Homotopie avancée

Motivation. On a deux théories homotopiques raisonnables envisageables dans Top : celle à équivalence d'homotopie près (catégorie $\mathrm{Top}[h\text{-eq}^{-1}]$) et celle à équivalence faible d'homotopie près (catégorie $\mathrm{Top}[fh\text{-eq}^{-1}]$). Puisqu'en général les localisées ne ressemblement pas aux catégories de départ, on a besoin d'un *modèle* de celles-là. Problème : les limites ne se comportent pas bien dans ces catégories. Par exemple, le pushout n'est pas préservé par équivalence d'homotopie : $[0,1] \cong \{*\}$ mais $\{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} \{*'\} \simeq \{*\} \ncong S^1 \simeq \{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} [0,1]$. De même, les pullbacks ne sont pas préservés par équivalences d'homotopie.
Autre exemple : dans les catégories de complexes de chaînes, les noyaux ne sont pas invariants par quasi-isomorphismes : si R est un anneau, le complexe C constant en R alternant pour différentielles id_R et $0_{R\to R}$: $\dots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} \dots$ ici écrit en degrés $(1,0,-1)$, est exact donc en particulier quasi-isomorphe à 0. De même pour le complexe $C' = \Sigma^{-1}C$. Dans $Ch(R)$, $\mathrm{Ker}(0 \to 0) \simeq 0$ (ouf). Cependant, en considérant le morphisme de complexes $\varphi : C \to C'$ donné par $\varphi_{2n} = 0$ et $\varphi_{2n+1} = id_R$, c'est un quasi-isomorphisme et $\mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\varphi} D)$ n'est pas quasi-isomorphe à 0. De même, les conoyaux ne sont pas préservés par quasi-isomorphismes.
Encore un exemple : un foncteur linéaire $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ induit un foncteur $Ch(R) \to Ch(S)$ qui en général ne préserve pas les quasi-isomorphismes et donc ne passe pas aux catégories dérivées $\mathcal{D}(R) = Ch(R)[\mathrm{qis}^{-1}]$. On peut prendre par exemple $\mathrm{Hom}(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathbb{Z}\text{-Mod}$ pour M un R-module fixé qui n'est pas projectif (puisque les foncteurs exacts préservent les quasi-isomorphismes), tel $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$. C'est pour cette raison qu'on entend parfois dire les homotopistes que la catégorie dérivée n'est pas une catégorie.
Algèbre homologique et homotopie des espaces topologiques s'intriquent naturellement. Par exemple, de même que la catégorie des complexes de chaînes a assez de projectifs, *i.e.* à quasi-isomorphisme près, tout objet est équivalent à un projectif, dans Top, à équivalence faible d'homotopie près, tout espace est équivalent à un CW-complexe. On généralise conjointement ces deux notions.

1 Catégories de modèle

1.1 Définition et premières propriétés

Définition. *(Rétract catégorique)* Un morphisme $f : A \to B$ d'une catégorie est un rétract d'un morphisme $h : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "id_A"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "id_B"'] & Y \arrow[r] & B. \end{tikzcd}$$

Si les applications verticales sont l'identité, on retrouve le cas d'un rétract entre objets.
Définition. *(Catégorie de modèle)* Une catégorie de modèle (fermée) est une catégorie C munie de trois classes de flèches $\mathscr{W}$ dites *équivalences faibles* notées $\xrightarrow{\sim}$, Cof dites *cofibrations* notées $\rightarrowtail$ et Fib dites *fibrations* notées $\twoheadrightarrow$, telles que

1. C est complète et cocomplète, d'objets initiaux et terminaux $\emptyset$ et $*$ (ne dépend que de C) ;
2. *(Propriété* 2 *parmi* 3*)* Pour tout triangle commutatif, si deux flèches sont dans $\mathscr{W}$, la troisième aussi (ne dépend que de $(C,\mathscr{W})$) ;
3. un rétract d'une flèche d'une des trois classes ci-dessus est encore dans cette classe ;
4. *(Relèvements)* Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\check{f}"] & Y, \end{tikzcd}$$

   $\check{f}$ existe dès que l'une des flèches verticales est une équivalence faible ;
5. *(Axiomes de factorisation)* On dit que $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}$ sont les *cofibrations acycliques*, $\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$ les *fibrations acycliques*. Toute flèche $f : X \to Y$ de C se factorise en $X \rightarrowtail C_f \to Y$ où la flèche de droite est une fibration acyclique et en $X \to P_f \twoheadrightarrow Y$ où la flèche de gauche est une cofibration acyclique, et souvent on veut ceci de façon naturelle, *i.e.* $f \mapsto C_f, f \mapsto P_f$ foncteurs.

Cofibrations-fibrations acycliques et cofibrations acycliques-fibrations sont duales et forment ce que l'on appelle un *système de factorisation* en vertu des deux derniers axiomes.
Propriété. Un objet X est *cofibrant* si $\emptyset \to X$ est une cofibration, *fibrant* si $X \to *$ est une fibration, *bifibrant* si les deux. On peut remplacer tout objet fonctoriellement par un cofibrant $L(X)$ ou un fibrant $R(X)$ faiblement équivalent via une fibration respectivement une cofibration. Une telle équivalence est appelée *remplacement cofibrant* respectivement *remp. fibrant* ou *résolution cofibrante* respectivement *rés. fibrante*. On note C^c,C^f,C^{cf} les sous-catégories pleines de cofibrants, fibrants, bifibrants.
Exemple. L'espace de Sierpiński est non cofibrant.
Fait. Si L est cofibrant, $f : L \to Y$ une flèche, on a

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ L \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

et de même pour les fibrants.
Propriété. Le produit de deux catégories de modèles donné par $(C \times C', \mathscr{W} \times \mathscr{W}', \mathrm{Cof} \times \mathrm{Cof}', \mathrm{Fib} \times \mathrm{Fib}')$ est une catégorie de modèle. L'opposée d'une catégorie de modèle munie des flèches opposées est une catégorie de modèle.
Exemples.

1. Une catégorie bicomplète avec $\mathscr{W} = \mathrm{Iso}(C)$, $\mathrm{Cof} = \mathrm{Fib} = \mathrm{Mor}(C)$ est trivialement de modèle.
2. Sur Ens, (*bijections*,*injections*,*surjections*) n'est pas de modèle (à cause de $MC5$), mais (*bijections*,Ens,Ens) et (Ens,*injections*,*surjections*) le sont.
3. *(Quillen)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie, Fib les fibrations de Serre et Cof les rétracts d'applications cellulaires relatives. On remarque que tous les espaces topologiques sont fibrants.
4. *(Strøm)* Top munie de $\mathscr{W}$ les équivalences d'homotopie, Fib les fibrations et Cof les cofibrations d'image fermée. Ici les tous les espaces sont fibrants et cofibrants !
5. ΔEns munie de $\mathscr{W}$ les équivalences faibles d'homotopie simpliciale, Cof les inclusions de sous-ensembles simpliciaux, Fib les fibrations de Kan. Tout ensemble simplicial est cofibrant et les fibrants sont les complexes de Kan *(on verra tout cela plus tard)*.
6. Sur une catégorie de complexes de chaînes, la *structure projective* a pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, pour fibrations les morphismes de complexes surjectifs en chaque degré (> 0 dans $Ch_{\geqslant}(R)$) et pour cofibrations les morphismes de complexes ayant la PR par rapport aux fibrations acycliques. La *structure injective* a pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, pour cofibrations les morphismes de complexes injectifs en chaque degré (< 0) dans $Ch_{\leqslant}(R)$) et pour fibrations les morphismes de complexes ayant la PR à droite par rapport aux cofibrations acycliques.
   Dans la structure projective, les cofibrations sont les morphismes dont le conoyau est projectif en tout degré. Les cofibrants sont exactement les projectifs.
   Dans la structure injective, tous les objets sont cofibrants (dissymétrie !).

