Feuille d'exercices 4
Géométrie

Géométrie euclidienne

★☆☆☆☆ **Exercice 1** (La géode de la Cité des sciences). Dans le parc de la Cité des sciences, à Paris, se trouve une géode, une salle de cinéma, extérieurement, la forme d'une calotte sphérique de rayon 18 m, posée sur le sol. On note M un point de l'extérieur de la géode appartenant au sol et H le projeté du centre de la sphère portant la géode sur le sol. On donne $MH = 14$ m.

1. Calculer la hauteur totale de la géode.
2. Calculer l'aire de la surface au sol occupée par la géode.

★★☆☆☆ **Exercice 2** (Diagonale du cube unité). Quelle est la longueur d'une diagonale d'un cube de côté 1 ?

★★★☆☆ **Exercice 3** (Théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé)). Soit ABC une triangle. On note $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$. (Remarque : on peut obtenir deux autres inégalités par permutation circulaire des variables.) Que se passe-t-il si ABC est rectangle en A ?

★☆☆☆☆ **Exercice 4** (Intersection de droites). Déterminer l'intersection des droites d'équation $-2x + y - 3 = 0$ et $y = x + 6$.

★★★★☆ **Exercice 5** (La droite d'Euler). On souhaite montrer que, dans un triangle non plat ABC, l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit O sont alignés sur une même droite.

1. Rappeler les définitions de ces trois points en termes de droites remarquables du triangle.
2. Soit X le point défini par $\vec{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Montrer que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OI}$ où I le milieu de $[BC]$.
3. En déduire que X se trouve sur la hauteur issue de A.
4. En déduire que $X = H$.
5. Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.
6. En déduire que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et conclure.

☆☆☆☆☆ **Exercice 6** (Condition d'alignement avec paramètre)**.** Existe-t-il un nombre m et combien tel que les points A,B,C de coordonnées $(-3{,}7)$, $(m^2,-2)$ et $(4,-5)$ soient alignés ?

Géométrie dans l'espace

☆☆☆☆☆ **Exercice 7** (Vrai ou faux)**.**

1. Toute droite est déterminée par un point de passage et un coefficient directeur.
2. Toute droite est déterminée par un point de passage et un vecteur directeur.
3. L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme $y = k$.
4. Toute droite du plan a une équation de la forme $y = mx + p$.
5. Deux droites qui admettent des vecteurs directeurs distincts sont sécantes.
6. Deux droites qui admettent des vecteurs directeurs non colinéaires sont sécantes.
7. Deux droites coplanaires qui admettent des vecteurs directeurs non colinéaires sont sécantes.
8. Tout plan est déterminé par un point de passage et un vecteur directeur.
9. Tout plan est déterminé par un point de passage et deux vecteurs directeurs.
10. Une droite sécante à un plan est sécante à tout plan parallèle à celui-ci.
11. Une droite parallèle à un plan est parallèle à tout plan parallèle à celui-ci.
12. Une droite sécante à un plan est sécante à tout plan sécant à celui-ci.
13. Une droite parallèle à un plan est sécante à tout plan sécant à celui-ci.
14. L'ensemble $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$ est un cercle.

☆☆☆☆☆ **Exercice 8.**

1. Trouver l'équation de la droite passant par le point $(0{,}6{,}0)$ et dirigée par le vecteur $(1{,}1{,}1)$.
2. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal pour la droite d'équation $x + y + z = 0$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par $A(1{,}2{,}3)$ et parallèle à la droite (BC) où $B(0{,}2{,}5)$ et $C(-2{,}1{,}1)$.
4. Donner une équation du plan parallèle à l'axe ordonnées-abscisses passant par le point $(0{,}0{,}\frac{3}{4})$.
5. Donner une équation du plan passant par le point $(2{,}2{,}3)$ et dirigée par les vecteurs $(0{,}0{,}1)$, $(1{,}1{,}3)$.
6. Trouver l'unique cote z du vecteur $\overrightarrow{w}(0,-4,z)$ telle que les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,-1{,}2)$, $\overrightarrow{v}(2{,}2{,}1)$ et $\overrightarrow{w}$ soient coplanaires.
7. Vérifier que le système $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes d'une droite puis en déduire une équation paramétrique de celle-ci.
8. Donner une équation du cercle de rayon 1 et de centre $(\pi,\pi,0)$ passant par le point $(\pi,\pi,\frac{1}{2})$.

★★★★☆ **Exercice 9** (Positions relatives de plan). Décrire les positions relatives de deux plans de l'espace, puis de trois plans de l'espace. En particulier, l'intersection de trois plans peut-elle être réduite à un point, à une droite ?

