

Chapter 1

Combinatoire des représentations du groupe général linéaire

Résumé

Une représentation d'un groupe G est une action de ce groupe sur un espace vectoriel V , c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Ici nous nous intéressons au cas où $G = GL_n(\mathbb{K})$, où \mathbb{K} est un corps de caractéristique zéro, et V est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Nous commencerons par classer les représentations du groupe unitaire, suivant la méthode introduite par Weyl dans les années 1930. Nous examinerons ensuite la combinatoire des tableaux de Young et du monoïde plaxique, commode pour décomposer les produits tensoriels de représentations. Selon le temps restant, nous examinerons la théorie du monôme standard ou regarderons des questions liées aux algèbres amassées.

On peut citer au moins trois motivations pour la théorie des représentations :

- c'est une façon de décrire les groupes au moyen des groupes linéaires, que l'on connaît bien ;
- grâce à cette théorie, on peut décomposer les fonctions sur des groupes. Pour exemple, les séries de Fourier sont un cas particulier de cette application au groupe unitaire ;
- le groupe étant en mathématiques la notion de symétrie, de nombreuses applications à la physique quantique.

1.1 Fonctions symétriques

1.1.1 Le vocabulaire des partitions

Définition. (*Partition (entière)*)

On appelle *partition* toute suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ d'entiers naturels nuls à partir d'un certain rang.

On note \mathcal{P} l'ensemble des partitions.

→ **Notation.** Pour une partition quelconque $\lambda = (5, 5, 3, 1, 0, \dots)$, λ est noté 5531 ou $5^2 3 1$, au choix.

Définition. (*Poids d'une partition*)

Soit $\lambda \in \mathcal{P}$. Le *poids* de λ est l'entier $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$.

Si $|\lambda| = n$, on écrit $\lambda \vdash n$.

Heuristiquement, toute partition est partition de son poids. On impose un ordre à ces partitions.

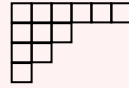
Définition. (*Longueur d'une partition*)

Soit $\lambda \in \mathcal{P}$. Sa *longueur* est l'entier $\ell(\lambda) = \text{card}\{i \geq 1 \mid \lambda_i \neq 0\}$.

Définition. (*Diagramme d'une partition*)

Soit $\lambda \in \mathcal{P}$. Le *diagramme* de λ est sa représentation élémentaire en lignes de carrés de

haut en bas. Par exemple, pour 6321, on prend :



Définition. (*Partition conjuguée*)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathcal{P}$. La *partition conjuguée* de λ est notée λ' et définie par

$$\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$$

où $\lambda'_n = \text{card}\{i \geq 1 \mid \lambda_i \geq n\}$.

Par exemple, avec $\lambda = 5531$, $\lambda' = 43322$.

Définition-propriété. (*Ordre de dominance sur \mathcal{P}*)

Soient $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. On écrit

$$\lambda \geq \mu \stackrel{\text{déf.}}{\iff} |\lambda| = |\mu| \text{ et } \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i \text{ pour tout } i \geq 1.$$

C'est une relation d'ordre, dit de *dominance*, sur \mathcal{P} .

1.1.2 Construction de polynômes symétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise la notation condensée pour les multiplats d'entiers. On rappelle que le groupe \mathfrak{S}_n agit par automorphismes sur l'anneau $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. On note :

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

l'ensemble des polynômes symétriques. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note m_α la somme de tous les monômes distincts de la forme $x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

■ Puisqu'on ne change pas m_α en permutant les α_i , on se limite aux m_λ avec $\lambda \in \mathcal{P}$, $\ell(\lambda) \leq n$.

Une autre façon d'obtenir des polynômes symétriques est de faire le quotient de polynômes antisymétriques. Précisons cela. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, le polynôme $a_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}$ est antisymétrique, nul si α présente une répétition.

■ De même, on se limite à α une suite strictement décroissante, c'est-à-dire (pourquoi ?) à une décomposition, nécessairement unique : $\alpha = \lambda + \delta$ où $\lambda \in \mathcal{P}$, $\ell(\lambda) \leq n$, $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$.

VOC On appelle δ le *vecteur de Weyl*.

Par division euclidienne par le polynôme unitaire $x_i - x_j$ dans $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n][x_i]$, a_α est antisymétrique donc $x_i - x_j$ divise a_α pour chaque paire (i, j) , $i \neq j$. Ainsi, a_α est divisible par $\prod_{i>j}^{x_i-x_j} = a_\delta$ qui n'est autre qu'un déterminant de Vandermonde.

Alors, le polynôme $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ est symétrique.

VOC Cette association s'appelle *fonction de Schur*.

Proposition

$\{\mu_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n\}$ et $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n\}$ sont deux bases du \mathbb{Z} -module Λ_n .

On cite quelques autres fonctions symétriques :

Exemples. (*D'autres fonctions symétriques*)

1. Pour $1 \leq k \leq n$, $e_k = m_{(1^k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ complété par $e_0 = 1$, $e_k = 0$ si $k > n$.

2. Pour $1 \leq k$, $h_k = \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ complété par $h_0 = 1$.

Proposition

Pour $k \geq 1$, on a $\sum_{i=0}^k (-1)^i e_i h_{k-i} = 0$.

▷ On introduit les séries formelles $E(t) = \sum_{k=0}^n e_k t^k \in \Lambda_n[[t]] = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t)$ par les relations racines-coefficients d'un polynôme, $H(t) = \sum_{k \geq 0} h_k t^k \in \Lambda_n[[t]]$. Alors $H(t) =$

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} (x_{i_1} t) \dots (x_{i_k} t) = \sum_{p_1, \dots, p_n \geq 0} (x_1 t)^{p_1} \dots (x_n t)^{p_n} = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{p \geq 0} (x_i t)^p \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i t}, \text{ donc } H(t)E(-t) = 1. \blacksquare$$

→ **Notation.** Pour $\lambda \in \mathcal{P}$, on pose $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$ et $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots \in \Lambda_n$.

Théorème

$\{e_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}, \lambda_i \leq n\}$ et $\{h_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}, \lambda_i \leq n\}$ sont deux bases du \mathbb{Z} -module Λ_n .

1.1.3 Formules de Pieri

On convient que :

- $s_\lambda = 0$ si $\ell(\lambda) > n$,
- si $\lambda \in \mathcal{P}$ et $k \geq 1$ entier, on désigne par $\lambda \otimes k$, respectivement $\lambda \otimes (1^k)$, l'ensemble des partitions obtenues en ajoutant k boîtes au diagramme de λ , avec au plus une boîte par colonne. Par exemple, le produit

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \otimes 2$$

contient les éléments

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

et aucun autre.

Théorème. (Formules de Pieri)

$$s_\lambda h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} s_\mu \text{ et } s_\lambda e_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes (1^k)} s_\mu.$$

▷ Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Alors :

$$\begin{aligned} a_{\lambda+\delta} h_k &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n} \right) \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n} \sum_{|\alpha|=k} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)}^{\lambda_1+\delta_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n+\delta_n} = \sum_{|\alpha|=k} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \dots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \\ &= \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} a_{\mu+\delta} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=k \\ \lambda+\alpha \notin \lambda \otimes k}} a_{\lambda+\delta+\alpha}. \end{aligned}$$

Or $\lambda + \alpha \notin \lambda \otimes k$ si et seulement s'il existe i tel que $\lambda_{i+1} + \alpha_{i+1} > \lambda_i$. Choisissons i le plus grand

possible satisfaisant cette condition, et posons $\beta_j = \begin{cases} \alpha_{i+1} - (\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1) & \text{si } j = i \\ \alpha_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1) & \text{si } j = i + 1 \\ \alpha_j & \text{sinon} \end{cases}$. On définit

une involution $\alpha \mapsto \beta$ de $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| = k, \lambda + \alpha \notin \lambda \otimes k\}$ telle que $a_{\lambda+\beta+\delta} = -a_{\lambda+\alpha+\delta}$. Les termes non nuls de la somme de droite s'annulent donc deux à deux, et il reste $a_{\lambda+\delta} h_k = \sum_{\mu \in \lambda \otimes k} a_{\mu+\delta}$. On divise alors par a_δ . ■

Proposition

Considérons deux jeux de n variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Alors

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} \in \mathbb{Z}[[x_1, \dots, y_n]]$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n} h_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \quad \prod_{i,j=1}^n (1 - x_i y_j)^{-1} &= \prod_{j=1}^n H(y_j) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{r \geq 0} h_r(x) y_j^r \right) = \sum_{r_1, \dots, r_n \geq 0} h_{r_1}(x) \dots h_{r_n}(x) y_1^{r_1} \dots y_n^{r_n} = \\ &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n} h_\lambda(x) m_\lambda(y). \end{aligned}$$

La seconde égalité est un déterminant de Cauchy. ■

Définition. (*Produit scalaire sur Λ_n*)

On définit un produit scalaire \langle, \rangle sur Λ_n en demandant que $\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$ pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ de longueur $\leq n$.

Proposition

Pour $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ de longueur $\leq n$, on a $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$.

$$\begin{aligned} \triangleright \quad \text{On écrit } h_\mu &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \ell(\lambda) \leq n}} K_{\lambda\mu} s_\lambda \text{ et } m_\mu = \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P} \\ \ell(\nu) \leq n}} L_{\mu\nu} s_\nu. \text{ Alors } \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P} \\ \ell(\lambda) \leq n}} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ \ell(\mu) \leq n}} h_\mu(x) m_\mu(y) = \\ &= \sum_{\mu, \lambda, \nu} K_{\lambda\mu} L_{\mu\nu} s_\lambda(x) s_\nu(y). \end{aligned}$$

Pour $\lambda, \nu \in \mathcal{P}$, on a donc $\sum_{\mu} K_{\lambda\mu} L_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}$, car $\{s_\lambda(x) s_\nu(y)\}$ est une base de $\Lambda_n(x) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_n(y)$. Les matrices $(K_{\lambda\mu})$ et $(L_{\mu\nu})$ sont donc inverses, d'où $\langle h_\mu, m_\rho \rangle = \sum_{\lambda, \nu} K_{\lambda\mu} L_{\rho\nu} \langle s_\lambda, s_\nu \rangle = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} L_{\rho\lambda} = \delta_{\rho\mu}$. ■

1.1.4 Tableaux semi-standards

Définition. (*Tableau semi-standard*)

Pour $\lambda \in \mathcal{P}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ suite d'entiers naturels de somme $|\lambda|$, on appelle *tableau semi-standard* de forme λ et de poids μ , un remplissage du diagramme de λ par les éléments $1, \dots, 1, 2, \dots, 2, n, \dots, n$ pris respectivement μ_1, \dots, μ_n fois de façon croissante dans les lignes de gauche à droite et strictement croissante dans les colonnes de haut en bas.

→ **Notation.** On note $K_{\lambda\mu}$ le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de poids μ .

Exemples. (Tableaux semi-standards)

1.

1	2	2	2	3	5
2	3	4	5		
4	4	5	6		
5	6				

Proposition

Soit (μ_1, \dots, μ_l) une suite finie d'entiers de somme k . Alors

$$h_{\mu_1} \dots h_{\mu_l} = \sum_{\lambda+k} K_{\lambda\mu} s_{\lambda}.$$

▷ C'est un corollaire des formules de Pieri. ■

Corollaire

Si $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ sont de même poids, alors $\langle h_{\mu}, s_{\lambda} \rangle = K_{\lambda\mu}$.

Corollaire

$K_{\lambda\mu}$ ne change pas si on permute les μ_i .

