hookrightarrow X \times Y$  par  $x \mapsto (x, y_0), y \mapsto (x_0, y)$ , bien défini bien sûr en  $x_0$  et  $y_0$ , on a  $X \vee Y \simeq \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ OU } y = y_0\} = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ , d'où  $X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}$ . ■

**Mnémonik :** on a un complément  $(X \vee Y)(X \wedge Y) = X \times Y$ . Attention toutefois, cela ne fait pas sens d'écrire  ${}^*(X \vee Y = \frac{X \times Y}{X \wedge Y})$ .

**Propriétés. (*Propriétés calculatoire du smash-produit*)**

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces pointés fixés.

1. (*Commutativité du smash*) Alors  $X \wedge Y \cong Y \wedge X$ .
2. (*Associativité du smash*) Si les espaces sont localement compacts,  $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$ .
3. (*Neutralité du point double pour le smash*) Le double point  $S^0$  pointé, qui est le *point dans Top<sub>\*</sub>*, est l'élément neutre du smash-produit :  $X \wedge S^0 \cong X$ .

▷ Successivement :

1. Par symétrie dans la définition et l'homéomorphisme  $X \times Y \simeq Y \times X$ .
2. Un peu informellement :  $(X \wedge Y) \wedge Z = \frac{(X \wedge Y) \times Z}{(X \wedge Y) \times \{z_0\} \cup \{(x_0, y_0)\} \times Z} \simeq \frac{X \times Y \times Z}{X \times \{(y_0, z_0)\} \cup \{x_0\} \times Y \times \{z_0\} \cup \{(x_0, y_0)\} \times Z}$  qui est symétrique en  $X, Y, Z$ . Pour le démontrer proprement, il faudrait passer aux Hom en utilisant l'adjonction de curryfication.
3. Montrons que  $X \wedge \underbrace{(\{\star, \star\}, \star)}_{= S^0} \simeq X$ . On sait que  $X \times S^0 = X^1 \sqcup X^2$  où  $X^1, X^2$  sont deux copies de  $X$ . Par définition, on a alors  $X \wedge S^0 = \frac{X^1 \sqcup X^2}{X^1 \cup \{x_0\} \times S^0}$ , quotient qui équivaut à l'équivalence  $x_0 \in X^1 \sim x_0 \in X^2$ , d'où  $X \wedge S^0 \simeq X$ . ■

**Exemple fondamental. (*Suspensions sphériques pointées*)**

On a  $\Sigma(S^0, \star) \cong S^1$  pointé n'importe où. De même,  $\Sigma(S^1, \star) \cong S^2$  pointée n'importe où. Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma(S^n, \bullet) \cong (S^{n+1})$  pointée n'importe où. On peut

noter bien sûr  $\Sigma S^n = \Sigma^n S^0$  la *suspension n-ième itérée (pointée) de la 0-sphère*, qui coïncide donc avec suspension pointée de la  $n$ -sphère. On sait donc que c'est aussi, à homéomorphisme pointé près, la  $n+1$ -sphère.

L'isotropie des sphères permet de pointer n'importe où et après coup. Il suffit donc de raisonner en terme d'espaces topologiques non pointés, ce qui a déjà été fait dans le passé.

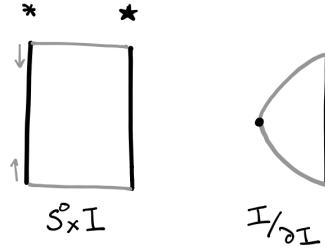
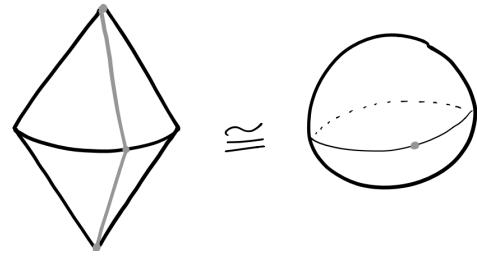
(a) Suspension pointée de  $S^0$ . —(b) Suspension pointée de  $S^1$ . —

FIGURE 6.1.7 : Premières suspensions des sphères. —

Légende double.

*Remarque.* On n'a besoin que d'équivalences d'homotopie, mais beaucoup de celles notées sont en fait des homéomorphismes.

On peut observer que

**Fait. (*Formule de la suspension avec le smash-produit*)**

Pour tout espace topologique localement compact  $X$ ,  $\Sigma X \cong X \times S^1$ .

En effet,  $\Sigma X = X \times I / \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\} \cup X \times \{0\}$ , mais  $X \times \{1\} \cup X \times \{0\} = X \times \{0,1\}$  où  $\{0,1\} = \partial I$ , et d'autre part,  $X \wedge S^1 = X \times S^1 / X \times \{t_0\} \cup \{x_0\} \times S^1$  où l'on peut sans problème prendre  $S^1$  pointé en  $t_0 = \bar{1} = \bar{0}$  lorsque  $S^1 = I / \partial I$ .

C'est en fait très visuel, en observant (avec des yeux quadridimensionnels) la construction de la suspension pointée, faite justement sur le cercle.

Plus généralement :

**Proposition. (*Formule de la suspension utérée avec le smash-produit*)**

Pour tout espace topologique localement compact  $X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^n X \cong X \wedge I^n / \partial I^n \cong X \wedge S^n$ .

▷ On raisonne par récurrence. Pour  $n = 1$ , c'est le fait précédent. Supposons que  $\Sigma^n X \cong X \wedge (I^n / \partial I^n)$ . Alors  $\Sigma^{n+1} \cong \Sigma(\Sigma^n X) \cong \Sigma(X \wedge I^n / \partial I^n) \cong (X \wedge I^n / \partial I^n) \wedge I / \partial I$  par le cas  $n = 1$ , et

par associativité dans le cas localement compact, c'est  $X \wedge (I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I)$ . De plus,

$$I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I = I^n / \partial I^n \times I / \partial I / I^n / \partial I^n \times \partial I \cup \partial I^n \times I / \partial I \cong I^n \times I / \partial I^n \times I \cup I^n \times \partial I = I^{n+1} / \partial I^{n+1}$$

par des simples manipulations algébriques pour l'équivalence d'homotopie et la formule de dérivation de  $I^{n+1}$  pour la dernière identité, d'où l'hérédité. ■

On retrouve :

### Corollaire. (*Suspension itérée de $S^0$* )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^n S^0 \cong S^n$ .

▷ Par la proposition,  $\Sigma^n S^0 \cong S^0 \wedge I^n / \partial I^n \cong I^n / \partial I^n$ , car  $S^0$  est neutre pour le smash. ■

### Définition. (*Spectre des sphères*)

On a une suite :

$$S^0 \xrightarrow{\Sigma} S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

infinie.

### Heuristique

Le spectre des sphères est un objet universel, qui joue un rôle fondateur en théorie de l'homotopie stable. La catégorie des spectres est la bonne catégorie pour représenter les théories cohomologiques, et le spectre sphérique est l'unité de cette catégorie.

→ *Notation.* On note encore le foncteur  $\Sigma : h\text{Top}_* : h\text{Top}_*$ .

## 6.1.4 Groupes d'homotopie supérieurs

### 6.1.4.1 Construction formelle de l'homotopie supérieure

#### Définition-propriété. (*Pincement*)

Soit  $X$  un espace topologique pointé. Le *pincement* associé à  $X$  est l'application pointée

$$\Sigma X \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X$$

définie de la manière suivante : puisque

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & & \Sigma X \vee \Sigma X \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \times I & & X \times I \cup X \times I \end{array}$$

où cependant  $X \times I \cup X \times I$  n'est pas pointé, on pose

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} (x,2t) & \text{dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x,2t-1) & \text{dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

▷ Elle passe au quotient, car  $(x,0) \mapsto (x,0) = *$ ,  $(x,1) \mapsto (x,1) = *$  et  $(x_0,t) \mapsto (x_0,*) = *$ . On comprendra en cela que, dans la figure ci-dessous, à droite, toute la ligne grise est identifiée à un seul point. L'application obtenue est continue par recollement sur des fermés. Enfin, pinch est pointée, en prenant par exemple  $(x_0,0) \mapsto *$ . ■

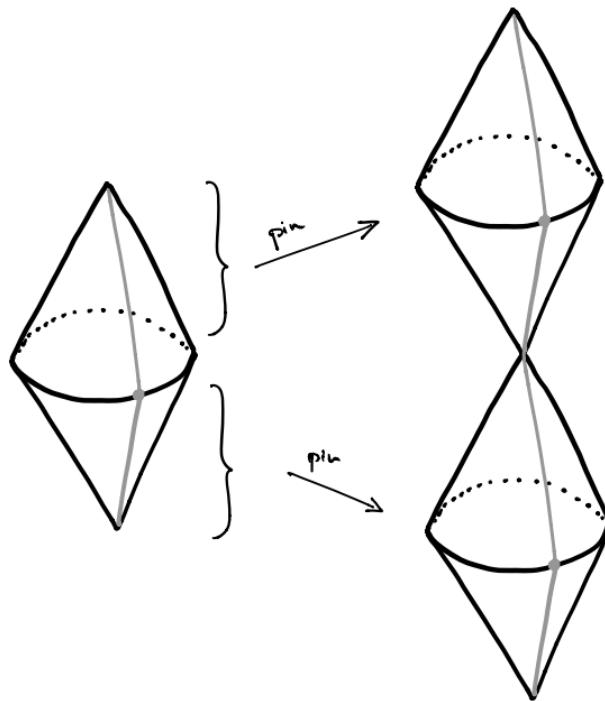


FIGURE 6.1.8 : *Pinçement.* —  
Le pinch est parfois aussi noté pin, sans confusion possible.

**Fait.** (*Composition des applications définies sur une suspension pointée*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques pointés. Soient  $f, g \in \text{Top}_*(\Sigma X, Y)$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \times \text{Top}_*(\Sigma X, Y) & \equiv & \text{Top}_*(\Sigma X \vee \Sigma X, Y) \\ & \searrow \bullet & \downarrow \text{pinch}^* \\ & & \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \end{array}$$

qui permet de définir  $f \bullet g : \Sigma X \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$ , explicitement donnée par

$$(f \bullet g)(x,t) \mapsto \begin{cases} f(x,2t) & \text{dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x,2t-1) & \text{dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Vérifions simplement que  $f \bullet g$  est pointée. C'est immédiat, car c'est la composée de deux applications pointées qui est donc pointée et  $f \vee g$  est pointée par définition évidente du bouquet de deux applications.



Pour l'instant, cette opération telle quelle n'est ni associative, ni unitaire.

D'une façon très similaire à la construction du groupe fondamental, en fait, qui le généralise, nous rendons cette loi une loi de groupe à homotopie près.

### Lemme. (*Définition du groupe fondamental généralisé*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors  $([\Sigma X, Y]_*, \bullet, [cste_{y_0}])$  est un groupe. (On rappelle que  $[\Sigma X, Y]_* = h\text{Top}_*(\Sigma X, Y) \simeq \text{Top}_*((X, x_0), \Omega(Y, y_0))$  et vu sous cet angle, cette adjonction semble vraiment triviale.)

▷ Faisons-le. Notons  $*$  le point base de  $\Sigma X$ .

- ★ (*Bonne définition*) La loi  $f \bullet g$  ne dépend pas du poids des représentants : si  $f \stackrel{H}{\sim} f'$  rel  $\{*\}$ ,  $f, f' : \Sigma X \rightarrow Y$  et  $g : \Sigma X \rightarrow Y$ , alors  $f \bullet g \sim Kf' \bullet g$  rel  $\{*\}$ . En effet, pour  $H : \Sigma X \times I \rightarrow Y$  avec  $H(x, t, 0) = f(x, t)$ ,  $H(x, t, 1) = f'(x, t)$  et  $H(x_0, t, s) = y_0$ ,  $(x, t, s) \mapsto H(x, t, s)$

on pose  $K : \Sigma X \times I \rightarrow Y$  continue et pointée, i.e. telle

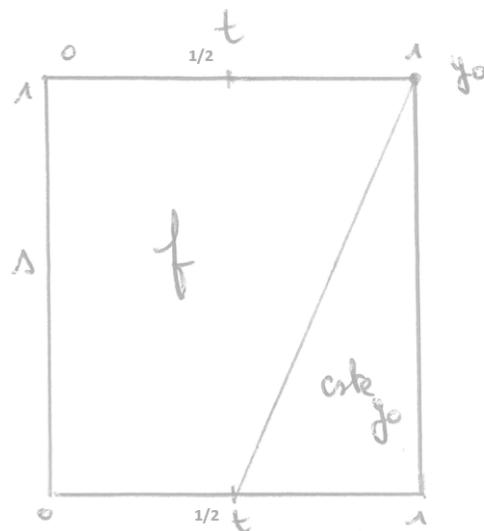
$$(x, t, s) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t, s) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, 2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que  $H(x, 1, s) = y_0 = g(x, 0)$ ; en  $s = 0$ , on retrouve  $f \bullet g$  et en  $s = 1$ , on retrouve  $f' \bullet g$ ; enfin,  $K$  est pointée car  $K(x_0, t, s) = y_0$ . La même compatibilité vaut à droite par des arguments parallèles ce qui permet de conclure sur la bonne définition.

- ★ (*Unité*) Montrons que  $f \bullet cste_{y_0} \stackrel{H}{\sim} f$  rel  $\{*\}$ . Il suffit de poser  $H : \Sigma X \times I \rightarrow Y$ . Symétriquement,  $cste_{y_0} \bullet f \stackrel{H}{\sim} f$  rel  $\{*\}$

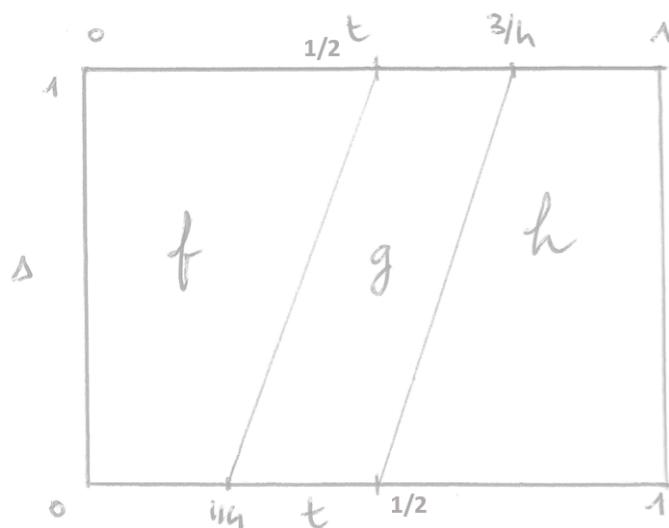
$$(x, t, s) \mapsto \begin{cases} f(x, \frac{2t}{1+s}) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y_0 & \text{pour } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

où  $H$  n'est bien sûr plus la même.



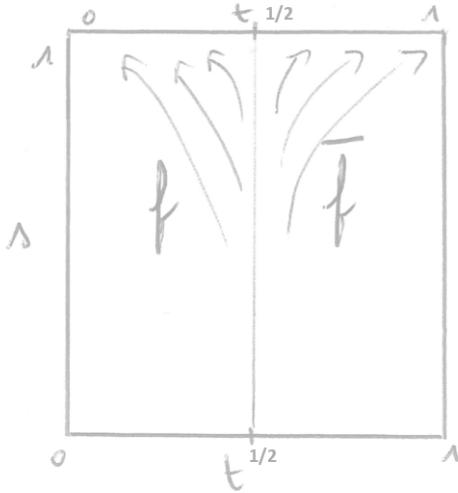
\* (Associativité) Exhibons  $f \bullet (g \bullet h) \stackrel{H}{\sim} (f \bullet g) \bullet h$  rel  $\{*\}$ . On pose  
 $H: \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ .

$$(x, t, s) \longmapsto \begin{cases} f(x, \frac{4}{1+s}t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ g(x, 4(t - \frac{1+s}{4})) & \text{pour } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ h(x, \frac{4}{2+s}(t - \frac{2+s}{4})) & \text{pour } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



\* (Inversion) Enfin,  $f \bullet \bar{f} \sim \text{cste}_{y_0}$  rel  $\{*\}$  où  $\bar{f}: \Sigma X \longrightarrow Y$ . Il suffit cette fois de poser  $H: \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ .

$$(x, t, s) \longmapsto \begin{cases} f(x, 2(1-s)t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(x, 2(1-s)(1-t)) & \text{pour } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Donc  $[\Sigma X, Y]$  est bien un groupe pour la loi  $\bullet$ , de neutre  $cste_{y_0}$ . ■

### Méthode. (*Écrire les formules en homotopie*)

Les formules ci-dessus ne sortent pas totalement de nulle part, au sens que ce sont les dessins qui comptent le plus.

Pour obtenir l'homotopie de l'associativité par exemple, on trace le dessin et l'on note les points connus. Il s'agit d'abord de trouver le découpage de l'ensemble de définition, c'est-à-dire de trouver l'équation des droites verticales diagonales. Pour cela, on peut y aller au talent, ou écrire une équation affine et évaluer aux points connus, ce qui est plus sage. Pour écrire la valeur de l'homotopie sur chacun de ses ensembles, c'est plus dur : il faut intuiter une composée de fonctions affines qui fasse sens et voir si elle valide sur des points d'exemples.

*Remarque.* On se rappelle qu'une application de  $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$  est une homotopie pointée depuis et jusqu'à l'application constante entre  $X$  et  $Y$ , et que le produit  $\bullet$  est alors une composition paramétrée d'elles d'eux. On peut aussi voir une homotopie entre deux telles applications comme une application relative à  $X \times \partial I$ . Sous cette interprétation, un groupe fondamental généralisé est donc une 2-catégorie (*au sens mentionné dans la section précédente*).

### Observation. (*Groupe fondamental du premier ordre*)

Le groupe fondamental  $\pi_1(X, x_0) = ([S^1 X]_*, \bullet, [cste_{x_0}])$  où de plus

$$[S^0, \Omega X]_* \simeq [S^1, X]_* \simeq [\Sigma S^0, X]_* = [\Sigma^1 S^0, X]_*.$$

**Définition. (*Groupes d'homotopie supérieurs*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$\pi_n(X, x_0) := ([\Sigma^n S^0, X]_* = [S^n, X]_*, \bullet, [cste_{x_0}])$$

le  $n$ -ième groupe d'homotopie de  $X$ .

Par isomorphisme, on peut donc aussi le définir pour  $(X, x_0)$  comme  $((I^n, \partial I^n, (X, x_0)), \bullet, [cste_{x_0}])$  l'ensemble des applications, i.e.  $\partial I^n \rightarrow \{x_0\}$ .

→ *Convention.* Pour  $n = 0$ , on pose  $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]_*$  qui n'est autre que l'ensemble des composantes connexes de  $X$ . En particulier, il ne reçoit pas le qualificatif de groupe d'homotopie, mais il fait partie de la *suite d'homotopie*.

▷ En effet, une application pointée  $S^0 \rightarrow X$  se ramène à sa donnée sur le deuxième point de  $S^0$ . Deux applications seront alors homotopes si et seulement si leurs deuxièmes points sont dans la même composante connexe, i.e. s'il existe un chemin continu, ici donc simplement une homotopie (par rapport à  $S^0$  (*selon l'heuristique introduit ci-dessous*)), entre eux deux. ■

**Proposition. (*Invariance homotopique des groupes d'homotopie*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n$  est un invariant topologique pointé.

▷ En effet,  $\pi_n : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$  se factorise à travers  $h\text{Top}_* : \text{si } f : (X, x_0) \xrightarrow{\sim} (Y, y_0)$  est une équivalence,  $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  est une bijection, car  $\pi_n(X, x_0) = [\Sigma^n S^0, X]_* \xrightarrow{f_*} [\Sigma^n S^0, Y]_* = \pi_n(Y, y_0)$  a pour réciproque évidente  $\pi_n(Y, y_0) = [\Sigma^n S^0, Y]_* \xrightarrow{g_*} [\Sigma^n S^0, X]_* = \pi_n(X, x_0)$  où  $g$  est un quasi-inverse de  $f$ . ■

Plus casse tête :

**Proposition**

L'endofoncteur  $\Sigma$  induit un morphisme de groupes  $(\Sigma X, Y]_*, \bullet, [cste_{y_0}]) \xrightarrow{\Sigma} ([\Sigma^2 X, \Sigma Y], \bullet, [cst])$ .

▷ Puisque le foncteur  $\Sigma$  coïncide avec  $\wedge I / \partial I$ , il préserve les homotopies pointées. Ainsi, il induit un endofoncteur sur la catégorie homotopique, d'où la bonne définition de ce morphisme. La définition du produit  $\bullet$  avec le pincement conclut. que c'est un morphisme. ■

**Heuristique**

$\pi_{n+1}$  est l'espace des homotopies entre deux éléments de  $\pi_n$ .

**Fait.** (*Groupes d'homotopie en termes de lacets itérés*)

Pour tout espace pointé  $(X,x_0)$ ,

$$\pi_n(X,x_0) \simeq \pi_{n-1}(\Omega X) \simeq \dots \simeq \pi_1(\Omega^{n-1}X) \simeq \pi_0(\Omega^n X).$$

En particulier, tout groupe d'homotopie est un groupe fondamental. Mais est-ce bien utile ? Par l'adjonction  $\Sigma\text{-}\Omega$  bien sûr.

**VOC** On parle parfois de *n-lacet* dans  $X$  pour désigner une application de  $I^n/\partial I^n \rightarrow X$  ou  $S^n \rightarrow X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après les définitions :

**Exemples.** (*Groupes d'homotopie supérieurs*)

1. (*Invariants homotopiques du vide*)  $\pi_n(\emptyset) = (\{\emptyset\}, +, 0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. (*Groupes d'homotopie d'un contractile*) Si  $(X,x_0)$  est contractile,  $\pi_n(X) = (\{\emptyset\}, +, 0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Il n'y a qu'une seule application à valeurs dans  $\{\star\}$ .

3. (*Groupes d'homotopie d'un discret*) Si  $(X,x_0)$  est discret, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\pi_n(X) = \begin{cases} (\{\emptyset\}, +, 0) & \text{si } n \geq 1 \\ X \text{ en } n = 0. \end{cases}$

Pour  $n \neq 0$ , il n'y a qu'une application de  $I^n$  dans  $X$  qui prenne la valeur discrète  $x_0$ , c'est l'application constante en  $x_0$ . Pour calculer  $\pi_0$ , il suffit de dire qu'un espace discret est totalement discontinu.

4.  $\pi_1(S^1, (1,0)) = (\mathbb{Z}, +, 0)$ .

Cependant déjà, le calcul suivant est encore un problème ouvert !

**Conjecture.** (*Groupes d'homotopie sphères*) ?

Pour  $k, n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $\pi_k(S^n)$  ?

**Mnémonik :** les groupes d'homotopie supérieurs sont difficiles à calculer; c'est pour cela d'ailleurs que l'on introduit les groupes d'homologie, plus abstraits mais plus pratiques.

On dispose cependant du théorème suivant :

**Théorème.** (*Commutativité des groupes d'homotopie supérieurs*)

Soient  $(X,x_0), (Y,y_0)$  deux espaces pointés. Pour tout  $n \geq 2$ , le groupe  $[\Sigma^n X, Y]_*, \bullet, [cste_{y_0}]$  est abélien.

En particulier,  $\pi_n(X,x_0)$  est abélien pour tout  $n \geq 2$ .

Pour montrer cela, on aura besoin du

**Lemme. (*Argument d'Eckmann-Hilton*)**

Étant donnés deux magmas unitaires  $(+_1, u_1)$  et  $(+_2, u_2)$  sur un même ensemble  $A$  qui satisfont la *relation d'échange* :

$$(x +_1 x') +_2 (y +_1 y') = (x +_2 y) +_1 (x' +_2 y'),$$

ces deux magmas sont les mêmes et sont en fait associatifs et commutatifs.

▷ Montrons que  $u_1 = u_2 = u$ . En utilisant la neutralité, on a  $u_2 = (u_2 +_1 u_1) +_2 (u_1 +_1 u_2) = (u_2 +_2 u_1) +_1 (u_1 +_2 u_2) = u_1$ .

De même,  $x +_2 y = (x +_1 u) +_2 (u + y) = (x +_2 u) +_1 (u +_2 y) = x +_1 y$ , donc  $+_1 = +_2 = +$ .

La loi  $+$  est commutative. En effet,  $x + y = (u + x) + (y + u) = (u + y) + (x + u) = y + x$ .

Elle est de plus associative, car  $(x + y) + z = (x + y) + (u + z) = (x + u) + (y + z) = x + (y + z)$ . ■

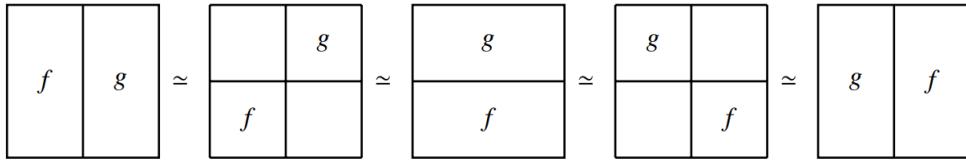


FIGURE 6.1.9 : *Principe d'Eckmann-Hilton*. —

Montrons maintenant le théorème de commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

**Preuve.**

▷ Soit  $n$  un entier plus grand que 2. Puisque le  $n$ -ième itérée de la suspension de  $\Sigma$  est un projeté de  $X \times I^n$ , toute application de  $\Sigma^n X$  dans la catégorie homotopique peut être représentée par fonction de  $X \times I^n$  :

$$\text{Top}(X \times I^n, Y) \xleftarrow{\text{évidente}} \text{Top}_*(\Sigma^n X, Y) \longrightarrow [\Sigma^n X, Y]_*$$

Étant données deux applications  $f, g : X \times I^n \rightarrow Y$ , considérons  $+_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  définie par  $f +_i g(x, t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n) & \text{pour } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \\ g(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$  En particulier,  $\bullet = +_n$ . Il est clair

quoique très fastidieux à vérifier que les  $+_i$  sont bien définies sur  $[\Sigma^n X, Y]_*$  et unitaires, mais peu importe, car c'est la même preuve que pour  $\bullet$ , et ça, on l'a fait. Vérifions simplement la loi d'échange pour appliquer l'argument d'Eckmann-Hilton, qui en particulier donnera que les  $+_i$  sont les mêmes et que  $+_n = \bullet$  sera commutative. Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i \neq j$ . On a  $(f +_i g) +_j (f' +_i g') = (f +_j f') +_i (g +_j g')$

$$\text{par } (x_1, t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(x, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j, \dots, t_n) \text{ pour } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2} \\ g(x, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_j, \dots, t_n) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1, 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2} \\ f'(x, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j - 1, \dots, t_n) \text{ pour } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1 \\ g'(x, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_2 - 1, \dots, t_n) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1, \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1. \end{cases}$$

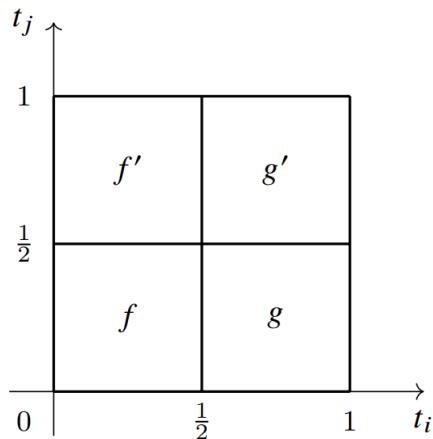


FIGURE 6.1.10 : Commutativité des groupes d'homotopie. —

**Exercice 6 (Abélianité du  $\pi_2$ )**

Montrer directement que  $([\Sigma^2 Y]_*, +_1)$  est abélien.

**Heuristique**

La non-abélianité du groupe fondamental  $\pi_1$  est une conséquence des pathologies en basses dimensions observées souvent en mathématiques.

En degré  $\geq 2$ , une certaine liberté de mouvement permet de rendre le produit + commutatif, comme l'illustre très bien le diagramme du principe d'Eckmann-Hilton.

**Heuristique**

Cette commutativité ne signifie pas que les grands groupes d'homotopie et les groupes d'homologie sont liés.

On pourra retenir que l'homologie est le monde de l'algèbre linéaire et que l'homotopie est celle de la théorie de Lie.

### 6.1.4.2 Fonctorialité des groupes d'homotopie supérieurs

#### Définition-propriété. (*Application induite en homotopie*)

Soient  $(X,x), (Y,y)$  deux espaces topologiques pointés et une application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ ,  $y_0 = f(x_0)$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  donne lieu à un morphisme de groupes

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

dite *application induite par  $f$  en homotopie* au rang  $n$  et définie par  $(u : \Sigma S^n \rightarrow X) \mapsto f \circ (u : \text{Sig}S^n \rightarrow Y)$ .

#### Lemme

Si  $x_0, x'_0$  sont dans la même composante connexe par arcs d'un espace  $X$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  et  $\pi_n(X, x'_0)$  sont isomorphes.

→ *Notation.* Ceci permet d'écrire  $\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0)$  dès que  $(X, x_0)$  est connexe par arcs.

### 6.1.4.3 Équivalences faibles d'homotopie

#### Définition. (*Équivalence faible d'homotopie*)

Soient  $(X,x), (Y,y)$  deux espaces topologiques pointés et une application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes induits  $f_n : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$  sont des isomorphismes.



Il n'y a pas de complexe de l'homotopie des espaces topologiques, donc ne pas parler de quasi-isomorphisme !

#### Fait. (*Équivalence d'homotopie $\Rightarrow$ équivalence faible d'homotopie*)

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

→ *Notation.* Dans le cadre de l'homotopie supérieure, on identifie deux groupes d'homotopie isomorphes par un signe  $=$ .

Une équivalence d'homotopie est l'analogue en théorie de l'homotopie des quasi-isomorphismes en théorie de l'homologie. Mais ces deux notions sont liées :

### Propriété

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie.

C'est la fonctorialité de l'homotopie : si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie pointée en  $x_0$  sur  $y_0$ ,  $g : Y \rightarrow X$  pointée également son quasi-inverse, on a  $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(id_Y) = id_{\pi_n(Y, y_0)} = \pi_n(f)\pi_n(g)$  et de même  $id_{\pi_n(X, x_0)} = \pi_n(g)\pi_n(f)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  et  $\pi_n(Y, y_0)$  sont donc isomorphes par  $\pi_n(f) = f^*$  et sa réciproque  $\pi_n(g) = g^*$ .

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée qui induisent un isomorphisme de groupes abéliens  $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  en homologie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $\pi_n(f)$  est un isomorphisme de groupes pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

### Contre-exemple. (*Équivalence faible d'homotopie $\Rightarrow$ équivalence d'homotopie*)

Une équivalence faible d'homotopie n'est pas forcément une équivalence d'homotopie.

On considère  $W$  le cercle de Varsovie. Soient  $a, b$  deux points sur la courbe avec  $a$  sur le segment  $\{0\} \times [-1, 1]$  et  $b$  sur la courbe reliant les deux sinus du topologue en symétrie miroir. Alors on peut calculer que l'application identité  $f : \{a, b\} \rightarrow W$  est une équivalence faible d'homotopie, ce qui vient de ce que  $W$  a l'homotopie d'un contractile. Cependant, on sait que  $W$  a une seule composante connexe, donc toute application continue  $g : W \rightarrow \{a, b\}$  est constante, de sorte qu'il est impossible que  $gf \sim id_{\{a, b\}}$  et  $fg \sim id_W$ . □

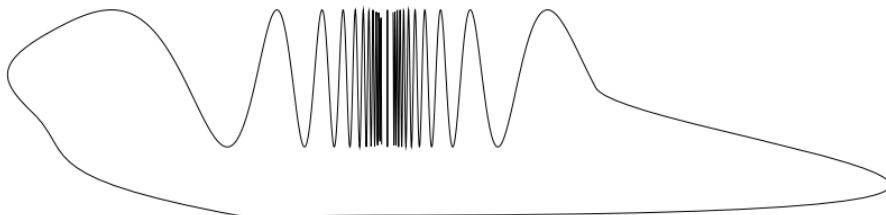


FIGURE 6.1.11 : *Cercle polonais homotopique*. —

Le cercle polonais souvent utilisé en théorie de l'homotopie, parfois appelé *cercle de Varsovie*, est un dédoublement du sinus du topologue par symétrie par rapport à  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , et recollé en une unique branche.

#### 6.1.4.4 *n*-connexité

##### Définition. (*n*-connexité)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $X$  est *n*-connexe si  $\pi_k(X) = 0$  pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

**Fait**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Tout espace  $(n + 1)$ -connexe est  $n$ -connexe.

**Exemples. ( $n$ -connexité)**

1. Les espaces 0-connexes sont exactement les espaces connexes par arcs.
2. Les espaces 1-connexes sont exactement les espaces simplement connexes par arcs.



La réunion disjointe de deux 3-sphères, où l'on admet que  $\pi_2(S^3) = 0$ , n'est pas 2-connexe, car elle n'est pas 0-connexe.

**Définition. (*Application  $n$ -connexe*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointé. On dit que  $f$  est  $n$ -connexe si  $\pi_k(f)$  est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n - 1$  et  $\pi_n(f)$  est un épimorphisme, i.e. est surjectif.

### 6.1.5 Suites de fibres et de cofibres

Dans cette section, tous les espaces sont supposés localement compacts ou plus généralement faiblement Hausdorff compactement engendrés.

#### 6.1.5.1 Suites exactes et coexactes dans les catégories concrètes

Les applications topologiques pointées n'étant pas en général « exactes », nous allons introduire une façon de les « dériver » pour qu'elles le deviennent.

**Définition. (*Suite exacte d'ensembles pointés*)**

Soit  $(A,a) \xrightarrow{f} (B,b) \xrightarrow{g} (C,c)$  une suite dans  $\text{Ens}_*$ . On dit qu'elle est *exacte* lorsque  $f(A) = g^{-1}(c)$ . Naturellement, une suite longue dans  $\text{Ens}_*$  est *exacte* si toutes ses sous-suites à trois termes le sont.

**Définition. (*Suite  $h$ -exacte,  $h$ -coexacte d'espaces pointés*)**

Une suite courte  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  dans  $\text{Top}_*$  est dite  *$h$ -coexacte*, respectivement  *$h$ -exacte*, si pour tout  $Z \in \text{Top}_*$ ,  $[U,Z]_* \xleftarrow{f^*} [V,Z] \xleftarrow{g^*} [W,Z]$  est exacte, respectivement  $[Z,U]_* \xrightarrow{f^*} [Z,V]_* \xrightarrow{g^*} [Z,W]$  est exacte.

Autrement dit, pour toute  $\psi : V \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$ ,  $\psi$  est homotope à 0, i.e.  $\psi \circ f : U \rightarrow Z \sim \text{cste}_{z_0} \text{ rel } \{0\} \iff \varphi : W \rightarrow Z \mid \psi \sim \varphi \circ g \text{ rel } \{*\}$ .

Une suite longue est dite  *$h$ -coexacte*, respectivement  *$h$ -exacte*, si toutes ses sous-suites

courtes, *i.e.* à trois termes, sont respectivement  $h$ -coexactes et  $h$ -exactes.

### Reformulation pratique. (*Coexactitude d'espaces topologiques pointés*)

Une suite courte  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  dans  $\text{Top}_*$  est  $h$ -coexacte si et seulement si : pour toute  $\psi : V \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$ ,  $\psi \circ f : U \rightarrow Z$  est homotope à 0, *i.e.*  $\sim_{\text{cste}_{z_0}} \text{rel } \{0\} \iff$  il existe  $\varphi : W \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$  telle que  $\psi \sim_{\{\ast\}} \varphi \circ g$ .

### Fait. (*Condition nécessaire et suffisante de $h$ -coexactitude*)

Si une suite  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  est  $h$ -coexacte dans  $\text{Top}_*$ , alors  $f^*(\psi) = g \circ f$  est homotope à zéro.

On considère  $Z = W$ ,  $\varphi = id_W$  et  $\psi = g$ .

Réciproquement, cette condition implique que  $g^*([W, Z]_*) \subseteq (f^*)^{-1}([cste])$ .

Facile cette fois.

**Remarque importante.** Les formulations correspondantes pour les suites  $h$ -exactes existent en dualisant les propriétés précédentes (les formuler en exercice).

#### 6.1.5.2 Cônes, chemins et suites exactes de (co)fibres, de Puppe

Rien ne dit que la suite canonique  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Y/X$  est  $h$ -coexacte : raffinons donc la construction de droite.

### Définition. (*Cône d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée, donc dans  $\text{Top}_*$ . Le *cône* de  $f$  aussi appelé *cofibre homotopique* de  $f$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(X) \cup_f Y \end{array}$$

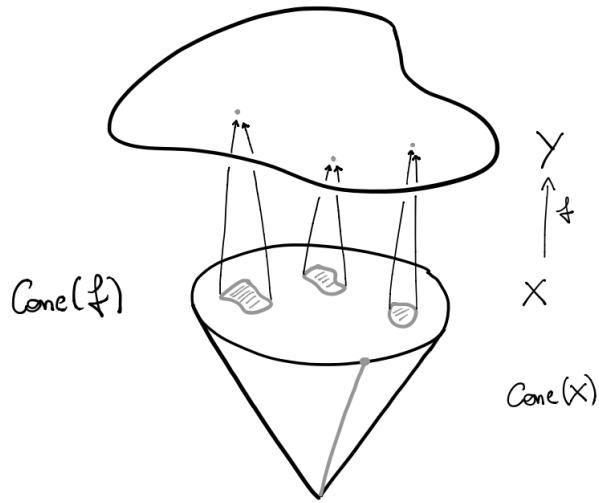
où  $\text{Cone}(f) := \text{Cone}(X) \cup_f Y = \frac{\text{Cone}(X) \cup Y}{(x,1) \sim f(x)}$ , de point base l'image de  $y_0$  point base de  $Y$ .

**Mnémonik :** c'est le « cône de  $X$  de base  $Y$  ».

#### Remarques.

1. L'application  $f_1 : Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  est un plongement.
2.  $f_1 \circ f$  est homotope à 0.

Par  $H : X \times I \longrightarrow \text{Cone}(f)$  où bien  $H(-,1) = f_1 \circ f$  et  $H(-,0)$  est le point base  $\bar{y}_0$   
 $(x,t) \mapsto (x,t) \in \text{Cone}(X)$   
de  $\text{Cone}(f)$ .

FIGURE 6.1.12 : *Cône d'une application.* —**Proposition. (*Suite cofibrée*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces pointés et  $f : X \rightarrow Y$  pointée. Alors  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f)$  est  $h$ -coexacte.

▷ Par propriété universelle de la somme amalgamée, la donnée d'une application  $\varphi : \text{Cone}(f) \rightarrow Z$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 i_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 \text{Cone}(X) & & \text{Cone}(X) \cup_f Y \\
 & \searrow \psi & \swarrow \varphi \\
 & h & Z
 \end{array}$$

équivaut à la donnée de deux applications  $\psi : Y \rightarrow Z$  et  $h : \text{Cone}(X) \rightarrow Z$  telles que  $g = \varphi f_1$  et  $h = \varphi k$ , ce qui coïncide avec une homotopie de l'application constante à la composée  $gf$ . ■

On peut continuer un peu plus à droite grâce au foncteur  $\Sigma$ .

**Théorème. (*Suite de cofibres, suite de Puppe*)**

Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}_*$ , on a une suite  $h$ -coexacte longue

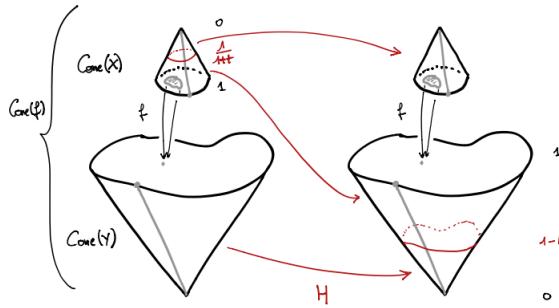
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma \text{Cone}(f) \xrightarrow{\Sigma p(f)} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 f_1} \Sigma^2 \text{Cone}(f) \longrightarrow \dots$$

qui continue à l'infini et où  $p(f) : \text{Cone}(f) \longrightarrow \text{Cone}(f)/f_1(Y) \simeq \Sigma X$  est l'application canonique, dite *suite de cofibre* ou *suite de Puppe* associée à  $f$ .

▷ Il est clair en itrant deux fois la proposition précédente que la suite  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1}$   $\text{Cone}(f) \xrightarrow{f_2} \text{Cone}(f_1) \xrightarrow{f_3} \text{Cone}(f_2)$  est  $h$ -coexacte. On peut alors montrer que, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_1} & \text{Cone}(Y) \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow j_1 \\
 \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) \\
 \downarrow p & & \downarrow p(f) & & \downarrow q(f) \\
 \text{Cone}(X)/i_1(X) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cone}(f)/f_1(Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cone}(f_1)/j_1(\text{Cone}(Y)) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \Sigma X & & \Sigma X & & \Sigma X,
 \end{array}$$

les flèches du bas sont des homéomorphismes avec la suspension de  $X$ , les deux carrés du haut étant les sommes amalgamées définissant les cônes d'application respectifs.



En outre,  $q(f)$  est une équivalence d'homotopie, ce qui est laissé au lecteur.

Notons  $\tau : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  l'automorphisme renversant l'orientation du cône. Alors dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) & \xrightarrow{f_3} & \text{Cone}(f_2) \\
 & \searrow p(f) & \downarrow q(f) & \nearrow p(f_1) & \downarrow q(f_1) \\
 & & \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f \circ \tau} & \Sigma Y
 \end{array}$$

non commutatif ci-dessus, les triangles latéraux commutent et le triangle centrale est homotopiquement commutatif.

En particulier,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$  est  $h$ -coexacte (pourquoi?).

Puisqu'on a un homéomorphisme  $\chi : \text{Cone}(\Sigma f) \xrightarrow{\sim} \Sigma \text{Cone}(f)$  tel que  $\chi \circ (\Sigma f)_1 = \Sigma f_1$ , on peut conclure. ■

### À l'origine des catégories triangulées, les suites de cofibre

C'est cette construction dont l'abstraction a donné naissance au concept de catégorie triangulée, développées par Dieter PUPPE et Jean-Louis VERDIER.

### Corollaire

On a en particulier pour tous espaces pointés  $X, Y, Z$  et application pointée  $f : X \rightarrow Y$ , une suite

$$\begin{array}{ccccc}
 [X, Z]_* & \xleftarrow{f^*} & [Y, Z]_* & \xleftarrow{f_1^*} & [\text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow p(f)^* & \\
 [\Sigma X, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma f)^*} & [\Sigma Y, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma f_1)^*} & [\Sigma \text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow \Sigma p(f)^* & \\
 [\Sigma^2 X, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma^2 f)^*} & [\Sigma^2 Y, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma^2 f_1)^*} & [\Sigma^2 \text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow \Sigma^2 p(f)^* & \\
 & \dots & & &
 \end{array}$$

dont la première ligne est exacte dans  $\text{Ens}_*$ , la deuxième dans  $\text{Grp}_*$ , et les toutes les suivantes dans  $\text{Ab}_*$ .

En dualisant, on obtient des constructions à partir de  $\Omega \dashv \Sigma$ .

Rien ne dit que la suite canonique  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Y(f^{-1}(y_0), x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$  est  $h$ -exacte : raffinons donc la construction de gauche.

### Définition. (*Chemin d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée, donc dans  $\text{Top}_*$ . Le *chemin* de  $f$  est défini par

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Path}(f) & \xrightarrow{t} & \text{Path}(X) \\
 f^1 \downarrow & & \downarrow e_1 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

où  $\text{Path}(f) := X \times_f \text{Path}(Y) = \{(x, \varphi : [0,1] \rightarrow Y) \in X \times \text{Path}(Y) \mid \varphi(0) = y_0, f(x) = \varphi(1)\}$ , de point base  $(x_0, \text{cste}_{y_0})$  où  $x_0, y_0$  sont les points bases respectifs de  $X$  et  $Y$ .

**Mnémonik :** le chemin de  $f$  est « l'éventail » de  $X$  par  $Y$  le long des chemins tracés jusqu'au point base de  $Y$

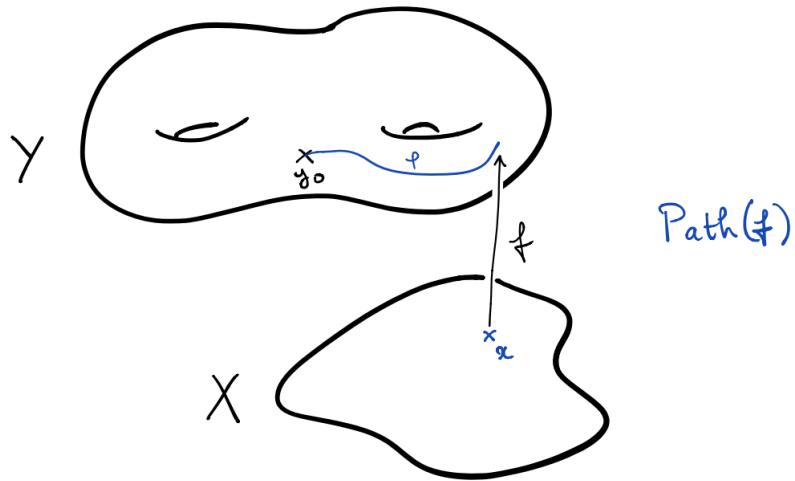
### Remarques.

1. L'application  $f^1 : \text{Path}(f) \longrightarrow X$  est une application quotient.
2.  $f \circ f^1$  est homotope à 0.

De même :

### Proposition. (*Suite fibrée*)

Soient  $X, Y$  deux espaces pointés et  $f : X \rightarrow Y$  pointée. Alors  $\text{Path}(f) \xrightarrow{f^1} X \xrightarrow{f} Y$  est  $h$ -exacte.

FIGURE 6.1.13 : *Chemin d'une application.* —

▷ Par propriété universelle du produit fibré, la donnée d'une application  $\varphi : Z \rightarrow \text{Path}(f)$

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \text{Path}(f) & \longrightarrow & \text{Path}(X) \\
 & \searrow h & \downarrow f^1 & & \downarrow e_1 \\
 & & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y
 \end{array}$$

équivaut à la donnée de deux applications  $g : Z \rightarrow X$  et  $h : Z \rightarrow \text{Path}(f)$  telles que  $g = f^1\psi$  et  $h = g\psi$ , ce qui coïncide avec une homotopie de l'application constante à la composée  $fg$ . ■

Et :

**Théorème. (*Suite de fibres, cosuite de Puppe*)**

Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}_*$ , on a une suite  $h$ -exacte longue

$$Y \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f^1} \text{Path}(f) \xleftarrow{i(f)} \Omega Y \xleftarrow{\Omega f} \Omega X \xleftarrow{\Omega f^1} \Omega \text{Path}(f) \xleftarrow{\Omega i(f)} \Omega^2 Y \xleftarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 X \xleftarrow{\Omega^2 f^1} \Omega^2 \text{Path}(f) \xleftarrow{\dots}$$

qui continue à l'infini et où  $i(f) : \Omega Y \rightarrow \text{Path}(f)$  est l'application qui envoie un lacet  $\varphi$  sur  $(x_0, \varphi)$ , dite *suite de fibre* ou *cosuite de Puppe* associée à  $f$ .

▷ La preuve est duale de la précédente. ■

**Corollaire**

On a en particulier pour tous espaces pointés  $X, Y, Z$  et application pointée  $f : X \rightarrow Y$ , une suite

$$\begin{array}{ccccc}
 [Z, Y]_* & \xleftarrow{f_*} & [Z, X]_* & \xleftarrow{f_1}_* & [Z, \text{Path}(f)]_* \\
 & & i(f)_* \nearrow & & \\
 [Z, \Omega Y]_* & \xleftarrow{(\Omega f)^*} & [Z, \Omega X]_* & \xleftarrow{(\Omega f_1)^*} & [Z, \Omega \text{Path}(f)]_* \\
 & & \Omega i(f)_* \nearrow & & \\
 [Z, \Omega^2 Y]_* & \xleftarrow{(\Omega^2 f)^*} & [Z, \Omega^2 X]_* & \xleftarrow{(\Omega^2 f_1)^*} & [Z, \Omega^2 \text{Path}]_* \\
 & & \Omega^2 i(f)_* \nearrow & & \\
 & \dots & & &
 \end{array}$$

dont la première ligne est exacte dans  $\text{Ens}_*$ , la deuxième dans  $\text{Grp}_*$ , et les toutes les suivantes dans  $\text{Ab}_*$ .

**Exercice 7 (Compatibilité entre la suite de fibres et la suite de cofibres)**

1. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée entre espaces pointés. Montrer que  $(x, \varphi) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2(1-t)) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$  définit une application pointée  $\tilde{\eta} : \text{Path}(f) \rightarrow \Omega \text{Cone}(f)$ .
2. Décrire l'application adjointe  $\tilde{\varepsilon} : \Sigma \text{Path}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)$ .
3. Montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Sigma \Omega \text{Path}(f) & \xrightarrow{\Sigma \Omega f^1} & \Sigma \Omega X & \xrightarrow{\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega Y & \xrightarrow{\Sigma i(f)} & \Sigma \text{Path}(f) \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma X \\
 \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \tilde{\varepsilon} \\
 \Omega Y & \xrightarrow{i(f)} & \text{Path}(f) & \xrightarrow{f^1} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \\
 \parallel & & \downarrow \tilde{\eta} & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\
 \Omega Y & \xrightarrow{i(f)} & \Omega \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f^1} & \Omega \Sigma X & \xrightarrow{f} & \Omega \Sigma Y \xrightarrow{f_1} \Omega \Sigma \text{Cone}(f)
 \end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

**6.1.6 Fibrations et cofibrations**

On introduit deux classes d'applications, les cofibrations et les fibrations, qui sont les objets fondamentaux de la théorie de l'homotopie. Toute application continue est homotope à une cofibration et à une fibration et la suite de cofibres ou de fibres s'applique efficacement à leur espèce respective. Elles sont au cœur du traitement axiomatiquement moderne de l'algèbre homotopique.

### 6.1.6.1 Cofibrations ( $\equiv$ paires de Borsuk)

En théorie des ensembles, à partir d'une application  $f : X \rightarrow Y$ , on peut la factoriser sous la forme  $X \longrightarrow \text{Im}(f) \hookrightarrow Y$ . En topologie :

**Définition.** (*Cylindre d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application, dans Top. Le *cylindre* de  $f$  est définie par

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \iota_0 \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

où donc  $\text{Cyl}(f) = \frac{(X \times I) \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}$ .

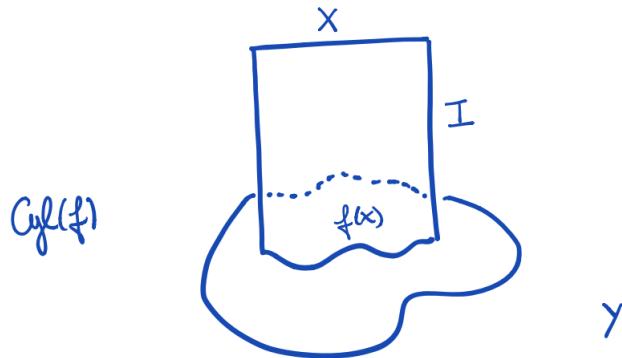


FIGURE 6.1.14 : *Cylindre d'une application.* —



Avec le cylindre, on est de retour dans le monde des espaces topologiques non nécessairement pointés.

### Proposition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On peut factoriser  $X \xrightarrow[i_1]{\quad} \text{Cyl}(X) \xrightarrow[f]{P} Y$

où  $i_1 : X \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$  est le premier plongement canonique et  $P$  est la rétraction canonique du deuxième plongement canonique  $f_0 : Y \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$  et dans ce cas  $P$  est une application quotient et équivalence d'homotopie. De plus,  $Y$  est un rétract par déformation forte du cylindre de  $f$ .

▷ On définit  $P$  par  $y \mapsto y$  et  $(x,t) \mapsto f(x)$ . C'est une rétraction puisqu'on a  $Pf_0 = id_Y$ . Montrons que  $f_0p \sim id_{Cyl(f)}$ . On pose  $H : Cyl(f) \times I \rightarrow Cyl(f)$  définie par  $(y,t) \mapsto y$  pour  $y \in Y$  et  $(x,s,t) \mapsto (x,st)$ . Elle est bien définie, continue et envoie  $f_0P$  au temps nul à  $id$  au dernier instant, donc  $P$  est un rétract par déformation, en particulier une équivalence d'homotopie. On observe qu'il est fort. Clairement,  $Pi_1 = f$ . Par sa définition, on voit aussi sans détour que  $P$  est une application quotient. ■

Cette propriété du cylindre est remarquable, mais cherchons-en une propriété carrément universelle.

### Reformulation pratique. (*Propriété d'extension des homotopies*)

Une application (non nécessairement un plongement, ni même injective)  $i : A \rightarrow X$  satisfait la *propriété d'extension des homotopies relativement à  $Z$*  si :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_0^A} & A \times I \\ i \downarrow & & \downarrow i \times id_I \\ X & \xrightarrow{\iota_0^X} & X \times I \\ & \searrow g & \swarrow H \\ & Z & \end{array}$$

pour toute  $g : X \rightarrow Z$ ,  $h : A \times I \rightarrow Z$ . Autrement dit, si  $hi_0^A = gi$ , il existe  $H : X \times I \rightarrow Z$  telle que  $h = H \circ (i \times id)$  et  $g = H \circ \iota_0^X$ .



On n'impose pas que  $H$  soit unique...  $(X \times I, H)$  n'est pas la somme amalgamée  $(A \times I) \sqcup_A X$  !

### Fait. (*Pas incroyable mais vrai sur la PEH des sommes amalgamées*)

Toute application continue  $A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $(A \times I) \sqcup_A X$ .

### Proposition. (*Caractérisation diagrammatique duale de la PEH*)

Une application continue  $i : A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $Z$  si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

i.e. pour toute  $\check{h} : A \rightarrow Z^I$  et toute  $g : X \rightarrow Z$  telles que  $e_0\check{h} = gi$ , il existe  $\check{H} : X \rightarrow Z^I$  telle que  $\check{h} = \check{H}i$  et  $g = e_0\check{H}$ .

▷ Découle de l'adjonction de curryfication. ■

On retrouve des termes déjà plus ou moins employés :

### Définition. (*Cofibration, paire de Borsuk*)

Une *cofibration*  $i : A \rightarrow X$  est une application continue qui satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à tout espace topologique. On dit aussi tout simplement qu'elle *satisfait la propriété d'extension des homotopies (PEH)*. On note parfois  $i : A \rightarrowtail B$ .

On dit que  $(A, X)$  implicitement munie de  $i$  est une *bonne paire topologique* ou encore une *paire de Borsuk*. Une paire de Borsuk est *stricte* si  $i(A)$  est fermée dans  $X$ .

### Exemples. (*Cofibrations*)

1. Les homéomorphismes sont des cofibrations.

Il suffit de poser  $\check{H} = \check{h}i^{-1}$  dans la caractérisation diagrammatique. On a donc  $\check{h} = \check{H}i$  et de plus  $g = e_0\check{h}i^{-1} = e_0\check{H}$ .

2.  $S^{n-1} \rightarrowtail B^n, \partial I^n \rightarrowtail I^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On l'a vu dans le cours élémentaire de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

### Propriété. (*Composée de cofibrations*)

Les cofibrations sont stables par composition.

▷ Soit  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  une suite de cofibrations. Utilisons caractérisation duale de la PEH. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow \check{H}_1 & \downarrow e_0 \\ B & \xrightarrow{\check{H}} & Z \\ j \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

montre que  $ji$  a la PEH par rapport à tout espace  $Z$ . ■

### Propriété. (*Somme de cofibrations*)

Les cofibrations sont stables par coproduit fini.

▷ Soient  $i : A \rightarrow X$  et  $j : B \rightarrow Y$  des cofibrations. Montrons que  $A \sqcup B \xrightarrow{i \sqcup j} X \sqcup Y$  est une cofibration. C'est clair, car on a

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup B & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \sqcup j \downarrow & \nearrow \check{H}_1 \sqcup \check{H}_2 & \downarrow e_0 \\ X \sqcup Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

où  $\check{H}_1$  est donnée par le diagramme pour  $i$  avec  $h|_A$  et  $g|_X$ , et symétriquement pour  $\check{H}_2$ . ■

### Propriété. (*Pushout de cofibrations*)

Si  $i : A \rightarrow B$  est une cofibration, alors  $j : B \rightarrow X \sqcup_f B$  est une cofibration.

▷ Par hypothèse,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \longrightarrow & X \sqcup_f B \\ & \searrow \check{H}_1 & \swarrow H \\ & & Z^I \end{array}$$

et montrons

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & & \downarrow \check{H}_1 & \downarrow \psi & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \sqcup_f B & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

où  $g$  satisfait  $g\varphi = g\varphi$ , ce qui ne pose guère de problème, et  $g\psi = e_0\check{h}$ . Par propriété universelle du pushout, l'application unique universelle satisfait cela. On doit juste prouver que  $e_0H$  satisfait ces deux égalités. Alors  $g\varphi = e_0\check{H}_1 = e_0\check{H}\varphi$  et  $e_0\check{H}$  si  $= e_0\check{h}$ , car  $\check{h} = \check{H}\psi$ . ■

**Mnémonik :** les cofibrations sont préservées par changement de cobase.

Remarquons que :



La cofibration-teté n'est pas une notion homotopique ! Si  $(X, x_0)$  est contractile,  $id_X$  est une cofibration mais  $cste_{x_0}$  non.

Soit  $i : A \rightarrow X$  une cofibration. Examinons le cas du cylindre de  $X$  en tant qu'espace relatif. On a

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t_0^A} & A \times I \\ i \downarrow & & \downarrow i \times id_I \\ X & \xrightarrow{t_0^X} & X \times I \\ & \searrow i_1 & \swarrow r \\ & & Cyl(i) \end{array}$$

et  $i : A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $Cyl(i)$ , donc il existe  $r : X \times I \rightarrow Cyl(I)$  telle que  $rs = id_{Cyl(i)}$  par propriété de la somme amalgamée. Ceci se généralise en fait :

**Propriété. (*Caractérisation des cofibrations*)**

Soit  $i : A \rightarrow X$  une application continue entre espaces topologiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $i$  est une cofibration, i.e. satisfait la PEH ;
- (ii)  $i$  satisfait la PEH relativement à  $\text{Cyl}(i)$  ;
- (iii) l'application canonique de  $\text{Cyl}(i) \xrightarrow{s} X \times I$  admet une rétraction.

▷ Par ce qui précède, il reste à montrer (iii)  $\implies$  (i). Pour tout  $Z$ , soit  $g : X \rightarrow Z$ , soit  $h : A \times I \rightarrow Z$  telles que  $gi = hi_0^A$ . Alors

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 i \downarrow & & \downarrow i \times \text{id}_I \\
 X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\
 & \nearrow i_0 & \swarrow r \\
 & & \exists s \\
 & & \nearrow \text{!}s & \searrow H \\
 & & \text{Cyl}(i) & \\
 & \nearrow g & \searrow \Phi & \\
 & & Z &
 \end{array}$$

en reprenant le diagramme précédent, commute. D'où la conclusion. ■

On a la propriété justifiant la notation des cofibrations :

**Proposition. (*Les cofibrations sont des plongements*)**

Soit  $i : A \hookrightarrow X$  une cofibration. Alors  $i$  est un plongement.

▷ Appliquons la PEH respectivement à  $\text{Cyl}(i)$  et ses applications canoniques. On obtient alors par

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\check{h}} & \text{Cyl}(i)^I \\
 i \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow e_0 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(i)
 \end{array}$$

une application  $\check{H}$  vérifiant toutes ces commutations. L'application  $\lambda : A \hookrightarrow \text{Cyl}(i)$  définie par  $\lambda(a)(\frac{1}{2})$  est un plongement. L'application  $\Lambda : X \rightarrow \text{Cyl}(i)$  définie par  $x \mapsto \check{H}(x)(\frac{1}{2})$  satisfait  $\Lambda i = \lambda$ , donc  $i$  est injective. En notant  $\tilde{i} : A \rightarrow i(A)$ ,  $\Lambda : A \rightarrow \lambda(A)$  et  $\tilde{\lambda} : i(A) \rightarrow \lambda(A)$ , on obtient  $\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{\lambda}\tilde{i} = id_A$ . Ceci montre que l'inverse de  $\tilde{i}$  est la composée  $\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{\lambda}$ , qui est continue, donc un homéomorphisme sur son image.

$X \times I$  est séparé, car  $X$  l'est. Puisque  $i$  est une cofibration, la section  $s : \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$  admet une rétraction  $r : X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$  par la proposition précédente. De plus,  $sr$  et l'identité de  $X \times I$  coïncident sur l'image de  $s$ , qui est donc fermée dans  $X \times I$  en tant que lieu de coïncidence de fonctions continues. Alors  $i(A)$  est fermé dans  $X$ , car pour tout point  $x \in i(A)$ , le point  $(x, \frac{1}{2}) \notin s(\text{Cyl}(i))$  et un voisinage ouvert de ce point de la forme  $U \times V$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $V$  un ouvert de  $I$ , inclus

dans le complémentaire de  $s(\text{Cyl}(i))$  dans  $X \times I$ , convient. ■

### Fait

Si  $(A, X)$  est une paire de Borsuk, elle est stricte dès que  $X$  est séparé.

On peut donc naturellement se demander quels plongements, *i.e.* injections canoniquement associées à une inclusion  $(X, A)$ , sont des cofibrations. On retrouve un énoncé bien familier :

### Propriété

Soit  $A \subseteq X$  une paire topologique. Elle est bonne si et seulement si l'inclusion canonique  $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$  admet un rétract.

▷ Dans un sens,

$$\begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ (A \times I) \cup (X \times \{0\}) & \xleftarrow{\psi} & \text{Cyl}(i) & \xleftarrow[r]{s} & X \times I \end{array}$$

donne  $\psi r$  rétract de  $S$ .

Réciproquement, quand  $A$  est fermée,  $h \cup g$  est continue par recollement sur des parties fermées. Le cas général est traité par STRØM, *Notes on cofibrations* clairement. ■

Continuons.



Soit  $A \subseteq X$  donnée par  $i : A \hookrightarrow X$ . Alors  $\text{Cyl}(i) = \frac{A \times I \sqcup X}{(a, 0) \sim i(a)} \simeq (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \subseteq X \times I$  par une bijection ensembliste. Seulement, ce n'est pas un homéomorphisme ! Lorsque le quotient est muni de la topologie quotient et la paire de la topologie induite, seulement l'application de gauche à droite est continue.

Raffinons.

### Théorème. (*Factorisation canonique en cofibration par le cylindre*)

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  se factorise canoniquement par le cylindre en :

$$X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow[P]{} Y$$

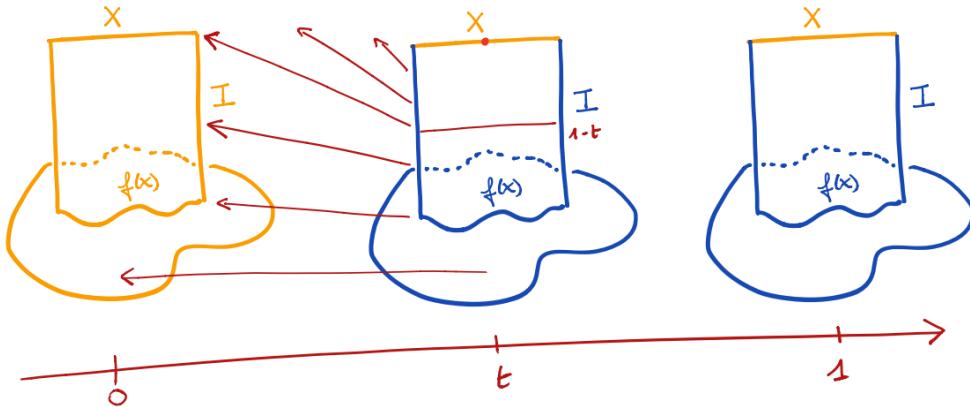
où  $i_1$  est une cofibration et  $P$  est une équivalence d'homotopie. En particulier,  $[f] = [id_1]$  dont  $h\text{Top}$ .

