Mémoire de Master 2 Mathématiques fondamentales

UNE DÉFINITION DU POLYNÔME D'ALEXANDER PAR LES DIAGRAMMES EN GRILLE POUR LES ENTRELACS

Louis Lascaud

Encadré par : Fathi Ben Aribi, Sorbonne-Université

31 mars 2025 - 17 juin 2025

Résumé

Le polynôme d'Alexander est historiquement le premier invariant de nœud polynomial, introduit par James Waddell Alexander II dans les années 1920. Cet invariant, qui se généralise aux entrelacs, émerge de diverses manières dans divers pans de la Théorie des nœuds. Après l'avoir introduit d'une manière classique, on décrit une représentation planaire des entrelacs plus contraignante que les diagrammes usuels, tracée dans des grilles carrées, qui fournit une méthode de calcul du polynôme d'Alexander.

Table des matières

1 Nœuds, entrelacs et invariants **2**

1.1 Définitions . . . 2

1.2 Diagrammes d'entrelacs et théorème de Reidemeister . . . 3

1.3 Polynôme d'Alexander . . . 5

2 Diagrammes en grille *(grid diagrams)* **8**

2.1 Définition des diagrammes en grilles . . . 8

2.2 Représentation en grille et entrelacs équivalents . . . 10

2.3 Diagrammes en grille et symétries du carré . . . 16

2.4 Classification des petits diagrammes en grille . . . 18

3 Une définition du polynôme d'Alexander par les grilles **25**

3.1 Indice d'une région d'un diagramme en grille . . . 25

3.2 Matrice du démineur d'une grille . . . 27

3.3 Facteur de normalisation associé à une grille . . . 29

3.4 Facteur de signe associé à une grille . . . 30

3.5 Formule du polynôme d'Alexander à partir des grilles . . . 30

4 Exemples de calcul **31**
4.1 Nœud trivial 2×2 31
4.2 Un nœud trivial 3×3 32
4.3 Entrelacs de Hopf positif 33
4.4 Entrelacs de Hopf négatif 34
4.5 Nœud de trèfle droit 35
4.6 Nœud de trèfle gauche 36
4.7 Nœud de huit 37
4.8 Anneaux borroméens 38

5 Preuve de la formule du polynôme d'Alexander par les diagrammes en grille **40**
5.1 Quelques lemmes utiles 40
5.2 La quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ est un invariant d'entrelacs 41
5.3 La quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ vérifie la relation d'écheveau 52
5.4 Conclusion 55

6 Applications : propriétés calculatoires du polynôme d'Alexander **56**
6.1 Invariances 57
6.2 Polynôme d'Alexander d'un entrelacs scindé 57
6.3 Polynôme d'Alexander d'une somme connexe 58

7 D'autres invariants donnés par les diagrammes en grille **59**

1 Nœuds, entrelacs et invariants

1.1 Définitions

Définition 1.1. [**Rol03,** pp. 2, 3] *Un* nœud (orienté) *est la donnée d'un plongement continu de S^1 dans $\mathbb{R}^3$ et d'une orientation sur son image. Un* entrelacs (orienté) à n composantes*, où $n \in \mathbb{N}^*$, est la donnée d'un plongement continu $\pi : \bigsqcup_{i=1}^{n} S^1 \to \mathbb{R}^3$, et pour chaque restriction de π à une composante connexe de $\bigsqcup_{i=1}^{n} S^1$, d'une orientation sur l'image. Chaque restriction est appelée* composante *de l'entrelacs.*

Parfois, par abus, on appelle nœud ou entrelacs l'image d'un tel plongement.

Remarque 1.2. L'ouvrage [**OSS15,** Definition 2.1.1] qui est la principale référence de ce mémoire utilise une définition des entrelacs comme des plongements d'une réunion disjointe de cercles dans S^3 et non $\mathbb{R}^3$. Cette définition est équivalente à la nôtre en remarquant qu'un tel plongement ne peut être surjectif, et que par projection stéréographique, S^3 privé d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Définition-propriété 1.3. [**MK96,** Definition 1.3.1] *Soient deux entrelacs L et L' respectivement plongés dans $\mathbb{R}^3$ par π et π'. On dit que L et L' sont* équivalents *s'il existe un homémorphisme $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ préservant l'orientation tel que $h \circ \pi = \pi'$. Cette définition ne dépend pas du choix des plongements π et π'. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des entrelacs.*

Le plus souvent, on parlera d'entrelacs pour désigner plutôt une classe d'équivalence d'entrelacs, et l'on dira que deux entrelacs sont différents s'ils ne sont pas équivalents.