Théorème. (Théorème de Littlewood)

Soit $\lambda \in \mathcal{P}$, $\ell(\lambda) \leq n$. Alors $s_{\lambda}(x) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{N}^n \\ \mu_1 + \dots + \mu_n = |\lambda|}} K_{\lambda\mu} x^{\mu}.$

▷ Le membre de droite est un polynôme symétrique donc s'écrit $\sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ \ell(\mu) \leq n}} K_{\lambda\mu} m_{\mu}$. Par ailleurs,

$$s_{\lambda} = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{P} \\ \ell(\mu) \leq n}} \langle s_{\lambda}, h_{\mu} \rangle m_{\mu} \text{ car } \langle h_{\rho}, m_{\mu} \rangle = \delta_{\rho\mu}. \quad \blacksquare$$

1.2 Représentations complexes des groupes compacts et théorème de Peter-Weyl

1.2.1 Théorie des représentations dans le cas topologique. Algèbre des coefficients

On rappelle que si G est un groupe topologique, on a la notion de représentation continue sur un espace : il suffit d'imposer le morphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$ continu, ce qui est bénin si V

est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

VOC Les *coefficients* de la représentation ρ sont les fonctions $\theta^\rho(v, v^*) : g \mapsto \langle v^*, \rho(g)(v) \rangle$ pour $v \in V, v^* \in V^*$. On a $\theta^\rho(v, v^*) \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues de G dans \mathbb{C} .

On note également \mathcal{M}_ρ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ engendré par les coefficients de ρ .

Remarque. Le caractère χ_ρ est dans \mathcal{M}_ρ . On rappelle que le caractère est une fonction *de classe*, i.e. constante sur les classes de conjugaison dans G .

Autre remarque. $G \times G$ agit sur G par translations à gauche et à droite sur $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$; \mathcal{M}_ρ est stable par cette action.

→ **Notation.** On note $\mathcal{M} = \sum_\rho \mathcal{M}_\rho$ la somme dans $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ sur toutes les représentations continues de degré fini.

Propriété



$$\mathcal{M} = \{\varphi \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \mid \dim(\langle g \cdot \varphi, g \in G \rangle) < \infty\}.$$

▷ Chaque \mathcal{M}_ρ est stable par l'action de G , ce qui est laissé en exercice. Puisque chacun est de dimension finie, chacun est inclus dans le membre de droite, donc la somme également. Réciproquement, soit φ dans le membre de droite. Soit $\varepsilon : \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire évaluant en 1_G . Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ engendré par les $g \cdot \varphi$. L'action à gauche de G sur $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ laisse stable V par construction de V donc définit une représentation $\pi : G \rightarrow GL(V)$ continue. Alors $\varphi = \theta^\pi(\varphi, \varepsilon)$ appartient donc à $\mathcal{M}_\pi \subseteq \mathcal{M}$, car $\theta^\pi(\varphi, \varepsilon)(g) = \varepsilon(g \cdot \varphi) = (g \cdot \varphi)(1_G) = \varphi(1_G \cdot g) = \varphi(g)$. ■

Dès maintenant, on suppose le groupe G compact. On sait alors (admis) qu'il existe une unique mesure μ sur G invariante par translation à gauche, positive, de masse totale 1, appelée *mesure de Haar*. Elle est alors aussi invariante par translation à droite.

Exemple

On prend $G = U(1)$. On peut poser $\int_G \varphi d\mu = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{dt}{2\pi}$.

Proposition

Toute représentation continue de G peut être munie d'un produit scalaire hermitien défini positif invariant par l'action de G .

On dispose du théorème de Maschke : toute représentation continue de G est complètement réductible : une sous-représentation admet un supplémentaire stable par G .

Le lemme de Schur, également, reste vrai.

→ **Notation.** On note \hat{G} l'ensemble des représentations irréductibles continues de dimension finie de G .

Théorème. (Théorème de Peter-Weyl, I)

\mathcal{M} est dense dans $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ muni de la norme de convergence uniforme.

▷ La preuve utilise la théorie spectrale des opérations auto-adjoints compacts sur $L^2(G, \mathbb{C})$ et la proposition vue plus haut. Il s'agit de prendre une fonction continue $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ et φ la limite lorsque ρ tend vers une masse de Dirac de $\rho \star \varphi$ le produit de convolution. ■

On rappelle les relations d'orthogonalité.

Proposition. (Relations d'orthogonalité)

Soient $\pi : G \rightarrow GL(V)$ et $\rho : G \rightarrow GL(W)$ deux représentations irréductibles. Soit $v \in V$, $v^* \in V^*$, $w \in W$, w^* . Alors

$$\langle w^*, u^\natural(v) \rangle = \int_G \theta^\pi(v, v^*)(g^{-1}) \theta^\rho(w, w^*)(g) d\mu(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \not\cong \pi \\ \frac{\langle w^*, f(v) \rangle \langle v^*, f^{-1}(w) \rangle}{\dim(V)} & \text{s'il existe un} \\ \text{isomorphisme } f \in \text{Hom}_G(\pi, \rho), & \\ f : V \rightarrow W. & \end{cases}$$

▷ La preuve est la même que dans le cas fini où, au lieu de prendre un produit, on intègre sur la mesure de Haar : soit $u : V \rightarrow W$, $u \in \text{Hom}(V, W)$ et soit $u^\natural = \int_G \rho(g) \circ u \circ \pi(g^{-1}) d\mu(g)$, $x \mapsto \langle v^*, x \rangle w$ $u^\natural \in \text{Hom}_G(V, W)$. Alors u^\natural est proportionnel à f , avec plus précisément $u^\natural = \frac{\text{tr}(f^{-1} \circ u^\natural)}{f^{-1} \circ f} f$. ■

Exercice 1

Soit $\pi : G \rightarrow GL(V)$ continue irréductible. Montrer que :

1. pour $g \in G$, $\chi_\pi(g^{-1}) = \text{tr}(\pi(g^{-1})) = \text{tr} \pi(g)^* = \overline{\text{tr}(\pi(g))} = \overline{\chi_\pi(g)}$;
2. le produit scalaire hermitien G -invariant sur V est unique à scalaire près (utiliser le lemme de Schur) ;
3. identifions un vecteur $v \in V$ la forme linéaire $x \mapsto (v, x)$ sur V . Si $u, v \in V$ et $g \in G$, alors $\theta^\pi(u, v)(g^{-1}) = \overline{\theta^\pi(v, u)(g)}$.

Munissons $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ du produit scalaire pour $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$, $(\varphi, \psi)_G = \int_G \overline{\varphi(g)} \psi(g) d\mu(g)$. Pour chaque $\pi : G \rightarrow GL(V)$ irréductible continue, on fixe un produit scalaire G -invariant sur V et une base orthonormale $(e_i^\pi)_{1 \leq i \leq \dim(V)}$ de V .

Théorème. (*Théorème de Peter-Weyl, II*)

1. $\{\theta^\pi(e_i^\pi, e_j^\pi) \sqrt{\dim(V)^\pi} \mid \pi \in \hat{G}, 1 \leq i, j \leq \dim(V)^\pi\}$ est une base hilbertienne de $L^2(G, \mathbb{C})$.
2. $\{\chi_\pi \mid \pi \in \hat{G}\}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions de classe de carré sommable.

1.3 Caractères irréductibles du groupe $U(n)$. Formule des caractères de Weyl

1.3.1 Théorème de Weyl

On rappelle les faits suivants :

Remarques.

1. On appelle *groupe unitaire*, le groupe $U(n) = \{U \in GL_n(\mathbb{C}) \mid U^{-1} = {}^t\overline{U}\}$. En particulier, $U(1) = S^1$.
2. Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont unitaires.
3. Une matrice unitaire triangulaire est diagonale.
4. Toute matrice P de $GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit sous la forme $P = UT$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure.
5. On a la décomposition suivante : pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe U unitaire telle que $U^{-1}MU$ est triangulaire supérieure.
6. Ainsi, toute matrice unitaire est diagonalisable par une matrice de passage unitaire.

—> **Notation.**

1. $G = U(n)$
2. $T = \{g \in G \mid g \text{ diagonale}\} \simeq U(1)^n$, sous-groupe abélien de G , appelé *tore maximal*
3. $W = \{\text{matrices de permutation}\} \simeq \mathfrak{S}_n$, sous-groupe de G , dit *groupe de Weyl*. W agit sur T par conjugaison, *i.e.* permutation des valeurs diagonales
4. $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})^G$ est l'algèbre des fonctions de classe continues.
5. $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$ est l'algèbre des fonctions continues sur T , constantes sur les W -orbites.

Théorème

- (i) Chaque classe de conjugaison de G rencontre T et l'intersection est une W -orbite.
- (ii) L'application $f : \mathcal{C}_j(G, \mathbb{C})^G \longrightarrow \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$ est un isomorphisme d'algèbres.

$$f \longmapsto f|_T$$

▷ La seule chose à préciser est la surjectivité. On utilise la continuité des racines d'un polynôme. ■

Proposition. (Formule d'intégration de Weyl)

Si $f \in \mathbb{C}_j(G, \mathbb{C})^G$, alors

$$\int_G f d\mu = \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \left| \prod_{j < k} e^{i\theta_j - e^{i\theta_k}} \right|^2 \frac{d\theta_1}{2\pi} \dots \frac{d\theta_n}{2\pi}.$$

⊗ (Idée de la preuve.) On considère $\Phi : G/T \times T \longrightarrow G$ ainsi que G^{reg} l'ensemble $(gT, t) \longmapsto gtg^{-1}$ des $g \in G$ simplement diagonalisables, et $T^{\text{reg}} = T \cap G^{\text{reg}}$. $G \setminus G^{\text{reg}}$ est de mesure nulle, donc $T \setminus T^{\text{reg}}$ aussi : on peut restreindre les intégrales à G^{reg} et T^{reg} respectivement. φ induit un revêtement $G/T \times T^{\text{reg}} \rightarrow G^{\text{reg}}$ de degré $n! = \text{card}(\mathfrak{S}_n)$. Si $t \in T^{\text{reg}}$, $\varphi^{-1}(t) = WT/T \times \{t\}$ par un calcul de commutant, $WT = W \rtimes T$ est l'ensemble des matrices monomiales. Ainsi, $\int_{G^{\text{reg}}}$ peut être remplacé par $\frac{1}{n!} \int_{G/T \times T^{\text{reg}}}$ et le changement de variables fait apparaître un jacobien de φ , qui est $\left| \prod_{j < k} \dots \right|^2$. On utilise ensuite Fubini. ■

→ **Notation.** On note $X^*(T)$ l'ensemble des morphismes continus $T \rightarrow U(1)$, c'est-à-dire l'ensemble des représentations irréductibles continues de T .

Proposition

La fonction $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow X^*(T)$ est bijective.

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto \rho : T \longrightarrow U(1)$$

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto z_1^{a_1} \dots z_n^{a_n}$$

Corollaire

Soit $\pi : T \rightarrow GL(V)$ une représentation continue de dimension finie. Alors il existe $P \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ à coefficients positifs et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi_\pi(\text{Diag}(z_1, \dots, z_n)) = \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}$.

▷ On décompose V en somme directe de représentations irréductibles de T . ■

À une suite décroissante d'entiers relatifs $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, on associe $\varphi_\mu \in \mathbb{C}_j(G, \mathbb{C})^G$ de la façon suivante : on choisit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda = (\mu_1 + m, \dots, \mu_n + m)$ soit une partition de longueur $\leq n$ et on pose $\varphi_\mu(g) = \frac{s_\mu(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}$ où z_1, \dots, z_n sont les valeurs propres de g .

Théorème. (Weyl, 1930)

Les caractères des représentations irréductibles continues de dimension finie de G sont les φ_μ . Le degré de la représentation est $\varphi_\mu(1_G) = \prod_{i < j}^{\frac{\mu_i - \mu_j + j - i}{j - i}}$ (formule des dimensions de Weyl).