Autrement dit, toute application continue est une cofibration en théorie de l'homotopie.

▷ Il est clair que  $\text{Cyl}(f)$  est homotopiquement équivalent à  $Y$ . Notons  $X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f)$  le plongement. Il suffit de montrer que le plongement  $X \times I \cup \text{Cyl}(f) \times \{0\} \hookrightarrow \text{Cyl}(f) \times I$  admet un

rétract  $\rho$ . On pose

$$\begin{cases} \text{Cyl}(f) \times I & \rightarrow X \times I \cup \text{Cyl}(f) \times \{0\} \\ (y,t) & \mapsto (y,0) \\ (x,s,t) & \mapsto \begin{cases} (x, \frac{s}{1-t}, 0) \in \text{Cyl}(f) \times \{0\} \text{ pour } 0 \leq s \leq 1-t \\ (x, s - 1 + t) \in X \times I \text{ pour } 1-t \leq s \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$



qui fait le job. ■

#### 6.1.6.2 Fibrations ( $\cong$ revêtements)

Dualisons tout cela, afin de définir les fibrations = cocofibrations.

**Définition.** (*Espace chemin d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application, dans Top. L'*espace chemin* de  $f$  est définie par

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y^I \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où donc  $\text{Path}(f) = \{(x, \varphi) \in X \times Y^I \mid f(x) = \varphi(0)\}$ .

*Remarque.* Là encore, l'espace chemin vit dans le monde des espaces topologiques non nécessairement pointés.

#### Proposition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On peut factoriser  $X \xrightarrow{i} \text{Path}(f) \xrightarrow[p]{f} Y$

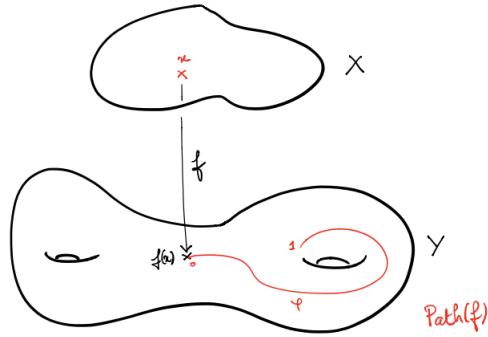


FIGURE 6.1.15 : Espace chemin d'une application. —

où  $i : X \rightarrow \text{Path}(f)$  est la première projection canonique et  $p$  est définie par  $(x, \varphi) \mapsto \varphi(1)$  et dans ce cas  $i$  est une rétraction par déformation forte et équivalence d'homotopie. Donc,  $X$  est un rétract par déformatin de l'espace chemin de  $f$ .

▷ On définit  $i$  par  $x \mapsto (x, \text{cste}_{f(x)})$ . Soit  $\rho : \text{Path}(f) \longrightarrow X$ . On a  $\rho \circ i(x) = \rho(x, \text{cste}_{f(x)})$ .  

$$(x, \varphi) \longmapsto x$$

Montrons que  $i\rho \sim id_{\text{Path}(f)}$ . On pose  $H : \text{Path}(f) \times I \rightarrow \text{Path}(f)$  définie par  $(x, \varphi, t) \mapsto (x, s \mapsto \varphi(st))$ . Elle est bien définie, continue et puisque  $i\rho(x, \varphi) = i(x) = (x, \text{cste}_{f(x)})$ , elle envoie  $(x, \text{cste}_{f(x)})$  au temps nul à  $(x, \varphi) = id_{\text{Path}(f)}$  au dernier instant. ■

### Reformulation pratique. (*Propriété de relèvement des homotopies*)

Une application (non nécessairement une application quotient, ni même surjective)  $p : E \rightarrow B$  satisfait la *propriété de relèvement des homotopies relativement à Z* si :

$$\begin{array}{ccccc}
 & Z & & E^I & E \\
 & \searrow \check{H} & \nearrow g & \downarrow p_* & \downarrow p \\
 & \check{h} & & E^I & E \\
 & \searrow & \nearrow e_0 & \downarrow & \downarrow \\
 & & B^I & \xrightarrow{e_0^B} & B
 \end{array}$$

pour toute  $g : Z \rightarrow E$ ,  $h : Z \rightarrow B^I$ . Autrement dit, si  $pg = e_0^B \check{h}$ , il existe  $\check{H} : Z \rightarrow E^I$  telle que  $p_* \check{H} = \check{h}$  et  $e_0^E \check{H} = g$ .



On n'impose pas que  $\check{H}$  soit unique...  $(E^I, \check{H})$  n'est pas le produit fibré  $E \times_B B^I$ !

Fait. (*Pas incroyable mais vrai sur la PRH des produits fibrés*)

Toute application continue  $E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $E \times_B B^I$ .

### Proposition

Une application continue  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $Z$  si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & E \\ i_0^Z \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

i.e. pour toute  $g : Z \rightarrow E$  et toute  $h : Z \times I \rightarrow BZ$  telles que  $pg = hi_0^Z$ , il existe  $H : Z \times I \rightarrow E$  telle que  $pH = h$  et  $Hi_0^Z = g$ .

### Définition. (*Fibration, fibration de Serre*)

Une *fibration (de Hurewicz)*  $p : E \rightarrow B$  est une application continue qui satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à tout espace topologique. On dit aussi qu'elle *satisfait la propriété de relèvement des homotopies (PRH)*. On note parfois  $p : E \twoheadrightarrow B$ .

On dit que  $p : E \rightarrow B$  est une *fibration de Serre* si elle satisfait la PRH relativement à tout  $I^n \simeq B^n$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ .

### Exemples. (*Fibrations*)

1. Les homéomorphismes sont des fibrations.
2. (*Fibrations triviales*) Les projections  $B \times I \xrightarrow{\text{pr}_1} B$  sont des fibrations.
3.  $E \twoheadrightarrow \{\star\}$  est une fibration.

On prend

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{g} & E^I & \xrightarrow{e_0} & E \\ \searrow H & & \downarrow p_* & & \downarrow p \\ & \searrow \check{h} & \{\text{cste}_*\} & \longrightarrow & \{\star\} \end{array}$$

où  $H(z) = \text{cste}_{g(z)}$  pour tout  $z \in Z$ .

### Propriété. (*Composée de fibrations*)

Les fibrations sont stables par composition.

**Propriété. (*Produit de fibrations*)**

Les fibrations sont stables par produit fini.

**Propriété. (*Pullback de fibrations*)**

Si  $i : A \rightarrow B$  est une fibration, alors  $j : X \times_f A \rightarrow B$  est une fibration.

▷ Tout cela par dualité. ■

**Mnémonik :** les fibrations sont préservées par changement de base.

**Proposition. (*Les fibrations sont des surjections*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration où **B est connexe par arcs** .. Alors  $i$  est une **surjection**.

▷ En exercices. ■

**Exercice 8**

Une fibration est-elle toujours une application quotient ?

En corollaire :



La fibration-teté n'est pas une notion homotopique ! Si  $(X, x_0)$  est contractile,  $id_X$  est une fibration mais  $cste_{x_0}$  non.

**Lemme. (*Caractérisation des fibrations par section du chemin*)**

Une application continue  $p : E \rightarrow B$  est une fibration si et seulement si l'application  $\sigma$  qui à  $\psi : I \rightarrow E$  fait correspondre  $(\psi(0), p\psi)$  admet une section  $\rho$  telle que  $\rho\sigma = id_{Path(p)}$ , autrement dit, s'il existe un moyen continu de relever  $\varphi$  en  $\psi : I \rightarrow E$  tel que  $\psi(0) = x$ .

▷ Prenons  $(x, \varphi) \in Path(p)$ ,  $p(x) \in B$ . Soit  $b \in B$  quelconque. Puisque  $B$  est connexe par arcs, il existe  $\gamma : I \rightarrow B$  tel que  $\gamma(0) = p(x)$  et  $\gamma(1) = b$ . Considérons  $\psi : I \rightarrow E$  définie par  $\sigma(x, \gamma)$ , de sorte que  $p(\psi(1)) = \gamma(1) = b$  et  $\rho(\psi) = (\psi(0), p\psi) = \gamma$ . ■

Examinons le cas de l'espace chemin. On a

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{Path}(p) & & & \\
 & \swarrow g \quad \nearrow \sigma & & & \\
 E^I & \xrightarrow{e_0^E} & E & & \\
 \downarrow p_* & & \downarrow p & & \\
 B^I & \xrightarrow{e_0^B} & B & & 
 \end{array}$$

$\exists! \rho$

et  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $\text{Path}(p)$ , donc il existe  $\sigma : \text{Path}(p) \rightarrow E^I$  telle que  $\rho\sigma = id_{E^I}$  par propriété du produit fibré. Ceci se généralise en fait :

### Propriété. (*Caractérisation des fibrations*)

Soit  $p : E \rightarrow B$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $p$  est une fibration, i.e. satisfait la PRH ;
- (ii)  $p$  satisfait la PRH relativement à  $\text{Path}(p)$  ;
- (iii) l'application canonique de  $E^I \xrightarrow{\rho} \text{Path}(p)$  admet une section.

▷ Par ce qui précède, il reste à montrer (iii)  $\implies$  (i). Pour tout  $Z$ , soit [...]

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{\Psi} & \text{Path}\check{H}(p) & \xrightarrow{g} & E^I \\
 \searrow \check{h} & \nearrow \exists! \rho & \swarrow \sigma & \nearrow e_0^E & \downarrow p_* \\
 & & E^I & \xrightarrow{e_0^E} & E \\
 & & \downarrow p_* & & \downarrow p \\
 & & B^I & \xrightarrow{e_0^B} & B
 \end{array}$$

en reprenant le diagramme précédent. ■

### Théorème. (*Factorisation canonique en fibration par l'espace chemin*)

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  se factorise canoniquement par l'espace chemin en :

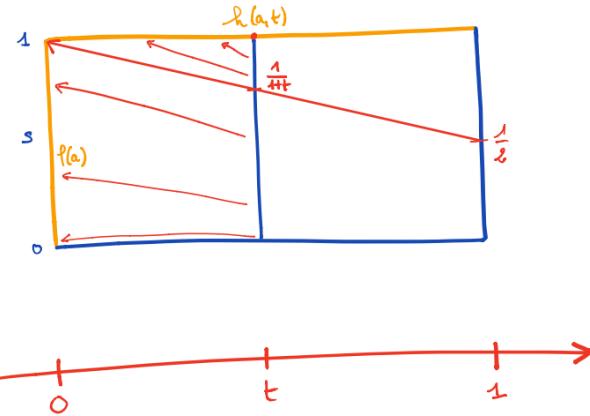
$$X \xrightarrow{I} \text{Path}(f) \xrightarrow{p} Y$$

où  $p$  est une fibration et  $I$  est une équivalence d'homotopie. En particulier,  $[f] = [p]$  dont  $h\text{Top}$ .

Autrement dit, toute application continue est une fibration en théorie de l'homotopie.

▷ La donnée de  $g$  s'écrit  $z \mapsto (x_z, \varphi_z : I \rightarrow Y)$  avec  $x_z \in X$ ,  $f(x_z) = \varphi_z(0)$  et  $h(z, t) \in Y$ ,  $h(z, 0) = \varphi_z(1)$ . La donnée de  $H$  est celle de  $(z, t) \mapsto (x_{z,t} = x_z \in X, \varphi_{z,t} : I \rightarrow Y)$  telle que  $f(x_{z,t}) = \varphi_{z,t}(0)$ , d'autre part  $(x_{z,0}, \varphi_{z,0}) = (x_z, \varphi_z)$  (commutation dans le triangle supérieur) et encore  $h(z, t) = \varphi_{z,t}(1)$  (commutation dans le triangle inférieur). L'application

$$\varphi_{z,t}(s) = \begin{cases} \varphi_z((1+t)s) & \text{pour } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t} \\ h(z, (1+t)s - 1) & \text{pour } \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



fait le job. ■

La notion de cofibration n'est pas autoduale. En particulier, on n'a pas de description exhaustive des fibrations. Voyons comment en construire.

### Proposition. (*Stabilité des fibrations par changement de base*)

Pour toute fibration  $p : E \rightarrow B$  et toute application continue  $f : A \rightarrow B$ , l'application  $q : B \times_f A \rightarrow B$  obtenue par

$$\begin{array}{ccc} E \times_f A & \longrightarrow & E \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

est une fibration.

### Proposition. (*Passage des cofibrations aux fibrations*)

1. Soit  $i : A \rightarrow X$  une cofibration. Alors pour tout espace  $Z$ ,  $i^* : Z^X \rightarrow Z^A$  est une fibration.
2. Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration. Alors pour tout espace  $Z$ ,  $p_* : E^Z \rightarrow B^Z$  est une fibration.

▷ Successivement :

1. Faisons commuter

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Z^X \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow i^* \\ W \times I & \xrightarrow{h} & Z^A \end{array}$$

grâce à  $H$ . Sa donnée sur  $W \times I \rightarrow Z^X$  équivaut à la donnée de  $\tilde{H} : W \times I \times X \rightarrow Z$  telle que  $\tilde{H}(w, 0, x) = g_z(x)$  et  $\tilde{H}(w, t, i(a)) = h_{(w,t)}(a)$ . On veut donc étendre une application de  $(W \times \{0\} \times X) \cup (W \times I \times A) \simeq W \cup (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ . Or  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration si et seulement si l'inclusion  $(A \times I) \cup (X \times \{0\}) \hookrightarrow X \times I$  admet un rétract. On considère  $\tilde{H} : W \times I \times X \simeq W \times X \times I \rightarrow W \times (A \times I) \cup (X \times \{0\})$  de sorte que  $(W \times I \times A) \cup (W \times \{0\} \times X) \xrightarrow{\tilde{h} \cup \tilde{g}} Z$  est bien définie par commutativité du carré.

2. C'est plus simple. En utilisant la définition duale,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\check{g}} & E^Z \\ i_0 \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow p_* \\ W \times I & \xrightarrow{\check{h}} & B^Z \end{array}$$

équivaut à

$$\begin{array}{ccc} W \times Z & \xrightarrow{g} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ W \times I \times Z & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

par adjonction de curryfication réciproque. ■

## Exemples

1. (*Fibration de double évaluation*) La cofibration  $i : \partial I \rightarrow I$  donne pour tout espace  $Z$  une fibration  $i^* : Z^I \rightarrow Z^{\partial I} \simeq Z \times Z$  donnée par  $\varphi \mapsto (\varphi(0), \varphi(1))$ .
2. (*L'évaluation est une fibration*) Pour tout espace  $Y$ , l'évaluation  $e_t : Y^I \rightarrow Y$   
 $\varphi \mapsto \varphi(t)$  est une fibration pour tout  $t \in I$ , venant de la cofibration  $\{\star\} \rightarrow I$ .
3. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $pr_1 : \text{Path}(f) \rightarrow X$  est une fibration par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & Y^I \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On se rend compte qu'un revêtement est un cas particulier de fibration, sans grande surprise, mais ça reste chouette.

**Proposition.** (*Revêtements et fibrations*)

Tout revêtement  $p : E \rightarrow B$  est une fibration.

De plus, la section  $\sigma : \text{Path}(p) \rightarrow E^I$  de  $(x, \varphi) \mapsto x$ , donnée par  $(x, \varphi) \mapsto$  l'unique chemin relevé de  $\varphi$ , est unique par propriété universelle des revêtements.

▷ Pour tout  $t \in I$ , par revêtement, il existe un ouvert  $U_{\varphi(t)}$  satisfaisant la propriété des revêtements. ■

Plus généralement, un fibré, d'ailleurs aussi appelé fibration dans la littérature, est une fibration.

**Théorème**

Tout fibré de base paracompacte est une fibration. De plus, sa fibre est constante.

**Mnémonik :** revêtements  $\subseteq_{\text{fibre discrète}}$  fibrés  $\subseteq_{\text{fibre constante}}$  fibration  $\subseteq$  fibration de Serre.

On réunit donc la propriété :

**Fait.** (*Équivalence d'homotopie des fibres*)

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration. Si  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ ,  $F_b$  est homotopiquement équivalent à  $F_{b'}$ .

On considère

$$\begin{array}{ccc} F_b & \xrightarrow{\quad} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ F_b \times I & \xrightarrow{\gamma_0 pr_2} & B \end{array}$$

$$(x, t) \longmapsto \gamma(t)$$

et soit  $\gamma : I \rightarrow B$ , avec  $\gamma(0) = b$  et  $\gamma(1) = b'$ . Soit  $f_{\gamma, H} : F_b \rightarrow F_{b'}$  définie par  $x \mapsto H(x, 1) \in F_{b'}$ . On montre :

**Lemme**

$H$  et  $K$  étant deux relèvements,  $f_{\gamma, H} \sim f_{\gamma, K}$ .

**Lemme**

Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont homotopes relativement à  $\partial I$ ,  $f_\gamma \sim f_{\gamma'}$  dans  $\text{Top}(F_b, F_{b'})$ .

**Lemme**

Étant donnés  $b \xrightarrow{\gamma} b' \xrightarrow{\chi} b''$ ,  $f_\chi \circ f_\gamma \sim f_{\chi \gamma}$ .

Par suite,  $F_b$  et  $F_{b'}$  sont homotopiquement équivalentes par  $f_\gamma$  et  $f_{\bar{\gamma}}$ . En effet,  $f_{\bar{\gamma}} \circ f_\gamma \sim f_{\bar{\gamma} \gamma} \sim f_{cste_b} \sim Id_{F_b}$ .

*Remarque.* On a presque une suite exacte courte  $F \rightarrow E \rightarrow B$  qui pourrait engendrer une suite exacte longue en homologie... Affaire à suivre.

Examinons la question de l'unicité des factorisations précédentes.

### Définition. (*Catégorie* $\text{Top}^A$ )

Soit  $A$  un espace topologique. On travaille dans la catégorie  $\text{Top}^A$  des *applications sous*  $A$  : ses objets sont les applications continues entre espaces topologiques  $i : A \rightarrow X$  de domaine  $A$  et ses morphismes sont, entre deux applications  $i : A \rightarrow X$  et  $j : A \rightarrow Y$  continues, les applications  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $fi = j$ .

### Définition. (*Homotopie sous* $A$ )

Soit  $A$  un espace topologique. Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $f, g \in \text{Top}^A$  à  $X$  et à  $Y$  respectivement. Une *homotopie sous*  $A$   $H : X \times I \rightarrow Y$  est une homotopie de  $f$  à  $g$  telle que toute  $H(-, t)$  est dans  $\text{Top}^A(i, j)$  pour tout  $t \in I$ , i.e.  $H(-, t)i = j$ . Ceci induit une relation d'équivalence dite d'homotopie sous  $A$ .

### Théorème

Soient  $A, X, Y$  trois espaces topologiques. Si  $i : A \rightarrow X, j : A \rightarrow Y, f : X \rightarrow Y$  sont respectivement deux cofibrations et une équivalente d'homotopie qui est  $\in \text{Top}^A(i, j)$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie sous  $A$ .

▷ Admis. ■

### Théorème. (*Unicité de la factorisation en cofibration*)

Il y a unicité de la factorisation canonique en cofibration à équivalence d'homotopie près, au sens suivant : si une application continue entre  $X$  et  $Y$  deux espaces s'écrit à la fois  $X \xrightarrow{j} Z \cong Y$  et  $X \xrightarrow{j'} Z' \cong Y$ , alors il existe une équivalence d'homotopie  $k : Z \cong Z'$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \nearrow j & \downarrow h & \searrow q & \\ X & & & & Y \\ & \searrow j' & \downarrow & \nearrow q' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

est commutatif dans le triangle de gauche et homotopiquement commutatif dans le triangle de droite.

▷ On utilise le corollaire précédent. ■

### Exercice 9

Dualiser pour obtenir l'unicité de la factorisation en fibration.

**Principe. (*Dualité d'Eckmann-Hilton*)**

- ★ L'adjonction de curryfication topologique pointée ;
- ★ l'autodualité de l'homotopie ;
- ★ l'adjonction  $\Sigma$ - $\Omega$  ;
- ★ les suites de Puppe exactes et coexactes ;
- ★ la dualité entre la propriété d'extension et la propriété de relèvement des homotopies, sont la manifestation d'une seule et même dualité, dite *d'Eckmann-Hilton*.

**6.1.7 Calcul des groupes d'homotopie**

Objets difficiles à calculer, les groupes d'homotopie n'en sont que d'autant plus excitants. Les deux outils les plus puissants pour tirer des informations sont, semblablement à l'homologie, les suites exactes longues de groupes qui sont cette fois-ci obtenues principalement à partir de fibrations.

**6.1.7.1 Homotopie relative**

À partir d'une inclusion  $A \hookrightarrow X$  venant d'une paire pointée d'espaces topologiques  $\star \in A \subseteq X$ , on a vu que la suite de Puppe

$$\dots \longrightarrow \Omega^2(\text{Path}(i)) \longrightarrow \Omega^2(A) \longrightarrow \Omega^2(X) \longrightarrow \Omega\text{Path}(i) \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \text{Path}(i) \longrightarrow A \longrightarrow X$$

est *h-exacte*. En l'appliquant à  $Z = S^0$ , *i.e.* en appliquant le foncteur « Hom » donné par  $[S^0, ?]$ , on obtient une suite

$$\dots \longrightarrow \pi_2(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

exacte longue dite *suite exacte longue (homotopique) associée à la paire  $(X, A)$* , à ne pas confondre avec la notion similaire en homologie singulière relative, dans Ens dès le départ, puis Grp à partir du quatrième terme, puis Ab à partir du septième terme. Le terme  $\text{Path}(i)$  est peu engageant pour calculer cette suite.

→ *Notation.* On note  $\text{Path}(X, A) = \text{Path}(i) = \{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = \star, \varphi(1) \in A\}$ .

*Remarque.* On remarque que pour  $A = \{\star\}$ ,  $\text{Path}(X, \{\star\}) = \Omega X$ .

**Définition. (*Groupes d'homotopie relatifs*)**

Soit  $\star \in A \subseteq X$  une paire topologique pointée. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit le *n-ième groupe d'homotopie relatif* de  $X$  à  $A$  ou de  $(X, A)$ , par

$$\pi_n(X, A) := \pi_{n-1}(\text{Path}(X, A)) = \pi_{n-1}(\text{Path}(i)) \simeq \pi_0(\Omega^{n-1}\text{Path}(X, A)).$$

*Remarque.* Les groupes d'homotopie relatifs sont dès groupes dès l'ordre 2 et des groupes abéliens dès l'ordre 3. Le groupe d'homotopie relatif d'ordre 1 n'est qu'un ensemble...

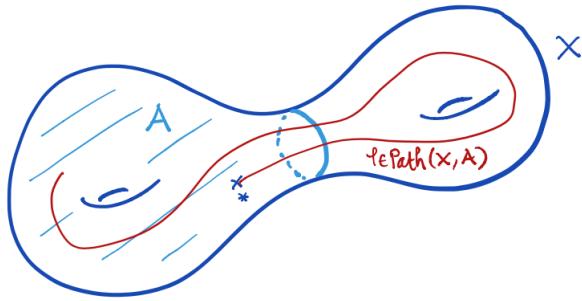


FIGURE 6.1.16 : Chemins relatifs sur un espace par rapport à une partie. —

**Fait. (*Homotopie relative à un point*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout espace pointé  $(X,x)$ ,  $\pi_n(X,x) = \pi_n(X,\{x\})$ .

Puisque  $\text{Path}(X,\{x\}) = \Omega X$ .

**Théorème. (*Suite exacte longue homotopique associée à une paire topologique*)**

Pour toute paire topologique  $(X,A)$  pointée, on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(X,A) \longrightarrow \pi_2(A) \xrightarrow{\pi_2(i)} \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(X,A) \longrightarrow \pi_1(A) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(X,A) \longrightarrow \pi_0(A) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X)$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ C'est tout dit. ■

On peut donner une forme plus agréable à cette suite grâce aux considérations suivantes.

**6.1.7.2 Homotopie d'une fibration****Théorème. (*Suite exacte longue homotopie associée à une fibration*)**

Soient  $E,B$  deux espaces pointés,  $B$  en  $b_0$ . Pour toute fibration de Serre  $p : E \rightarrow B$  de base connexe par arcs, de fibre le long de  $p$   $F = p^{-1}(b_0)$ , on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(F) \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \{\star\}$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ À venir. ■

**Corollaire. (*Homotopie d'un revêtement*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement de base connexe par arcs. Alors pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E)$ . Si de plus ce revêtement est pointé, alors c'est une équivalence faible d'homotopie.

▷ En effet, les fibres d'un revêtement sont discrètes d'où avec les notations précédentes  $\pi_n(F) = 0$  pour tout entier  $n \geq 1$  avec et les annulations tous les trois termes de la suite longue en homotopie donnent

$$0 \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow 0$$

dès que  $n \geq 2$ , d'où l'isomorphie. ■

**6.1.7.3 Groupes d'homotopie des sphères****Exemple. (*Homotopie du cercle*)**

Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(S^1) = 0$ . On dit que le cercle est aphérique.

En effet,  $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$  par contractibilité et l'on applique l'homotopie d'un revêtement

**Définition. (*Asphérisme*)**

Un espace topologique est *asphérique* si tous ses groupes d'homotopie et d'homologie d'ordre strictement plus grand que 1 sont nuls.

**Proposition. (*Homotopie « par en-dessous » des sphères*)**

Pour tous entiers naturels  $n < d$ ,  $\pi_n(S^d) = 0$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Pour tout point  $\star$  de la sphère,  $S^d \setminus \{\star\}$  est contractile. ■

Calculons un groupe d'homotopie non trivialement fourni par les connaissances acquises jusqu'ici. Le plus simple est le groupe d'homotopie à l'ordre 2 du cercle. C'est d'ailleurs le seul qu'on puisse visualiser avant de passer à la dimension 4. Pas de chance :

**Proposition**

$$\pi_2(S^1) = 0.$$

▷ On cherche donc les applications continues, aussi pointées, de  $S^2$  sur  $S^1$ . Puisque  $S^2$  est simplement connexe, une telle application  $f$  se relève en  $\tilde{f}$  de  $S^2$  dans  $\mathbb{R}$  le revêtement universel du cercle. Mais celui-ci est contractile, de sorte que  $\tilde{f}$  est contractile, et par composition  $f$  l'est. ■

$$\pi_i(S^n)$$

	$i \rightarrow$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n$	1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\downarrow$	2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
	3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$
	5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
	6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
	7	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

TABLE 6.1 : Premiers groupes d'homotopie des sphères. —

Au-delà, c'est encore plus compliqué, mais le triangle inférieur est heureusement toujours nul par la proposition initiale.

#### 6.1.7.4 Fibrations de Hopf

##### Exercice 10 (Fibration de Hopf complexe et homotopie des sphères)

1. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Que peut-on dire des  $\pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?
2. Calculer  $\pi_2(S^2)$ .
3. (Homotopies comparées de la 2-sphère et de la 3-sphère) Montrer que  $\pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$  pour tout entier  $n \geq 3$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On a une fibration donnée par  $S^1 \rightarrow S^{2d+1} \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{C}$ . La suite exacte longue associée à cette fibration s'écrit

$$\dots \longrightarrow \pi_{2d+3}(S^1) \longrightarrow \pi_{2d+3}(S^{2d+1}) \longrightarrow \pi_{2d+3}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d+2}(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_{2d+2}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_{2d+2}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d+1}(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_{2d+1}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_{2d+1}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d}(S^1) \longrightarrow \pi_{2d}(S^{2d+1}) \longrightarrow \pi_{2d}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d-1}(S^1) \xleftarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} \pi_3(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_2(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_2(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_1(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_1(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \longrightarrow \{*\}$$

où la première colonne est nulle sauf en  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . Puisque  $\pi_2(S^{2d+1}) = 0$ , on en déduit l'isomorphisme  $\pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$ . De plus, pour tout entier  $1 \leq k \leq 2d$ ,  $\pi_k(S^{2d+1}) = 0$ , d'où pour résumer pour tout

$n \in \mathbb{N}$  :

$$\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{pour } 3 \leq n \leq 2d \\ \pi_n(S^{2d+1}) & \text{pour } n \geq 2d+1. \end{cases}$$

2. On a  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ , car  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2$ .
3. Simple application encore de ce qui précède au cas  $d = 1$ . Mais les plus exhaustifs pourront récrire la suite

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{k-1}(S^1) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \pi_{k-1}(S^3) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \pi_{k-1}(S^2) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & \dots \\ & \searrow & & & & & \\ & & \dots & \longrightarrow & \pi_k(S^1) & \longrightarrow & \pi_k(S^3) \longrightarrow \pi_k(S^2) \end{array}$$

associée à la fibration de Hopf classique pour s'en convaincre plus visuellement.

### Exercice 11 (*Homotopie des espaces projectifs réels*)

1. Que peut-on dire des  $\pi_n(\mathbb{P}^1\mathbb{R})$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?
2. Soit  $d \geq 2$  un entier. Calculer les groupes d'homotopie  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R})$  pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ .
3. (*Les espaces projectifs ne sont pas des rétracts d'eux-mêmes*) Montrer que le plongement  $\mathbb{P}^k\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  n'admet pas de rétraction lorsque  $0 < k < n$  sont des entiers.

▷ Éléments de réponse.

1.  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  est homéomorphe au cercle dont vous connaissez entièrement l'homotopie.
2. On a le revêtement  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^d \rightarrow \mathbb{P}^d\mathbb{R}$  qui donne  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = \pi_n(S^d)$  pour tout  $n \geq 2$ , en particulier pour tout  $2 \leq n \leq d-1$ ,  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = 0$ . On savait enfin déjà que  $\pi_0(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = 0$  et  $\pi_0(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
3. Si tel est le cas,  $\rho\sigma = id_{\mathbb{P}^k\mathbb{R}}$  donc par fonctorialité des groupes d'homotopie,  $\pi_k(\mathbb{P}^k\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z} \rightleftarrows \pi_k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \simeq 0$  est injective, car  $\pi_k(\rho)\pi_k(\sigma) = id$ , mais c'est impossible.

#### 6.1.7.5 Lenticularité

Le but est d'exhiber une famille d'espaces topologiques « difficiles à classifier » pour motiver des théories de l'homotopie ou de l'homologie supérieures. Les espaces lenticulaires peuvent avoir même homotopie au sens de tous les groupes d'homotopie supérieurs et même homologie sans être homéomorphes ni même homotopiquement équivalents.

#### Définition. (*Espace lenticulaire*)

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . On note  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ . On fait agir  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur la sphère  $S^3 \subseteq \mathbb{R}^2$  par

$$(z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

où l'on identifie  $S^3$  à la 1-sphère du plan complexe  $\mathbb{C}^4$  et l'on note  $L(p,q)$  l'espace quotient obtenu, appelé  $(p,q)$ -variété/espace lenticulaire de troisième dimension.

<sup>a</sup> Par opposition au plan complexe réel  $\mathbb{C}^2$ ...

### Exemples. (*Espaces lenticulaires*)

1.  $L(2,1) = \mathbb{RP}^3$ .
2.  $L(2,5)$  consiste en la lentille entre deux parois donnée par la double rotation alignant leurs fentes. On obtient bien alors 5 régions de lentille.

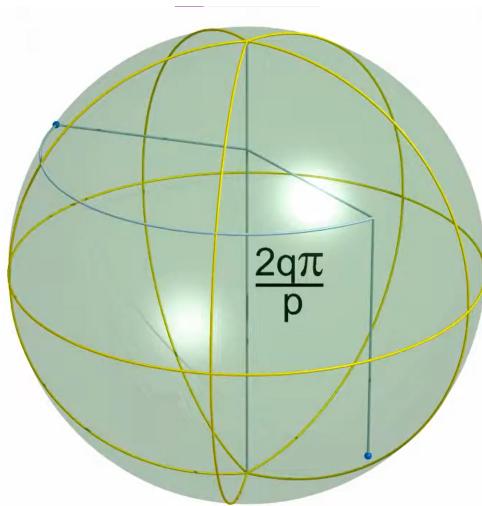


FIGURE 6.1.17 : *Espaces lenticulaires*. —  
Illustration de l'opération quotient et des angles sur  $S^3$

### Fait. (*Groupe fondamental d'un espace lenticulaire*)

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors

Par construction,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  fini agit sur  $S^3$  qui est séparé et simplement connexe. L'action est libre, car  $z_1 = \zeta z_1 \implies \zeta = 1$  pour tout  $z_1 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  et si  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  puis  $\zeta^q = 1$ , impossible, car  $q \wedge p = 1$ . Ainsi on a un revêtement universel  $S^3 \rightarrow S^3 / \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} L(p,q)$  et le  $\pi_1$  de la base est donné  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

### Propriété. (*Homotopie des espaces lenticulaires*)

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors pour tout  $i \geq 2$ ,  $\pi_i(L(p,q)) = \pi_i(S^3)$ .

**Propriété.** (*Homologie des espaces lenticulaires*)

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors pour  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(L(p,q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0, 2n - 1 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{pour } k \text{ impair, } 0 < k < 2n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les groupes d'homologie de  $L(p,q)$  ne dépendent pas de  $q$ .

▷ C'est une propriété déjà ve appliquée au revêtement  $S^3 \rightarrow L(p,q)$ , et cela vient simplement de la suite exacte longue en homotopie d'une fibration à fibres discrètes. ■

**Exercice 12** (*Classification des variétés lenticulaires*)

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et  $q, q' \in \mathbb{N}$  avec  $q \wedge p = q' \wedge p$ . On note  $L = L(p,q)$  et  $L' = L(p,q')$ .

1. Montrer que  $L$  est homéomorphe à  $L'$  si et seulement si  $q = \pm q'^{\pm 1}$  [p].
2. Montrer que  $L$  est homotiquement équivalent à  $L'$  si et seulement si  $q = \pm kq'$  où  $k$  est un carré dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Ainsi la suite des groupes d'homotopie n'est pas un invariant complet. Mais on peut encore se demander si la suite des groupes d'homotopie d'un espace détecte la contractibilité, ce qui est moins fort. Mais c'est encore raté.

**6.1.7.6 Homotopie du cercle polonais****Propriété.** (*Homotopie du cercle polonais*)

Soit  $W$  le cercle polonais. Alors  $W$  est connexe par arcs et  $\pi_n(W) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Contre-exemple.** (*Espace non contractile d'homotopie nulle*)

Le cercle polonais  $W$  connexe par arcs n'est pas contractile mais sa suite d'homotopie est identiquement nulle. □

## 6.1.8 Un modèle simple : homotopie des *CW*-complexes

### 6.1.8.1 Définition catégorique des complexes cellulaires

**Reformulation pratique.** (*Structure de complexe cellulaire*)

Une structure cellulaire sur un espace topologique  $X$  est un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \text{colim}_n X^{(n)}$$

où si  $J_n$  est un discret dit *ensemble d'étiquetage des cellules attachées d'ordre n*,

$$\begin{array}{ccc} J_n \times S^{n-1} \simeq \sqcup_{J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times D^n \simeq \sqcup_{J_n} D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n-1)} \coprod_{\varphi_n} (J_n \times D^n) \end{array}$$

et  $\varphi_n$  est une *application d'attachement* ou *de recollement* et  $\Phi_n$  est une *application caractéristique*, de sorte que  $X^{(n)}$  est la somme amalgamée  $\frac{X^{(n-1)} \sqcup (J_n \times D^n)}{\varphi_n(j,x) \sim (j,x)}$ . On prend garde à ce qu'ici l'usage de  $\coprod$  ne désigne pas une somme disjointe.

Alors  $X$  est de dimension finie s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X^{(n)} = X$  et la dimension d'un complexe cellulaire est  $\dim(X) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq 0\}$ . De plus,  $X$  est fini si et seulement si  $\sqcup_n J_n$  est fini. Pour un *CW*-complexe de dimension infinie, on considère la topologie colimite = topologie faible définie par les inclusions  $X^{(k)} \hookrightarrow X$  ou encore les parties  $X^{(k)} \hookrightarrow X^{(k+1)}$  où  $U \subseteq X$  est ouvert  $\iff U \cap X^{(k)}$  est ouvert dans  $X^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Remarques.

- Comment cette définition coïncide-t-elle avec celle, plus intuitive, que l'on connaît déjà ? Puisque les ensembles  $J_n$  sont discrets, la donnée de  $\varphi_n$  continue équivaut à celle d'une collection  $(\varphi_{n,j})_{j \in J_n}$  d'applications continues  $S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$  et  $\Phi_{n,j}$  donnée comme plongement au sens faible de  $D^n$  dans le pushout  $X^{(n-1)} \sqcup_{\varphi_n} D^n$ , ce qui correspond au recollement à la main de cellules de la définition élémentaire.
- Au rang  $n = 0$ ,  $S^0 = \emptyset$  et  $D^0 = \{*\}$  d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_0 \times \emptyset = \emptyset & \longrightarrow & X^{(-1)} = \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_0 \times \{*\} & \longrightarrow & \sqcup_{J_0} \{*\}. \end{array}$$

Ainsi, les applications d'attachement  $\varphi_0$  sont vides : il n'y a rien à faire et les applications caractéristiques sont l'identité.

3. Au rang  $n = 1$ ,  $\partial D^1 = S^0 = \{0,1\}$  et  $D^1 = [0,1]$  d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_1 \times \{0,1\} & \xrightarrow{\varphi_1} & X^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_1 \times D^1 & \longrightarrow & X^{(1)}. \end{array}$$

Ainsi, les applications d'attachement correspondent au choix de deux points du 0-squelette pour les extrémités de  $D^1$ . Les applications caractéristiques sont à décomposition sur  $J_1$  près les plongements au sens faible des arêtes  $D^1$  dans le  $CW$ -complexe de dimension 1 obtenu.

4. Au rang  $n = 2$ ,  $\partial D^2 = S^1$  le cercle et  $D^2$  est le disque, d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_2 \times S^1 & \xrightarrow{\varphi_2} & X^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_2 \times D^2 & \longrightarrow & X^{(2)}. \end{array}$$

On généralise les observations précédentes à la dimension quelconque.

5. On a toujours un recouvrement  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j \in J_n} B^n \longrightarrow X$ . (En particulier, on retrouve qu'un  $CW$ -complexe fini est compact.)

Plus précisément, tout  $CW$ -complexe  $X$  est en bijection ensembliste avec  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j \in J_n} \overset{\circ}{B^n}$ .

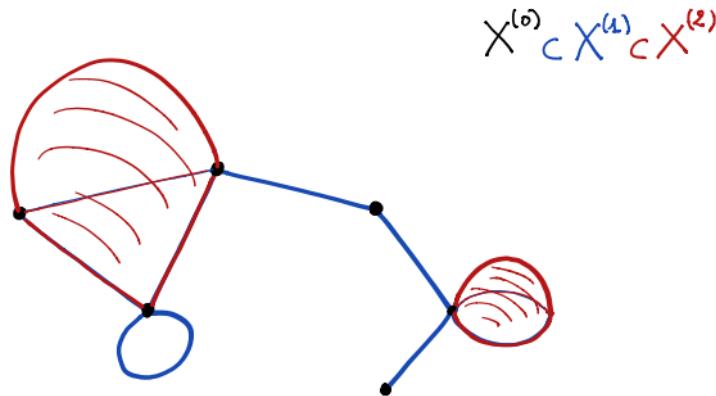


FIGURE 6.1.18 :  $CW$ -complexe. —

**Exemples. (*Complexes cellulaires du point de vue catégorique*)**

1. (*Structure cellulaire de la sphère par pushout*)  $S^2$  admet la décomposition cellulaire minimaliste suivante : prenons deux points  $x_0, x_2$  de la sphère. On prend  $J_0 = \{x_0\}$  et  $X^{(0)} = \{x_0\}$  qui  $= X^{(1)}$  en prenant de plus  $J_1 = \emptyset$ . On prend  $J_2 = \{x_2\}$  et

$\varphi_2 : \{x_2\} \times S^1 \rightarrow X^{(2)}$  constante en  $x_0$ .

Notons que cette construction est le modèle  $S^n \simeq D^n / \partial D^n$  déjà rencontré en topologie générale.

2. (*Structure cellulaire du plan projectif par pushout*)  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = D^0 \sqcup_{\varphi_1} D^1 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup \dots \sqcup_{\varphi_n} D^n$  où les attachements sont un peu casse-tête. De même,  $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = D^0 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup_{\varphi_4} D^4 \sqcup_{\varphi_6} \dots \sqcup_{\varphi_{2n}} D^{2n}$ .

Remarquons que  $\varphi_{2n} : S^{2n-1} : \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$  est la fibration de Hopf.

3. (*Structure cellulaire du tore par pushout*)  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 = D^0 \sqcup_{\varphi_1} (D^1 \sqcup D^1) \sqcup_{\varphi_2} D^2$  et c'est cette notation que nous utiliserons le plus. Ici,  $J_0 = \{x_0\}$ ,  $J_1 = \{1,2\}$  et  $J_2 = \{0\}$ , puis  $\varphi_1^1 : 0 \mapsto x_0, 1 \mapsto x_0$  et  $\varphi_1^2 = \varphi_1^1$ . Enfin,  $\varphi_2$  est l'attachement classique défini sur  $\partial I^2 \simeq S^1$  décrit par le carré fondamental du tore.

Cette nouvelle reformulation nous permet une plus ample possibilité de manœuvre sur les espaces cellulaires.

### Proposition. (*Produit général de complexes cellulaires*)

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires. Si  $X$  ou  $Y$  est localement compact et si  $X$  et  $Y$  ont un nombre dénombrable de cellules,  $X \times Y$  admet une structure cellulaire.

▷ Soit  $(I_n, \varphi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $X$  et  $(J_n, \psi_n, \Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $Y$ . Posons  $(X \times Y)^{(n)} = \bigcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)}$ . Posons  $K_n = \bigsqcup_{k=0}^n I_k \times J_{n-k}$ . Au rang  $n = 0$ , on attache :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\theta_0} & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_0 \times J_0 \times \{\ast\} & \xrightarrow{\Theta_0} & I_0 \times J_0 \times \{\ast\} \simeq (I_0 \times \{\ast\}) \times (J_0 \times \{\ast\}). \end{array}$$

Au rang  $n = 1$ , on attache par :

$$\begin{array}{ccc} I_0 \times \{\ast\} \times J_1 \times \{0,1\} \sqcup I_1 \times \{0,1\} \times J_0 \times \{\ast\} & \xrightarrow{\Phi_0 \times \psi_1 \sqcup \varphi_1 \times \Psi_0} & X^{(0)} \times Y^{(0)} \\ \simeq (I_0 \times J_1 \sqcup I_1 \times J_0) \times \{0,1\} & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ (I_0 \times J_1) \sqcup (I_1 \times J_0) \times [0,1] & \xrightarrow{\quad} & (X^{(0)} \times Y^{(0)}) \sqcup (I_0 \times \{\ast\} \times J_1 \times I) \sqcup (I_1 \times I \times J_0 \times \{0\}) / \Phi_0 \times \psi_1 \\ & & \simeq X^{(0)} \times Y^{(1)} \sqcup X^{(1)} \times Y^{(0)} \end{array}$$

où le dernier homéomorphisme est donné par les hypothèses.

Pour passer du rang  $n$  au rang  $n+1$ , on utilise

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{k=0}^n (I_k \times \partial I^k \times J_{n+1-k} \times I^{n+1-k} \sqcup \partial I^{n+1-k} \times J_k) & & \\
 \downarrow \simeq & \searrow \varphi_k \times \Psi_{n+1-k} \sqcup \Phi_k \times \psi_{n+1-k} & \\
 (\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times J_{n+1-k}) \times \partial I^{n+1} & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & \bigsqcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)} \\
 \\ 
 (\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times J_{n+1-k}) \times I^{n+1} & \xrightarrow{\Theta_{n+1}} & \bigsqcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times I^k \times J_{n+1-k} \times I^{n+1-k} \\
 & & \downarrow \simeq \\
 & & \bigsqcup_{k=0}^{n+1} X^{(k)} \times Y^{(n+1-k)}
 \end{array}$$

avec les trous évidents. Ainsi  $X \times Y$  admet la décomposition cellulaire  $(K_n, \theta_n, \Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . ■

### Définition. (*Complexe cellulaire relatif*)

Une structure cellulaire relative à un espace topologique  $A$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée  $(X, A)$  d'un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \text{colim}_n X^{(n)}$$

formée comme précédemment.

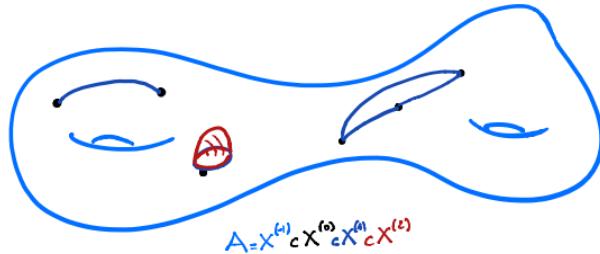


FIGURE 6.1.19 : *CW-complexe relatif*. —

C'est très parlant : au lieu d'attacher des points dans le vide : on les attache sur un pré-espace  $A$ .

*Remarque.* Un complexe cellulaire est un complexe cellulaire de la forme  $(X, \emptyset)$ .

### Reformulation pratique. (*Sous-complexe cellulaire*)

Un sous-complexe cellulaire  $A \subseteq X$  est un complexe cellulaire obtenu par des sous-ensembles  $I_n \subseteq J_n$  et restrictions des applications d'attachement  $I_n \times S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} A^{(n-1)}$ .

**Définition. (*Paire cellulaire*)**

Une *paire cellulaire* est une paire topologique  $(X, A)$  de complexes cellulaires telle que  $A$  est un sous-complexe cellulaire de  $X$ .



Une paire cellulaire est un complexe cellulaire relatif, mais pas l'inverse.

**Exercice 13 (Quotient de complexes cellulaires)**

Soit  $(X, A)$  une paire cellulaire. Montrer que  $X/A$  est muni d'une structure de complexe cellulaire.

**Corollaire. (*Suspension d'un CW-complexe*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  est un *CW-complexe*, alors  $\Sigma^n X$  est un *CW-complexe*.

▷ Par récurrence, il suffit de montrer que  $\Sigma X$  est un *CW-complexe*. Or  $\Sigma X = \frac{X \times I}{X \times \partial I}$ . ■

**Proposition**

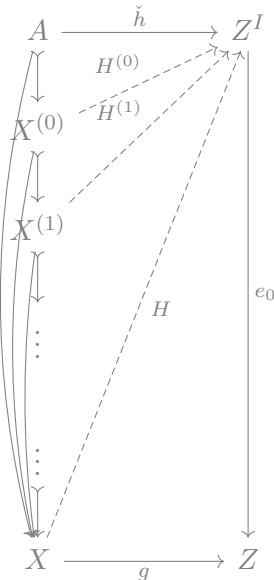
Pour tout complexe cellulaire relatif  $(X, A)$ , l'inclusion canonique  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration  $A \rightarrow X$ .

▷ On a par pushout de cofibrations

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{J_n} D^n & \longrightarrow & X^{(n)} \end{array}$$

une cofibration à gauche qui donne celle de droite. Par composition de cofibrations,  $A \rightarrow X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n)}$  est une cofibration. Passons à la colimite. Chaque donnée sur chaque

squelette :



permet de passer à la colimite  $H := \text{colim}_n H^{(n)}$  par foncteur. ■

### Définition. (*Caractéristique d'Euler*)

Soit  $X$  un complexe cellulaire fini. On définit sa *caractéristique d'Euler*  $\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{card}(J_n)$ .

### Exercice 14

1. Montrer que la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la structure cellulaire.
2. Montrer que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique.

### Lemme

1. Soit  $X$  un *CW-complexe*. Soit  $Y$  un espace topologique. Alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f|_{X^{(n)}} : X^{(n)} \rightarrow Y$  est continue.
2. Soit  $K$  un compact. Soit  $X$  un *CW-complexe*. Soit  $f : K \rightarrow X$  une application continue. Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(K) \subseteq X^{(n)}$ . De plus, si  $f : K \rightarrow X$  est une application quelconque, elle est continue si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f : K \rightarrow X^{(n)}$  soit bien définie et continue.

▷ Successivement :

1. Propriété classique de la topologie faible.
2.  $f(K)$  étant compact, il n'intersecte qu'un nombre fini de cellules, d'où le résultat. Le reste des implications n'est qu'esbroufe. ■

**Exercice 15**

Donner un contre-exemple à la deuxième propriétés dans le cas où  $f$  n'est pas une application continue.

▷ Éléments de réponse.

Prenons  $K$  le compactifié d'Alexandrov de la colimite  $\mathbb{R}^{infi} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{infi}$  l'identité sur  $\mathbb{R}$  et  $f(\infty) = 0 \in \{0\}$ . Alors  $f$  n'est incluse dans aucun  $n$ -squelette de  $\mathbb{R}^\infty$ .

**Reformulation pratique. (*Application cellulaire*)**

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre complexes cellulaires est cellulaire si elle préserve la décomposition cellulaire, i.e.  $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Heuristique**

Les applications cellulaires peuvent être approximées : si une application traverse la diagonale d'un carré, elle n'est pas cellulaire. Mais on peut en faire le tour...

Plus généralement, l'approximation optimale d'applications par des cellulaires est un domaine actif de la recherche.

**Propriétés. (*Applications cellulaires*)**

1. La composée de deux applications cellulaires est cellulaires.
2. La restriction à un sous-CW-complexe d'une application cellulaire est une application cellulaire.
3. Le produit de deux applications cellulaires est cellulaire.

▷ Successivement :

1. C'est immédiat.
2. C'est clair.
3. Il suffit de reprendre la définition du produit cellulaire.

**Propriété. (*Structure cellulaire d'un recollement le long d'une application cellulaire*)**

Si  $(Z, A)$  est une paire cellulaire et  $f : A \rightarrow Y$  est cellulaire, alors  $Z \cup_f Y$  est un complexe cellulaire et l'application pushout  $Z \rightarrow Z \cup_f Y$  est cellulaire.

▷ Soit  $(J_n, \varphi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $Z$ . Soit  $(I_n, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\Phi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $A$  et  $(K_n, \psi_n, \Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sur  $Y$ . La structure sur  $Z \cup_f Y$  de squelette  $Z^{(n)} \cup_{f|_{A^{(k)}}} Y^{(n)}$  est donnée par  $((J_n \setminus I_n) \sqcup K_n, \varphi_n|_{J_n \setminus I_n} \sqcup \psi_n, \Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On vérifie que l'application pushout est cellulaire :  $X^{(n)} \rightarrow X^{(n)} \times \{0\} \subseteq Z^{(n)}$ , et  $i_0(X^{(n-1)}) \rightarrow X^{(n-1)} \subseteq (Z \cup_f Y)^{(n)}$  et  $Y^{(n)} \rightarrow Y^{(n)} \subseteq (Z \cup_f Y)^{(n)}$ . ■

**Proposition. (*Factorisation en cofibration d'une application cellulaire*)**

La factorisation canonique en cofibration d'une application cellulaire est cellulaire, *i.e.* composée de deux applications cellulaires.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction cellulaire. Considérons  $X \xrightarrow{i} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{P} Y$  sa factorisation canonique. Puisque

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{i_0} & X \times I \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

il d'appliquer le lemme à  $A = X$ ,  $Z = X \times I$  et  $f : A = X \rightarrow Y$  pour avoir que  $\text{Cyl}(f)$  est un complexe cellulaire et l'application pushout est cellulaire. Ainsi  $i$  est cellulaire par comoposée, et l'application à droite l'est également et l'on a tout montré. ■

### 6.1.8.2 Théorèmes homotopiques sur les complexes cellulaires

**Lemme. (*Lemme de compression*)**

Soit  $(X,A)$  un complexe cellulaire relatif d'étiquetages  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $(Y,B)$  une paire topologique. Soit une application de paires topologiques  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$ , *i.e.* continue et telle que  $f(A) \subseteq B$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $J_n \neq \emptyset$  ( $n$  étant la dimension des cellules que l'on recolle sur  $X^{(n-1)}$  pour construire  $X$ ),  $\pi_n(Y,B) = 0$ . Alors il existe une application continue  $g : X \rightarrow B$  homotope à  $f$  relativement à  $A$ .

▷ Notons  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des dimensions des cellules recolles pour construire  $X$ , avec  $J_{n_0} \neq \emptyset, J_{n_1} \neq \emptyset, m \notin (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  avec pour convention que, avec  $f^{(-1)} = f$ ,  $X^{(-1)} = A$  et  $n_{-1} = -1$ , il existe  $f^{(k)} : X \rightarrow Y$  est homotope à  $f^{(k-1)} \xrightarrow{H^{(k)}} f^{(k)}$  rel  $X^{(n_k-1)}$ .

Pour  $k = 0$ , on a

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} & \xrightarrow{\varphi_{n_0}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times B^{n_0} & \xrightarrow{\Phi_{n_0}} & X^{(n_0)} & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On a  $f\Phi_{n_0}$  une application de paires  $(J_{n_0} \times B^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \rightarrow (Y, B)$  ce qui équivaut à une collection d'applications de paires  $\{B^{n_0}, S^{n_0-1}\} \rightarrow (Y, B)\}$ . Or  $\pi_{n_0}(Y, B) = \{0\} \simeq [(I^{n_0}, \partial I^{n_0}), (Y, B)] \simeq [(B^{n_0}, S^{n_0} - 1), (Y, B)]$  pour la relation d'homotopie relative au sous-espace. Autrement dit,  $f\Phi_{n_0}$  est homotope à une application  $\psi : J_{n_0} \times B^{n_0} \rightarrow B \subseteq Y$  relativement à  $J_{n_0} \times S^{n_0-1}$ . Nommément,

$f\Phi_{n_0} \xrightarrow{\tilde{h}} \psi$  où  $\tilde{h} : J_{n_0} \times B^{n_0} \times I \rightarrow B$ ,  $\tilde{h}(-,0) = f\Phi_{n_0}$  et  $\tilde{h}(-,1) = \psi$ . On peut considérer maintenant :

$$\begin{array}{ccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} \times I & \xrightarrow{\varphi_{n_0} \times id_I} & A \times I \xrightarrow{\tilde{f}(a,t) := f(a)} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times B^{n_0} \times I & \xrightarrow{\Phi_{n_0} \times id_I} & X^{(n_0)} \times I \xrightarrow{\exists! h} Y. \\ & \text{---} \tilde{h} \text{---} & \end{array}$$

Par ce que l'on vient de dire, le carré extérieur est commutatif, ce qui par propriété de la somme amalgamée donne un unique  $h : X^{(n_0)} \times I \rightarrow Y$ . En outre :

- ★ on a une homotopie relative à  $A$  : en effet,  $h(a,t) = f(a)$  par commutativité du triangle est.
- ★ De plus,  $h(-,1) \in B$ , car cette même commutation donne  $h(a,1) \in B$  et  $h(\Phi_{n_0}(x),1) = \tilde{h}(x,1) \in B$  pour  $x \in B^{n_0}$  par commutation de la flèche du dessous.
- ★ Enfin,  $h(-,0) = f|_{X^{(n_0)}}$  par le même argument.

On peut presque conclure : par cofibration,

$$\begin{array}{ccccc} X^{(n_0)} & \xrightarrow{i_0^{X^{(n_0)}}} & X^{(n_0)} \times I & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow h & \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I & \dashrightarrow H^{(n_0)} & Y \\ & \searrow f & & \nearrow & \end{array}$$

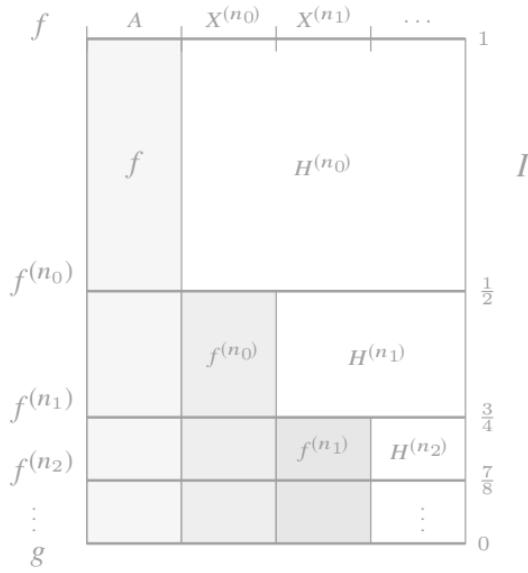
donne par commutation de l'extérieur  $h(x,0) = f(x)$  pour  $x \in X^{(n_0)}$  d'après le dernier point d'où par extension des homotopies de la cofibration  $X^{(n_0)} \rightarrow X$ , une homotopie  $H^{(n_0)} : X \times I \rightarrow Y$ . Vérifions qu'elle nous convient. On a :

- ★  $f^{(0)} := H^{(n_0)}(-,1) : X \rightarrow Y$  ;
- ★  $f^{(0)} \sim H^{(n_0)}(-,0) = f = f^{(-1)}$  par commutation du triangle inférieur ;
- ★  $H^{(n_0)}$  est une homotopie relative à  $A$ , car  $H^{(n_0)}(a,t) = h(a,t) = f(a)$  pour tout  $a \in A$  ;
- ★  $f^{(0)}(X^{(n_0)}) \subseteq B$  et  $H^{(n_0)}(X^{(n_0)},1) = h(X^{(n_0)},1) \subseteq B$  toujours par cet argument.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang  $k$ , et démontrons-là au rang  $k+1$ . Ce sont les mêmes arguments. Si  $\dim(X) < +\infty$ , c'est déjà fini. Sinon, construisons une homotopie  $\mathcal{H} : X \times I \rightarrow Y$  relative à  $A$  telle que  $f = \mathcal{H}(-,0)$  et  $g = \mathcal{H}(-,1)$ , avec  $A \times I \subseteq X^{(n_0)} \times I \subseteq X^{(n_1)} \times I \subseteq X^{(n_2)} \times I$ , la formule analytique de ce procédé étant

$$\begin{aligned} Hj : \quad X \times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\longmapsto H^{(k)}(x, 2^{k+1}(t - 1 + \frac{1}{2^k})) \text{ pour } 1 - \frac{1}{2^k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, k \geq 0 \end{aligned}$$

relative à  $A$ .



Pour tout  $x \in X$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in X^{(n_k)}$ . Par construction, on a  $H^{(l)}(x,s) = f^{(k)}(x)$ , pour tout  $l \geq k$  et tout  $s \in I$ . L'assignation  $\mathcal{H}(x,1) = f^{(k)}(x)$  finit de définir une application continue  $\mathcal{H} : X \times I \rightarrow Y$ , qui est une homotopie relative à  $A$  de  $f$  à une application  $g = \mathcal{H}(-,1) : X \rightarrow B \subseteq Y$ . ■

### Proposition. (*Tiré en arrière entre CW-complexes*)

Soit  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  une équivalence faible d'homotopie non nécessairement cellulaire entre complexes cellulaires. Pour tout complexe cellulaire  $Z$ , le push-forward  $f_* : [Z,X] \rightarrow [Z,Y]$  est une bijection.

▷ Considérons la factorisation canonique  $f : X \xrightarrow{i} \text{Cyl}(f) \cong Y$ . Puisque les cofibrations sont des plongements et les homéomorphismes des équivalences d'homotopie, il suffit de le montrer pour des inclusions. Après cette réduction, soit donc  $f : X \hookrightarrow Y$ . Considérons la suite exacte longue associée à cette paire :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(Y,X) & \longrightarrow & \pi_0(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_0(Y) \\
 & & \searrow & & \\
 \pi_2(Y,X) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y) \\
 & & \searrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & \pi_3(Y,X) & \longrightarrow & \pi_2(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_2(Y)
 \end{array}$$

qui par hypothèse induit des isomorphismes  $\pi_i(f) : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Par force, on a donc  $\pi_i(Y,X) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Appliquons donc le lemme de compression.

Montrons que  $f_*$  est surjective. Soit  $\varphi : Z \rightarrow Y$  et considérons l'application de paires  $(Z,\emptyset) \xrightarrow{\varphi} (Y,X)$  où  $(Z,\emptyset)$  est bien un complexe cellulaire relatif. On a donc  $\varphi$  homotope à  $\psi : Z \rightarrow X$ , soit  $f\psi \sim \varphi$ .

Montrons que  $f_*$  est injective. Soient  $\varphi, \psi : Z \rightarrow X$  telles que  $f\varphi \sim_H f\psi : Z \rightarrow Y$  i.e.  $\exists H : Z \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(-,0) = f \circ \varphi$  et  $H(-,1) = f \circ \psi$ . Alors  $(Z \times I, Z \times \partial I)$  est un complexe cellulaire relatif et de plus  $H : (Z \times I, Z \times \partial I) \xrightarrow{H} (Y, X)$  est une application entre paires. En réappliquant le lemme de compression, il existe  $K : Z \times I \rightarrow X$  homotope à  $H$  relativement à  $Z \times \partial I$ , i.e.  $K(z,0) = H(z,0) = \varphi(z)$  et  $K(z,1) = H(z,1) = \psi(z)$ . Et voilà ! ■

On peut en déduire :

### Théorème. (Whitehead, 1942)

Une application continue entre complexes cellulaires est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence faible d'homotopie entre complexes cellulaires. Appliquons la proposition au cas  $Z = Y$ . L'application  $f_* : [Y, X] \xrightarrow{\sim} [Y, Y]$  est une bijection. Soit  $g : Y \rightarrow X$  l'image réciproque de  $id_Y$ . Par construction,  $fg \sim id_Y$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a alors  $\pi_n(fg) = \pi_n(f)\pi_n(g) = id_{\pi_n(Y)}$ . Ainsi, comme  $\pi_n(f)$  est un isomorphisme,  $\pi_n(g)$  est un isomorphisme, c'est-à-dire que  $g$  est une équivalence faible d'homotopie. Maintenant, appliquons la proposition  $Z = X$  et  $g$ . L'application  $g_* : [X, Y] \xrightarrow{\sim} [X, X]$  est une bijection. Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  l'image réciproque de  $id_X$ . Par construction  $g\varphi \sim gf$  d'où  $f = fid_X \sim fg\varphi \sim \varphi$ . ■

**Mnémonik :** l'homotopie cellulaire est plutôt gentille.

La donnée de l'application  $f$  est obligatoire !

Considérons  $X = S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$  et  $Y = \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$ . On a deux fibrés  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$ . Les suites exactes longues de groupes d'homotopie associées sont similaires, d'où en particulier  $\pi_n(S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}) \simeq \pi_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant, ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents ! En effet,  $H_5(S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}) \not\simeq H_5(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3)$ . (On en déduit que même si  $X$  et  $Y$  ont des homologies isomorphes il est impossible de trouver une application qui induise un isomorphisme des groupes d'homologie, drôle n'est-ce pas.)

Il est donc faux de dire que deux *CW*-complexes ayant même homologie sont homotopiquement équivalents, et donc que l'homotopie cellulaire est un invariant complet !

En corollaire :

### Contre-exemple. (Un non-*CW*-complexe simple)

Le cercle polonais ne peut être muni d'une structure cellulaire.

En effet, l'application de plongement de  $f : \{a,b\} \in W$  où  $a \in \{0\} \times [-1,1]$  et  $b$  dans l'autre composante connexe de  $W$ , est continue. Or c'est une équivalence faible d'homotopie... mais  $W$  et  $\{a,b\}$  ne sont pas homotopiquement équivalents, car  $g : W \rightarrow \{a,b\}$  continue est forcément constante et  $fg$  un point ne

peut alors être homotope à l'identité, car  $W$  n'est pas contractile.  $\square$

### Remarques.

1. Le théorème de Whitehead tient bien sûr encore pour des espaces ayant le type d'homotopie des  $CW$ -complexes.
2. L'équivalence d'homotopie faible n'est pas une relation d'équivalence sur  $\text{Top}$ , car elle n'est pas symétrique. En revanche, c'en est une dans la catégorie des espaces cellulaires.

### Proposition. (*Tiré en arrière entre $CW$ -complexes, version $n$ -connexe*)

Une application  $n \in \mathbb{N}$ -connexe  $f : X \rightarrow Y$  continue entre complexes cellulaires. Soit  $Z$  un complexe cellulaire.

1. Si  $\dim(Z) \leq n - 1$ ,  $f_* : [Z, X] \xrightarrow{\sim} [Z, Y]$  est un isomorphisme.
2. Si  $\dim(Z) = n$ ,  $f_* : [Z, X] \twoheadrightarrow [Z, Y]$  est un épimorphisme.