Définition 1.4. [**BA21,** Définition 2.9] *Une fonction f définie sur l'ensemble des entrelacs un entrelacs est un* invariant d'entrelacs *si deux entrelacs équivalents ont la même image par f.*

Définition 1.5. [**Crom04,** p. 15] *L'*entrelacs inverse *$-L$ d'un entrelacs L est l'entrelacs dont on a inversé l'orientation de toutes les composantes.*

Définition 1.6. [**Crom04,** p. 16] *L'*entrelacs miroir *L^* d'un entrelacs L est l'image de l'entrelacs L par n'importe quelle réflexion de $\mathbb{R}^3$.*

Deux entrelacs équivalents ont des entrelacs inverses équivalents et des entrelacs miroirs équivalents, ce qui permet de parler de l'inverse, ou du miroir, d'une classe d'équivalence d'entrelacs.

Définition 1.7. [**Crom04,** Definition 4.1.1] *Soient L, L' deux entrelacs. La* réunion disjointe *de L et L', notée $L \sqcup L'$, désigne l'entrelacs formé par L et une translation de L' de sorte qu'il existe deux boules disjointes de $\mathbb{R}^3$ contenant respectivement (les images de) L et L'. Un entrelacs qui s'écrit sous la forme $L \sqcup L'$ où L et L' sont deux entrelacs est dit* scindé.

1.2 Diagrammes d'entrelacs et théorème de Reidemeister

Cette section s'inspire de [**Kaw96,** Chapter 1, Section 1].

Définition 1.8. *Un nœud $\pi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ est dit* polygonal *s'il existe une subdivision $\sigma = \{0 = a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k = 1\}$ de $[0,1]$ telle que pour tout $i \in [\![1, k[\![$, l'image de $\pi : S^1 \simeq [0,1]/(0 \sim 1)$ sur $\overline{[a_i, a_{i+1}]}$ soit un segment de $\mathbb{R}^3$ et de plus $\pi(0) = \pi(1)$. Un entrelacs est dit* polygonal *si chacune de ses composantes est polygonale.*

Dans la définition précédente, les éléments $a_0, ..., a_k$ sont appelés *points* de la subdivision σ.

Lemme 1.9. *Tout entrelacs lisse est équivalent à un entrelacs polygonal.*

Réciproquement, un entrelacs polygonal n'est pas lisse, à cause d'un nombre fini de points anguleux, mais on vérifie qu'un entrelacs polygonal est toujours équivalent à un entrelacs lisse.

Remarque 1.10. **(a)** Si $f : X \to Y$ est une application et $x \in X$, on appelle *ordre* de x est le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(f(x))$.

(b) [**Gos93,** p. 254] Si X, Y sont deux espaces topologiques, X est compact, Y est séparé, connexe et f est continue et ouverte, l'ordre de tout point de X est fini.

Définition 1.11. *Un entrelacs à n composantes étant polygonal pour des subdivisions $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de $S^1 \simeq [0,1]/(0 \sim 1)$ (en accord avec la Définition 1.8) est* en position régulière *si sa projection sur le plan $\{z = 0\}$ ne contient pas de points d'ordre $\geqslant 3$ et si les points $a_0^1, ..., a_{k_1}^1, ..., a_0^2, ..., a_{k_2}^2, ..., a_0^n, ..., a_{k_n}^n$ de $\sigma_1, ..., \sigma_n$ sont d'ordre* 1.

Lemme 1.12. *Tout entrelacs polygonal est équivalent à un entrelacs polygonal en position régulière.*

Définition 1.13 (Diagramme d'entrelacs)**.** [**BA21,** Définition 2.14] *Un* diagramme d'entrelacs (orienté) *D est la donnée d'une immersion lisse d'une réunion disjointe de cercles orientés dans le plan, dont les seuls points multiples sont des points doubles en nombre fini, dits* croisements*, où les deux tangentes sont distinctes, et à chaque croisement, d'un choix « dessus » ou « dessous ».*

La Définition 1.11 et le Lemme 1.12 permettent ainsi d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.14. *Tout entrelacs L lisse ou polygonal admet un diagramme d'entrelacs, dit* diagramme de l'entrelacs *L.*

Remarque 1.15. L'orientation d'un entrelacs se transmet naturellement à ses diagrammes via la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$.