Définition. Soit $\mathcal{A}$ une classe de flèches de C. f a la propriété de relèvement à droite, respectivement à gauche, et l'on note $f \in RLP(\mathcal{A})$, respectivement $LLP(\mathcal{A})$ si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\in\mathcal{A}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{respectivement} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "\in\mathcal{A}"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B. \end{tikzcd}$$

Propriété.
1. $f \in \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib})$.
2. $f \in \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof})$.
3. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} \iff f \in LLP(\mathrm{Fib})$.
4. $f \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib} \iff f \in RLP(\mathrm{Cof})$.
5. $f \in \mathscr{W} \iff f = pi$ où $i \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Cof}, p \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$.

Corollaire.
1. Dans une catégorie de modèle deux des classes déterminent la troisième.
2. $\mathscr{W}$,Cof,Fib sont chacune stable par composition.
3. Les pushouts de cofibrations sont des cofibrations et les pullbacks de fibrations sont des fibrations.
4. Les isomorphismes sont dans l'intersection des trois classes de modèle.

1.2 Catégorie homotopie d'une catégorie de modèle

Définition. $\mathbf{Ho}(C) := C[\mathscr{W}^{-1}]$. Pour une catégorie de modèle C, une localisée est très structurée.
Lemme. Les inclusions C^c,C^f,$C^{cf} \hookrightarrow C$ induisent des équivalences de quasi-inverses induits par les remplacements cofibrants et fibrants. Il y a donc « beaucoup de cofibrants/fibrants ».
Exemples.
1. Dans Top munie de la structure de Quillen, tout espace topologique est faiblement équivalent à un espace cellulaire.
2. Dans $Ch_{\geqslant 0}(R)$, tout complexe de chaînes est équivalent à un complexe concentré en un R-module projectif et de même avec injectif.

Définition. Par analogie totale avec Top :
1. Un *cylindre* de X est une factorisation de $id_X \coprod id_X : X \coprod X \to C \to X$ en une cofibration suivie d'une équivalence faible. On note $\iota_0,\iota_1 : X \to X \coprod X \to C$ semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.
2. Un *objet en chemins* est une factorisation de $\Delta_X : X \to P \to X \times X$ en une équivalence faible suivie d'une fibration. On note $p_0,p_1 : P \to X \times X \to X$

semi-canoniquement. Ce sont des équivalences faibles.

3. Une *homotopie à gauche* entre $f,g : X \to Y$ est un morphisme H faisant commuter

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "i_0"] \arrow[r, shift right, "i_1"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & X\coprod X \arrow[r, tail] & C \arrow[r, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

pour au moins un choix de cylindre C. Une *homotopie à droite* entre f,g est un morphisme K faisant commuter

$$\begin{tikzcd} & & & X \\ X \arrow[r, dashed, "K"] \arrow[urrr, bend left, "f"] \arrow[drrr, bend right, "g"'] & P \arrow[r, two heads] & X\times X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\ & & & X \end{tikzcd}$$

pour au moins un choix d'objet en chemins P (dans Top, l'homotopie est autoduale). Une *homotopie* entre f,g est la donnée d'une homotopie à gauche et d'une homotopie à droite. Équivalence d'homotopie.

Remarques. Par les axiomes, on peut toujours trouver un cylindre où de plus la deuxième flèche est acyclique et un objet un chemins où de plus la première flèche est acyclique.
Tout cylindre est faiblement équivalent au cylindre noté $X\times I$ issu de la factorisation canonique, et donc une homotopie pour $X\times I$ en induit une pour lui, mais la réciproque est fausse en général.
Lemme. Si A est cofibrant, $X \to X\coprod A$ est une cofibration. Si Y est fibrant, $X\times Y \to X$ est une fibration.
Propriétés.

1. L'homotopie à gauche, respectivement à droite est stable par postcomposition, respectivement précomposition. Elle est stable à droite, respectivement à gauche, si leur but est fibrant, respectivement cofibrant.
2. Si A est cofibrant, respectivement fibrant, l'homotopie à gauche, respectivement à droite, est une équivalence sur $\mathrm{Hom}(A,X)$, respectivement $\mathrm{Hom}(X,A)$. De plus, une fibration acyclique respectivement une cofibration acyclique entre deux fibrants respectivement cofibrants induit une bijection par postcomposition respectivement précomposition.

Corollaire. Si A est fibrant et B cofibrant, toutes les relations d'homotopie sont égales sur $\mathrm{Hom}(A,B)$. En particulier, l'homotopie est une relation d'équivalence sur C^{cf}.
Corollaire. *(Whitehead)* Un morphisme entre bifibrants est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence d'homotopie.
Théorème. On a :

(a) L'inclusion $C^{cf} \hookrightarrow C$ induit une équivalence catégorique $C^{cf}/\text{homotopie} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Ho}(C_{cf}) \simeq \mathbf{Ho}(C)$.
(b) Des isomorphismes naturels $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(C)}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_C(L(X),R(Y))/\simeq$.
(c) Tout morphisme passant en isomorphisme dans $\mathbf{Ho}(C)$ est une équivalence faible.

1.3 Catégories de modèle cofibrement engendrées

Définition. Soit $\mathcal{I}$ un ensemble de morphismes dans C. Une *application $\mathcal{I}$-cellulaire relative* ou simplement *$\mathcal{I}$-cellulaire* dans C est un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ tel que $Y = \mathrm{colim} X^{(n)}$ où $X^{(0)} = X$ et $X^{(n+1)}$ est un pushout de la forme

$$\begin{tikzcd} \coprod_{k\in J_n} A_{i_k} \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_{k\in J_n} \varphi_{i_k}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X^{(n)} \arrow[d, "f^{(n)}"] \\ \coprod_{k\in J_n} B_{i_k} \arrow[r] & X^{(n+1)} \end{tikzcd}$$

et $f = \mathrm{colim} f^{(n)}$. Un *objet $\mathcal{I}$-cellulaire* est un objet Y tel que $0 \to Y$ est $\mathcal{I}$-cellulaire relative.
Définition. Un morphisme est *$\mathcal{I}$-injectif* ou *$\mathcal{I}$-fibrant* si $f \in RLP(\mathcal{I})$. Les *$\mathcal{I}$-cofibrations* sont $LLP(RLP(\mathcal{I}))$ *i.e.* les morphismes ayant la LLP relativement aux $\mathcal{I}$-injectifs.
Définition. C catégorie et κ un ordinal. Un objet X de C est *κ-petit* ou *κ-compact* si $\mathrm{colim}_{n\subseteq\kappa}\mathrm{Hom}_C(X,Y_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X,\mathrm{colim}_{n\subseteq K} Y_i)$.
Définition. Un objet est *compact* si $\mathrm{colim}_J \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_C(X,\mathrm{colim}_J Y)$ pour toute J filtrante. Les compacts ne sont pas compacts dans Top, mais dans la catégorie des espaces cellulaires si. Les compacts de Vect sont les espaces de dimension finie. Les compacts de Mod A sont les modules de présentation finie sur A, etc.
Définition. Une catégorie de modèle est *cofibrement engendrée* s'il l'on a deux ensembles de morphismes $\mathcal{I},\mathcal{I}_{ac}$ tels que $\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib} = RLP(\mathcal{I})$, $\mathrm{Fib} = RLP(\mathcal{I}_{ac})$ et les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ respectivement $\mathcal{I}_{ac}$ sont petites par rapports aux $\mathcal{I}$-cellulaires respectivement $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaires.
Exemples. Structures de modèle projectives. Structure de Quillen. Contre-exemple : Strøm n'est pas cofibrement engendrée.
Théorème. *(Théorème fondamental des cofibrement engendrées)* Soient C bicomplète, $\mathcal{I},\mathcal{I}_{ac}$ deux ensembles de morphismes. Soit $\mathscr{W}$ une classe dans C. Il exite une structure de modèle sur C cofibrement engendrée avec $\mathcal{I},\mathcal{I}_{ac}$ respectivement les cofibrations et cofibrations acycliques génératrices, et $\mathscr{W}$ sont les équivalences faibles, ceci si et seulement si :