$\triangleright$  Similaire au théorème de Whitehead : dans la preuve de la propriété du tiré en arrière lemme du théorème de Whitehead, la surjectivité de  $f_*$  tient pour des  $CW$ -complexes  $Z$  de dimension au plus  $n$  et l'injectivité tient pour des  $CW$ -complexes  $Z$  de dimension au plus  $n - 1$ . ■

### Théorème. (*Théorème de Whitehead, version $n$ -connexe*)

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires de dimensions bornées par  $n \in \mathbb{N}$ . Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie si et seulement si  $\pi_k(f)$  est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

$\triangleright$  La preuve finale de Whithead tient avec la version  $n$ -connexe du tiré en arrière donnée précédemment. ■

*Remarque.* Ce fait est particulièrement fort : pour des  $CW$ -complexes de dimension finie, il suffit de vérifier qu'une application induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie jusqu'à la dimension maximale, pour avoir des isomorphismes en toute dimension. C'est loin d'être trivial, car SERRE a montré que tout  $CW$ -complexe non contractile simplement connexe a une infinité de groupes d'homotopie non triviaux !

### Corollaire. (*Contractibilité des complexes cellulaires*)

Un complexe cellulaire  $X$  est contractile si et seulement si  $\pi_n(X) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, la suite d'homotopie détecte les contractiles dans la sous-catégorie de  $\text{Top}$  des complexes cellulaires.

$\triangleright$  On applique le théorème de Whitehead, version  $n$ -connexe à l'application  $X \rightarrow \{*\}$ . ■

**Lemme**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe obtenu comme la réunion = colimite croissante  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$  de sorte que chaque inclusion  $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  soit homotopiquement nulle. Montrer que  $X$  est contractile.

▷ Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $f : S^k \rightarrow X$  continue pointée. En particulier,  $f(S^k)$  est compacte, donc par propriété de la topologie colimite, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(S^k) \subseteq X_n$ . Ainsi, en notant  $\bar{f} : S^k \rightarrow X_n$ , de sorte que

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow j \\ & X_n & \xrightarrow{i} X_{n+1} \end{array}$$

i.e.  $f = ji\bar{f}$  où  $i \sim \text{cste}$ , soit  $f \sim j \text{cste} \bar{f} = \text{cste}$ . Ainsi tout  $n$ -lacet de  $X$  est nul, donc l'homotopie de  $X$  est nulle. Par le corollaire précédent,  $X$  est contractile. ■

**Exercice 16 (Sphère infinie)**

1. Rappeler comment que la sphère de dimension  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  admet une structure cellulaire ayant deux  $k$ -cellules pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'image de  $S^n$  dans  $S^{n+1}$  est contractile.

Ceci permet de définir, en passant à la colimite :

$$S^0 \subseteq S^1 \subseteq S^2 \subseteq \dots \subseteq S^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n$$

un nouveau  $CW$ -complexe appelé *sphère de dimension infinie*.

3. Montrer que  $S^\infty$  est contractile.

▷ Éléments de réponse.

1. Voir le cours.
2. On utilise en  $N$  (puis en  $S$ )  $B^n \longrightarrow S^n$ .  

$$x \longmapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$
3. Il suffit d'appliquer le lemme précédent.

**Lemme. (Lemme d'extension)**

Soit  $(X, A)$  un  $CW$ -complexe relatif et une application continue  $f : A \rightarrow Y$  avec  $Y$  connexe par arcs. Montrer que  $f$  s'étend à une application continue  $F : X \rightarrow Y$  si  $\pi_{n-1}(Y) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X/A$  possède au moins une cellule de dimension  $n$ .

**Exercice 17**

Retrouver grâce à cela que toute  $CW$ -paire avec  $A$  contractile est telle que  $X$  se rétracte sur  $A$ .

**6.1.8.3 Approximation cellulaire****Théorème. (*Approximation cellulaire des espaces topologiques*)**

Pour tout espace topologique  $X$ , il existe un complexe cellulaire  $X_{CW}$  et une équivalence faible d'homotopie  $w_X : X_{CW} \rightarrow X$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) L'idée est la même que pour obtenir une résolution projective d'un  $\mathbb{Z}$ -complexe de chaînes : on ajoute des cellules à chaque degré pour obtenir des isomorphismes de groupes.

Un peu plus précisément, l'idée est de raisonner par récurrence sur la dimension  $n \in \mathbb{N}$  et de créer un  $CW$ -complexe  $X_{CW}^{(n)}$  avec les mêmes groupes d'homotopie que  $X$  pour  $k \leq n$ . Pour ce faire, on considère la présentation de  $\pi_n(X)$  en générateurs et relations. Les générateurs permettent de définir les applications caractéristiques  $\varphi_n$  et les relations aux caractéristiques  $\varphi_{n+1}$ . À chaque étape, cette construction  $X_{CW}^{(n)} \rightarrow X$  est liée aux représentants des groupes d'homotopie dans  $X$ . ■

**Proposition. (*Naturalité homotopique de l'approximation cellulaire*)**

Pour tous espaces topologiques  $X, Y$ , il existe  $F(f) : X_{CW} \rightarrow Y_{CW}$  continue telle que  $w_T F(f) \sim f w_X$ , autrement dit telle le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_{CW} & \xrightarrow{w_X} & X \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Y_{CW} & \xrightarrow{w_Y} & Y \end{array}$$

commute homotopiquement.

▷ On applique la proposition du tiré en arrière cellulaire à  $Z = X_{CW}$ ,  $f \hat{=} w_Y$ . ■

Cette approximation cellulaire d'espaces topologiques vaut aussi pour les applications continues.

**Théorème. (*Approximation cellulaire d'applications*)**

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires. Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  est homotope à une application cellulaire.

⊗ (*Idée de la preuve.*) On utilise le lemme : si  $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  est une application entre  $CW$ -complexes telle que la dimension de  $A$  est inférieure à  $n$ ,  $X \setminus A$  est une cellule de dimension  $n$ , la

dimension de  $Y$  est inférieure à  $m$  et  $Z \setminus Y$  est une cellule de dimension  $N \geq m$ . Alors  $f$  est homotope relativement à  $A$  à  $g : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  telle que  $g(X \setminus A)$  évite un point de  $Z \setminus Y$ . ■

### Corollaire. (*Approximation cellulaire d'applications entre paires*)

Toute application continue de paire  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  entre paires cellulaires est homotope en tant qu'application de paire à une application cellulaire.

### Corollaire. (*n*-connexité des paires cellulaires)

Soit  $(X, A)$  une paire cellulaire telle que  $X \setminus A$  ait seulement des cellules de dimension  $\geq n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(X, A)$  est  $n$ -connexe.

### Corollaire

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Alors la paire cellulaire  $(X, X^{(n-1)})$  est  $n$ -connexe et l'inclusion  $X^{(n-1)} \rightarrow X$  induit des isomorphismes  $\pi_k(X^{(n-1)}) \simeq \pi_k(X)$  pour tout entier naturel  $k < n$  et une surjection  $\pi_n(X^{(n-1)}) \twoheadrightarrow \pi_n(X)$ .

### Exercice 18 (Tour de Postnikov)

1. Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer qu'il existe un  $CW$ -complexe  $X_n$  tel que  $X \subseteq X_n$  est un sous- $CW$ -complexe et qui satisfait pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \pi_k(X_n) \simeq \pi_k(X) \text{ pour } k \leq n \\ \pi_k(X_n) \simeq 0 \text{ pour } k > n. \end{cases}$$

2. Montrer qu'il existe des applications  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  qui rendent le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \downarrow & \\ & X_3 & \\ & \swarrow & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X_1. \end{array}$$

### Théorème

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre complexes cellulaires simplement connexes. Si  $H_n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.

▷ On utilise simplement qu'un qis homologique induit une équivalence faible d'homotopie, et pour un  $CW$ -complexe, c'est la même chose. ■

### Exercice 19

Démontrer le théorème précédent sur les  $CW$ -complexes simplement connexes quasi-isomorphes à l'aide du théorème de Hurewicz de la section suivante.

#### 6.1.9 Lien entre homotopie supérieure et homologie simpliciale

##### Définition-propriété. (*Morphisme de Hurewicz généralisé*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $f : S^n \rightarrow X$  une application continue. Elle induit une application en homologie  $H_n(f) : H_n(S^n) \rightarrow H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$ . D'autre part, on sait que  $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ . On peut alors définir de manière unique une application :

$$\begin{aligned}\pi_n(X) &\longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto H_n(f)(1)\end{aligned}$$

qui est un morphisme dit *morphisme de Hurewicz* si le contexte est clair.

▷ Il s'agit de raisonnements géométriques assez plaisants dont certains ont déjà été développés en homologie. ■

##### Théorème. (*Théorème de Hurewicz*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  un espace topologique. Si  $X$  est  $(n - 1)$ -connexe, alors :

1. l'homologie réduite en degré  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  est nulle :  $\tilde{H}_k(X) = 0$  ;
2. pour  $n = 1$ ,  $H_1(X) \simeq \pi_1(X)^{ab}$  par le morphisme de Hurewicz ;
3. dès que  $n \geq 2$ , le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme

$$\pi_n(X) \simeq H_n(X).$$

##### Corollaire. (*Théorème de Brouwer*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .

▷ Puisque la sphère de dimension  $n \neq 1$  est  $n - 1$ -connexe d'après le calcul de la petite homotopie des sphères et que  $H_n(S^n)$  par un calcul déjà fait en HOMOLOGIE. Le cas  $n = 1$  est bien connu et s'y rajoute.. ■

## 6.2 Homotopie des ensembles simpliciaux

**N**OUS venons de voir que les *CW*-complexes fournissaient une très large famille d'espaces topologiques : tout espace topologique est faiblement équivalent à un *CW*-complexe. Malheureusement, la donnée d'un *CW*-complexe n'est pas simple ; comment code-t-on cela dans un ordinateur ? L'idée ici sera de passer du modèle utilisant des disques ( $D^n, S^{n-1}$ ) comme brique de base à des  $n$ -simplexes géométriques standards ( $|\Delta^n|, \partial|\Delta^n|$ ). La donnée des recollements de cellules est alors beaucoup plus simple, car purement combinatoire. Ceci donne naissance à la notion d'ensembles simpliciaux. Ce n'est donc pas pour rien que ce domaine est souvent qualifié de *théorie d'homotopie combinatoire*. L'étudiant est chanceux : la théorie des ensembles simpliciaux admet un paradigme, un exemple sur lequel presque toutes les définitions et propriétés peuvent être lues facilement, il s'agit des simplexes standards.

### 6.2.1 Espaces topologiques triangulés

Les diverses notions de la topologie algébrique, comme les groupes d'homologie ou les groupes d'homotopie, s'avèrent en général difficiles à calculer. Comme toujours, toute information supplémentaire est la bienvenue pour simplifier de tels calculs. Dans cette section, nous considérerons les espaces topologiques munis d'une bonne décomposition en cellules qui auront la forme de points, d'intervalles, de triangles, de tétraèdres, etc. Plus précisément, en toute dimension, les briques de base sont les simplexes géométriques.

#### 6.2.1.1 Introduction : les complexes simpliciaux

On conseille au lecteur de reprendre les définitions de base relatives aux SIMPLEXES.

→ *Notation.* On utilise pour  $n \in \mathbb{N}$ , la notation combinatoire un peu modifiée  $[n] = [[0, n]]$ .

**VOC** Puisque tout  $n$ -simplexe,  $n \in \mathbb{N}$ , est homéomorphe au  $n$ -simplexe standard  $|\Delta^n|$ , on parlera souvent « du »  $n$ -simplexe pour désigner celui-ci.



Cependant, on essaiera tant que possible de les appeler simplexes géométriques afin de ne pas les confondre avec les *simplexes* simpliciaux définis dans la prochaine section.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

#### Définition. (*Polyèdre simplicial*)

Un *polyèdre simplicial*  $|\mathfrak{X}|$  de  $\mathbb{R}^N$  est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est vide ou une face de chacun d'eux.



Deux triangles isocèles dont les bases sont portées par la même droite, ne forment un complexe simplicial que si leurs bases sont identiques. (On ne peut avoir une sous-simplexe inclus dans un autre.)

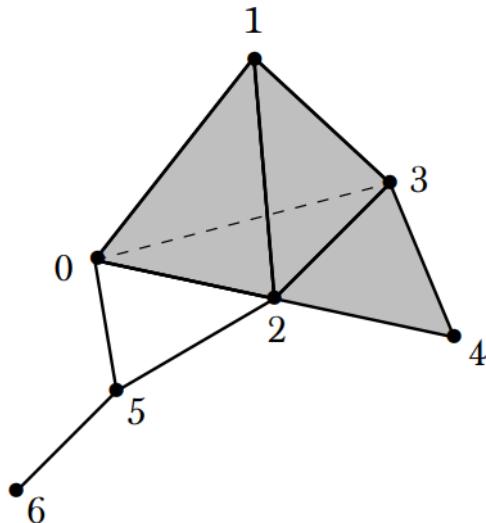


FIGURE 6.2.1 : *Un exemple de polyèdre simplicial.* —

### Définition. (*Polyèdre*)

Un *polyèdre* de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $n \in \mathbb{N}$  est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est vide une face de chacun d'eux et pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  l'intersection de deux simplexes de dimension  $d$  est une  $(d - 1)$ -face de chacun d'eux.

→ *Convention.* Par un léger abus de notation, on notera souvent un complexe simplicial simplement par  $\mathfrak{X}$ .

### Définition. (*Complexe simplicial*)

Un *complexe simplicial (abstrait)* est une paire  $(V, \mathfrak{X})$  où  $V$  est un ensemble et  $\mathfrak{X}$  est un ensemble de parties de  $V$  qui soit  $\subseteq$ -transitif, i.e. telles que pour tout  $F \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $Z \subseteq F \implies Z \in \mathfrak{X}$ .

On impose parfois que  $\{v\} \in \mathfrak{X}$  pour tout  $v \in V$ .

**VOC** Les éléments de  $V$  sont appelés *sommets*; les éléments de  $\mathfrak{X}$  sont appelés *faces*.

Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des polyèdres simpliciaux sont représentées fidèlement par des données combinatoires simples. Les classes d'équivalence à homéomorphisme

près des polyèdres simpliciaux sont en bijection avec les complexes simpliciaux finis :

$$\boxed{\text{polyèdres simpliciaux finis} /_{\text{homéomorphisme cellulaire}} \simeq \text{complexes simpliciaux finis} /_{\text{bijections du } V}}.$$

Dans le cas du polyèdre simplicial représenté ci-dessus, le complexe simplicial fini correspondant est encodé par :  $\{0,1,2,3,4,5,6,01,02,03,05,12,13,23,24,25,56,012,013,023,123,234,0123\}$ .

### Exemples. (*Complexes et polyèdres simpliciaux*)

1. Tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  est un polyèdre simplicial. Le complexe simplicial associé à  $|\Delta^n|$  pour  $n \in \mathbb{N}$  est  $([n], \mathcal{P}([n]))$ , autrement dit la donnée combinatoire associée à  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  est formée de tous les sous-ensembles de  $\{v_0, \dots, v_n\}$ , ce qui correspond à l'ensemble de ses faces. On rappelle que c'est un modèle pour  $D^n$ .
2. Le complexe simplicial associé maintenant au polyèdre  $\partial|\Delta^n|$ , i.e. un  $n$ -simplexe géométrique amputé de sa face de dimension maximale, est  $([n], \mathcal{P}([n]) \setminus [n])$ . Il fournit quant à lui un modèle pour la sphère de dimension  $n - 1$   $S^{n-1}$ .
3. (*Cornets*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in [n]$ , le  $k$ -ième cornet de dimension  $n$  de  $|\Delta^n|$  est le complexe simplicial  $\Lambda_k^n$  obtenu à partir de  $\partial|\Delta^n|$  en retirant la face de dimension  $n - 1$  :  $0 \dots \hat{k} \dots n$  dite *opposée au sommet  $v_k$*  (avec la convention d'écriture donnée précédemment). Le complément de la face retirée composée des éléments de même dimension est appelée *facette*. Le complexe simplicial associé est donc  $([n], \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n], [n] \setminus \{k\}\})$ .

Dans le cas  $n = 3$ , on a un tétraèdre vide dont on a retiré une face, ustensile parfait pour y stocker des frites.

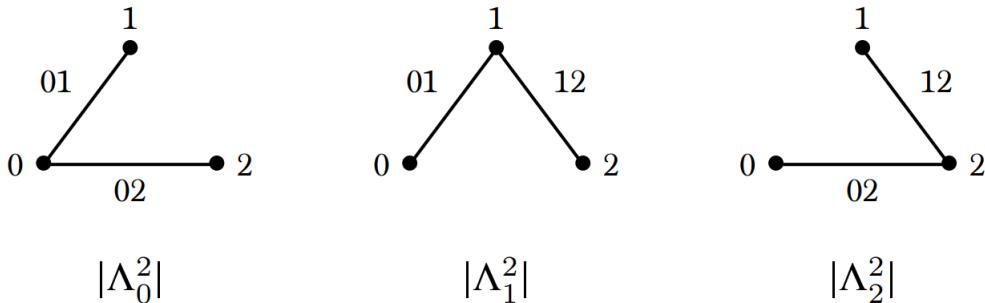


FIGURE 6.2.2 : *Cornets*. —  
Exemples en dimension 2

### Définition. (*n-squelette d'un complexe simplicial*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $n$ -squelette d'un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  est le complexe simplicial  $\mathfrak{X}^{(n)}$  formé des éléments de  $\mathfrak{X}$  de cardinal au plus  $n + 1$ .

**Remarque importante.** Cependant, la notion de complexe simplicial permet d'envisager des « polyèdres simpliciaux de dimension infinie ».

### Définition. (*Réalisation géométrique d'un complexe simplicial*)

La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  est la colimite  $|\mathfrak{X}| = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} |\mathfrak{X}^{(n)}|$  munie de la topologie colimite et définie dans le cas fini sur chaque terme squelettique en  $n \in \mathbb{N}$  par le pushout

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n| & \xrightarrow{\varphi_n} & |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n| & \xrightarrow{\Phi_n} & |\mathfrak{X}^{(n)}| \end{array}$$

i.e.  $|\mathfrak{X}^{(n)}| := |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \sqcup_{\mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n|} \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n|$  où l'on considère l'injection canonique à gauche,  $\mathfrak{X}_n = \{F \in \mathfrak{X} \mid \operatorname{card}(F) = n+1\}$  et  $\varphi_n$  sur  $\{x_0, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n \rangle$  est définie par  $\Phi_{n-1}$  sur  $\{x_0, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n \rangle$  (phrase à méditer, mais licite et visuelle). Pour  $n = 0$  (mais on peut l'en déduire<sup>a</sup> si l'on est vraiment fainéant),  $|X^{(0)}|$  est l'ensemble des sommets  $V$  muni de la topologie discrète.

<sup>a</sup> En effet,  $|\Delta^0|$  est le singleton standard,  $\mathfrak{X}_0 = V$  et  $|X^{(-1)}| := \emptyset$ , d'où  $|\mathfrak{X}^{(0)}| = \emptyset \sqcup_{\emptyset} V \simeq V$ .

*Remarque.*  $\mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{X}_0 \cup \dots \cup \mathfrak{X}_n$ .

### Définition. (*PL-sphère*)

Une *PL-sphère* (pour *piecewise-linear*) ou *sphère linéaire par morceaux* est un complexe simplicial dont la réalisation géométrique est homéomorphe à une sphère. Ceci inclut les points et les cercles.

### Exemples. (*PL-sphères*)

1. Le complexe simplicial correspondant à  $|\partial\Delta^k|$  pour  $k \in \mathbb{N}, k \neq 1$  est une *PL-sphère*, car sa réalisation géométrique est  $\partial\Delta^k \simeq S^{k-1}$  pour  $k \geq 2$  et à un point pour  $k = 0$ . Pour  $k = 1$ , un segment n'est pas homéomorphe à aucune sphère, mais homotopiquement équivalent à un point.
2. Les polyèdres sont des *PL-sphères*.

### Fait. (*Complexe simplicial $\Rightarrow$ complexe cellulaire*)

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial est un *CW-complexe*.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\Delta^n| \simeq D^n$  et  $\partial|\Delta^n| \simeq S^{n-1}$ . De plus, les applications caractéristiques peuvent se transporter sur les disques et les sphères par cette identification et on utilise la caractérisation fondamentale des *CW-complexes séparés*.

Réiproquement :

### Théorème. (*Théorème d'approximation simpliciale*)

Tout *CW-complexe* est homotopiquement équivalent à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial, *i.e.* pour tout *CW-complexe*  $X$ , il existe un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  tel que  $X \simeq |\mathfrak{X}|$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) La définition de la réalisation géométrique donnée ci-dessus est proche de celle de *CW-complexes*. Il s'agit donc d'écrire le recollement des cellules d'un *CW-complexe* à la manière plus restrictive des complexes simpliciaux. Ceci se fait comme toujours par récurrence sur la dimension du squelette. ■

**Mnémonik :** les deux notions de *CW-complexes* et de complexes simpliciaux sont donc homotopiquement équivalentes, ce qui est intéressant.

### Exercice 20

Donner un *CW-complexe* qui n'est pas homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial.

### Corollaire. (*Whitehead simplicial*)

Tout espace topologique est faiblement homotopiquement équivalent à un complexe simplicial.

#### 6.2.1.2 Notion abstraite de triangulation

### Définition. (*Triangulation*)

Une *triangulation* d'un espace topologique  $X$  est un complexe simplicial  $X$  et un homéomorphisme  $X \simeq |\mathfrak{X}|$ .

On dit qu'un espace  $X$  est *triangulable* s'il admet une triangulation. Le choix d'une triangulation permet de rendre un espace *triangulé*.

### Reformulation pratique. (*Triangulation d'un ensemble*)

Une triangulation d'un ensemble  $X$  est une famille d'homéomorphismes sur leurs images  $(\varphi_i)_{i \in I}$  définis chacun sur un simplexe et à valeurs dans  $X$ , *i.e.*  $\varphi_i : \Delta \rightarrow \varphi_i(\Delta) \subseteq X$ , de sorte que :

- ★ pour tous  $i, j \in I$ ,  $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta')$  est soit vide, soit une face commune aux deux simplexes ;
- ★ la réunion des  $\varphi_i(\Delta^{n_i})$ , dit *simplexes*  $\sigma$  de la triangulation, recouvre  $X$  ;

★ tout compact de  $X$  coupe un nombre fini de simplexes de la triangulation.  
En particulier, les intérieurs des simplexes d'une triangulation sont disjoints.

### Exemples. (*Triangulation des espaces topologiques*)

1. Tout polyèdre simplicial est trivialement triangulable et triangulé par l'identité, car il est par construction la réalisation du complexe simplicial associé.
2. Tout  $CW$ -complexe est homotopiquement à un espace triangulable, en vertu du théorème d'approximation simpliciale.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Tout  $n$ -simplexe amputé de sa face maximale fournit un modèle de triangulation pour la sphère de dimension  $n - 1$ .
4. D'après un théorème dû à WHITNEY, toute variété différentiable est triangulable, chouette.

Cette définition combinatoirement simple a un principal écueil, elle est très rigide : le nombre de simplexes pour décomposer un espace est loin d'être optimal. En effet, deux faces distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets et les sommets d'une face sont distincts.

### Contre-exemple. (*Non-triangulation d'un triangulable*)

Pour le cercle, qui est clairement triangulable comme le montre le diagramme ci-dessous, les restrictions dans la définition de triangulation font que l'on ne peut pas l'écrire comme comme deux segments joints aux deux bouts ou comme un seul segment à sommets confondus. Il faut donc au moins trois segments pour trianguler le cercle.

En effet, avec deux segments, l'intersection des segments est un double point qui n'est donc pas une face mais une réunion de face, râté. Dans le cas d'un unique segment, l'homéomorphisme de triangulation n'est pas injective, ce qui est problématique pour une bijection.

De même, un ruban de Möbius, un tore, une bouteille de Klein ou un plan projectif n'est pas triangulable simplement en coupant en deux le diagramme carré qui les définit. □

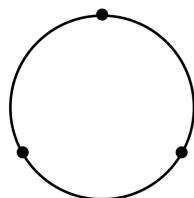


FIGURE 6.2.3 : *Triangulation du cercle.* —

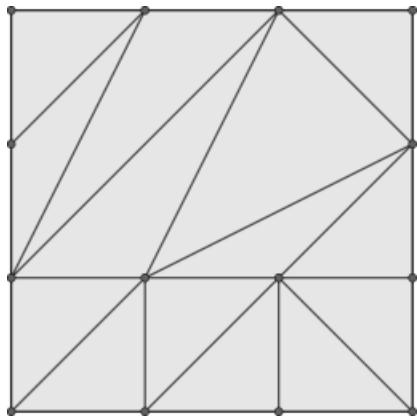
On peut trianguler  $S^1$  par trois sommets et trois arêtes, soit 6 simplexes au total. La triangulation est de dimension 1. On a bien alors  $|\partial\Delta^2| \simeq S^1$ .

**Exercice 21 (Triangulation minimale du tore)**

On sait d'après le cours de topologie algébrique que le tore ne peut être triangulé qu'avec un minimum de 7 sommets, 21 arêtes et 14 triangles. Exhiber une triangulation respectant exactement ces conditions.

▷ **Éléments de réponse.**

Le diagramme sur le carré fondamental du tore :



devrait convenir.

**Heuristique**

Cette question est loin d'être gratuite, par exemple lorsque l'on veut calculer les groupes d'homologie (cellulaire) d'un espace topologique, car la dimension des espaces vectoriels en jeu est égale aux nombres de simplexes de la triangulation. Par exemple, dans les méthodes actuelles de reconnaissance des formes des neurones utilisant des outils homologiques, la taille de ces espaces est de l'ordre de 30000.

**Définition. (*Étoile d'un simplexe dans une triangulation*)**

L'*étoile* d'un simplexe  $\sigma$  d'une triangulation d'un espace topologique est la réunion notée  $\sigma^*$  ou  $\text{star}(\sigma)$  de tous les simplexes de la triangulation contenant  $\sigma$ .

**Définition. (*Link*)**

Le *link* d'un simplexe  $\sigma$  d'une triangulation est la réunion notée  $\text{link}(\sigma)$  des simplexes  $\sigma'$  de l'étoile de  $\sigma$  tels que  $\sigma'$  est une face d'un simplexe de  $\text{star}(\sigma)$  et  $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ .

**Définition. (*Triangulation combinatoire*)**

On dit qu'une triangulation d'un espace est *combinatoire* si le link de chacun de ses simplexes est une *PL*-sphère.

**Proposition. (*Lien étoile-link*)**

Le link d'un simplexe est la frontière de son étoile.

▷ Simple reformulation de la définition de l'étoile, en connaissant la frontière d'un simplexe donné, ce qui est facile. ■

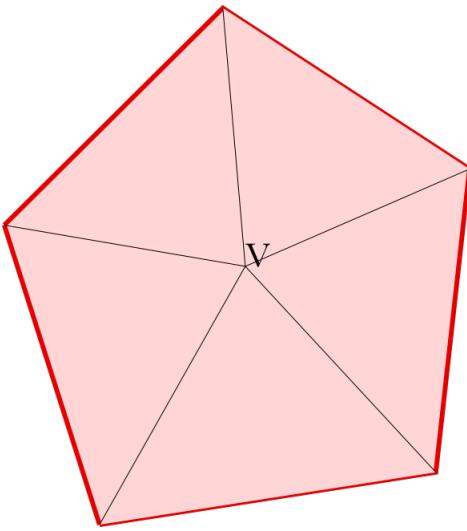


FIGURE 6.2.4 : Étoile et link d'un sommet d'une triangulation. —

On considère une triangulation du pentagone. Soit  $V$  le sommet central de cette triangulation.  
En rose, l'étoile du sommet  $V$ . En rouge, le link de  $V$ .

Essayons donc de trouver une notion plus souple et générale. Pour cela, on va chercher à encoder d'abord la manière dont les différents simplexes se recollent le long de leurs faces.

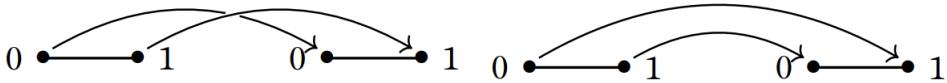
### 6.2.1.3 Applications simpliciales

La définition suivante est l'équivalent des applications cellulaires pour les  $CW$ -complexes.

**Définition. (*Application simpliciale*)**

Soient  $(V, \mathfrak{X})$  et  $(W, \mathfrak{Y})$  deux complexes simpliciaux. Une application  $f : V \rightarrow W$  est une *application simpliciale* si l'image d'une face est une face, *i.e.* si  $f(F) \in \mathfrak{Y}$  pour tout  $F \in \mathfrak{X}$ . Une telle donnée induit une unique application continue  $|\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$  par interpolation linéaire, c'est-à-dire en utilisant les coordonnées barycentriques.

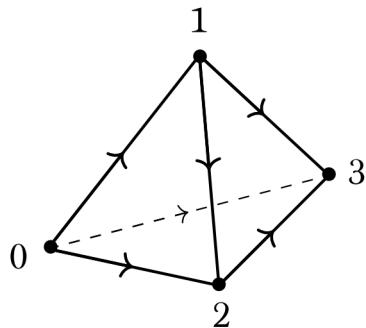
Comme l'exemple ci-dessus le montre, le nombre d'applications simpliciales n'est pas optimale : d'un point de vue topologique, il n'est pas utile d'avoir autant d'applications. Soyons rusés et imposons une condition supplémentaire.

FIGURE 6.2.5 : *Applications simpliciales.* —

Les deux applications simpliciales bijectives entre deux 1-simplexes sont les précédentes. Cependant, grâce à la définition donnée ci-dessous, il n'existe alors plus qu'une application simpliciale bijective entre deux 1-simplexes ordonnés.

### Définition. (*Complexe simplicial ordonné*)

Un *complexe simplicial ordonné* est un complexe simplicial muni d'un ordre total sur son ensemble de sommets.

FIGURE 6.2.6 : *Tétraèdre ordonné.* —

En général, toute numérotation des sommets  $V \simeq [\![1, \text{card}(V)]\!]$  fournit une structure ordonnée sur le complexe simplicial considéré.

### Définition. (*Application simpliciale entre complexes ordonnés*)

Soient  $(V, \leqslant, \mathfrak{X})$  et  $(W, \preccurlyeq, \mathfrak{Y})$  deux complexes simpliciaux. Une application  $f : V \rightarrow W$  est une *application simpliciale ordonnée* si c'est une application simpliciale qui respecte l'ordre des complexes, i.e. dès que  $x \leqslant y$ ,  $f(x) \preccurlyeq f(y)$ .

Cette donnée supplémentaire induit une orientation pour toutes les faces d'un complexe simplicial.

Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont caractérisées par l'application ensembliste sous-jacente croissante entre les ensembles ordonnés de sommets.

**Définition-propriété. (*Coface*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il y a par un raisonnement combinatoire immédiat  $n + 1$  applications simpliciales injectives depuis un  $(n - 1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné. On traite sans perte de généralité le cas des simplexes géométriques standards  $|\Delta^n|$ . Les  $n + 1$  applications  $\delta_i : [n - 1] \rightarrow [n]$  pour  $i \in [n]$ , sont les injections qui ne prennent pas la valeur  $i$  :

$$\delta_i(k) = \begin{cases} k & \text{pour } k < i \\ k + 1 & \text{pour } k \geq i. \end{cases}$$

Ces applications sont appelées les *cofaces* et, par léger abus de notation, on note encore  $\delta_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n-1}|$  et  $|\Delta^n|$ .

→ *Convention.* Comme le contexte est clair, nous n'utilisons pas d'indice  $n$  dans la notation des cofaces, ce qui permet d'alléger grandement les écritures.

**Lemme. (*Relation fondamentale des cofaces*)**

On considère le  $n$ -simplexe pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Pour tous  $i < j$ ,  $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$ .

▷ Successivement :

$$0 \xrightarrow{\delta_{j-1}} 0 \xrightarrow{\delta_i} 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$i-1 \longrightarrow i-1 \longrightarrow i-1$$

$$\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & i \\ & & \searrow \\ i+1 & \longrightarrow & i+1 \\ & & \searrow \\ \vdots & & i+2 \end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{array}{ccc} j-2 & \longrightarrow & j-2 \\ & & \searrow \\ j-1 & & j-1 \\ & \swarrow & \\ \vdots & & j \\ & & \searrow \\ \vdots & & j+1 \end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

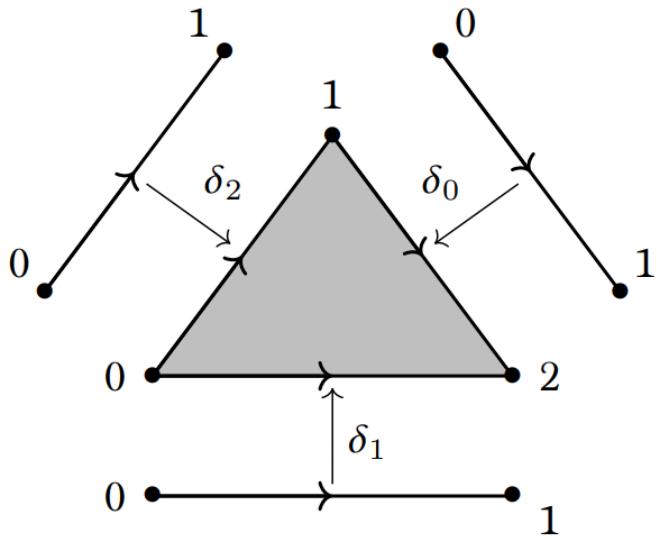
$$n \qquad \vdots$$

$$n+1 \qquad \vdots$$

$$n+2$$

pour tous  $i, j \in [n]$ . Et ce sont bien  $i$  et  $j$  que l'on a laissé de côté. ■

Dualemment, il y a donc  $n+1$  manières de recoller un  $n$ -simplexe géométrique ordonné sur un  $(n-1)$ -simplexe géométrique ordonné. Utilisons maintenant ces propriétés pour décrire un complexe simplicial ordonné  $\mathfrak{X}$  comme un recollement de simplexes géométriques ordonnés.

FIGURE 6.2.7 : *Cofaces du 1-simplexe sur le 2-simplexe.* —

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $X_n$  l'ensemble des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés qui composent  $X$ . Le complexe simplicial ordonné  $X$  est alors complètement caractérisée par la donnée des recollements des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés sur les  $(n-1)$ -simplexes géométriques ordonnés, ce qui revient à se donner  $n+1$  applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ , avec  $0 \leq i \leq n$  entier, vérifiant les relations duales de celles des cofaces. Ceci induit la définition suivante.

#### 6.2.1.4 $\Delta$ -complexes

##### Définition. ( $\Delta$ -complexe)

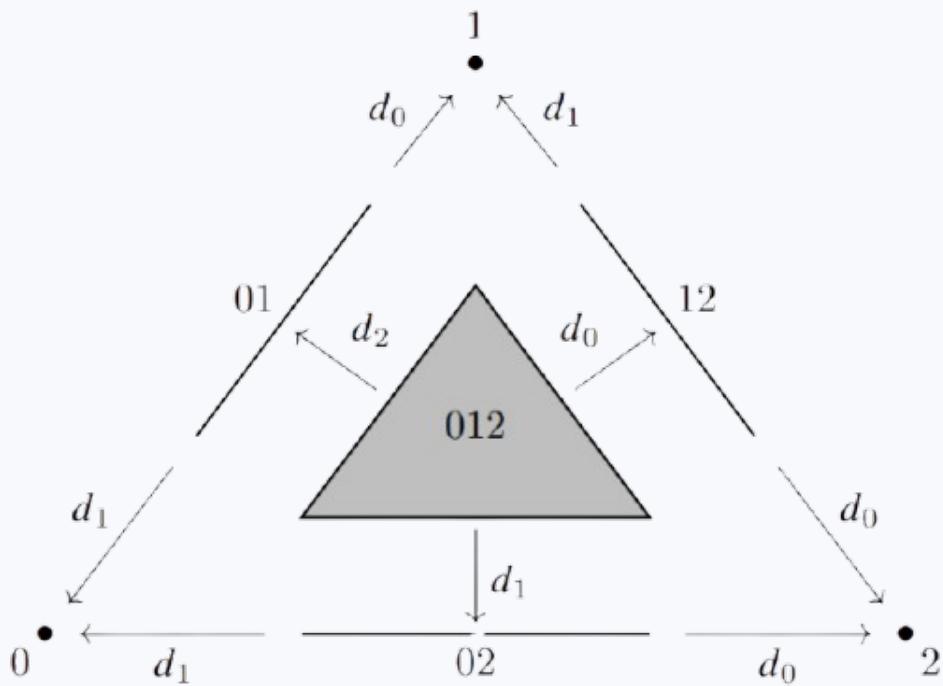
Un  $\Delta$ -complexe est la donnée d'une collection  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensembles munis en tout  $n \in \mathbb{N}^*$  d'applications dites *faces*  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  vérifiant les relations  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  dès que  $i < j$ .

##### Exemple fondamental. ( $\Delta$ -complexe associé aux simplexes géométriques)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $\Delta$ -complexe associé au  $n$ -simplexe géométrique ordonné standard correspond à la donnée :

$$X_0 = [n], X_1 = \{01, \dots, (n-1)n\}, \dots, X_n = \{012\dots n\}, X_{n+1} = \emptyset$$

munie des applications  $d_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k$  pour  $i_j$  des sommets du  $n$ -simplexe,  $j \in [n]$ .

FIGURE A. *Delta-complexe.* —**Exercice 22 (Lien face-coface)**

Voir que  $d_j \delta_j = id$ , mais que l'inverse est faux.

Réiproquement, l'espace topologique cellulaire ainsi encodé combinatoirement s'obtient via la construction suivante.

**Définition. (*Réalisation géométrique d'un  $\Delta$ -complexe*)**

Soit  $\mathfrak{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\Delta$ -complexe. Sa *réalisation géométrique* est

$$|\mathfrak{X}|_\Delta = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n \times |\Delta^n|}{\sim}$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par  $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in X_n$ , pour tout  $y \in |\Delta^{n-1}|$ ,  $0 \leq i \leq n$  entier.

**Fait**

Tout complexe simplicial ordonné induit un  $\Delta$ -complexe dont la réalisation géométrique lui est homéomorphe  $|\mathfrak{X}|_\Delta \simeq |\mathfrak{X}|$ .

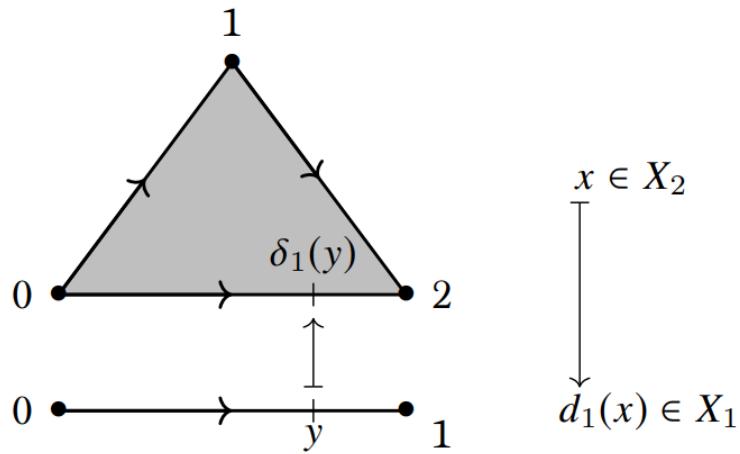


FIGURE 6.2.9 : Réalisation géométrique d'un simplexe. —

Attention par contre, la réalisation géométrique d'un  $\Delta$ -complexe  $|\mathfrak{X}|$  ne forme pas nécessairement un complexe simplicial pour la donnée combinatoire  $|\mathfrak{X}|$  comme le montre les exemples qui suivent. Par contre, il existe toujours<sup>a</sup> un complexe simplicial homéomorphe à la réalisation géométrique  $|\mathfrak{X}|_\Delta$ .

<sup>a</sup> Quitte pour cela à considérer des subdivisions barycentriques.

Ce qu'il faut en retenir, c'est que la notion combinatoire simple de  $\Delta$ -complexe est plus riche et souple que celle de complexe simplicial : par exemple, on peut utiliser moins de cellules qu'auparavant, comme le montre les exemples suivants.

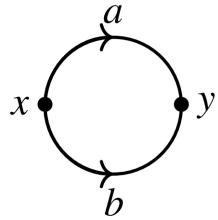
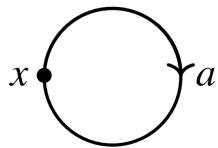
### Exemples. ( $\Delta$ -complexes)

- Le  $\Delta$ -complexe  $X_0 = \{x,y\}$ ,  $X_1 = \{a,b\}$ ,  $X_2 = \emptyset$  et de même au-delà, avec  $d_1(a) = d_1(b) = x$ ,  $d_0(a) = d_0(b) = y$  permet de réaliser le cercle comme  $\Delta$ -complexe comme recollement de deux segments.

Mieux, le  $\Delta$ -complexe  $X_0 = \{x\}$ ,  $X_1 = \{a\}$ ,  $X_2 = \emptyset$  et de même au-delà, avec  $d_0(a) = d_1(a) = x$ , permet de réaliser le cercle comme  $\Delta$ -complexe comme recollement d'un seul segment sur ses deux extrémités.

### Définition. (*Morphisme de $\Delta$ -complexes*)

Soient  $\mathfrak{X} = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, d)$  et  $\mathfrak{Y} = ((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}, d')$  deux  $\Delta$ -complexes en notant  $d$  les collections des faces indifféremment, sans problème. Un *morphisme de  $\Delta$ -complexes* est une collection

FIGURE 6.2.10 : Delta-complexe sur  $S^1$  à deux arêtes. —FIGURE 6.2.11 : Delta-complexe maximal sur  $S^1$  à une seule arête. —

d'applications  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ d_i \downarrow & & \downarrow d'_i \\ X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \end{array}$$

commute pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $i \in [n]$ .

Deux questions se posent alors : comment obtenir la définition de  $\Delta$ -complexe de manière plus simple et comment définir la notion d'application entre  $\Delta$ -complexes ? Les réponses à ces deux questions viennent en utilisant la théorie des catégories. Les éléments d'un  $\Delta$ -complexe sont indiqués par les entiers naturels, soit, de manière équivalente, par les ensembles ordonnés  $[n]$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et les applications entre deux éléments consécutifs correspondent aux applications strictement croissantes « élémentaires ».

### Fait. (*Catégorie des $\Delta$ -complexes*)

La classe des  $\Delta$ -complexes avec pour morphismes les morphismes de  $\Delta$ -complexes forme une catégorie, notée  $\Delta Cx$ .

## 6.2.2 Construction des ensembles simpliciaux

### 6.2.2.1 Catégories permettant de construire celle des ensemble simpliciaux

#### Définition. (*Catégorie $\overline{\Delta}$* )

La *catégorie  $\overline{\Delta}$*  ou *catégorie simpliciale réduite* a pour objets les ensembles  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$  et pour morphismes entre  $[n], [m]$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , les applications strictement croissantes, i.e.  $\text{Hom}_{\overline{\Delta}}([n], [m]) = \{\varphi : [n] \rightarrow [m] \text{ strictement } \nearrow\}$ .

*Remarque.* Le notation  $\overline{\Delta}$  utilisée pour représenter cette catégorie vient du fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales strictement croissantes

#### Proposition

La catégorie des  $\Delta$ -complexes est une catégorie de préfaisceaux, nommément  $\Delta Cx \cong \text{Fun}(\overline{\Delta}^{\text{op}}, \text{Ens})$ .

Autrement dit, tout  $\Delta$ -complexe est un préfaisceau sur  $\overline{\Delta}$ .

▷ Ce n'est pas si évident. On remarque qu'une coface est un morphisme de la catégorie  $\overline{\Delta}$ . En fait,  $\overline{\Delta}$  admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces  $\delta_i$  vérifiant les relations de cofaces. En particulier, toute application strictement croissante  $\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$  où  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ . Or

$$\mathfrak{X} : \overline{\Delta}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ens}$$

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longmapsto & X_n = \mathfrak{X}([n]) \in \text{Ens} \\ \delta_i \downarrow & & \uparrow = \mathfrak{X}(\delta_i^{\text{op}}) = d_i \\ [n+1] & \longmapsto & X_{n+1} = \mathfrak{X}([n+1]) \in \text{Ens} \end{array}$$

dans ce cas particulier. ■

Attention ! Il existe d'autres applications simpliciales que les cofaces.

#### Définition-propriété. (*Codégénérescence*)

Considérons les applications simpliciales surjectives depuis un  $(n+1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné ; elles consistent à écraser un  $(n+1)$ -simplexe géométrique sur une de ses faces de dimension  $n$ . Comme précédemment, nous allons décrire le cas des simplexes géométriques standards ordonnés. Il y a  $n+1$  telles applications simpliciales, ce sont les surjections  $\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier

qui envoient  $i$  et  $i + 1$  sur  $i$  :

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k - 1 & \text{pour } k > i. \end{cases}$$

En images :

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sigma_i} \Delta^n$$

$$0 \longrightarrow 0$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$i - 1 \longrightarrow i - 1$$

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & i \\ & \searrow & \\ i + 1 & & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & n - 1 \\ & \nearrow & \\ n & & n \\ & \nearrow & \\ n + 1 & & \vdots \end{array}$$

et ces applications sont appelées les codégénérescences et, par léger abus de notation, on note encore  $\sigma_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n+1}|$  et  $|\Delta^n|$ .

Parallèlement aux relations de cofaces :

**Lemme. (*Relation fondamentale des codégénérescences*)**

On considère le  $n + 1$ -simplexe pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Pour tous  $i \leq j$ ,  $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$ .

Est-ce que ces applications simpliciales entre complexes simpliciaux peuvent être écrites au niveau des  $\Delta$ -complexes associés ? La réponse est négative. En effet, le  $\Delta$ -complexe associé à  $|\Delta^{n+1}|$  possède un ensemble non-trivial en dimension  $n + 1$  alors que le  $\Delta$ -complexe associé à

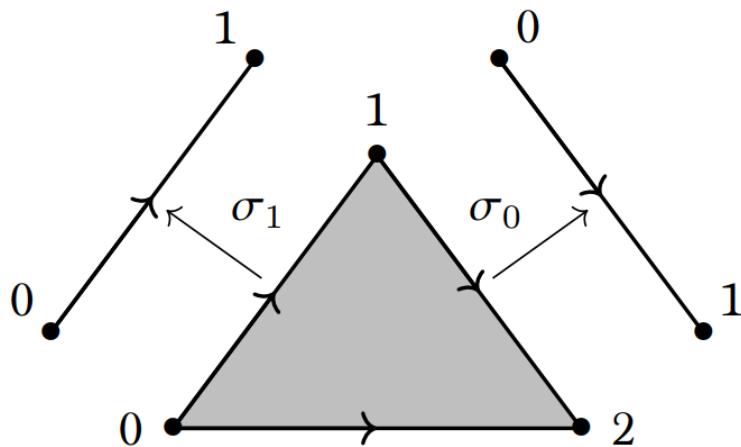


FIGURE 6.2.12 : Codégénérences du 2-simplexe sur le 1-simplexe. —

$|\Delta^n|$  admet des ensembles vides à partir de la dimension  $n$ . Il est alors impossible de définir un morphisme du premier vers le second.

Il nous faut donc introduire une notion plus riche que celle de  $\Delta$ -complexe. Pour cela, nous allons considérer une nouvelle catégorie qui a les mêmes objets que  $\overline{\Delta}$  mais qui admet toutes les applications croissantes comme morphismes.

### Définition. (*Catégorie des simplexes*)

La *catégorie des simplexes* ou *catégorie simpliciale* notée  $\Delta$  a pour objets les ensembles  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$  et pour morphismes entre  $[n], [m]$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , les applications croissantes, i.e.  $\text{Hom}_\Delta([n], [m]) = \{\varphi : [n] \rightarrow [m] \nearrow\}$ .

### Fait

La catégorie  $\Delta$  contient pour morphismes les cofaces et les codégénérences.

*Remarque.* Le nom donné à cette catégorie se justifie par le fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales croissantes.

### Définition. (*Ensemble simpliciaux*)

La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux (ensemblistes) sur  $\Delta$ , nommément  $\Delta\text{Ens} \cong \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ .

Autrement dit, un *ensemble simplicial* est un préfaisceau sur  $\Delta$ .

La factorisation d'une application ensembliste comme composée d'une surjection et d'une injection se raffine de la manière suivante avec les cofaces et les codégénérences.

**Proposition.** (*Forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes*)

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Toute application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$$

avec des entiers  $i_1 \leq \dots \leq i_r$  et  $j_1 < \dots < j_s$  entre 0 et  $m$  et de plus  $m = n - s + r$ .

▷ En posant  $p = |\text{Im}(\varphi)| - 1$ ,  $\varphi$  se décompose en  $[n] \xrightarrow{\pi} [p] \xhookrightarrow{\iota} [m]$  où  $[p] \simeq \text{Im}(\varphi)$  par l'unique bijection qui préserve l'ordre. Si l'on note  $[m] = \text{Im}(\varphi) \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$  avec  $r = m - p$  et  $i_1 \leq \dots \leq i_r$ , alors  $\iota = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$ . Soient aussi  $q_0, \dots, q_p$  les plus grands antécédents de  $0, \dots, p$  respectivement ; si l'on note maintenant  $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$  avec  $s = n - p$  et  $j_1 < \dots < j_s$ , avec  $\pi : \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$ . On a bien factorisé  $\varphi$  sous la forme voulue, car  $\varphi = \iota\pi$ .

Soit  $\varphi = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t} \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$  une autre décomposition de  $\varphi$  en cofaces et dégénérescences avec  $k_1 \leq \dots \leq k_t$ ,  $l_1, \dots, l_u$  et  $m - n = t - u$ . Déjà,  $|\text{Im}(\varphi)| - 1 = p = n - s = m - r = n - u = m - t$ , d'où  $u = s$  et  $t = r$ . De plus, puisque  $[p] \rightarrow [m]$  envoie  $0 < \dots < p$  sur l'image de  $\varphi$  de façon ordonnée,  $\iota = \iota'$ , d'où par définition de  $\iota$ ,  $(i_1, \dots, i_r)(k_1, \dots, k_r)$ . De plus,  $\iota\pi = \iota'\pi'$  donne  $\pi = \pi'$ , car  $\iota$  est injective, d'où par définition de  $\pi$ ,  $(j_1, \dots, j_s) = (l_1, \dots, l_s)$ . ■

**Lemme.** (*Relations entre cofaces et codégénérances*)

Avec les entiers évidents, les cofaces et les codégénérances vérifient les relations suivantes :

- ★ les relations de cofaces ;
- ★ les relations de codégénérances ;

$$\star \quad \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ ou } j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$

On note (★) l'ensemble de toutes ces relations.

▷ Les vérifications sont automatiques. ■

**Théorème.** (*Présentation de la catégorie des simplexes*)

La catégorie  $\Delta$  admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces et les codégénérances et dont les relations sont (★).

Autrement dit,  $\Delta$  est équivalente à la catégorie libre au sens des carquois sur  $\{\delta_i, \sigma_i, i\}$  quotientée par l'idéal engendré par (★).

▷ Notons  $\mathcal{C}$  cette catégorie explicite. Par le lemme précédent, le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \Delta$  est bien défini par le lemme précédent. Pour montrer qu'il est plein et fidèle, utilisons des bases de Gröbner. Interprétons les relations (★) comme des règles de réécriture lues de la gauche vers la droite. Ce système de réécriture est terminal. On vérifie que l'on a confluence des relations en arité 3, ce qui est le cas,

et que le lecteur peut vérifier au cas par cas si le cœur lui en dit. D'après le lemme du diamant, il existe une unique forme pour tout élément *i.e.* mot en  $\delta_i, \sigma_i$  sans terme préférentiellement à gauche. Les relations  $(\star)$  sont donc complètes, d'où le résultat. ■

Cette définition des ensembles simpliciaux est à la fois conceptuelle et compacte. Néanmoins, en pratique, on utilise souvent la description détaillée qui suit.

### Reformulation pratique. (*Ensemble simplicial*)

La donnée d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée d'une collection d'ensembles  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  munis d'applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  et  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier, appelées respectivement *faces* et *dégénérescences*, qui vérifient les relations duales de la catégorie des simplexes, à savoir :

- ★ (*relation de faces*)  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  pour  $i < j$  ;
- ★ (*relation de dégénérescences*)  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$  pour  $i \leq j$  ;

$$\star \text{ (relations entre faces et dégénérescences)} \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ ou } j + 1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1. \end{cases}$$

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux équivaut à la donnée d'une collection d'applications ensemblistes  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  qui commutent aux faces et aux dégénérescences.

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème précédent. Pour cela, on note les ensembles images d'un foncteur  $\mathfrak{X} : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  par  $X_n = X[n]$  et les images des opposés des cofaces et des codégénérescences par  $d_i = \mathfrak{X}(d_i^{\text{op}})$  et  $s_i = \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})$  respectivement. ■

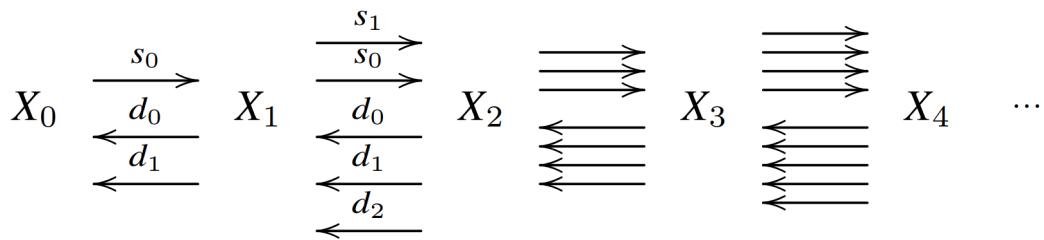


FIGURE 6.2.13 : *Représentation des ensembles simpliciaux.* —

*Remarque.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d_0 s_0 = id_X$  avec  $X_n \xrightarrow{s_0} X_{n+1}$  et  $d_0 : X_{n+1} \xrightarrow{d_0} X_n$ .

**Exemples. (*Ensembles simpliciaux*)**

1. (*Toy-model du simplexe standard*) Essayons d'associer un ensemble simplicial au  $n$ -simplexe géométrique standard  $\Delta^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pour que les applications dégénérescences existent, il faut ajouter des éléments. On considère alors toutes les suites croissantes d'éléments de  $[n]$  :  $X_0 = \{0, \dots, n\}$ ,  $X_1 = \{00, 01, \dots, (n-1)n, nn\}$ , et plus généralement  $X_k = \{i_0 \dots i_k \mid 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$ . On le munit des applications faces et dégénérescences :  $d_j(i_0 \dots i_j \dots i_m) = i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_m$  et  $s_j(i_0 \dots i_j \dots i_m) = i_0 \dots i_j i_j \dots i_m$ . On appelle  $n$ -simplexe simplicial standard, et l'on note encore  $\Delta^n$ , cet ensemble simplicial fondamental.
- Remarquons que  $\Delta_m^n \simeq \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ .
2. (*Ensemble simplicial d'un simplexe évidé*) L'ensemble simplicial noté  $\partial\Delta^n$  associé au complexe  $\partial|\Delta^n|$  admet pour  $d$ -simplexes les éléments de la forme  $i_0 \dots i_0 \dots i_m \dots i_m$  formé de  $d+1$  éléments avec  $m < n$  et  $i_0 < \dots < i_m$  dans  $[n]$ . On l'appelle quant à lui *bord du  $n$ -simplexe simplicial standard*.
3. (*Ensemble simplicial d'un cornet*) L'ensemble simplicial noté  $\Lambda_k^n$  dit *cornet simplicial*,  $k \in [n]$ , associé au  $k$ -ième cornet  $|\Lambda_k^n|$  admet les mêmes  $d$ -simplexes que  $\partial\Delta^n$  à l'exclusion de deux formés à partir de  $\{i_0, \dots, i_m\} = \{0, \dots, \hat{h}, \dots, n\}$ .

**Mnémonik :** sur l'exemple du simplexe standard, on peut lire les relations d'ensemble simplicial et les retrouver rapidement.

**Définition. (*Simplexe en théorie des ensembles simpliciaux*)**

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in X_n$ .

1. Si  $\exists y \in X_{n-1} \exists i \quad x = s_i(y)$ , on dit que  $x$  est *dégénéré* ;
2. sinon, on dit que  $x$  est *non dégénéré*. On note  $NX_n$  l'ensemble éventuellement vide des  $n$ -simplexes non dégénérés par  $NX_n$ .

**Exemple. (*Simplexe dégénéré*)**

Dans l'exemple précédent du simplexe standard  $\Delta^n$ , les  $k$ -simplexes non-dégénérés sont les éléments qui proviennent du complexe simplicial et les autres forment les  $k$ -simplexes dégénérés.

De manière plus générale, on peut associer un ensemble simplicial à tout complexe simplicial ordonné en considérant les  $n$ -simplexes de la forme  $\langle v_0, \dots, v_0, \dots, v_m, \dots, v_m \rangle$  pour tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$ .

Le recherche d'un foncteur de la catégorie des  $\Delta$ -complexes vers celle des ensembles simpliciaux est moins évidente. L'exemple suivant montre que l'on peut faire des choix pour étendre un  $\Delta$ -complexe en un ensemble simplicial.

### Exemple fondamental. (*Modèle d'ensemble simplicial pour le cercle*)

Reprenons l'exemple donné ci-dessus du  $\Delta$ -complexe qui fournit un modèle du cercle avec deux cellules. On note ici le 0-simplexe  $x$  par 0 et le 1-simplexe  $a$  par 01. À la lumière des exemples précédents, si on essaie à la main de lui adjoindre assez de  $n$ -simplices dégénérés pour créer les dégénérescences, on en vient à considérer les

$$X_n = \{0\dots 0, 0\dots 01, 0\dots 011, \dots, 01\dots 1\}$$

munis des applications

$$d_j(i_0\dots i_k) = i_0\dots \hat{i}_j\dots i_k, s_j(i_0\dots i_k) = i_0\dots i_j i_{j+1}\dots i_k$$

sauf pour  $d_0(01\dots 1) = 0\dots 0$ , ce qui correspond à un choix. Ces données forment un ensemble simplicial.

Le résultat suivant montre que tout simplexe dégénéré d'un ensemble simplicial admet une forme canonique.

### Heuristique

On veut un foncteur de  $\Delta Cx \rightarrow \Delta \text{Ens}$ . Or un élément de  $\Delta \text{Ens}$  est un foncteur  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . Or on a un foncteur  $\Phi : \overline{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$  qui n'est autre que  $\Phi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$  le plongement de la catégorie simpliciale réduite dans la catégorie simpliciale. On a donc un foncteur  $\overline{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \Delta Cx$  donné par le pullback  $(\Phi^{\text{op}})^*$ , d'où un foncteur  $\mathfrak{X} : \overline{\Delta}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathfrak{X}} \text{Ens}$ , soit un élément de  $\Delta Cx$ . Pour conclure de  $\Delta Cx$  dans  $\Delta \text{Ens}$ , on considère l'extension de Kan à gauche de  $\mathfrak{X}$  le long de  $\Phi^{\text{op}}$ . Ceci va être explicité juste après.

### Lemme. (*Eilenberg-Zilber*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout élément  $x \in X_n$ , il existe un unique  $y \in NX_m$ ,  $\psi : [n] \rightarrow [m]$  croissante surjective,  $m \in \mathbb{N}$ , telle que  $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(y)$ .

▷ Pour l'existence, si  $x \in NX_n$ ,  $y = x$ ,  $\varphi = id_{[n]}$  conviennent. Si  $x \notin NX_n$ ,  $x$  dégénéré, il existe  $y \in X_{n-1}$  avec  $x = s_{i1}(y)$  possiblement itéré.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe  $z \in NX_k$  et  $\psi : [n] \rightarrow [k]$  croissante surjective avec  $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par forme normale,  $\varphi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$  avec  $j_1 < \dots < j_s$  entiers. Considérons la section  $\chi := \delta_{j_s} \dots \delta_{j_1}$ , de sorte que  $\varphi\chi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s} \delta_{j_s} \dots \delta_{j_1} = id_{[m]}$ . On a alors  $\mathfrak{X}((\varphi\chi)^{\text{op}})(y) = y = \mathfrak{X}(\chi^{\text{op}})(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y))$  mais  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) = x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$ , d'où  $\mathfrak{X}((\varphi\chi)^{\text{op}})(y) = \mathfrak{X}((\psi\chi)^{\text{op}})(z) = y \in NX_m$ . Ainsi  $\psi\chi$  est uniquement décomposée en cofaces, donc est injective. Ainsi,  $m \leq k$ . Symétriquement,  $k \leq m$ , d'où  $k = m$ . Ainsi  $\psi\chi = id$ . On a  $\mathfrak{X}(\psi^{\text{op}}), \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ . D'autre part,  $\psi = \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_s}$  avec  $s = n - m$ . On écrit  $[n] = \{q_0, \dots, q_m\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$  et soit  $q_i = \max(\varphi^{-1}(i))$ , mais aussi  $[n] = \{p_0, \dots, p_m\} \sqcup \{l_1, \dots, l_s\}$  et soit  $p_i = \max(\psi^{-1}(i))$ . Alors  $\varphi\chi(i) = \varphi q_i = i$  et  $\psi\chi(i) = i$  d'où  $q_i \leq p_i$ . Symétriquement,  $q_i \leq p_i$  d'où

$p_i = q_i$  pour tout  $i$ , autrement dit  $\varphi = \psi$ . ■

### Proposition

Le foncteur oubli  $U = (\Phi^{\text{op}})^*$  admet un adjoint à gauche

$$L : \Delta Cx \rightleftarrows \Delta \text{Ens} : U$$

donné explicitement par  $(L\mathfrak{X})_n = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [n] \longrightarrow [m] \nearrow, x \in X_m\}$ , où les faces sont données par  $d_i(\varphi, x) = (\varphi\delta_i, x)$  si  $\varphi\delta_i$  est surjective, sinon  $\varphi\delta_i$  peut s'écrire sous une unique forme  $\delta_j\psi$  avec  $\psi$  surjective et alors  $d_i(\varphi, x) = (\psi, d_j(x))$ ; les dégénérescences sont données par  $s_i(\varphi, x) = (\varphi\sigma_i, x)$ .

▷ En exercice. ■

### Exercice 23

En utilisant cette proposition, montrer que l'exemple ci-dessus de l'ensemble simplicial modélisant le cercle obtenu à partir du  $\Delta$ -complexe est bien donné par le foncteur  $L$ .

**INDICATION** Décrire l'image sous  $L$  de  $X_0 = \{0\}$ ,  $X_1\{01\}$ ,  $X_2 = X_3 = \dots = \emptyset$  avec  $d_0(01) = d_1(01) = 0$ .

#### 6.2.2.2 Opérations sur les ensembles simpliciaux

##### Fait

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout ensemble simplicial, les  $n$ -simplexes s'injectent dans les  $n + 1$ -simplexes par  $s_0 : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  et les  $n + 1$ -simplexes se projettent dans les  $n$ -simplexes par  $d_0 : X_{n+1} \twoheadrightarrow X_n$  par une remarque déjà faite précédemment.

Généralisons.

##### Définition. (*Sous-ensemble simplicial*)

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. On dit que  $\mathfrak{X}$  est un *sous-ensemble simplicial* de  $\mathfrak{Y}$  lorsqu'il existe un morphisme d'ensemble simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  qui soit injectif composante par composante, *i.e.*  $X_n \hookrightarrow Y_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

##### Définition. (*Ensemble simplicial quotient*)

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. On dit que  $\mathfrak{X}$  est un *ensemble simplicial quotient* de  $\mathfrak{Y}$  lorsqu'il existe un morphisme d'ensemble simpliciaux  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  qui soit surjectif composante par composante, *i.e.*  $Y_n \twoheadrightarrow X_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemples. (*Sous-ensembles simpliciaux, ensembles simpliciaux quotients*)**

1. On a l'inclusion d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_k^n \subseteq \partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  pour  $n \in \mathbb{N}, k \in [n]$ .
2. (*Modèle simplicial de la sphère*  ) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'ensemble simplicial quotient  $\Delta^n / \partial\Delta^n$  dont les  $d$ -simplexes

$$\{i_0 \dots i_0 \dots i_n \mid i_0 = \dots = i_n \text{ OU } i_0 = 0, i_1 = 1, \dots, i_n = n\}$$

munis des faces et dégénérescences classiques *i.e.* suppression et dédoublement sauf lorsque les faces ne font pas sens, c'est-à-dire lorsque l'on supprime un nombre apparaissant une seule fois dans la collection, auquel cas elles valent 0...0. Les deux seuls simplexes nondégénérés sont 0 et 01...n ; on a là le modèle le plus économique, avec 2 cellules, de la sphère de dimension  $n$ . (Pour  $n = 1$ , on retrouve l'exemple donné ci-dessus.) L'application évidente  $\Delta^n \longrightarrow \Delta^n / \partial\Delta^n$  montre qu'il s'agit d'un quotient du  $n$ -simplexe standard.