Définition 1.16. *À chaque croisement d'un diagramme d'entrelacs, selon l'orientation des deux brins impliqués et l'information dessus/dessous choisie, on définit le signe du croisement selon la figure 1.1.*

Figure 1.1 – Convention de signe : un croisement positif à gauche, un croisement négatif à droite

Dans la suite, on ne considérera plus que des classes d'équivalence d'entrelacs lisses. Une telle classe d'équivalence contient toujours un entrelacs lisse et un entrelacs polygonal.

Avant de caractériser l'équivalence des entrelacs en termes de diagrammes d'entrelacs, on décrit une façon bénigne de modifier les diagrammes d'entrelacs.

Définition 1.17. *Soient D,D' deux diagrammes d'entrelacs. Une* isotopie planaire *entre D et D' est un homéomorphisme h du plan dans lui-même qui préserve l'orientation, tel que*

$h(D) = D'$, qui induise une bijection sur les croisements de D et ceux de D' et de sorte qu'en chaque croisement c de D, $h(c)$ soit un croisement de D' dont l'information dessus/dessous soit la même pour que pour c.

Théorème 1.18 (Reidemeister)**.** [**BA21,** Théorème 2.22], [**Pol10**], [**Suw17**] *Deux entrelacs L, L' sont équivalents si et seulement s'il existe deux diagrammes d'entrelacs $D(L), D(L')$ de L, L' respectivement tels que $D(L)$ et $D(L')$ diffèrent par un nombre fini d'isotopies du plan $\{z = 0\}$ et de modifications dites* mouvements de Reidemeister *parmi :*

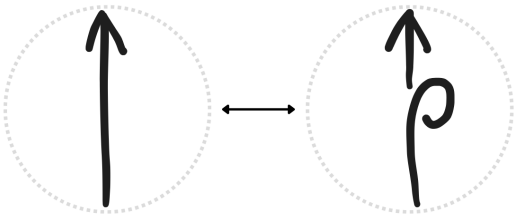


Figure 1.2 – Mouvement $R1a$

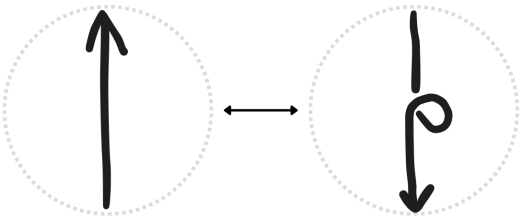


Figure 1.3 – Mouvement $R1b$

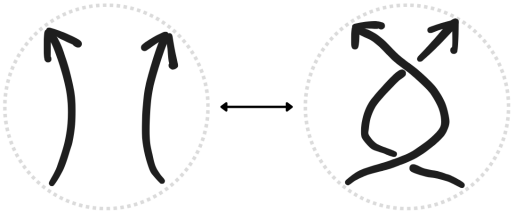


Figure 1.4 – Mouvement $R2$

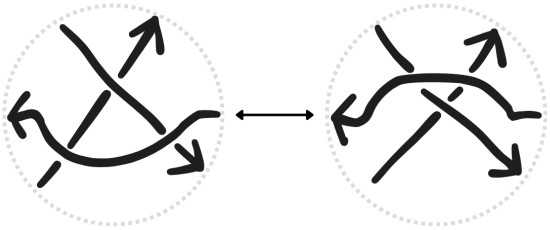


Figure 1.5 – Mouvement $R3$

en comprenant que, pour chacune d'elles, les diagrammes d'entrelacs diffèrent uniquement à l'intérieur du disque délimité en pointillés.

Corollaire 1.19. [**BA21,** Corollaire 2.21] *Soit une fonction g définie sur l'ensemble des diagrammes d'entrelacs. Si g est invariante par isotopie planaire et par les quatre mouvements de Reidemeister du Théorème 1.18, alors elle fournit un invariant d'entrelacs f de la façon suivante : pour tout entrelacs L, on pose $f(L) = g(D(L))$ où $D(L)$ est un diagramme d'entrelacs quelconque de L.*

Par exemple :

Définition-propriété 1.20. *Le* nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(L)$ *d'un entrelacs L est la demi-somme des signes de ses croisements (voir la Définition 1.16) faisant intervenir deux composantes distinctes sur l'un de ses diagrammes d'entrelacs. C'est un invariant d'entrelacs.*

1.3 Polynôme d'Alexander

Définition 1.21. [**Crom04,** pp. 102-104] *Soit L un entrelacs. Une surface orientée compacte connexe à bord de $\mathbb{R}^3$ telle que $\partial S = L$, avec l'orientation sur ∂S induite par celle de S, est*

appelée surface de Seifert *de L.*

Proposition 1.22. [**Crom04,** pp. 102-104] *Tout entrelacs admet une surface de Seifert.*