⊗ (Idée de la preuve.) Soit μ, ν deux suites décroissantes d'entiers relatifs. Alors $(\varphi_\mu, \varphi_\nu)_G = \delta_{\mu\nu}$ par conséquence de la formule des caractères de Weyl. On prend le même m pour μ et ν . La formule des fonctions de Schur fait apparaître aux dénominateurs un produit de déterminants de Vandermonde qui donne exactement le jacobien de la formule de Weyl, qui permet le calcul de l'intégrale. Deuxièmement, soit $\pi : G \rightarrow GL(V)$ une représentation irréductible continue de G . La restriction à T du caractère χ_π est de la forme $g \mapsto \frac{P(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 \dots z_n)^m}$ avec P polynôme à coefficients dans \mathbb{N} , symétrique, car $\chi_{\pi|T} \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})^W$. On écrit $P \in \Lambda_n$ sur la base des fonctions de Schur : $P = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}, \ell(\lambda) \leq n} c_\lambda s_\lambda$, $c_\lambda \in \mathbb{Z}$ presque tous nuls et $1 = (\chi_\pi, \chi_\pi)_G = \sum |c_\lambda|^2$, car π est irréductible. Donc il existe un unique λ tel que $c_\lambda = \pm 1$ et les autres sont nuls. Et c'est nécessairement 1, car P est à coefficients positifs et s_λ aussi. Finalement, $\chi_\pi = \varphi_{(\lambda_1 - m, \dots, \lambda_n - m)}$. Enfin, tous les caractères sont des φ_μ : si l'un d'entre eux n'était pas un caractère, il serait une fonction de classe non nulle orthogonale à tous les caractères, contredisant Peter-Weyl. ■

1.3.2 Construction des représentations (années 1950)

On utilise que $U(n)$ se plonge dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Définition. (Fonction régulière)

Une fonction $f : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *régulière* si elle est de la forme $g = (g_{ij}) \mapsto P(g_{ij}; (\det(g))^{-1})$ où P est un polynôme à coefficients complexes en $n^2 + 1$ indéterminées.

→ **Notation.** On note $\mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C}))$ la \mathbb{C} -algèbre des fonctions régulières.

Proposition

Si $f \in \mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C}))$ est nulle sur $U(n)$, alors elle est nulle sur $GL_n(\mathbb{C})$.

▷ Le plus convaincant est d'utiliser l'espace tangent complexe et d'obtenir ainsi la nullité d'un polynôme sur un ouvert. ■

Définition. (Représentation régulière)

Une représentation de dimension fini $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ est dite *régulière* si ses coefficients matriciels sont des fonctions régulières.

Remarques.

1. Une représentation régulière $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ se restreint en une représentation continue $\rho : U(n) \rightarrow GL(V)$.
2. Si W est un sous-espace vectoriel de V , alors W est stable par $\rho(GL_n(\mathbb{C}))$ si et seulement si W est stable par $\rho(U(n))$, ce qui se traduit matriciellement par une triangularisation par blocs.
3. Si $\rho : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ est irréductible, alors $\rho|_{U(n)}$ l'est.
4. Toute représentation régulière de dimension finie de $GL_n(\mathbb{C})$ est complètement réductible : appliquer Maschke pour $U(n)$ et utiliser le deuxième point.

→ **Notation.** On appellera B l'ensemble des matrices inversibles à coefficients complexes de dimension n qui sont triangulaires inférieures.

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ décroissante. Soit $\tilde{\mu} : B \longrightarrow \mathbb{C}^*$, morphisme de groupes.

$$\begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \star & & z_n \end{pmatrix} \longmapsto z_1^{\mu_1} \dots z_n^{\mu_n}$$
Définition. ()

Soit $\nabla(\mu) = \{f \in \mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C})) \mid \forall (g, b) \in G \times B, f(bg) = \tilde{\mu}(b)f(g)\}$, la représentation co-induite de B à G de la représentation $\tilde{\mu}$ muni de l'action pour $g \in GL_n(\mathbb{C})$, $f \in \nabla(\mu)$, $g \cdot f = f(?g)$.

Théorème. (Borel-Weil)

$\nabla(\mu)$ est une représentation irréductible de dimension finie régulière de $GL_n(\mathbb{C})$. La restriction à $U(n)$ de son caractère est φ_μ .

Conséquence

Toute représentation (de dimension finie) continue de $U(n)$ s'étend en une représentation régulière de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exemples. (Construction de représentations)

1. $\omega_k = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec $k \geq 1$ et $n - k \geq 0$. Ici, $\varphi_{\omega_k}(g) = e_k(z_1, \dots, z_n)$ où z_1, \dots, z_n sont les valeurs propres de g , donc $\nabla(\omega_k)$ est de dimension $\varphi_{\omega_k}(1_G) = e_k(1, \dots, 1) = \binom{n}{k}$. Pour $I \in \binom{[n]}{k}$, soit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ pris croissantes, soit $D_{k,I} \in \mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C}))$. $D_{k,I} :$

$$g \mapsto \begin{vmatrix} g_{1i} & g_{1i_k} \\ \vdots & \vdots \\ g_{ki} & g_{ki_k} \end{vmatrix}. \text{ Alors } D_{k,I}(bg) = \tilde{\omega}_k(b)D_{k,I}(g) \text{ si } b \in B \text{ et } g \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ donc}$$

$D_{k,I} \in \nabla(\omega_k)$. Conclusion : $\{D_{k,I}\}$ est une base de $\nabla(\omega_k)$.

2. Soit $d \geq 1$. Soit $d\omega_k = (d, \dots, d, 0, \dots, 0)$ avec k d et $n - k$ zéros. Soit T le tableau semi-standard de forme $d\omega_k$ à k lignes et d colonnes, dont la suite des colonnes est $I_1, \dots, I_d \in \binom{[n]}{k}$, qui donne $D_T = D_{k,I_1} \dots D_{k,I_d} \in \nabla(d\omega_k)$.
3. (Théorème de Hodge) $\{D_T \mid T \text{ tableau semi-standard de forme } d\omega_k\}$ est une base de $\nabla(d\omega_k)$. (Utiliser $s_{d\omega_k}(1, \dots, 1)$.)
4. (Lien avec la grassmannienne) Soit $\Psi : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C})$.

$$g \longmapsto \text{Vect}(k \text{ premières lignes de } g)$$

Alors $\Delta_I(\psi(g)) = D_{k,I}$. On dispose de la transposée $\Psi^* : \mathcal{O}(\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{O}(GL_n(\mathbb{C}))$. On écrit : $\mathcal{O}(\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C})) = \bigoplus_{\geq 0} A_d$. Alors $A_0 = \mathbb{C}$, A_1 est l'espace vectoriel engendré par les coordonnées de Plücker, $\psi^*(A_1) = \text{Vect}(D_{k,I}) = \nabla(\omega_k)$, $\psi^*(A_d) = \nabla(d\omega_k)$. Pour conclure, $\mathcal{O}(\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{C}))$ admet une présentation par générateurs : les coordonnées de Plücker Δ_I en degré 1 et relations : les relations de Plücker. La dernière identité et le théorème de Hodge font le lien avec la grassmannienne.

Chapter 2

Algèbre, combinatoire et géométrie à travers la grassmannienne

Résumé

Cette histoire débute en algèbre linéaire. On fixe un espace vectoriel de dimension n et on s'intéresse à l'ensemble de tous ses sous-espaces de dimension m ; cet ensemble se nomme la grassmannienne. Pour $m = 1$, cet ensemble est l'espace projectif ; il a une nature géométrique claire. Cette observation se généralise : toute grassmannienne a une structure naturelle de variété projective. Une façon de comprendre cette structure est d'étudier son anneau des fonctions algébriques – ce qui mène à l'étude des relations entre les mineurs d'une matrice, et nous ramène à l'algèbre. Enfin, ces relations peuvent parfois être approchées par des objets combinatoires tels les triangulations de surface, les frises, les nombres de Catalan, et bien d'autres. De ce riche paysage, nous ne parcourrons qu'un petit sentier – nous pourrions malgré tout apprécier plusieurs points de vue en chemin.

2.1 Introduction

Définition. (*Grassmannienne*)

Soit K un corps. Soit n un entier naturel. Posons : $V = K^n$ éventuellement muni de la base canonique.

Fixons $0 \leq k \leq n$. La *grassmannienne* $\text{Gr}_{k,n}(K)$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\text{Gr}(k,n)$, est l'ensemble des sous-espaces de dimension k de K^n .

Les objectifs de ce cours sont les suivants.

- Donner une structure géométrique à $\text{Gr}_{k,n}(K)$.
- Désigner et distinguer les points de $\text{Gr}_{k,n}(K)$ par un système de coordonnées.
- Comprendre le cas où $k = 2$, combinatoirement.

Exemples. (*Grassmanniennes*)

1. Pour $k = 0$, $\text{Gr}_{0,n}(K) = \{\{0\}\}$ est un point.
2. Pour $k = n$, $\text{Gr}_{n,n}(K) = \{K^n\}$... est également un point.
3. Pour $k = 1$, un sous-espace vectoriel de K^n de dimension 1 est une droite. $\text{Gr}_{1,n}(K)$ est alors plus connue sous le nom d'*espace projectif* $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.

2.1.0.1 Toy-model de l'espace projectif

Nous allons voir comment généraliser les constats sur l'espace projectif au cas de la grassmanniennes. Rappelons :

Constats.

1. Un point $W \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$ de l'espace projectif a la forme $W = \text{Vect}(\omega)$ pour un $\omega \in K^n \setminus \{0\}$.
2. Tout $\omega \in K^n \setminus \{0\}$ engendre un point de $\mathbb{P}^{n-1}(K)$.
3. Deux $\omega, \omega' \in K^n \setminus \{0\}$ engendrent le même espace si et seulement s'il existe $g \in K^\times = GL_1(K)$ tel que $\omega' = g\omega$.

Ainsi, à $W \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$, on associe les coordonnées de tout vecteur qui l'engendre à multiplication par K^\times près. Autrement dit, K^\times agit sur $K^n \setminus \{0\}$ et on peut poser $\mathbb{P}^{n-1}(K) = (K^n \setminus \{0\}) / K^\times$.

→ **Notation.** (*Coordonnées homogènes*) La coordonnée de $W = \text{Vect}(\omega)$ où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ s'écrira $[\omega_1 : \omega_2 : \dots : \omega_n]$. Ce sont les *coordonnées homogènes* de W .

Remarques.

1. On peut toujours décider arbitrairement que l'une des coordonnées non nulles d'un vecteur homogène égale 1.
2. Si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on peut conférer à \mathbb{P}^{n-1} la topologie quotient.
3. Si $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $k = 1$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est un cercle : c'est le quotient d'un cercle par un demi-tour.
4. On peut aussi voir \mathbb{P}^{n-1} sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} comme une variété topologique en définissant un atlas. Soit $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes sont non nulles en i , pour $1 \leq i \leq n$. Notons que $\mathbb{P}^{n-1} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$. Chaque \mathcal{U}_i est homéomorphe à \mathbb{R}^{n-1} par $\mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{U}_i$ qui à $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1}]$.

Ce sont les fondements de la géométrie projective. Généralisons ces idées au cas de toutes les grassmanniennes.

Retournons donc au cas général. On prend $n > 0$, $k \geq 0$. Imitons les constats précédents.

Nouveaux constats.

1. Tout $W \in \text{Gr}_{k,n}(K)$ est engendré par une base.
2. Toute famille *libre* $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ engendre un point de $\text{Gr}_{k,n}(K)$.
3. Deux familles libres $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ et $(\omega'_1, \dots, \omega'_k)$ engendrent le même sous-espace si et

$$\text{seulement s'il existe } G \in GL_k(K) \text{ tel que } G \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{bmatrix}_{k \times n} = \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \vdots \\ \omega'_k \end{bmatrix}_{k \times n}.$$

2.1.1 Coordonnées plückeriennes

Soit $\text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(K)$ l'ensemble des matrices $k \times n$ dont les lignes sont libres.

On a défini :

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(K) &\longrightarrow \text{Gr}_{k,n}(K) \\ A &\longmapsto \text{espace ligne de } A. \end{aligned}$$

Le groupe $GL_k(K)$ agit sur $\text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(K)$ librement. Aussi, Φ est surjective. On peut donc voir $\text{Gr}_{k,n}(K) = GL_k(K) \backslash \text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(K)$.

On rappelle que, si $A \in \mathfrak{M}_{k,n}(K)$, si $I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\text{card}(I) = k$, on désigne par $\Delta_I(A)$ le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en ne conservant que les colonnes dont l'indice est dans I . En dimension $k \times n$, ces mineurs sont les mineurs fondamentaux. On rappelle les faits suivants.

Fait

Si $G \in GL_k(K)$, alors $\Delta_I(GA) = \det(G)\Delta_I(A)$.

Fait

Soit $\binom{[n]}{k} = \{I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \mid \text{card}(I) = k\}$. Soit $\Delta(A) := (\Delta_I(A))_{I \in \binom{[n]}{k}}$. Alors $\Delta(GA) = \det(G)\Delta(A)$.