(i) $\mathscr{W}$ satisfait 2 pour 3 et est stable par rétract ;

(ii) Les sources des applications dans $\mathcal{I}$ sont compactes relativement aux $\mathcal{I}$-cellulaires et celles dans $\mathcal{I}_{ac}$ aux $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaires.
(iii) Les $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaires sont dans $\mathscr{W} \cap \mathcal{I} - \mathrm{Cof}$.
(iv) Les $\mathcal{I}$-injectives (fibrations acycliques) sont dans $\mathscr{W} \cap \mathcal{I}_{ac}$-injectifs, ce dernier terme étant fibrations.
(v) L'un deux énoncés suivants est vrai : $\mathcal{I}$-Cof$\cap\mathscr{W} \subseteq \mathcal{I}_{ac}$-Cof,$\mathcal{I}_{ac}$-injectifs$\cap\mathscr{W} \subseteq \mathcal{I}$-injectifs.

Lemme. *(Argument du petit objet)* Soit C une catégorie cocomplète. Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de morphismes dans C tel que les sources des éléments de $\mathcal{J}$ sont $\mathcal{W}$-compactes relativement aux $\mathcal{J}$-cellulaires. Alors il existe une factorisation fondamentale $f : X \to Y$ dans $f : X \to C_f \to Y$ où $f : X \to C_f$ est Jj-cellulaire et $C_f \to Y$ est dans $RLP(\mathcal{J})$.
Remarque. Si $f : X \to Y$ est $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaire, $f \in LLP(\mathrm{Fib})$. Si $f : X \to Y$ est $\mathcal{I}$-cellulaire, $f \in LLP$ relaivement aux $\mathcal{I}_{ac}$-injectifs.
On peut appliquer le lemme à $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_{ac}$ pour avoir des factorisations fonctorielles de $f : X \to Y$ en :

$$X \to C_f \to Y$$

une $\mathcal{I}-$cellulaire (dans $LLP(\mathscr{W} \cap \mathrm{Fib})$ suivie d'une $RLP(\mathcal{I}_) \in \mathscr{W} \cap \mathrm{Fib}$, et :

$$X \to P_f \to Y$$

une $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaire (dans $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} \subseteq \mathcal{I}_{ac} - \mathrm{Cof}$) suivie d'une $RLP(\mathcal{I}_{ac}) = \mathrm{Fib}$.
Corollaire. Si C est cofibrement engendrée, alors les cofibrations sont les $\mathcal{I}$-cofibrations et sont des rétracts de $\mathcal{I}$-cellulaire (par factorisation cellulaire). Les cofibrations acycliques sont les $\mathcal{I}_{ac}$-cofibrations et sont des rétracts de $\mathcal{I}_{ac}$-cellulaires.

1.4 Foncteurs de Quillen

Définition. Un *foncteur de Quillen à gauche* est un adjoint à gauche préservant les cofibrations et les cofibrations acycliques. *Foncteur de Quillen à droite.* Un Quillen à gauche préserve les colimites et les objets cofibrants. Une *adjonction de Quillen* est une adjonction entre catégories de modèles faisant intervenir deux foncteurs de Quillen.
Lemme. Dans une adjonction entre catégories de modèle, l'un des adjoints est Quillen si et seulement si l'autre l'est.
Exemples. Oubli sur Quillen-Top, sur Strøm-Top.
Lemme. *(Brown, pour montrer qu'un foncteur est dérivable)* Un foncteur envoyant des cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles (en particulier un foncteur de Quillen à gauche) envoie toute équivalence faible entre objets cofibrants sur une équivalence faible. Même énoncé pour les fibrations acycliques...
Définition. $(C,\mathscr{W})$ une catégorie, $F : C \to \mathcal{D}$ un foncteur. Un *dérivé à gauche* de F est la donnée d'un foncteur $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(C) \to D$ et d'une transformation naturelle $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F \circ \pi \to F$ vérifiant la propriété universelle : pour tous $(G : \mathbf{Ho}(C) \to F,\alpha : G \circ \pi :\to F)$, il existe une transformation naturelle $\theta_F^G : G \to \mathbb{L}F$ qui factorise α *i.e.* $\alpha = G \circ \pi \xrightarrow{\theta_F^G \circ \pi} \mathbb{L}F \circ \pi \xrightarrow{\mathbb{L}\tau_F} F$. Avec le formalisme des 2-catégories, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & {} & D \\ & \mathbf{Ho}(C) \arrow[ur, "\mathbb{L}F"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \mathbb{L}\tau_F"] & \end{tikzcd}$$

dont le défaut de commutativité est contrôlé par $\mathbb{L}\tau_F$.
Un *dérivé à droite* de F est la donnée d'un foncteur $\mathbb{R}F : \mathbf{Ho}(C) \to D$ et d'une transformation naturelle $\mathbb{R}\tau_F : F \to \mathbb{R}F \circ \pi$ vérifiant la propriété universelle : pour tous $(G : \mathbf{Ho}(C) \to F,\beta : G \circ \pi :\to F)$, il existe une transformation naturelle $\theta_G^F : \mathbb{R}F \to G$ qui factorise β *i.e.* $\beta = \mathbb{R}F \circ \pi \xrightarrow{\theta_G^F \circ \pi} G \circ \pi \xrightarrow{\beta} F$. Avec le formalisme des 2-catégories, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & {} & D \\ & \mathbf{Ho}(C) \arrow[ur, "\mathbb{R}F"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow \mathbb{R}\tau_F"] & \end{tikzcd}$$

dont le défaut de commutativité est contrôlé par $\mathbb{L}\tau_F$.
Propriété. Soit $F : C \to D$ un foncteur où C est de modèle. Si F envoie les cofibrations acycliques entre cofibrants sur des isomorphismes, son foncteur dérivé à gauche existe et est donné par $X \mapsto F(L(X))$. De même pour l'existence du foncteur dérivé à droite. Conséquence : si A est cofibrant, $\mathbb{L}\tau_F : \mathbb{L}F(A) \to F(A)$ est un isomorphisme. De même pour Y fibrant et $\mathbb{R}\tau_F : F(Y) \to \mathbb{R}F(Y)$.
Définition. Un foncteur *dérivé total à gauche/à droite* de F est un dérivé à gauche/à droite du composé $C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{\pi} \mathbf{Ho}(D)$.
Propriété. Si un foncteur envoie les cofibrations acycliques entre cofibrants sur des équivalences faibles (en particulier un Quillen à gauche), son foncteur dérivé total à gauche existe. Même énoncé pour les fibrations acycliques.
Théorème. Si $F : C \rightleftarrows D : G$ une adjonction de Quillen, alors les dérivés totaux induisent une adjonction $\mathbb{L}F : \mathbf{Ho}(C) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(D) : \mathbb{R}G$.
Définition. Une *équivalence de Quillen* est une adjonction de Quillen dont l'adjonction induite est une équivalence de catégories, *i.e.* son unité et sa coünité sont des isomorphismes. On dit alors que les deux catégories de modèle sont *Quillen-équivalentes.*
Propriété. Pour une adjonction de Quillen $F : C \rightleftarrows D : G$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) c'est une équivalence de Quillen ;

(ii) pour tout cofibrant A, tout fibrant Y, une flèche $f : F(A) \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $A \to G(Y)$ est une équivalence faible ;

(iii) pour tout cofibrant A, tout fibrant Y, les flèches $A \xrightarrow{\eta} G \circ F(A) \xrightarrow{G(R_{F(A)})} G(R(F(A)))$ et $F(L(G(Y)) \xrightarrow{F(L_{G(Y)})} F \circ G(Y) \xrightarrow{\delta} Y$ sont des équivalences faibles.