Définition 1.23. [**Rol03,** pp. 34, 35] *Soient S une surface orientable compacte connexe à bord de $\mathbb{R}^3$ et $b : S \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ un plongement tel que $b(x, 0) = x$ pour tout $x \in S$. Soit e un lacet tracé sur S. On appelle* pushoff *de e le lacet $t \mapsto b(e(t), 1)$ tracé dans $\mathbb{R}^3$.*

Un tel plongement b est parfois appelé *bicollier* pour S. En suivant [**Rol03**], sous les hypothèses de la Définition 1.23, S admet toujours un bicollier donc un lacet sur S admet toujours un pushoff.

Définition-propriété 1.24. [**Crom04,** pp. 157-159] *Soit L un entrelacs. Soit S une surface de Seifert de L. Soit $\mathcal{B}$ une base de $H_1(S, \mathbb{Z})$. Soit V la matrice de la forme bilinéaire φ sur $H_1(S, \mathbb{Z})$ définie pour tous e,$e' \in \mathcal{B}$ par $\varphi(e, e') = \mathrm{lk}(e, e'^+)$ où e'^+ est un pushoff de e'. On définit le* polynôme d'Alexander *de L par :*

$$\Delta_L(t) = \det(t^{-\frac{1}{2}} V - t^{\frac{1}{2}}\, {}^tV)$$

qui est un polynôme de Laurent en la variable $t^{\frac{1}{2}}$ défini à multiplication près par un élément de $\mathbb{Z}\left[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}\right]^* = \left\{\pm t^{\frac{k}{2}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Alors Δ_L ne dépend ni de S, ni de $\mathcal{B}$, en particulier Δ_L est bien défini. De plus, c'est un invariant d'entrelacs.

En posant $u = t^{\frac{1}{2}}$, on obtient un invariant à valeurs dans $\mathbb{Z}[u, u^{-1}]$ défini à un inversible près $\pm u^k, k \in \mathbb{Z}$. Alors, pour tout entrelacs, il existe au signe près un unique choix de représentant du polynôme d'Alexander tel que son plus haut degré et son plus petit degré sont opposés. Tel est le cas de la quantité définie dans la Définition 1.24. On appelle cette normalisation avec le signe fixé par la Défintion 1.24 le *polynôme d'Alexander symétrisé* de l'entrelacs.

Selon [**Crom04,** p. 158], le polynôme d'Alexander $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}]$ d'un nœud K est en fait dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, ce qui revient à dire que dans $\Delta_K(u)$, seules des puissances paires de u (positives ou négatives) apparaissent.

Exemple 1.25. Pour le nœud de trèfle $L = 3_1$, on a

$$\Delta_L(t) = t^2 - t + 1 \equiv t - 1 + t^{-1}$$

et

$$\Delta_L(u) = u^4 - u^2 + 1 \equiv u^2 - 1 + u^{-2}.$$

Pour $L' = 3_1^*$, on a $\Delta_{L'}(t) = \Delta_L(t)$ et de même pour $L'' = -3_1$, on a $\Delta_{L''}(t) = \Delta_L(t)$. Ce dernier fait n'a rien d'étonnant, car les nœuds 3_1 et -3_1 sont équivalents. Ce n'est pas le cas de 3_1 et 3_1^*, mais la remarque se généralise : un entrelacs et son miroir ont les mêmes polynômes d'Alexander. Ainsi, l'invariant Δ n'est pas complet.

Dorénavant, on notera toujours Δ_L le polynôme d'Alexander symétrisé de l'entrelacs L.

Proposition 1.26. [**Crom04,** p. 162] *Le polynôme d'Alexander symétrisé est l'unique invariant d'entrelacs f valant* 1 *sur le nœud trivial et vérifiant la* relation d'écheveau*, c'est-à-dire que si l'on a trois entrelacs L^+, L^-, L_0 dont des diagrammes d'entrelacs respectifs qui diffèrent seulement dans un disque respectivement par*

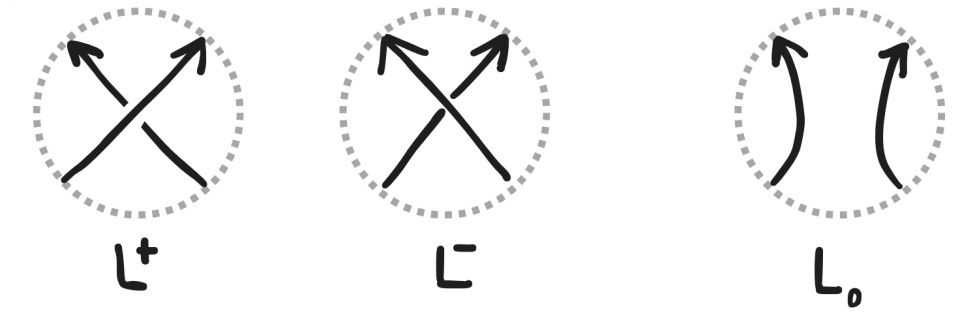


Figure 1.6 – Relation d'écheveau

alors $f(L^+) - f(L^-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})f(L_0)$.