**Remarque importante.** Ce dernier exemple est instructif, car il exhibe un ensemble simplicial qui ne provient pas d'un  $\Delta$ -complexe : par exemple, il n'est pas dans l'image du foncteur décrit à la proposition précédente. Il montre que les dégénérescences sont essentielles et non gratuites : ce modèle de la sphère n'existerait pas sans les dégénérescences placées en dimension 1 à  $n - 1$ .

Les exemples précédents montrent que l'on aimerait souvent générer des ensembles simpliciaux à partir de petites données. La proposition suivante donne la forme du sous-ensemble simplicial engendré par ses premiers simplexes.

**Lemme**

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le simplexe

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists [m] \longrightarrow [k] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

forme pour  $m$  parcourant  $\mathbb{N}$  le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\mathfrak{X}$  contenant tous ses  $k$ -simplexes pour tout entier naturel  $k \leq n$ .

**Définition-propriété. (*Squelette simplicial*)**

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le simplexe

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists [m] \longrightarrow [k] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

forme pour  $m$  parcourant  $\mathbb{N}$  le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\mathfrak{X}$  contenant tous ses  $k$ -simplexes pour tout entier naturel  $k \leq n$ . Le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est appelé

le *n-squelette* de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

▷ On vérifie facilement qu'il s'agit là d'un sous-ensemble simplicial ; par exemple, la stabilité pour les faces vient de :

$$d_i(x) = d_i(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)) = \mathfrak{X}((\varphi \circ \delta_i)^{\text{op}})(y).$$

Ce sous-ensemble simplicial contient bien tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$  : il suffit de considérer  $k = m$ ,  $\varphi = id$  et  $y = x$ . La forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes montre que pour  $m > n$  :

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m = \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists \varphi[m] \longrightarrow [n] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}.$$

Soit maintenant un sous-ensemble simplicial  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$  qui contient tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , alors il contient les images par les composées de dégénérescences de ces  $k$ -simplexes. Il contient donc tous les  $\text{sq}_m \mathfrak{X}$ , pour  $m > n$ , par la caractérisation précédente. ■

*Remarque.* Cette démonstration montre que le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est formé uniquement des  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , et de leurs images par des composées de dégénérescences, pour  $k > n$ .

### Exemples. (*Squelettes*)

1. Le  $(n - 1)$ -ième squelette du  $n$  simplexe standard est son bord :  $\text{sqel}_{n-1} \Delta^n = \partial \Delta^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $(n - 2)$ -ième squelette du  $n$  simplexe standard est appelé son *squelette standard*.

### Exercice 24 (0-squelette d'un ensemble simplicial)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Montrer que  $\text{sq}_0 \mathfrak{X}$  est l'ensemble simplicial constant en  $X_0$  où les faces et dégénérescences sont toutes l'identité.

### Exercice 25 (Une autre définition du squelette)

On considère la sous-catégorie pleine  $\Delta_n$  de la catégorie des simplexes  $\Delta$  constituée seulement des objets  $[0], \dots, [n]$  où  $n \in \mathbb{N}$  est fixé. On note ce plognement de catégories par  $Y : \Delta_n \hookrightarrow \Delta$ . Les préfaisceaux  $\Delta_n^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  sont appelés *ensembles simpliciaux n-tronqués*. On note  $\Delta_n \text{Ens}$  leur catégorie.

1. Décrire le foncteur tiré en arrière  $(\Upsilon^{\text{op}})* : \Delta \text{Ens} \rightarrow \Delta_n \text{Ens}$ .
2. Montrer que  $(\Upsilon^{\text{op}})*$  admet un adjoint à droite  $L$  donné par  $(L\mathfrak{X})_m = X_m$  pour  $m \leq$  entier et  $(L\mathfrak{X})_m = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [m] \longrightarrow [n] \nearrow, x \in X_n\}$  pour  $m > n$  entier.
3. Montrer que  $L(\Upsilon^{\text{op}})*(\mathfrak{X}) \simeq \text{sq}_n \mathfrak{X}$  pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .
4. Décrire l'unité de cette adjonction.

5. En utilisant l'identification de la question surpécédente, montrer que la coünité de l'adjonction est traduite par l'inclusion d'ensembles simpliciaux :  $L\Upsilon^*(\mathfrak{X}) \simeq \text{sq}_n \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ .
6. En conclure que la restriction de cette adjonction à la sous-catégorie des ensembles simpliciaux de dimension  $\leq n$  est une équivalence de catégories.

Comme pour les  $CW$ -complexes, la notion de squelette d'un ensemble simplicial permet d'effectuer des démonstrations par récurrence grâce à la notion de

#### Définition. (*Dimension d'un ensemble simplicial*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. La *dimension* de  $\mathfrak{X}$ , notée  $\dim(\mathfrak{X})$ , est l'entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{sq}_{n-1} \mathfrak{X} \subsetneq \text{sq}_n \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$  s'il existe,  $\infty$  sinon.

On parle alors d'ensemble simplicial *dimension finie* si  $\dim(\mathfrak{X}) < \infty$ .

#### Exemples. (*Dimension des ensembles simpliciaux*)

1.  $\dim(\Delta^n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\dim(\partial\Delta^n) = n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $\dim(\Lambda_k^n) = n - 1$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ .
4.  $\dim(\Delta^n / \partial\Delta^n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Définition. (*Objet (cosimplicial)*)

Un *objet simplicial* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Un *objet cosimplicial* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ .

#### Exemples

1. On peut ainsi considérer non seulement des ensembles simpliciaux mais des groupes simpliciaux, des algèbres simpliciales, etc. Par exemple, un groupe simplicial correspond à la donnée de groupes  $G_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , munis de morphismes de groupes  $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$  et  $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier, vérifiant les relations simpliciales
2. La collection des simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^n|$  munis des applications simpliciales croissantes forme un espace topologique cosimplicial.

### 6.2.2.3 Réalisation géométrique des ensembles simpliciaux

#### Définition. (*Réalisation géométrique d'un ensemble simplicial*)

La *réalisation géométrique* d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}| = \frac{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|}{\sim}$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par les relations  $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$  et  $(x, \sigma_i(z)) \sim (s_i(x), z)$  pour  $x \in X_n$ ,  $y \in |\Delta^{n-1}|$ ,  $z \in |\Delta^{n+1}|$  et  $0 \leq i \leq n$  entier.

#### Heuristique

Cette construction, de prime abord non élémentaire, est en fait simple à appréhender. On considère des  $n$ -simplexes géométriques standard indicés par les  $n$ -simplexes non-dégénérés que l'on recolle entre eux grâce aux faces et au premier type de relation, comme pour un  $\Delta$ -complexe. Les relations du second type montrent que tout simplexe dégénéré ne va donner naissance à aucune nouvelle cellule, et n'être vu que dans un simplexe géométrique standard issu d'un simplexe non-dégénéré. En outre, il n'y a pas plus d'identification de cellules que cela. Avant de démontrer ce résultat général, on peut se faire la main sur les exemples précédents.

Les notations choisies depuis le début trouvent ici leur cohérence.

#### Exemples

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la réalisation géométrique  $|\Delta^n|$  du  $n$ -simplexe standard est le  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la réalisation géométrique  $|\partial\Delta^n|$  du bord  $\delta\Delta^n$  du  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n$  est le modèle topologique  $|\partial\Delta^n| \simeq S^{n-1}$  pour la sphère de dimension  $n - 1$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ , la réalisation géométrique  $|\Lambda_k^n|$  du  $k$ -ième cornet simplicial  $\Lambda_k^n$  est le  $k$ -ième cornet géométrique  $|\Lambda_k^n|$ .

*Remarque.* Notons que l'on a perdu de l'information dans cette affaire : nous étions partis de complexes simpliciaux, c'est-à-dire d'espaces topologiques munis canoniquement d'une triangulation, et le passage à la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé nous a fait perdre cette dernière. (Les notations choisies ici ne sont donc pas absolument parfaites, mais elles ont l'avantage de la simplicité.)

**Théorème**

Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , l'application suivante est une bijection continue :

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} NX_n \times |\overset{\circ}{\Delta^n}| \rightarrow |\mathfrak{X}|.$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) L'idée de la démonstration est la suivante. L'existence dans le lemme d'Eilenberg–Zilber montre que tout point associé à un simplexe dégénéré peut être identifié à un point associé à un simplexe non-dégénéré. L'unicité montre que ces identifications n'induisent aucune identification supplémentaire entre points indicés par des simplexes non-dégénérés. Au final, la bijection continue est établie comme dans le cas des *CW-complexes*, puis ce résultat en est l'analogique. ■

**Corollaire**

La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial est homéomorphe à ce dernier, *i.e.* pour tout  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$ ,

$$|\mathfrak{X}|_\Delta \simeq |L\mathfrak{X}|.$$

▷ Comme les simplexes non-dégénérés de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial sont en bijection avec les faces de ce dernier, ceci est une conséquence directe du théorème précédent dont une version similaire tient aussi pour la réalisation géométrique des complexes simpliciaux. ■

**Exercice 26**

La réalisation géométrique  $|\mathfrak{X}|$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est-elle en bijection continue avec la réalisation géométrique  $|(\Phi^{\text{op}})^*(\mathfrak{X})|_\Delta$  du  $\Delta$ -complexe associé ?

**Proposition**

La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un *CW-complexe* formé d'une seule cellule de dimension  $n$  par  $n$ -simplexe non dégénéré.

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème. ■

**6.2.2.4 Catégorie des ensembles simpliciaux**

La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie des simplexes. Ceci explique conceptuellement qu'elle possède de très bonnes propriétés catégoriques.

**Fait. (*Taille de  $\Delta$* )**

La catégorie des ensembles simpliciaux est localement petite.

Immédiat.

**Proposition. (*Limites et colimites d'ensembles simpliciaux*)**

La catégorie  $\Delta\text{Ens}$  admet les limites et les colimites, donnée de façon sous-jacente par la limite ensembliste.

Explicitement, si  $\mathcal{D}$  est une catégorie et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \Delta\text{Ens}$  un foncteur, on note  $F_n : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ens}, d \mapsto F(d)_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La limite et la colimite du foncteur  $F$  sont données point par point par

$$(\lim_{\mathcal{D}} F)_n = \lim_{\mathcal{D}} F_n \text{ ET } (\operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F)_n = \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F_n.$$

▷  $\Delta\text{Ens}$  est la catégorie des préfaisceaux sur  $\Delta$ . ■

**Exemples. (*Limites et colimites d'ensembles simpliciaux*)**

1. L'ensemble simplicial terminal est  $\Delta^0 = *$  donné par  $|\Delta_n^0| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. L'ensemble simplicial initial est  $\emptyset$  donné par  $X_n = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. De même, mais on le verra plus tard, le produit et le coproduit sont donnés en chaque terme par le produit et la somme disjointe ensembliste et les morphismes qui en découlent évidents.

**Proposition. (*Ensembles simpliciaux représentables*)**

Les ensembles simpliciaux qui sont des préfaisceaux représentables  $\text{Hom}_{\Delta}(-,[n])$  sont les  $n$ -simplexes standars pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta^n \simeq \text{Hom}_{\Delta}([k],[n])$$

où  $[k] : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ .

▷ Ce résultat se montre de manière directe. Les applications croissantes  $\psi : [k] \rightarrow [n]$  sont en bijection avec les suites croissantes  $i_0 \leq \dots \leq i_k$  d'éléments de  $[n]$  en posant  $i_j = \psi(j)$ . Cette bijection préserve bien les faces et les dégénérescences, car  $d_j(\varphi) = \varphi \circ \delta_j$  correspond à  $i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k$  et  $s_j(\varphi) = \varphi \circ \sigma_j$  correspond à  $i_0 \dots i_j i_{j+1} \dots i_k$ . ■

Il faut être à l'aise dans l'opération de traduction suivante :

$$\forall n,k \in \mathbb{N} \quad (\Delta^n)_k \simeq \text{Hom}_{\Delta}([k],[n]).$$

Entrons dans le rêve du rêve.

**Corollaire**

La collection de tous les simplexes standards porte une structure d'ensemble simplicial cosimplicial.

▷ Non, il n'y a pas d'erreur. Cela signifie qu'il existe un foncteur  $\Delta \rightarrow \Delta\text{Ens}$  dont l'image de  $[n]$  est  $\Delta^n$ . En effet, pour tout application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ , on considère le morphisme d'ensembles simpliciaux  $\varphi_* : \Delta^n \simeq \text{Hom}_\Delta(-,[n]) \rightarrow \text{Hom}_\Delta(-,[m]) \simeq \Delta^m$ . Par exemple, les cofaces  $(\delta_j)_* : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  et les codégénérances  $(\sigma_j)_* : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$  sont données explicitement par  $(\delta_j)_*(i_0 \dots i_k) = \delta_j(i_0) \dots \delta_j(i_k)$  et  $(\sigma_j)_*(i_0 \dots i_k) = \sigma_j(i_0) \dots \sigma_j(i_k)$  pour  $0 \leq j \leq n$  entier. Plus heuristiquement,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_\Delta(-,[n]) \\ \downarrow \delta_i & & \downarrow \delta_{i*} \\ \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_\Delta(-,[n+1]) \end{array}$$

commute. ■

→ *Convention.* Dans la suite, nous laisserons tomber la notation  $(\cdot)_*$ , car le contexte le permettra.

Il s'agit du relèvement au niveau des ensembles simpliciaux via la réalisation géométrique de la structure d'objet cosimplicial des simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^n|$ . Une première application est donnée par le lemme suivant.

**Lemme. (*Expression catégorique du bord*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le bord  $\delta\Delta^n$  du  $n$ -simplexe standard est égal au coégalisateur

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$$

où le morphisme en haut à gauche envoie la copie indicée par  $i < j$  sur celle indicée par  $j$  via  $\delta_i$ , le morphisme en bas à gauche envoie la copie indicée par  $i < j$  sur celle indicée par  $i$  via  $\delta_{j-1}$  et le morphisme de droite envoie la copie indicée par  $l$  sur  $\partial\Delta^n$  via  $\delta_l$ .

▷ L'intuition d'une telle colimite vient de la réalisation géométrique : le bord du  $n$ -simplexe géométrique standard est obtenu en recollant  $n+1$  simplexes géométriques standards de dimension  $n-1$  le long de leurs propres bords. La démonstration formelle s'obtient grâce à description des représentables en considérant simplement la forme combinatoire des  $d$ -simplexes respectifs et vérifiant que l'on a bien un coégalisateur ensembliste en chaque degré. ■

De même :

**Lemme.** (*Expression catégorique des cornets*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ . Le  $k$ -ième cornet  $\Lambda_k^n$  de dimension  $n$  est égal au coégalisateur

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n, l \neq k} \Delta^{n-1} \longrightarrow \Lambda_k^n$$

avec les mêmes morphismes que dans l'expression catégorique du bord.

**Exercice 27**

En déduire que le  $k$ -ième cornet géométrique  $|\Lambda_k^n|$  peut s'écrire :

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} |\Delta^{n-2}| \longrightarrow \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n, l \neq k} |\Delta^{n-1}| \longrightarrow |\Lambda_k^n|.$$

**Lemme.** (*Expression catégorie des squelettes*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Le  $n$ -squelette de  $\mathfrak{X}$  est égal à la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in NX_n} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \text{squel}_{n-1} \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in NX_n} \Delta^n & \longrightarrow & \text{squel}_n \mathfrak{X} \end{array}$$

avec les morphismes d'inclusion ou d'identification.

**Proposition.** (*Lemme de Yoneda simplicial*)

On a une bijection

$$\begin{aligned} Y_\Delta : \quad \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \mathfrak{X}) &\xrightarrow{\sim} X_n \\ f &\longmapsto f_n(01\dots n) \end{aligned}$$

naturelle en  $[n] \in \Delta$  et  $\mathfrak{X} \in \Delta\text{Ens}$ .

▷ Le lemme de Yoneda classique dans  $\Delta$  localement petite s'écrit

$$\text{Nat}(\text{Hom}_\Delta(-, c), F) \simeq F(c)$$

où  $c = [n]$ ,  $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  et à  $\alpha \mapsto \alpha(id_c)$ . Or  $\text{Hom}_\Delta(-, [n]) \simeq \Delta^n$ . ■

Philosophons.

**Remarques.**

1. Ce résultat montre que l'on peut penser au  $n$ -simplexe standard comme « l'ensemble

simplicial libre à un générateur en dimension  $n$  ». De manière plus formelle, le foncteur oubli  $\Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$  qui ne conserve que l'ensemble de  $n$ -simplexes  $\mathfrak{X} \rightarrow X^n$  admet un adjoint à gauche  $L$  dont l'image du singleton est le simplexe standard :  $L(\{\ast\}) = \Delta^n$ .

2. La naturalité de la bijection montre que  $f_{d_i(x)} = f_x \delta_i$  et que  $f_{s_i(x)} = f_x \sigma_i$  ; de voir un ensemble simplicial comme un module à droite sur la catégorie  $\Delta$ .

### Corollaire

1. La donnée d'une flèche de  $\Delta\text{Ens}$   $\partial\Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée de  $n+1$   $(n-1)$ -simplexes dans  $\mathfrak{X}$   $x_0, \dots, x_n \in X_{n-1}$  tels que  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour tous  $i < j$ .
2. La donnée d'une flèche de  $\Delta\text{Ens}$   $\Lambda_k^n \rightarrow \mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée de  $n$   $(n-1)$ -simplexes dans  $\mathfrak{X}$   $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_n \in X_{n-1}$  tels que  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour tous  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ .

### Corollaire. (*Plongement des simplexes dans les ensembles simpliciaux*)

La catégorie des simplexes  $\Delta$  se plonge, par le plongement de Yoneda, comme la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux dont les objets sont les simplexes standards :

$$\begin{aligned} Y: \quad \Delta &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] &\longmapsto \Delta^n \end{aligned}$$

injectif.

▷ Pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a donc  $\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \Delta^m) \simeq (\Delta^m)_n \simeq \text{Hom}_\Delta([n], [m])$ . ■

### Corollaire. (*Complétion cocomplète de $\Delta$* )

La catégorie des ensembles simpliciaux est la complétion cocomplète de la catégorie  $\Delta$ , c'est-à-dire la plus petite catégorie cocomplète qui la contient.

*Remarque.* Il justifie une fois de plus la terminologie et la notation choisies pour la catégorie des simplexes  $\Delta$ .

Nous avons vu qu'un des buts des ensembles simpliciaux était de décrire la combinatoire des triangulations d'un espace topologique. Or, toute triangulation est obtenue en recollant des simplexes géométrique les unes aux autres. La question est maintenant de savoir on peut en faire de même pour les ensembles simpliciaux eux-mêmes, c'est-à-dire : peut-on écrire tout ensemble simplicial comme une certaine colimite faite de simplexes standards  $\Delta^n$ ? La formule de la réalisation géométrique des ensembles simpliciaux nous incite à considérer la catégorie suivante.

**Définition. (*Catégorie des éléments d'un ensemble simplicial*)**

La *catégorie des éléments*  $E(\mathfrak{X})$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est la catégorie dont

- ★ les objets sont tous les simplexes  $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  de  $\mathfrak{X}$ ,
- ★ les morphismes  $\text{Hom}_{E(\mathfrak{X})}(x, y)$  sont les morphismes  $\varphi$  de  $\Delta$  vérifiant  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ .

On peut voir que cette définition fournit en fait un foncteur  $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$  des ensembles simpliciaux vers la catégorie des petites catégories. On considère le foncteur canonique de projection  $\Pi : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta$  qui envoie  $x \in X_n$  sur  $[n]$ .

**Théorème. (*Théorème de densité des ensembles simpliciaux*)**

Tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  s'écrit comme la colimite

$$\mathfrak{X} = \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} Y\Pi.$$

▷ La démonstration est automatique, mais nous la faisons car elle permet de mettre au jour une formule essentielle. On rappelle que les adjoints à gauche préservent les colimites. Commençons par décrire la catégorie des cocônes sur le foncteur  $Y\Pi$ . Chacun de ses éléments consiste en la donnée d'un ensemble simplicial ' $Yfrak$ ' muni de morphismes d'ensembles simpliciaux  $g(x) : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{Y}$  pour chaque simplexe  $x \in X_n$  tels que pour toute application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  vérifiant  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Y} & \\ g(x) \nearrow & \swarrow g(y) & \\ \Delta^n & \xrightarrow{\varphi_*} & \Delta^m \end{array}$$

soit commutatif. Un théorème déjà démontré affirmant que la catégorie des simplexes est engendrée par les cofaces et les codégénérescences montre qu'il faut et il suffit que les diagrammes associés à ces dernières soient commutatifs. Sa commutativité pour les cofaces  $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  et pour les codégénérescences  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$  sont respectivement équivalentes

$$g(d_i^{\mathfrak{X}}(x))(01\dots n-1) = d_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01\dots n))$$

et

$$g(s_i^{\mathfrak{X}}(x))(01\dots n+1) = s_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01\dots n)).$$

Montrons maintenant que l'on peut munir l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  d'une structure de cône initial sur le foncteur  $Y\Pi$ . Pour tout simplexe  $x \in X_n$ , on considère le morphisme canonique  $f_x : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$  fourni par le lemme de Yoneda simplicial. La naturalité de ce dernier montre que les morphismes  $f_x$  vérifient les deux équations ci-dessus. Enfin, pour tout autre cône  $(\mathfrak{Y}, \{g(x)\})$ , il existe un unique morphisme  $G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  de cônes : il s'agit de celui donné par  $G(x) = g(x)(01\dots n)$ . ■

Ainsi en toute généralité :

**Corollaire. (*Expression catégorique des ensembles simpliciaux*)**

Tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est égal au coégalisateur

$$\coprod_{\varphi:[n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times \Delta^n \rightrightarrows \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathfrak{X}$$

où  $X_n \times \Delta^n := \coprod_{X_n} \Delta^n$  dans les termes précédents, la flèche de gauche du haut est  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times id$  et celle du bas  $id \times \delta_i$ .

▷ Conséquence directe des arguments donnés dans la démonstration précédente et en particulier les deux relations hors ligne. ■

*Remarque.* On vient donc de retrouver conceptuellement la forme de la formule de la réalisation géométrique donnée à la section consacrée.

Après avoir compris la forme que peut prendre tout ensemble simplicial, on peut maintenant se demander comment obtenir des foncteurs depuis ou vers les ensembles simpliciaux. Il se trouve que l'on peut caractériser toutes les paires de foncteurs impliquant la catégorie des ensembles simpliciaux. Tous les exemples sont obtenus de la manière suivante (*voir ci-dessous et la sous-section suivante*).

**Définition. (*Représentation simpliciale*)**

Soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial d'une catégorie  $\mathcal{C}$  localement petite. La *représentation simpliciale* associée à  $\mathfrak{C}$  est le foncteur

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{C}} : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ c &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}, c). \end{aligned}$$

**Théorème. (*Théorème fondamental des adjonctions simpliciales*)**

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie localement petite et cocomplète et soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial de  $\mathcal{C}$ . La donnée d'une paire de foncteurs adjoints

$$L : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \mathcal{C} : R$$

est équivalente à la donnée d'un objet cosimplicial  $\mathfrak{C} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  via la restriction

$$\mathfrak{C} = LY : \Delta \xrightarrow{Y} \Delta\text{Ens} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$$

de l'adjoint à gauche par l'inclusion de Yoneda  $Y$ . Dans ce cas, l'adjoint à droite est donné par la représentation simpliciale associée à  $\mathfrak{C}$  et l'adjoint à gauche admet pour forme

explicite le coégalisateur suivant :

$$\coprod_{\varphi: [n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times C^n \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times C^n \longrightarrow L(\mathfrak{X})$$

où  $C^n = \mathfrak{C}([n])$ ,  $X_n \times C^n := \coprod_{X_n} C^n$  dans les termes précédents, la flèche de gauche du haut est  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times id$  et celle du bas  $id \times \varphi_*$ .

▷ On considère le foncteur de représentation simpliciale  $R_{\mathfrak{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \Delta\text{Ens}$ . Dans l'autre sens, on pose  $L(\mathfrak{X}) := \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ . Comme  $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$  est un foncteur, on voit que  $L$  l'est aussi. Il reste à vérifier que  $L$  est adjoint à gauche de  $R_{\mathfrak{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(\mathfrak{X}), c) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, R_{\mathfrak{C}}(c))$ . Comme  $L(\mathfrak{X}) = \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ , tout morphisme dans  $\mathcal{C}$  vers  $c$  est équivalent à la donnée de morphismes  $g(x) : C^n \rightarrow c$  de  $\mathcal{C}$ , pour tout simplexe  $x \in X_n$ , tels que  $g(x) = g(y) \circ \mathfrak{C}(\varphi)$  lorsque  $X(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ . Une telle donnée est équivalente à un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{C}}(c)$  défini par  $x \in X_n \mapsto g(x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C^n, c)$ . Il est facile de voir que cette bijection est naturelle de part et d'autre. Dans l'autre sens, la composée  $LY : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  définit un objet cosimplicial  $\mathfrak{C}$  de  $\mathcal{C}$ . Comme le foncteur  $L$  est adjoint à gauche, il préserve les colimites, on a donc qu'il est de la forme  $L(\mathfrak{X}) := \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ . Les arguments donnés ci-dessus montrent que  $R_{\mathfrak{C}}$  est son adjoint à droite et donc qu'il est égal au foncteur  $R$ . ■

Cette dernière formule a le même parfum que la réalisation géométrique ; ceci n'est pas le fruit du hasard, on verra (*plus tard*) que cette dernière peut être obtenue de cette manière.

### Heuristique

Dans un langage catégorique plus avancé, l'adjoint à gauche  $L$  est l'extension de Kan à gauche de  $\mathfrak{C}$  le long du plongement de Yoneda,

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathfrak{C}} & \mathcal{C} \\ & \searrow Y & \swarrow L = \text{Lan}_Y(\mathfrak{C}) \\ & \Delta\text{Ens} & \end{array}$$

en diagramme.

#### 6.2.2.5 Produit d'ensembles simpliciaux et décomposition prismatique

##### Proposition. (*Produit d'ensembles simpliciaux*)

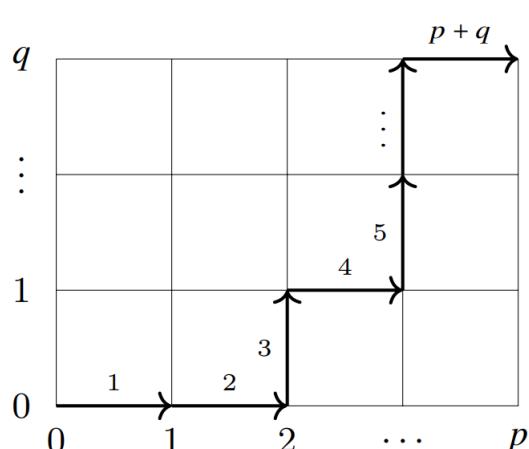
Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. Le produit de  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  noté  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  est défini par  $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})_n = X_n \times Y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  muni des faces  $d_i^{\mathfrak{X}} \times d_i^{\mathfrak{Y}}$  et des dégénérescences  $s_i^{\mathfrak{X}} \times s_i^{\mathfrak{Y}}$ .

**Exemple fondamental. (*Décomposition prismatique*)**

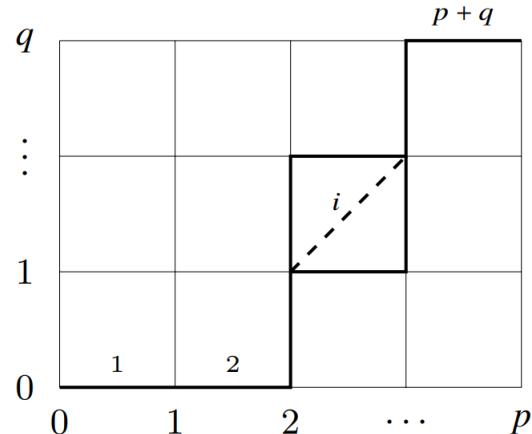
Pour bien comprendre l'effet du produit de deux ensembles simpliciaux, on conseille l'exercice suivant : montrer que l'ensemble simplicial  $\Delta^p \times \Delta^q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , est engendré par  $\binom{p+q}{p}$  copies de  $\Delta^{p+q}$  indiquées au choix par les chemins croissants sur une grille  $[p] \times [q]$  comme représenté sur la figure ??decprism2 ou au choix par les  $(p, q)$ -battages comme représenté sur la figure ??decprism1. Dans l'exemple ci-dessus par exemple, le  $(4, 3)$ -battage est  $\Sigma = [1247356]$ . Ces  $(p + q)$ -simplexes standards se recollent de la manière suivante : pour tout chemin croissant possédant une diagonale qui en est le  $i$ -ième segment, les images par  $\delta_i$  de  $\Delta^{p+q+1}$  dans les copies de  $\Delta^{p+q}$  indiquées par le même chemin mais passant par le coin en haut à gauche et par le coin en bas à droite de la case diagonale sont égales. Au final, on obtient  $\Delta^p \times \Delta^q$  comme le coégalisateur

$$\coprod \Delta^{p+q+1} \xrightarrow{\delta_i} \coprod \Delta^{p+q} \longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q$$

où le second coproduit porte sur les chemins croissants et où le premier porte sur les chemins croissants à une diagonale.



(a) *Chemins croissants sur une grille.* —



(b) *Deuxième figure. — Battages à deux arguments*

FIGURE 6.2.14 : *Décomposition prismatique.* —

**Exercice 28 (*Décompositions prismatiques simples*)**

1. Décrire  $\Delta^1 \times \Delta^1$ , notamment ses simplexes non dégénérés et sa réalisation géométrique.
2. Décrire les simplexes non dégénérés de  $\Delta^p \times \Delta^q$  et insister sur le cas des  $p + q$  simplexes non dégénérés. Montrer que  $|\Delta^p \times \Delta^q| \simeq |\Delta^p| \times |\Delta^q|$ .

3. Décrire l'ensemble simplicial  $\Delta^p \times \Delta^1$  et dessiner la triangulation associée de  $|\Delta^2 \times \Delta^1|$ .

### 6.2.2.6 Autoenrichissement des ensembles simpliciaux

#### Proposition

La catégorie  $(\Delta\text{Ens}, \times, *)$  des ensembles simpliciaux, muni de leur produit, forme une catégorie monoïdale symétrique cartésienne où l'unité est l'ensemble simplicial constant à un élément.

▷ Les vérifications sont automatiques et découlent du paragraphe précédent. ■

*Remarque.* Si l'on cherche à montrer que cette catégorie monoïdale symétrique est fermée, c'est-à-dire qu'elle possède un bifoncteur  $\text{Hom}$  interne, que nous noterons  $\mathfrak{hom}$ . Si c'est le cas, on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}))$$

pour tous ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ . En considérant le cas particulier du simplexe standard  $\mathfrak{X} = \Delta^n$ , le lemme de Yoneda simplicial impose la forme  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})_n = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{Y} \times \Delta^n, \mathfrak{Z})$ . On a là un premier exemple d'application de la définition de représentation simpliciale : à tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe le foncteur  $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet : \Delta \longrightarrow \Delta\text{Ens}$  qui est en fait la

$$[n] \longmapsto \mathfrak{X} \times \Delta^n$$

composée du plongement de Yoneda avec le produit avec  $\mathfrak{X}$ . La représentation simpliciale associée à cet ensemble simplicial cosimplicial  $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet$  est  $R_{\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet} \Delta\text{Ens} \Delta\text{Ens} \mathfrak{Y} \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y})$ . Cette interprétation introduit l'ensemble simplicial recherché.

#### Définition. (*Espace des morphismes*)

Pour toute paire  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  d'ensembles simpliciaux, on appelle *espace des morphismes* de  $\mathfrak{X}$  vers  $\mathfrak{Y}$  l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}).$$

On appelle aussi l'espace des morphismes *objet exponentiel simplicial* et noté  $\mathfrak{Y}^\mathfrak{X}$ .

#### Exemples. (*Espaces des morphismes*)

1. Les 0-simplices de l'espace des morphismes de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^0, \mathfrak{Y}) = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}).$$

2. Le lemme de Yoneda simplicial montre que l'espace des morphismes du point  $*$  vers un ensemble simplicial  $\mathfrak{Y}$  est égal à  $\mathfrak{Y}$  tout entier :

$$\mathfrak{hom}(*, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y}.$$

### Proposition

L'espace des morphismes est un Hom interne, c'est-à-dire qu'il munit la catégorie des ensembles simpliciaux d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée.

- ▷ Pour tous ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ , il s'agit donc de trouver une bijection naturelle de la forme

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})).$$

Pour cela, on considère le foncteur de représentation simplicial associé à  $\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet$  qui donne  $R_{\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ . Un théorème connexe fournit un adjoint à gauche  $L$  caractérisé par ses valeurs sur les simplexes standards  $L(\Delta^n) = \mathfrak{Y} \times \Delta^n \simeq \Delta^n \times \mathfrak{Y}$ . Ce foncteur est donc le « foncteur produit avec  $\mathfrak{Y}$  », c'est-à-dire  $L(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ , ce qu'il fallait. ■

### Corollaire. (*Auto-enrichissement de $\Delta$* )

La catégorie des ensembles simpliciaux muni de l'espace des morphismes est enrichie sur elle-même.

- ▷ La coünité de l'adjonction fournit un morphisme naturel d'évaluation

$$\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}} : \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}.$$

On définit une composition au niveau des espces de morphismes

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

en considérant le morphisme d'ensmble simpliciaux adjoint de la double évaluation suivante :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}} \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Y} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}} \mathfrak{Z}.$$

D'où. ■

### Corollaire

Il existe une bijection naturelle

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})).$$

▷ Il s'agit d'un cas particulier de la théorie générale des catégories monoïdales symétriques fermées. ■

### 6.2.3 Exemples conceptuels d'ensembles simpliciaux

Nous poursuivons ici dans la même veine que celle qui a motivée la définition des espaces de morphismes : tous les exemples de foncteurs à valeurs dans les ensembles simpliciaux donnés ci-dessous sont de la forme décrite à la définition consacrée et au théorème consacré. On applique donc le théorème fondamental en faisant varier la catégorie localement petite cocomplète considérée.

#### 6.2.3.1 Ensembles simpliciaux constants

##### Définition. (*Ensemble simplicial constant*)

À tout ensemble  $E$ , on peut associer l'*ensemble simplicial constant*  $\mathbf{c}(E)$  défini par  $X_n = E$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_i = id_E$ ,  $s_i = i_d E$  pour tout  $i \in [n]$ .

##### Fait

Cette première famille, particulièrement simple, d'exemples d'ensembles simpliciaux est de la forme de celles obtenues par le théorème fondamental.

Il suffit pour cela de considérer la catégorie  $\mathcal{C} = \text{Ens}$  des ensembles et l'ensemble cosimplicial constant  $\mathbf{c} : [n] \mapsto \{\ast\}$  sur le singleton standard. Alors  $R_{\mathbf{c}}(E) = \mathbf{c}(E)$ .

##### Proposition

La construction des ensembles simpliciaux constants fournit un foncteur  $cst$  plein et fidèle  $\mathbf{c} : \text{Ens} \rightarrow \Delta\text{Ens}$  dont l'image est formée des ensembles simpliciaux de dimension 0.

▷ Automatique. ■

*Remarque.* Ce résultat montre que la notion d'ensemble simplicial généralise, de manière homotopique, celle d'ensemble.

##### Exercice 29

Montrer que le foncteur  $cst$  est représentable.

→ *Notation.* On note  $C^\bullet$  l'ensemble cosimplicial qui représente  $cst$ .

### Proposition

Le foncteur ensemble simplicial constant  $\mathbf{c}$  admet un adjoint à droite donné par le foncteur de troncation

$$T : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \mathfrak{X} \mapsto X_0$$

et un adjoint à gauche donné par le foncteur de troncation modulo les images des premières faces

$$\tilde{T} : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \mathfrak{X} \mapsto X_0 / \sim$$

où  $d_0(x) \sim d_1(x)$  pour tout  $x \in X_1$ . Pour résumer :

$$\mathbf{c} : \text{Ens} \rightleftarrows \Delta\text{Ens} : T \text{ ET } \tilde{T} : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Ens} : \mathbf{c}.$$

▷ Le premier se passe de commentaires. Le deuxième est immédiat par le théorème fondamental. ■

*Remarque.* L'adjonction  $\mathbf{c} \dashv T$  fournit l'équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles et celle des ensembles simpliciaux de dimension nulle déjà établie.

#### 6.2.3.2 Ensembles simpliciaux singuliers

Utilisons le théorème fondamental pour associer fonctoriellement un ensemble simplicial à tout espace topologique. Nous avons déjà vu que la collection des simplexes géométriques standards munis de leurs cofaces et codégénérances formaient un espace topologique cosimplicial :

$$\begin{aligned} |\Delta^\bullet| : \quad \Delta &\longrightarrow \text{Top} \\ [n] &\longmapsto |\Delta^n|. \end{aligned}$$

### Définition. (*Ensemble simplicial singulier*)

L'*ensemble simplicial singulier* d'un espace topologique  $X$  est défini par  $\text{Sing}(X) = \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^\bullet|, X)$ . Ses éléments, appelés *simplexes singuliers*, sont les applications continues  $f : |\Delta^n| \rightarrow X, n \in \mathbb{N}$ . Ses faces et dégénérescences sont données par  $d_i(f) = f \circ \delta_i$  et  $s_i(f) \circ \sigma_i$  pour tout  $i \in [n]$ .

### Proposition

L'application  $\text{Sing}$  qui associe l'ensemble simplicial singulier à un espace topologique est un foncteur dont l'adjoint à gauche est la réalisation géométrique, *i.e.*

$$|\cdot| : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Top} : \text{Sing}.$$

▷ Encore une fois, c'est un cas particulier du théorème fondamental : le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est représenté par l'espace topologique cosimplicial  $|\Delta^\bullet|$ . Il admet un adjoint à

gauche donné par le coégalisateur

$$\coprod_{\varphi: [n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times \Delta^n \xrightarrow{id \times \varphi} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui est la formule de la réalisation géométrique. ■

Cette série de résultats explique donc conceptuellement et rétrospectivement la formule choisie pour la réalisation géométrique.

### Proposition. (*Décomposition prismatique*)

Soit une paire  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux tels que soit les deux ont une quantité dénombrable de simplexes soit au moins une des deux réalisations géométriques est localement finie, c'est-à-dire que tout point est à l'intérieur d'un polyèdre simplicial. Dans ce cas, on a un homéomorphisme

$$|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}| \simeq |\mathfrak{X}| \simeq |\mathfrak{Y}|.$$

▷ On renvoie le lecteur à la preuve de MAY. ■

#### Remarques.

1. Le problème soulevé par les hypothèses techniques est toujours le même : il trait à la topologie considérée sur les espaces produits. La propriété mentionnée ci-dessus est donc vraie si on travaille dans la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés et faiblement Hausdorff. Sinon, il suffit de demander que  $|X \times Y|$  soit un CW-complexe, ce qu'impliquent les hypothèses utilisées ici.
2. Il convient de remarquer que cet homéomorphisme, vu de la gauche vers la droite, n'est pas cellulaire. Ceci est en fait positif : le membre de gauche fournit une triangulation canonique pour le produit d'espaces topologiques de droite. Dans le cas de  $\Delta^p \times \Delta^q$ , on obtient la décomposition prismatique donnée par les chemins croissants ou le  $(p,q)$ -battage.

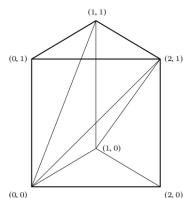


FIGURE 6.2.15 : *Décomposition prismatique de  $\Delta^2 \times \Delta^1$ .* —

### 6.2.3.3 Nerf d'une catégorie

On considère la catégorie  $\text{Cat}$  des petites catégories. Le foncteur suivant fournit un objet cosimplicial dans la catégorie des catégories :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}: \quad \Delta &\longrightarrow \text{Cat} \\ [n] &\longmapsto \text{Cat}[n] := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}\end{aligned}$$

où  $\text{Cat}[n]$  est la catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné  $[n]$ .

→ *Notation.* On en déduit une catégorie petite cosimpliciale  $\text{Cat}[\bullet]$ .

#### Définition. (*Nerf d'une catégorie*)

Le *nerf* d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  est l'ensemble simplicial  $\mathfrak{R}\mathcal{C} = \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{C})$ .

#### Exercice 30 (Foncteur de nerf)

Décrire le foncteur de représentation simpliciale

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} := R_{\text{Cat}[\bullet]}: \quad \text{Cat} &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ \mathcal{C} &\longmapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{Cat}[\bullet], \mathcal{C})\end{aligned}$$

associé à la catégorie cosimpliciale  $\text{Cat}[\bullet]$ , dit *foncteur de nerf*.

#### Exemples. (*Nerfs*)

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le nerf de  $\text{Cat}[n]$  est le  $n$ -simplexe standard :  $\mathfrak{R}\text{Cat}[n] = \Delta^n$ .

#### Proposition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les  $n$ -simplexes du nerf d'une catégorie  $\mathcal{C}$  sont les chaînes de  $n$ -morphismes composable

$$\mathfrak{R}\mathcal{C}_n = \{c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} c_n\}$$

avec pour convention que  $\mathfrak{R}\mathcal{C}_0$  est formé des objets de  $\mathcal{C}$ . Les faces sont alors données par  $d_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{i+1}f_i, \dots, f_n)$  pour les entiers  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $d_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$  et  $d_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$ . Les dégénérescences sont quant à elles données par  $s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, id, f_{i+1}, \dots, f_n)$  pour  $i \in [n]$ .

▷ Automatique. ■

**Exemple. (Nerf d'un groupe)**

Le *nerf* d'un groupe  $G$  est le nerf de la catégorie classifiante  $BG$ .

Explicitement, cet ensemble simplicial est formé des  $n$ -simplexes  $BG_n = G^n$ , avec  $BG_0 = \{1\}$ , munis des faces et dégénérescences suivantes pour  $i \in [n]$  :

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{pour } i = 0 \\ (g_2, \dots, g_{i+1}g_i, \dots, g_n) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{pour } i = n \end{cases}$$

et

$$s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

Sa réalisation géométrique  $[BG]$  est l'*espace classifiant* du groupe  $G$ .

**Exercice 31**

Soit  $G$  un groupe. On considère la collection  $(EG)_n = G^{n+1}$  d'ensembles pour  $n \in \mathbb{N}$ , munie des faces et dégénérescences :

$$d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n) \text{ ET } s_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n).$$

On note cette donnée simplement  $EG$ .

1. Montrer que l'association  $G \mapsto EG$  définit un foncteur  $E$  de  $\text{Grp}$  dans  $\Delta\text{Ens}$ . . .
2. Montrer que  $E$  admet un adjoint à gauche et le décrire.
3. Tout  $n$ -simplexe  $(EG)_n = G^{n+1}$  admet une action à gauche du groupe  $G$  donnée par  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ . Montrer que ceci munit  $EG$  d'une structure de  $G$ -module simplicial.
4. On considère les orbites sous l'action de la question précédente avec les faces et dégénérescences :

$$EG : G = ((EG)_n/G = G^{n+1}/G, \overline{d_i}, \overline{s_i}).$$

Montrer que  $EG/G/$  est un ensemble simplicial isomorphe à l'espace classifiant  $BG$ .

5. Montrer que  $EG \rightarrow EG/G \simeq BG$  est un morphisme surjectif d'ensembles simpliciaux et calculer sa fibre.

Les questions suivantes sont plus ardues et requièrent les notions d'**HOMOTOPIE SIMPLICIALE** développées ci-après.

6. Calculer les groupes d'homotopie simpliciaux du nerf  $BG$  d'un groupe.
7. Montrer que  $EG$  est contractile.
8. Montrer que le morphisme d'ensemble simpliciaux  $EG \rightarrow EG/G \simeq BG$  est une fibration de Kan.

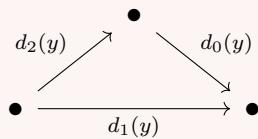
Une utilité de cette approche conceptuelle, plutôt qu'avec la définition explicite, vient de l'application complète du théorème fondamental qui montre que cette construction est fonctorielle et qu'elle admet un adjoint à gauche calculable.

### Définition-propriété. (*Catégorie fondamentale* $\tau_1$ )

À tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe la *catégorie fondamentale*  $\tau_1(\mathfrak{X})$  dont les objets sont les 0-simplexes  $X_0$  et dont les morphismes sont donnés par le graphe libre sur des flèches indiquées par les 1-simplexes

$$d_1(x) \xrightarrow{x \in X_1} d_0(x)$$

quotienté par les relations données par les 2-simplexes



pour  $y \in X_2$ .

▷ Dans cette catégorie, les images de la première dégénérescence  $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$  donnent les morphismes d'identité. Les deux dégénérescences suivantes  $s_0 : X_1 \rightarrow X_2$  et  $s_1 : X_1 \rightarrow X_2$  montrent respectivement que la composée à droite et à gauche par ces identités laissent invariant les morphismes. ■

### Proposition

L'application qui associe le nerf à une petite catégorie est un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Cat} &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ \mathcal{C} &\longmapsto \mathfrak{R}\mathcal{C} \end{aligned}$$

qui admet pour adjoint à gauche le foncteur catégorie fondamentale  $\tau_1 : \tau_1 : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Cat} : \mathfrak{R}$ .

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème fondamental. Il suffit pour cela de montrer que la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  est isomorphe au coégalisateur habituel. On commence déjà par remarquer que la catégorie fondamentale associée au simple standard est la catégorie associée au poset  $[n]$ , i.e.  $\tau_1(\Delta^n) \simeq \text{Cat}[n]$ . Ensuite, pour les entiers  $n \geq 2$ , on voit que les images des foncteurs  $\delta_0, \delta_1, \delta_n : \text{Cat}[n-1] \rightarrow \text{Cat}[n]$  couvrent tous les morphismes de  $\text{Cat}[n]$ . La relation  $d_i \times id_{\text{Cat}[n-1]} \sim id_{X_n} \times \delta_i$  montre alors que ce coégalisateur se résume à

$$(\coprod_{X_0} \text{Cat}[0] \coprod \coprod_{X_1} \text{Cat}[1]) / \sim$$

où : les relations induites par les faces  $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$  et la dégénérescence  $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$  montre que ce qui est entre parenthèses donne la catégorie libre ou graphie libre engendrée par les 1-simplexes  $d_1(x) \rightarrow d_0(x), x \in X_1$ . Il reste à quotienter cette catégorie par les relations venant des faces  $d_0, d_1, d_2 : X_2 \rightarrow X_1$ . ■

### Exercice 32

Montrer que le foncteur de nerf est pleinement fidèle et interpréter ce résultat.

### Fait. (*Groupoïde fondamental d'un ensemble simplicial*)

Le foncteur oubli de la catégorie des petits groupoïdes vers celle des petites catégories admet un adjoint à gauche. Et l'image de la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  par ce dernier fournit un groupoïde  $\pi_1(\mathfrak{X})$  appelé le *groupoïde fondamental* de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

#### 6.2.3.4 Correspondance de Dold-Kan

Cet exemple est l'occasion d'introduire quelques constructions qui relient les ensembles simpliciaux aux complexes de chaînes. On travaille ici sur  $\mathbb{Z}$  mais on aurait aussi bien pu travailler sur un autre anneau de base. Les applications linéaires entre modules libres provenant d'applications ensemblistes seront notées avec une police romane droite, comme par exemple  $d_i$ .

### Définition-propriété. (*Complexe de Moore*)

Le *complexe de Moore*  $C\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  a pour chaînes de degré  $n$  le module libre sur les  $n$ -simplexes et pour différentielle la somme alternée des faces :

$$d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : \mathbb{Z}X_n \rightarrow \mathbb{Z}X_{n-1}.$$

▷ Les relations simpliciales montrent que l'opérateur  $d$  est de carré nul. ■

### Définition. (*Complexe normalisé*)

Le *complexe normalisé*  $N\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est le complexe de chaînes quotient du complexe de Moore par le complexe des dégénérescences  $D\mathfrak{X}$  qui est le sous-complexe du complexe de Moore engendré par les simplexes dégénérés) :

$$N\mathfrak{X} = (C\mathfrak{X}/D\mathfrak{X}, d).$$

### Proposition

Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , la projection canonique  $C\mathfrak{X} \rightarrow N\mathfrak{X}$  est une équivalence d'homotopie.

▷ L'idée consiste à utiliser les dégénérescences pour créer une homotopie contractante. Il s'agit d'un bon exercice qui est donc laissé aux lecteurs. ■

### Remarques.

1. Le complexe normalisé admet donc pour base les simplexes non dégénérés.
2. Le complexe de Moore et le complexe normalisé définissent des foncteurs depuis la catégorie des ensembles simpliciaux sur les complexes de chaîne sur  $\mathbb{Z}$ .

### Exemple

Le complexe normalisé  $N\Delta^n$  associé au  $n$ -simplexe standard admet pour base les éléments de la forme  $i_0 \dots i_m$  de degré  $m$  où  $i_0 < \dots < i_m$  dans  $[n]$  et pour différentielle

$$d(i_0 \dots i_m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j i_0 \dots \hat{i_j} \dots i_m.$$

La structure d'objet cosimplicial sur les simplexes standards fournie par le plongement de Yoneda simplicial munit ces complexes normalisés d'une structure de complexe de chaînes cosimplicial :

$$N\Delta : \Delta \rightarrow Ch$$

où  $N\Delta$  est appelé *foncteur des chaînes normalisées*.

### Proposition

Le foncteur des chaînes normalisées admet un adjoint à droite

$$N : \Delta Ens \rightleftarrows Ch : R_{N\Delta}$$

donné par

$$R_{N\Delta}(C) \simeq \bigoplus_{0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n} C_k.$$

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème fondamental. ■

Le foncteur des chaînes normalisées induit un foncteur  $\bar{N} : sAb \rightarrow Ch_{\geq 0}$  des groupes abéliens simpliciaux vers les complexes de chaînes positivement gradués par la formule  $(\bar{N}\mathfrak{A})_n := A_n$ . On considère la restriction  $\bar{R}_{N\Delta} : Ch_{\geq 0} \rightarrow sAb$  de l'autre foncteur.

### Théorème. (*Équivalence de Dold-Kan*)

L'adjonction

$$\bar{N} : sAb \rightleftarrows Ch_{\geq 0} : \bar{R}_{N\Delta}$$

est une équivalence entre la catégorie des groupes abéliens simpliciaux et la catégorie des complexes de chaînes positivement gradués.

▷ Les mêmes formules qu'à la proposition précédente donnent l'adjonction considérée ici. Il est ensuite automatique de montrer que l'unité et la coünité de l'adjonction sont des isomorphismes. ■

### 6.2.4 Complexes de Kan et $\infty$ -catégories

Nous sommes maintenant suffisamment armés pour mettre au jour une notion simple et efficace de catégorie supérieure. Le cahier des charges impose que les catégories en soit des exemples.

#### Lemme

Le foncteur nerf  $\mathfrak{R} : \text{Cat} \longrightarrow \Delta\text{Ens}$  est plein et fidèle.

▷ On commence par remarquer que la coünité  $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \tau_1 \mathfrak{R}\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$  de l'adjonction  $\tau_1 \dashv \mathfrak{R}$  est un isomorphisme naturel. En tirant en arrière cette dernière, on obtient la bijection naturelle recherchée :

$$\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\tau_1 \mathfrak{R}\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{R}\mathcal{C}, \mathfrak{R}\mathcal{D}).$$

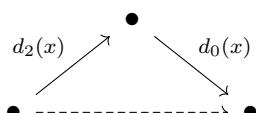
C'est ce que l'on voulait. ■

Les ensembles simpliciaux fournissent donc un cadre suffisamment large dans lequel on peut espérer définir une notion supérieure de catégorie. Commençons pour cela par caractériser les catégories parmi les ensembles simpliciaux, c'est-à-dire par décrire l'image essentielle du foncteur nerf.

Le résultat précédent utilise le fait crucial que la counité de l'adjonction catégorie fondamentale-nerf est un isomorphisme naturel. Il n'en est pas de même pour l'unité d'adjonction  $\nu_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{R}\tau_1(\mathfrak{X})$ . C'est déjà faux pour les 1-simplexes : tout élément  $x \in X_1$  fournit un morphisme  $d_2(x) \rightarrow d_0(x)$  mais les morphismes de  $\mathfrak{R}\tau_1(\mathfrak{X})$  sont représentés par des compositions libres de tels morphismes. Dans le cas du cornet  $\mathfrak{X} = \Lambda_1^2$ , l'unité d'adjonction est égale à l'inclusion

$$\nu_{\Lambda_1^2} : \Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2 \simeq \mathfrak{R}\tau_1(\Lambda_1^2)$$

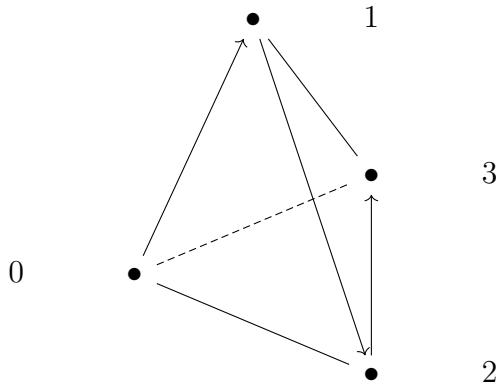
qui n'est pas un isomorphisme : il manque à gauche tout ce qui est dans  $\Delta^2$  mais pas dans le cornet  $\Lambda_1^2$ . Pour comprendre à quelle famille d'ensembles simpliciaux il faut se restreindre, on continue et on considère les 2-simplexes  $x \in X_2$  dont l'image par l'unité d'adjonction vaut  $\nu(x) = (d_2(x), d_0(x))$ . Graphiquement, on ne conserve que les deux faces *composables* du 2-simplexe :



pour  $x \in X_2$ . Pour que l'unité d'adjonction  $\eta$  soit un isomorphisme, il faut que cette seule donnée puisse caractériser tous les 2-simplexes de  $\mathfrak{X}$ . Pour cela, on remarque d'abord que cette donnée correspond aux morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^2 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Puis, qu'elle caractérise le 2-simplexe si et seulement si le diagramme suivant admet une unique extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \longrightarrow & \mathfrak{X}. \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

De manière générale, l'unité d'adjonction ne retient que la plus longue suite d'arêtes composables d'un  $n$ -simplexe



à savoir explicitement

$$\nu(x) = (d_2^{n-1}(x), d_2^{n-2}d_0(x), \dots, d_2d_0^{n-2}(x), d_0^{n-1}(x))$$

où  $x \in X_n$  avec un léger abus de notation pour les faces. Pour un 3-simplexe  $x \in X_3$ , on peut récupérer de manière unique la donnée de la  $\cong$  face 012 à savoir  $d_3(x)$  grâce à la propriété d'extension, puis de même, celle de la  $\cong$  face 123 à savoir  $d_0(x)$  et enfin celle de la  $\cong$  face 013 à savoir  $d_2(x)$ . Ceci correspond à un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Nous avons donc besoin que le diagramme suivant admette une unique extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}. \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^3 & & \end{array}$$

Nous aurions aussi bien pu commencer de la même manière en finissant par la donnée de la  $\cong$  face 023 à savoir  $d_1(x)$ . Il faudrait alors demander une unique extension du morphisme  $\Lambda_2^3 \rightarrow \mathfrak{X}$  depuis le cornet  $\Lambda_2^3$ . En dimension supérieure, on est naturellement amené à considérer les définitions et conditions suivantes.

### Définition. (*Cornets internes et externes*)

Les *cornets internes* sont deux de la forme  $\Lambda_k^n$  pour des entiers  $1 \leq k \leq n - 1$ . Les *cornets externes* sont ceux de la forme  $\Lambda_0^n$  et  $\Lambda_n^n$ .

### Proposition

La catégorie des petites catégories s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tous les cornets internes, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  entier.

▷ On commence par remarquer que le nerf d'une catégorie vérifie cette propriété d'unique extension le long des cornets internes. Ensuite, on montre, en utilisant les arguments donnés dans l'analyse ci-dessus et par récurrence sur  $n$ , que l'unité de l'adjonction nerf-catégorie fondamentale est un isomorphisme naturel lorsque l'on se restreint aux ensembles simpliciaux qui vérifient cette propriété d'unique extension. ■

*Remarque.* Le nerf d'une catégorie ne vérifie en général pas de propriété d'extension le long des cornets externes. Si on considère, par exemple, les cornets externes de dimension 2 suivants

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ g \swarrow & & \downarrow \\ x & \xrightarrow{id_x} & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ & \searrow f & \\ y & \xrightarrow{id_y} & y, \end{array}$$

la propriété d'extension impliquerait l'existence d'inverse à gauche et à droite respectivement.

### Exercice 33

Montrer que la catégorie des petits groupoïdes s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tout cornet.

Comment des morphismes en dimension supérieure peuvent-ils apparaître naturellement sur un objet mathématique ? Nous avons déjà considéré cette question.. On peut aussi répondre à cette question en essayant de construire un 1 -groupoïde fondamental associé à un espace topologique. Rappelons que le groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  est la catégorie dont les objets sont les points de  $X$  et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de chemins entre deux points. Notons qu'à cause de la paramétrisation des chemins, le quotient par la relation d'homotopie permet d'avoir une composition des morphismes associatives. L'écueil d'une telle construction est qu'elle ne voit pas la donnée homotopique supérieure des espaces

topologiques. On a donc envie de considérer un 1-groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  dont les objets seraient les points de  $X$ , les 1-morphismes les chemins entre deux points, les 2-morphismes les homotopies entre chemins, les 3-morphismes les homotopies entre homotopies, etc.

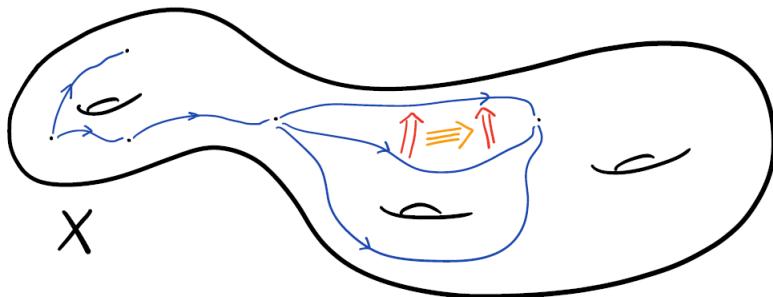


FIGURE 6.2.16 : Catégorie d'homotopie infinie. —

Premier problème : la composition des chemins n'est alors pas associative ... mais on peut contrôler le défaut d'associativité grâce aux 2-morphismes. Néanmoins l'*hypothèse homotopique de Grothendieck* voudrait que les notions d'1-groupoïde et d'espace topologique soient équivalentes, dans un sens à préciser. La version décrite ci-dessus serait une version globulaire d'un potentiel 1-groupoïde fondamental. À la place, on préfère ici considérer le modèle simplicial donné par l'ensemble simplicial singulier.

On veut donc que les espaces topologiques à travers leurs ensembles simpliciaux singuliers soient des exemples pour la notion recherchée de catégorie supérieure. Pour cela, nous aimeraisons reprendre l'étude précédente mais avec le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers à la place du foncteur nerf. Mais le premier résultat de la partie précédente ne tient partiellement plus ici.

### Lemme

Le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est fidèle mais pas plein.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Le morphisme induit au niveau des ensembles simpliciaux singuliers  $\text{Sing}(f) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  envoie un simplexe singulier  $\varphi : [\Delta^n] \rightarrow X$  sur  $f \circ \varphi$ . L'ensemble des 0-simplexes singuliers est en bijection avec les éléments de l'espace topologique et, avec cette identification, l'application  $\text{Sing}(f)_0 : X \rightarrow Y$  est l'application  $f$ . Donc le foncteur  $\text{Sing}$  est fidèle.

Pour la deuxième partie, considérons un espace topologique totalement discontinu, par exemple  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ , et l'espace topologique discret de même ensemble sous-jacent, noté ici  $\mathbb{Q}^{dis}$ . Dans les deux cas, les simplexes singuliers sont les applications constantes et l'ensemble simplicial singulier est l'ensemble simplicial constant  $\mathbb{Q}$ . Or, le morphisme simplicial identité  $\text{Sing}(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sing}(\mathbb{Q}^{dis})$  ne saurait venir de l'identité  $id : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{dis}$  car cette dernière n'est pas continue. ■

Il est en fait illusoire de chercher à réduire la catégorie des ensembles simpliciaux pour faire de l'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique une équivalence de catégories. Néanmoins cette dernière induit une équivalence au niveau des catégories homotopiques, en vertu d'un théorème à venir. Dans ce contexte, la notion simpliciale correspondante à celle d'espace topologique est la suivante.

### Définition. (*Complexe de Kan*)

Un complexe de Kan est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$  entier, parfois dite *propriété d'extension de Kan*.

*Remarque.* Remarquez la similitude avec la propriété d'extension homotopique des fibrations d'espaces topologiques.

### Proposition

Pour tout espace topologique  $X$ , l'ensemble simplicial singulier  $\text{Sing}(X)$  est un complexe de Kan.

▷ L'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique montre que la propriété d'extension de Kan est équivalente à la propriété d'extension similaire au niveau des espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ |\Delta^n| & & \end{array}$$

Cette dernière se démontre en réalisant le  $k$ -ième cornet  $|\Lambda_k^n|$  comme rétract par déformation du  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ . ■

La propriété d'extension le long des cornets admet la description purement combinatoire suivante.

### Lemme. (*Description combinatoire des complexes de Kan*)

Un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan si et seulement si pour tout  $n \geq 2$  et  $0 \leq k \leq n$  entier, toute collection de  $n$  simplexes  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$  vérifiant  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour  $i < j$  entiers naturels différents de  $k$  inférieurs à  $n$ , admet un  $n$ -simplexe  $x \in X_n$  tel que  $d_i(x) = x_i$  pour les entiers  $0 \leq i \leq n$  différents de  $k$ .

▷ C'est une application directe du lemme de Yoneda simpliciale à la description catégorique des cornets. ■

### Exercice 34

Montrer que le nerf d'un groupe est un complexe de Kan et que si le groupe est non-trivial, il ne peut pas être isomorphe à un ensemble simplicial singulier. En particulier, les complexes de Kan ne forment pas l'image essentielle du foncteur des ensembles simpliciaux singuliers.

### Exercice 35

Montrer que l'ensemble simplicial sous-jacent à un groupe simplicial, après avoir oublié la structure de groupe, est un complexe de Kan.

### Exercice 36

Montrer que les  $n$ -simplexes standard  $\Delta^n$  ne sont pas des complexes de Kan pour  $n \geq 2$ .

Nous y sommes, pour obtenir une bonne définition de catégorie supérieure, il suffit de considérer des ensembles simpliciaux qui vérifient une propriété commune aux nerfs de catégories et aux ensembles simpliciaux singuliers : celle d'extension, non-nécessairement unique, le long des cornets internes.

#### Définition. ( $\infty$ -catégorie)

Une  $\infty$ -catégorie est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long des cornets internes, i.e. :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

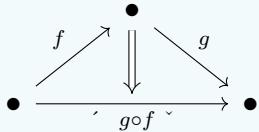
pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  entier.

#### $\infty$ -catégories

Cette notion a été introduite par BOARDMAN et VOGT dans leur étude des propriétés homotopiques des structures algébriques sous le nom de *complexe de Kan faible*. Elle a été intensivement étudiée d'abord par JOYAL puis par LURIE.