Exemple. L'adjonction réalisation géométrique-homologie singulière est une équivalence de Quillen, en particuiler $X \leftarrow\!\!\shortmid |Sing(X)|$ (qui est cellulaire) est une équivalence faible d'homotopie.

1.5 Colimites et limites homotopiques

Définition. $(C,\mathscr{W})$ catégorie, D petite. Une *colimite/limite homotopique* est un foncteur dérivé total à gauche/à droite du foncteur colimite, notées $\mathbb{L}\mathrm{colim}_D,\mathbb{R}\lim_D$. Attention, une colimite homotopique n'est pas toujours une colimite dans $\mathbf{Ho}(C)$ *i.e.* $\mathbf{Ho}(C^D) \ncong \mathbf{Ho}(C)^D$.

Lemme. Si C^D admet une structure de modèle étendant les équivalences faibles telle que le foncteur constant $cst : C \to C^D$ soit de Quillen à droite, alors la colimite homotopique existe. Si de plus $\alpha : F \to F'$ une transformation naturelle entre diagrammes est faible objet par objet, alors la flèche naturelle $\mathbb{L}\mathrm{colim}_D(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathbf{Ho}(C)$. On a les mêmes propositions à gauche pour les limites homotopiques.

1.6 Constructions de catégories de modèle

Définition. *(Structure de modèle de Quilen)* Les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'hompotopie, les fibrations sont les applications qui ont la propriété de relèvement à droite relativement aux $I^n \hookrightarrow I^{n+1}$ (qui sont des cofibrations acycliques) et $\mathscr{W} \cap \mathrm{Cof} = LLP(\mathrm{Fib})$.

Lemme. $P : X \to Y$ est une fibration acyclique si et seulement si $P \in RLP(\partial I^{n+1} \hookrightarrow I^{n+1}, n \geqslant 0)$.

Définition. Notons $D^n(M)$ le complexe ayant M et M seulement en degrés n et $n-1$, avec id les joignant. $0 \xrightarrow{\sim} D^n(M)$ est une cofibration acyclique si M est projectif. Notons $S^n(M)$ le complexe ayant M seulement en degré n. $S^n(M) \hookrightarrow D^{n+1}(M)$ donnée par l'identité seulement entre M et M, est une cofibration si M est projectif (et dans $Ch_{\geqslant}(R)$ si $n \geqslant 0$). $D^n(M) \to S^n(M)$ donnée semblablement est une fibration.

Propriété. f morphisme de complexes. f est une fibration pour la structure projective si et seulement si $f \in RLP(0 \hookrightarrow D^n(R)$ (pour $n \geqslant 1$ dans $Ch_{\geqslant}(R)$). f est une fibration acyclique toujours si et seulement si $f \in RLP(S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R))$ (idem).

1.7 Catégories de modèle combinatoires

Définition. Une *catégorie de modèle combinatoire* est une catégorie cofibrement engendrée telle qu'il existe un ensemble de compacts $\{X_i, i \in I\}$ tel que chaque objet est colimite filtrante de X_i (typiquement $Ch_{\geqslant 0}(R)$, ΔEns...).

Théorème. $\mathcal{D}$ petite, C de modèle. Si C est cofibrement engendrée, la structure projective sur $C^{\mathcal{D}}$ est de modèle et cofibrement engendrée. Si C est combinatoire, la structure injective sur $C^{\mathcal{D}}$ est de modèle et combinatoire. En particulier, les colimites homotopiques sur $\mathcal{D}$ existent dans ces cas.

Définition. *(Structure projective sur $\mathcal{D}$)* Soit $F : C \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ une adjonction. $f : X \to Y \in \mathscr{W}_{\mathcal{D}} \iff G(f) \in \mathscr{W}_C$, $f \in \mathrm{Fib}_{\mathcal{D}} \iff G(f) \in \mathrm{Fib}_C, \mathrm{Cof}_{\mathcal{D}} = LLP(\mathrm{Fib}_{\mathcal{D}})$. Si c'est une structure de modèle, G sera Quillen à droite et donc on aura une adjonction de Quillen.

Théorème. *(Transfert de Quillen)* On suppose C est cofibrement engendrée. Si G préserve les colimites filtrantes et l'un des deux énoncés suivants est vrai : pour tout $A \in \mathcal{D}$, pour tous $\alpha_i : A'_i \to B'_i \in \mathcal{I}_{ac}$, pour tous $F(A_i) \to A$, l'application canonique $A \to A \sqcup_{F(A_i)} F(B'_i) \in \mathscr{W}_{\mathcal{D}}$; pour tous $f : X \to Y$ tel que $f \in RLP(F(\mathcal{I}))$, $f \in \mathscr{W}$: alors la structure projective est de modèle, cofibrement engendrée et $F(\mathcal{I}),F(\mathcal{I}_{ac})$ sont générateurs.

Exemple. On a une adjonction via le foncteur d'oubli de la structure d'algèbre de la catégorie $DGCA(R)$ des algèbres différentielles commutativement graduées vers $Ch_{\geqslant 0}(R)$ et sy en sens inverse donnée par $(A,d^A) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} (A_0^{\otimes n})_{\mathfrak{S}_n}$ (*i.e.* pris modulo l'action de $\mathfrak{S}_n$), ce terme valant aussi $A^{\otimes n} \otimes_{R(\mathfrak{S}_n)} R$. Argument : $(X,d) \mapsto (X,d) \otimes_R \mathfrak{S}(D^n(R))$ est un quasi-isomorphisme et l'on veut que $0 \xrightarrow{\sim} D^n(R)$ en soit un ; on veut donc que $sy(0 \xrightarrow{\sim} D^n(R)$ soit encore un quasi-isomorphisme. Or $- \otimes_{R(\mathfrak{S}_n)} -$ est exact d'où le résultat.

2 Simplicialité avancée

2.1 Adjonction simpliciale fondamentale

Théorème. *(Encore de Quillen)* ΔEns est de modèle où les équivalences faibles sont celles qui induisent des équivalences faibles sur les réalisations géométriques, et cofibrement engendrée par $\mathcal{I} = (\delta\Delta^n \to \Delta^n, n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{I}_{ac} = (\Lambda_i^n \to \Delta^n, n \in \mathbb{N}, i \in [\![0,n]\!])$. Les fibrations sont les fibrations de Kan, *i.e.* $RLP(\Lambda_i^n \hookrightarrow \Delta^n)$ et les cofibrations sont les inclusions en tous degrés.

Remarque. Tous les simpliciaux sont cofibrants, mais même $\Delta^n, n \in \mathbb{N}^*$ n'est pas fibrant.

Fait. ΔEns est filtrée grâce au k-squelette qui induit un diagramme en pushout sur le k-squelette indexé par les k-simplexes non dégénérés.

Propriété. L'adjonction réalisation géométrique-homologie singulière est une adjonction de Quillen et en particulier $\mathbb{L}|-| : \mathbf{Ho}(\Delta\mathrm{Ens}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathrm{Top}) : \mathbb{R}\mathrm{Sing}$.