Il existe de nombreuses caractérisations du polynôme d'Alexander, on en a donc deux ci-dessus (Définition-propriété 1.24 et Proposition 1.26). La définition historique due à Alexander dans [**Ale28**] utilise un calcul de déterminant de taille n où n est le nombre de croisements du diagramme considéré de l'entrelacs.

Le site LinkInfo ([**Lin**]) donne pour un entrelacs à plusieurs composantes son *polynôme d'Alexander multivarié*, un invariant différent du polynôme d'Alexander tel que présenté précédemment. Néanmoins, le polynôme d'Alexander multivarié encode le polynôme d'Alexander classique :

Proposition 1.27. [**Kaw96,** Proposition 7.3.10] *Soit L un entrelacs à n composantes. On note Δ_L^m son polynôme d'Alexander multivarié. Alors* $\Delta_L(t) = (t-1)\Delta_L^m(\underbrace{t,\ldots,t}_{n \text{ fois}})$.

2 Diagrammes en grille *(grid diagrams)*

Dans cette section, on introduit une façon particulière de représenter les entrelacs qui fournira une nouvelle méthode de calcul du polynôme d'Alexander. En général, on suit la présentation de [**OSS15,** Chapter 3, Section 1].

2.1 Définition des diagrammes en grilles

Définition 2.1. *Un* diagramme en grille *de* nombre n *est la donnée de deux permutations* $\sigma_{\mathbb{O}}, \sigma_{\mathbb{X}} \in \mathfrak{S}_n$ *telles que pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_{\mathbb{O}}(i) \neq \sigma_{\mathbb{X}}(i)$.

Un diagramme en grille $\mathbb{G}$ est représenté par une grille régulière de taille $n \times n$ dans le plan, dont certaines cases sont remplies par des ronds et d'autres par des croix en suivant la disposition des entrées des matrices de permutation $\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}}$ et $\Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}}$. Autrement dit, c'est une grille carrée à n cases de côté contenant un seul $\mathbb{O}$ par ligne et par colonne, un seul $\mathbb{X}$ par ligne et par colonne et au plus un *symbole* $\mathbb{O}$ ou $\mathbb{X}$ par case. Sur la Figure 2.2 par exemple, $\sigma_{\mathbb{O}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)(4,5)$ et $\sigma_{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1,3)(2,4)(5,6)$.

Notons qu'il existe deux conventions quant aux matrices associées à une permutation :

$$P_\sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array} \qquad \Pi_\sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array}$$

qui sont liées par la relation $\Pi_\sigma = P_{\sigma_n} P_\sigma = P_{\sigma_n \sigma}$ où $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on considère que la réalisation d'une grille est dans le premier quadrant du repère canonique de $\mathbb{R}^2$ et que son coin inférieur gauche est au point $(0,0)$.

Remarque 2.2. Un diagramme en grille est un cas particulier de diagramme d'entrelacs orienté, de la manière suivante : sur chaque ligne de la grille, on relie l'unique symbole $\mathbb{O}$ à l'unique symbole $\mathbb{X}$ par un segment orienté de $\mathbb{O}$ vers $\mathbb{X}$ et sur chaque colonne de la grille, on relie l'unique symbole $\mathbb{X}$ à l'unique symbole $\mathbb{O}$ par un segment orienté de $\mathbb{X}$ vers $\mathbb{O}$. De plus, à chaque croisement, nécessairement entre un segment horizontal et un segment vertical, on impose que le segment vertical passe au-dessus du segment horizontal (*convention de grille*). Le diagramme d'entrelacs obtenu $D(\mathbb{G})$ est celui d'un entrelacs dit *représenté* par le diagramme en grille $\mathbb{G}$, noté $L(\mathbb{G})$.