Conséquence

Si $W \in \text{Gr}_{k,n}(K)$, soit $A \in \text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(K)$ telle que $\Phi(A) = W$. Si A' est telle que $\Phi(A') = W$, alors dans l'espace projectif, $\Delta(A)$ et $\Delta(A')$ désignent le même point lorsqu'on est dans $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$.

Définition. (Coordonnées plückeriennes)

$\Delta(W) := [\Delta(A)]$ dans $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ forme les *coordonnées de Plücker* ([plykør] ou [plykr]) de W .

Remarque. On a vu que les coordonnées de Plücker permettent de désigner les points de $\text{Gr}_{k,n}(K)$. Il reste à voir qu'elles permettent de les distinguer.

Théorème. (Coordonnées de Plücker)

Soient $W, W' \in \text{Gr}_{k,n}(K)$. Alors : $\Delta(W) = \Delta(W') \iff W = W'$.

▷ En exercice. ■

Conséquence. (Coordonnées de Plücker dans la grassmannienne)

On a un système de coordonnées sur $\text{Gr}_{k,n}(K)$. Plus précisément, on a une injection

$$\text{Gr}_{k,n}(K) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}.$$

On verra que cette injection est stricte, si et seulement si, $k = 1$ ou $n - 1$.

Conséquence. (Topologie sur la grassmannienne)

Pour $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , toute grassmannienne est un espace topologique pour la topologie induite par $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$.

2.1.2 Structure de variété sur la grassmannienne

Cherchons un atlas sur $\text{Gr}_{k,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Soit $W \in \text{Gr}_{k,n}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $A \in \text{Mat}_{k,n}^{l.l.}(\mathbb{K})$. Alors, il existe $I \in \binom{[n]}{k}$ telle que $\Delta_I(A) \neq 0$.

De plus, il existe un unique $G \in GL_k(K)$ tel que GA a la propriété suivante : ses colonnes données par I forment la matrice identité $k \times k$.

$$\begin{bmatrix} \star & 1 & \star & \star & 0 & \star & 0 & \star \\ \star & 0 & \star & \star & 1 & \star & 0 & \star \\ \star & 0 & \star & \star & 0 & \star & 1 & \star \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{U}_I \subseteq \text{Gr}_{k,n}(K)$ des W tels que $\Delta_I(W) \neq 0$. Alors $\text{Gr}_{k,n}(K) = \bigcup_{I \in \binom{[n]}{k}} \mathcal{U}_I$.

De plus : $\phi_I : \mathbb{R}^{k(n-k)} \longrightarrow \mathcal{U}_I$ est un homéomorphisme.

$$A \longmapsto \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{14} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & a_{23} & 1 & a_{24} & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{34} & 1 & a_{35} \end{bmatrix}$$

Corollaire. (*Dimension de la grassmannienne*)

$$\dim(\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})) = k(n - k).$$

2.2 La grassmannienne des plans

2.2.1 Théorème fondamental

On se limite au cas $k = 2$. Soit $W \in \mathrm{Gr}_{2,n}(K)$. Soit $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$ telle que $\Phi(A) = W$.

On va écrire Δ_{ij} au lieu de $\Delta_{\{i,j\}}$. En fait, on va changer un peu cette notation : $\Delta_{i,j}(A) = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$, donc $\Delta_{ji} = -\Delta_{ij}$. Je vais voir les Δ_{ij} comme des éléments de $A[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$ où A est l'image de \mathbb{Z} dans K .

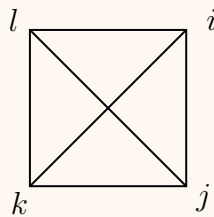
Il existe des relations algébriques, dites *relations de Plücker*, entre les Δ_{ij} .

Proposition

Si $1 \leq i < j < k < l \leq n$, alors

$$\Delta_{ik}\Delta_{jl} = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{il}\Delta_{jk}.$$

Sur le modèle géométrique de la grassmannienne (*voir ci-après*), on considère le carré :



qui permet d'illustrer la relation précédente par :



avec les notations qui suivent.

Nous proposons un modèle pour les Δ_{ij} . Soit P_n un polygone à n sommets avec les n sommets numérotés de 1 à n dans le sens horaire, représenté topologiquement grâce à un cercle. On associe Δ_{ij} au segment $[i, j]$.

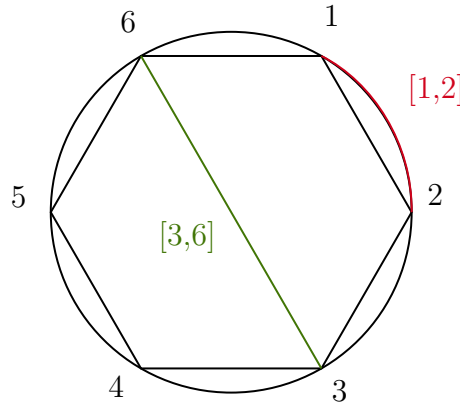


Figure 2.2.1: *Modèle de la grassmannienne des plans : cas $n = 6$.* —

Cas de la dimension 6 : on obtient un hexagone. L'ensemble des diagonales du polygone (à partir de maintenant représentés topologiquement, c'est-à-dire par un cercle, contiennent les arcs de deux points consécutifs.

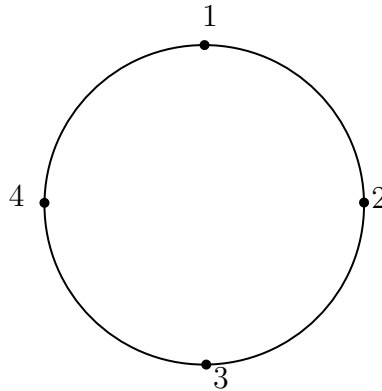


Figure 2.2.2: *Modèle de la grassmannienne des plans : cas $n = 4$.* —

Les mineurs se calculent simplement avec la relation de Plücker de base donnée plus haut.

Si je connais $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \Delta_{14}$ et Δ_{13} , alors je peux en déduire $\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{23}\Delta_{14}}{\Delta_{13}}$.

Question. Quels mineurs 2×2 suffit-il de connaître pour retrouver tous les autres ?

Avec la question précédente, la question se préfigure par itération : si l'on connaît les mineurs d'une triangulation¹ du polygone.

¹ Une triangulation est un ensemble de diagonales qui ne se croisent pas, peuvent avoir des sommets en commun et partitionnent P_n en triangles. On peut montrer que toutes les triangulations d'un polygone sollicitent le même nombre de diagonales.

Théorème

Soit Δ une triangulation de P_n . Alors tout mineur Δ_{ij} est une fonction rationnelle à coefficients dans $\text{Frac}(A)$ en $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \dots, \Delta_{n-1,n}, \Delta_{1,n}$ et Δ_{kl} avec $[k,l]$ une diagonale de Δ , c'est-à-dire qu'on peut les en déduire algébriquement.

⊗ (Idée de la preuve.) Par récurrence sur le nombre de croisements de $[i,j]$ avec Δ . ■

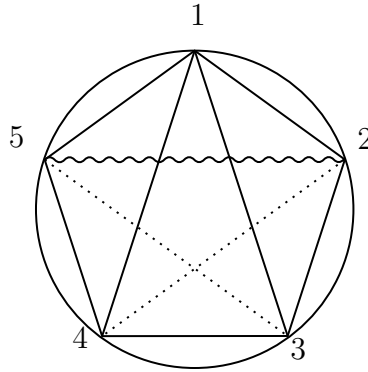


Figure 2.2.3: Modèle de la grassmannienne des plans : cas $n = 5$. —

On suppose connue la triangulation donnée en traits pleins. On commence par déterminer $\Delta_{3,5}$ grâce à la relation de Plücker de base en le considérant comme diagonale du carré $\{1,3,4,5\}$ dont on connaît l'autre diagonale $\Delta_{1,4}$. On peut de même déterminer $\Delta_{2,4}$. Ensuite seulement, on peut déterminer $\Delta_{2,5}$.

Heuristique

Pour savoir dans quel ordre déterminer les mineurs cherchés à partir d'une triangulation donnée, on commence par :

- les diagonales qui ne coupent qu'une seule fois la triangulation,
- puis, ceux qui la coupent exactement deux fois, s'il en est,
- puis trois fois,
- etc.

▷ À justifier. ■

Nous pouvons donner une formule explicite. Par commodité, on prend $K = \mathbb{C}$.

Théorème

Avec les mêmes hypothèses, tout Δ_{ij} est dans $\mathbb{N}[\Delta_{12}, \Delta_{23}, \dots, \Delta_{n-1,n}, \Delta_{1,n}, \Delta_{kl}^{\pm 1} \mid [k,l] \in \Delta]$. De plus, l'expression de Δ_{ij} est explicite.

Pour montrer cela, on aura besoin de la théorie suivante.

2.2.2 Couplages parfaits de graphes et formule des mineurs

Tous les graphes sont supposés connexes, non orientés.

Définition. (Couplage parfait d'un graphe)

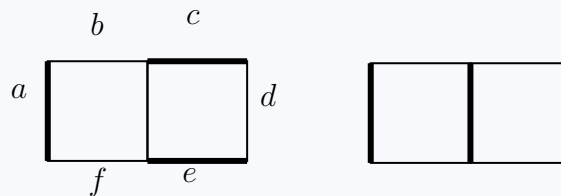
Un *couplage parfait* P d'un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes de G tel que tout sommet de G appartient à exactement une arête de P .

Si le graphe est pondéré, le *poids* du couplage parfait est le produit $w(P)$ des poids des arêtes de P .

Remarque. Un graphe de cardinal impair n'admet aucun couplage parfait.

Exemple. (Couplages parfaits du carré double)

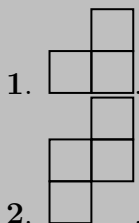
Les deux schémas



sont les deux couplages parfaits du graphe constitués de deux carrés ayant un côté en commun. Dans le premier cas, $w(P) = ace$.

Exercice 2

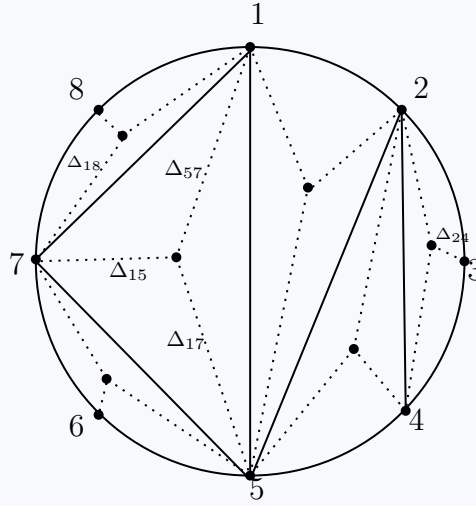
Déterminer tous les couplages parfaits de :



Définition. (Graphe à poids d'une triangulation)

À toute triangulation Δ d'un polygone, on associe un graphe G_Δ de la façon suivante : chaque sommet est un point du graphe, et l'on ajoute un point quelconque à l'intérieur de tout triangle de la triangulation. On ajoute trois arêtes par triangle reliant le nouveau point à chacun des trois sommets de ce triangle, et ces trois arêtes font partie du graphe ; les arêtes de la triangulation dont celles du polygone ne font pas partie du graphe associé. Enfin, à chaque arête du graphe, on associe le mineur du côté opposé au seul sommet du polygone appartenant à l'arête, en prenant $i < j$.