2.2 Homotopie simpliciale

Fait. On a un objet cylindrique standard pour X donné par $X \times \Delta^1$.
Définition. $\mathrm{Map}(X,Y)$ où $\mathrm{Map}(X,Y)_n = \mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(X \times \Delta^n, Y)$.
Fait. Un objet en chemins standard est donné par $\mathrm{Map}(\Delta^1, X)$. On a bien une fibration de Kan par la proposition :
Propriété. Soit $L \hookrightarrow K$ une cofibration et $X \twoheadrightarrow Y$ une fibration de Kan. Alors $\mathrm{Map}(K,X) \to \mathrm{Map}(L,X) \times_{\mathrm{Map}(L,Y)} \mathrm{Map}(K,Y)$ canonique est une fibration de Kan. Si de plus $L \subseteq K$ est acyclique, ou f l'est, alors elle est acyclique.
Corollaire. On a un isomorphisme naturel en les trois variables $\mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(L, \mathrm{Map}(K,X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(L \times K, X)$.
Définition. $\mathrm{Map}(X,Y)_0 = \mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(X,Y)$. On peut aussi voir la relation d'homotopie (pour Y fibrant) sur $\mathrm{Map}(X,Y)_0$ comme suit : soit X fibrant = complexe de Kan. On définit la relation $\simeq$ sur X_0 par $v_0 \simeq v_1$ si $\exists \sigma \in X_1$ tel que $d_1(\sigma) = v_0, d_0(\sigma) = v_1$.
Fait. Si X est fibrant, $\simeq$ et une relation d'équivalence et l'on note $\pi_0(X) = X_0/\simeq$ et $\pi_0(X) \simeq \pi_0(|X|)$.
Lemme. Si Y est fibrant, $\mathrm{Map}(X,Y)/\simeq \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(X,Y)/\simeq$ où la relation à gauche est la relation d'équivalence pour un complexe de Kan et celle la relation à droite est la relation d'homotopie pour la structure de modèle de ΔEns. La raison est que la relation définie $\simeq$ revient à prendre un sommet dans $\mathrm{Map}(\Delta^1, X)$ tel que $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \xrightarrow{(d_1^*, d_0^*)} X \times X$ soit (v_0, v_1).
Remarque. Si l'on a $Y \xrightarrow{\sim} Y'$ entre ensembles simpliciaux fibrants, $\mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Y')$ induit un isomorphisme après être passé à l'homotopie.
Fait. Pour tout Y, $\mathrm{Map}(*,Y) = Y$. En particulier, si Y,Y' sont des fibrants équivalents, $\pi_0(Y) \simeq \pi_0(Y')$. En particulier pour tout ensemble simplicial X, pour tous remplacements fibrants R_X, R'_X de X, $\pi_0(R_X) \simeq \pi_0(R'_X)$.
Définition. On peut donc définir de manière cohérente $\pi_0(X) = \pi_0(R(X))$ pour tout ensemble smiplicial. Autrement dit on remplace $\mathrm{Map}(L,Y)$ par $\mathbb{R}\mathrm{Map}(L,Y) = \mathrm{Map}(L, R(Y))$.
Définition. Soit X fibrant, $x_0 \in X_0$ un point. On définit l'*espace des lacets basés en* x_0 $\Omega_{x_0}(X)$ comme le pullback dans ΔEns

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{x_0}(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Map}(\Delta^1, X) \arrow[d, "(d_0,d_1)^*"] \\
\{x_0\} \arrow[r] & X \times X.
\end{tikzcd}$$

Notons que $(\Omega_{x_0}X)_0 = \{\gamma \in X_1 \mid d_0(\gamma) = d_1(\gamma) = x_0\}$. $\Omega_{x_0}X$ est fibrant (car $\Omega_{x_0}X \to \{*\}$, car $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \to X \times X$, car $\{0,1\} \hookrightarrow \Delta^1$ est une fibration). On définit donc $\pi_1(X,x_0) = \pi_0(\Omega_{x_0}(X)$. **Remarque.** $\pi_1(X) =$

$$\left\{ \begin{tikzcd}
f : \Delta^1 \arrow[r] & X \\
\partial\Delta^1 \arrow[r] \arrow[u] & \{x_0\} \arrow[u]
\end{tikzcd} \right\} / \simeq .$$

Définition. On itère pour définir $\Omega^n_{x_0}X$ en remplaçant $\mathrm{Map}(\Delta^1, X)$ par $\mathrm{Map}(\Delta^n, X)$ et $X \times X$ par $\mathrm{Map}(\partial\Delta^n, X)$. C'est fibrant et on pose $\pi_n(X,x_0) = \pi_0(\Omega^n_{x_0}X)$.
Fait. $\pi_n(X,x_0)$ est en bijection avec la définition classique en terme de relation d'équivalence sur X_n). **Fait.** $\pi_k(\Omega^n_{x_0}X, x_0) \simeq \pi_{n+k}(X,x_0)$. **Remarque.** Si l'on a $X \xrightarrow{\sim} X'$ entre ensemble simpliciaux fibrants, les applications induites $\pi_n(X,x_0) \to \pi_n(X, f(x_0))$ sont des isomorphismes pour tout $x_0 \in X$.
Fait. Si $f : X \twoheadrightarrow Y$ est une fibration. Alors les fibres F_{y_0} de $X \to Y$ c'est-à-dire les pullbacks

$$\begin{tikzcd}
F_{y_0} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\{y_0\} \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

sont fibrantes. **Propriété.** $\pi_{n \geqslant 1}(X,x_0)$ est un groupe, abélien pour $n \geqslant 2$,car $\Omega_{x_0}X \times \Omega_{x_0}X \to \Omega_{x_0}X$ est donnée par pullback.
Propriété. Soit $f : X \twoheadrightarrow Y$ une fibration entre fibrants et $y_0 = f(x_0)$. Alors il existe une suite exacte longue naturelle

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F_{y_0}, x_0) \longrightarrow \pi_n(X,x_0) \longrightarrow \pi_n(Y,y_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F_{y_0}, x_0) \longrightarrow \ldots$$

de même que dans Top.
Corollaire. Si X est fibrant, $\pi_n(X,x_0) \simeq \pi_n(|X|, |x_0|)$ et avec la correcte définiion de π_n, on peut enlever l'hypothèse fibrante. Preuve par récurrence grâce à la SEL appliquée à la fibration $\mathrm{Map}(\Delta^n, X) \to \mathrm{Map}(\partial\Delta^n, X)$.

2.3 Généralisations de l'homotopie simpliciale

Fait. *(Adjonction oubli-libre* ΔEns-ΔAb*)* On a une adjonction $\mathbb{Z}[-] : \Delta\mathrm{Ens} \rightleftarrows \Delta\mathrm{Ab} : U$ donnée par $X \mapsto Z[X]$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base X. Ainsi, ΔAb est de modèle où les équivalences faibles sont celles telles que $|f| : |A| \to |B|$ est une équivalence faible et les fibrations sont celles d'ensembles simpliciaux. **Fait.** Un groupe abélien simplicial est toujours fibrant comme ensembe simplicial.
Définition. ΔAb a une structure cofibrement engendrée donnée par la structure projective : de ΔAb à $Ch_{\geqslant 0}(\mathbb{Z})$, à A on associe $C_\bullet(A)$ tel que $C_n(A) = A_n$ et la différentielle $d : C_n(A) \to C_{n-1}(A), a \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(a)$ sur les faces $d_i : A_n \to A_{n-1}$.
Remarque. Ceci n'utilise pas les dégénérescences. Soit $s(A)$ le sous-coomplexe couvert par les dégénérescences *i.e.* $s(A)_n = \{\mathrm{Im}(s_i : A_{n-1} \to A_n)\}$. Il est acyclique et $(A,d) \to (A/s(A), d) := N(A)$ *(complexe de Dold-Kan)* est un quasi-isomorphisme.
Théorème. *(Dold-Kan)* Le foncteur de normalisation N est un adjoint à droite $\Delta\mathrm{Ab} \rightleftarrows Ch_{\geqslant 0}(\mathbb{Z}) : G$ qui est une équivalence de catégories abéliennes.