### Heuristique

Rétrospectivement, on peut interpréter les 0-simplexes d'une 1-catégorie comme ses objets et les 1-simplexes comme ses morphismes. La condition d'extension le long du cornet  $\Lambda_1^2$



fournit un candidat pour la composée «  $g \circ f$  » de deux morphismes composable ainsi qu'une « homotopie » de  $(g, f)$  vers «  $g \circ f$  ». La composition n'est donc pas unique, ni stricte. Ceci n'est pas un problème, au contraire. Ce degré de liberté est souhaité et, de toute façon, les différents choix sont homotopiquement uniques.

### Définition. ( $\infty$ -groupoïde)

Un  $\infty$ -groupoïde est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets  $\Lambda_k^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ .

*Remarque.* Les notions d' $\infty$ -catégorie et d' $\infty$ -groupoïde sont définies par une propriété : existence de remplissages de cornets. Il peut parfois être nécessaire d'adopter une approche plus algébrique et d'exiger la donnée de ces remplissages. On obtient alors les notions d' $\infty$ -catégorie algébrique et d' $\infty$ -groupoïde algébrique qui sont en fait des algèbres sur des monades. Ceci leur permet par exemple d'avoir toutes les limites et colimites. Un exemple fondamental d'application de la dernière notion peut par exemple être donné où les formules de la théorie de Lie (Baker–Campbell–Hausdorff) sont retrouvées et généralisées en remplissant des cornets.

### 6.2.5 Homotopie simpliciale

L'homotopie simpliciale est la première raison d'être des ensembles simpliciaux. Elle permet d'encoder combinatoirement les propriétés homotopiques des espaces topologiques. Il faut bien faire attention que la théorie générale ne s'applique pas à tous les ensembles simpliciaux, mais uniquement à ceux qui sont des « espaces », c'est-à-dire les complexes de Kan.

### Définition. (*Chemin*)

Un *chemin* dans un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ .

### Reformulation pratique. (*Chemin d'homotopie simpliciale*)

Une telle donnée correspond à

$$0 \xrightarrow{01} 1 \xrightarrow{p} p(0) = d_1(x) \xrightarrow{x} p(1) = d_0(x)$$

avec  $p(01) = x \in X_1$ .

### Définition. (*Éléments homotopes*)

Deux 0-simplexes  $a, b \in X_0$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  sont *homotopes*, et l'on note alors  $a \sim b$ , s'il existe un chemin  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $p(0) = a$  et  $p(1) = b$ , c'est-à-dire s'il existe  $x \in X_1$  tel que  $d_1(x) = a$  et  $d_0(x) = b$ . On dit aussi que  $a$  et  $b$  sont dans la *même composante connexe*.



La relation binaire  $\sim$  n'est pas une relation d'équivalence en général ! Il suffit de penser au simplexe standard  $\Delta^1$  de dimension 1 : dans ce dernier 0 est homotope à 1, mais 1 n'est pas homotope à 0.

C'est précisément pour remédier à cela qu'il faut considérer des complexes de Kan.

### Proposition. (*Relation d'homotopie sur un complexe de Kan*)

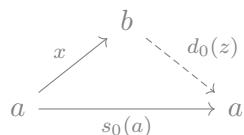
Pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{X}$ , la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

▷ En effet :

- ★ pour tout 0-simplexe  $a \in X_0$ , on a  $a \sim a$  ; pour cela il suffit de considérer le chemin conné par  $s_0(a)$  :

$$a = d_1 s_0(a) \xrightarrow{s_0(a)} d_0 s_0(a) = a.$$

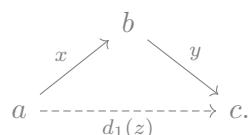
- ★ Soient  $a \sim b$  reliés par un chemin  $x \in X_1$ . On considère le 2-cornet



qui admet un remplissage par la propriété d'extension de Kan. Alors le 1-simplexe  $d_1(z)$  est un chemin qui relie  $b$  à  $a$ .

- ★ Soient  $a \sim b$  et  $b \sim y$  deux homotopies entre éléments avec pour chemins respectifs  $x$  et  $y$ .

Une telle donnée est équivalente au 2-cornet suivant de  $\mathfrak{X}$  :



La propriété d'extension de Kan fournit un 2-simplexe  $z \in X_2$  tel que  $d_2(z) = x$  et  $d_0(z) = y$ .

Le 1-simplexe  $d_1(z)$  est un chemin  $a \sim c$ ,

d'où le résultat. Remarquons qu'on a utilisé tous les cornets de dimension 2, interne et externe. ■

(*Dans le reste de cette section, nous ne considérons que des complexes de Kan, sauf mention explicite du contraire.*)

### Définition. (*Composantes connexes de Kan*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un complexe de Kan. On note  $\pi_0(\mathfrak{X}) = X_0 / \sim$  l'ensemble de ses composantes connexes.

On va maintenant appliquer cette définition à l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  entre deux ensembles simpliciaux. On rappelle la forme de ses 0-simplexes et 1-simplexes :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \text{ ET } \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_1 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^1, \mathfrak{Y}).$$

### Définition. (*Morphismes simpliciaux homotopes*)

Deux morphismes  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux sont *homotopes* s'ils se sont comme 0-simplexes de l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ; cela signifie qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux  $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$  tel que  $H(-, 0) = f$  et  $H(-, 1) = g$ .

La similitude avec la notion d'homotopie entre applications continues est frappante. Le résultat suivant est l'analogue dans le cadre des ensembles simpliciaux de la structure d'espace topologique sur les ensembles d'applications continues.

### Théorème

Pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{Y}$ , l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est un complexe de Kan.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La démonstration combinatoire est longue. Une démonstration catégorique repose sur la notion très utile d'extension anodine. ■

### Corollaire

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial et  $\mathfrak{Y}$  un complexe de Kan. La relation d'homotopie  $\sim$  entre morphismes de  $\mathfrak{X}$  vers  $\mathfrak{Y}$  est une relation d'équivalence.

▷ On utilise la relation d'équivalence  $\sim$  sur les complexes de Kan. ■

**Fait. (*Compositions d'homotopies simpliciales*)**

La relation d'homotopie vérifie la propriété

$$f \sim g \implies fk \sim gk \text{ ET } lf \sim lg$$

pour tous morphismes simpliciaux  $fg : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}, k : \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{X}, l : \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{Z}$ .

**Définition. (*Équivalence d'homotopie simpliciale*)**

Une *équivalence d'homotopie (simpliciale)* est un morphisme d'ensembles simpliciaux noté  $f : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}$  qui admet un morphisme  $g : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  vérifiant  $gf \sim id_{\mathfrak{X}}$  et  $fg \sim id_{\mathfrak{Y}}$ .

Deux complexes de Kan sont dits *homotopiquement équivalents* ce que l'on note  $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y}$  s'ils sont reliés par une équivalence d'homotopie.

**Propriétés**

1. Le foncteur de réalisation géométrique  $|\cdot| : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Top}$  envoie les homotopies simpliciales sur les homotopies topologiques.
2. Toute homotopie topologique  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques induit une homotopie simpliciale entre  $\text{Sing}(f), \text{Sing}(g) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  par la formule

$$\text{Sing}(X) \times \Delta^1 \rightarrow \text{Sing}(X) \times \text{Sing}(I) \rightarrow \text{Sing}(X \times I) \xrightarrow{\text{Sing}(H)} \text{Sing}(Y)$$

où le morphisme de gauche est défini par  $01 \mapsto id_I$ .

Ceci montre que les foncteurs réalisation géométrique et ensemble simplicial singulier induisent des bijections entre les classes d'homotopie de morphismes d'ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow \text{Sing}(Y)$  et les classes d'homotopie d'applications continues  $|\mathfrak{X}| \rightarrow Y$ .

▷ Successivement :

1. Soit  $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$  une homotopie simpliciale entre deux morphismes  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux. Comme  $|\Delta^1|$  est localement fini, l'homéomorphisme  $|\mathfrak{X} \times \Delta^1| \simeq |\mathfrak{X}| \times |\Delta^1| \simeq |\mathfrak{X}| \times I$  montre que  $|H| : |\mathfrak{X}| \times I \rightarrow |\mathfrak{Y}|$  est une homotopie topologique entre les applications continues  $|f|, |g| : |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$ .
2. Tout est dans l'énoncé. ■

**Remarque importante.** Ces deux foncteurs induisent des équivalences de catégories entre la catégorie homotopique des *CW-complexes* et la catégorie homotopique des *Kan complexes*.

L'analogie avec les espaces topologiques peut se poursuivre, mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Nous citons néanmoins rapidement les notions suivantes.

- ★ Une paire d'ensembles simpliciaux  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  et la donnée d'un sous-ensemble ensemble simplicial  $Y$  de  $\mathfrak{X}$  avec  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ .
  - ★ Une paire de complexe de Kan  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est une paire d'ensembles simpliciaux telle que les deux soient des complexes de Kan.
- Par exemple, pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{X}$ , la paire  $(\mathfrak{X}, *)$  est une paire de complexes de Kan.
- ★ Une homotopie relative à  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$  est une homotopie  $H$  entre deux morphismes d'ensembles simpliciaux  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  vérifiant  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in \mathfrak{Y}$  et  $t \in \Delta^1$ . Dans ce cas, on utilise la notation classique  $f \sim g$  rel  $\mathfrak{Y}$ .

### Définition. (*Complexe de Kan pointé*)

Un complexe de Kan pointé est un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  muni d'un morphisme d'ensembles simpliciaux  $* = \Delta^0 \rightarrow \mathfrak{X}$  où par un simple abus, on notera  $*$  le seul simplexe de dimension  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Reformulation pratique

Un complexe de Kan pointé est exactement un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  avec la donnée d'un  $x \in X_0$ .

Pour  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé, on considère les classes d'homotopie relative :

$$\pi_n(\mathfrak{X}, *) := [(\Delta^n, \partial\Delta^n), (\mathfrak{X}, *)] = \{f : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X} \mid f|_{\partial\Delta^n} : \partial\Delta^n \rightarrow *\} / \sim \text{ rel } \partial\Delta^n.$$

### Fait. (*Homotopie ⊆ homotopie simpliciale*)

Soit  $(X, x)$  un espace topologique pointé. Alors  $\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(\text{Sing}(X), \text{Sing}(x))$ .

C'est la double propriété précédente.

→ **Notation.** Afin d'expliciter combinatoire cette définition, on utilisera la notation suivante, pour tout  $n$ -simplexe  $x \in X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé fixé :

$$\partial x := (d_0(x), d_1(x), \dots, d_{n-1}(x), d_n(x)).$$

### Lemme

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  une complexe de Kan pointé. La donnée d'un morphisme  $f : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\mathfrak{X}, *)$  est équivalente à celle d'un  $n$ -simplexe  $x \in X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ . Via cette identification, deux morphismes  $f, g$  sont homotopes relativement à  $\partial\Delta^n$  si et seulement si on peut trouver un  $(n + 1)$ -simplexe  $w \in X_{n+1}$  reliant les deux  $n$ -simplexes  $x, y$  correspondant de la manière suivant  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ .

▷ La première partie est une conséquence directe du lemme de Yoneda simplicial. La seconde partie est plus longue. On commence par considérer pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout  $i \in [n]$  la relation sur les  $n$ -simplexes  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$  :

$$x \sim_i y \iff \exists w \in X_{n+1}, \partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$$

où  $y$  se trouve à la  $i$ -ième place dans la ligne précédente. Il s'agit d'une relation d'équivalence, comme on le montre ci-dessous, et qui ne paraîtra pas compliqué dès que l'on refait les dessins en dimension 3 :

- ★ c'est une relation réflexive, car en utilisant la dégénérescence  $s_i$ , on voit que  $\partial s_i(x) = (*, \dots, *, x, x, *, \dots, *)$  et donc que  $x \sim_i x$ .
- ★ Soient  $x \sim_i y$  et  $y \sim_i z$  avec respectivement  $v, w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial v = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  et  $\partial w = (*, \dots, *, z, y, *, \dots, *)$ . On considère  $W = (*, \dots, *, w, -, v, *, \dots, *)$  où  $w$  est la  $i$ -ième place du multiplet. Il s'agit alors d'un  $(i+1)$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  par le corollaire du lemme de Yoneda simplicial sur les morphismes. Comme  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan, ce cornet admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ , c'est-à-dire  $W \subseteq \partial Z$ . On calcule  $\partial d_{i+1}(Z) = (*, \dots, *, z, x, *, \dots, *)$  grâce à ce même corollaire. Ceci montre que  $x \sim_i z$ .

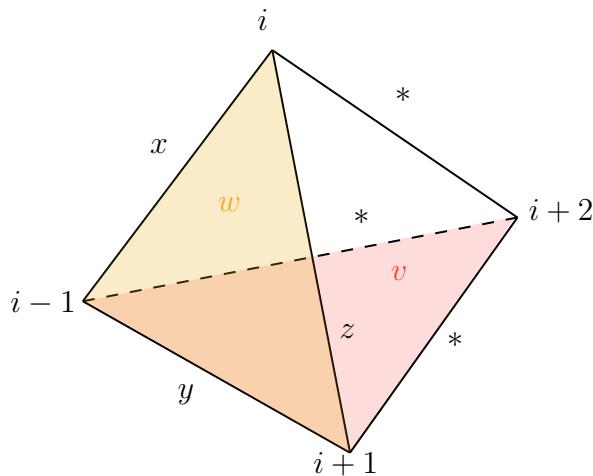


FIGURE 6.2.17 : Transfert de l'homotopie simpliciale. —

- ★ Pour la symétrie, soient  $x \sim_i y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$ . On considère  $W = (*, \dots, *, -, s_i(x), w, *, \dots, *)$  où  $w$  est la  $(i+2)$ -ième place du multiplet. Il s'agit d'un  $i$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2} : W \subseteq \partial Z$ . On calcule  $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  qui montre  $y \sim_i x$ .

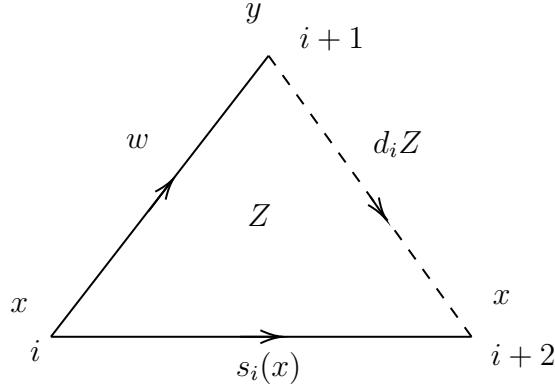
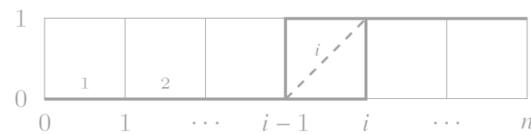


FIGURE 6.2.18 : Symétrie de l'homotopie simpliciale. —

On montre maintenant que toutes ces relations d'équivalences sont équivalentes. Soit  $i \in [n - 1]$ . Dans un sens, donnons-nous  $x_{i+1}y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  est à la  $(i + 1)$ -ième position. On considère  $W = (*, \dots, *, w, s_{i+1}(y), s_i(), -, *, \dots, *)$  où  $w$  est à la  $i$ -ième place. Il s'agit d'un  $(i + 3)$ -ième cornet de dimension  $n + 1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ . On calcule  $\partial d_{i+3}(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  où  $x$  est la  $i$ -ième place, ce qui montre  $x \sim_i y$ , car  $\sim_i$  est réflexive. Dans l'autre sens, on se donne  $x \sim_i y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  est à la  $i$ -ième position. On considère  $W = (*, \dots, *, -, s_{i+1}(x), s_i(x), w, *, \dots, *)$  où  $w$  est à la  $(i + 3)$ -ième place. Il s'agit d'un  $i$ -ième cornet de dimension  $n + 1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ . On calcule  $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  où  $x$  est la  $(i + 1)$ -ième place, ce qui montre  $x \sim_{i+1} y$ . La démonstration de l'énoncé est maintenant automatique. Soient  $f, g$  rel  $\partial\Delta^n$  et soient  $x, y \in X_n$  les deux  $n$ -simplexe représentant  $f$  et  $g$  respectivement. On considère un morphisme  $H : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $H(-, 0) = f$ ,  $H(-, 1) = g$  et  $H(\partial\Delta^n, -) = *$ . La décomposition prismatique donne ici le coégalisateur

$$\coprod_{1 \leq i \leq n} \Delta^n \xrightarrow[\delta_i]{\delta_i} \coprod_{1 \leq j \leq n} \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^1$$

où les deux morphismes de gauche arrivent respectivement dans la  $i$ -ième copie et la  $(i - 1)$ -ième copie.



Le lemme de Yoneda simplicial montre alors que la donnée du morphisme  $H$  est équivalente à la donnée de  $n + 1$  simplexes  $z_0, z_1, \dots, z_n \in X_{n+1}$  de dimension  $n + 1$  vérifiant  $\partial z_0 = (y, d_1(z_1), *, \dots, *)$ ,  $\partial z_n = (*, \dots, *, d_n(z_n), x)$  et  $\partial z_i = (*, \dots, *, d_i(z_i), d_{i+1}(z_{i+1}), *, \dots, *)$  pour tout entier  $1 \leq i \leq n - 1$ . Ceci signifie que

$$x \sim_n d_n(z_n) \sim_{n-1} d_{n-1}(z_{n-1}) \sim_{n-2} \dots \sim_1 d_1(z_1) \sim_0 y.$$

Par ce qui précède, ceci implique  $x \sim_n y$  et donc qu'il existe  $w \in X_{n+1}$  tel que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ . Dans l'autre sens, soit  $x \sim_n y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tel que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ . On considère les  $n + 1$

simplexes  $s_0(y), s_1(y), \dots, s_{n-1}(y), w$  qui définissent un morphisme  $H : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $H(-, 0) = f$ ,  $H(-, 1) = g$  et  $H(\partial\Delta^n, -) = *$ . On a donc  $f \sim g$  rel  $\partial\Delta^n$ . ■

### Fait. (*Produit dans le groupe d'homotopie simplicial*)

Soient  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $[x]$  la classe d'équivalence de  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$  pour la relation d'équivalence du lemme précédent :  $x \sim_i y$  s'il existe  $w \in X_{n+1}$  avec  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  se trouve à la  $i$ -ième place. Soient  $x, y \in X_n$  deux  $n$ -simplexes de  $\mathfrak{X}$  vérifiant  $\partial x = \partial y = (*, \dots, *)$ . La donnée de  $w = (*, \dots, *, x, -y)$  définit un  $n$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  par le corollaire du lemme de Yoneda simplicial sur les morphismes. Comme  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan, ce cornet se remplit par un  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . On voit rapidement que  $\partial d_n(W) = (*, \dots, *)$  et l'on pose alors

$$[x] \cdot [y] = [d_n(W)].$$

### Lemme. (*Bonne définition du produit dans le groupe d'homotopie simpliciale*)

Soient  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Le produit  $\cdot$  de la construction précédente est bien défini.

▷ Montrons déjà que la définition ne dépend pas du  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . Soit  $W' \in X_{n+1}$  un  $(n+1)$ -simplexe tel que  $\partial W' = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$ . Le cornet  $(* \dots, *, s_n(x), -, W, W')$  admet un remplissage  $Z \in W_{n+2}$  dont on peut vérifier que  $\partial d_n(Z) = (*, \dots, *, d_n(W), d_n(W'))$ . Ceci implique  $[d_n(W)] = [d_n(W')]$ .

Montrons maintenant que la définition du produit  $\cdot$  ne dépend pas du choix de représentant des classes de  $[x]$  et de  $[y]$ . Nous ne traitons explicitement que le cas de  $[y]$ , celui de  $[x]$  étant symétrique. Soit  $y' \in X_n$  tel que  $y \sim y'$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w \in X_{n+1}$  vérifiant  $\partial w = (*, \dots, *, y', y)$ . Soient  $W \in X_{n+1}$  remplissant  $(* \dots, *, x, -, y)$  et  $W' \in X_{n+1}$  remplissant  $(* \dots, *, x, -, y')$ . On considère le cornet  $(* \dots, *, s_{n-1}(x), W', -, w)$  que l'on remplit avec un  $(n+2)$ -simplexe  $Z \in X_{n+2}$ . Ce dernier vérifie  $\partial d_{n+1}(Z) = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$ , ce qui montre que  $[x] \cdot [y] = [x] \cdot [y']$ . ■

### Définition. (*Groupes d'homotopie d'un complexe de Kan*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , le  $n$ -ième groupe d'homotopie de  $\mathfrak{X}$  est défini par

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]).$$

### Théorème. (*Structure des groupes d'homotopie simpliciaux*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot)$  est un groupe.

▷ Montrons :

- ★ pour tout  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ , on a  $\partial s_n(x) = (*, \dots, *, x, x)$  et  $\partial s_{n-1}(x) = (*, \dots, x, x, *)$ , ce qui montre respectivement que  $[*] \cdot [x] = [x]$  et  $[x] \cdot [*] = [x]$  d'où l'unitarité.
- ★ Pour tout  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ , on considère le  $(n+1)$ -ième cornet défini par  $(* \dots, *, x, *, -)$  qui se remplit avec un  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . Ceci montre que  $[x] \cdot [d_{n+1}(W)] = [*]$ . De la même manière, le  $(n-1)$ -ième cornet défini par  $(* \dots, *, -, *, x)$  se remplit avec un  $(n+1)$ -simplexe  $Z \in X_{n+1}$ . Ceci montre que  $[d_{n-1}(Z)] \cdot [x] = [*]$  et conclut la démonstration de l'existence d'un inverse.
- ★ Soient enfin pour l'associativité  $x, y, z \in X_n$  vérifiant tous  $\partial x = \partial y = \partial z = (*, \dots, *)$ . On considère un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n-1} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, x, -, y)$ , un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n+2} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, y, -, z)$  et un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n+1} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, d_n(W_{n-1}), -, z)$ . Il existe un  $(n+1)$ -simplexe  $Z \in X_{n+2}$  qui remplit le cornet  $(* \dots, *, W_{n-1}, -, W_{n+1}, W_{n+2})$ . Le calcul  $\partial d_n(Z) = (* \dots, *, x, d_n(W_{n+1}), d_n(W_{n+2}))$  montre que  $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$ .

Donc c'est bien un groupe. ■

### Théorème. (*Abélianité des groupes d'homotopie simpliciale supérieurs*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot)$  est abélien.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Ce point peut être montré de manière purement combinatoire, comme tous les résultats précédents. ■

### Propriété. (*Invariance homotopique des groupes d'homotopie simpliciale*)

Les groupes d'homotopie simpliciaux d'un complexe de Kan pointé sont des invariants d'homotopie.

▷ Il est automatique de voir à partir des définitions que les groupes d'homotopie simpliciaux définissent des foncteurs depuis la sous-catégorie des complexes de Kan vers la catégorie des groupes (abéliens) qui envoient les équivalences d'homotopie sur les isomorphismes. ■

### Propriété. (*Ou comment retrouver l'homotopie géométrique*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un isomorphisme, *i.e.* une bijection en  $n = 0$ , naturel

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]) \simeq (\pi_n(|\mathfrak{X}|, |*|), \cdot, [cste]).$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) C'est dur ! ■

**Définition. (*Fibration de Kan*)**

Un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  est une *fibration de Kan* s'il vérifie la propriété d'extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathfrak{B} \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}, k \in [n]$ . On note les fibrations de Kan avec des doubles flèches. L'ensemble simplicial  $\mathfrak{C}$  est appelé *espace/complexe total* et l'ensemble simplicial  $\mathfrak{B}$  est appelé *espace/complexe (de) base*. La donnée complète est aussi appelée *espace/complexe fibré*.

**Exercice 37**

Montrer qu'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan si et seulement si l'application terminale  $\mathfrak{X} \twoheadrightarrow *$  est une fibration de Kan.

**Définition. (*Fibre d'une fibration de Kan*)**

Soit  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  une fibration de Kan. Pour tout 0-simplexe  $b$  de  $\mathfrak{B}$ , on considère le sous-ensemble simplicial qu'il engendre que l'on note encore par  $b$  ainsi que tous ses simplexes, même si formellement ces dernières sont les images de  $b$  par les dégénérescences itérées. On considère l'ensemble simplicial  $\mathfrak{F} = p^{-1}(b)$  défini par  $F8n = \pi_n^{-1}(b)$  que l'on appelle *fibre (de Kan) de  $p$  au point  $b$* .

**Lemme. (*Structure des fibres de Kan*)**

Toute fibre d'une fibration de Kan est un complexe de Kan.

▷ C'est immédiat par la caractérisation combinatoire des complexes de Kan. ■

À toute fin utile, on peut caractériser combinatoirement les fibrations de Kan de la manière suivante :

**Lemme. (*Description combinatoire des fibrations de Kan*)**

Un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  est une fibration de Kan si et seulement si pour tous entiers  $n \geq 2$  et  $0 \leq k \leq n$ , toute collection de  $n$  simplexes  $x_0, \dots, x_{k-}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E_{n-1}$  vérifiant  $d_i^{\mathfrak{C}}(x_j) = d_{j-1}^{\mathfrak{C}}$  pour les entiers naturels  $i < j$  différents de  $k$  inférieurs à  $n$  et tout  $n$ -simplexe  $y \in B_n$  tel que  $d_i^{\mathfrak{B}}(y) = p(x_i)$ , il existe  $x \in E_n$  tel que  $p(x) = b$  et  $d_i^{\mathfrak{C}}(x) = x_i$  pour les entiers naturels  $i$  différents de  $k$  inférieurs à  $n$ .

▷ On applique le lemme de Yoneda simplicial à la caractérisation combinatoire des complexes de Kan. ■

### Exercice 38 (S)

oit  $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  une fibration de Kan.

1. Montrer que si  $\mathfrak{C}$  est un complexe de Kan et  $p$  est surjective en tout degré, alors  $\mathfrak{B}$  est un complexe de Kan.
2. Montrer que si  $\mathfrak{B}$  est un complexe de Kan, alors  $\mathfrak{C}$  est un complexe de Kan.

### Théorème. (*Suite exacte longue associée à une fibration de Kan*)

Toute fibration de Kan

$$(\mathfrak{F}, f) \xrightarrow{i} (\mathfrak{C}, f) \xrightarrow{p} (\mathfrak{B}, b)$$

où  $f$  est un 0-simplexe de la fibre  $\mathfrak{F}$ , induit une longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow \pi_2(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{F}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{C}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{F}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{C}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{B}) \longrightarrow \{*\}.$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) On peut donner une démonstration ad hoc dont le degré de difficulté est du même acabit que les précédentes. ■

### Propriété. (*Lien Serre-Kan*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $\text{Sing}(f) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  est une fibration de Kan si  $f$  est une fibration de Serre et réciproquement si  $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  est une fibration de Kan, alors  $|p| : |\mathfrak{C}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  est une fibration de Serre.

### Preuve.

▷ (*Suite exacte longue d'une fibration de Kan*) On aurait alors pu montrer le théorème précédent à partir de sa version topologique donnée par la suite de Puppe en utilisant l'isomorphisme avec les groupes d'homotopie des réalisations géométriques associées. ■

### Exercice 39 (Mapping space)

Soit  $i : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{L}$  un monomorphisme d'ensembles simpliciaux. Soit  $p : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  une fibration de Kan. Ils induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{p_*} & \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Y}) \\ i^* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{p_*} & \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y}). \end{array}$$

1. Montrer que l'application induite

$$\mathbf{hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) \xrightarrow{(i^*, p_*)} \mathbf{hom}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \times_{\mathbf{hom}(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y})} \mathbf{hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Y})$$

est une fibration de Kan.

**INDICATION** Utiliser le fait que  $p$  satisfait la propriété de relèvement suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda_k^n \times \mathfrak{L}) \cup_{(\Lambda_k^n \times \mathfrak{R})} (\Delta^n \times \mathfrak{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow p \\ \Delta^n \times \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{Y}. \end{array}$$

2. Montrer que le poussé en avant  $p_* : \mathbf{hom}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y})$  est une fibration de Kan.
3. Montrer que l'élément en arrière  $i^* : \mathbf{hom}(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbf{hom}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X})$  est une fibration de Kan quand  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan.

### Définition. (*Cofibration simpliciale*)

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux est une *cofibration* si toutes les applications  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  sont injectives pour  $n \in \mathbb{N}$ .

### Définition. (*Équivalence faible simpliciale*)

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux est une *cofibration* si tous les morphismes  $\pi_n(|f|) : \pi_n(|\mathfrak{X}|, x) \simeq \pi_n(|\mathfrak{Y}|, |f|(x))$  sont des isomorphismes, *i.e.* une bijection en  $n = 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $x \in |\mathfrak{X}|$  fixé.

### Exercice 40 (Une question difficile)

Peut-on trouver un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  dont chaque  $n$ -simplexe  $X_n$  est fini, et qui modélise le cercle ?

Le résultat suivant relie directement les deux premières sections de ce cours.

### Théorème

L'adjonction réalisation géométrique-foncteur singulier induit l'équivalence suivante de catégories :

$$\mathrm{Top}[\text{eq-faible}^{-1}] \simeq \mathrm{CW}\text{-}Cx_{/\sim} \simeq \mathrm{Kan}\text{-}Cx_{/\sim} \simeq \Delta\mathrm{Ens}[\text{eq-faible}^{-1}]$$

où les deux catégories du milieu sont respectivement celle des *CW-complexes* et des complexes de Kan avec morphismes modulo la relation d'équivalence d'homotopie.

### Heuristique

La beauté de ce théorème tient en au moins deux points : il établit une équivalence entre les théories homotopiques des espaces topologiques et des ensembles simpliciaux et il donne une forme simple de catégories localisées, deux extrêmes.

### Exercice 41

Reformuler l'homotopie simpliciale en termes d'extensions de Kan.

# Chapitre 7

## Topologie des variétés

### Résumé

*Analysis Situs* est un article de référence sur les mathématiques publié par Henri POINCARÉ en 1895. Poincaré en a publié cinq compléments entre 1899 et 1904. Ces articles ont fourni le premier traitement systématique de la topologie et ont révolutionné le sujet en utilisant des structures algébriques pour distinguer les espaces topologiques non homéomorphes, fondant ainsi le domaine de la topologie algébrique. Les papiers de Poincaré ont introduit les concepts de groupe fondamental et d'homologie simpliciale, ont fourni une première formulation de la dualité de Poincaré, ont présenté la caractéristique d'Euler-Poincaré pour les complexes différentiels, et ont soulevé plusieurs conjectures importantes, y compris la célèbre conjecture de Poincaré, qui s'est révélé plus tard être un théorème.

On s'intéresse ici à la topologie algébrique du point de vue d'un géomètre.

### 7.1 Compléments généraux sur les variétés topologiques grâce à l'homologie

#### 7.1.1 Propriétés locales algébrico-topologiques des variétés

##### 7.1.1.1 Définitions sur les variétés topologiques

###### Reformulation pratique. (*Variété topologique*)

Une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$  est un espace topologique séparé, à base dénombrable et localement homéomorphe à l'espace euclidien de dimension  $n$ .

###### Définition. (*Bon ensemble, bon voisinage sur une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ . Un *bon (ensemble) ouvert*  $V \subseteq M$  est un ouvert tel qu'il existe un ouvert  $U \subseteq M$  tel que  $U$  soit un voisinage euclidien de chacun de ses points, autrement dit  $U \simeq \mathbb{R}^n$  par  $\varphi$ , et tel  $V \subseteq U$  corresponde par  $\varphi$  à une boule ouverte de rayon fini dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un *bon voisinage*  $V$  de  $x$  est un voisinage ouvert vérifiant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert euclidien  $U \ni x$  muni de l'homéomorphisme  $\varphi$  tel que  $V \subseteq U$  corresponde par  $\varphi$  à une boule ouverte de rayon fini dans  $\mathbb{R}^n$ .

### Proposition

Tout point d'une variété topologique admet un bon voisinage.

▷ Par hypothèse, tout point d'une variété topologique admet un voisinage euclidien  $U$  ouvert quitte à prendre son intérieur, avec si  $n = \dim(M)$ ,  $\varphi : U \simeq \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme. Alors  $V = \varphi^{-1}(B(\varphi(x), 1)) \ni x$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $U$  donc dans  $M$ , car  $U$  est ouvert, homéomorphe à  $B(\varphi(x), 1)$  toujours par une restriction de  $\varphi$ . ■

#### 7.1.1.2 Lemmes locaux-globaux sur les variétés

##### Lemme. (*Local-global pour les compacts*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédicat sur les sous-ensembles compacts de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien  $U \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
- (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des compacts  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
- (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par intersection décroissante) si l'on a une suite emboîtée de compacts  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  telle que toutes les  $\mathcal{P}_M(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  soient vraies, alors  $\mathcal{P}_M\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$  est vraie ;

alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout compact dans  $M$ .

▷ Soit  $U \subseteq M$  un ouvert euclidien. Si  $A \subseteq U$  est une réunion finie de compacts convexes, alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie, en remarquant que  $C_{m+1} \cap (C_1 \cup \dots \cup C_m) = (C_{m+1} \cap C_1) \cup \dots \cup (C_{m+1} \cap C_n)$  et que l'intersection de convexes et un convexe, pour appliquer la propriété de stabilité par réunion sous couvert de stabilité par intersection. Si maintenant  $A \subseteq U$  est seulement compact, alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est encore vraie : en effet, considérons, comme c'est possible, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}^*$ , une réunion finie  $B_i$  de boules fermées centrées aux points de  $A$  et de rayon  $\frac{1}{i}$ , qui soient dans  $U$  et telles que  $A \subseteq B_i$ . On pose  $A_i = B_1 \cap \dots \cap B_i$  pour tout  $i \geq 1$ . La suite  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et ce sont des compacts convexes de  $U$ . De plus, un peu par construction  $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$ , donc puisque  $\mathcal{P}_M(A_i)$  est vraie pour tout  $i \geq 1$ , on peut conclure. Soit enfin  $A$  un compact quelconque de  $M$ . On sait que  $M$  est métrisable, ce qui permet de procéder comme à l'étape précédente ! ■

Avançons.

**Lemme. (*Local-global pour les fermés*)**

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédictat sur les fermés de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien  $U \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
  - (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des fermés  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
  - (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par intersection décroissante) si l'on a une suite emboîtée de compacts  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  telle que toutes les  $\mathcal{P}_M(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  soient vraies, alors  $\mathcal{P}_M(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_i)$  est vraie ;
  - (iv) ( $\mathcal{P}_M$  stable par réunions de compacts très disjoints) si  $(A_i)_{i \in I}$  est une collection de compacts très disjoints, i.e. il existe une collection d'ouverts deux à deux disjoints  $(N_i)_{i \in I}$  de  $M$  telle que  $A_i \subseteq N_i$  pour tout  $i \in I$ , avec  $(A_i)_{i \in I}$  telle que  $\mathcal{P}_M(A_i)$  soit vraie pour tout  $i \in I$  et  $\bigcup_{i \in I} A_i$  soit un fermé, alors  $\mathcal{P}_M(\bigcup_{i \in I} A_i)$  est vraie ;
- alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout fermé de  $M$ .

▷ On sait que  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie pour tout compact  $A \subseteq M$ , car les hypothèses du lemme local-global pour les fermés sont plus fortes que celui pour les compacts. Si  $M$  est compacte, c'est évident, car ses fermés sont compacts. Supposons donc que  $M$  ne soit pas compacte. Elle reste séparée et localement compacte en tant que variété. Considérons  $M^*$  sa compactifiée dont on note  $\infty$  le point à l'infini. On obtient donc un espace  $M^*$  séparé, et même régulier, qui admet clairement une base dénombrable. Par le théorème de métrisation d'Urysohn, il est métrisable. Soit  $d$  une métrique, que l'on peut sans problème supposer bornée par 1. On considère sur  $M$  la fonction  $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ . Si

$$x \longmapsto \frac{1}{d(x, \infty)}$$

$A \subseteq M$  est fermé, on pose  $B_j = f^{-1}([2j - 2, 2j - 1]) \cap A$  et  $C_j = f^{-1}([2j - 1, 2j]) \cap A$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , qui sont compacts, car respectivement fermés dans les compacts  $f^{-1}([2j - 2, 2j - 1])$  et  $f^{-1}([2j - 1, 2j])$ , qui sont homéomorphes à des boules fermées pour la métrique  $d$ ; plus généralement, on peut voir que  $f$  est propre. On pose  $B = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_j$  et  $C = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ . Les sous-ensembles  $B$  et  $C$  sont des réunions très disjointes de compacts. De plus, ce sont des fermés par leur construction, donc  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(C)$  sont vraies. De façon similaire,  $\mathcal{P}_M(B \cap C)$  est vraie. Par conséquent,  $\mathcal{P}_M(B \cup C)$  est vraie, mais  $B \cup C = A$ , donc on a terminé. ■

**Lemme. (*Local-global pour les ouverts*)**

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédictat sur les ouverts de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est homéomorphe, en particulier s'il est difféomorphe, à un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
- (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des ouverts  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
- (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par réunion disjointe) si  $(A_i)_{i \in I}$  est une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que  $\mathcal{P}_M(A_i)$  soit vraie pour tout  $i \in I$ , alors  $\mathcal{P}_M(\bigcup_{i \in I} A_i)$  est vraie ;

alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout ouvert de  $M$ .

▷ Par les deux premiers points, l'affirmation  $\mathcal{P}_M(U)$  est vraie pour tout réunion  $U$  finie d'ouverts convexes de  $\mathbb{R}^n$ , si  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Soient comme dans la preuve précédente  $M^* = M \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandrov de  $M$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{d(\infty, x)}$  où  $d$  est la distance sur  $M^*$ , qui est métrisable, où  $f : M \rightarrow [0, +\infty[$  est une application propre. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $K_n = f^{-1}([n, n+1])$ . On peut recouvrir le compact  $K_n$  par une réunion finie  $U_n \subseteq f^{-1}(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[)$  d'ouverts convexes. Toutes les affirmations  $P_M(U_n)$  sont vraies. On pose  $U = \bigcup_{2|n \in \mathbb{N}} U_n$  et  $V = \bigcup_{2\nmid n \in \mathbb{N}} U_n$ . On déduit de la troisième hypothèse que  $P_M(U)$  et  $P_M(V)$  sont vraies. De plus,  $U \cap V = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} U_{2i} \cap U_{2j+1}$ , et les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes, donc  $P_M(U \cap V)$  est vraie. Par conséquent,  $P_M(U \cup V) = P_M(M)$  est vraie. ■

**Méthode. (*Lemme local-global pour montrer une propriété sur les variétés*)**

Soit  $M$  une variété topologique.

- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les fermés de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les fermés sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .
- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les ouverts de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les ouverts sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .

Supposons de plus  $M$  compacte.

- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les compacts de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les compacts sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .

**7.1.1.3 Locale contractibilité****Fait**

Toute variété topologique est localement contractile.

En effet, la notion de contractibilité est stable par équivalence d'homotopie, en particulier par homéomorphie (locale).

**Corollaire. (*Revêtement universel d'une variété*)**

Toute variété topologique connexe admet un revêtement universel.

- ▷ En effet, c'est un espace séparé, connexe et localement contractile. ■

**7.1.1.4 ENR et structures simpliciale et cellulaire des variétés compactes**

Nous allons montrer en développant quelques notions intermédiaires que toute variété compacte est un complexe simplicial fini et donc un *CW-complexe fini*.

**Définition. (*Variété ENR*)**

Un espace topologique  $X$  est un *ENR* (pour *Euclidian Neighbourhood Retract*) si c'est un rétract d'un voisinage euclidien, i.e. s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et un plongement  $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  tel que  $i(X)$  soit un rétract d'un voisinage de  $i(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Lemme. (*Locale contractibilité au sens faible*)**

Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un compact,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $K$  est un rétract d'un de ses voisinages si et seulement si  $K$  est *localement contractile au sens faible*, i.e. tout voisinage ouvert  $U$  d'un point  $x$  de cet espace, il existe un voisinage  $V \subseteq U$  de  $x$  tel que l'inclusion  $V \hookrightarrow U$  soit homotopiquement nulle.

**Lemme. (*Caractérisation des compacts ENR*)**

Un compact est un ENR si et seulement s'il peut être plongé comme un rétract dans un complexe simplicial fini.

- ▷ Soit  $C$  un complexe simplicial fini à  $n$  sommets. Alors  $C \subseteq T^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Réciproquement, si  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , soit  $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$  un voisinage ouvert.  $K$  est un rétract de  $U$  puis  $K \subseteq \Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$  le  $n$ -simplexe. ■

**Lemme**

Toute variété topologique compacte est un ENR.

- ▷ Les variétés sont localement contractiles au sens fort, donc au sens faible. Il suffit ainsi de trouver un plongement  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ , ce qui est possible, car  $M$  est compacte. ■

Par conséquence :

**Propriété. (*Triangulation des variétés compactes*)**

Toute variété topologique compacte se plonge dans un complexe simplicial fini de telle sorte que l'image de ce plongement en soit un rétract.

**Corollaire. (*Structure cellulaire des variétés topologiques compactes*)**

Toute variété topologique compacte est un *CW-complexe fini*.

**Corollaire. (Nombres de Betti d'une variété compacte, caractéristique d'Euler d'une variété compacte)**

Les groupes d'homologie d'une variété topologique compacte sont de types finis. En particulier, ses nombres de Betti existent et **sa caractéristique d'Euler est toujours définie**.

▷ En effet, tout *CW-complexe* a une homologie de type fini, notion homologique donc réservée pas homéomorphisme. ■

### 7.1.2 Éléments de topologie différentielle

#### 7.1.2.1 Théorèmes de lissité en basses dimensions

### 7.1.3 Orientations locales des variétés topologiques

#### 7.1.3.1 Définition topologique de l'orientabilité

**Définition. (*Orientation de  $\mathbb{R}^n$  en algèbre linéaire*)**

L'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  quotienté par la relation d'équivalence  $e \sim e' \iff \det_e(e') > 0$ , a deux ensembles. Le choix d'un élément  $e_r$  de  $\mathcal{B}$  est celui d'une *orientation* de  $\mathbb{R}^n$ . Une orientation *directe* est donnée par un élément de la classe de  $e_r$  et une orientation *indirecte* est donnée par un élément de la classe de l'autre élément de  $\mathcal{B}/\sim$ .

**Définition. (*Orientation locale de l'espace euclidien*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Une *orientation locale* de  $\mathbb{R}^n$  en  $x$  est le choix d'un générateur du groupe cyclique infini  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ .

*Remarque.* Justifions au moins cela. On a vu ce calcul qui est un corollaire direct du théorème d'excision. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En effet, pour  $n \neq 0$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1}$  et  $\mathbb{R}^n \cong D^n$ , de plus, il est clair par construction que l'homologie relative est invariante par homotopie sur les deux membres de la paire considérée, d'où

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(D^n, S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

puisque  $(S^{n-1}, D^n)$  est une paire de Borsuk. Dans le cas  $n = 0$ ,  $H_0(\mathbb{R}^0, \emptyset) = H_0(\{\star\}) = \mathbb{Z}$  encore.

### Définition. (*Orientations locales cohérentes de l'espace*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Remarquons que  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$  pour tout boule ouverte étant un voisinage  $B$  commun à  $x$  et  $y$ , puisque chacun de ces points en est un rétract par déformation.

Une *orientation locale cohérente* en  $x$  et  $y$  est la donnée de deux orientations locales en  $x$  et  $y$  telles que le générateur choisi pour l'orientation de  $x$  est envoyé sur le générateur choisi pour l'orientation de  $y$  par la composée des deux homéomorphismes précédents.

### Définition. (*Orientation de l'espace euclidien*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une *orientation* de  $\mathbb{R}^n$  est un choix cohérent d'orientations locales en toutes paires de points de  $\mathbb{R}^n$ .

Généralisons aux variétés topologiques quelconques, ce qui n'est qu'une traduction des termes, avant d'expliquer géométriquement ce que l'on a fait.

### Définition. (*Orientation d'une variété en géométrie différentielle*)

Soit  $M$  une variété differentielle munie d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ . Elle est *orientable* s'il existe un atlas équivalent à celui-ci dont les fonctions de transition  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont toutes de déterminant jacobien positif, dit alors *orienté*. Une *orientation* est un atlas orienté maximal de cette classe d'équivalence.

### Définition-propriété. (*Orientation locale d'une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Une *orientation locale* de  $M$  en  $x \in M$  est le choix d'un générateur du groupe cyclique infini  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .

▷ Montrons cet isomorphisme. Pour tout point  $x \in M$ , on sait qu'il existe un voisinage ouvert euclidien  $U \ni x$ . Par invariance de l'homologie relative par homéomorphismes, on a  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$  pour un homéomorphisme euclidien, et l'on se ramène au calcul déjà fait dans le cas des espaces euclidiens. ■

### Méthode. (*Orientation locale d'une variété topologique*)

Décrivons cet homéomorphisme avec les notations de la définition-propriété, mais si c'est inutile pour une raison développée après.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_n(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\}) \xrightarrow{\sim} H_n(D^n, S^{n-1})$  en appliquant trois fois de suite la bifonctorialité de l'homologie relative. On a ensuite  $H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_n(D^n / S^{n-1}, S^{n-1} / S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(S^n)$  où le premier morphisme est donné par le théorème d'écrasement, qui vient de l'excision. Ensuite, on sait que  $\tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  quant à lui donné par le théorème de Mayer-Vietoris. Pour  $n = 0$ , l'isomorphisme est donné par la preuve de l'homologie en degré nul et c'est donc une application quotient de l'augmentation du complexe singulier.

Visuellement, un  $n$ -lacet, *i.e.* la généralisation d'un lacet en dimension  $n$ , faisant un tour et un seul autour du point  $x$  est un générateur de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ . La donnée d'un générateur de  $\mathbb{Z}$  équivaut à la donnée d'un isomorphisme  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , car  $\text{Aut}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}) = \{id, -id\}$ . Ainsi, l'isomorphisme décrit précédemment n'est utile que d'exister pour décrire la structure de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$

### Définition-propriété. (*Orientations locales cohérentes sur une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soient  $x, y \in M$ . On suppose que  $x, y \in V$  un bon voisinage commun à  $x$  et  $y$ . Remarquons qu'alors  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\})$ . Une *orientation locale cohérente* en  $x$  et  $y$  est la donnée de deux orientations locales en  $x$  et  $y$  telles que le générateur choisi pour l'orientation de  $x$  est envoyé = pousse vers l'avant sur = vers le générateur choisi = fixe pour l'orientation de  $y$ .

▷ C'est toujours par bifonctorialité relativement aux équivalences d'homotopie de l'homologie relative. ■

### Méthode. (*Orientation locale cohérente d'une variété topologique*)

Il est plus intéressant de décrire cet isomorphisme de groupes. Étant donné deux fois par des calculs d'homologie relative, on peut guère espérer le décrire de façon explicite et simple.

Comprendons-le simplement :

### Heuristique

Autrement dit, il s'agit de voir qu'on a orienté l'espace de la variété autour de  $x$  comme on l'aurait orienté autour d'une « boule », au sens des bons voisinages, contenant  $x$  et de même pour  $y$ , et que ces manières maintenant symétriques doivent être les mêmes.

**Définition. (*Orientation d'une variété topologique*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $M$  est *orientable* si l'on peut choisir des orientations locales  $x \mapsto \mu_x$  générateur de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$  en tout point  $x \in M$  de telle façon que tout point  $x \in M$  admette un bon voisinage de sorte que les orientations locales choisies de  $M$  en tous points de ce bon voisinage soient cohérentes. Si  $M$  est une variété topologique orientable, une *orientation* de  $M$  est une telle orientation en tout point, représentée par l'application  $\mu$ .

→ *Notation.* Soit  $A \subseteq X$  une paire topologique. On note parfois  $H_*(X | A)$  l'*homologie locale* de  $X$  en  $A$  définie par  $H_*(X, X \setminus A)$ . Lorsque  $A = \{x\}$  où  $x \in X$ , on note  $H_*(X | \{x\}) = H(X | x)$ .

Énonçons :

**Lemme. (*Orientation cohérente des variétés*)**

Soit  $M$  une variété topologique et  $\mu$  une orientation locale en tout point.

1. Si  $x \in M$  admet un bon voisinage  $U$ , les orientations locales choisies de  $M$  en tous points de ce bon voisinage soient cohérentes si et seulement si pour tout  $y \in U$ ,  $\mu_x, \mu_y$  sont cohérentes.
2. Si  $x \in M$  admet un bon voisinage admettant cette propriété pour  $\mu$ , qui a donc déjà deux formulations équivalentes, alors tout bon voisinage de  $x$  admet également cette propriété pour  $\mu$ .

**Remarques.**

1. Sur une variété de dimension 1, une orientation locale autour d'un point correspond à un choix de gauche et de droite près de ce point.
2. Sur une variété de dimension 2, une orientation locale autour d'un point correspond à un choix de sens horaire ou antihoraire autour de ce point.
3. Heuristiquement, ces situations partagent la propriété commune qu'elles s'expriment en terme de comportement local proche de  $x$  mais pas en  $p$ , ce qui justifie l'introduction du groupe  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .
4. On dit que l'orientation consiste en le choix d'une *sphère positive* autour d'un point ou d'une *sphère négative*, selon le signe du générateur choisi de ce groupe, de dimension la dimension de la variété. Une telle terminologie prend tout son sens en considérant le graphe, au sens des sous-variétés de l'espace euclidien, du voisinage considéré.
5. Dans chacun des exemples ci-dessus et comme dans le cas général, **une orientation correspond à un choix et l'orientabilité à une possibilité de choix.**

**Proposition**

Une variété topologique connexe a au plus deux orientations.

▷ Il s'agit seulement de montrer que, sur une variété topologique, deux points  $x, y$  dans la même composante connexe sont toujours contenus dans un bon voisinage ouvert.

C'est facile en utilisant la définition des variétés par homéomorphismes euclidiens à  $\mathbb{R}^n$  où  $n$  est la dimension de notre variété. Il suffit de montrer que  $x$  et  $y$  sont dans un même ouvert de carte. Soit alors  $\varphi$  l'homéomorphisme associé. Si  $x \in B_1$  un bon voisinage euclidien pour  $\varphi$  et  $y \in B_2$  de même, soit  $B_3$  une boule de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\varphi(B_1)$  et  $\varphi(B_2)$ . Alors  $\varphi^{-1}(B_3)$  est un bon voisinage  $\ni x, y$ . ■

### Proposition

L'orientation des variétés le long de deux composantes connexes distinctes est indépendante.

▷ L'argument est l'inverse du précédent : deux points d'une variété topologique dans deux composantes connexes différentes ne seront jamais dans un bon voisinage ouvert commun. C'est trivial, car une boule ouverte euclidienne est connexe et la connexité est préservée par homéomorphisme, et donc on aurait nos deux points contenus dans un même ouvert connexe, contradiction. ■

### Proposition. (*Lien entre les orientations topologiques et différentielles*)

Une variété topologique munie d'une structure différentielle  $C^1$  est orientable en tant que variété topologique si et seulement si elle est orientable en tant que variété différentielle pour cette structure.

▷ Soit  $M$  une variété différentielle  $C^1$  de dimension  $n$  orientable en tant que variété différentielle. Soit  $x \in M$  un point. Soit  $(U, \varphi)$  un ouvert de carte contenant  $x$ ,  $\varphi$  centrée en  $x$ . On suppose sans problème  $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$ . On fixe un générateur  $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$ . Alors  $\varphi_*^{-1}(\alpha) \in H_n(U, U \setminus \{x\})$  est un générateur. Si  $(U', \varphi')$  est un ouvert ouvert de carte contenant  $x$ ,  $\varphi'$  centrée en  $x$ , le difféomorphisme  $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert est de jacobien strictement positif en tout point en tant que transition d'une orientable. On peut montrer qu'un tel difféomorphisme est isotope à l'identité par des difféomorphismes. On obtient qu'une application  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  fournie par  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  est homotope à l'identité. On obtient une application  $M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  (avec le vocabulaire introduit ci-dessous) et l'on vérifie facilement que cette application est continue, donc que c'est une section (dont toutes les valeurs sont des générateurs). Par conséquent,  $M$  est orientable en tant que variété topologique.

La réciproque est plus simple. Supposons que  $M$  soit topologiquement orientable. Soit  $s : M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  une section dont toutes les images sont des générateurs. Pour chaque carte locale  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on peut carer  $s(x)$  où  $x \in U$  et le générateur fixé de  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Si nécessaire, on peut composer des cartes avec une réflexion de  $\mathbb{R}^n$ . On obtient un atlas orienté de  $M$ , en utilisant les arguments de l'implication précédente : étant donnée une transition de jacobien négatif, on compose par une réflexion et on l'obtient positif, donc les orientations sont cohérentes. Mais elles l'étaient déjà, on l'a relâché, donc elles ne le sont plus... c'est que tous les jacobiens de transition sont positifs. ■

**Définition.** (*Fonction topologique préservant l'orientation, atlas topologique orienté*)

Soit  $M$  une variété quelconque, non orientée a priori. Soit  $n = \dim(M)$ . Une fonction de transition  $f = \varphi \circ \psi^{-1}$  où  $\varphi, \psi$  sont deux cartes *préserve l'orientation* si elle fixe les générateurs de  $H_n(M, M \setminus \{p\})$  pour tout  $p \in M$ .

Un *atlas (topologique) orienté* de  $M$  est un atlas topologique pour lequel toutes les fonctions de transition préservent l'orientation. Une *orientation (topologique)* de  $M$  est un atlas topologique orienté maximal au sens des atlas topologiques orientés.

**Fait.** (*Reformulation de l'orientation topologique*)

Une variété est topologique si et seulement si elle admet un atlas topologique orienté.

En effet...

**Exemples.** (*Orientation des variétés topologiques*)

1. Tout ouvert d'une variété orientable est orientable.

Clair.

2. Un espace discret  $X$  pris comme variété discrète de dimension nulle est toujours orientable. Le choix d'une orientation revient par l'homologie des discrets à un choix de signes en chaque point de l'espace. Il y a donc  $2^{|X|}$  orientations possibles pour  $X$ .
3. Le ruban de Möbius n'est pas orientable. En effet, c'est une variété différentielle  $C^1$  non orientable en tant que variété différentielle.
4. Quid des variétés complexes ?
5. L'orientation est une notion topologique, elle est préservée par les homéomorphismes.

Puisque l'homologie relative est stable par homéomorphie.

**Théorème**

Toute orientation sur une variété à bord induit une orientation de son bord. En particulier, le bord d'une variété orientable est une variété orientable.

▷ Étant donnée  $\mu$  une orientation d'une variété à bord  $M$ , considérons  $\mu|_N$  où  $N = \partial M$ . Puisque la projection de  $\mathbb{R}^n$  où  $n = \dim(M)$  sur  $\mathbb{R}^{n-1}$  est ouverte, et que deux points du bord dans un même bon voisinage pour  $N$  sont aussi dans un bon voisinage de  $M$ ,  $\mu$  reste une orientation sur  $N$ .

Il reste à prouver ce point. A priori, deux points  $x, y$  dans le bon voisinage  $U$  pour  $N$  sont dans le voisinage  $\pi^{-1}(U)$  de  $M$  qui est un cylindre dans  $\mathbb{R}^n$  près et donc pas un bon voisinage. Le problème devient alors géométrique : étant donnée une boule  $B$  de dimension  $n$ , peut-on inclure  $B$  dans une boule de dimension  $n+1$  incluse dans le cylindre infini  $B \times \mathbb{R}$ ? C'est évidemment le cas. ■

**Exercice 1**

1. Trouver une variété non orientable dont le bord est orientable.
2. Trouver une variété non orientable dont le bord est non orientable.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Le ruban de Möbius  $\mathbb{M}$  est non orientable, mais son bord est  $S^1$ , qui l'est.
2. La bouteille de Klein est une variété sans bord non orientable. La variété cylindrique  $\mathcal{K} \times [0,1]$  de bord  $\mathcal{K} \times \{0\} \cup \mathcal{K} \times \{1\}$  est non orientable de bord non orientable.

Toutes les variétés ne sont donc pas orientables, mais :

### 7.1.3.2 Le revêtement double d'orientation

#### Proposition



Toute variété topologique  $M$  de dimension  $n \geq 1$  admet un revêtement double  $\tilde{M} \rightarrow M$ , dit *revêtement (double) d'orientation*, telle que  $\tilde{M}$  soit une variété topologique orientable.

▷ Posons  $\tilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M \text{ ET } \mu_x \in H_n(M \mid x) \simeq \mathbb{Z} \text{ en est un générateur}\}$ , ou bien sûr on n'identifie pas les  $H_n(M \mid x)$ . Il s'agit donc de prendre toutes les orientations locales en tous les points de  $M$ . On considère l'application  $p: \tilde{M} \rightarrow M$ , qui est un bon candidat puisque ses

$$\mu_x \mapsto x$$

fibres sont évidemment de cardinal 2. On munit  $\tilde{M}$  d'une topologie dont une base est formée par la collection de sous-ensembles  $V(\mu_V) \subseteq \tilde{M}$ , où  $V \subseteq M$  est un bon sous-ensemble ouvert de  $M$ ,  $\mu_V \in H_n(M \mid V) \simeq \mathbb{Z}$  en est un générateur et  $V(\mu_V)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}$  tel que  $x \in V$  et  $\mu_x$  est l'image de  $\mu_V$  par l'isomorphisme  $\varphi_x: H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M \mid x)$  donné par fonctorialité de l'homologie relative et pas un autre, autrement dit,  $V(\mu_V) = \{\varphi_x(\mu_V^1), \varphi_x(\mu_V^2), x \in V\}$  en notant  $\mu_V^1, \mu_V^2$  les deux générateurs de  $H_n(M \mid V)$ . En effet, l'intersection de deux  $V(\mu_V)$  est clairement une réunion de tels sous-ensembles, donné pour deux bons ouverts  $V, V'$  par  $V(\mu_V) \cap V(\mu_{V'}) = V(\mu_{V \cap V'})$ , puisque par choix des isomorphismes,  $\varphi_{V \cap V'} = \varphi_V|_{H_n(M \mid V \cap V')}$  par construction de la suite exacte longue associée à un triplet. Alors  $p$  est un revêtement à deux feuillets, ce qui est par construction, et  $\tilde{M}$  est une variété topologique orientable. Pour ce dernier point, on utilise que les  $V$  considérés définissant les  $V(\mu_V)$  sont de bons ouverts.  $\tilde{M}$  a alors une orientation locale canonique donnée par l'image de  $\mu_x$  par  $H_n(\tilde{M} \mid \mu_x) \simeq H_n(V(\mu_V) \mid \mu_x) \simeq H_n(V \mid x)$  pour tous  $x \in V$  bon ouvert. ■

Cette construction universelle peut apporter de précieux renseignements :

#### Remarques.

1. Une variété  $M$  connexe est orientable si et seulement si  $\tilde{M}$  a deux composantes connexes. Le cas échéant,  $p$  est trivial, au sens que  $\tilde{M} = M \sqcup M$ .

Puisque  $M$  est connexe,  $\tilde{M}$  a une seule ou deux composantes connexes. S'il en a deux, chacune est homéomorphe à  $M$  par  $p$ , d'où la remarque. De plus, par ouverture des composantes connexes en nombre fini, chacune est orientable, donc  $M$  l'est. Réciproquement, si  $M$  est orientable, elle a deux orientations puisque  $M$  est connexe, et chacune définit une composante connexe de  $M$ , ce qui se voit assez facilement.

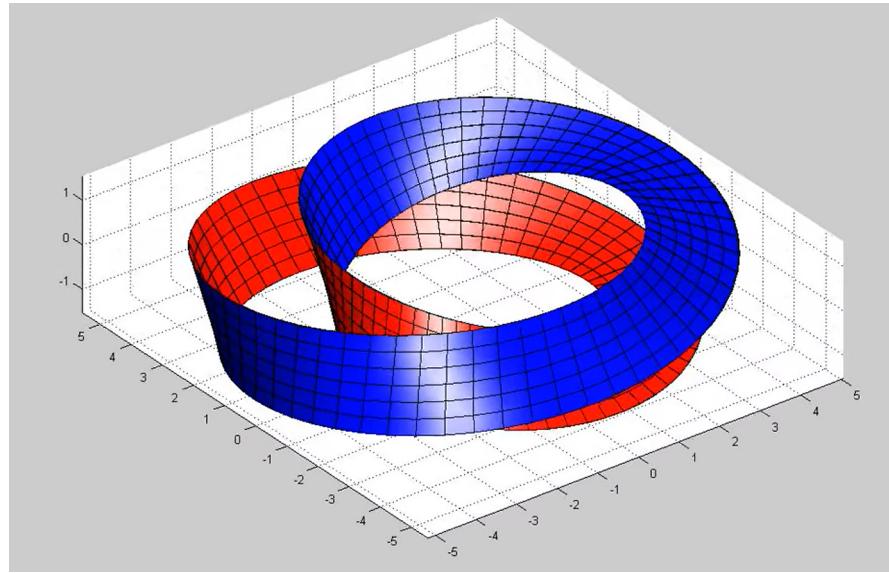


FIGURE 7.1.1 : Revêtement double d'orientation du ruban de Möbius. —  
C'est le ruban sans torsion,  $\cong S^1$ .

2. (*Orientation des variétés simplement connexes*) Si  $M$  est simplement connexe, alors  $M$  est orientable.  
C'est une conséquence du point suivant.
3. Soit  $M$  une variété connexe. Si  $\pi_1(M)$  n'a pas de sous-groupe d'indice 2, alors  $M$  est orientable.  
Si  $p$  est un revêtement à deux feuillets et  $\tilde{M}$  est connexe, alors  $p^*\pi_1(\tilde{M})$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(M)$ . Donc  $\tilde{M}$  n'est pas connexe, donc par la première remarque,  $M$  est orientable.
4. (*Orientation par section du revêtement double canonique*)  $s : x \mapsto \mu_x$  est une section de  $p$ , i.e.  $ps = id_M$ , si et seulement si  $M$  est orientable. Le cas échéant, cette section est un choix d'orientation locale cohérente en tout point de  $M$ .
5. (*Unicité essentielle du revêtement d'orientation*) Le revêtement d'orientation  $\tilde{M}$  de  $M$  est unique à isomorphisme près. En effet, il est déterminé par les *lacets désorientants*.

### Définition. (*Orientation le long d'un fermé*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $A$  un fermé de  $M$ . Soit  $\tilde{M}$  le revêtement d'orientation de  $M$ . On parle d'*orientabilité de  $M$  le long de  $A$*  s'il existe une section du revêtement  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  définie sur  $A$ , i.e. une section du revêtement de base  $A$  induit par  $p : \tilde{p} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  et  $s : A \rightarrow p^{-1}(A)$  tel que  $ps = id_A$ .

Autrement dit, aucun des lacets basés en un point de  $A$  contenu dans  $A$ , ne sont désorientants.

*Remarque.* D'après une remarque précédente l'orientabilité d'une variété le long d'elle-même est son orientabilité.

Généralisons à coefficients quelconques. Soit donc  $G$  un groupe abélien fixé. On peut considérer le *revêtement de  $G$  orientation*  $\tilde{M}_G = \bigcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ . On introduit une topologie sur  $\tilde{M}$  à l'aide d'une base formée de  $V(\mu_V)$  où  $V \subseteq M$  est un bon ouvert,  $\mu_V \in H_n(M, M \setminus V; G)$ ,  $V(\mu_V)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}_G$  tel que  $x \in V$  et  $\mu_x$  soit l'image de  $\mu_V$  par l'isomorphisme  $H_n(M, M \setminus V; G) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ .

**Remarque importante.** Ainsi, le revêtement double d'orientation est un sous-revêtement d'un revêtement plus large donné par  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  dit *grand revêtement d'orientation*.

### Propriété. (*Caractérisation de l'orientabilité topologique*)

Soit  $M$  une variété topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est orientable ;
- (ii)  $M$  est orientable le long de tous ses compacts ;
- (iii) les générateurs des fibres du revêtement  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$  forment un revêtement double trivial ;
- (iv)  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \simeq M \times \mathbb{Z}$  par un isomorphisme de revêtements.

$\triangleright$  (i)  $\implies$  (ii) :

(ii)  $\implies$  (iii) :

(iii)  $\implies$  (iv) :

(iv)  $\implies$  (i) :

■

### Exercice 2 (*Opérations sur les variétés orientables*)

1. Montrer que le produit de variétés topologiques orientées est orienté.
2. Montrer que la somme connexe de variétés topologiques orientées est orientable. Montrer que dans le cas d'une somme à  $n$  éléments de variétés connexes,  $2^n$  orientations sont possibles.