Exemple. (*Grphe à poids d'une triangulation d'un octogone*)



Définition. (*Variable de croisement*)

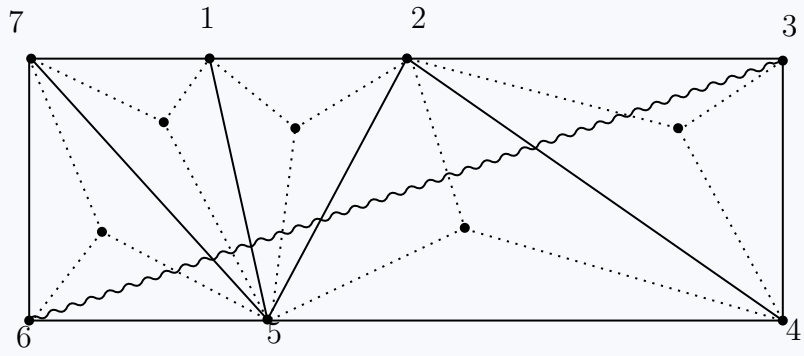
Pour chaque diagonale $[i, j] \notin \Delta$, on définit la *variable de croisement*, soit

$$X_{ij} = \prod_{[k, l] \in \Delta \text{ croisé par } [i, j]} \Delta_{k, l}.$$

Pour chaque $[i, j]$, on ne considère que les triangles traversés par cet arc. On garde aussi le graphe à poids dans cette partie de la triangulation, sauf les arêtes touchant aux extrémités de $[i, j]$. On appelle ce graphe à poids G_{ij} .

Exemple. (*Exemple de variable de croisement sur un heptagone*)

Sur l'heptagone



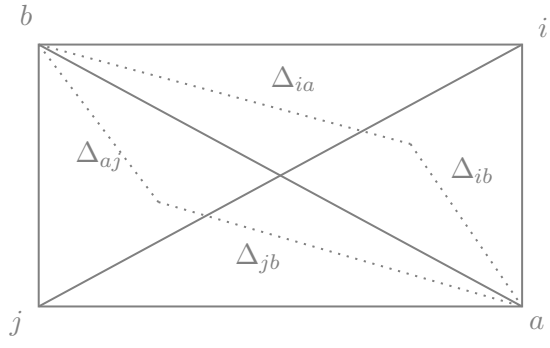
la variable de croisement $X_{36} = \Delta_{24} \Delta_{25} \Delta_{15} \Delta_{57}$.

On peut donc donner la formule explicite annoncée dans le théorème.

Formule. (Formule des mineurs en fonction d'une triangulation)

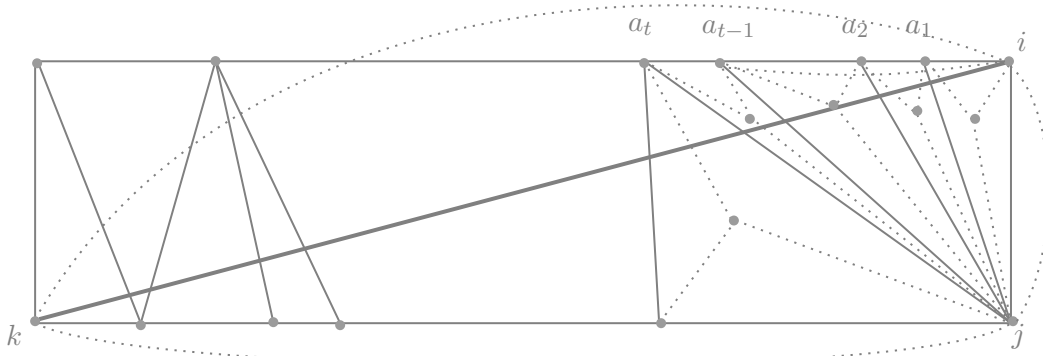
$$\Delta_{ij} = \frac{\sum_{P \text{ couplage parfait de } G_{ij}} w(P)}{X_{ij}} \quad \forall [i,j] \notin \Delta.$$

▷ On raisonne par récurrence forte sur le nombre de croisements entre $[i,j]$ et Δ . Pour 1 croisement, ce n'est autre que la relation de Plücker. En effet, sur le graphe :

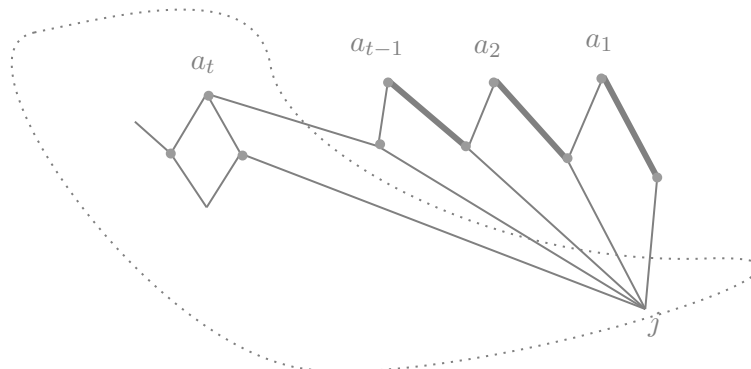


$$\text{alors } \Delta_{ij} = \frac{\underbrace{\Delta_{ib}\Delta_{aj}}_{\text{côtés horizontaux du carré}} + \underbrace{\Delta_{ia}\Delta_{jb}}_{\text{côtés verticaux du carré}}}{\Delta_{ab}=X_{ij}}.$$

S'il y a plus d'un croisement, on considère l'arc $[i,k]$. On place $[i,k]$ dans un quadrilatère (voir ci-dessus) dont les côtés et l'autre diagonale croisent Δ un nombre strictement inférieur de fois.

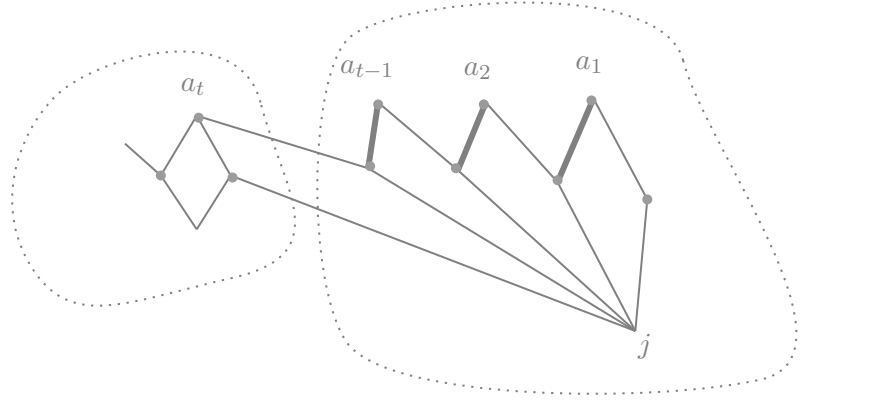


On peut alors distinguer deux familles de couplages parfaits. Pour la première famille, où l'on choisit la famille d'arêtes suivantes :



, on obtient $\Delta_{a_{t-2},j} \dots \Delta_{a_2,j} \Delta_{a_1,j} \Delta_{ij} \sum_{P \text{ c. p. de } G_{a_{t-1},k}} w(P)$, car le poids de la partie séparée est $G_{a_{t-1},k}$.

Pour la deuxième, on l'on choisit l'autre famille :



on a $\Delta_{a_t,j} \cdot \sum_{P \text{ c. p. de } G_{kj}} w(P) \cdot \sum_{P \text{ c. p. de } G_{a_{t-1},i}} w(P)$. En effet, la partie séparée à gauche est de poids G_{kj} (s'en convaincre) et celle de droite $G_{a_{t-1},j}$, car les dents des cie ont un nombre impair de sommets. Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{P \text{ c. p. de } G_{ik}} w(P)}{X_{ik}} &= \Delta_{a_{t-2},j} \dots \Delta_{a_2,j} \Delta_{a_1,j} \Delta_{ij} \sum_{P \text{ c. p. de } G_{a_{t-1},k}} w(P) + \Delta_{a_t,j} \cdot \sum_{P \text{ c. p. de } G_{kj}} w(P) \\ &\quad \cdot \sum_{P \text{ c. p. de } G_{a_{t-1},i}} w(P) \\ &= \frac{\Delta_{a_{t-2},j} \dots \Delta_{a_1,j} \Delta_{ij} X_{a_{t-1}k} \Delta_{a_{t-1}k} + \Delta_{a_t,j} X_{kj} \Delta_{kj} X_{a_{t-1}i} \Delta_{a_{t-1}i}}{X_{ik}}. \end{aligned}$$

On se convaincra grâce aux définitions que ce rapport se simplifie en $\frac{\Delta_{ij} \Delta_{a_{t-1}k} + \Delta_{kj} \Delta_{a_{t-1}i}}{\Delta_{a_{t-1}j}} = \Delta_{ik}$ par les relations de Plücker. ■

2.2.3 Quelques conséquences

Conséquence. (Positivité des mineurs)

Si Δ est une triangulation de P_n , alors si tous les $\Delta_{ij}(A)$ sont > 0 pour $[ij] \in \Delta$, alors tous les Δ_{kl} sont > 0 .

Conséquence. (Intégralité des mineurs)

Si Δ est une triangulation de P_n , si pour tous $[i,j] \in \Delta$, on a que $\Delta_{ij}(A) = 1$, alors tous les $\Delta_{kl}(A)$ sont des entiers > 0 .

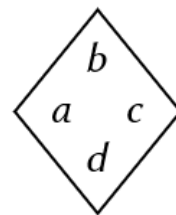
2.2.4 Frises

On expose le lien entre les considérations précédentes et les frises de Conway et Coxeter développées dans les années 1970.

Définition. (*Frise*)

Une *frise de largeur w* est un tableau d'entiers dont la 0-ième ligne et la $(w + 1)$ -ième ligne ne contiennent que des 1 et les autres lignes (disposées en quinconce, toutes les deux lignes) contiennent des entiers strictement positifs respectant la relation d'échange : sur tout losange (a, b, c, d) , $ad - bc = 1$.

1	1	1	1	1	1	1	1
	1	3	2	1			
1	2	5	1	etc.			
	1	3	2	1			
1	1	1	1	1	1	1	1



$$\begin{aligned}
 ad - bc &= 1 \\
 \Leftrightarrow d &= \frac{bc + 1}{a} \\
 \Leftrightarrow (a, b, c, d) \\
 &\in SL_2(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Figure 2.2.4: Exemple d'une frise avec la définition ci-dessus. —

Lien avec les pavages

Si l'on remplissait tout le plan, on parlerait de SL_2 -pavages. Ceci se généralise aux SL_k pavages.

Fait. (*Existence de pavages*)

Il existe des frises de toute largeur !

Théorèmes. (*Conway-Coxeter*)

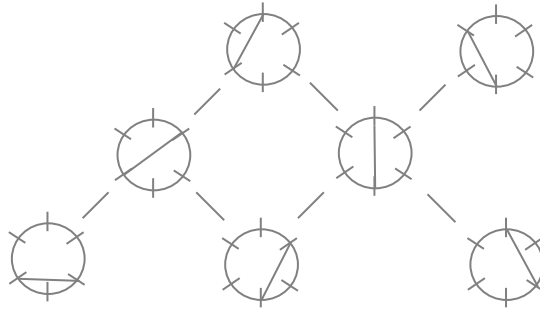
1. Toute frise est périodique.
2. Il existe exactement C_{w+1} frises de largeur w où C_w est le w -ième nombre de Catalan.



C_w est le nombre de triangulations d'un $(w + 2)$ -gone...

Preuve.

▷ Nous allons faire le lien avec les triangulations. Organisons les diagonales d'une triangulation dans un diagramme. On utilise la technique suivante :



dont on laisse à la perspicacité du lecteur de comprendre le fonctionnement.

Si tous les segments des bords sont envoyés sur 1, on obtient une relation de Plücker. Le reste est laissé en exercice.

Pour démontrer le théorème de Conway-Coxeter, il faut encore montrer qu'à toute frise correspond également une triangulation. ■

Chapter 3

An introduction to weak multiplicative structures

Résumé

In this short course, I'll introduce basic examples of weak (or infinity) monoidal categories. I will focus on simple examples which arise naturally in the study of knot invariants or quantum algebra. No previous knowledge of category theory is expected.

3.1 Symmetric Monoidal Categories

3.1.1 First Definitions

We only consider small category in order not to talk about set theory at all.

Définition. (*Small category*)

A *small category* \mathcal{C} consists of:

- (1) a set of objects $\text{Ob}(\mathcal{C}) = \{x, y, z, \dots\}$;
- (2) a set $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{X \xrightarrow{f} Y\}$ for every $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- (3) a distinguished $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$ for every $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- (4) an associative, unital composition: $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$ so
 $(g, f) \longmapsto g \circ f$

that

- $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$;
- $\text{id}_X \circ f = f$; $f \circ \text{id}_Y = f$.