Définition 2.3. *(d'après* [**Bl10**] *et* [**OSS15,** Appendix B]*) Un diagramme d'entrelacs est en* position générique de prégrille *s'il est affine par morceaux, uniquement composé de segments*

verticaux et horizontaux portés par des droites deux à deux toutes distinctes (sauf bien sûr si l'on considère un segment et son prolongement au-delà d'un croisement) et les segments verticaux passent au-dessus des segments horizontaux.

Proposition 2.4. *Tout diagramme d'entrelacs est isotope à un diagramme d'entrelacs en position générique de prégrille.*

Démonstration. Clairement, des isotopies planaires permettent de remplir les deux premières conditions. Il suffit donc d'exclure les situations où des segments verticaux passent en dessous de segments horizontaux, appelées *croisements illictes*. Pour cela, on effectue les modifications décrites sur la Figure 2.1. □

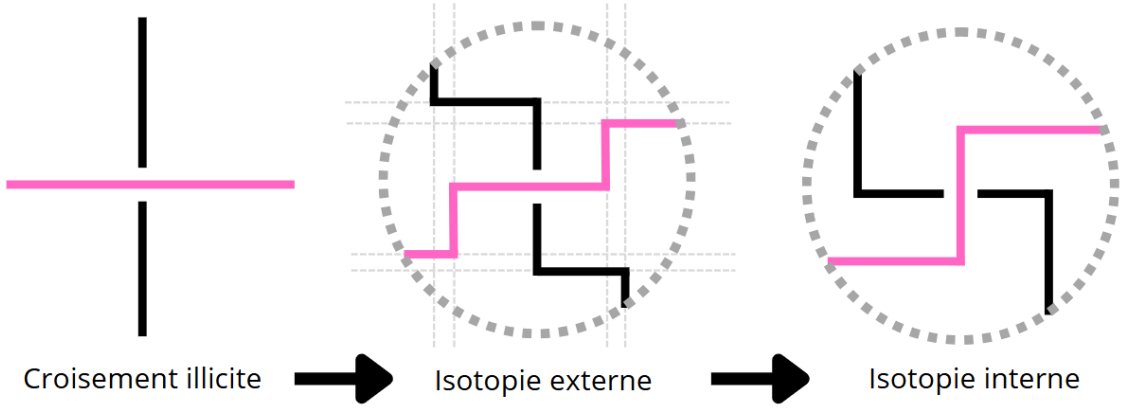


Figure 2.1 – À un croisement illicite, on effectue d'abord des isotopies planaires pour se ramener au deuxième diagramme. Enfin, les deux diagrammes de droite qui ne diffèrent qu'à l'intérieur du cercle en pointillés sont également isotopes.

Corollaire 2.5. *Tout entrelacs peut être représenté par un diagramme en grille.*

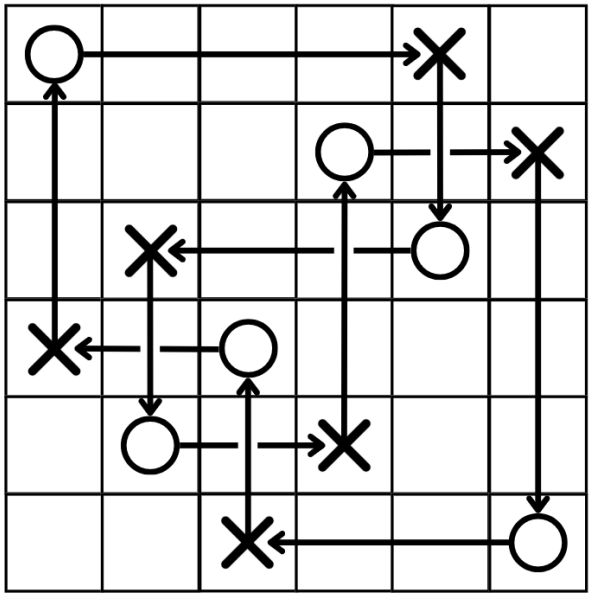


Figure 2.2 – Une grille $\mathbb{G}$ représentant le nœud de huit 4_1

Il y a même une manière quasi algorithmique d'obtenir un diagramme en grille à partir d'un diagramme d'entrelacs :

- ⋆ chaque portion de brin du diagramme reliant deux croisements est remplacé par au moins deux segments perpendiculaires suivant le brin au plus près ;
- ⋆ on ajuste le diagramme obtenu pour qu'il soit en position générique de prégrille via des isotopies planaires ;
- ⋆ on trace une pseudo-grille (c'est-à-dire avec éventuellement des lignes ou des colonnes vides) en suivant l'ordre des croisements de haut en bas ;
- ⋆ retire les lignes ou colonnes vides de cette grille ;
- ⋆ on assigne un symbole $\mathbb{O}$ ou $\mathbb{X}$ à chaque angle en suivant l'orientation du diagramme d'entrelacs.