De plus, c'est une équivalence de Quillen avec la structure projecctive de chaque côté. **Remarque.** Le *foncteur qui calcule l'homologie* $\Delta\mathrm{Ens} \xrightarrow{\mathbb{Z}[-]} \Delta\mathrm{Ab} \xrightarrow{N} Ch(\mathbb{Z})$ est de Quillen à droite et donc commute avec les colimites homotopiques (par exemple, on retrouve Mayer-Vietoris, des théorèmes d'écrasement et la SEL d'une paire) et préserve les équivalences faibles *(invariance homotopique de l'homologie)*.

2.4 Enrichissement simplicial

Remarques.

1. ΔEns a un Hom interne, *i.e.* $\mathrm{Map}(X,Y) \in \Delta\mathrm{Ens}$.
2. On peut le dériver : $\mathbb{R}\mathrm{Map}(X,Y) = \mathrm{Map}(X;R(Y))$. Il a deux propriétés : si $f : Y \xrightarrow{\sim} Y'$ est une équivalence faible, $\mathbb{R}\mathrm{Map}(X,Y) \xrightarrow{\mathbb{R}f} \mathbb{R}\mathrm{Map}(X,Y')$ aussi (ce n'est pas vrai pour $\mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Y')$) et $\mathbb{R}\mathrm{Map}(X,Y)$ est fibrant *i.e.* un complexe de Kan, et représente le type d'homotopie des applications entre simpliciaux, bien défini à équivalence faible près.

Définition. Une *catégorie simplicialement enrichie* C est la donnée d'un relèvement de $\mathrm{Hom}_C(x,y)$ vers un ensemble simplicial $\mathrm{Map}(x,y)$ tel que $\mathrm{Map}_C(x,y)_0 = \mathrm{Hom}_C(x,y)$ et on peut composer $\mathrm{Map}_C(x,y)\times\mathrm{Map}_C(y,z) \to \mathrm{Map}_C(x,z)$ dans ΔEns de façon unitaire, associative et compatible avec le Hom. On note Cat_Δ la catégorie des catégories simplicialement enrichies. On a un plongement $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}^\Delta, C \mapsto C^\Delta$ où $\mathrm{Map}_C(x,y)_n = \mathrm{Hom}_C(x,y)$ est constant.

Exemples.

1. ΔEns
2. Top avec $\mathrm{Map}(X,Y)_n = \mathrm{Map}(X \times \Delta^n,Y)$ puisque $n \mapsto \Delta^n$ est cosimplicial.
3. $Ch(\mathbb{Z})$, en effet : pour $(A,d^A),(B,d^B)$, on définit $(\mathrm{Hom}(A,B),d)$ avec $\mathrm{Hom}(A,B)_n = \{(A_k \to B_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}}\}$ et $d(\varphi) = d^B \circ \varphi - (-1)^k \varphi \circ^A$. C'est un $\mathbb{Z}$-complexe et quitte à le tronceur, l'image par le foncteur G de Dold-Kan $\mathrm{Map}(A,B) = G(\mathrm{Hom}(A,B)) \in \Delta\mathrm{Ens}$.

Définition. Si C est simplicialement enrichie, $\mathrm{Map}_C(x,y) \in \Delta\mathrm{Ens}$ donc on a des espaces de Map à homotopie près. Dans ΔEns, $\pi_0(\mathbb{R}\mathrm{Map}(x,y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\Delta\mathrm{Ens})}(x,y) \simeq \mathbb{R}\pi_0(x,y)/\simeq$ l'homotopie en termes de $\mathbb{R}\mathrm{Map}(x,y)_1$. On définit $\pi_0(C)$ la catégorie ayant les mêmes objets que C et $\mathrm{Hom}_{\pi_0(C)}(x,y) = \pi_0(\mathrm{Map}_C(x,y)) := \pi_0(R(\mathrm{Map}_C(x,y))$ le remplacement fibrant dans ΔEns.

Lemme. $\pi_0(C)$ est une catégorie et π_0 est un foncteur. On a une adjonction $\pi_0 : \mathrm{Cat}_\Delta \rightleftarrows \mathrm{Cat} : i$ le *foncteur de Dold-Kan*. Son unité est peu intuitive. On va définir une structure de modèle sur Cat_Δ pour en faire une adjonction de Quillen.

Définition. *(Structure de modèle de Dwyer-Kan)* Un foncteur $F : C \to \mathcal{D}$ entre objets Cat_Δ est :

- ⋆ une *équivalence de Dwyer-Kan* si : pour toutes paires $x,y \in C$, $\mathrm{Map}_C(x,y) \xrightarrow{f} \mathrm{Map}\mathcal{D}(f(x),f(y))$ est une équivalence faible dans ΔEns ; $\pi_0(f) : \pi_0(C) \to \pi_0(\mathcal{D})$ est une équivalence de catégories.
- ⋆ une *fibration de Dwyer-Kan* si : [...] une fibration dans ΔEns ; pour tous objets $x \in C, y \in \mathcal{D}$, toute équivalence $\gamma : f(x) \to y$ dans $\mathcal{D}$, il existe une équivalence $\gamma' : x \to x'$ dans C telle que $f(\gamma') = \gamma$.
- ⋆ une *cofibration de Dwyer-Kan* si elle a la LLP par rapport à toutes les fibrations de Dwyer-Kan.

Théorème. *(Dwyer-Kan-Bergner)* La structure de Dywer-Kan est cofibrement engendrée et π_0 est alors de Quillen à gauche.
Remarque. Un fibrant de Cat_Δ est une catégorie simplicialement enrichie telle que pour tous x,y, $\mathrm{Map}_C(x,y))$ est un complexe de Kan (ainsi pas besoin de remplacement fibrant).

2.5 Catégories de modèle simpliciales

Définition. Une *catégorie de modèle simpliciale* est une catégorie de moèdle munie de $\boxtimes : C \times \Delta\mathrm{Ens} \to C,(A,X) \mapsto A^{\boxtimes X}$ et une exponentiation $C \times \Delta\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}} \to C,(A,X) \mapsto A^X$ telles qu'on ait des isomorphismes naturels $\mathrm{Hom}_C(A \boxtimes X,B) \simeq \mathrm{Hom}_C(A,B^X)$, ainsi que d'un enrichissement simplicial de C satisfaisant pour tous $A \rightarrowtail B, X \twoheadrightarrow Y$: $\mathrm{Map}_C(B,X) \to \mathrm{Map}_C(B,Y) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(A,X)$ est une fibration et est acyclique si l'une des deux $A \to B, X \to Y$ l'est et l'on a $\mathrm{Hom}_C(A \boxtimes X,B) \simeq \mathrm{Hom}_{\Delta\mathrm{Ens}}(X,\mathrm{Map}_C(A,B))$. En particulier, Map préserve les fibrations et les fibrations acycliques, donc $\mathbb{R}$Map existe et envoie sur un complexe de Klan. **Exemples.** ΔEns, ΔAb, etc.
Propriété. *(Dywer-Kan)* Pour tous $x,y \in C$, $\mathbb{R}\mathrm{Map}_C(x,y) \simeq \mathrm{Map}_{R(C)}(x,y)$ où R est le remplacement fibrant dans Cat_Δ.