Exemples. (*Small categories*)

1. We denote Fin_{\star} the category of pointed finite sets: $\text{obj} = \{1, \dots, n\} \sqcup \{\star\} = [n] \sqcup \{\star\}$, and maps of finite sets $f : [n] \sqcup \{\star\} \rightarrow [m] \sqcup \{\star\}$ with $f(\star) = \star$.

2. We denote Vect_K the category of K -vector spaces for a field K . The objects are vector spaces and maps: $f : W \rightarrow W$ are linear maps.
3. We denote $\underline{\text{Cat}}$ the category of small categories, where morphisms are functors (*see just below*).

Exemples. (*Categories built from groups*)

1. Any group G is a category. The objects are its points and morphisms are given by translations to the right.
2. $G = (G_0, G_1, G_2, \dots, G_k, \dots)$ where $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is a family of groups. G is a category with $\text{Ob}(G) = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ and $\text{Hom}_G(m, n)$ is empty if $m \neq n$, G_m if not.

Définition. (*Functor*)

A functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consists of:

- (1) $F_0 : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$,
- (2) $\forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C}), F_{x,y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(x), F_0(y))$ with:
 - $F(id_X) = id_{F(x)}$
 - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Définition. (*Natural transformation*)

Given $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, a natural transformation $\eta : F \Rightarrow G$ is $\{\eta_X : F(x) \rightarrow G(x), x \in \text{obj}(\mathcal{C})\} \in \mathbb{D}_j$ so that

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\eta_x} & G(x) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(y) & \xrightarrow{\eta_y} & G(y) \end{array} \quad \forall f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C} \text{ is commutative.}$$

If η is invertible, η is a *natural isomorphism*.

Définition. (*Equivalence of categories*)

A function $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ is an *equivalence of categories* if: $\exists G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ and natural isomorphisms:

$$\eta : id_{\mathcal{D}} \Rightarrow FG, \varepsilon : GF \Rightarrow id_{\mathcal{C}}.$$

Let us recall that an equivalence of categories is exactly a functor that is *essentially surjective* and *fully faithful*.

Exemples. (*Equivalences of categories*)

1. It exists an equivalence of categories $GL \rightarrow (\text{Vect}_{\text{fin}})_{\text{iso}}$ where $(\text{Vect}_{\text{fin}})_{\text{iso}}$ is the category where objets are finite dimensional k -vectoral spaces and morphisms are linear isomorphisms.

2. It exists an equivalence of categories $\Sigma \rightarrow (\text{Fin})_{\text{iso}}$.

Exemples. (*Categories where every map is invertible, a.k.a groupoids*)

1. Let k be a field, $GL_n(k)$ is the group of invertible $(n \times n)$ -matrices over k . $GL = \{\{1\}, k^*, GL_2(k), \dots, GL_n(k), \dots\}$.
2. Let $\Sigma_n = \text{Aut}\{1, \dots, n\}$ denote the symmetric group on n -letters : $\Sigma = (\{e\}, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k, \dots)$.

Définition. (*Special Functors: Fibrations*)

Let $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ be a functor.

- (1) p is a *fibration* of categories if $\forall y \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ and $f : X \rightarrow p(y)$ in \mathcal{B} , $\exists \tilde{x} \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ and a morphism $\tilde{f} : \tilde{x} \rightarrow y$ in \mathcal{E} so that $p(\tilde{f}) = f$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \exists \tilde{x} \xrightarrow{\tilde{f}} y \\ \downarrow p & & \\ \mathcal{B} & & x \xrightarrow{p(\tilde{f})=f} p(y) \end{array}$$

- (2) p is a *Cartesian fibration* if $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow y$ is *Cartesian*, i.e. if $\exists g : Z \rightarrow y \in E_j$ and $\omega : p(Z) \rightarrow x$ in \mathcal{B} so that $p(\tilde{f}) \circ \omega = p(g)$, then $\exists ! \tilde{\omega} : Z \rightarrow \tilde{X}$ so that $\tilde{f} \circ \tilde{\omega} = g$ in \mathcal{E} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & & \begin{array}{ccc} & z & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow g \\ \tilde{x} & \xrightarrow{f} & y \end{array} \\ \downarrow p & & \\ \mathcal{B} & & \begin{array}{ccc} & p(z) & \\ \omega \swarrow & & \searrow p(g) \\ x & \xrightarrow{f} & p(y) \end{array} \end{array}$$

Exercice 3

$\Sigma_n \hookrightarrow GL_n(k)$. Σ_n is isomorphic to the subgroup of permutation matrices. Define a functor $\Sigma \rightarrow GL$. Let u be $GL \rightarrow \Sigma$. Is u a fibration (*

$$f \mapsto \begin{cases} e & \text{if } f \text{ is not a per matrix} \\ [f] & \text{if } f \text{ is a per mat.} \end{cases}$$

op-fibration) ? Cartesian fibration ?

3.1.2 Monoidal Categories

Définition. (Product of categories)

$\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ is the category where $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}) = \{(x, y) \mid x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})\}$ and morphisms $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2, y_2)$.

Définition. (Tensor product of categories)

A tensor product (monoidal structure) of \mathcal{C} is a functor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Let's unwind this definition : $\text{Ob} : (x, y) \xrightarrow{\otimes} x \otimes y$: it exists an object in \mathcal{C} we call $x \otimes y$.

On morphisms, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, y_1) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_2, y_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2)$, $f : x_1 \rightarrow y_1$,

$$(f, g) \longmapsto f \otimes g$$

$g : x_2 \rightarrow y_2$.

Exercice 4

Check $(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$, that is to say: $(f_1 \downarrow \downarrow f_2) \circ (g_1 \downarrow \downarrow g_2)$

$$\text{is } \begin{array}{cc} g_1 \downarrow & \downarrow g_2 \\ f_1 \downarrow & \downarrow f_2 \end{array}.$$

Définition. (Monoidal Category)

A monoidal category $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, l, r)$ consists of:

- (1) A category \mathcal{C} with $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
- (2) A distinguished element $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- (3) A natural iso: $l : \otimes(I \times id) \Rightarrow id$, $I \otimes x \xrightarrow{\cong} x$ and $r = \otimes(id \times I) \Rightarrow id$, $x \otimes I \xrightarrow{\cong} x$.
- (4) A natural iso $\alpha : \otimes(\otimes \times id) \Rightarrow \otimes(id \times \otimes)$ so that:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (w \otimes (x \otimes y)) \otimes z & \xleftarrow{\alpha_{w, x, y \otimes id_Z}} & ((w \otimes x) \otimes y) \otimes z \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha_{w \otimes x, y, z} \\ w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) & \xrightarrow{\alpha} & w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ (X \otimes I) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha} & X \otimes (I \otimes Y) \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow r_{X \otimes I \otimes id_Y} & & \downarrow id_X \otimes l_{I \otimes X} \\ & X \otimes Y & \end{array} \end{array}$$

• (Pentagon) commutes.

• (Triangle) commutes.

Exemples. (*Monoidal Categories*)

1. Our canonical exemple is Vect_K , where $\otimes : \text{Vect}_K \times \text{Vect}_K \longrightarrow \text{Vect}_K$.

$$(V, W) \longmapsto V \otimes_K W$$
2. \mathbb{N} is a category where objects are elements and $\text{Hom}_{\mathbb{N}}(n, m)$ is $\{\star\} = \text{id} : n \rightarrow n$ if $n = m$ and \emptyset otherwise.
3. Exemple of strict monoidal category: $\otimes : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(n, m) \rightarrow n + m$ with $\alpha : (n + m) + k \longrightarrow n + (m + k)$. Here, $I = 0 \in \mathbb{N}$.

Exercise 5

Show in a monoidal category $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, l, r)$, that $\text{End}_{\mathcal{C}}(I) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, I)$ forms a commutative monoid.

Exemples. (*Categories from families of groups*)

1. Generally, let $G = (G_0, G_1, \dots, G_n, \dots)$. If my family of groups G allows me to define a family of group homomorphisms : $\rho_{m,n} : G_m \times G_n \rightarrow G_{m+n}$ for all $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, then we can define a tensor product $\otimes : G \times G \rightarrow G$ for objects: $\otimes : \text{Ob}(G \times G) = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} = \text{Ob}(G)$ and morphisms :

$$(m, n) \longmapsto m + n$$

$$\otimes : G_m \times G_n \longrightarrow G_{m+n} .$$

$$(f, g) \longmapsto \rho_{m,n}(f, g)$$
2. $GL = (\{1\}, \{1\}, GL_2(k), \dots, GL_n(k), \dots)$, $\rho_{m,n} : GL_m(k) \times GL_n(k) \rightarrow GL_{m+n}(k)$ forms with f, g the block matrix : $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$.
3. $\rho_{m,n} : \Sigma_m \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{m+n}$ can be defined as $(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma \oplus \tau(i) = \begin{cases} \sigma(i), 1 \leq i \leq m \\ \tau(i) \text{ otherwise.} \end{cases}$

To check:

(a) $\otimes : GL \times GL \rightarrow GL$ defines a functor.

i. $\otimes[I_m, I_n] = I_{m+n}$, which is clear.

ii. $\otimes(f \circ f', g \circ g') = (f \otimes g) \circ (f' \otimes g')$.

(b) Check $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) \iff \rho_{m+n,k} \circ \rho_{m,n} = \rho_{m,n+k} \circ \rho_{n,k}$, i.e. composition of group homomorphisms is associative.

Définition. (*Symmetric Monoidal Category*)

A monoidal category $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, l, r)$ is *symmetric* if it exists a natural isomorphism $\mathcal{C} := \otimes \Rightarrow \otimes \tau$ where $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$:

$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{C} \\
\downarrow \tau & \nearrow \otimes & \\
\mathcal{C} \times \mathcal{C} & &
\end{array}$$

and c is compatible with the α :

$$\begin{array}{ccccc}
& & x \otimes (y \otimes z) & \xrightarrow{c_{x,y \otimes z}} & (y \otimes z) \otimes x \\
& \nearrow \alpha & & & \searrow \alpha \\
\bullet \text{ (Hexagon 1)} & (x \otimes y) \otimes z & & & y \otimes (z \otimes x) \\
& \searrow c_{x,y} \otimes id_z & & & \nearrow id_Y \otimes c_{x,z} \\
& & (y \otimes x) \otimes z & \xrightarrow{\alpha} & y \otimes (x \otimes z)
\end{array}$$

commutes,

$$\begin{array}{ccccc}
& & (x \otimes y) \otimes z & \longrightarrow & z \otimes (x \otimes y) \\
& \nearrow \alpha & & & \searrow \\
\bullet \text{ (Hexagon 2)} & x \otimes (y \otimes z) & & & (z \otimes x) \otimes y \\
& \searrow id \otimes c & & & \nearrow \\
& & (y \otimes x) \otimes z & \longrightarrow & (x \otimes z) \otimes y
\end{array}$$

commutes as well,

with obvious arrows to be completed.

Remarque. $c^2 \Rightarrow id$. $c_{x,y} : x \otimes y \xrightarrow{\cong} y \otimes x$, $c_{y,x} \circ c_{x,y} : x \otimes y \xrightarrow{c_{x,y}} y \otimes x \xrightarrow{c_{y,x}} x \otimes y$.
 $\xrightarrow{id_X \otimes y}$

Exemples. (Symmetric Monoidal Categories)

1. $(\mathbb{N}, +, 0)$ as a monoidal category is also symmetric monoidal, since $n + m = m + n$.
2. SMC is the category where objects are symmetric monoidal category $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, c, l, r)$ and morphisms are $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ functors with the property $F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) = F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y)$.

Remarque. We also have a family of isomorphisms $x \otimes y \xrightarrow{c_{x,y}} y \otimes x$ with $c_{y,x} \circ c_{x,y} \Rightarrow id_{x \otimes y}$.