### Fait. (*Groupe des sections à support compact*)

Si  $M$  est une variété et  $G$  un groupe abélien, on peut additionner deux sections de  $\tilde{M}_G$  par structure additive de cet espace. On a donc, si  $G$  est un groupe abélien et  $A \subseteq M$  un fermé, un morphisme

$$\mathcal{I}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$$

où  $\Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$  est le groupe des sections de  $p$  à support compact définies sur  $A$ .

Soit  $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; G)$ . Décrivons l'image de  $\alpha$ . Soit  $x \in A$ . Alors  $\mathcal{I}_A(\alpha)(x)$  est l'image de  $\alpha$  par le morphisme  $H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  induit par l'inclusion. Vérifions que  $\mathcal{I}_A(\alpha)$  est

continue et à support compact. Soit  $c \in C_n(M; G)$  un représentant (d'un représentant) de  $\alpha$ . L'image de  $c$  (la réunion des images de tous les simplexes singuliers de  $c$ ) est un sous-ensemble compact  $K$  de  $M$ . Si maintenant  $x \in A \setminus K$ , alors  $\mathcal{I}_A(\alpha)(x) = 0$ . En effet, puisque  $K \subseteq M \setminus \{x\}$ , l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus A; G)$  est envoyée en  $0 \in C_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ . D'autre part, si je considère le bord de  $c$ , avec  $\partial c \in C_{n-1}(M \setminus A; G)$  par un léger abus, l'image de  $\partial c$  est un compact  $K' \subseteq M$ . Si  $x \in A$ , on peut choisir un bon voisinage  $V \ni x$  dans  $M$  tel que  $K' \subseteq M \setminus V$ . Donc, l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus V; G)$  définit une classe d'homologie  $\beta \in H_n(M, M \setminus V; G)$ . La section  $V \rightarrow V \times \{\beta\}$  coïncide avec  $\mathcal{I}_A(\alpha)$  sur  $V \cap A$ .

### 7.1.3.3 Homologie des variétés en degré de dimension

#### Théorème

Soient  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ ,  $A$  un fermé de  $M$  et  $G$  un groupe abélien.

1. (*Homologie des variétés en grandes dimensions*)  $H_k(M, M \setminus A; G) = 0$  pour tout entier  $k > n$ . En particulier,  $H_k(M; G) = 0$  pour tout  $k > n$ .
2.  $\mathcal{I}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$  est un isomorphisme. En particulier,  $H_n(M; G) \simeq \Gamma_c(M, \tilde{M}_G)$ .

▷ Successivement :

1. TBC
2. Utilisons le lemme local-global (pour les fermés). Dans toute la suite, on ne mentionne pas le module des coefficients, qui est  $G$ .
  - (i) Immédiat pour les compacts convexes.
  - (ii) On considère la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cup B)) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cap B)) \\ \downarrow = & & \downarrow \mathcal{I}_{A \cup B} & & \downarrow \mathcal{I}_A \oplus \mathcal{I}_B & & \downarrow \mathcal{I}_{A \cap B} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c(A \cup B, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma_c(A, \tilde{M}_G) \oplus \Gamma_c(B, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma_c(A \cap B, \tilde{M}_G) \end{array}$$

qui donne le résultat par le lemme des cinq.

- (iii) On pose  $A = \bigcap_i A_i$ . Les morphismes de restrictions  $\Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \rightarrow \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , induisent un isomorphisme  $\varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ . On rappelle que la construction ensembliste de cette limite inductive est donnée par le quotient de la réunion par la relation d'équivalence : deux éléments ont au moins un couple de leurs images dans l'un des termes suivants qui coïncide. Par propriété universelle :

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(A_1, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma(A_2, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma(A_3, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \downarrow \\ & & \Gamma(A, \tilde{M}_G) & & & & \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \\ & & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \\ & & & & & \nearrow \exists! \varphi & \end{array}$$

et l'on sait que  $\varphi$  est un isomorphisme, car pour tout voisinage  $W \supseteq A$ , il existe  $A_i$  tel que  $A_i \subseteq W$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_n(M, M \setminus A_i) & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus A) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \mathcal{I}_A \\ \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(A, \tilde{M}_G) \end{array}$$

qui commute. Donc  $\mathcal{I}_A$  est un isomorphisme.

- (iv) On a pour  $A_i \subseteq N_i$  voisinage ouvert,  $H_n(M, M \setminus \cup_i A_i) \simeq H_n(\cup_i N_i, (\cup_i N_i) \setminus (\cup_i A_i)) \simeq \oplus_i H_n(N_i, N_i \setminus A_i) \simeq \oplus_i H_n(M, M \setminus A_i)$ . Pour les groupes de sections à support compact, on a des isomorphismes similaires.

Ceci permet de conclure. ■

### Heuristique

L'homologie en degré de dimension est critiquement reliée aux orientations des variétés.

#### Corollaire. (*Homologie à coefficients en dimension d'une variété non compacte*)

Soit  $G$  un groupe abélien. Soit  $M$  une variété topologique connexe. Si  $M$  n'est pas compacte, alors  $H_n(M; G) = 0$ .

▷ Montrons que  $\Gamma_c(M, \tilde{M}_G)$ , i.e. pour  $A = M$ , est un singleton. Soit  $s$  une section du revêtement d'orientation  $p$  définie sur  $M$ . Alors  $s^{-1}(0)$  est un fermé de  $M$ , car  $s$  est continue, et un ouvert de  $M$ , car  $s$  est à support compact donc fermé, car  $M$  est séparée. De plus, il est non vide. Comme  $M$  n'est pas compacte,  $s$  ne peut être non nulle sur tout  $M$ ,  $s^{-1}(0) = M$ , donc  $s = 0$ . Ainsi,  $\Gamma_c(M, \tilde{M}_G) = \{0\} \simeq H_n(M; G)$ . ■

#### 7.1.3.4 *G*-orientabilité

On se rappelle la définition du revêtement de  $G$ -orientation.

#### Définition. (*G*-orientabilité)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Dans ce cas (*via la section précédente*), on a un isomorphisme de  $G$ -modules  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G) \simeq G$  pour tout  $x \in M$ .

La variété  $M$  est dite *G-orientable* s'il existe une section continue  $M \rightarrow \tilde{M}_G$  dont toutes les valeurs sont des générateurs de fibres (en tant que  $G$ -modules).

### Propriétés

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire.

1. Toute variété orientable est  $R$ -orientable.
2. Une variété non orientable est  $R$ -orientable si et seulement si  $2 = 0$  dans  $R$ .

### Propriété. (*Caractérisation de la $G$ -orientabilité topologique*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est  $G$ -orientable ;
- (ii)  $M$  est  $G$ -orientable le long de tous ses compacts ;
- (iii) les générateurs des fibres du revêtement  $\tilde{M}_G \rightarrow M$  forment un revêtement double trivial ;
- (iv)  $\tilde{M}_G \simeq M \times G$  par un isomorphisme de revêtements.

▷ Par définition, il suffit de montrer le deuxième point. ■

### Exemples. (*Orientabilité à coefficients*)

1. Si  $G = \mathbb{Z}$ , on retrouve la notion précédente d'orientabilité comme  $\mathbb{Z}$ -orientabilité.  
Par la proposition fondamentale du grand revêtement d'orientation.
2. Toute variété topologique est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientable et canoniquement orientée.  
En effet, pour tout variété  $M \ni x$  de dimension  $n$ , le groupe  $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  n'a qu'un seul générateur !

### Corollaire. (*Homologie en degré de dimension d'une variété orientable*)

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$  et soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Supposons que  $M$  soit compacte. Si  $M$  est  $G$ -orientable, alors le morphisme évident  $H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  est un isomorphisme pour tout  $x \in M$ .

En particulier, pour tout anneau commutatif unitaire, pour toute variété topologique  $M$  connexe, compacte et  $G$ -orientable de dimension  $n$ ,  $\boxed{H_n(M; G) \simeq G}$ .

En particulier, pour toute  $n$ -variété fermée connexe,  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

▷ En effet, on applique le théorème à  $A = M$ . ■

*Remarque.* Le morphisme évident  $H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  est l'application induite en homologie par la projection canonique du complexe de chaînes singulières sur le complexe de chaînes singulières relatives

**Exercice 3**

Déterminer  $H_n(M; G)$  où  $G$  est un anneau commutatif unitaire et  $M$  est une variété topologique connexe, compacte et non  $G$ -orientable.

▷ Éléments de réponse.

On montre que  $H_n(M; G) = \{r \in G \mid 2r = 0\}$ ; en particulier, si  $M$  est non orientable,  $H_n(M) = 0$ .

**Conseils**

- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . Alors  $H_{k>n}(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  non compacte. Alors  $H_n(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte et orientable. Alors  $H_n(M) = \mathbb{Z}$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte et non orientable. Alors  $H_n(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte. Alors  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- ◊ Soient  $M$  une variété de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif. Si  $M$  est  $R$ -orientable, alors  $H_n(M; R) = R$ .
- ◊ Soient  $M$  une variété de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif. Si  $M$  est non  $R$ -orientable, alors  $H_n(M; R) = \{r \in R \mid 2r = 0\} = 0$ .

**7.1.3.5 Classes fondamentales****Définition. (*Classe fondamentale*)**

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ . Un élément de  $H_n(M; G)$  dont l'image par le morphisme évident dans  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  soit un générateur pour tout  $x \in M$ , s'appelle une *classe fondamentale* de  $M$  à coefficients dans  $G$ .

**Fait**

Une telle classe existe si et seulement si  $M$  est compacte et  $G$ -orientable.

TBC

→ *Notation.* Si  $M$  est compacte,  $G$ -orientable et  $G$ -orientée, alors on note  $[M]$  la classe fondamentale donnée par la section du revêtement double choisie pour l'orientation.

**Définition. (*Classes réalisables*)**

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$  et soit  $N \subseteq M$  une sous-variété topologique compacte  $G$ -orientable et  $G$ -orientée de  $M$  de dimension  $k \subseteq n$ . On considère la classe fondamentale  $[N] \in H_k(N; G)$ . La *classe réalisée par  $N$  dans  $H_k(M; G)$*  est  $i_*(N)$  où  $i_* : H_k(N; G) \rightarrow H_k(M; G)$  est le morphisme induit par l'inclusion canonique.

**Exercice 4** (*Une question non triviale : classes réalisables d'une variété*)

On fixe  $G = \mathbb{Z}$ .

1. Déterminer les classes réalisables dans  $S^1$ .
2. Déterminer les classes réalisables dans  $S^2$ .
3. Déterminer les classes réalisables dans  $\mathbb{T}$ .

### 7.1.4 Classification des variétés topologiques de très petites dimensions

#### 7.1.4.1 Sommes connexes de variétés

**Définition.** (*Somme connexe de variétés topologiques*)

Soient  $A$  et  $B$  deux variétés topologiques de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . La *somme connexe* de  $A$  et  $B$ , notée  $A \# B$ , est la variété topologique de dimension  $n$  obtenue en retirant un voisinage homéomorphe à un disque  $D^n$  à chaque et en les recollant le long des sphères  $S^{n-1}$  apparues.

**Proposition**

La somme connexe de deux variétés connexes est une variété connexe.

▷ Montrons que c'est une variété. ■

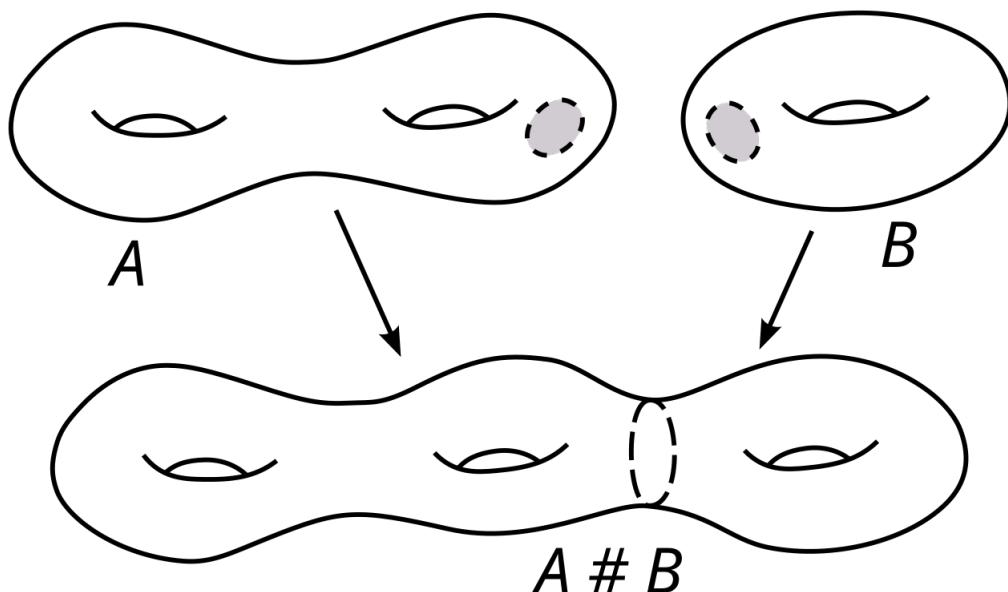


FIGURE 7.1.2 : *Somme connexe de deux surfaces topologiques.* —  
On retire un disque au deux surfaces et on les recolle le long des cercles qui les bordent.

**Propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une somme connexe*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $M, N$  deux variétés de dimension  $n$ . Alors

- ★ si  $n$  est pair,  $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$  ;
- ★ si  $n$  est impair,  $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N)$ .

**7.1.4.2 Variétés topologiques de dimension nulle****Fait. (*Variétés topologiques de dimension 0*)**

Les variétés topologiques connexes de dimension 0 sont les points. Les variétés topologiques de dimension 0 sont les discrets dénombrables.

Soit  $x \in M$  variété topologique connexe de dimension 0. Soit  $U$  un ouvert de  $M$  contenant  $x$ ,  $U$  homéomorphe à  $\{0\}$ . Alors  $U = \{x\}$ , dont  $x$  est isolé dans  $M$ . Donc  $M$  est discrète. Puisque  $M$  est connexe,  $M = \{x\}$ . On aurait aussi pu dire que  $\{x\}$  était ouvert fermé, puisque  $M$  est séparée.

Pour le cas non connexe, une réunion disjointe de points est discrète, et réciproquement, tout discret dénombrable est séparé, à base dénombrable et trivialement tout point est son propre voisinage euclidien.

*Remarque.* On classifie de même les variétés différentiables de dimension 0 de n'importe quelle classe de régularité.

**7.1.4.3 Variétés topologiques de dimension 1****Lemme. (*Variété compactes de dimension 1*)**

Toute variété compacte (connexe) unidimensionnelle est homéomorphe au cercle.

▷ Soit  $M$  une variété topologique compacte connexe de dimension 1. Soit  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de  $M$  avec  $I$  fini. Soient  $U_i, U_j$  deux ouverts de cet atlas qui s'intersectent. Montrons que  $U_i \cup U_j$  est homéomorphe soit à  $\mathbb{R}$ , soit à  $S^1$ . Si l'un est inclus dans l'autre, c'est clair, la réunion est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , car ces ouverts sont euclidiens. Le cas contraire,  $\varphi_1(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  qui n'est ni  $\mathbb{R}$ , auquel cas  $U_i \subseteq U_j$ , ni un segment ouvert borné de  $\mathbb{R}$ , auquel cas  $U_j \subseteq U_i$ . Ce ne peut non plus être la réunion disjointe non triviale de deux segments ouverts bornés du type  $]a,b[ \cup ]c,d[$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , car en considérant un chemin  $\gamma$  dans le connexe  $U_2$  reliant un point de  $\varphi_1^{-1}(]a,b[)$  à un point de  $\varphi_2^{-1}(]c,d[)$ , on aurait un grave problème en  $\gamma(\inf\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin U_i\})$ ; il ne devrait pas être dans  $U_1$ , or il est dans  $\varphi_1^{-1}(]a,b[)$  par continuité. Par suite, les seules formes possibles pour  $\varphi_1(U_i \cap U_j)$  sont  $]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  ou une réunion des deux. Dans les deux premiers cas,  $U_i \cup U_j$  est homéomorphe à la droite réelle; dans le troisième, on montre facilement qu'elle est homéomorphe au cercle.

On peut donc fusionner successivement les  $U_i$  s'intersectant, car  $M$  est connexe. On obtient forcément un cercle à un moment donné, car sinon,  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , ce qui ne peut, par compacité. Une fois que l'on a obtenu un cercle, on voit que les  $U_j$  restants sont tous inclus dans ce cercle, sinon, l'on aurait une contradiction similaire à la précédente. ■

**Théorème. (*Variétés topologiques de dimension 1*)**

Les variétés topologiques connexes de dimension 1 sont  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$  à homéomorphisme près.

▷ On remarque qu'une variété admet toujours un atlas indexé par  $\mathbb{N}$ , car elle est Lindelöf. On applique le raisonnement précédent. ■

**Exercice 5**

Remontrer qu'un carré est lisse.

▷ **Éléments de réponse.**

Un carré (vide) étant homéomorphe à  $S^1$ , on peut sans problème le munir d'une structure différentielle par transport de structure, et il est alors  $C^\infty$ .

**Corollaire**

Les variétés topologiques compactes de dimension 1 sont à homéomorphisme près les sommes finies de cercles.

Par le théorème de lissité :

**Corollaire. (*Variétés différentiables de dimension 1*)**

Les variétés différentiables de n'importe quelle classe de régularité  $D^1, C^k, k \in \mathbb{N} \cup \{\text{inf}, \omega\}$  connexes de dimension 1 sont  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$  à homéomorphisme près.

**7.1.4.4 Classification des surfaces topologiques****Définition. (*Surface topologique*)**

Une *surface topologique* est une variété topologique réelle de dimension 2.

**Lemme. (*Somme connexe de surfaces*)**

Le type topologique de la somme connexe de deux surfaces topologiques connexes et compactes ne dépend pas des choix effectués pour les disques ni l'homéomorphisme de recollement.

**Exercice 6 (*Neutralité de  $S^2$  pour la somme connexe*)**

Montrer que pour tout surface topologique connexe  $X$ ,  $X \# S^2$  est homéomorphe à  $X$ .

#### 7.1.4.4.1 Triangulation des surfaces

##### Reformulation pratique. (*Triangulation d'une surface compacte*)

Une *triangulation* d'une surface compacte  $X$  est une famille finie indexée par  $I$  d'homéomorphismes  $\varphi_i : \Delta \rightarrow \varphi_i(\Delta) \subseteq X$  en fixant  $\Delta$  le triangle du plan de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$  tel que pour  $i,j \in I$ ,  $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta)$  soit vide, un sommet ou une arête commune aux deux triangles. (En particulier, l'intérieur des triangles de la triangulation sont disjoints.)

##### Lemme. (*Triangulation des surfaces compactes*)

Toute surface compacte est triangulable, *i.e.* admet une structure de complexe simplicial fini.

##### Remarques.

1. En fait, RADÓ a montré en 1924 que toute surface à base dénombrable (ça lui plaisait) est triangulable, avec un nombre quelconque de triangles. Il faut alors dans la définition de triangulation, imposer que tout point possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de triangles.
2. On peut alors redéfinir l'orientabilité d'une surface triangulée en disant qu'il existe une orientation sur chaque triangle *compatible*, *i.e.* induisant des orientations opposées sur les arêtes communes.
3. (*Relative unicité de la façon de trianguler*) On peut toujours passer d'une triangulation à une autre par déformation continue et un nombre fini d'étapes élémentaires parmi les suivantes : la création d'un sommet dans l'adhérence d'un triangle et la création de trois nouveaux triangles, et l'opération inverse ; le remplacement de l'arête commune de deux triangles adjacents par l'autre diagonale du quadrilatère qu'ils forment, ce que l'on appelle un *flip*.
4. Le théorème de triangulation est en fait vrai pour les variétés compactes de dimension 3 : il a été démontré par MOISE en 1952, mais en dimensions plus grandes, il est infirmé.

#### 7.1.4.4.2 Classification des surfaces topologiques compactes connexes

##### Théorème. (*Classification des surfaces topologiques connexes compactes*)

Les surfaces topologiques connexes compactes sont, à homéomorphisme près,

- ★ parmi les surfaces orientables,

$$S^2, \quad \mathbb{T}^2, \quad S^1 \times S^1, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \dots$$

et plus généralement pour tout  $g \in \mathbb{N}$  :  $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ termes}}$ ;

\* parmi les surfaces non orientables,

$$\mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots$$

et plus généralement pour tout  $g \in \mathbb{N}^*$  :  $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_{g \text{ termes}}$ .

De plus, chacune des surfaces présentées sont deux à deux non homéomorphes, ni même homotopiquement équivalentes ; on a donc une classification complète non redondante. En outre, pour n'importe quelle classe  $C = D^1, C^k, k \in \mathbb{N} \cup \{inf, \omega\}$  au choix, la classification des surfaces différentiables de classe  $C$  est la même muni de la structure de sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Regarding la signification de  $g$ , on parle de nombre d'*anses* pour une surface orientable et de *calottes croisées* pour une surface non orientable.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Ce théorème se démontre au moyen de l'outil de triangulation des surfaces compactes et du théorème de triangulation dû à RADÓ, objet de la section précédente.

La disjonction deux à deux des types d'homotopie est évidente lorsqu'on a calculé leur groupe fondamental, ce que l'on fait par la suite.

La classification des surfaces différentiables vient du théorème de lissité. ■

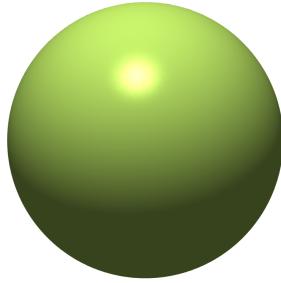
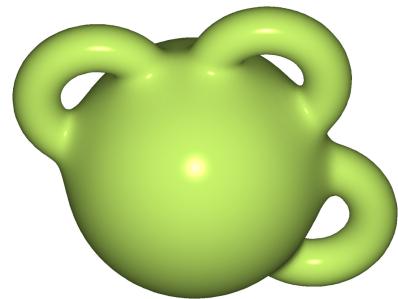
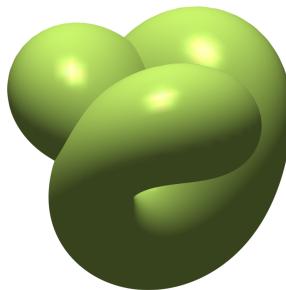
(a) *Sphère.* —(b) *Tore.* —(c) *Bouée à deux trous.* —(d) *Tasse à trois anses.* —(e) *Plan projectif réel représenté comme surface de Boy.* —(f) *Bouteille de Klein, somme de deux plans projectifs réels.* —

FIGURE 7.1.3 : *Classification des surfaces topologiques compactes connexes.* —  
On a représenté les orientables et les non orientables dans deux groupes distincts.

*Remarque.* Remarquer la dissymétrie : il n'y a rien dans la case en dessous de la sphère dans la ligne des non-orientables.

#### 7.1.4.4.3 Classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables

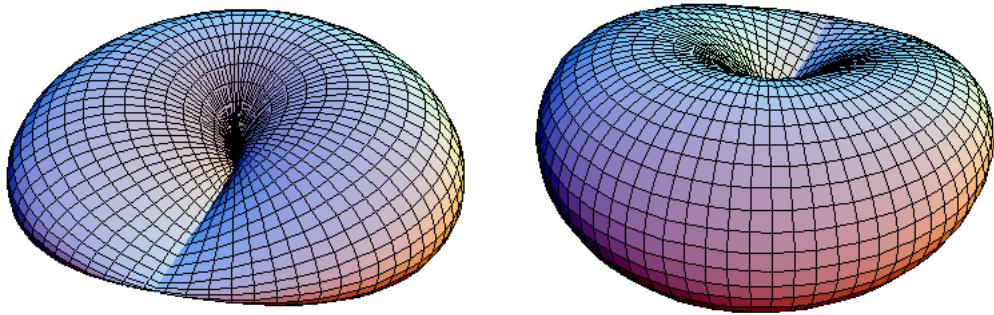


FIGURE 7.1.4 : Deux vues de la sphère avec une calotte croisée, formant le plan projectif. —

**Théorème. (*Classification des surfaces compactes orientables*)**

Les surfaces topologiques compactes connexes orientables sont, à homéomorphisme près, la sphère  $S^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  et les surfaces  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  dites *bouées à g trous* avec  $g$  termes où  $g \geq 2$  est le *genre* de la surface. En posant  $S^2$  la somme connexe vide, elles sont donc toutes décrites par  $\{\#_{i=1}^g \mathbb{T}^i \mid g \in \mathbb{N}\}$ , famille qui forme une transversale sur leur ensemble pour l'homéomorphie.

▷ Corollaire du théorème général de Radó. ■

**Corollaire. (*Plongement des surfaces dans l'espace*)**

Toute surface compacte orientable se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .

▷ C'est facile de le voir si l'on sait que le tore se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ . ■



Les surfaces non orientables ne se plongent a priori pas dans  $\mathbb{R}^3$  ! C'est le cas par exemple de la bouteille de Klein.

**Exercice 7 (Surface de Riemann)**

Montrer que toute *surface de Riemann compacte* est une sphère, un tore ou une somme connexe d'un nombre fini de tores.

▷ **Éléments de réponse.**

Toute variété complexe est canoniquement une variété différentielle (réelle), et donc topologique, de dimension paire en chaque point, et de plus orientable. En effet, on procède aux identifications topologiques  $C^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Cette identification est compatible avec le calcul différentiel, puisqu'une fonction de transition holomorphe est en particulier différentiable. De plus, le déterminant jacobien d'une fonction de transition holomorphe  $f$  est toujours positif en raison des conditions de Cauchy-Riemann :  $\det \text{Jac}(f) = |f'(1)|^2 > 0$  d'où l'orientabilité d'une variété

complexe vue comme variété réelle. Les surfaces de Riemann sont en particulier des variétés topologiques réelles orientables de dimension 2, autrement dit, des surfaces (topologiques, réelles) orientables. De plus, une surface de Riemann est compacte si et seulement si la surface topologique sous-jacente l'est.

### Définition. (*Poignée, poignée croisée, calotte croisée*)

On dit que l'on rajoute une *poignée* à la sphère  $S^2$  lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathbb{T}^2$ .

On dit que l'on rajoute une *poignée croisée* à la sphère lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathcal{K}$ .

On dit que l'on rajoute une *calotte croisée* à la sphère lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathbb{PR}^2$ .

### Remarques.

1. Ces trois notions sont bien définies par propriété de la somme connexe.
2. Toute surface compacte est une sphère à laquelle on ajoute un nombre fini de poignées ou de calottes croisées. On peut lui ajouter également des poignées croisées sans faire de différence puisque  $\mathbb{PR}^2 \# \mathbb{PR}^2 \simeq \mathcal{K}$  et donc une poignée croisée est une calotte croisée.
3. Une surface est orientable si et seulement si elle ne comporte aucune calotte croisée.
4. Si l'on ne considère une réalisation d'une surface à partir de la sphère que par ajout de poignées et de calottes croisées, le décompte des poignées et des calottes croisées permet de calculer le genre de la surface, selon des règles énoncées ci-dessous.

### Heuristique

Les poignées sont aux variétés ce que les cellules sont aux *CW*-complexes.

### Heuristique

Les calottes croisées doivent être pensées comme les auto-intersections de surfaces à une seule face.

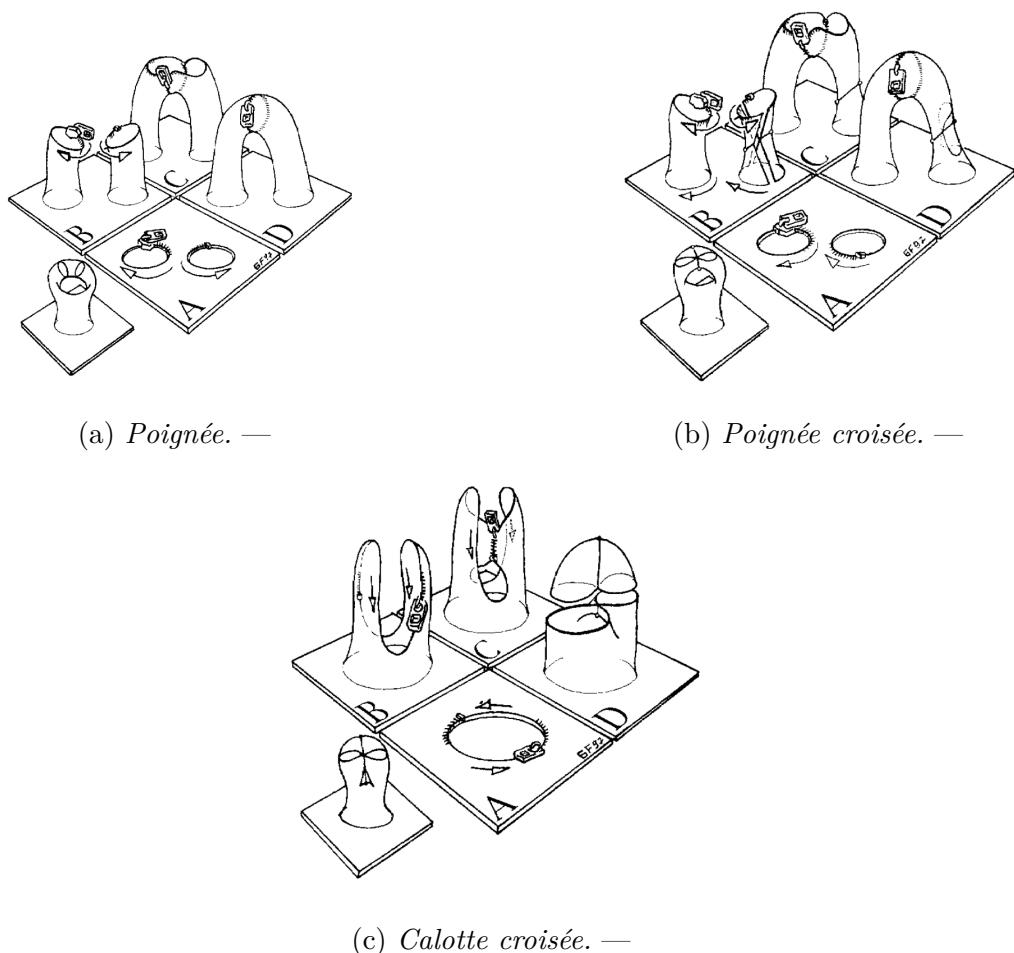
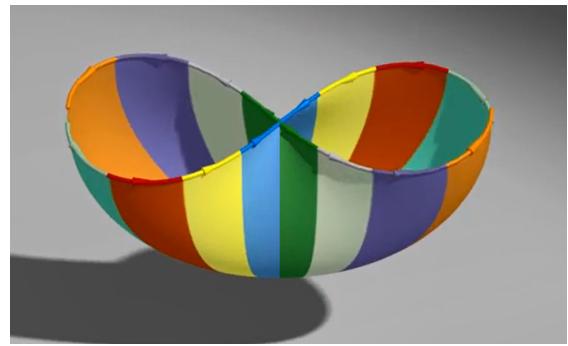


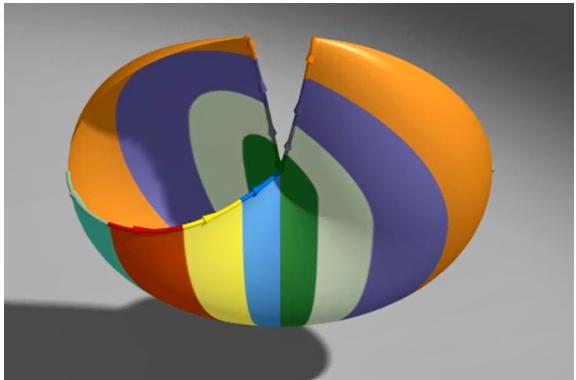
FIGURE 7.1.5 : *Vocabulaire des sommes connexes de surfaces.* —



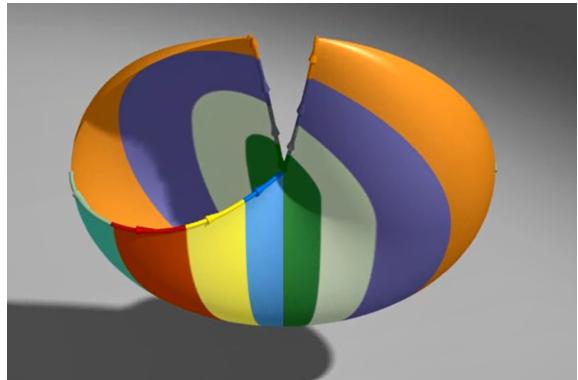
(a) . —



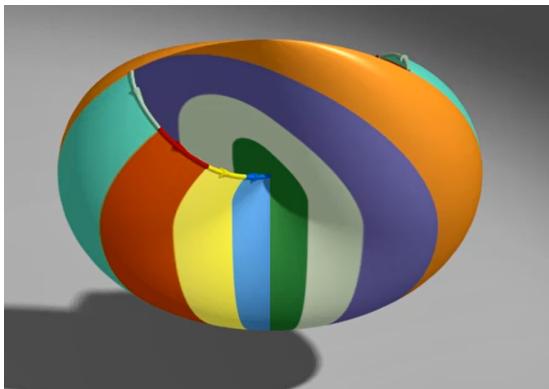
(b) . —



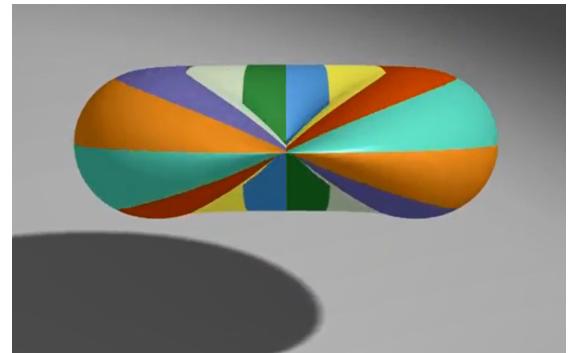
(c) . —



(d) . —



(e) . —



(f) . —

FIGURE 7.1.6 : Construction d'un cross-cap. —

#### 7.1.4.4.4 Genre des surfaces

**Définition.** (*Genre d'une surface*)

Soit  $S$  une surface topologique connexe compacte. Si  $S$  est orientable, on note  $g(S) = 0$  si  $S$  est la 2-sphère et  $g(S)$  le nombre de termes dans  $S \simeq \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  sinon. Réciproquement, on note  $S_g$  « la » surface orientable de genre  $g \in \mathbb{N}$ .

Si  $S$  est non orientable, on note  $g(S) = l$  où  $l$  est le nombre de termes dans  $S \simeq \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ . Réciproquement, on note  $V_g$  « la » surface non orientable de genre  $g \in \mathbb{N}^*$ .

### Définition-propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une surface*)

Soit  $X$  une surface topologique triangulée par une certaine triangulation. On note  $\chi(X) = S - A + F \in \mathbb{Z}$  où  $S$  est le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces de la triangulation. Alors  $\chi(X)$  ne dépend pas du choix de la triangulation, et on appelle ce nombre la *caractéristique d'Euler* de  $X$ .

### Fait. (*Relation genre-caractéristique*)

Soit  $X$  une surface compacte orientable. Alors

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

où  $g(X)$  est le genre de  $X$ . Réciproquement,  $g(X) = 1 - \frac{\chi(X)}{2}$ .

Si  $X$  est une surface compacte non orientable, alors

$$\chi(X) = 2 - g(X).$$

Réciproquement,  $g(X) = 2 - \chi(X)$ .

**Mnémonik :** le genre est un entier positif ou nul, défini uniquement pour une surface topologique, tandis que la caractéristique d'Euler est un entier relatif  $\leq 2$  dans le cas d'une surface, qui est en outre pair si elle est orientable (la réciproque étant fausse) et  $\leq 1$  si elle est non orientable.

### Exemples. (*Caractéristiques d'Euler, genres*)

1. (*Genre, caractéristique de la sphère*)  $\chi(S^2) = 2$  et  $g(S^2) = 0$ .
2. (*Genre, caractéristique du tore*)  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$  et  $g(\mathbb{T}^2) = 1$ .
3. (*Genre, caractéristique de la bouée à deux trous*)  $\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = -2$  et  $g(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = 2$ .
4. (*Genre, caractéristique du plan projectif réel*)  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$  et  $g(\mathbb{RP}^2) = 1$ .
5. (*Genre, caractéristique de la bouteille de Klein*)  $\chi(\mathcal{K}) = 0$  et  $g(\mathcal{K}) = 2$ .

### Propriété. (*Transport de la caractéristique via un revêtement*)

Soient  $X, Y$  deux surfaces topologiques, avec  $Y$  compacte. On suppose que  $Y$  est revêtue par  $X$  via un revêtement (topologique) à  $d$  feuillets, où  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

▷ En effet, on a montré qu'une surface topologique est (homéomorphe à) un *CW-complexe*. ■

**Exercice 8**

Donner une CNS sur  $g, h \in \mathbb{N}$  pour que  $S_h$  revête  $S_g$ .

## ▷ Éléments de réponse.

Soient  $g, h$  deux entiers naturels. Supposons que  $S_h$  revête  $S_g$ . Remarquons qu'un revêtement par un espace compact est nécessairement fini : en effet, les fibrés sont des fermés discrets d'un compact, donc sont finis. Par la propriété, on a donc  $\chi(S_g) \mid \chi(S_h)$ , donc nécessairement  $1 - g \mid 1 - h$ , d'où  $h = (g - 1)d + 1$  pour un certain  $d \in \mathbb{Z}$  ce qui vaut en particulier pour  $g \neq 0$ . De plus, dans le cas  $g = 0$ , le revêtement universel  $S_h = S^2$  par simple connexité d'où  $h = 0$ . Réciproquement, si  $h = (g - 1)d + 1$  pour un  $d \in \mathbb{Z}$  et  $g \neq 0$ , ou si  $h = g = 0$ , cas traité par le revêtement trivial  $S^2 \rightarrow S^2$ , alors dans le premier cas si  $g = 1$ ,  $h = 1$  et on considère le revêtement trivial  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ; enfin si  $g > 1$ ,  $h = (g - 1)d + 1 \leq 0$  donc  $h = 0$  donc  $(1 - g)d = 1$  d'où  $1 - g = 1$  d'où  $g = 0$ , impossible. Sinon,  $d \in \mathbb{N}$  et on considère une surface en étoile à  $d$  branches avec un trou au centre, et sur chaque branche strictement  $g - 1$  anses. C'est la surface  $S_{(g-1)d+1} = S_h$  par hypothèse. Sous cette vision des choses, il est clair que  $S_h$  est un revêtement de  $S_g$  : pour être formel, voyons que  $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  agit continûment, proprement et librement sur  $S_h$  et que  $S_h/G = S_g$ . Le dessins ci-dessous traite le cas  $h = 11, g = 3$ .

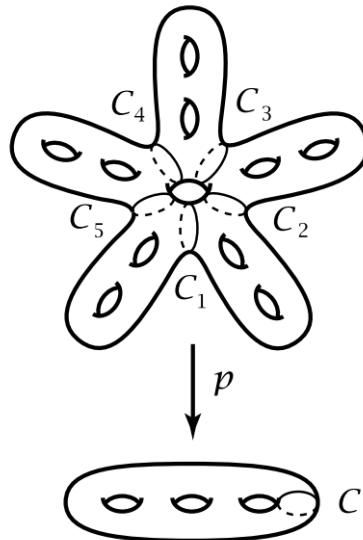


FIGURE 7.1.7 : Revêtement des surfaces compactes entre elles. —  
Revêtement de  $S_3$  par  $S_{11}$ , où  $11 = 2 \times 5 + 1$ .

**Application. (Caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein)**

On a un revêtement différentiel, en particulier topologique, du tore  $\mathbb{T}^2$  sur la bouteille de Klein  $K$  à deux feuillets. Ainsi,  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0 = 2\chi(K)$ , d'où

$$\chi(K) = 0$$

puis

$$g(K) = 2.$$

### Exercice 9

Peut-on en déduire que  $K$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^2$  ?

▷ Éléments de réponse.

Non. Le théorème de classification des surfaces compactes à anses ne s'applique pas :  $K$  n'est pas orientable.

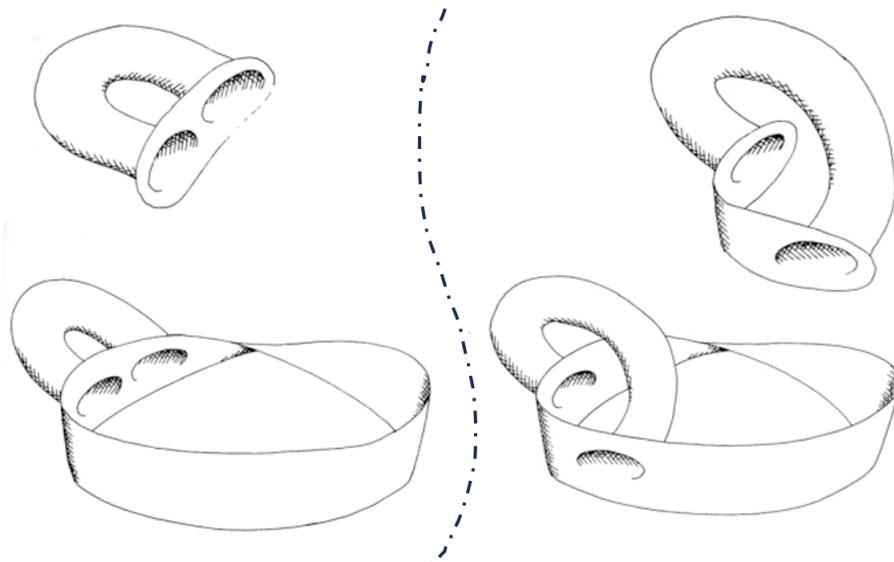
**Remarque importante.** Les faits suivants permettent de calculer les surfaces topologiques compactes : le lien entre genre et caractéristique dans le cas orientable ou non, le fait que la somme connexe se comporte par règle des signes au vu de l'orientabilité, comme le montre l'exercice suivant. Parallèlement, ces règles de calcul exhaustives sur les surfaces permettent de passer outre des démonstrations un peu laborieuses sur les faits suivants : la somme connexe de surfaces est commutative, associative, etc.

### Exercice 10 (Règle des signes pour les surfaces connexes)

1. Montrer que la surface de Dyck  $\mathbb{RP}^2 \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ .
2. Que vaut  $\mathcal{K} \# S^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  ?

▷ Éléments de réponse.

1. C'est un théorème de Dyck. Pour le montrer, faisons un dessin, qui est à notre sens très convaincant. Faisons la somme d'un tore puis d'une bouteille de Klein respectivement avec un ruban de Möbius.



Il est clair que les surfaces obtenues de gauche et de droite sont les mêmes, car un ruban de Möbius n'a qu'une seule face ! Or un ruban de Möbius est une sous-variété plongée du plan projectif, donc il

n'est pas difficile de se convaincre que la même manipulation fonctionne en remplaçant le ruban par le plan projectif, même si l'on ne peut se le représenter dans  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi,  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{RP}^3 \# \mathcal{K}$ .

2. Par commutativité et neutralité de la sphère, en notant  $P = \mathbb{RP}^2$  et  $T = \mathbb{T}^2$ ,  $P \# P \# P \# T \# T \simeq P \# P \# P \# P \# T \simeq P \# P \# P \# P \# P \# P \# P$  successivement. C'est donc la surface compacte à 7 calottes croisées.

On en déduit :

### Théorème. (*Dyck*)

En présence d'une calotte croisée, poignées et poignées croisées sont équivalentes.



La somme connexe n'est pas simplifiable... Sinon, de  $\mathbb{RP}^2 \# \mathcal{K} \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ , on obtiendrait  $\mathcal{K} \simeq \mathbb{T}^2$ , qui pique les yeux.

### Fait. (*Additivités du genre*)

Soient  $g, h \in \mathbb{N}$ . Identifions les surfaces isomorphes, quitte à considérer leurs classes d'homéomorphie.

- ★ On a  $S_g \# S_h = S_{g+h}$ , en particulier le genre est additif sur les surfaces compactes orientables.
- ★ On a  $V_g \# V_h = V_{g+h}$ , en particulier le genre est additif sur les surfaces compactes non orientables.
- ★ On a  $S_g \# V_h = V_{2g+h}$ .

Les deux premiers points découlent de la classification des surfaces exprimées comme sommes connexes de tores et de plans projectifs.

D'autre part, d'après le théorème de Dyck vu à l'exercice précédent,  $S_1 \# V_1 = V_3$ . Ainsi,  $S_g \# V_h = S_{g-1} \# S_1 \# V_1 \# V_{h-1} = S_{g-1} \# V_{h+2}$ , puis par récurrence finie inverse pour tout  $k \in \llbracket 0, g \rrbracket$ ,  $S_g \# V_h = S_{g-k} \# V_{h+2k}$ . En particulier pour  $k = g$ ,  $S_g \# V_h = S_0 \# V_{h+2g}$ . Or  $S_0 = S^2$  est neutre pour la somme connexe, d'où le résultat.

### Exercice 11

Retrouver que pour toutes surfaces  $S, S'$ ,  $\chi(S \# S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$ .

#### ▷ Éléments de réponse.

Traitons les cas séparément, mais c'est alors une conséquence directe du fait.

**Lemme. (*Homologie d'une somme connexe*)**

Soient  $A, B$  deux variétés topologiques de même dimension  $n$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{n, n-1\}$ ,  $H_n(A \# B) \simeq H_n(A \setminus \star) \oplus H_n(B \setminus \star)$ .

▷ On applique la suite de Mayer-Vietoris de la manière suivante : dans  $A \# B$ , on décompose l'image de  $A$  qui est  $A \setminus \star$ , i.e.  $A$  troué, et celle de  $B$  qui est  $B$  trouée :  $B \setminus \star$  car on enlève une boule  $\cong \star$  à chaque variété par construction, et l'intersection de l'image de  $A$  avec l'image de  $B$  est homotopiquement équivalente au cylindre de  $S^n$ , et donc à  $S^n$ . On a donc une suite exacte longue avec :

$$\dots \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_k(A \setminus \star) \oplus H_k(B \setminus \star) \longrightarrow H_k(A \# B) \longrightarrow \dots$$

à tout rang  $k$ . Si  $H_{k+1}(S^n) = H_k(S^n) = 0$ , alors  $H_k(A \# B) \simeq H_k(A \setminus \star) \oplus H_k(B \setminus \star)$ . Par le calcul de l'homologie des sphères, ceci arrive dès que  $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket \cup \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$ . ■

Cette identité calculatoire ne suffit donc pas pour calculer l'homologie complète d'une somme connexe.

**Lemme. (*Homologie du tore pointé*)**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(\mathbb{T}^2 \setminus \star) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon..} \end{cases}$

▷ On utilise la suite de Mayer-Vietoris de manière différente à  $\mathbb{T}^2$  : on considère le tore pointé  $\mathbb{T}' \cong T \setminus D^2$  et on écrit  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}' \cup D^2$  où  $D^2 \cong \star$  et  $\mathbb{T}' \cap D^2$  est homotopiquement équivalent à un cercle. Ainsi la suite

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & \nearrow & & \\ \dots & \longrightarrow & & & & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \nearrow & & \\ 0 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{T}') \oplus 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & & \nearrow & & \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & H_1(\mathbb{T}') \oplus 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & & \nearrow & & \\ \mathbb{Z} & \longleftarrow & H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est exacte où la colonne de gauche est l'homologie d'un cercle, la colonne de droite est l'homologie du tore et celle du milieu est la somme de l'homologie de  $\mathbb{T}^2$  et de  $\star$ . On obtient que  $H_{\geq 2}(\mathbb{T}') = 0$ . De plus  $H_0(\mathbb{T}') = \mathbb{Z}$  par connexité. Reste à calculer  $H_1(\mathbb{T}')$ . On a :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où la suite finale  $\mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$  est exacte, donc la première de ces deux flèches est injective. On peut donc couper la suite pour obtenir :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0.$$

Ainsi  $H_1(\mathbb{T}')$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2 \oplus A$  où  $A$  est une partie de torsion qui proviendrait du conoyau de  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ . Or d'après sa définition dans la suite de Mayer-Vietoris,  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  est surjective : on part d'un cycle représentant un générateur de  $H_2(\mathbb{T})$ , on le projette en le cycle générateur de l'homologie relative  $H_2(D^2, D^2 \cap \mathbb{T}')$  dont le bord est le cycle générateur de  $H_1(D^2 \cap \mathbb{T}')$ . ■

*Remarque.* En fait, il est assez visuel que  $\mathbb{T}'$  se rétracte sur le bouquet de deux cercles, ce qui aurait été plus rapide que d'utiliser la suite de Mayer-Vietoris, mais les idées sont intéressantes.

### Application. (*Homologie des surfaces topologiques compactes*)

Soit  $g \in \mathbb{N}$ . Calculons l'homologie de  $S_g$  puis de  $V_g$ .

- ★ Dans le cas de  $S^2$ , c'est l'homologie de la sphère de  $\mathbb{R}^3$ . On sait que  $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(S^2) = 0$ ,  $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$  et  $H_k(S^2) = 0$  pour  $k \geq 3$ .
- ★ Si  $g \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_g$  la surface compacte orientable à  $g$  anses, qui est la bouée à  $g$  trous. On sait que  $H_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ ,  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  et  $H_k(\mathbb{T}^2) = 0$  pour  $k \geq 3$ . Par suite, en utilisant le lemme précédent de manière itérée, la suite de Mayer-Vietoris donne  $H_k(S_g) = 0$  dès que  $k \geq 3$ , ce qui est cohérent au passage avec la dimension de la surface et la théorie de l'homologie des variétés. On a de plus  $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$  par connexité.

Pour aller plus loin, on utilise le lemme précédent. Montrons par récurrence sur  $g$  que les groupes d'homologie de  $S_g$  sont pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et au passage

$$H_k(S'_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'on note  $S'_g$  la surface orientable de genre  $g$  privée d'un point.

Appliquons la suite de Mayer-Vietoris au recouvrement de  $S_g$  par  $S'_g$  et  $\mathbb{T}'$ , l'inter-

section étant un cylindre se rétractant par déformation sur  $S^1$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2(S_g) \\ & & \searrow & & & & \\ & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)} & \xrightarrow{\quad} & H_1(S_g) \\ & & \swarrow & & & & \\ & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_0(S_g) \end{array}$$

et l'on a alors  $H_{\geq 3}(S_g) = 0$ . Comme d'habitude,  $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$ . Cette situation en degré nul permet de couper en

$$0 \longrightarrow H_2(S_g) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)} \longrightarrow H_1(S_g) \longrightarrow 0.$$

Par orientabilité, en degré de dimension, on a directement  $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$ . Reste à déterminer  $H_1(S_g)$ . La flèche  $H_2(S_g) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}' \cap S'_{g-1})$  est surjective comme dans le cas de  $\mathbb{T}'$  en revenant à la définition et en passant par  $H_2(\mathbb{T}', \mathbb{T}' \cap S'_{g-1})$ . Donc la flèche  $\underbrace{\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)}}_{\simeq \mathbb{Z}^{2g}} \rightarrow H_1(S_g)$  est un isomorphisme.

Pour conclure la récurrence, il faut calculer l'homologie de  $S'_g$  mais on peut procéder mot pour mot comme pour le tore troué :  $S_g = S'_g \cup D^2$  et l'on réapplique la suite de Mayer-Vietoris à  $S_g$  avec cette nouvelle décomposition.

Remarquons que la dualité de Poincaré s'applique, les surfaces étant dans notre premier cas orientables.

- ★ Si  $g \in \mathbb{N}^*$ , on note  $V_g$  la surface compacte non orientable à  $g$  calottes croisées, qui est la somme de  $g$  plans projectifs. Or on sait que  $H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H_k(\mathbb{RP}^2) = 0$  pour  $k \geq 2$ . Par suite,  $H_k(V_g) = 0$  dès que  $k \geq 3$ . On a de plus  $H_0(V_g) = \mathbb{Z}$  par connexité.

Considérons maintenant l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

#### 7.1.4.4.5 Combinatoire des surfaces topologiques

On décrit maintenant les groupes fondamentaux des surfaces topologiques.

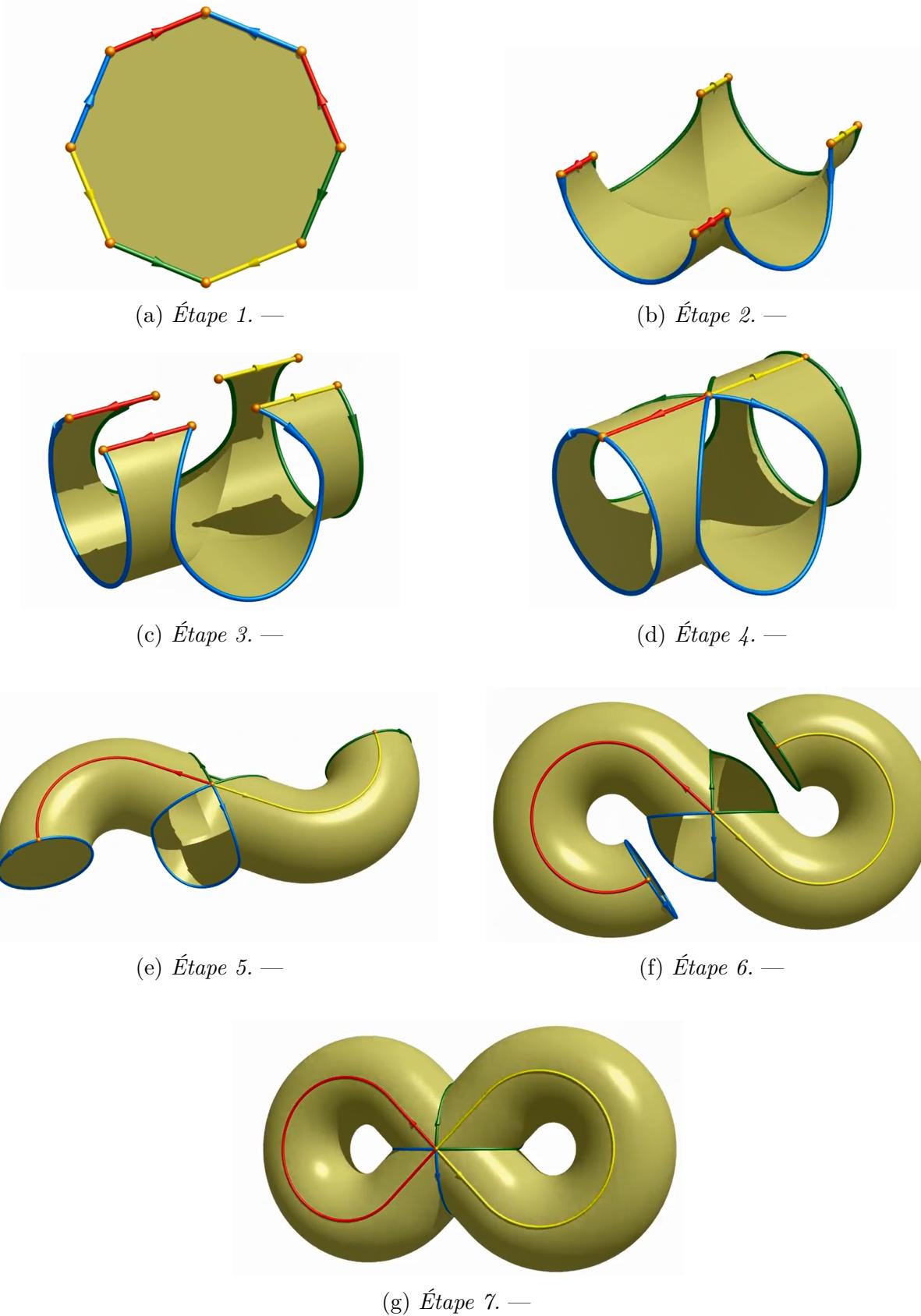
##### Propriété. (*Groupe fondamental d'une surface compacte*)

Soit  $X$  une surface orientable, compacte, connexe = connexe par arcs de genre  $g$ . Alors  $\pi_1(X)$  est présenté par  $2g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  et une relation  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  désigne le commutateur.

▷ Conséquence du théorème de Van-Kampen appliqué à la somme connexe  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ , avec  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid [\gamma_1, \gamma_2] \rangle$ . Pour le cas général, le groupe fondamental est invariant par homéomorphisme. ■

**Corollaire. (*Structure de CW-complexe d'une surface compacte*)**

Toute surface compacte connexe orientable est munie d'une structure de *CW-complexe* dont le 2-squelette est un  $2g$ -gone, dit *polygone fondamental* de la surface.

FIGURE 7.1.8 : Structure de CW-complexe de  $T \# T$ . —

### 7.1.4.5 Classification des variétés topologiques de dimension $\geq 3$

Et après ?

La somme connexe de deux variétés orientables en dimension supérieure, dépend des choix effectués pour l'homéomorphisme de recollement  $\varphi$  de cellules. En effet, étant données deux surfaces orientables et orientées (et c'est ce cas seul qui ne pose pas problème), on peut définir le degré de  $\varphi$ , qui est alors  $\pm 1$  sans détermination forcée. Cependant, le type d'homotopie ne change pas si l'on remplace un homéomorphisme qui renverse l'orientation par un qui la préserve, car toute variété orientable préserve un automorphisme qui renverse l'orientation). Par contre, en dimension 4, la somme connexe de  $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$  non orientables dépend fortement de ce choix. Ceci complique forcément la classification des surfaces

Le cas de la dimension 3 consiste en la conjecture de Poincaré, démontrée par Grigori PERELMAN. Elle est en fait (de loin) plus facile que le cas  $n = 4$ , résolu par Michael FREEDMAN en 1982... car toute variété de dimension  $\leq 3$  admet une structure lisse, ce qui n'est plus le cas au-delà. De plus, il y a en plus grandes dimensions des structures exotiques : même  $\mathbb{R}^4$  admet « beaucoup » de structures lisses...

## 7.2 Dualité de Poincaré et théorie des intersections

**L**a dualité de Poincaré se montre difficilement mais nul besoin d'en connaître les méandres pour s'amuser avec des conséquences fortes : elle permet de caractériser de manière importante les invariants homologiques des variétés, cohomologie bien sûr mais aussi homologie et caractéristique d'Euler. Elle produit également des invariants, tels que la signature.

### 7.2.1 Prolégomènes à la dualité de Poincaré

#### 7.2.1.1 Motivation : liens entre la cohomologie de de Rham et l'homologie singulière

On restreint l'homologie singulière aux simplexes lisses dans le cas des variétés différentiables.

**Définition-propriété.** (*Intégration des formes sur une variété à bord*)

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on considère un simplexe singulier lisse  $\sigma : T^p \rightarrow M$ , i.e. restriction d'une application lisse  $U \rightarrow M$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $T^p$  et l'on considère que  $T^p \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$  et toutes ses faces sont un simplexe orienté. On note  $C_p^\infty(M)$  le sous-complexe de chaînes formé par eux.

Soit  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Alors,  $\sigma^*\omega$  est une  $p$ -forme sur (un voisinage ouvert de)  $T^p$  et l'on pose

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{T^p} \sigma^* \omega.$$

Pour une  $p$ -chaîne  $c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \in C_p^{\infty}(M)$ , on pose  $\int_c \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\sigma} \omega$ .

▷ On omet des détails techniques concernant le  $(p - 2)$ -squelette de  $T^p$ . ■

### Fait. (*Morphisme de de Rham*)

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on obtient un morphisme

$$\psi^p : \Omega^p(M) \rightarrow \text{Hom}(C_p^{\infty}(M), \mathbb{R}) := C_{\infty}^p(M; \mathbb{R})$$

donné par  $\psi^p(\omega)(c) = \int_c \omega$ , et un morphisme de complexes de cochaînes par extension.  
C'est un corollaire du théorème de Stokes.

**VOC** On note  $H_{\infty}^p(M)$  le  $p$ -ième groupe d'homologie de  $C_{\infty}^{\bullet}(M; \mathbb{R})$ .

La cohomologie singulière restreinte aux simplexes lisses coïncide comme par magie avec la cohomologie de de Rham, merci Dieu.

### Théorème. (*Théorème de de Rham*)

Soit  $M$  une variété lisse. Le morphisme induit

$$\psi^* : H_{\Omega}^p(M) \rightarrow H_{\infty}^p(M)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$ .

### Lemme. (*Reformulation du lemme de Poincaré*)

Le théorème de de Rham est vrai pour tout sous-ensemble ouvert et convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

On en déduit deux séries de résultats :

- ★ dans le cadre des simplexes singuliers lisses, les suites exactes longues classiques, la suite de Mayer-Vietoris pour les sous-ensembles ouverts (*que l'on explicitera ci-après*), le calcul de l'homologie pour les espaces contractiles ;
- ★ des résultats similaires pour la cohomologie de de Rham.

### Proposition. (*Suite de Mayer-Vietoris pour l'homologie lisse*)

Soient  $U, V \subseteq M$  deux ouverts d'une variété lisse. On a la double suite de Mayer-Vietoris dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{\Omega}^p(U \cap V) & \longrightarrow & H_{\Omega}^p(U) \oplus H_{\Omega}^p(V) & \longrightarrow & H_{\Omega}^p(U \cap V) \longrightarrow H_{\Omega}^{p+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{\infty}^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\infty}^p(U; \mathbb{R}) \oplus H_{\infty}^p(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{\infty}^p(U \cap V; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\infty}^{p+1}(U \cup V; \mathbb{R}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

▷ Soient  $U, V \subseteq M$  deux ouverts d'une variété lisse. On a une suite courte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{\quad} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{+} \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

Pour montrer la surjectivité de la deuxième application, considérons une  $p$ -forme  $\omega$  sur  $U \cap V$ . On peut utiliser une partition de l'unité pour trouver une fonction lisse  $f : U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$  qui est nulle sur un voisinage de  $U \setminus V$  et vaut 1 sur un voisinage de  $V \setminus U$ . On a alors une décomposition  $\omega = f\omega + (1-f)\omega$ . Les formes  $f\omega$  et  $(1-f)\omega$  peuvent être prolongées par zéro sur  $U$  et  $V$  respectivement. Ainsi, en notant  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) & \longrightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i^* \circ \psi & & \downarrow \psi \oplus \psi & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U; \mathbb{R}) \oplus C_{\mathcal{U}, \infty}^p(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U \cap V; \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

commutatif. ■

### Corollaire

Si  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $U, V$  et  $U \cap V$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il l'est aussi pour  $U \cup V$ .

### Lemme

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que  $\psi^*$  soit un isomorphisme pour tout  $U_i$ , alors  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $\bigcup_{i \in I} U_i$ .

▷ C'est un corollaire du calcul des groupes de cohomologie dans le cas singulier et dans le cas de de Rham et la naturalité de  $\psi^*$ . ■

On peut donc faire la démonstration du théorème de de Rham.

### Preuve.

▷ L'isomorphisme obtenu  $\psi^* : H_\Omega^p(M) \rightarrow H_\infty^p(M; \mathbb{R})$  peut être composé avec un isomorphisme  $H_\infty^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})$ . L'inclusion  $C_\bullet^\infty(M) \hookrightarrow C_\bullet(M)$  induit un morphisme de complexes de cochaînes  $C^\bullet(M; G) \rightarrow C_\infty^\bullet(M; G)$  pour tout groupe abélien  $G$ . On peut utiliser le lemme local-global pour les ouverts pour démontrer que le morphisme induit  $H^p(M; G) \rightarrow H_\infty^p(M; G)$  est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$ , isomorphisme de  $G$ -modules si  $G$  est un anneau commutatif. ■

#### 7.2.1.2 Première approche : triangulation des variétés compactes

On utilise les notions de TRIANGULATION SIMPLICIALE d'un espace topologique venant de la théorie de l'homotopie des complexes simpliciaux.

### Définition-propriété. (*Décomposition cellulaire duale*)

Soit  $M$  une variété topologique connexe compacte orientable de dimension  $n$ . On suppose qu'il existe une triangulation finie combinatoire  $\tau$  de  $M$ . On considère  $\tau_1$  la subdivision barycentrique de  $\tau$ .