3 ∞-catégories

3.1 Intuition

Motivation. Une $(\infty,1)$-catégorie serait une catégorie avec un type d'homotopie de mrorphismes, et pour $(C,\mathscr{W})$, on devrait obtenir $\mathbf{Ho}_\infty(C)$ une ∞-catégorie se relevant en $\mathbf{Ho}(C) = C[\mathscr{W}^{-1}]$. Dans Top, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})} = \mathrm{Map}(X,Y)/\simeq$. Un espace topologique à homotopie près est censé être un ∞-groupoïde, *i.e.* une ∞-catégories où tous les morphismes sont inversibles. L'exemple typique est le groupoïde fondamental où les morphismes sont composables et inversibles à homotopie près.

3.2 Le modèle simplicialement enrichi pour les ∞-catégories

Définition. Un objet fibrant dans Cat_Δ est une ∞-catégorie. Plus précisément, Cat_Δ est elle-même simplicialement enrichie et un remplacement fibrant de Cat_Δ est l'∞-catégorie des ∞-catégories. **Fait.** Tout autre modèle d'∞-catégorie est Quillen-équivalente à Cat_Δ, ce qui inclut les quasi-catégories, les espaces de Segal complets, les catégories de Segal... **Définition.** *(Structure de modèle de Joyal des quasi-catégories)* Structure de modèle sur ΔEns où les fibrants sont les ∞-catégories et les objets ont la RLP relativement aux cornets internes $\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n, 0 < k < n$.

3.3 Des catégories de modèle aux ∞-catégories

Motivation. Étant donné $(C,\mathscr{W})$, on peut un relèvement ∞-catégorique de $C[\mathscr{W}^{-1}]$, *i.e.* un fibrant dans Cat_Δ, tel que $\pi_0(\mathbf{Ho}_\infty(C)) = \mathbf{Ho}(C) = C[\mathscr{W}^{-1}]$. Il y a plusieurs façons.
Définition. *(Localisation de Hammoch)* Soit $L^{\mathbb{C}}_{\mathscr{W}}$ la catégorie simpliciale ayant les mêmes objets que C et $\mathrm{Map}_{L^C_{\mathscr{W}}}(X,Y)_n$ est défini comme l'ensemble des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & X_{0,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & X_{0,2} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \dots \arrow[r, dash] & X_{0,i} \arrow[r, dash] \arrow[d] & X_{0,i+1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \dots \arrow[r, dash] & X_{0,k} \arrow[d] \arrow[ddr, dash] & \\
 & X_{1,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & X_{1,2} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \dots \arrow[r, dash] & X_{1,i} \arrow[r, dash] \arrow[d] & X_{1,i+1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \dots \arrow[r, dash] & X_{1,k} \arrow[d] \arrow[dr, dash] & \\
X \arrow[uur, dash] \arrow[dr, dash] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & Y \arrow[dl, dash] \\
 & X_{n,1} \arrow[r, dash] & X_{n,2} \arrow[r, dash] & \dots \arrow[r, dash] & X_{n,i} \arrow[r, dash] & X_{n,i+1} \arrow[r, dash] & \dots \arrow[r, dash] & X_{n,k} &
\end{tikzcd}$$

avec les conditions que :
- ⋆ les flèches verticales et les flèches horizontales qui vont vers la gauche sont dans $\mathscr{W}$,
- ⋆ dans une double colonne de deux rangs adjacents, les flèches horizontales vont dans le même sens,
- ⋆ les flèches horizontales de deux colonnes consécutives vont dans des sens opposés,
- ⋆ les flèches d'une double colonne interne ne sont pas toutes l'identité.

La structure simpliciale est donnée par les d_i enlevant la i-ième ligne et s_0 en ajoutant une ligne d'identités.
Lemme. $L^C_{\mathscr{W}}$ est dans Cat_Δ.
Définition. Le remplacement fibrant dans Cat_Δ $R(L^C_{\mathscr{W}}) = \mathbf{Ho}_\infty(C)$.
Lemme. $\pi_0(\mathbf{Ho}_\infty(C)) = \mathbf{Ho}(C)$.
Fait. Si C est de modèle, $\mathbf{Ho}_\infty(C)$ est une ∞-catégorie. De plus, si $F : C \to D$ st un foncteur qui envoie les cofibrations sur des cofibrations, les cofibrations acycliques su des cofibrations acycliques ou les cofibrations acycliques sur les équivalences faibles, alors $\mathbb{L}F : \mathrm{Hom}_\infty(C) \to_H O_\infty(D)$ est un ∞-functeur donné par $\mathbb{L}F(X) = LF(L(X))$ où LF est F étendu à la localisation de Hammoch. Si $F(\mathscr{W}_C) \subseteq \mathscr{W}_D$, $LF : L^C_{\mathscr{W}_D} \to L^D_{\mathscr{W}_D}$ est obteni en appliquant $F(X_{i,j}) \xrightarrow{F()} F(X_{i,j+1})$.
Remarques.
1. Une adjonction de Quillen donne une adjonction d'∞-catégories.
2. Une équivalence de Quillen produit une équivalence d'∞-catégories.
3. Les colimites dérivées calculent les ∞-(co)limites.
4. Si C est une catégorie de modèle simpliciale, $\mathrm{Map}_{R(L^{\mathscr{W}}_C)}(X,Y) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Map}_C(X,Y) = \mathrm{Map}_C(L(X),R(Y))$ ce qui est vrai aussi pour Hom dans n'importe quelle catégorie de modèle.

3.4 Groupes d'homotopie abéliens

Propriété. Dans Top_*, l'espace des lacets est le pullback $\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \{*\} \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & (X,*) \end{tikzcd}$ et la suspension réduite et le pushout dual. **Remarques.** La propriété de pullback homotopique de ΩX montre que l'on peut définir $\Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ à partir du pincement qui est une loi de groupe à homotopie près, *i.e.* c'est un groupe dans $\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})$. Similairement, $\Omega^2 X = \Omega(\Omega X)$ est muni de deux multiplications compatibles, donc c'est un gruope abélien dans $\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})$, et de même pour tout $\Omega^{n\geqslant 2}X$. Ainsi, un espace topologique $Y \sim \Omega^2 X$ a une structure de groupe abélien dans $\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})$, et une ombre de cela dans $\mathbf{Ho}_\infty(\mathrm{Top})$. Un groupe complètement abélien à homotopie près devrait être quelque chose comme $Y \sim \Omega^\infty X$ dans $\mathbf{Ho}_\infty(\mathrm{Top}_*)$.
Lemme. L'adjonction $\Sigma \dashv \Omega$ est de Quillen dans $\Delta\mathrm{Ens}_*$ et Top_*.
Théorème. Dans $Ch(\mathbb{Z})$, de même, $\Omega X = X[-1]$ et $\Sigma X = X[1]$. En effet on remplace $0 \to X$ par une fibration $C(id)^{[1]} \to X$ où $C(id)^{[1]} = (X_{n+1} \oplus X_n,d)$ et $d(x_n,x_{n-1}) = (d(x_n) + x_{n-1},d(x_{n-1}))$. En particulier, Ω et Σ sont inverses l'un de l'autre.
Motivation. Pour forcer cette propriété sur lees esapces, *i.e.* inverser Σ, on introduit les spectres.