Définition. (Monoidal functor)

A monoidal functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ between monoidal categories $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, I_{\mathcal{C}}, \alpha_{\mathcal{C}}, l_{\mathcal{C}}, r_{\mathcal{C}})$, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}}, I_{\mathcal{D}}, \alpha_{\mathcal{D}}, l_{\mathcal{D}}, r_{\mathcal{D}})$ consists of:

- (1) A functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$
- (2) $F(X \otimes_{\mathcal{C}} Y) \xrightarrow{\cong} F(X) \otimes_{\mathcal{D}} F(Y) \quad \forall x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ a family of iso in \mathcal{D}
- (3) $F(\alpha_{\mathcal{C}}) = \alpha_{\mathcal{D}}$

- (4) $F(l_C) = l_{\mathcal{D}}, F(r_C) = r_{\mathcal{D}}$
- (5) $F(I_C) = I_{\mathcal{D}}$ (and then $F(I \otimes X) \Rightarrow F(X)$ with $F(l_C)$).

Définition. (*Symmetric Monoidal functor*)

F is *symmetric monoidal* if furthermore $F(c_C) = c_{\mathcal{D}}$.

A family of symmetric monoidal categories comes from something called operads.

Définition. (*Operad*)

An operad θ consists of:

- (1) a family $\theta = (\theta(0), \theta(1), \dots, \theta(n), \dots)$ where $\theta(k)$ can be sets, categories, groups...
- (2) Each $\theta(k)$ has an action by $\Sigma_k : \theta(k) \times \Sigma_k \rightarrow \theta(k)$
- (3) A distinguished element $1_{\theta} \in \theta(1)$
- (4) A family of associative, unital and equivariant compositions: $\theta(k) \times \theta(j_1) \times \dots \times \theta(j_k) \xrightarrow{y} \theta(j)$ where $k \geq 1, j_i \geq 0, \sum_{i=1}^k j_i = j$.

Exemple

Let $V \in \text{Vect}_k$. $\text{End}(V) = (\text{End}(V)(0), \text{End}(V)(1), \dots, \text{End}(V)(n), \dots)$. $\text{End}(V)(n) = \text{Hom}_{\text{Vect}_k}(V^{\otimes n}, V)$ and $f \in \text{End}(V)(n)$ is $f : V \otimes \dots \otimes V \rightarrow V$, $f(v_1, \dots, v_n) = \omega$.

We have: $\text{End}(V)(n) \times \Sigma_n \longrightarrow \text{End}(V)(n)$

$$(f(v_1, \dots, v_n), \sigma) \longmapsto f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

$1 \in \text{End}(V)(1)$, $1 = \text{id}_V : V \rightarrow V$.

We have: $\text{End}(V)(k) \times \text{End}(V)(j_1) \times \dots \times \text{End}(V)(j_k) \rightarrow \text{End}(V)(j)$ where $(f(\omega_1, \dots, \omega_k), g_1(\underbrace{v'_1, \dots, v'_{j_1}}_{\omega_1}), \dots, g_{j_k}(\underbrace{v'_1, \dots, v'_{j_k}}_{\omega_k}))$. $f(g_1(\omega_1), \dots, g_{j_k}(\omega_k)) = x$ is a function in $j_1 + \dots + j_k = j$ variables.

3.2 Tangles and more monoidal cats

3.2.1 Definitions

Définition-propriété. (*Jones polynomial*)

The *Jones polynomial* for oriented, homed links is a monoidal functor

$$J : T \longrightarrow \text{Vect}_k,$$

$k \supseteq \mathbb{Q}$.

Définition. (*Tangle*)

A *tangle* is the embedding

$$\amalg_l S^1 \amalg \amalg_m [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,1].$$

Définition. (*Tangle category*)

The *tangle category* has for objects: $\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_i = \pm\}$, including \emptyset the empty sequence, which represent a sequence of points in $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}$ or in $\mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}$ depending, and morphisms $t : (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \longrightarrow (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l)$ is an oriented, framed, tangle (up to isotopy), oriented to ε_i if $\varepsilon_i = +$ and from ε_j if $\varepsilon_j = -$. Identity morphisms id are given by straight lines in double lanes. Composition is given by stacking and one can note that circles 0 are going from \emptyset to \emptyset .

$\text{End}_T(\emptyset) = \text{Hom}_T(\emptyset, \emptyset) =$ (as a set) framed, oriented links in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

Définition. (*Knot*)

A *knot* $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

Définition. (*Link*)

A *link* $\amalg S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times [0,1]$.

Fait. (*Structure of T*)

T is a monoidal category with $\otimes : T \times T \rightarrow T$ given by

$$\begin{aligned} \otimes : \text{Ob}(T) \times \text{Ob}(T) &\longrightarrow \text{Ob}(T) \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l) &\longmapsto (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l) \end{aligned}$$
Théorème. (*Presentation of T*)

The monoidal category T is generated by:

3.2.2 On Representations**Définition. (*R-matrix*)**

Let V be a finite dimension k -vector space.

- A linear automorphism $c : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ is called an *R-matrix* if c is a solution to

$$(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)(c \otimes id_V) = (id_V \otimes c)(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)$$

(*Yang-Baxter equation*)

- An enhanced R -matrix is a pair (c, μ) where c is an R -matrix and $\mu : V \rightarrow V$ an automorphism which satisfies the following :

$$\begin{aligned} * \quad c(\mu \otimes \mu) &= (\mu \otimes \mu)c \\ * \quad \text{tr}_2(c^\pm(id_V \otimes \mu)) &= id_V \\ * \quad \tau c(id_V \star \otimes \mu)(c\tau)(id_V \star \otimes \mu^{-1}) &= id_{V \otimes V^*} \end{aligned}$$

Théorème

For a finite dimension k -vector space V plus (c, μ) , it exists one and only one strict monoidal function $F : TVect_k$ that

$$\begin{aligned} + &\longmapsto V \\ - &\longmapsto V^* = \text{Hom}_k(V, k) \end{aligned}$$

so that

- $F(X_+) = cV \otimes V \longrightarrow V \otimes V$,
- $F(U) = d_V : k \longrightarrow V \otimes V^*$,
- $F(\overleftarrow{\cup}) = (id_{V^*} \otimes \mu^+)d_{V^*} : k \longrightarrow V^* \otimes V \xrightarrow{d_{V^*} \otimes \mu^{-1}} V^* \otimes V$,
- $F(X_-) = c^{-1}$, $F(\cap) = \text{ev}_v : V^* \otimes V \longrightarrow k$,
- $F(\overleftarrow{\cap}) = \text{ev}_{V^*}(\mu \otimes id_V) = V \otimes V^* \xrightarrow{\mu \otimes id_{V^*}} V \otimes V^* \rightarrow k$.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Given that we have defined the functor on generators, it remains to check that our values $F(-)$ satisfy the relations $F((\downarrow \cap) \circ (\cup \uparrow)) = F(\uparrow)$, $(d_V \otimes id)(id \otimes l_V) = id$,

$$\begin{array}{ccc} k \otimes V & \longrightarrow & V \otimes V^* \otimes V \\ & \searrow id_V & \downarrow \\ & & V \otimes k. \end{array} \quad \blacksquare$$

Fix V an a basis $\{v_i\}_{i=1}^n$ and define : $c_n : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ by $c_n(v_i \otimes v_j) =$

$$\begin{cases} \lambda_n q v_i \otimes v_j & \text{if } i = j \\ \lambda_n v_j \otimes v_i & \text{if } i < j \\ \lambda_n v_j \otimes v_i + \lambda_n (q - q^{-1}) v_i \otimes v_j & \text{si } i > j \end{cases}, \lambda_n \in k, q \in k^\times.$$

Fait

c_n is an R -matrix :

1. It checks Yang-Baxter (exercice)
2. c_n satisfies : $\lambda_n^{-1} c_m - \lambda_m c_m^{-1} = (q - q^{-1}) id_{V \otimes V}$.

Fait

We can define an automorphism $\mu_n : V \rightarrow V$ by $\mu_n(v_i) = \lambda_n^{-1} q^{-2i1} v_i$ for $\lambda_n \in k^\times$.

The $\text{tr}(\mu_n) = \frac{1}{\lambda_n q^m} \left(\frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \right)$.

Lemme. (Construction of enhanced matrixes)

If $q^{-n} = \lambda_n$, then the pair (c_n, μ_n) is an enhanced matrix.

\otimes (Idée de la preuve.) $\text{tr}_2(c_n^+(id \otimes \mu_n))(v_i) = \lambda_n^{-2} \text{tr}_2(c_n(id \otimes \mu_n)) - \lambda_n^{-1}(q - q^{-1}) \text{tr}_2(id \otimes \mu_n) = \lambda_n^{-1}(1 - \lambda_n(q - q^{-1}) \text{tr}(\mu_n)) id_V = \lambda_n^{-2}(1 - q^{-n}(q^n - q^{-n})) id_V = id_V$ using the hypothesis. ■

Proposition

Let $\lambda_n = q^{-n} \in k^\times$, it exists a unique monoidal functor $F : T \rightarrow \text{Vect}_k$, $+$ $\mapsto V$, $-$ $\mapsto V^*$, with

- $F_{n,q}(U)(1) = \sum_{i=1}^n V_i \otimes V^i$
- $F_{n,q}(\bigcup)(1) = \sum_{i=1}^n q^{2i-1-n} V^i \otimes V_i$
- $F_{n,q}(X_+) = c_n$
- $F_{n,q}(X) = c_n^{-1}$.

Remarque. The values of $F_{n,q}$ above are precisely the defining values of the Jones polynomial.

Corollaire. ($F_{n,q}$ of a circle)

$$F_{n,q}(\bigcirc) = \text{tr}(\mu_n) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

$$\triangleright F_{n,q}(\bigcirc) = F_{n,q}(\cap) \circ F_{n,q}(\bigcup). \quad \blacksquare$$

3.2.3 Last Remarks**Proposition**

There is a 1-1 correspondence between monoidal functors $F : T \rightarrow \text{MonCat}$, $t \mapsto \mathcal{C}$ and ribbon category structures on \mathcal{C} .

In particular, $\text{Rep}(\mathcal{U}_q(g))$ is a Ribbon category and $\exists F : T \rightarrow \text{Rep}(\mathcal{U}_q(g))$, $X \mapsto R$ -matrix.

Remarque. Given t the tangle of two strings crossing two times, the one on the right on top for the lowest crossing and the other way around. Let t' be this tangle looked at in a mirror. $t : \bigcirc \mapsto \rho(V)$.

$$\text{The idea is that } t \not\sim \implies \rho(t) \neq \rho(t'). \text{ We have : } F_{n,q}(\chi_+) : \begin{array}{ccc} V \otimes V & \longrightarrow & V \otimes V \\ (V \otimes W) & \longmapsto & c_n(V \otimes W) \end{array}.$$

On the other hand $F_{n,q}(t) = F(\chi_+) \circ F(\chi_+) = c_n \circ c_n(V \otimes W)$ and $q^n F_{n,q}(\chi_+) = q^{-n} F_{n,q}(\chi_-) = (q - q^{-1}) F_{n,q}(?)$.



Beaucoup de ce qui a été dit par cet intervenant (parfois bien peu compréhensible) nous a troublés !

Chapter 4

Introduction à la réécriture dans les catégories de diagrammes

Résumé

Dans ce cours d'initiation à la réécriture, dans un premier temps, les algèbres et les catégories de diagrammes seront introduites en se concentrant sur des exemples concrets comme l'algèbre de Temperley-Lieb. Ces structures sont définies par générateurs et relations, généralisant les présentations par générateurs et relations d'objets connus comme le groupe symétrique. Finalement, la réécriture dans les catégories diagrammatiques sera introduite et certaines applications seront évoquées, comme l'obtention de formes normales dans les espaces de morphismes de telles catégories. On ne poursuivra pas le constat que, dans certains monoïdes, on ne peut résoudre le problème du mot.

Applications de la réécriture

- Aux mots et monoïdes : BAUER et OTTO, 1984
- Algèbres commutatives : BUCHBERGER, 1965 ; bases de Gröbner
- Algèbres de Lie : SHIRSHOV, 1962 ; base de Gröbner
- Algèbres associatives : BOKUT, 1976
- Opérades : DOTSENKO-KOROSHKIN, 2010
- Catégories monoïdales, catégories de dimension supérieure : GUIRAUD-MALBOS, 2012 ; polygraphe, BURAMI ; computad, STREET

4.1 Réécriture

4.1.1 Introduction informelle

On commence par la réécriture dans les monoïdes, bien plus simple que dans les groupes où l'inversibilité complique beaucoup.