Les cellules (fermées) de  $\tau$  sont décrites de la façon suivante : à un sommet  $v$  de  $\tau$ , on associe une  $n$ -cellule fermée  $v^*$  l'étoile de  $v$  dans  $\tau_1$ , et à un  $k$ -simplexe  $\sigma$  de  $\tau$ , on associe une  $(n-k)$  cellule  $\sigma^*$  qui n'est autre que l'intersection des  $n$ -cellules fermées des sommets.

Dans la définition précédente, on considère chaque  $(n-k)$  cellulaire de la décomposition cellulaire duale de  $\tau$  comme une  $(n-k)$ -cochaîne. Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , à toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$ , on associe une  $(n-k)$ -cochaîne cellulaire  $D(c)$ , et on a  $\delta D(c) = \pm D(\partial c)$ . On obtient l'*isomorphisme de Poincaré*  $H_k(M) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(M)$  pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ . Pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c_1 = \sum_i m_i \sigma_i$  de  $M$  et toute  $(n-k)$ -chaîne cellulaire  $c_2 = \sum_i e_i \sigma_i^*$ , on peut considérer leur *indice d'intersection*

$$\xi(c_1, c_2) = \sum_{i,j} \delta_{ij} m_i l_j.$$

On a  $\xi(\partial c, d) = \pm \xi(c, \partial d)$  pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$  et toute  $(n-k+1)$ -chaîne cellulaire  $d$  de  $M$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On obtient une forme bilinéaire entière  $H_k(M)/H_k(M)^{tor} \times H_{n-k}(M)/H_{n-k}(M)^{tor} \rightarrow \mathbb{Z}$  (ou  $H_k(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H_{n-k}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) appelée *forme d'intersection* de  $M$ .

### Exemple

Pour  $\mathbb{CP}^2$ , on a  $H_2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}$ . Un générateur est donné par la classe réalisée par une droite. Le carré de cette classe par rapport à la forme d'intersection  $H_2(\mathbb{CP}^2) \times H_2(\mathbb{CP}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  est égal à 2, autrement dit, cette forme bilinéaire est isomorphe à  $\langle 1 \rangle$ .

#### 7.2.1.3 Formalisme moderne des cup produit et cap produit

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.

### Définition-propriété. (*Cup-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tous entiers  $k, l \geq 0$ , on définit l'opération de *cup-produit* :

$$\smile : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$$

de la façon suivante : pour toute cochaîne  $c \in C^k(X; R)$ , pour toute cochaîne  $d \in C^l(X; R)$  et pour tout  $(k+l)$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , on pose

$$(c \smile d)(\sigma) = c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_k)}) \times_R d(\sigma \circ \Delta_{(v_k, \dots, v_{k+l})}) \in R$$

où  $\Delta_{(v_0, \dots, v_k)}$  désigne le plongement canonique du simplexe  $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$  dans  $T^{k+1}$  et  $\Delta_{(v_k, \dots, v_{k+l})}$  le plongement canonique du simplexe  $\langle v_k, \dots, v_{k+l} \rangle$  dans  $T^{k+1}$ .



Ceci ne suffit pas pour définir  $\smile$  sur les groupes d'homologie. Il faut montrer la proposition suivante.

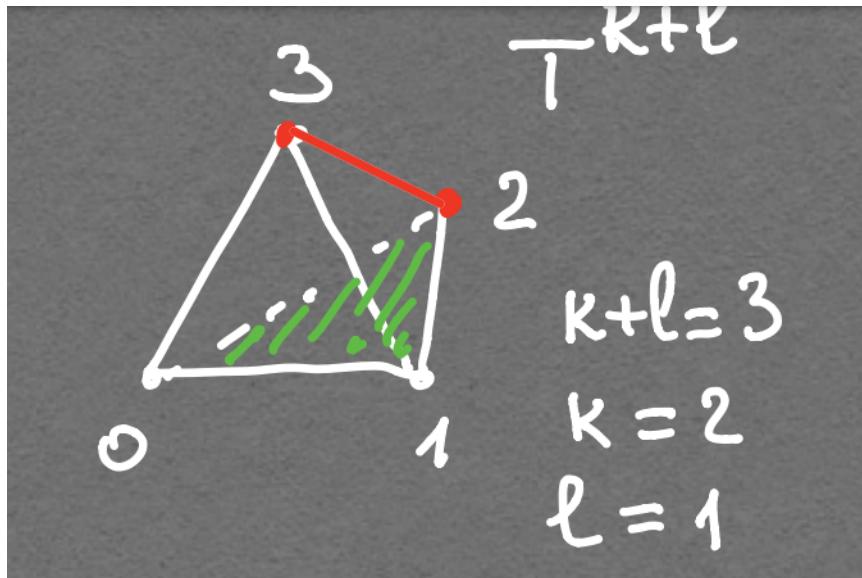


FIGURE 7.2.1 : Cup-produit de deux cochaînes évalué en une chaîne. —

### Lemme. (*Règle de Leibniz pour le cup-produit*)

Soient  $X$  un espace topologique,  $k, l \in \mathbb{N}$  et  $(c, d) \in C^k(X; R) \times C^l(X; R)$ . Alors

$$\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^k c \smile \delta d.$$

Autrement dit, le cup-produit est compatible avec le cobord.

▷ Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $\sigma \in C_{l+k+1}(X)$ . Alors

$$\begin{aligned}
\delta_k(c \smile d)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i c \smile d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&= \sum_{i \leq k} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&\quad + \sum_{1+k \leq i \leq k+l+1} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_{k+1})}) d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&= d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1})}) \underbrace{\sum_{i \leq k+1} c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1})})}_{= b \smile \delta a} \\
&\quad + c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_k)}) \underbrace{\sum_{k \leq i \leq k+l+1} (-1)^{i-k} d(\sigma \circ \Delta_{(v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})})}_{(-1)^i d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})})} \\
&= (-1)^k \sum_{k \leq i \leq k+l+1} (-1)^i d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) = (-1)^k \delta b
\end{aligned}$$

$$\delta_k(c \smile d)(\sigma) = (-1)^k c \smile \delta b,$$

ce qu'il fallait calculer. ■

### Preuve.

▷ Ainsi, le cup-produit descend sur l'homologie :  $\delta(c \smile d)(\sigma) = (c \smile d)(\partial\sigma)$ . ■

### Fait. (*Bilinéarité du cup-produit*)

Pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $\smile : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$  est bilinéaire.

C'est très lisible sur la définition.

→ *Notation.* Il n'est pas rare, et notamment pour simplifier les écritures dans la théorie des classes caractéristiques, de noter le cup produit simplement par une absence de symbole :  $\alpha \smile \beta = \alpha\beta$ .

### Propriétés. (*Propriétés calculatoires du cup-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique.

1. (*Associativité du cup-produit*) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $k_i$  entier naturel, alors

$$\alpha_1 \smile (\alpha_2 \smile \alpha_3) = (\alpha_1 \smile \alpha_2) \smile \alpha_3.$$

2. (*Commutation du cup-produit*) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2$  et  $k_i$  entier naturel, alors

$$\alpha_1 \smile \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \smile \alpha_1.$$

3. (*Transport du cup-produit sur les coefficients*) Soit  $h : R \rightarrow R'$  un morphisme d'anneaux. Alors  $h^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = h^*(\alpha_1) \smile h^*(\alpha_2)$ .

4. (*Transport du cup-produit sur l'espace de base*) Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue. Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $f^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \smile f^*(\alpha_2)$ .

▷ Successivement :

1.

2. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$ , on note  $\bar{\sigma}$  le simplexe inversé  $\sigma \circ \omega$  où  $\omega : T^k \rightarrow T^k$  est l'application affine qui envoie tout sommet  $e_i$  du  $k$ -simplexe standard  $T^k$  sur  $e_{k-i}$ ,  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . On définit alors un morphisme  $\rho_k : C_k(X) \rightarrow C_k(X)$  en posant  $\rho(\sigma) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \bar{\sigma}$ . Alors les  $\rho_k$  forment un morphisme de complexes de chaînes  $\rho : (C_*(X), \partial) \rightarrow (C^*(X), \delta)$ . De plus, ce morphisme est homotope à l'identité. On utilise une preuve de type triangulation du prisme en posant pour homotopie à l'identité :

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)(-1)^{\frac{(k-i)(k-i+1)}{2}} (\sigma \circ \pi \circ \text{un sous-simplexe comme habituellement}).$$

3.

4. ■

*Remarque.* Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On définit de même le *cup-produit relatif*, par rapport à l'un ou les deux termes pris relatifs :

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

ou

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

ou encore

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R).$$

### Définition-propriété. (*Cap-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tous entiers  $k, l \geq 0$ , on définit l'opération de *cap-produit* :

$$\smile : H_k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$$

de la façon suivante : pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , pour toute cochaîne  $c \in C^l(X; R)$ , on pose

$$\sigma \smile c = c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_l)}). \sigma \circ \Delta_{(v_l, \dots, v_k)}.$$



Ceci ne suffit pas pour définir  $\smile$  sur les groupes d'homologie. Il faut montrer la proposition suivante.

**Lemme. (*Règle de Leibniz pour le cap-produit*)**

Soient  $X$  un espace topologique,  $k,l \in \mathbb{N}$  et  $\sigma$  un  $k$ -simplexe de  $X$  et  $c \in C^l(X; R)$ . Alors

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^l (\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$

Autrement dit, le cap-produit est compatible avec le cobord.

▷

■

**Preuve.**

▷ Ainsi, le cap-produit descend sur l'homologie. ■

**Fait. (*Bilinéarité du cap-produit*)**

Pour tous  $k,l \in \mathbb{N}$ ,  $\frown : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$  est bilinéaire.

C'est encore très lisible sur la définition.

**Propriétés. (*Propriétés calculatoires du cap-produit*)**

Soit  $X$  un espace topologique.

1. (*Associativité du cap-produit*) Si  $\alpha_1 \in H_{k_1}(X; R)$  et  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 2,3$  et  $k_i$  entier naturel, alors  $\alpha_1 \frown (\alpha_2 \frown \alpha_3) = (\alpha_1 \frown \alpha_2) \frown \alpha_3$ .

▷ Successivement :

1. ■

Les cap-produits relatifs sont un peu plus piégeux.

*Remarque.* Soit  $(X,A)$  une paire topologique. On définit de même le *cap-produit relatif*, par rapport à l'un ou les deux termes pris relatifs :

$$H_k(X,A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$$

ou

$$H_k(X,A; R) \times H^l(X,A; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R).$$

▷ En effet,  $C_k(A; R) \times C^l(X,A; R) \rightarrow 0$ . ■

Cette opération est également fonctorielle, quoique d'une manière pas bien naturelle, ce qui est dû à l'assymétrie des cup et cap-produits.

**Proposition. (*Fonctorialité des produits cohomologiques*)**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Soient  $k, l \in \mathbb{N}$ . On a

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$$

pour tous  $\alpha \in H^k(X; R)$  et  $\beta \in H^l(X; R)$ . D'autre part,

$$f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \smile f^*(\varphi))$$

pour tous  $\alpha \in H_k(X; R)$  et  $\varphi \in H^l(Y; R)$ .

▷ À faire soi-même. ■

Terminons par un point important.

**Propriété. (*Lien cup-cap-produits*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Soient  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  et  $\psi \in C^p(X; R), \varphi \in C^q(X; R)$ ,  $p, q$  entiers naturels. Alors

$$\psi(\sigma \smile \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\sigma).$$

Si  $\sigma$  peut être de degré  $\geq p + q$ , ceci se récrit :

$$(\sigma \smile \varphi) \smile \psi = \sigma \smile (\varphi \smile \psi).$$

En particulier,  $H_*(X; R)$  est un  $H^*(X; R)$ -module à droite.

▷ Pour tout simplexe singulier  $\sigma : T^{p+q} \rightarrow X$ , on a  $\psi(\sigma \smile \varphi) = \psi(\varphi(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_p)}) \sigma \circ \Delta_{(v_p, \dots, v_{q+q})}) = \varphi(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_p)}) \psi(\sigma \circ \Delta_{(v_p, \dots, v_{p+q})}) = (\varphi \smile \psi)(\sigma)$ . ■

### 7.2.2 Dualité de Poincaré

#### Heuristique

A priori, le premier groupe d'homologie « intéressant » d'une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  est  $H_n(M)$ , en descendant. Or le théorème des coefficients universels permet de calculer  $H_n(M : G)$  pour tout groupe abélien  $G$  si l'on connaît  $H_{n-1}(M)$ . Nous nous intéressons en quelque sorte à l'opération inverse.

#### 7.2.2.1 Isomorphismes de Poincaré

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.

On souhaite montrer le résultat suivant

**Théorème. (*Isomorphisme de Poincaré dans le cas compact*)**

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et  $R$ -orientable. On considère une classe fondamentale  $[M] \in H_n(M; R)$ .

L'application  $D: H^m(M; R) \longrightarrow H_{n-m}(M; R)$  est un isomorphisme pour tout entier  $\alpha \longmapsto [M] \cap \alpha$

$0 \leq m \leq n$  et donc  $H^m(M; R) \simeq H_{n-m}(M; R)$  et même  $H_m(M; R) \simeq H^{n-m}(M; R)$ .

On rappelle au passage que  $H_k(M; R) = H^k(M; R) = 0$  dès que  $k > n$ .

▷ Ce sera un cas particulier de l'isomorphisme de Poincaré général. ■

**VOC** Lorsqu'on parle de *l'isomorphisme de Poincaré*, c'est souvent à celui-ci que l'on se réfère.

Afin de démontrer le théorème général, il est en fait nécessaire la cohomologie à support compact. Soit  $G$  un groupe abélien.

**Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes à support compact*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout entier naturel  $m$ , on considère le sous-groupe  $C_c^m(X; G) \subseteq C^m(X; G)$  formé des *cochaînes à support compact*, c'est-à-dire ses cochaînes  $\varphi : C_m(X) \rightarrow G$  pour lesquelles, il existe un compact  $K_\varphi \subseteq X$  tel que  $\varphi$  soit nulle sur toutes les  $m$ -chaînes dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Une telle cochaîne  $\varphi$  est alors telle que  $\partial\varphi$  soit nulle sur toutes les  $(m+1)$ -chaines dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Le *complexe de cochaînes de  $X$  à support compact* est alors

$$\dots \longleftarrow C_c^2(X; G) \xleftarrow{\partial} C_c^1(X; G) \xleftarrow{\partial} C_c^0(X; G)$$

et les groupes d'homologie de ce complexe sont les *groupes de cohomologie  $H_c^m(X; G)$  de  $X$  à coefficients dans  $G$  et à support compact*.

▷ La remarque fait est immédiate. ■

*Remarque.* De façon équivalente, le groupe  $C_c^m(X; G)$  est la réunion  $\bigcup_{K \subseteq X} C^m(X, X \setminus K; G) \subseteq C^m(X; G)$ .

**Fait. (*Description de l'homologie à support compact comme limite inductive*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Si  $K \subseteq L$  sont deux compacts de  $X$ , on a le morphisme

$$H^m(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^m(X, X \setminus L; G)$$

pour tout entier naturel  $m$ , induit par l'inclusion  $(X, X \setminus L) \hookrightarrow (X, X \setminus K)$ . Notons que l'ensemble des compacts de  $X$  est filtrant. On a alors  $\varinjlim H^m(X, X \setminus K; G) \simeq H_c^m(X; G)$ .

### Exemple. (*Homologie à support compact de l'espace euclidien*)

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  deux entiers. On a  $H_c^m(\mathbb{R}^n; G) = 0$  si  $m \neq n$  et  $H_c^n(\mathbb{R}^n; G) \simeq G$  sinon.

**Remarque importante.** Si  $X$  est un espace séparé, alors le groupe  $H^m(X, X \setminus K; G)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , où  $K \subseteq X$  est un compact, ne dépend que relativement à  $G$  d'un voisinage de  $K$ .

### Exercice 12

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$ . Montrer que le groupe  $H_c^n(M)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $M$  est orientable et à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sinon.

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et  $R$ -orientée.

Si  $K \subseteq L \subseteq M$  sont deux compacts, on a

$$H_n(M, M \setminus L; R) \times H^m(M, M \setminus L; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

et

$$H_n(M, M \setminus K; R) \times H^m(M, M \setminus K; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

pour tous entiers positifs  $m \leq n$ .

Il existe un unique élément  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$  qui, pour tout  $x \in K$ , donne l'orientation locale choisie.

De même façon, on a  $\mu_L \in H_n(M, M \setminus L; R)$ .

De plus, par unicité,  $i_*(\mu_L) = \mu_K$  où  $i : (M, M \setminus L) \hookrightarrow (M, M \setminus K)$  est l'inclusion.

En outre, par naturalité du cap-produit,  $\mu_K \cap \alpha = i_*(\mu_L) \cap \alpha = i_*(\mu_L \cap i^*(\alpha))$  pour tout  $\alpha \in H^m(M, M \setminus K; R)$ .

Donc, les morphismes  $H^m(M, M \setminus K; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$  où  $K$  parcourt les compacts

$$\alpha \mapsto \mu_K \cap \alpha$$

de  $M$ , induisent un morphisme  $D_M : H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$ .

### Théorème. (*Isomorphisme de Poincaré*)

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ , compacte et  $R$ -orientée ; c'est-à-dire, prenons une  $n$ -variété fermée  $R$ -orientable. Le morphisme

$$D_M : H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

▷ On se permet de sous-entendre que les groupes d'homologie et de cohomologie sont pris à coefficients dans  $R$ .

Utilisons le lemme local-global pour les ouverts.

### Lemme

Le morphisme

$$D_{\mathbb{R}^n} : H_c^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-m}(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

▷ Le seul cas à considérer est le cas où  $m = n$ . Le morphisme  $D_{\mathbb{R}^n}$  s'identifie avec  $H^n(T^n, \partial T^n) \rightarrow H_0(T^n)$  donné par le produit avec le générateur  $[T^n] \in H_n(T^n, \partial T^n)$  représenté par l'identité  $id_{T^n}$ , multiplié par un élément inversible de  $R$ . Un générateur de  $H^n(T^n, \partial T^n)$  qui dans ce cas est isomorphe à  $\text{Hom}(H_n(T^n, \partial T^n), R)$  est représenté par un cocycle  $\varphi$  qui prend la valeur 1 sur  $T^n$ . Donc,  $T^n \frown \varphi$  est le dernier sommet de  $T^n$ . Ce sommet représente un générateur de  $H_0(T^n)$ . ■

### Lemme

Soient  $U, V$  deux ouverts qui recouvrent  $M$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^m(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^m(U) \oplus H_c^m(V) & \longrightarrow & H_c^m(U \cup V) \longrightarrow H_c^{m+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_{U \oplus D_R} & & \downarrow D_{U \cup V} \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) & \longrightarrow & H_{n-m}(U \cup V) \longrightarrow H_{n-m-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

commutatif à signe près.

▷ L'existence du diagramme n'est autre qu'un jeu de définitions avec la limite inductive. Il est plus difficile de montrer qu'il commute presque.

Si  $K \subseteq U$  et  $L \subseteq V$  sont deux compacts, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cap L)) & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus K) \oplus H^m(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cup L)) \longrightarrow H^{m+1}(M, M \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \dots & \longrightarrow & H^m(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) & \longrightarrow & H^m(U, U \setminus K) \oplus H^m(V, V \setminus L) & \longrightarrow & H^m(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) \dots \\ & & \downarrow \mu_{K \cap L} \sim & & \downarrow \mu_{K \setminus \sim} \oplus \mu_{L \setminus \sim} & & \downarrow \mu_{K \cap L} \sim \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) & \longrightarrow & H_{n-m}(M) \longrightarrow H_{n-m-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

dont on veut en fait montrer que le carré de droite commute.

On pose  $A = M \setminus K$  et  $B = M \setminus L$ . On a la suite exacte courte  $0 \longrightarrow C^\bullet(M, A + B) \xrightarrow{\oplus} C^\bullet(M, A) \oplus C^\bullet(M, B) \xrightarrow{\sim} C^\bullet(M, A \cap B) \longrightarrow 0$ . Pour évaluer le morphisme connectant  $\delta$  sur une base de cohomologie représentée par un cocycle  $\varphi \in C^*(M, A \cap B)$ , on écrit  $\varphi : p\varphi_A - \varphi_B$  où  $\varphi_A \in C^*(M, A)$  et  $\varphi_B \in C^*(M, B)$ . On a  $\delta[\varphi] = [\delta\varphi_A] = [\delta\varphi_B]$ , car  $\delta\varphi = 0$ , d'où  $\delta\varphi_A = \delta\varphi_B$ . De façon similaire, pour toute classe d'homologie représentée par un cycle  $c \in C_i^U(M)$ , on a  $c = c_U + c_V$  où  $c_U \in C_i(U), c_V \in C_i(V)$ , et  $\delta[c] = [\partial c_U]$  où  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ .

La chaîne  $\mu_{K \cup L}$  peut être représentée par une chaîne  $\alpha = \alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V} + \alpha_{V \setminus K}$  où la chaîne  $\alpha_{U \cap V}$  représentée  $\mu_{K \cap L}$  et la chaîne  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{V \setminus K}$  représente  $\mu_K$ .

Soit  $[\varphi] \in H^m(M, M \setminus (K \cup L))$ . En appliquant  $\delta$ , on obtient  $[\delta\varphi_A]$ . Ensuite, dans  $H_{n-m-1}(U \cap V)$ , on obtient  $[\alpha_{U \cap V} \frown \delta\varphi_A] = [\partial\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A]$ , car  $\partial(\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A) = (-1)^m(-\alpha_{U \cap V} \frown \delta\varphi_A + \partial\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A)$  et  $\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A$  est une chaîne dans  $U \cap V$ . D'autre part, dans  $H_{n-m}(M)$ , on obtient  $[\alpha \frown \varphi]$ . On a  $\alpha \frown \varphi = (\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi) + (\alpha_{U \cap V} \frown \varphi) + \text{alf}_{V \setminus K} \frown \varphi$ . Donc  $\delta[\alpha \frown \varphi] = [\partial(\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi)] \in H_{n-m-1}(U \cap V)$ . On a comme  $\delta\varphi = 0$ ,  $\partial(\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi) = (-1)^m \partial\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi = (-1)^m \partial\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi_A = (-1)^{m+1} \partial\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A$ , l'avant-dernière égalité ayant lieu, car  $\varphi_B$  est nul sur les chaînes dans  $B = M \setminus L$ , toute cela car  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}) \cap \varphi_A = 0$  et  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V})$  est une chaîne dans  $U \setminus K$ ,  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$  représentant  $\mu_K$ . ■

### Lemme

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  où  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$  est une suite d'ouverts. Si  $D_{U_i} : H_c^m(U_i) \rightarrow H_{n-m}(U_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  est un isomorphisme, alors  $D_M : H_c^m(M) \rightarrow H_{n-m}(M)$  est aussi un isomorphisme.

▷ Par le théorème d'excision, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le groupe  $H_c^m(U_i)$  peut être vu comme limite inductive des  $H^m(M, M \setminus K)$  où  $K$  parcourt les compacts de  $U_i$ . Par conséquent, on a les morphismes naturels  $H_c^m(U_i) \rightarrow H_c^m(U_{i+1})$ , donc on peut considérer  $\lim H_c^m(U_i)$  qui est isomorphe à  $H_c^m(M)$ . Il reste à démontrer que  $\lim H_{n-m}(U_i) \simeq H_{n-m}(M)$ , ce qui est un exercice facile. ■

### Exemple fondamental. (Dualité de Poincaré pour les groupes de cohomologie de de Rham)

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . On note  $H_\Omega$  la cohomologie de de Rham sur  $M$ . On a une application bilinéaire

$$\begin{aligned} H_{\Omega,c}^p(M) \times H_\Omega^q(M) &\longrightarrow H_\Omega^{p+q}(M) \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto [\omega \wedge \eta] \end{aligned}$$

puis une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \int : H_{\Omega,c}^k(M) \times H_\Omega^{n-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

pour  $p, q, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Alors :

### Théorème

La forme bilinéaire  $\int$  est non dégénérée.

**Corollaire**

Le morphisme  $H_{\Omega,c}^k(M) \rightarrow (H_{\Omega}^{n-k}(M))^*$  est un isomorphisme.

**Corollaire**

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ , compacte et  $R$ -orientée. Alors

$$\beta_i(M; R) = \beta_{n-i}(M; R)$$

pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Corollaire. (*Cohomologie en degré de dimension d'une variété orientable*)**

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  connexe, compacte et  $R$ -orientable. Alors  $H^n(M) \simeq \mathbb{Z}$ .

▷ En effet, la dualité de Poincaré s'applique à  $H_0(M) = \mathbb{Z}$ . ■

En se rappelant le lien entre cup et cap produits, on a :

**Corollaire. (*Relations de la dualité de Poincaré avec le cup-produit*)**

Soient  $X$  un espace topologique. Soient  $k, l \in \mathbb{N}$ . Soient  $\varphi \in C^k(X; R), \psi \in C^l(X; R)$ . Le morphisme  $\varphi \cupdot: C^l(X; R) \rightarrow C^{k+1}(X; R)$  coïncide avec le morphisme  $\text{Hom}(C_l(X; R), R) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}(X; R), R)$  dual à  $\cupdot \varphi$ .

Au niveau des groupes d'homologie et de cohomologie, on obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^l(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_l(X; R), R) \\ \varphi \cupdot \downarrow & & \downarrow (\cupdot \varphi)^* \\ H^{k+l}(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{k+1}(X; R), R). \end{array}$$

**7.2.2.2 Dualité de Poincaré proprement dite****Théorème. (*Dualité de Poincaré*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ , compacte et  $R$ -orientée. On prend  $[M]$  une classe fondamentale.

(i) Si  $R$  est un corps, la forme bilinéaire *accouplement de torsion*

$$\begin{aligned} H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) &\longrightarrow R \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto (\varphi \cupdot \psi)[M]. \end{aligned}$$

est non dégénérée pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

(ii) Si  $R = \mathbb{Z}$ , la forme bilinéaire sur les parties libres

$$H^k(M; R)/H^k(M; R)^{\text{tor}} \times H^{n-k}(M; R)/H^{n-k}(M; R)^{\text{tor}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

est unimodulaire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Considérons l'application

$$H^{n-k}(M, R) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_{n-k}(M; R), R) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}(H^k(M; R), R).$$

Ce morphisme composé envoie  $\psi \in H^{n-k}(M; R)$  sur le morphisme  $\varphi \mapsto \psi([M] \frown \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$ .

Si  $R$  est un corps, ou si  $R = \mathbb{Z}$  et on passe à la torsion, il est possible de montrer que tous les modules apparaissant ici sont de type fini et que le morphisme  $h$  est un isomorphisme. Sous ces hypothèses, la composée est donc un isomorphisme. On vérifie enfin que l'autre morphisme associé est un isomorphisme en utilisant l'anti-commutativité du cup-produit. ■

### Corollaire. (*Caractéristique d'Euler en dimension $2k+1$* )

La caractéristique d'Euler d'une variété compacte de dimension impaire est nulle.

▷ Remarquons que la caractéristique d'Euler est bien définie, car notre variété  $M$  est compacte. Pour calculer la caractéristique d'Euler, on peut toujours travailler sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$  qui est un corps. Alors  $\chi(M) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim(H_i(M; \mathbb{Z}_2)) = \sum_{i \in I} (-1)^i b_i(M)$ . On peut appliquer le théorème de dualité, car toute variété est  $\mathbb{Z}_2$ -orientable :  $H^p(M; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-p}(M; \mathbb{Z}_2)$  pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , d'où l'annulation de la somme et  $\chi(M) = 0$ . ■

### Corollaire

Soit  $M$  une variété connexe compacte non orientable de dimension 3. Alors que le groupe  $H_1(M)$  est infini.

▷ Par le corollaire précédent,  $\chi(M) = 0$ . De plus,  $H_3(M) = 0$ , car  $M$  est non orientable. De plus,  $\chi(M) = \text{rg}(H_0) - \text{rg}(H_1) + \text{rg}(H_2) - \text{rg}(H_3)$  et  $\text{rg}(H_0) = 1$ . Si  $H_1(M)$  qui est de type fini car  $M$  a une structure de *CW-complexe*, est fini, *i.e.*  $\text{rg}(H_1) = 0$ , on a  $\chi(M) = 1 + \text{rg}(H_2) > 0$ , absurde, d'où le résultat. ■

### Exercice 13 (*Homologie des variétés cellulaires*)

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$  qui soit un *CW-complexe fini*.

1. Montrer que si  $M$  est orientable, alors  $H_{n-1}(M)$  est sans torsion.
2. Montrer que si  $M$  est non orientable, alors  $H_{n-1}(M)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

3. Montrer qu'en dimension 4, si  $M$  est orientable et si  $H_1(M) = 0$ , alors tous les  $H_i(m)$  pour  $i \leq 4$  sont sans torsion.
4. Donner un exemple de variété topologique  $N$  connexe compacte orientable de dimension 4 telle que  $H_2(N)$  ait au moins un élément de torsion non trivial.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On a  $H_0(M) = \mathbb{Z}$  par connexité d'où  $H^n(M) = \mathbb{Z}$  par dualité de Poincaré sur une compacte orientable, d'où par la formule des coefficients universels en type fini,  $H_{n-1}(M)$  sans torsion.
2. De même, mais plus dur.
3.  $H_3(M)$  est sans torsion d'après la première question. Pour  $H_4(M)$  et pour  $H_0(M)$ , c'est  $\mathbb{Z}$  qui est sans torsion.  $H_1(M) = 0$  est bien sûr sans torsion. Enfin, on en déduit  $H^3(M) = 0$  par dualité, et par la formule des coefficients universels, il n'y a pas de torsion dans  $H_2(M)$ .
4. On a alors  $H_2(M) = H^2(M)$ . On a un revêtement double  $M \rightarrow N$ . On cherche  $\tau : M \rightarrow M$  une involution sans point fixe et qui préserve l'orientation ; le quotient par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est alors de torsion. Prenons le simplexe connexe  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ . Il est isomorphe à la quadrique sans points réels  $X_1^2 + \dots + X_4^2 = 0$  qui donc convient.

### 7.2.2.3 Anneaux de cohomologie

**Définition. (*Anneau de cohomologie*)**

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $X$  un espace topologique. L'*anneau de cohomologie* de  $X$  est l'algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée de degré  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H^\bullet(X; R) = H^*(X; R) := \sum_{k \in \mathbb{N}} H^k(X; R)$$

munie de la multiplication donnée par le cup-produit pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$  par  $H^k(X; R) \times H^l(X; R) \longrightarrow H^{k+l}(X; R)$ .

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \smile \beta$$

Cet anneau est donc gradué commutatif au sens où les éléments commutent au signe près lequel est déterminé par le produit de leurs degrés :  $(-1)^{kl}$ .

**Définition. (*Longueur de cup*)**

La *longueur de cup* d'un espace topologique  $X$  sur un anneau commutatif unitaire  $R$  est l'invariant numérique donné par le nombre maximal d'éléments gradués de degrés  $\geq 1$  qui ne s'annulent pas lorsque multipliés.

**Exercice 14 (Quelques calculs de cohomologie)**

1. Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et la longueur de cup du tore  $S^1 \times S^1$ .

2. Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et la longueur de cup de la bouteille  $\mathcal{K}$ .
3. Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et la longueur de cup de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Calculer l'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et la longueur de cup de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
5. En déduire les résultats pour  $C\mathbb{P}^\infty$  et  $\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ .

▷ **Éléments de réponse.**

- 1.
- 2.
3. On a  $H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et est nul sinon. Ainsi,  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ . Considérons  $H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^p(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{k+l}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

$$(\psi, \varphi) \longmapsto \psi \smile \varphi$$

Montrons que  $H^0(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^{n+1})$  en tant qu'anneaux. Il s'agit de voir que si  $[\alpha] \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est non nul, alors  $[\alpha]^k \in H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est non nul pour  $k \leq n$ . Or  $[\alpha]^{n-1} \neq 0 \iff [\alpha] \smile [\alpha]^{n-1} \neq 0$  et la dualité de Poincaré le montre, car c'est la non-dégénérescence d'une certaine forme linéaire.

On montre maintenant par récurrence. Pour  $n = 1$ , c'est bon, c'est le produit sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Pour l'héritéité,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$  donne lieu à  $i^* : H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  morphisme d'anneau. Alors  $i^*([\alpha]^k) = i^*([\alpha])^k \neq 0$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Puis, il reste à voir que  $[\alpha] \smile [\alpha]^n \neq 0$ , ce qui est vrai par la dualité de Poincaré encore une fois.

La longueur de cup d'un espace projectif est égale à sa dimension.

- 4.
5. On a  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]$  et  $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

#### 7.2.2.4 Signature d'une variété

L'homologie en dimension du milieu, *i.e.*  $\approx \frac{n}{2}$ , est une question intéressante qui donne lieu à des formes symétriques non dégénérées par la dualité de Poincaré. En particulier, on peut s'intéresser aux invariants de ladite forme.

##### Définition. (*Signature d'une variété, parité d'une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique compacte sans bord orientable de dimension  $n$  divisible par  $k$ ,  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque  $M$  est a fortiori  $\mathbb{Q}$ -orientable, on obtient la forme bilinéaire symétrique<sup>a</sup> non dégénérée

$$\begin{aligned} H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto (\varphi \smile \psi)[M]. \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique associée  $(s, t)$  où  $s$  est le nombre de carrés positifs et  $t$  le nombre de carrés négatifs dans la décomposition de Gauss de cette forme, permet de

définir un entier noté  $\sigma(M) = s - t$  appelé *signature* de la variété  $M$ .

On dit que  $M$  est *paire* si  $\sigma(M)$  est paire et *impaire* sinon.

<sup>a</sup> Par la formule d'anticommunatativité associée à  $(2k, 2k)$ .

### Exercice 15 (*Petite étude du tore en dimension 4*)

1. Montrer que  $\mathbb{T}_2 = S^2 \times S^2$  est orientable.
2. Calculer que  $H^2(\mathbb{T}_2)$  est sans torsion.
3. En déduire la signature de  $\mathbb{T}^2$ .

### Exercice 16 (*Comparaison de la signature et de la caractéristique d'Euler*)

Soit  $M$  une variété topologique compacte orientée de dimension  $4k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  et la signature  $\sigma(M)$  sont de même parité.

▷ Éléments de réponse.

Par compacité, la caractéristique d'Euler poincaré est bien définie. Montrons que  $\sigma(M) = \sigma = \chi(M)$  [2]. Puisque  $M$  est orientée, par la dualité de Poincaré, on a  $H^p(M; \mathbb{Q}) \simeq H_{4k-p}(M; \mathbb{Q})$  pour  $p \in \llbracket 0, 4k \rrbracket$  d'où  $\dim H_p(M; \mathbb{Q}) = \dim H_{4k-p}(M; \mathbb{Q})$  et en termes de nombres de Betti,  $b_p = \dim H_p(M; \mathbb{Q}) = b_{4k-p}$  et comme  $(-1)^{4k-i} = (-1)^i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a donc

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{4k} (-1)^i b_i = 2 \sum_{i=0}^{2k-1} b_i + b_{2k} \equiv b_{2k} \quad [2].$$

D'autre part,  $\sigma = b_+ - b_- \equiv b_+ + b_- \equiv b_{2k}$  [2] ce qui permet de conclure.

### Exercice 17

Montrer que la signature du variété compacte orientée de dimension  $4k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , corborante à zéro est nulle.

### Exercice 18

Montrer que  $\mathbb{CP}^2$  n'est pas homotopiquement équivalent à  $S^2 \vee S^4$ .

▷ Éléments de réponse.

Remarquer que ces deux espaces ont la même homologie, et donc que l'exemple est intéressant.

### 7.2.3 Autres formes de dualité

#### 7.2.3.1 Dualité de Poincaré pour les variétés à bord

Définition-propriété. (*Classe fondamentale relative*)

Soit  $M$  une variété topologique à bord de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est compacte et  $R$ -orientable.

Le bord  $\partial M$  de  $M$  admet un voisinage ouvert tubulaire dans  $M$  homéomorphe à  $\partial M \times [0,1[$  et on l'y identifie. Pour tout  $\varepsilon \in ]0,1[$ , on a un isomorphisme naturel

$$H_n(M, \partial M; R) \simeq H_n(M \setminus \partial M, \partial M \times ]0, \varepsilon[; R).$$

Ainsi, une  $R$ -orientation de  $M$  donne une classe  $[M] \in H_n(M, \partial M; R)$ . L'image de cette classe par le morphisme habituel  $H_n(M, \partial M; R) \rightarrow H_{n-1}(\partial M; R)$  est  $[\partial M] \in H_{n-1}(\partial M; R)$ .



FIGURE 7.2.2 : Classe fondamentale relative. —

Théorème. (*Isomorphisme de Poincaré pour les variétés à bord*)



Supposons que le bord  $\partial M$  d'une variété topologique  $M$  compacte,  $R$ -orientable et de dimension  $n$  soit présenté comme réunion disjointe  $\partial M = A \sqcup B$  où  $A$  et  $B$  sont donc des réunions de composantes connexes de  $\partial M$ . Alors

$$\begin{aligned} D_M: \quad H^k(M, A; R) &\longrightarrow H_{n-k}(M, B; R) \\ \varphi &\longmapsto [M] \cap \varphi \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et donc  $H^k(M, A; R) \simeq H_{n-k}(M, B; R)$ .

▷ Considérons le cas  $B = \emptyset$ . On a  $H^k(M, \partial M; R) \simeq H_c^k(M \setminus \partial M; R)$  et  $H_{n-k}(M; R) \simeq H_{n-k}(M \setminus \partial M; R)$ . On peut utiliser le théorème d'isomorphisme de Poincaré.

Dans le cas général, on a le diagramme commutatif à signe près :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(M, \partial M) & \longrightarrow & H^k(M, A) & \longrightarrow & H^k(\partial M, A) & \longrightarrow & H^{k+1}(M, \partial M) & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow [M] \sim & & \downarrow [M] & & \downarrow \simeq \\ & & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k}(M, B) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(M) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

où l'on ne précise pas toujours l'anneau  $R$  des coefficients. Le lemme des cinq conclut. ■

### Théorème

Soit  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est compacte et orientable. Soit  $K \subseteq M$  un « bon » compact. On a  $H_m(M, M \setminus K) \simeq H^{n-m}(K)$  pour tout entier  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Soit  $K \subseteq U$  un voisinage ouvert. On a le diagramme commutatif à signe près

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_m(M \setminus K) & \longrightarrow & H_m(M) & \longrightarrow & H_m(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{m-1}(M \setminus K) & \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow [M] \sim & & \uparrow \simeq & & \uparrow & \\ & & H^{n-m}(M \setminus , U \setminus K) & & H_m(U, U \setminus K) & & H_{m-1}(U, U \setminus K) & & H^{n-m+1}(M \setminus K, U \setminus K) & \\ & & \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \simeq & \\ \dots & \longrightarrow & H^{n-m}(M, U) & \longrightarrow & H^{n-m}(M) & \longrightarrow & H^{n-m}(U) & \longrightarrow & H^{n-m+1}(M, U) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

où la classe fondamentale  $[M]$  de  $M$  est représentée par un cycle qui est la somme d'une chaîne dans  $M \setminus K$  et une chaîne dans  $U$  représentant des éléments de  $H_n(M \setminus K, U \setminus K)$  et  $H_n(U, U \setminus K)$ , respectivement ; ce sont les éléments utilisés pour définir les flèches correspondantes du diagramme.

On considère des voisinages ouverts de plus en plus petits et on passe à la limite inductive. La première flèche verticale devient l'isomorphisme de Poincaré  $H_c^{n-m}(M \setminus K) \simeq H_m(M \setminus K)$ . On obtient un isomorphisme  $H_m(M, M \setminus K) \simeq \varinjlim H^{n-m}(U)$ . Sous certaines hypothèses sur  $K$ , notamment que c'est un « bon » compact, on a  $\varinjlim H^{n-m}(U) \simeq H^{n-m}(K)$ . ■

#### 7.2.3.2 Dualité d'Alexander

Généralisons.

Soit  $M$  une variété topologique orientable de dimension  $n$ . Soit  $\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$  une orientation,  $G$  un groupe abélien. Si  $L \subseteq K \subseteq M$  sont des sous-ensembles compacts, on pose  $\check{H}^m(K, L; G) = \varinjlim_m \{ (U, V; G) \mid (U, V) \supseteq (K, L), U, V \text{ ouverts} \}$ , groupes isomorphes pour ceux

qui connaissent aux groupes de cohomologie de Čech. Si  $K$  et  $L$  sont raisonnables, par exemples, des  $CW$ -complexes ou des variétés topologiques, ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie singulière correspondants.

On a un cap-produit

$$\left[ \frac{C_n(V) + C_n(U \setminus L)}{C_n(U \setminus K)} \right] \times C^m(U, V; G) \rightarrow C_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G)$$

donné par  $(b+c) \frown f = b \frown f + c \frown f = c \frown f$ .

On a  $H_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G) \simeq H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$  et  $H_n\left(\frac{C_\bullet(V) + C_\bullet(U \setminus L)}{C_\bullet(U \setminus K)}\right) \simeq H_n(U, U \setminus K) \simeq H_n(M, M \setminus K)$ , car  $\{V, U \setminus L\}$  est un recouvrement ouvert de  $U$ .

On obtient un cap-produit

$$H_n(M, M \setminus K) \times H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Pour tout compact  $K' \supseteq K$ , on peut considérer la classe  $\mu_{K'} = \mu_{M|K'} \in \Gamma(K', \tilde{M}_{\mathbb{Z}}) \simeq H_n(M, M \setminus K')$ , et on a un morphisme  $\mu_{K'} \frown: H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$ . Il est défini par  $[f] \mapsto \Gamma \frown [f] = [c \frown f] \in H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$ , où  $\Gamma \in H_n(M, M \setminus K')$  est représenté par  $f + c + d \in C_n(V) + C_n(U \setminus L) + C_n(M \setminus K)$ . En passant à la limite inductive, on obtient le morphisme

$$\mu \frown: \check{H}^m(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

### Théorème. (Dualité de Poincaré-Alexander-Lefschetz)

Soit  $M$  une variété topologique orientable de dimension  $n$ . Soit  $\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$  une orientation,  $G$  un groupe abélien. Le morphisme  $\mu \frown: \check{H}(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$  est un isomorphisme pour tout  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

▷ On reprend les notations du laïus. Le cas  $L = \emptyset$  a été déjà essentiellement considéré. Le cas général peut être déduit du cas  $L = \emptyset$  à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^m(K, L) & \longrightarrow & \check{H}^m(K) & \longrightarrow & \check{H}^m(L) & \longrightarrow & \check{H}^{m-1}(K, L) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H_{n-m-1}(M \setminus L, M \setminus K) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

à coefficients dans  $g$ . Sa commutativité est laissée en exercice. ■

### Corollaire. (Dualité d'Alexander)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \check{H}^{n-i-1}(K; G)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

▷ On a  $\check{H}^{n-i-1}(K; G) \simeq H_{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G)$ . ■

### 7.2.3.3 Dualité de Thom

#### Théorème

Soit  $F$  un corps. Soit  $N$  une variété topologique compacte orientée de dimension impaire  $2n + 1$  où  $n \in \mathbb{N}$ , à bord connexe  $M$ . Alors  $\dim(H^n(M; F))$  est paire et  $\dim(\text{Ker}(i_* : H_n(M; F) \rightarrow H_n(N; F))) = \dim(\text{Im}(i^* : H^n(N; F) \rightarrow H^n(M; F))) = \frac{1}{2} \dim(H^n(M; F))$  où  $i : M \hookrightarrow N$  est l'inclusion.

De plus, pour tous  $\alpha, \beta \in \text{Im}(i^*)$ , on a  $\alpha \smile \beta = 0$ .

▷ On a le diagramme commutatif à signe près

$$\begin{array}{ccccc} H^n(N; F) & \xrightarrow{i^*} & H^n(M; F) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(N, M; F) \\ [M] \frown \downarrow & & & & \downarrow [N] \frown \\ H_n(M; F) & \xrightarrow{i_*} & H_n(N; F) & & \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. On a  $[M] \frown \text{Im}(i^*) = [M] \frown \text{Ker}(\delta^*) = \text{Ker}(i_*)$ .

Donc  $\text{rg}(i^*) = \dim(\text{Im}(i^*)) = \dim(\text{Ker}(i_*)) = \dim(H^n(M)) - \text{rg}(i_*)$ . Par conséquent,  $\dim(H^n(M; F)) = 2\text{rg}(i^*) = 2\dim(\text{Ker}(i_*))$ .

Si  $\alpha', \beta' \in H^n(N; F)$ , alors  $\delta^*(i^*(\alpha') \smile i^*(\beta')) = \delta^*i^*(\alpha' \smile \beta') = 0$ . De plus  $\delta^* : H^{2n}(M; F) \rightarrow H^{2n+1}(N, M; F)$  est injectif, car ce morphisme est Poincaré-dual à  $i_* : H_0(M; F) \rightarrow H_0(N; F)$ . ■

#### Corollaire. (*Dualité de Thom*)

Pour toute  $N$  une variété topologique compacte orientable de dimension congrue à 1 modulo 4, i.e.  $4k + 1$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , à bord connexe  $M$ , la signature de  $M$  est nulle.

▷ On pose  $\dim(H^{2k}(M; \mathbb{Q})) = 2m$  où  $m \in \mathbb{N}$ . Notons  $r$  le nombre de carrés positifs de la forme bilinéaire  $H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}, (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M]$ . D'après le théorème précédent, l'espace  $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$  contient un sous-espace totalement isotrope de dimension  $m$ . Donc  $r = 2m - r = m$ . ■

La dualité de Thom a des conséquences fortes en termes de COBORDISME.

### 7.2.3.4 Quelques commentaires concernant variétés topologiques et variétés lisses

#### Exercice 19

Soit  $M$  une variété topologique fermée, simplement connexe et donc orientée, et de dimension 4. Vérifier que l'homologie et la cohomologie de  $M$  est sans torsion. En déduire que la forme bilinéaire symétrique fournie par le cup-produit

$$\beta_M : H^2(M) \times H^2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est unimodulaire.

### Théorème. (*Théorème d'Arf*)

Soit  $E \simeq \mathbb{Z}^r$  un groupe abélien libre de type fini et soit  $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$  une forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire, i.e.  $\beta(\alpha, \alpha) = 0$  [2] pour tout  $\alpha \in H^2(M)$ . Alors 8 divise  $\sigma(\beta)$ .

### Exemples. (*Parité des variétés*)

1. Considérons  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ . Elle est impaire, car la matrice de la forme  $\beta$  est :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
2. Considérons  $S^2 \times S^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Elle est paire, car la matrice de la forme  $\beta$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Remarque.* Inversement, pour tout nombre entier  $s$  divisible par 8, il existe une forme bilinéaire symétrique à valeurs entières unimodulaire paire dont la signature est  $s$ . On peut construire une telle forme à l'aide de l'opération de la somme directe à partir des formes  $\pm E_8$ .

Ici,  $E_8$  est la forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire définie positive de rang 8 dont

la matrice de Gram dans une certaine base est 
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & 0 & & & \\ & & & -1 & 0 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
 et  $-E_8$

est la forme  $E_8$  dont toutes les valeurs sont multipliées par  $-1$ .

Alors **il existe une variété topologique fermée simplement connexe orientée  $N$  de dimension 4, appelée  $E_8$ -variété de Freedman, dont la forme bilinéaire  $\beta_N$  est isomorphe à  $E_8$  ..**

### Théorème. (*Théorème de Rokhlin*)

Si  $M$  est une variété lisse fermée simplement connexe orientée de dimension 4, et si la forme bilinéaire  $\beta_M$  est paire, alors la signature  $\sigma(M)$  de  $M$  est divisible par 16.

### Corollaire

La  $E_8$ -variété de Freedman n'admet pas de structure lisse.

## 7.2.4 Théorie des intersections

### 7.2.4.1 Classes de Thom

#### Définition. (*Produit d'intersection*)

Soit  $M$  une variété topologique à bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et orientable. On note  $D : H^{n-i}(M) \rightarrow H_i(M, \partial M)$  et  $D : H^{n-i}(M, \partial M) \rightarrow H_i(M)$  tous les isomorphismes de Poincaré pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On définit le *produit d'intersection*

- :  $H_i(M) \times H_j(M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$
- :  $H_i(M, \partial M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$
- :  $H_i(M, \partial M) \times H_k(M, \partial M) \rightarrow H_{i+j-n}(M, \partial M)$

pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  par

$$\begin{aligned} a \bullet b &= D(D^{-1}(b) \smile D^{-1}(a)) \\ &= [M] \smile (D^{-1}(b) \smile D^{-1}(a)) \\ &= ([M] \smile D^{-1}(a)) \smile D^{-1}(b) \\ &= a \smile D^{-1}(b). \end{aligned}$$

#### Propriétés. (*Propriétés calculatoires du produit d'intersection*)

Dès que ceci a un sens,

1. (*Associativité du produit d'intersection*)  $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ ;
2. (*Commutation du produit d'intersection*)  $a \bullet b = (-1)^{n-\deg(a)(n-\deg(b))} b \bullet a$ .

#### Reformulation pratique. (*Fibré en disques fermés*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $N$  un espace topologique. Si  $W$  est un espace topologique,  $\pi : W \rightarrow N$  est un *fibré en  $k$ -disques fermés* si tout point  $x \in N$  admet un voisinage ouvert  $U \ni x$  tel que pour tout  $y \in U$ , l'homéomorphisme  $\varphi_y : p^{-1}(U) \rightarrow U \times D^k \subseteq U \times \mathbb{R}^k$  compatible avec les projections sur  $U$  tels que pour deux ouverts arbitraires  $U$  et  $V$  trivialisant  $\pi$  et tout point  $y \in U \cap V$ , l'homéomorphisme  $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_y : \{y\} \times D^k \rightarrow \{y\} \times D^k$  soit linéaire.

#### Définition. (*Classe de Thom*)

Soient  $N, W$  deux variétés topologiques sans bord orientées avec  $N$  compacte. Soit  $\pi : W \rightarrow N$  un fibré en  $k$ -disques fermés,  $k \in \mathbb{N}$ . On voit  $N$  comme une sous-variété de  $W$  par la section zéro  $i : N \hookrightarrow W$ . La *classe de Thom* du fibré  $\pi$  est  $\tau : D_W^{-1}(i_*[N]) \in H^k(W, \partial W)$ . De façon équivalente,  $[W] \smile \tau = i_*[N]$ . On peut voir  $\tau$  comme élément de  $H^k(W, W \setminus N) \simeq H^k(W, \partial W)$ .

**Définition. (*Morphismes de transfert de Hopf-Freudenthal*)**

Soient  $M$ , deux variétés compactes à bord orientées de dimension  $m$  et  $n$  respectivement. Soit  $f : (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$  une application continue entre paires. On considère les morphismes

$$f^! : H^{n-p}(N) \rightarrow H^{m-p}(M), f_! : H_{m-p}(N, \partial N) \rightarrow H_{n-p}(M, \partial M)$$

pour  $p \in \llbracket 0, \min(m, n) \rrbracket$  définis par  $f^! = D_M^{-1} f_* D_N$ .

De façon similaire, on a

$$f_! : H_{m-p}(M) \rightarrow H_{n-p}(N), f_! : H_{m-p}(M, \partial M) \rightarrow H_{n-p}(N, \partial N)$$

pour  $p \in \llbracket 0, \min(m, n) \rrbracket$  définis par  $f_! = D_n f^* D_M^{-1}$ .

Les  $f^!, f_!$  sont appelés *morphismes de transfert*.

**Théorème. (*Isomorphismes de Thom*)**

Si  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ , alors on a les *isomorphismes de Thom* pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

- (i)  $H^p(N) \xrightarrow{\pi^*} H^p(W) \xrightarrow{\sim} H^{p+k}(W, \partial W)$  qui coïncide avec  $i^!$ ,
- (ii)  $H_{p+k}(W, \partial W) \xrightarrow{\sim} H_p(W) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N)$  qui coïncide avec  $i_!$ .

▷ Les morphismes  $i^!$  et  $i_!$  sont des isomorphismes. On a pour  $\alpha \in H^p(W)$  et  $\beta = i^*(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} i^!(\beta) &= D_W^{-1} i_* D_N(\beta) \\ &= D_W^{-1} i_*([N] \frown i^*(\alpha)) \\ &= D_W^{-1}(i_*[N] \frown \alpha) \\ &= D_W^{-1}(([W] \frown \tau) \frown \alpha) \\ &= D_W^{-1}([W] \frown (\alpha \cup \tau)) \\ &= \alpha \cup \tau = \pi^*(\beta) \cup \tau. \end{aligned}$$

Le clacul est similaire pour  $i_!$ . ■

**Lemme**

Soit  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $N$  une variété Supposons que  $N$  est connexe. Soit  $A \subseteq N$  un fermé. On pose  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  et  $\partial \tilde{A}$  et  $\partial \tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$ . On a  $\check{H}^p(\tilde{A}, \partial \tilde{A}) = 0$  pour tout  $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

▷ On utilise le lemme local-global pour les compacts. ■

**Lemme**

Soit  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $N$  une variété Supposons que  $N$  est connexe. Soit  $A \subseteq N$  un fermé. On pose  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  et  $\partial\tilde{A}$  et  $\partial\tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$ . Si  $A = \{x\}$  où  $x \in N$ , alors la restriction  $\tau_x \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$  de  $\tau$  est un générateur et dans ce cas  $(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \simeq (D^k, S^{k-1})$ .

▷ Supposons que  $\tau_x = 0$  pour un certain  $x \in N$ . Dans ce cas, il existe un voisinage de  $x$  tel que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y$  de ce voisinage. Puisque  $N$  est connexe, on obtient que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y \in N$ .

Soit  $P_n(A)$  l'affirmation que la restriction  $\tau_A \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$  de  $\tau$  est nulle, où  $A \subseteq N$  est un fermé. Si  $A \subseteq U$  est un sous-ensemble fermé et convexe d'un certain ouvert euclidien  $U \subseteq N$ , alors  $P(A)$  est vraie. D'autre part pour appliquer le lemme local-global pour les compacts, on peut utiliser le diagramme commutatif suivant de type Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^k(W, \partial W) & \longrightarrow & H^k(W, \partial W) \oplus H^k(W, \partial W) \\ & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^k(\tilde{A} \cup \tilde{B}, \partial(\tilde{A} \cup \tilde{B})) & \longrightarrow & \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \oplus \check{H}^k(\tilde{B}, \partial\tilde{B}) \end{array}$$

et pour le dernier point, on peut utiliser le fait que le passage à la limite inductive commute avec la considération de groupes  $\check{H}$ . Par suite,  $P_N(N)$  est vraie, ce qui contredit  $\tau \neq 0$ . Si  $\tau_x \neq 0$  est divisible dans  $H^k(D^k, S^{k-1}) \simeq \mathbb{Z}$  par un nombre premier  $p$ , alors on peut changer le groupe des coefficients pour  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . ■

**Corollaire**

Si  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ , si de plus elle est connexe, la classe  $\tau \in H^k(W, \partial W)$  est l'unique classe à signe près dont la restriction sur chaque fibre de  $\pi$  est un générateur.

▷ Le cup-produit avec  $\tau$  donne l'isomorphisme de Thom

$$H^0(N) \simeq H^0(W) \rightarrow H^k(W, \partial W).$$

Donc  $\tau \in H^k(W, \partial W) \simeq \mathbb{Z}$  est un générateur. ■

**Théorème. (*Théorème d'isomorphisme de Thom*)**

Pour tout compact  $A \subseteq N$ , l'application

$$\pi^*(\cdot) \smile \tau_A : \check{H}^p(A) \rightarrow \check{H}^{p+k}(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$$

est un isomorphisme.

▷ On peut de nouveau utiliser le lemme local-global pour le compacts. ■

Soient maintenant  $N, W$  deux variétés lisses compactes orientées de dimension respectivement  $n$  et  $n+k$  où  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $i : N \hookrightarrow W$  un plongement lisse. On suppose que  $N$  est sans bord mais que le bord de  $W$  peut être non vide, mais alors disjoint de  $i(N)$ .

On pose  $[N]_W = i_*[N]$  et  $\tau_N^W = D_W^{-1}([N]_W) \in H^k(W)$ . Ici  $D_W^{-1} : H_n(W, \partial W) \rightarrow H^k(W)$ . La classe  $\tau_N^W$  qui s'appelle aussi *classe de Thom* est l'image de la classe de Thom du fibré normal  $\nu_N^W$  en  $k$ -disques de  $N$  dans  $W$  :

$$H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) \simeq h^k(W, W \setminus \text{tube}) \rightarrow H^k(W).$$

On a  $[W] \frown \tau_N^W = [N]_W$ .

Considérons maintenant deux sous-variétés lisses orientées  $M$  et  $N$  de dimensions respectivement  $m$  et  $n$  de  $W$ . Alors  $[M]_W \bullet [N]_W = ([W] \frown \tau_M^W) \bullet ([W] \frown \tau_N^W) = [W] \frown (\tau_M^W \smile \tau_N^W)$ .

Supposons que  $M$  et  $N$  soient transverses et que  $M \cap N$  soit connexe. On a  $\nu_{M \cap N}^N = \nu_M^W|_{M \cap N}$ . De plus,  $\tau_M^W$  se restreint à  $\tau_{M \cap N}^N$ , car la propriété de fournir par restriction un générateur du groupe de cohomologie relatif correspondant pour chaque fibre caractérise la classe de Thom à signe près. Par conséquent, en choisissant une orientation de  $M \cap N$  de façon appropriée,

$$\tau_{M \cap N}^N = i^*(\tau_M^W).$$

### Théorème. (*Classe de Thom d'une intersection transverse*)

Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-variétés lisses fermées orientées de dimensions  $m$  et  $n$  respectivement d'une variété lisse fermée orientée  $W$ . Si  $M$  et  $N$  sont transverses, alors

$$\tau_{M \cap N}^N = \tau_M^W \smile \tau_N^W,$$

ou de façon équivalente

$$[M \cap N]_W = [N]_W \bullet [M]_W$$

le produit d'intersection.

▷ On a :

$$\begin{aligned} [M \cap N]_W &= (i_{M \cap N}^W)_*[M \cap N] = (i_N^W)_*(i_{M \cap N}^N)_*[M \cap N] \\ &= (i_N^W)_*([N] \frown \tau_{M \cap N}^N) \\ &= (i_N^W)_*([N] \frown (i_N^W)^*\tau_M^W) \\ &= (i_N^W)_*[N] \frown \tau_M^W \\ &= ([W] \frown \tau_N^W) \frown \tau_M^W \\ &= [W] \frown (\tau_M^W \smile \tau_N^W) \\ [M \cap N]_W &= [N]_W \bullet [M]_W \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. ■

### 7.2.4.2 Classes d'Euler

On donne là un premier exemple de classe caractéristique dont la théorie générale sera développée plus tard.

#### Définition. (*Classe d'Euler*)

Soit  $i_N^W : N \hookrightarrow W$  un plongement lisse où  $N$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$  et  $W$  une variété lisse compacte orientée de dimension  $n+k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . La *classe d'Euler* du fibré normal de  $N$  dans  $W$  est  $e_N^W = (i_N^W)^*(\tau_N^W) \in H^k(N)$ .

#### Remarques.

1. Le cas général d'un fibré vectoriel de rang fini de base  $N$  peut être réduit à ce cas de fibré normal.
2. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^k(W, W \setminus \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(W) \ni \tau_N^W \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(\text{tube}) \simeq H^k(N) \ni e_N^W. \end{array}$$

Si le rang  $k$  du fibré est strictement plus grand que  $n$ , le groupe  $H^k(N)$  est trivial, donc  $e_N^W = 0$ .

#### Proposition

Soit  $N \hookrightarrow W$  un plongement lisse où  $N$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$  et  $W$  une variété lisse compacte orientée de dimension  $n+k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . S'il existe une section continue  $s$  du fibré normal de  $N$  dans  $W$  telle que  $s$  ne s'annule pas, alors  $e_N^W = 0$ .

▷ Une telle section  $s$  fournit une application continue  $s' : N \rightarrow \partial \text{tube}$  telle que la composition de  $s'$  avec la projection sur  $N$  soit l'identité. Donc la deuxième application dans la suite exacte

$$H^*(\text{tube}, \partial \text{tube}) \rightarrow H^*(\text{tube}) \rightarrow H^*(\partial \text{tube})$$

est injective. Par conséquent, la première application est nulle. ■

#### Exercice 20

1. Vérifier que si  $M$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$ , on peut parler de la classe d'Euler dans  $H^n(M)$  du fibré tangent de  $M$  et l'évaluation en  $[M]$  de cette classe d'Euler est la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  de  $M$ .
2. Si  $\pi : W \rightarrow M$  est un fibré lisse en  $k$ -disques fermés où  $N$  est une variété lisse fermée orientée et  $W$  est orientée, et si  $s : N \rightarrow W$  est une section lisse telle que  $s(N)$

intersecte la section zéro  $N$  transversalement, alors la classe Poincaré-duale de la classe  $[s(N) \cap N]_N$  coïncide avec la classe d'Euler du fibré.

## 7.3 Cobordisme

### 7.3.1 Homologie naïve des variétés à bord

On rappelle que la bonne définition du bord des espaces topologiques provient d'un argument de topologie algébrique : en effet, un point d'une variété à bord ne peut à la fois admettre un voisinage euclidien et un voisinage homéomorphe à un demi-espace dans lequel elle se situe sur le bord (dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  la dimension de la variété). En effet, en privant ces voisinages des images de ce point, l'un a une homologie relative nulle et l'autre, par excision, égale  $\mathbb{Z}$ .

**Théorème. (*Structure du bord d'une variété à bord*)**

Soit  $M$  une variété à bord de dimension  $n > 0$ . Alors  $\partial M$  est une variété sans bord de dimension  $n - 1$ , avec donc  $\partial(\partial M) = \emptyset$ .

**Corollaire. (*Homologie des variétés à bord*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $M_n$  la sous-classe de la classe des variétés topologiques réelles constituées des variétés à bord de dimension  $n$ . On définit  $\partial_n$  par l'opérateur qui à une variété de  $M_n$  associe son bord qui est une variété de  $M_{n-1}$ . Alors

$$\dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\partial} M_{n-1} \dots \dots \dots M_1 \xrightarrow{\partial} M_0$$

est une complexe de chaînes.

▷ Une variété sans bord est en particulier une variété à bord. Par le théorème,  $\partial^2 = 0$ . ■

### 7.3.2 Notion de cobordisme

#### 7.3.2.1 Définition et exemples

**Définition. (*Cobordisme*)**

Deux variétés compactes  $M_1, M_2$  de même dimension  $n$  sont *cobordantes* s'il existe une variété compacte à bord de dimension  $n + 1$  dont le bord est homéomorphe à leur réunion disjointe  $M_1 \sqcup M_2$ . On dit que cette variété est un *cobordisme* entre  $M_1$  et  $M_2$ .

On généralise bien sûr cette définition à un nombre quelconque nécessairement fini de variétés compactes.

**Exercice 21** (*Cobordisme entre variétés fermées*)

Justifier l'usage de la locution « nécessairement fini » dans la généralisation précédente.

▷ **Éléments de réponse.**

Le bord d'une variété compacte est un fermé d'un compact, donc compact. Ce ne peut être une somme infinie de compacts non vides.

**Propriété.** (*Relation de cobordisme*)

Le cobordisme sur la classe des variétés compactes de dimension  $n$  à  $n \in \mathbb{N}$  fixé est une relation d'équivalence.

## ▷ C'est clair. ■

**Définition.** (*Cobordisme à zéro*)

Une variété compacte est *cobordante à zéro* si elle est cobordante à  $\emptyset$  autrement si elle est homéomorphe au bord d'une variété de dimension un de plus.

**Propriété.** (*Caractéristique d'Euler d'une variété cobordante à zéro*)

La caractéristique d'Euler d'une variété cobordante à zéro est paire.