3.5 Spectres

Définition. Une *théorie cohomologique généralisée* est une collection de foncteurs $E^n : \mathbf{Ho}(\mathrm{Top})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}, n \in \mathbb{Z}$ où $\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})$ est munie de la structure de Quillen, qui transforme les petites produits en produits et telle que pour toute $f : X \to Y$ dans $\mathbf{Ho}(\mathrm{Top})$, il y a une suite exacte longue dans Ab qui commute aux colimites homotopiques donnée par $\dots E^n(Y) \longrightarrow E^n(X) \longrightarrow E^{n+1}(C(f)) \longrightarrow E^{n+1}(Y) \dots$ où $C(f)$ est le cône de f.
Définition. Un *préspectre* dans C_* où $C_* = \mathrm{Top}_*$ ou $\Delta\mathrm{Ens}_*$ est une suite d'objets de C_* munie de flèches $\Sigma X_n \to X_{n+1}$ (associées par adjonction à des flèches $X8n \to \Omega X_{n+1}$. Un morphisme de préspectres est une suite de flèches $X_n \to Y_n$ telles que $\Sigma f_n, f_n$ commutent aux flèches du préspectre. Un *spectre* est un préspectre de sorte que les $X_n \to \Omega X_{n+1}$ sont des équivalences faibles. **Remarque.** Si X est un spectre, $X_0 \sim \Omega X_1 \sim \Omega^2 X_2 \sim ...$ donc X_0 est un objet groupe abélien dans $\mathbf{Ho}(C_*)$.
Exemples.
1. Si $X \in C_*$, on a un spectre donné par $X_n = \Sigma^n X$ et les flèches sont l'identité, noté $\Sigma^\infty X$.

2. Si A est la catégorie classifiante d'un groupe abélien, on pose le groupe abélien topologique $BA = |N(A)|$ où N est le nerf, $A \to \Omega BA$ est une équivalence d'homotopie faible. Alors $HA = B^n A$ est le *spectre d'Eilenberg-MacLane*.

Définition. *(Cohomologie des spectres)* Soit E un spectre. On pose $\tilde{E}^i : \begin{array}{rcl} \mathbf{Ho}(C_*^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ab} \\ X & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(C_*)}(X,E_i) = \pi_0(R\mathrm{Map}_{C_*}(X,E_i) \end{array}$ et $E^i = \tilde{E}^i(X_+) : \begin{array}{rcl} \mathbf{Ho}(C_*^{\mathrm{op}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ab} \\ X & \longmapsto & \pi_0(R\mathrm{Map}(X_+,E_i)) \end{array}$ où $X_+ = X \coprod \{*\}$ le foncteur de pointage. **Lemme.** (E^i) est une théorie cohomologique généralisée, puisque $R\mathrm{Map}(-,Y)$ est invariant par équivalences faibles.

Définition. *(Structure de modèle et donc d'∞-catégorie pour les préspectres)* Pour les préspectres, on a la structure projective de C_* induite en tout degré (sur les équivalences faibles et les fibrations). Elle est cofibrement engendrée et simpliciale avec $K \boxtimes X := (K \wedge X_n)_n$ où $K \in \Delta\mathrm{Ens}, X \in C_*$.

Définition. *(Localisation de Bousfield à gauche d'une catégorie de modèle)* C'est une structure de modèle sur C ayant les mêmes cofibrations et plus d'équivalences faibles S. Si $L_S C$ est la localisée de Bousfield à gauche, on a une adjonction $id : C \rightleftarrows C_L : id$. **Lemme.** $\mathbb{L}id : \mathbf{Ho}_\infty(C) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_\infty(C) : \mathbb{R}id$ est une adjonction et $\mathbb{R}id$ est pleinement fidèle. **Définition.** S classe de flèches de C Un objet U est *S-local* si pour tout $f : A \to B \in S$, le pullback $R\mathrm{Map}(B,U) \xrightarrow{f^*} R\mathrm{Map}(A,U) \in \mathscr{W}_C$. Une flèche $g : X \to Y$ est *S-locale* si pour U S-local, le pullback $R\mathrm{Map}(Y,U) \xrightarrow{g^*} R\mathrm{Map}(X,U) \in \mathscr{W}_C$. En particulier $S \cup \mathscr{W}_C \subseteq S$-locales. **Théorème.** *(Smith)* Si X est de modèle, simpliciale et combinatoire, par exemple $\Delta\mathrm{Ens}_*$, alors la *structure de modèle S-locale* $(C, S\text{-locales}, \mathrm{Cof}_C, RLP(\mathrm{Cof}_S \cap \mathscr{W}_S)$ est de modèle, simpliciale et combinatoire. De plus :

(a) les fibrants sont les fibrants S-locaux de C,
(b) $id : C \rightleftarrows L_S C : id$ est une ajonction où $\mathbb{R}id : L_S C \to C$ est pleinement fidèle.

Définition. Soit $F^n : \begin{array}{rcl} \Delta\mathrm{Ens}_* & \longrightarrow & \mathrm{PSp} \\ K & \longmapsto & F^n(K) \end{array}$ donné par $F^n(K)_i = x$ s $i < n, \Sigma^{i-n}K$ si $i \geqslant n$. **Remarque.** $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PSp}}(F^n S^0, X) \simeq X_n$. **Corollaire.** *(Structure de modèle pour les spectres)* Pour $S = (\Sigma F^{n+1} S^0 \to F^n S^0, n \in \mathbb{N}$, la structure S-locale sur PSp est une localisation de Bousfield à gauche dont les fibrants S-localux sont les spectres. On note $\mathrm{Sp} = L_S \mathrm{PSp}$. **Remarque.** On peut expliciter un remplacement fibrant à $X \in \mathrm{PSp}$ par $Q(X) = (\Omega^1 X_{n+1})_n$.

Définition. $X \in \mathrm{Sp}, i \in_Z$. $\pi_i(X) = \mathrm{colim}_n \pi_{i+n}(X_n)$ qui s'identifie à $\pi_0(R\mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}}(S^i,X))$. **Propriété.** $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathrm{Sp})}(\Sigma^\infty K, E) = \tilde{E}^i(K)$ et $\Sigma\infty : \Delta\mathrm{Ens} \rightleftarrows \mathrm{Sp}$ est une adjonction de Quillen. **Théorème.** *(Théorème de représentaibilité)* Pour toute théorie cohomologique généralisée $\tilde{E}^i$, il existe un unique spectre E à équivalence faible près telle que $\tilde{E}^i(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ho}(\mathrm{Sp})}(\Sigma^\infty X, E)$.

Théorème. Il y a deux foncteurs suspension de préspectres : $S(X) = (X_{n+1})_n$ et $S^{-1}(X) = (X_{n-1})_n$. Alors $S : \mathrm{Sp} \rightleftarrows \mathrm{Sp} : S^{-1}$ est une équivalence de Quillen. De plus $S(X) \sim (\Sigma X_n)_n$ et l'adjonction $\Sigma \dashv C$ produit l'équivalence S, S^{-1} ; en particulier, Σ admet Ω pour inverse. En outre, l'homéomorphisme canonique $S^i \wedge S^p \simeq S^{i+p}$ induit une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{Ho}_\infty(\mathrm{Sp})$ dans laquelle $\mathbb{S} = \Sigma\infty S^0 = (S^n)_n$ est le *spectre des sphères*. En particulier, $\mathrm{Sp} = \mathrm{Mod}(\mathbb{S})$. En particulier, $H\mathbb{Z}$ est une algèbre commutative sur Sp induite par le produit tensoriel. Enfin, $\mathbf{Ho}_\infty(H\mathbb{Z}\mathrm{Mod}(\mathrm{Sp}) \simeq \mathbf{Ho}_\infty(Ch(\mathbb{Z})$ et l'on peut donc passer de $\mathbf{Ho}_\infty(\mathrm{Sp}) \to \mathbf{Ho}_\infty(Ch(\mathbb{Z})), X \mapsto H\mathbb{Z} \otimes X$.