C'est cette méthode particulière qui est utilisée sur la Figure 2.13.

2.2 Représentation en grille et entrelacs équivalents

Définition 2.6. *On considère un diagramme en grille $\mathbb{G}$. Une* transposition *de colonnes adjacentes, respectivement de lignes adjacentes indexées par $i, i+1$ consiste à prendre la grille $\mathbb{G}'$ telle que*

$$\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}')} = \Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G})} P_{(i,i+1)} \ \textit{ET} \ \Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G}')} = \Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G})} P_{(i,i+1)},$$

respectivement

$$\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}')} = P_{(i,i+1)} \Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G})} \ \textit{ET} \ \Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G}')} = P_{(i,i+1)} \Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G})}.$$

Moins formellement, il s'agit d'échanger les placements des deux symboles de chacune des deux colonnes, respectivement des deux lignes adjacentes.

Définition 2.7. *On considère un diagramme en grille $\mathbb{G}$.*

(a) *Une transposition de colonnes ou lignes adjacentes est* une commutation de premier type *si les projections (sur l'axe vertical pour les colonnes, sur l'axe horizontal pour les lignes) de ses deux segments parallèles sont disjoints, ou bien s'ils coïncident seulement sur la longueur d'une demi-case, ce qui correspond exactement au cas où deux des symboles sont dans des cases adjacentes (on appellera ce cas* échange *; voir la Figure 2.5).*

(b) *Une transposition de colonnes ou lignes adjacentes est une* commutation de second type *si l'une des projections de ses deux segments parallèles est contenue dans l'autre, inclusion à prendre au sens large.*

On appelle commutation*, une commutation de premier ou de second type.*

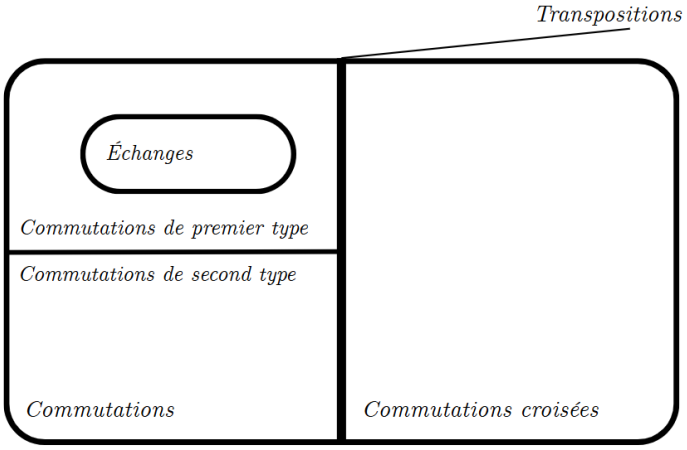


Table 1 – Différents types de transpositions

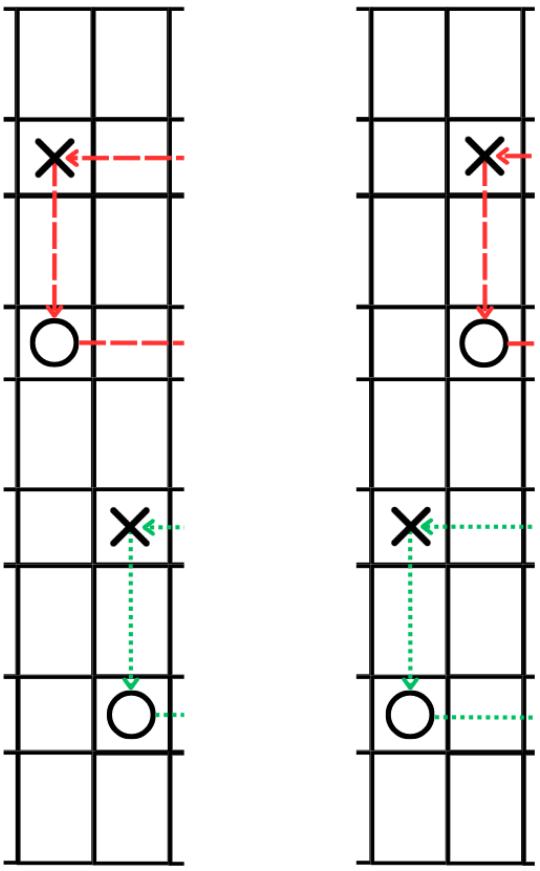


Figure 2.3 – Commutation de colonnes de premier type. Les diagrammes en grille sont identiques hors des colonnes représentées. Les cases longues représentent un nombre quelconque de cases.

