Identifications

Les mathématiques comparent les phénomènes les plus divers
et découvrent les analogies secrètes qui les unissent. — Joseph FOURIER

Principe
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie concrète « bien faite »[1]. Si X et X' sont deux objets de $\mathcal{C}$, si X et X' sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, alors toute propriété relative[2] à $\mathcal{C}$ vraie pour X se transmet à X'.

Groupes

- $\mathfrak{A}_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
- $D_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\mathfrak{S}_3 \simeq D_6$
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
- $PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{C})$
- $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$
- $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$
- $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
- $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$
- $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$
- $O(n)/SO(n) \simeq \mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$
- $SO_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} & \text{si } -1 \text{ est un carré modulo } q \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$
- $PSO(4) \simeq SO(3) \times SO(3)$
- $SU(2) \times SU(2)/\{\pm(1,1)\} \simeq SO(4)$

Anneaux

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $n \wedge m = 1$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(n \wedge m)\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$

Corps

- $\mathbb{F}_q^* \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ pour $p \in \mathcal{P}$

Espaces topologiques

- $B^n/S^{n-1} \simeq S^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

---

[1] Dont les morphismes préservent la structure des objets.
[2] Qui s'exprime en termes de morphismes.

- $S^n \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \simeq B^n$ **pour** $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$
- $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2$
- $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (S^1)^n$ **pour** $n \in \mathbb{N}$
- $SO(2) \simeq S^1$
- $SU(2) \simeq S^3$
- $SU(2)/\{\pm 1\} \simeq SO(3)$
- $SO(n+1)/SO(n) \simeq S^n$ **pour** $n \in \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \simeq S^1$
- $\mathbb{P}^3\mathbb{R} \simeq SO(3)$
- $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \simeq S^2$
- $GL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$