Heuristique

Les objets considérés sont présentés par générateurs et relations. La notion de réécriture consiste à orienter ses relations.

Exemple. (*Groupe à trois tresses*)

On considère $\mathcal{B}_3^+ = \langle s, t \mid sts = tst \rangle$, relation appelée *relation des tresses*.

La règle de réécriture s'énonce : $sts \Rightarrow tst$. On peut aussi ordonner les générateurs : $s > t$.

Heuristique

Deux problèmes apparaissent : la terminaison, liée à des propriétés de noethérianité : “on ne peut pas réécrire indéfiniment” ; la confluence, par exemple : $ststs$ peut se réécrire $tstts$ et $sttst$ selon qu'on considère les trois premières ou trois dernières lettres.

La conjonction de la terminaison et de la confluence donne de la convergence. Si le système de réécriture est convergent, alors on pourra résoudre le problème du mot par l'*algorithme de la forme normale*.

4.1.2 Premières définitions

Définition. (*Système de réécriture*)

Un *système de réécriture* est la donnée d'un ensemble $X = S^*$, où S est un ensemble fini et S^* est le monoïde engendré par S , et d'une relation $\Rightarrow \subseteq X \times X$.

Si $(x, y) \in \Rightarrow$, on le note $x \Rightarrow y$ et on dit que x se réécrit en y .

On note $\Rightarrow^>$ la clôture transitive de \Rightarrow .

Définition. (*Branchement*)

Un *branchement* est un triplet $a \Leftarrow c \Rightarrow b$, $a, b, c \in X$.

Le branchement est dit *local* si $a \Leftarrow c \Rightarrow b$.

Définition. (*Confluence*)

La relation \Rightarrow est *confluente* si pour tout $a \Leftarrow c \Rightarrow b$, il existe $a \Rightarrow^> d \Leftarrow b$ et *localement confluente* si $\forall a \Leftarrow c \Rightarrow b$ il existe $a \Rightarrow^> d \Leftarrow b$.

Dans ce cas, on a la propriété du *diamant* en réunissant les deux diagrammes.

Toute relation confluente l'est localement.

Définition. (*Terminaison*)

La relation \Rightarrow est dite *terminante* si pour tout $a \in X$, toute séquence de réécriture qui part de a est finie.

Théorème. (*Lemme de Newman, 1942*)

Une relation terminante est confluente si elle est localement confluente.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La démonstration repose sur une induction bien fondée. ■

Exemple

$X = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$. On considère : $2n \Rightarrow a$, $2n + 1 \Rightarrow b$, $n \Rightarrow n + 1$.

La relation est localement confluente, mais pas confluente, donc pas terminante.

4.1.3 Branchements critiques

4.1.3.1 Ordre sur les branchements

→ **Conventions.** Les branchements locaux se rangent en trois familles :

- *asphériques*
- *orthogonaux* ou *Peiffer*
- *chevauchants*, qui sont les méchants de l'histoire.

On peut ordonner les branchements locaux :

Définition-propriété. (*Branchement critique*)

La relation illustrée sur les exemples :

$$\begin{aligned} sststs &\sqsupset ststs \\ tsststst &\sqsupset ststs \end{aligned}$$

est une relation d'ordre.

Les branchements les plus petits s'appellent les *branchements critiques*.

Propriété. (*Confluence locale par les branchements*)

Le système de réécriture (X, \Rightarrow) est localement confluente si, et seulement si, tous ses branchements critiques sont confluents.

4.1.3.2 Procédure de Knuth-Bendix (1970)

Méthode. (*Procédure de Knuth-Bendix*)

En entrée, on prend (X, \Rightarrow) terminant grâce à un ordre total sur X .

On regarde les branchements critiques selon l'ordre sur la source.

Si $\hat{a} = \hat{b}$, on passe au branchement critique suivant ; sinon, on rajoute la règle $\hat{a} \xrightarrow{\gamma} \hat{b}$, $\hat{a} > \hat{b}$.

On continue avec la nouvelle règle, et ainsi de suite.

Si cette procédure s'arrête, on obtient un système convergente.

Exemple. (*Procédure KB sur le groupe à trois tresses*)

Soit X l'ensemble des mots sur l'alphabet $S = \{s, t, a\}$. On ordonne $s > t > a$ et par l'ordre lexicographique, on obtient un ordre total sur X .

On réécrit avec

$$\begin{aligned} ta &\xrightarrow{\alpha} as \\ st &\xrightarrow{\beta} a \end{aligned}$$

On applique la procédure de Knuth-Bendix :

Le système de réécriture

$$\begin{aligned} X &= S^* = \{s, t, a\}^* \\ &\alpha, \beta, \gamma, \delta \end{aligned}$$

est convergent. Si on regarde le monoïde présenté par générateurs et relations :

$$M = \langle s, t, a \mid ta = as, st = a, sas = aa, saa = aat \rangle,$$

on a $M \simeq \mathcal{B}_3^+$, donc le problème du mot pour \mathcal{B}_3^+ est résolu.



La mise en ordre des branchements locaux est en général un problème combinatoire peu clair.

Exercice 6

(Un peu plus sur le groupe à trois tresses) On pose $\mathcal{B}_3^+ = \langle s, t \mid tst \stackrel{\theta}{\leftarrow} sts \rangle$.

1. Montrer que, pour $i \geq 0$ et $j \geq 0$, $s^{i+1}t^{j+2}st$ et $tst^{i+2}s^{j+1}$ sont égaux dans \mathcal{B}_3^+ .
2. On note $[\cdot]$ la classe d'équivalence modulo θ . Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} [t^n st] &= \{t^{n-i}sts^i, 0 \leq i \leq n\} \\ [tst^n] &= \{s^j tst^{n-j}, 0 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

3. Montrer qu'il n'existe pas de présentation convergente finie de \mathcal{B}_3^+ avec les deux générateurs s et t .

Pour plus de développements, on renvoie à *Notes on the Braid Isotopy problem*, Patrick DEHORNOY.

4.1.4 Cas du groupe symétrique

4.1.4.1 Application du procédé

4.1.4.2 Tirages d'Amidakuji

4.2 Un peu de catégories

4.2.1 Catégorie de diagrammes

4.2.1.1 Définition

On introduit un vocabulaire relatif aux brins et aux tresses.

Définition. (*Catégorie de diagrammes*)

Une *catégorie de diagrammes monoïdale stricte k -linéaire* est la donnée d'une seule 0-cellule génératrice et de deux 1-cellules génératrices soumises aux relations

Fait

$\text{End}(\uparrow^{\otimes n}) \simeq k\mathcal{B}_n$ l'algèbre du groupe des tresses donnée par

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ si } |i - j| = 1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i - j| > 1 \rangle.$$

▷

■

Remarque. \mathcal{B}_3^+ est obtenue en supprimant les deux premières relations et un des deux générateurs.

Autrement dit, la présentation de \mathcal{B}_n est la même que \mathcal{B}_n^+ , mais ce dernier est le monoïde engendré et non plus le groupe engendré.

4.2.1.2 Loi d'échange

On se donne une catégorie monoïdale muni de $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Propriété. (*Loi d'échange*)

Pour $u \in \text{Hom}(x,y)$, $v \in \text{Hom}(z,t)$, $(\mathbb{1}_z \otimes u) \circ (v \otimes \mathbb{1}_z) = \otimes((\mathbb{1}_z, u)) \circ \otimes((v, \mathbb{1}_z)) = \otimes((\mathbb{1}_z, u) \circ (v, \mathbb{1}_z)) = \otimes((\mathbb{1}_z \circ v, u \circ_i \text{id}_y)) = \otimes(v, u) = v \otimes u$.

Définition. (*Catégorie monoïdale stricte libre*)

La *catégorie monoïdale stricte libre* \mathcal{D}^* sur une catégorie \mathcal{D} est la catégorie dont les objets sont les 0-cellules : x_1, \dots, x_n suites finies de 0-cellules et $\text{Hom}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \neq m \\ x_1 \rightarrow y_1, \dots, y_n \rightarrow y_m & \text{sinon.} \end{cases}$

L'opération \otimes sur \mathcal{D}^* est la concaténation ; $I = \emptyset$ est la liste vide. On peut vérifier que cela donne bien une structure de catégorie monoïdale stricte (car les isomorphismes donnés sont des égalités).

Remarque. On peut démontrer que l'on peut strictifier toute catégorie monoïdale, au sens où toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte.

Définition. (*Catégorie k -linéaire*)

Soit k un anneau. Une *catégorie k -linéaire* si :

1. $\forall (x,y) \in \mathcal{C}_0$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ est un k -module ;
2. \circ est bilinéaire : $u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w$ et dans l'autre sens.

Exemples. (*Catégories linéaires*)

1. \mathbb{N} muni de l'addition est stricte.
2. Vect_k muni du produit tensoriel.
3. Ens muni du produit cartésien.

4.2.2 Diagrammes de cordes

→ **Notation.** Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, \dots)$ une catégorie monoïdale stricte. La composée $\circ : \text{Hom}(x,y) \times \text{Hom}(y,z) \rightarrow \text{Hom}(x,z)$ qui à $x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z \mapsto x \xrightarrow{u \circ v} z$ est représentée verticalement :

4.2.3 Algèbre de Temperley-Lieb

L'exemple suivant fait le lien entre le monde des monoïdes et des catégories de diagrammes. C'est une algèbre, mais rien n'empêche d'appliquer la théorie de la réécriture linéaire.

Exemple. (*Algèbre de Temperley-Lieb*)

Soit k un anneau et soit $\delta \in k$. L'algèbre de Temperley-Lieb $TL_n(\delta)$ est la k -algèbre engendrée par

$$e_1, \dots, e_{n-1}$$

soumis aux relations

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \delta e_i & \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ e_i e_j e_i &= e_i & \text{si } |i-j| = 1 \\ e_i e_j &= e_j e_i & \text{si } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

On oriente tous dans le sens de diminution de longueur des mots (ici, toujours de gauche à droite). On peut écrire tous les branchements critiques et performer Knuth-Bendix pour obtenir un système convergent.

On peut représenter cette algèbre par des diagrammes : n points en bas, n points en haut. On rejoint les points deux à deux par ces cordes sans croisement. Le produit s'opère en concaténant les diagrammes.

C'est une k -algèbre, notée A_n .

Théorème. (*Temperley-Lieb*)

$$A_n \simeq TL_n(\delta).$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) Il faut voir que tout diagramme peut s'écrire comme composée de générateurs : e_1, e_2, \dots, e_{n-1} . ■

Propriété. (*Catalanisme de l'algèbre de Temperley-Lieb*)

$$\dim TL_n(\delta) = C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Définition. (*Catégorie de Temperley-Lieb*)

Les 0-cellules sont \mathbb{N} . $\cup \in \text{Hom}(0,2)$.

Si on rajoute dans la structure de \mathcal{C} (monoïdale stricte k -linéaire) le fait que \mathcal{TL} est la catégorie libre *pivotale* sur une 0-cellule, et $\text{End}_{\mathcal{TL}}(1^{\otimes n}) = TL_n(\delta)$.

4.2.4 Réécriture dans des catégories monoïdales

On va réécrire modulo l'isotopie des diagrammes de cordes.

4.2.4.1 Problème des branchements

4.2.4.2 Problème de la terminaison

Ordonner les diagrammes est très compliqué.

Si on a une catégorie avec \cup , \cap , \rightsquigarrow , \circ , si $|\circ| < |\circ|$, alors $\mathfrak{m} < \circ \cap = \overset{\circ}{\cap} = \cap \circ < \mathfrak{m}$.
Problème !

Définition. (*Quasi-terminaison*)

Si on a une suite de réécriture infinie, alors le même diagramme apparaît une infinité de fois.

Définition. (*Formes quasi-normales*)

Théorème. (*Benjamin Dupont*)

Soit un système de réécriture modulo de diagrammes pour une catégorie monoïdale stricte k -linéaire où k est un corps tel que :

- le système soit quasi-terminant,
- le système est confluent modulo.

Alors l'ensemble des formes quasi-normales donne des bases des espaces Hom pour la catégorie.