★★★★★ **Exercice 10** (Section plane d'un solide). Soit $SABCD$ une pyramide de base carrée $ABCD$. Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).

Indication On pourra appliquer le théorème du toit à deux droites bien choisies

Produit scalaire et vecteurs de $\mathbb{R}^3$

★☆☆☆☆ **Exercice 11** (Travail d'une force physique). On suppose que le mouvement d'un système modélisé par un point mobile M a lieu dans un plan orienté, ce qui permet d'utiliser le produit scalaire vu en classe de Première. Lorsque M se déplace d'un point A à un point B sous l'effet de la force $\overrightarrow{f}$ (supposée *conservatrice*, ce qui sera toujours le cas ici), il reçoit une énergie appelée *travail* de $\overrightarrow{f}$ définie par :

$$W_{AB}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

On dit que $\overrightarrow{f}$ est *motrice* si $W_{AB}(\overrightarrow{f}) > 0$ et *résistante* si $W_{AB}(\overrightarrow{f}) < 0$.

1. Quelle est l'unité du travail ?
2. Que dire du travail d'une force perpendiculaire au déplacement de son point d'application ?
3. En le calculant explicitement, montrer que lors d'une chute, le poids $\overrightarrow{P}$ est une force motrice.
4. Calculer le travail du poids en montant une charge d'un point B au sol à un point A à 20 mètres du sol le long d'une corde tendue de 22 mètres. Expliquer le vocabulaire « moteur » et « résistant ».
5. *(Plus corsé)* Une péniche se déplace en ligne droite le long d'un fleuve sur 50 mètres. Elle avance sous l'effet du courant représenté par une force de 300 Newtons et grâce également à un aimant tracté par une voiture sur la rive, représenté par une force attractive de 200 Newtons selon un angle de 45° avec l'axe du fleuve. Calculer l'intensité de la force qu'il faudrait exercer pour obtenir le même travail si la péniche était tirée par un bateau devant elle et que l'aimant n'avait aucun effet.

★★☆☆☆ **Exercice 12** (Théorème de la médiane). On considère un segment $[A,B]$ et I son milieu. Soit M un point quelconque. Montrer que :

1. $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}AB^2 + 2MI^2$;
2. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$;
3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$;

sans utiliser de coordonnées.

Indication Considérer des carrés scalaires.

☆☆☆☆☆ **Exercice 13.** Le tétraèdre $A(1,3,0),B(2,3,0),C(1,4,0),D(1,\frac{6+\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ forme-t-il un repère orthonormé ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 14** (Coordonnées dans l'espace)**.** On se donne pour origine le point $\Omega = (-1,-1,-1)$. Calculer dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$ dont les axes sont parallèles à ceux du repère canonique de $\mathbb{R}^3$ centré en $O = (0,0,0)$, le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega X} \cdot \overrightarrow{\Omega Y}$ où $X = (0,1,\sqrt{\pi})$ et $Y = (1,0,\sqrt{\pi})$ dans $\mathcal{R}$. Les droites (ΩX) et (OY) sont-elles parallèles ? Sécantes ? Orthogonales ? Coplanaires ?

☆☆☆☆☆ **Exercice 15** (Équation cartésienne d'une sphère)**.** Donner l'équation cartésienne de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Trigonométrie

☆☆☆☆☆ **Exercice 16** (Formulaire de trigonométrie)**.**

1. Expliquer pourquoi $\cos(2\pi + a) = \sin(\frac{\pi}{2} + a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Redémontrer, en l'interprétant comme un produit scalaire, la formule $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ et en déduire les autres formules d'addition (et de soustraction).
3. En déduire les formules de duplication et les formules de linéarisation.
4. Résoudre l'équation $\sin(x+1) = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 17** (Une ligne trigonométrique usuelle)**.** Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$.

INDICATION Utiliser la formule de duplication.

☆☆☆☆☆ **Exercice 18** (La fonction tangente)**.** On définit lorsque c'est possible la fonction *tangente*, notée tan, par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de tan.
2. Que valent $\tan(0)$, $\tan(\pi)$, $\tan(\frac{\pi}{2})$, $\tan(\frac{\pi}{4})$?
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de tan et donner l'expression de sa dérivée sur cet ensemble.
4. En déduire le tableau de variations de la tangente.
5. Montrer que pour tous réels $x,y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, si $x < y$, alors $\tan(x) < \tan(y)$.
6. Établir une formule d'addition pour la tangente.