## ▷ TBC ■

**Exercice 22** (*Cobordismes en petites dimensions*)

1. (*Surfaces bordant des nœuds*) Montrer que toute variété compacte de dimension 1 est cobordante à zéro.
2. Montrer que toute surface topologique compacte orientable sans bord est cobordante à zéro.
3. Montrer que le plan projectif réel n'est pas cobordant à zéro.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il suffit de le montrer pour le cercle. Or c'est le bord d'une demi-sphère  $S^2_{\geq 0}$ .
2. Pour la sphère ou le tore, c'est visuel : il suffit de prendre la boule ou le tore solide. Pour les autres, c'est la même chose.
3. En effet, sa caractéristique d'Euler est  $1 \notin 2\mathbb{Z}$ .

On justifie que la théorie du cobordisme concerne les variétés compactes.

**Fait**

Si l'on enlève les hypothèses de compacité dans la définition de cobordisme, toutes les variétés sont cobordantes.

En effet, toute variété  $M$  est cobordante à zéro grâce au cylindre infini  $M \times \mathbb{R}_+$ .

**Exercice 23**

Soit  $N$  une variété topologique compacte cobordante à zéro par un cobordisme ayant une structure de  $CW$ -complexe fini induisant sur son bord une structure de sous-complexe. Montrer que  $\chi(N)$  est paire.

## ▷ Éléments de réponse.

Soit  $X$  un tel cobordisme. Si  $\dim(N)$  est impaire,  $\chi(N) = 0$  et c'est fini. Si  $\dim(N)$  est paire, truc magique : on pose  $Y = X \cup_{\partial X} X$ . Alors  $\chi(Y) = 2\chi(X) - \chi(\partial X)$  donc puisque  $\dim(Y) = \dim(X) = \dim(N) + 1$  est impaire et  $N = \partial X$ , et  $\chi(Y) = 0$ , on a  $\chi(N) = 2\chi(X)$  qui est paire.

**7.3.2.2 Cobordismes orientés****Définition. (*Cobordisme orienté*)**

Deux variétés compactes orientées  $M_1, M_2$  de même dimension  $n$  sont *cobordantes* (*en tant que variétés orientées*) s'il existe une variété compacte orientée à bord de dimension  $n+1$  dont le bord est homéomorphe à la réunion disjointe  $\overline{M_1} \sqcup M_2$  où  $\overline{M_1}$  est la variété  $M_1$  munie de l'orientation opposée à celle qui a été choisie en premier lieu.

**Définition. (*Cobordisme orienté à zéro*)**

Une variété compacte orientée est *cobordante à zéro* (*en tant que variété orientée*) si elle est cobordante à  $\emptyset$  en tant que variété orientée, autrement si elle est homéomorphe au bord d'une variété orientée de dimension un de plus.

*Remarque.* La définition précédente ne pose pas de problème puisque l'on peut sans problème renverser l'orientation de l'un ou l'autre des termes, car une variété est toujours homéomorphe à la variété d'orientation inverse.

**Corollaire. (*Dualité de Thom et cobordisme*)**

Une variété compacte connexe orientable sans bord cobordante à zéro de dimension divisible par 4 est de signature nulle.

▷ TBC ■

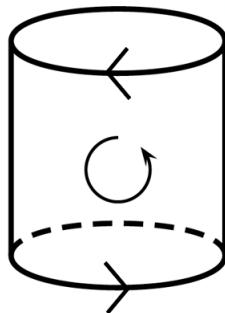


FIGURE 7.3.1 : *Orientation du cylindre à bord.* —

Ceci justifie la définition du cobordisme orienté. Voyons comment obtenir ces sens de rotation : la donnée d'une rotation sur, disons, le cercle du bas, est celle d'un vecteur tangent au cercle dans son plan et d'un vecteur vertical. Pour que ceux-ci soit induits par l'orientation du cylindre, il faut que ce premier soit orienté dans le sens antihoraire et le deuxième soit dirigé vers le haut, afin tout simplement de correspondre au cylindre. En admettant que ceci correspond au sens de tour antihoraire du cercle, pour le cercle du haut, seule la direction du vecteur horizontale changera, elle sera vers le bas, et donc le sens de rotation sur le cercle sera inversé.

#### Contre-exemple. (*Une variété non cobordante à zéro*)

$\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$  n'est pas cobordante à zéro dans le sens orienté.

On a  $\sigma(\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}) = 2 \neq 0$ , car  $\sigma(\mathbb{CP}^2) = 1$ .

Attention, pourtant,  $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$  est cobordante à zéro.

Montrons qu'il existe une variété compacte de dimension 2 dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ .

TBC

Cependant aussi,  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ , est cobordante à zéro dans le sens orienté.

TBC

□

#### Cobordisme et classes caractéristiques

Pour les variétés compactes lisses, une condition nécessaire et suffisante de cobordisme à zéro peut être formulée en termes de certaines classes caractéristiques, qui s'appellent classes de Stiefel-Whitney. C'est l'objet de la section suivante.

De façon similaire, pour les variétés compactes lisses orientées, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro dans le sens orienté peut être formulée en termes de classes de Stiefel-Whitney et de classes de Pontryagin.

## 7.4 Classes de Stiefel-Whitney

### 7.4.1 Axiomes de Stiefel-Whitney

**Définition.** (*Classe de Stiefel-Whitney*)

1. (*Définition des classes de Stiefel-Whitney*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À chaque  $\mathbb{R}^n$ -fibré, on associe une suite de classes de cohomologie  $\omega_i(\xi) \in H^i(B(\xi, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$  avec  $\omega_0(\xi) = 1$ ,  $\omega_i(\xi) = 0$  pour tout entier  $i > n$ . Ce sont les *classes de Stiefel-Whitney*.
2. (*Naturalité des classes de Stiefel-Whitney par tiré en arrière*) Soient  $\xi, \eta$  deux  $\mathbb{R}^n$ -fibrés. Si  $f : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$  est l'application canonique de base de l'application fibrée  $\check{f} : \xi \rightarrow \eta$ , alors  $\omega_i(\xi) = f^*\omega_i(\eta)$ .
3. (*Formule du produit de Whitney*) Si  $\xi, \eta$  sont deux fibrés vectoriels de même base, on a  $\omega_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k \omega_i(\xi) \smile \omega_{k-i}(\eta)$ .
4. Le fibré en droites tautologique  $\omega_1(\mathcal{O}_1^1)$  sur le cercle  $\mathbb{RP}^1$  est non nulle.

**Proposition.** (*Existence des classes de Stiefel-Whitney*)

Il existe des classes de Stiefel-Whitney.

**Lemme**

Si  $\xi \simeq \eta$ , alors  $\omega_i(\xi) = \omega_i(\eta)$ .

▷ On prend  $f = id$  dans trois axiomes. ■

**Lemme**

Si  $\xi$  est un fibré trivial, alors  $\omega_i(\xi) = 0$  dès que  $i > 0$ .

▷ Par  $(b, x) \mapsto (p, x)$  verticalement, il existe

$$\begin{array}{ccc} h : B \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\sim} & \xi \\ \downarrow & \swarrow \check{f} & \\ p \times \mathbb{R}^n = \varepsilon' & & \end{array}$$

où  $\check{f}$  est une application fibrée. On a  $f^*\omega_i(\varepsilon') = \omega_i(\xi)$ . De plus,  $B(\varepsilon')$  est ponctuel donc  $\omega_i(\varepsilon) = 0$  pour  $i > 0$ . ■

**Lemme**

Si  $\varepsilon$  est trivial, alors  $\omega_2(\varepsilon \oplus \eta) = \omega_i(\eta)$  et  $\omega_i(\varepsilon \oplus \eta) = \underbrace{\omega_0(\varepsilon)}_{=1} \cup \omega_i(\eta) = \omega_i(\eta)$ .

**Lemme**

Si  $\xi$  est un  $\mathbb{R}^n$ -fibré euclidien ayant  $k$  sections linéairement indépendantes, alors  $\omega_n(\xi) = \omega_{n-1}(\xi) = \dots = \omega_{n-k+1}(\xi) = 0$ .

▷ Les sections engendrent un  $\mathbb{R}^k$ -sous-fibré trivial de  $\xi$ . Soit  $\eta$  son supplémentaire orthogonal. Alors  $\eta$  est un  $\mathbb{R}^{n-k}$ -fibré et  $\varepsilon^k \oplus \eta \simeq \xi$ . On a  $\omega_i(\xi) = \omega_i(\varepsilon^k \oplus \eta) = \omega_i(\eta)$  où  $\eta$  est un  $n - k$  fibré donc cette quantité s'annule pour  $i > n - k$ . ■

**Corollaire**

Si  $\omega_{n-k}(TM) \neq 0$ , alors  $M$  a au plus  $k$  champs de vecteurs nulle part dépendants.

**Heuristique**

Les classes de Stiefel-Whitney sont des obstructions pour trouver des sections linéairement indépendantes.

Maintenant  $\xi \oplus \eta$  est trivial d'où  $0 = \omega_1(\xi \oplus \eta) = \omega_0(\xi)\omega_1(\eta) + \omega_1(\eta)\omega_0(\eta) = \omega_1(\xi) + \omega_1(\eta)$  par la formule puis  $0 = \omega_2(\xi \oplus \eta) = \omega_2(\xi) + \omega_1(\xi)\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta)$  d'où  $\omega_2(\eta) = \omega_2(\xi) + \omega_1(\xi)\omega_1(\eta)$  puis  $0 = \omega_n(\xi \oplus \eta) = \omega_n(\xi) + \omega_{n-1}(\xi)\omega_1(\eta) + \dots = \omega_1(\xi)\omega_{n-1}(\eta) + \omega_n(\eta)$ .

Pour formaliser :

**Définition-propriété. ()**

Soit  $H^\pi(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  dont les éléments sont les séries formelles de la forme  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  où  $a_i \in H^i(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  et  $ab = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots$  et  $a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots$ . Le produit est commutatif et associatif.

La classe de Stiefel-Whitney totale de  $\xi$  est  $\omega(\xi) = \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) + \dots + \omega_n(\xi) + 0 \in H^\pi(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

La collection qui commence par 1 forme un groupe commutatif pour la multiplication.

▷ Étant donnée  $\omega$ , on peut construire  $\bar{\omega}$  telle que  $\omega\bar{\omega} = 1$ . On a  $\bar{\omega_1} = \omega_1$ ,  $\bar{\omega_2} + \bar{\omega_1}\omega_1 + \omega_2 = 0$  d'où  $\bar{\omega_2} = \omega_1^2 + \omega_2$ , puis  $\bar{\omega_3} + \bar{\omega_2}\omega_1 + \bar{\omega_1}\omega_2 + \omega_3 = 0$ , etc. ■

Si  $\xi, \eta$  sont deux fibrés sur  $B$ , on peut résoudre

$$\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi)\omega(\eta)$$

pour  $\omega(\eta) = \bar{\xi}\omega(\xi \oplus \eta)$ .

**Lemme**

Si  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ , alors  $\omega_i(\nu) = \bar{\omega_i}(TM)$ .

### Contre-exemple

Considérons  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Alors  $\nu(S^n)$  est trivial,  $\omega_i(\nu) = 0$  et  $\overline{\omega_i}(TS^n) = 0$  d'où  $\omega_i(TS^n) = 0$ .  $\square$

### Exemples

- Le fibré en droite canonique  $\gamma_n^1$  sur  $\mathbb{RP}^n$  a une classe de Stiefel-Whitney totale  $1 + a$  où  $a$  est un générateur de  $H^1(\mathbb{RP}^n)$ .  
 $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $S^1$  se plonge dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{RP}^1$  dans  $\mathbb{RP}^n$ . On a une application fibrée  $j : \gamma_1^1 \rightarrow \gamma_n^1$  d'où  $0 \neq \omega_1(\gamma_1^1) = j^*\omega_1(\gamma_n^1) \Leftrightarrow \omega_1(\gamma_n^1) = a$ .
- Par définition,  $\gamma_n^1$  est un sous-fibré du fibré trivial  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $\gamma^\perp$  est le supplémentaire orthogonal, alors  $\omega(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ . De plus  $\omega(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}) = 1 = \omega(\gamma_1^n \oplus \gamma^\perp) = \omega(\gamma_1^n)\omega(\gamma^\perp)$ . On sait que  $\omega(\gamma_1^n) = 1 + a$ . On peut vérifier que  $(1+a)(1+a+a^2+\dots+a^n)$  d'où  $(1+a)(1+a+\dots+a^n) = 1+a+\dots+a^n+a+\dots+a^n+a^{n+1}$ . Puisque chaque  $a+a, \dots, a^n+a^n$  s'annulent et que  $a^{n+1}=0$  dans l'anneau de cohomologie de  $\mathbb{RP}^n$ , ceci vaut 1.

### Lemme

$$T(\mathbb{RP}^n) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp).$$

Soit  $f : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ . On a  $Df : TS^n \rightarrow T\mathbb{RP}^n$  vérifiant  $Df(x,v) = Df(-x, -v)$ . De plus,  $T\mathbb{RP}^n = \{(x,v), (-x, -v) \mid x \in S^n, v \in TS^n\} = \{(x,v) \mid xx = 1, xv = 0\}$ . Étant donné un tel  $(x,v)$  on peut définir une application linéaire de la droite  $L$  passant par  $x$  et  $-x$  vers le plan orthogonal  $L^\perp$ , via  $l : L \longrightarrow L^\perp$ . Étant donnée une telle application linéaire, on obtient des paires  $(x,v), (-x, -v) \in T\mathbb{RP}^n$  d'où  $T\mathbb{RP}^n \simeq \text{Hom}(\gamma_1^n, \xi^\perp)$ . ■

### Proposition

Soit  $\varepsilon_n^1$  le fibré trivial  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ . Alors  $T(\mathbb{RP}^n) \oplus \varepsilon_n^1 = \gamma_1^n \oplus \dots \oplus \gamma_1^n$  formé de  $n+1$ -copies.

Soit  $\varepsilon_n^1 = \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$  le fibré en droites avec des sections canoniques donnée par  $id$  nulle part nulles. Maintenant  $T\mathbb{RP}^n \oplus \varepsilon_n^1 = \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) = \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1)$  où  $\gamma^\perp \oplus \gamma_n^1 = \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  donc égale  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_n^1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon_n^1)$  le dual de  $\gamma_n^1$ . Puisque  $\gamma_n^* \simeq \gamma_n^1$ , c'est égal à  $\gamma_1^n \oplus \dots \oplus \gamma_1^n$  formé de  $n+1$  copies. Ainsi  $\omega(T\mathbb{RP}^n) = \omega(T\mathbb{RP}^n \oplus \varepsilon) = \omega(\gamma_1^n \oplus \dots \oplus \gamma_1^n) = (\omega(\gamma_1^n))^{n+1} = (1+a)^{n+1}$ . Ainsi  $\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi)\omega(\eta)$ . ■

**Exemple.** (*Coefficients binomiaux sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$* )

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

d'où  $\omega(\mathbb{RP}^3) = 1$ ,  $\omega(\mathbb{RP}^4) = 1 + a + a^4$ .

### Corollaire

Les seuls espaces projectifs éventuellement parallélisables sont les  $\mathbb{RP}^{4^n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ Montrons que ce sont les seuls tels que  $\omega(\mathbb{RP}^{4^n-1}) = 1$ . On a  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  d'où  $(1+a)^{2^r} = 1 + a^{2^r}$ . Si  $n+1 = 2^r$ , alors  $\omega(\mathbb{RP}^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^{2^r} = 1 + a^{2^r} = 1$  et puisque  $2^r > n$ ,  $a^{2^r} = 0$ . Si  $n+1$  n'est pas une puissance de 2,  $n+1 = 2^r m$  où  $m$  est impair et alors  $\omega(T\mathbb{RP}^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^{2^r m} = (1+a^{2^r})^m = 1 + ma^{2^r} + \dots$  où ni  $m$  ni  $a^{2^r}$  ne sont nuls. ■

*Remarque.* En fait, les seuls  $\mathbb{RP}^n$  parallélisables sont pour  $n = 1, 3, 7$ .

On se demande quels  $\mathbb{RP}^n$  sont plongés ou immergés dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  ?

### Fait

Si  $M^r$  est immersible dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  via  $i$ , alors

$$\begin{array}{ccc} i^* T\mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow{\cong} & TM^r \oplus V_i \\ \downarrow & & \\ M^r & & \end{array}$$

d'où  $\omega_i(\nu) = \overline{\omega_i}(M)$  d'où  $\overline{\omega_i}(M) = 0$  pour  $i > k$ .

### Exemples

1. Prenons  $\mathbb{RP}^9$ . On a  $\omega(T\mathbb{RP}^9) = (1+a)^1 0 = 1 + a^2 + a^8$  i.e.  $1 + \omega_2 + \omega_8$ . Calculons  $\overline{\omega}(\mathbb{RP}^9)$ . On a  $\overline{\omega_1} = 1$ ,  $\overline{\omega_1} = \omega_1 = 0$ ,  $\overline{\omega_2} = \overline{\omega_1} \omega_2 + \omega_2 = a^2$ . Ainsi  $\overline{\omega}(T\mathbb{RP}^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6 = 1$ , donc  $\mathbb{RP}^9$  ne peut pas s'immerger dans  $\mathbb{R}^{9+k}$  pour  $k < 6$ .
2. Prenons  $\mathbb{RP}^{2^r}$ . On a  $\omega(\mathbb{RP}^{2^r}) = (1+a)^{2^r+1} = (1+a^{2^r})(1+a) = (1+a^n)(1+a) = 1 + a + a^n$  puis  $\overline{\omega}(\mathbb{RP}^n) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ . Dans ce cas,  $k \geq n-1 = 2^r - 1$ . Donc  $\mathbb{RP}^{2^r}$  ne peut pas s'immerger dans plus petit que  $\mathbb{R}^{2(2^r)-1}$ .

**Exercice 24** (*Borne aux champs de vecteurs indépendants sur  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$* )

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On décompose  $n+1 = 2^r m$  où  $r \in \mathbb{N}$  et  $m$  est un entier impair. Montrer que si  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  admet  $k$  champs de vecteurs linéairement indépendants en tous points, alors  $k < 2^r$ .

## ▷ Éléments de réponse.

On rappelle que  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1}$  où  $H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]/a^{n+1}$ . Par hypothèse,  $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n \simeq \eta \oplus \varepsilon^k$  où  $\varepsilon^k$  est le fibré trivial de rang  $k$  et  $\eta$  est de rang  $n-k$ . Alors  $(1+a)^{n+1} = \omega(\eta)\omega(\varepsilon^k) = \omega(\eta) = 1 + \omega_1(\eta) + \dots + \omega_{n-k}(\eta)$ . En particulier  $\binom{n-k+1}{n+1} a^{n-k+1} = 0, \dots, \binom{n}{n+1} a^n = 0$ . D'où  $\binom{n-k+u}{n+1} \equiv 0$  [2] pour  $u \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . On utilise maintenant que si  $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k$  et  $b = b_0 + b_1 p + \dots + b_k p^k$  pour  $p$  premier, alors  $\binom{a}{b} \equiv \binom{a_0}{b_0} \dots \binom{a_k}{b_k} [p]$ . Cela donne  $\binom{2^r(m-1)}{2^r m} \equiv \binom{2^r}{2^r m} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{r \text{ fois}} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \binom{1}{c_1} \binom{0}{c_2} \dots \binom{0}{c_l} \equiv 1$  [2], i.e.  $\not\equiv 0$  [2], si l'on note en binaire  $2^r m = (c_1 c_2 \dots c_l 10 \dots 0)_2$ . Ainsi  $\binom{2^r m - 2^r}{2^r m} \not\equiv 0$  [2] i.e.  $\binom{n-2^r+1}{n+1} \not\equiv 0$  [2] d'où  $k-1 \leq 2^r$ .

**Exercice 25**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On dit qu'une variété différentiable  $M$  admet un *champ de  $k$ -plans* si  $TM$  admet un sous-fibré vectoriel de dimension  $k$  et ce champ est alors ce sous-fibré. Ceci signifie que  $TM = \eta \oplus \zeta$  où  $\eta, \zeta$  sont respectivement de rangs  $n-k$  et  $k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  admet un champ de 1-plans si et seulement si  $n$  est impair.
2. Montrer que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^4$  et  $\mathbb{R}\mathbb{P}^6$  n'admettent pas de champs de 2-plans.

## ▷ Éléments de réponse.

1. Si  $n$  est impair,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  admet un champ de vecteurs non nul, en particulier un champ de 1-plans. Si  $n$  est pair, si c'était le cas, on aurait  $\omega(T\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \omega(\eta)\omega(\zeta)$ . Alors  $\omega(\eta) = P(a)$  et  $\omega(\zeta) = Q(a)$  où  $P, Q$  sont respectivement de degré  $\leq n-1, 1$ . Par  $\omega(\eta)\omega(\zeta) = 1 + \dots + \binom{n}{n+1} a^n = 1 + \dots + a^n$ , puisque  $n+1 = \binom{n}{n+1}$ ,  $\deg(P) = n-1$  et  $\deg(Q) = 1$ . Mais  $Q$  a un terme constant unitaire, d'où  $Q(a) = 1+a$ . De plus,  $Q(a)P(a) = (1+a)^{n+1} - a^{n+1}$  d'où  $Q(X)P(X) = (1+X)^{n+1} - X^{n+1}$ , et  $Q(1) = 0$ , mais  $(1+1)^{n+1} - 1^{n+1} = 1 \neq 0$ , contradiction.
2. Pour  $\mathbb{R}\mathbb{P}^4$ ,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^4) = 1 + 5a + 10a^2 + 10a^3 + 5a^4 = 1 + a + a^4$ . Ainsi,  $\omega(\eta) = 1 + ba + b'a^2$  et  $\omega(\zeta) = 1 + ca + c'a^2$ . En tapant sur la relation, on obtient  $b' = 1, c' = 1, b+c = 1$  et  $b+c = 0$ , contradiction. Pour  $\mathbb{R}\mathbb{P}^6$ , on a  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^6) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = \Phi_7(a)$  où  $\Phi_7$  est de degré 6. Ainsi,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^6) = \omega(\eta)\omega(\zeta)$  se traduit par  $\Phi_7 = PQ$  où  $\deg(P) = 2$  et  $\deg(Q) = 4$ .  $P$  a une racine dans  $\mathbb{F}_4$ , car il est de degré 2, mais chaque racine de  $\Phi_7$  engendre  $\mathbb{F}_{2^6}$  (chaque racine  $\zeta$  est simple et alors  $\zeta^k, k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*$  sont ses autres racines).

**Exercice 26**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $M$  une  $n$ -variété différentiable qui s'immerge dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Montrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i(M) = \omega_1(M) \smile \dots \smile \omega_1(M)$  avec  $i$  itérations.

2. Montrer que seuls les  $n$ -èmes espaces projectifs où  $n = 2^r - 1, 2^r - 2, r \in \mathbb{N}^*$  sont susceptibles de s'immerger dans  $\mathbb{RP}^{n+1}$ . En déduire que  $\mathbb{RP}^2$  ne s'immerge pas dans  $\mathbb{R}^3$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On a  $TM \oplus \nu(M) = T\mathbb{R}_{|M}^{n+1}$  d'où  $\omega(M)\omega(\nu(M)) = 1$ . Puis  $\omega(M) = \omega(\nu(M))^{-1} = (1 + \omega_1(\nu(M)))^{-1} = 1 + \omega_1(\nu) + \omega_1(\nu)^2 + \dots + \omega_1(\nu)^n$  d'où  $\omega_1(\nu) = \omega_1(M)$  et  $\omega(M) = 1 + \omega_1(M) + \omega_1(M)^2 + \dots + \omega_1(M)^n$ .
2. Alors  $\omega_1(\mathbb{RP}^n) = (n+1)a$  donne  $((n+1)a)^k = \binom{k}{n+1}a^k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  d'où  $n+1 \equiv \binom{k}{n+1} [2]$ , ce qui ne peut arriver que si toute la ligne du triangle de Pascal est composée entièrement de 1 ou n'a des 1 qu'aux deux extrémités. La condition qu'elle donne sur  $n$  se démontre par le même lemme énoncé sur les polynômes en nombres premiers : si  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,  $\binom{k}{m} \equiv 0 [2]$  implique que  $m$  est une puissance de 2 et le contraire, que  $m$  est une puissance de 2, moins 1. Montrons par exemple le premier cas. Si  $m$  n'est pas une puissance de 2,  $m)(1c_m...c_0)$  en binaire pour  $c_a \neq 0$  pour un  $a \in \llbracket 0, l \rrbracket$ . Choisissons  $k = (0...010...0)$  où 1 est à la position  $a$ . Alors  $\binom{k}{m} \equiv \binom{0}{c_0} \dots \binom{0}{c_{a-1}} \binom{1}{1} \binom{0}{c_{a+1}} \dots \binom{0}{c_l} \binom{0}{1} \equiv 1 [2]$ .

### Définition. ()

Soit  $M$  une variété lisse fermée de dimension  $n$  et soit  $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z})$  la classe fondamentale. Supposons  $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$ . Soit  $\xi$  sur  $M$  ; on forme  $\omega_1(\xi)^{r_1}\omega_2(\xi)^{r_2}\dots\omega_n(\xi)^{r_n} \in H^n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

### Définition. ()

$\langle \omega_1(TM)^{r_1}, \dots, \omega_n(TM)^{r_n}, \mu_n \rangle$  est le nombre de Stiefel-Whitney associé à  $(r_1, \dots, r_n)$ . Deux  $n$ -variétés ont les mêmes nombres de Stiefel-Whitney s'il est le même en tout  $n$ -uplet d'entiers  $(r_1, \dots, r_n)$ .

### Théorème. (*Caractérisation des cobordismes en termes de classes de Stiefel-Whitney*)

Si  $M^n$  est la frontière d'une  $n+1$ -variété compacte, alors tous les nombres de Stiefel-Whitney sont nuls. En fait, l'opposé est également vrai.

Si  $n$  est paire,  $\omega_n(\mathbb{RP}^n) = (n+1)a^n \neq 0$ ,  $\omega_1^n(\mathbb{RP}^n) = (n+M)a^n \neq 0$ . Si  $n$  est impaire, on obtient que tous les nombres de Stiefel-Whitney sont nuls.

La dernière fois, les nombres de Stiefel-Whitney pour  $X$  une  $n$ -variété fermée sont si  $(r_1, \dots, r_n)$  sont tels que  $\sum_{i=1}^n ir_i = n$ , alors le nombre correspondant est  $\langle \omega_1^{r_1} \dots \omega_n^{r_n}, [X] \rangle$ .

On a montré que pour  $\mathbb{RP}^{2n}$  certains sont non nuls.

On a prétendu que pour  $\mathbb{RP}^{2n-2}$  tous sont nuls. Puisque  $\omega(\mathbb{RP}^{2n-1}) = (1+a)^{2n} = (1+a^2)^n$ , tous les nombres impairs sont nuls, et si  $2ir_i = 2n-1$ , au moins l'un des  $ir_i$  des impairs donc  $\omega_i^{r_i}$

est d'exposant impair et d'exposante impair, donc les nombres de Stiefel-Whitney sont nuls.

### Preuve.

▷ Noton  $B = B^{n+1}$  cette variété. Alors  $M \hookrightarrow^i B$ . On a  $H_*(M) \longrightarrow H_*(B) \longrightarrow H_*(B,M) \longrightarrow H_{*-1}(M) \longrightarrow \dots$  d'où  $H^*(M) \leftarrow H^*(B) \leftarrow H^*(B,M) \xleftarrow{\delta} H^{*-1}(M)$  avec  $\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial \mu_N \rangle = \langle \partial v, \mu_B \rangle$  et  $H_{n+1}(B,M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par  $\mu_B \mapsto \mu_M \in H_n(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

On sait que  $TB|_M = TM \oplus \nu$  où  $\nu$  est trivial. Il a une direction pointée bien définie...  $i^* \omega_i(TB) = \omega_i(TM)$  puis  $\langle i^* \omega_1^{r_1}(TB) \dots i^* \omega_n^{r_n}(TB), \mu_M \rangle = \langle \omega_1^{r_1}(TM) \dots \omega_n^{r_n}(TM), \mu_M \rangle = \langle \partial i^* \omega_1^{r_1}(TB) \dots \partial i^* \omega_n^{r_n}(TB), \mu_B \rangle = 0$  où  $i^* : H^*(B) \rightarrow H^*(M)$  et par exactitude  $\partial i^*$  est nulle. ■

### Théorème

Si tous les nombres de Stiefel-Whitney sont nuls,  $M$  est un cobordisme.

✳ (Idée de la preuve.) Difficile. ■

### Corollaire

Deux variétés fermées lisses  $M_1, M_2$  sont cobordantes si et seulement si leurs nombres de Stiefel-Whitney sont égaux.

Ainsi les nombres de Stiefel-Whitney déterminent les classes de cobordismes orientés d'une variété.

▷ Si les nombres sont égaux, les nombres pour  $M_1 \sqcup M_2$  sont égaux. ■

## 7.4.2 Espace classifiant

### Définition. (*Espace classifiant*)

Étant donné un groupe topologique  $G$ , il existe un espace contractile  $EG$  sur lequel  $G$  agit librement. Alors  $BG = EG/G$  est l'*espace classifiant* de  $G$  et  $EG$  est un  $G$ -fibré principal universel.

### Définition. (*Fibré vectoriel principal*)

Un *G-fibré vectoriel principal* est un fibré vectoriel sur lequel  $G$  agit en préservant les fibres and l'action est librement transitive, *i.e.* les fibres sont  $\simeq G$ .

### Théorème

Si  $M$  est paracompacte et  $P \rightarrow M$  un  $G$ -fibré principal, alors il existe  $f : M \rightarrow BG$  tel que  $f^* EG \simeq P$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*)  $G$  agit proprement. On a

$$\begin{array}{ccccc}
 p^*P & & & & f^*EG \\
 \searrow & & & & \swarrow \\
 P & \longrightarrow & P \times EG & \longrightarrow & EG \\
 \downarrow & & & & \downarrow \pi \\
 M & \xleftarrow[p]{\quad} & P \times_G EG & \xrightarrow[f]{\quad} & BG \\
 & \searrow s & \nearrow & & 
 \end{array}$$

qui permet la preuve. ■

Étant donné un  $\mathbb{R}^n$ -fibré vectoriel, on lui associe son *fibré des repères* formé de tous les repères qui est un  $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré principal. Les fibrés euclidiens sont en correspondances avec les repères orthonormés qui sont donc des  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ -fibré principaux.

Étant donné un  $GL_n$ - ou  $\mathcal{O}_n$ -fibré principal,  $GL_n(\mathbb{R}) \times_{GL_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$  est un fibré de fibre  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi l'espace classifiant qui nous intéresse est  $\mathcal{O}(n)$ , associé à la *variété de Stiefel*  $E\mathcal{O}(n)$  et à la *Grassmannienne*  $B\mathcal{O}(n)$ .

#### 7.4.2.1 Grassmanniennes et fibrés universels

Si l'on se donne une courbe  $C$  dans  $\mathbb{R}^{k+1}$ , à  $x \in C$  on associe un vecteur unitaire positif dans la direction tangente et une droite tangente  $\mathbb{P}^k$ . Alors  $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ ,  $x \mapsto T_x M^n$  une droite tangente  $\subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ .

##### Définition. (*Grassmannienne*)

La variété grassmannienne  $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est l'ensemble des  $n$ -plans de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

##### Exemples. (*Grassmanniennes*)

1.  $G_1(\mathbb{R}^{1+k}) = \mathbb{RP}^k$ .

##### Définition. (*Repères*)

Un  $n$ -repère dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  est un  $n$ -tuple de vecteurs linéairement indépendants.

##### Définition. (*Variété de Stiefel*)

La variété de Stiefel  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est l'ensemble des  $n$ -repères.

##### Fait. (*Ouverture de la variété de Stiefel*)

$V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \times \mathbb{R}^{n+k}$   $n$  fois est un ouvert.

C'est l'image réciproque de  $\mathbb{R}^*$  par  $A \mapsto \det(A^t A)$ .

Elle est donc de dimension  $n(n+k)$ .

**Fait. (*Portée*)**

Il existe une application  $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  dite *portée* qui munit de ce dernier de la topologie quotient.

**Fait. (*Compacité de la grassmannienne*)**

En notant  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  l'ensemble des repères orthonormés,

$$\begin{array}{ccccc} V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) & & & & \\ \searrow & & \nearrow & & \\ & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) & \xrightarrow{GS} & V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) = E\mathcal{O}(n) & \\ q_p \swarrow & & & & \nwarrow q_0 \\ G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = B\mathcal{O}(n) & & & & \end{array}$$

et  $E\mathcal{O}(n)$  est fermée bornée donc compacte, donc  $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est compacte.

**Lemme. (*Structure de la grassmannienne*)**

$G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est une variété topologique de dimension  $nk$ .

▷ Pour montrer que  $G_n$  est séparée, il suffit de trouver une fonction continue qui sépare les points :  $G_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ . Si  $\omega \in \mathbb{R}^{n+k}$ , on considère la distance de  $\omega$  à  $X$  un plan dans  $\mathbb{R}^{n+k}$   $\rho_\omega$ . Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un repère orthonormé de  $X$ ,  $\rho_\omega(X) = \omega \cdot \omega - \omega \cdot x_1 - \dots - \omega \cdot x_n$ . C'est continu en les  $x_i$ , donc  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho} G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho_\omega} \mathbb{R}$ . Ceci montre que  $\rho_\omega \circ \rho$  est continue, donc  $\rho_\omega$  l'est.

Montrons que tout point de la grassmannienne a un voisinage euclidien, *i.e.* homéomorphe à  $\mathbb{R}^{nk}$ . Soit  $X_0$  un plan de  $\mathbb{R}^{n+k}$ . On peut écrire  $\mathbb{R}^{n+k} = X_0 \oplus X_0^\perp$ . Soit  $U \subseteq G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  défini par  $U = \{Y \in G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \mid \pi_{X_0^\perp}(Y) \simeq X_0\}$ . Ceci nous donne  $\Pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0$ . On veut  $\Pi(Y) = X_0$  d'où  $Y \cap X_0^\perp = 0$ .  $U$  est ouvert : tout point de  $\mathbb{R}^{n+k}$  peut être écrit comme  $v \oplus \omega$  dans la décomposition  $X_0 \oplus X_0^\perp$ .  $U \ni Y = \{(v, \omega) \mid (v, \omega) \in Y\}$ . C'est le graphe d'une application linéaire  $X_0 \rightarrow X_0^\perp$  puisque  $\Pi(Y) \simeq X_0$  linéairement,  $(v, \omega) \mapsto v$  où  $\omega \in X_0^\perp$ . Ainsi on a  $x_0 \in U \xrightarrow{T} \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ .  $T$  est une bijection : si  $T(Y) \in \text{Hom}(X_0, X_0^\perp)$ , on définit  $Y$  comme l'image de l'application linéaire  $x_0 \ni X \mapsto X + T(Y)(X) \in X_0^\perp$ . Pour montrer que  $T$  est continue, étant donnée d'une base orthonormale  $(x_i)$  de  $X_0$ , on déduit un repère  $y_i$  de  $Y$  et  $y_i = x_i + T(Y)x_i$  qui dépend continûment de  $Y$ , donc  $T(Y)$  dépend continûment de  $Y$  ; réciproquement,  $y_i$  dépend continûment de  $T(Y)$ , donc  $Y$  dépend continûment de  $T(Y)$ , donc  $T, T^{-1}$  sont continues. ■

**Lemme. (*Symétrie de la grassmannienne*)**

L'application  $X \mapsto X^\perp$  de  $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\sim} G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ .

▷ Découle de la continuité de  $Y \mapsto Y^\perp$ . ■

**Corollaire**

$$G_k(\mathbb{R}^{k+1}) \simeq G_1(\mathbb{R}^{k+1}) \simeq \mathbb{RP}^k.$$

**Exemple**

Considérons le fibré  $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{(X,x) \mid X \text{ } n\text{-plan de } \mathbb{R}^{n+k}, x \in X\} \xrightarrow{\pi} G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ .  
 $\gamma^1(\mathbb{R}^{k+1}) = \gamma_k^1 \rightarrow \mathbb{RP}^k$ .

**Lemme**

Ce fibré est localement trivial.

▷  $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  et  $U$  l'ensemble des plans dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  dont la projection orthogonale sur  $X$  est  $p_Y$  un isomorphisme. On définit  $h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ ,  $h(Y,x) = (y, p_Y^{-1}(x)) = (y, x + T(Y)x)$  qui définit une trivialisation locale de  $\gamma^n$ . ■

**Définition. (Fonction de Gauss généralisée)**

Soit  $M \subseteq \mathbb{R}$ . La *fonction de Gauss généralisée*  $\bar{g} : M \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est l'application  
 $x \longmapsto T_x M$

de base de l'application fibré  $g : TM \longrightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ .  
 $(x,v) \longmapsto (T_x M, v)$

**Lemme**

Pour tout fibré en  $n$ -plans  $\xi$  sur une base compacte  $B$ , il existe une application fibrée dans  $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$  pour un compact  $K$  assez large.

▷ On prétend que pour construire une application fibrée  $f : \xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^m)$ , il suffit de construire une application continue  $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est linéaire et injective sur chaque fibre. Ensuite, on définit  $f$  et  $E(\xi)$  par  $f(e) = (\hat{f}(\text{fibre sur } \pi(e)), \hat{f}(e))$ , cette première coordonnée étant dans  $\gamma^n$ . On montre que  $f$  est continue.

On veut construire  $\hat{f}$ . On prend un recouvrement fini  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  de  $B$  tel que  $h_i : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i) = \xi|_{U_i}$ . Soit  $m = rn$ . On prend des partitions  $\omega_i$  qui recouvrent encore  $B$ ,  $\overline{\omega_i} \subseteq V_i$ ,  $\overline{V_i} \subseteq U_i$  et l'on prend  $r_i$  égale à 1 sur  $\omega_1$ , 0 hors de  $V_i$  et entre  $[0,1]$  sur le reste. Considérons  $\tilde{h}_i = p \circ h_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $p : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\tilde{h}_i$  est un isomorphisme sur chaque fibre. On pose  $h'_i : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 $h_i(e) \longmapsto \lambda_i(\pi(e)) \tilde{h}_i(e)$  et l'on définit  $\tilde{h} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^n$  par  $r$  copies. Ainsi  $\hat{f}(e) = (h'_1(e), \dots, h'_r(e))$  définit une application continue de  $E(\xi)$  à  $\mathbb{R}^{nr}$ , linéaire sur chaque fibre et injective sur chaque fibre. ■

**Définition.** ()

Notons  $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ . La grassmannienne infinie  $F_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$  est l'ensemble des  $n$ -plans de  $R^\infty$  avec la topologie colimite.

*Remarque.* Le fibré  $\gamma^n \rightarrow G_n$  est définie de la même manière. C'est le *fibré en  $n$ -plans universel*.

**Théorème**

Tout fibré en  $n$ -plans sur une base paracompacte  $B$  admet une application fibrée  $\xi \xrightarrow{f} \gamma^n$ . De plus, deux telles applications  $f_1, f_2$  fibrées sont homotopes par des applications fibrés, en particulier elles déterminent la même classe d'homotopie d'applications de base  $[\tilde{f}_1] = [\tilde{f}_2] \in \text{Hom}(B, G_n)$ .

$$\begin{array}{ccc} \xi & & \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & G_n \end{array}$$

$$\xi = f^* \gamma_n.$$

**Définition.** ()

Les classes caractéristiques sont les éléments de la cohomologie de  $G_n$ .

Soit  $c \in H^1(G_n)$ .  $\xi$  détermine  $f$ , on peut tirer en arrière  $c$  par  $f$  et  $f^*c$  est la classe caractéristique  $c(\xi)$  déterminée par  $\xi$ . C'est naturel avec le tiré en arrière des fibrés :  $\eta = g^*\xi$  donne  $c(\eta) = g^*c(\xi)$ .

$$\begin{array}{ccccc} \eta & & \xi & & \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \swarrow \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 & & \\ & \searrow f_2 & \swarrow f_\xi & & \\ & & G_n & & \end{array}$$

On rappelle la définition de paracompacité. Tout espace métrique est paracompact et séparé. Un espace régulier réunion dénombrable de compacts est paracompact et séparé.

**Corollaire**

La grassmannienne infinie est paracompacte.

▷ La limite directe d'une suite de compacts est paracompacte. C'est la limite en  $G_m(\mathbb{R}^m)$ , qui est compact. ■

### Lemme

Pour tout  $\xi$  sur une base paracompacte séparée, il existe  $q$  un revêtement localement fini dénombrable  $(U_i)_i$  tel que  $\xi|_{U_i}$  est trivial.

▷ On commence avec  $(V_\alpha)_\alpha$  qui recouvre  $B(\xi)$ . C'est localement fini et  $\xi|_{V_\alpha}$  est trivial. Prenons  $\omega_\alpha \subseteq V_\alpha$  et  $\lambda_\alpha$  une fonction plateau correspondance ; Pour tout  $S \subseteq \{\alpha\}$  fini,  $U(S) \subseteq B(\xi)$ . Posons  $U(S) = \{b \in B \mid \min_{\alpha \in S} \lambda_\alpha(b) > \max_{\alpha \notin S} \lambda_\alpha(b)\}$ .  $U(S)$  est ouvert puisque les  $\lambda_\alpha$  sont continues. Tout  $b$  est dans au moins un  $U(S)$ .  $S = \{\alpha \mid V_\alpha \ni b\}$ , donc  $b \in U(S)$ . Posons  $U_k = \bigsqcup_{|S|=k} U(S)$ . Alors  $U_k$  est un recouvrement ouvert de  $B$  tel que  $\lambda_\alpha(b) > \lambda_{\alpha'}(b) \Rightarrow \lambda_{\alpha'} \not> \lambda_\alpha(b)$ .

$B = U_1 \cup \dots \cup U_k \cup \dots$  et  $\xi|_{U_8k}$  est trivial sur chacun de ces ouverts puisque  $\xi|_{U(S)}$  est trivial, ceci car  $U(S) \subseteq \bigcap_{\alpha \in S} V_\alpha$ . Si  $b \in U(S)$  et  $\alpha \in S$ ,  $b \in V_\alpha$  puisque  $\lambda_\alpha(b) > 0$ . Ainsi  $(U_k)_k$  produit le recouvrement que l'on souhaite. ■

Maintenant, on peut construire  $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  comme précédemment dans le cas compact. Dans le cas paracompact, on a  $(U_i)_{i \in I}$ . On prend encore  $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  et l'on définit  $h'_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $p \circ h^{-1}$ . On pose  $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus \dots$ . On pose  $f : \xi \rightarrow \gamma^n$

$$\begin{aligned} e &\mapsto (\lambda_1(\pi(e)).h'_1, \dots) \\ \text{qui à } e &\mapsto (\hat{f}(\text{toute la fibre sur } \pi(e)), \hat{f}(e)). \end{aligned}$$

Si l'on a  $f, g : \xi \rightarrow \gamma^n$  des applications fibrées, elles sont homotopes par des fibrées, *i.e.* par une *homotopie fibrée*.

Prenons les applications correspondantes  $\hat{f}, \hat{g} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ . On a deux cas :

\* si  $\hat{f}(e) \neq -\lambda^2 \hat{g}(e)$  pour  $e \neq 0$  dans  $E(\xi)$ , alors  $\hat{h}_t(e) = (1-t)\hat{f}(e) + t\hat{g}(e)$  convient.

On a  $\hat{h}_t(e) \neq 0$  pour  $e \neq 0$ . C'est linéaire par combinaison de linéaires, dont  $\hat{h}$  est une homotopie fibrée.

\* Soit  $d_1 : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  pour tout  $i$ . Il induit une application fibrée  $\gamma^n \xrightarrow{d_i} \gamma^n$ . Alors

$$e_i \mapsto e_{2i-1}$$

le composée  $d_1 \circ f$  et  $\hat{f}$  vérifient la condition du premier cas ( $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5$ ).

Donc  $f \sim d_1 \circ f$ . Posons d'autre part  $d_2 : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  de sorte que  $d_2 \circ g$  et  $\hat{g}$

$$e_i \mapsto e_{2i}$$

vérifient la condition du premier cas et  $d_2 \circ g \sim g$ . Ainsi,  $d_1 \circ f$  et  $d_2 \circ g$  vérifient la condition du premier cas, d'où  $d_1 \circ g \sim d_2 \circ g$ .

*Remarque.* Par conséquent un fibré vectoriel  $\xi$  détermine une classe d'homotopie d'applications  $B(\xi) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ . La réciproque est également vraie : une classe d'homotopie de telles applications détermine la classe d'isomorphie de  $\xi$ .

### 7.4.2.2 Une structure cellulaire sur la grassmannienne

On écrit  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^m$  avec à chaque fois les dernières coordonnées nulles. Pour un  $n$ -plan  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ , on considère  $0 = \dim(X \cap \mathbb{R}^0) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq \dots \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^n) = n$ .

#### Lemme

Les nombres consécutifs de cette suite diffèrent d'au plus 1.

▷ La suite  $0 \longrightarrow X \cap \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow X \cap \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$  où la dernière application est  $x_k$ -ième coordonnée, est exacte. Ainsi,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^k) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$  où  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(X \cap \mathbb{R}^{k-1})$ . Le rang de  $f$  est au plus 1, d'où le résultat. ■

→ *Notation.* On note  $\sigma_1$  la position du premier 1 de cette suite,  $\sigma_2$  celle du premier 2, etc., de sorte qu'on ait  $1\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_n < m$ .

Soit  $e(\sigma) \in G_m(\mathbb{R}^n)$  donnée par  $\{X \mid \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i-1}) = i-1\}$  pour  $i = 1, \dots, n\}$ . Clairement  $\bigcup e(\sigma)$  recouvre  $G_n(\mathbb{R}^n)$ . Aussi chaque  $X$  est dans précisément un des  $e(\Sigma)$  : si  $X \in e(\sigma)$ ,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^i)$  est déterminée et  $e(\sigma')$  est une suite différente de dimensions.

#### Lemme

$e(\sigma)$  est une cellule ouverte de dimension  $d(\sigma) = \sum_i \sigma_i - 1$ .

#### Lemme

Si  $H^k \subseteq \mathbb{R}_d^k$  ans  $\mathbb{R}^m$  est le demi-espace de  $k$ -ième coordonnée  $> 0$ , alors  $X \in e(\sigma) \iff X$  a une base telle que  $x_1 \in H^{\sigma_1}, \dots, x_n \in H^{\sigma_n}$ .

▷ Si  $X$  a une telle base, alors  $x_i \in H^{\sigma_i}$  donc la  $\sigma_i$ -ième coordonnée de  $x_i$  est non nulle. Ainsi, la forme  $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\sigma_i$ -ième coordonnée est de rang 1, donc  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) > \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i-1})$  d'où  $X \in e(\sigma)$ .

Maintenant, si  $X \in e(\sigma)$ ,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}) = 1$ , étendu par  $x_1$ ; il y a un unique choix de générateur ayant dernière coordonnée 1. Puis  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}) = 2$ : on a  $x_1$  et il existe un unique  $x_2$  orthogonal à  $x_1$  ayant la coordonnée  $\sigma_2$  égale à 1. On continue. Ainsi, tout  $x_i \in H^{\sigma_i}$  et ils forment une base de  $X$ , de sorte que  $x \in e(\Sigma) \iff$  dans l'espace d'une matrice triangulaire où chaque ligne est inconnue, un 1 à la  $\sigma_i$ -ième place suivie de zéros. ■

#### Lemme

Tout  $n$ -plan  $X \in e(\sigma)$  a une unique base orthonormale  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $H^{\sigma_1} \times H^{\sigma_n}$ .

▷ La preuve est la même, seulement on remplace la condition sur la dernière coordonnée par  $> 0$ . ■

**Définition. (*Applications caractéristiques de la grassmannienne*)**

Soit  $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \dots \times H^{\sigma_n})$  l'ensemble des repères orthonormés avec  $x_i \in H^{\sigma_i}$ .

Soit  $\bar{e}'(\sigma)$  les repères orthonormés avec  $x_i \in \bar{H}^{\sigma_i}$ .

**Lemme**

$\bar{e}'(\sigma)$  est une cellule fermée de dimension  $d(\sigma) = \sum \sigma_i - i$ , d'intérieur  $e'(\sigma)$ . De plus, l'applicatoin  $\varphi : V_n^0 \rightarrow G_n$  envoie  $e'(\sigma)$  homéomorphiquement sur  $e(\sigma)$ .

▷ Par récurrence, pour  $n = 1$ ,  $\bar{e}'(\sigma_1) = \{x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1\sigma_1}, 0, \dots, 0), x_1 x_1 = 1, x_{1\sigma_1} > 0\}$  d'où  $e'(\sigma_1) \simeq D^{\sigma_1-1}$ . Maintenant étant donnés  $U, V \in \mathbb{R}^m$ , soit  $T(U, V) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  la rotation qui envoie  $u$  sur  $v$  et fixe tout vecteur orthogonal à ces deux là.  $T$  est continue et conserve le produit scalaire. Si  $u, v \in \mathbb{R}^k$ , alors  $T(u, v)x = x [R^k] = x + a$  où  $a \in \mathbb{R}^k$ . Soit  $b_i \in H^{\sigma_i}$  donné par  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  à la  $\sigma_i$ -ième coordonnée. Soit  $(b_1, \dots, b_n) \in e'(\sigma)$ . Pour tout autre  $(x_1, \dots, x_n) \in e'(\Sigma)$ , considérons  $T = T(b_n x_n \cdot \dots \cdot T(b_1 x_1))$ .  $T$  envoie  $b_i$  sur  $x_i$  puisque  $T(b_1, x_1 \dots T(b_{i-1}, x_{i-1}))$  fixe  $b_i$ ,  $T(b_i, x_i)$  envoie  $b_i$  sur  $x_i$  donc  $T(b_{i+1}, x_{i+1}) \dots T(b_n, x_n)$  fixe  $x_i$ . Par récurrence, on sait que  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  est une cellule fermée de dimension  $\sum \sigma_i - i$ .

On veut montrer que  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1})$  est une cellule fermée de dimension  $\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i - i$ . Soit  $D$  l'ensmeble des vecteurs unitaires de  $\bar{H}^{\sigma_{n+1}}$  avec  $b_1 u = \dots = b_n u = 0$ . Seulement  $\sigma_{n+1} - n$  des coordonnées sont strictement positives et ( $\Sigma$  coordonnée carrée = 1 ?) and la dernière coordonnée est  $> 0$ . Ainsi  $\simeq D^{\sigma_{n+1}-n-1}$  (la demi-sphère dans un espace de dimension  $\sigma_{n+1} - n$ ). C'est donc une cellule fermée. ■

On définit  $f : \bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \times D \longrightarrow \bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ .

Pour montrer que

$$f((x_1, \dots, x_n), u) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, T(x_1, \dots, x_n)(u))$$

$f((x_1, \dots, x_n), u) \in e^1(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ , on veut montrer que  $Tu$  est orthogonal à  $x_i$ , ce qui est clair, et  $Tu$  est unitaire et sa dernière coordonnée est  $> 0$ .

$T(b_i) = x_i$  et  $x_i \cdot Tu = T(b_i) \cdot T(u) = b_i \cdot u = 0$  d'où  $Tu \cdot Tu = u \cdot u = 1$  et  $Tu = u$  [ $\mathbb{R}^{\sigma_n}$ ]. Puisque la dernière coordonnée de  $u$  est  $> 0$ , car  $u \in \mathbb{R}^{\sigma_{n+1}}$ , la dernière coordonnée de  $Tu > 0$ . Ainsi  $T, T^{-1}$  sont ocntinues donc  $f$  est un homéomorphisme entre une cellule fermée de dimension  $(\sigma_1 - 1 + \dots + \sigma_{n+1} - n - 1)$  sur  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ . Par la même récurrence, on voit que  $e'(\sigma)$  est l'intérieur de  $\bar{e}'(\sigma)$ .

**Proposition**

$q|_{\bar{e}'(\sigma)} : e'(\sigma) \rightarrow e(\sigma)$  est un homéomorphisme.

▷ Il suffit de prouver que  $q|_{e(\sigma)}$  envoie des ensembles relativement fermés sur des ensembles relativement fermés. ■



# Chapitre 8

## Théorie des noeuds

### Résumé

Fleuron de la topologie en basses dimensions, la théorie des noeuds est une théorie mathématique qui est une branche de la topologie et a pour avantage de s'inspirer du réel. Il s'agit en effet de l'étude des noeuds comme on l'entend couramment. Pour que le concept soit mieux défini et puisse être utilisé, dans cette théorie, après avoir réalisé notre noeud sur une corde, on prend les deux bouts et on les colle, de sorte que le noeud ne puisse plus se défaire de manière triviale. Les grands axes de cette théorie consistent en les questions suivantes : quand deux noeuds sont-ils en réalité les mêmes, c'est-à-dire en les manipulant dans l'espace peut-on arriver à passer de l'un à l'autre ; en particulier, quand un noeud est-il à cette manipulation près le non-noeud, c'est-à-dire un simple cercle. Pour arriver à répondre à ces questions, un grand aspect pratique de la théorie consiste à créer des invariants de noeuds, ce qui consiste concrètement à associer à chaque noeud une quantité de sorte que si deux noeuds sont les mêmes alors on leurs associe la même quantité. Le but de cette première étude est d'établir plusieurs invariants de noeuds dont celui qui tiendra un rôle principal ici, à savoir le polynôme de Jones.

### 8.1 Premières propriétés

#### 8.1.1 Définition

##### Définition-propriété. (*Nœud*)

Soit  $N$  une partie de  $\mathbb{R}^3$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $N$  est homéomorphe à  $S^1$ .
- (ii) Il existe  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  injective d'image  $N$ .
- (iii) Il existe  $\varphi : S^1 \rightarrow N$  injective.
- (iv)  $N$  est le support d'un lacet simple dans l'espace.
- (v)  $N$  est homéomorphe à une sous-variété lisse de dimension 1 de  $\mathbb{R}^3$ .

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que  $N$  est un *nœud (topologique)*.

**Fait. (Indifférence homotopique des nœuds)**

Tout nœud est homéomorphe à  $S^1$ .

### Exercice 1

Montrer qu'étant donné un noeud  $N \subseteq \mathbb{R}^3$  et  $\varphi$  la donnée de ce noeud sous forme d'un plongement, alors si  $\varphi'$  est continue sur  $S^1$  d'image  $N$ ,  $\varphi' = \varphi \circ T$  où  $T$  est un automorphisme de  $S^1$  affine par morceaux.

### 8.1.2 Exemples fondamentaux

#### Exemples

1. (*Non-nœud*) Le plongement trivial de  $S^1$  par restriction de l'identité de  $\mathbb{R}^3$ , est un nœud, dit *non-nœud*.
2. Toute courbe fermée plane est un noeud (trivial).

### 8.1.3 Image miroir d'un nœud

**Définition. (Image miroir d'un nœud)**

L'*image miroir d'un nœud*  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est le nœud  $r \circ \varphi$  où

$$\begin{aligned} r: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow R^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x,y,-z). \end{aligned}$$

## 8.2 Diagrammes de nœud

### 8.2.1 Axiomes des diagrammes de nœud



L'*image miroir d'un noeud*, contrairement à ce qui se passe pour le trèfle, n'est pas forcément le noeud d'orientation inverse.

#### Lemme

Un diagramme de nœud à  $n \in \mathbb{N}$  croisements partage le plan en  $n + 2$  régions.

▷ Conséquence facile de la relation d'Euler. ■

### 8.2.2 Projections régulières des nœuds

### 8.2.3 Mouvements de Reidemeister

## 8.3 Invariants de nœud

### 8.3.1 Groupe de nœud

#### Exercice 2 (*Groupe du nœud trivial*)

Déterminer  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$ .

### 8.3.2 Polynôme d'Alexander

#### Proposition

Le polynôme d'Alexander est un invariant de nœud.

▷ Il suffit de voir que les mouvements de Reidemeister ne font intervenir qu'au plus trois régions deux à deux adjacentes. Il suffit d'en considérer deux que l'on supprimera dans la matrice d'incidence. ■

#### Exemples. (*Polynômes d'Alexander*)

1. Le polynôme d'Alexander du nœud trivial est 1.
2. Le polynôme d'Alexander du nœud de trèfle est  $-t^2 + t - 1 \cong t - 1 + t^{-1}$ .

### 8.3.3 Polynôme de Jones

#### Exemples. (*Polynômes de Jones*)

1. Le polynôme de Jones du nœud trivial est 1.
2. Le polynôme de Jones du nœud de trèfle est  $t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \cong -t^4 + t^3 + t$ .

On peut le faire avec les relations d'écheveau. Il faut donc au passage montrer que le polynôme de l'entrelacs de Hopf est  $-t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{3}}$  et que celui d'un double nœud trivial est  $-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ .

### 8.3.4 Polynôme de Kauffman

## 8.4 Homologies de nœud

### 8.4.1 Homologie de Khovanov



# Chapitre 9

## Exercices

### Difficulté des exercices :

- Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.



# Appendice



# Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition



# Table des figures

1.6.1 <i>Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière.</i> —	17
2.1.1 <i>Distance de l'origine à la sphère unité.</i> — . . . . .	25
2.1.2 <i>Distance de la fourche à un point de la bissectrice.</i> — . . . . .	25
2.3.1 <i>Invariance de la limite par permutation.</i> — . . . . .	29
3.2.1 <i>Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle.</i> — . . . . .	64
3.3.1 <i>Quotient d'un disque par sa frontière sphérique.</i> — . . . . .	66
3.3.2 <i>Un ruban de Möbius dans notre monde.</i> — . . . . .	67
3.3.3 <i>Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes.</i> — . . . . .	70
3.3.4 <i>Espace projectif de dimension 1.</i> — . . . . .	72
3.3.5 <i>Espace projectif de dimension 2.</i> — . . . . .	72
3.3.6 <i>Vue de <math>\mathbb{P}^2</math>.</i> — . . . . .	72
3.3.7 <i>Les trois premiers simplexes standards.</i> — . . . . .	76
3.4.1 <i>Construction pas à pas du cône d'un espace <math>X</math>.</i> — . . . . .	77
3.4.2 <i>Construction pas à pas de la suspension d'un espace <math>X</math>.</i> — . . . . .	79
3.4.3 <i>Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule.</i> — . . . . .	80
3.4.4 <i>Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.</i> — . . . . .	81
3.4.5 <i>Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle.</i> — . . . . .	84
3.4.6 <i>Bouquet à trois fleurs.</i> — . . . . .	84
3.4.7 <i>Bouquet à cinq cercles.</i> — . . . . .	84
3.4.8 <i>Bouquet à quatre sphères.</i> — . . . . .	85
3.4.9 <i>Joint topologique de deux segments.</i> — . . . . .	85
3.5.1 <i>La suspension du segment unité, non séparée.</i> — . . . . .	87
3.5.2 <i>Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes.</i> — . . . . .	107
3.5.3 <i>Le sinus fermé du topologue.</i> — . . . . .	112
3.5.4 <i>Le cercle polonais.</i> — . . . . .	113
4.4.1 <i>Structure cellulaire du plan projectif.</i> — . . . . .	140
4.5.1 <i>Deux applications homotopes.</i> — . . . . .	146
4.5.2 <i>Deux espaces homotopiquement équivalents non homéomorphes.</i> — . . . . .	150
4.5.3 <i>Illustration de la notion de rétraction.</i> — . . . . .	155

4.5.4 Propriété d'extension des homotopies. —	156
4.5.5 La projection radiale du gobelet plein sur le gobelet. —	158
4.5.6 Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne. —	158
4.6.1 Conification d'une partie d'un espace.. —	171
4.7.1 Fibration de Hopf classique. —	175
4.7.2 Revêtement canonique du cercle. —	178
4.8.1 Démonstration du théorème de van Kampen, version faible. —	191
4.8.2 Applications du théorème de van Kampen. —	197
4.10.1 Exemples de $\Delta$ -complexes classiques. —	214
4.10.2 Différentielle simpliciale sur trois branches. —	215
4.10.3 Différentielle simpliciale sur le pentagone. —	216
4.10.4 Différentielle simpliciale sur le triangle. —	216
5.3.1 Décomposition du prisme. —	231
5.3.2 Triangulation du prisme sur le triangle. —	232
5.3.3 Une seule et même 1-chaîne de $\mathcal{C}(X,A)$ . —	238
5.3.4 Un 1-cycle de $\mathcal{C}(X,A)$ . —	238
5.3.5 Homologie d'un conifié par l'excision. —	245
5.3.6 Homologie du tore par Mayer-Vietoris. —	248
5.3.7 Plan projectif et ruban de Möbius. —	249
5.3.8 Homologie d'un bouquet de deux sphères par Mayer-Vietoris. —	250
5.3.9 Homologie de la suspension par Mayer-Vietoris. —	251
5.3.10 Homologie de la bouteille de Klein par Mayer-Vietoris. —	253
6.1.1 Illustration de la catégorie relative avec une paire topologique et un morphisme de paires. —	293
6.1.2 Cylindre pointé. —	301
6.1.3 Cône pointé. —	302
6.1.4 Suspension pointée. —	302
6.1.5 Chemin pointé. —	303
6.1.6 Smash-carré du cercle $S^1$ . —	305
6.1.7 Premières suspensions des sphères. —	307
6.1.8 Pincement. —	309
6.1.9 Principe d'Eckmann-Hilton. —	315
6.1.10 Commutativité des groupes d'homotopie. —	316
6.1.11 Cône polonais homotopique. —	318
6.1.12 Cône d'une application. —	321
6.1.13 Chemin d'une application. —	324
6.1.14 Cylindre d'une application. —	326
6.1.15 Espace chemin d'une application. —	333
6.1.16 Chemins relatifs sur un espace par rapport à une partie. —	342

6.1.1 <i>Espaces lenticulaires.</i> —	346
6.1.18 <i>CW-complexe.</i> —	349
6.1.19 <i>CW-complexe relatif.</i> —	351
6.2.1 <i>Un exemple de polyèdre simplicial.</i> —	365
6.2.2 <i>Cornets.</i> —	366
6.2.3 <i>Triangulation du cercle.</i> —	369
6.2.4 <i>Étoile et link d'un sommet d'une triangulation.</i> —	371
6.2.5 <i>Applications simpliciales.</i> —	372
6.2.6 <i>Tétraèdre ordonné.</i> —	372
6.2.7 <i>Cofaces du 1-simplexe sur le 2-simplexe.</i> —	375
6.2.8 <i>Delta-complexe.</i> —	376
6.2.9 <i>Réalisation géométrique d'un simplexe.</i> —	377
6.2.10 <i>Delta-complexe sur <math>S^1</math> à deux arêtes.</i> —	378
6.2.11 <i>Delta-complexe maximal sur <math>S^1</math> à une seule arête.</i> —	378
6.2.12 <i>Codégénérescences du 2-simplexe sur le 1-simplexe.</i> —	381
6.2.13 <i>Représentation des ensembles simpliciaux.</i> —	383
6.2.14 <i>Décomposition prismatique.</i> —	399
6.2.15 <i>Décomposition prismatique de <math>\Delta^2 \times \Delta^1</math>.</i> —	404
6.2.16 <i>Catégorie d'homotopie infinie.</i> —	413
6.2.17 <i>Transitivité de l'homotopie simpliciale.</i> —	421
6.2.18 <i>Symétrie de l'homotopie simpliciale.</i> —	422
7.1.1 <i>Revêtement double d'orientation du ruban de Möbius.</i> —	441
7.1.2 <i>Somme connexe de deux surfaces topologiques.</i> —	447
7.1.3 <i>Classification des surfaces topologiques compactes connexes.</i> —	452
7.1.4 <i>Deux vues de la sphère avec une calotte croisée, formant le plan projectif.</i> —	453
7.1.5 <i>Vocabulaire des sommes connexes de surfaces.</i> —	455
7.1.6 <i>Construction d'un cross-cap.</i> —	456
7.1.7 <i>Revêtement des surfaces compactes entre elles.</i> —	458
7.1.8 <i>Structure de CW-complexe de <math>T \# T</math>.</i> —	465
7.2.1 <i>Cup-produit de deux cochaînes évalué en une chaîne.</i> —	470
7.2.2 <i>Classe fondamentale relative.</i> —	484
7.3.1 <i>Orientation du cylindre à bord.</i> —	497



# Liste des tableaux

4.1	<i>Récapitulatif sur les groupes topologiques.</i> —	132
5.1	<i>Diagramme de Venn : topologie générale, homotopie et homologie.</i> —	260
6.1	<i>Premiers groupes d'homotopie des sphères.</i> —	344