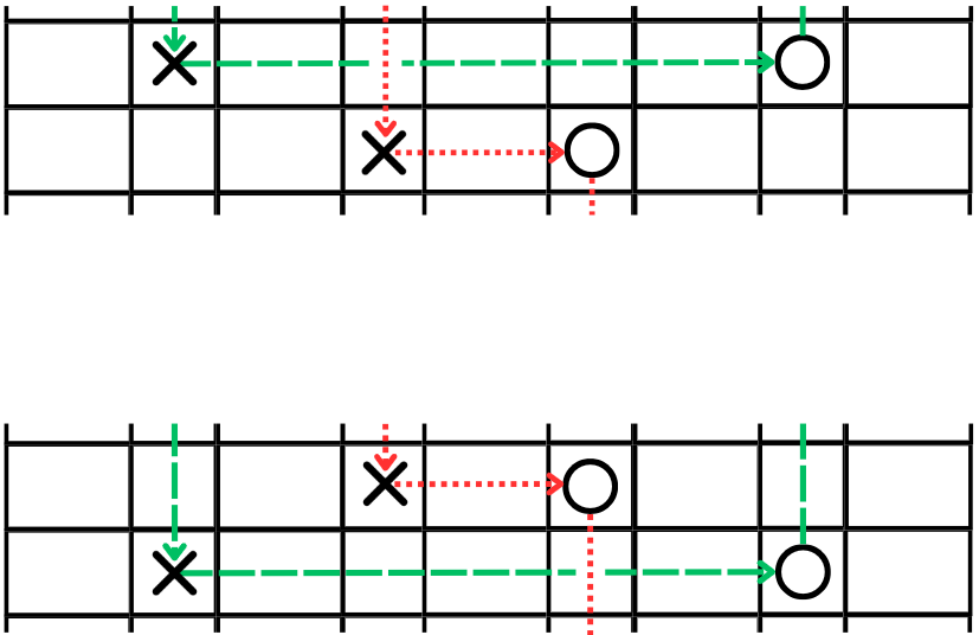


Figure 2.4 – Commutation de lignes de second type. Les diagrammes en grille sont identiques hors des lignes représentées. Les cases longues représentent un nombre quelconque de cases.

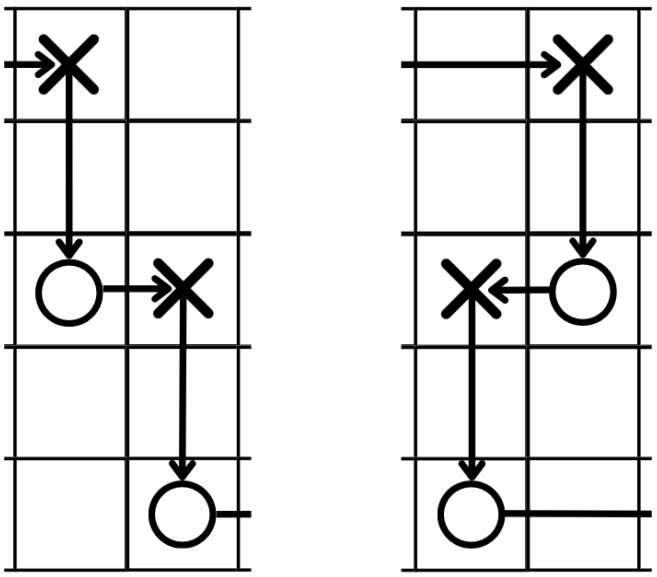


Figure 2.5 – Une situation d'échange

Définition 2.8. *On appelle* stabilisation *l'ajout d'une ligne et d'une colonne à un diagramme en grille, le déplacement d'un symbole (*$\mathbb{O}$ *pour une* stabilisation $\mathbb{O}$*,* $\mathbb{X}$ *pour une* stabilisation $\mathbb{X}$*) et l'ajout de deux autres symboles comme représenté sur la Figure 2.6 (stabilisation* $\mathbb{O}$*), et de même en échangeant le rôle des* $\mathbb{O}$ *et des* $\mathbb{X}$ *(stabilisation* $\mathbb{X}$*). On appelle* déstabilisation*, l'opération inverse d'une stabilisation. Le* kink *(*[**Sch13**]*) d'une (dé)stabilisation désigne le carré de quatre cases après stabilisation contenant trois symboles dont deux adjacents.*

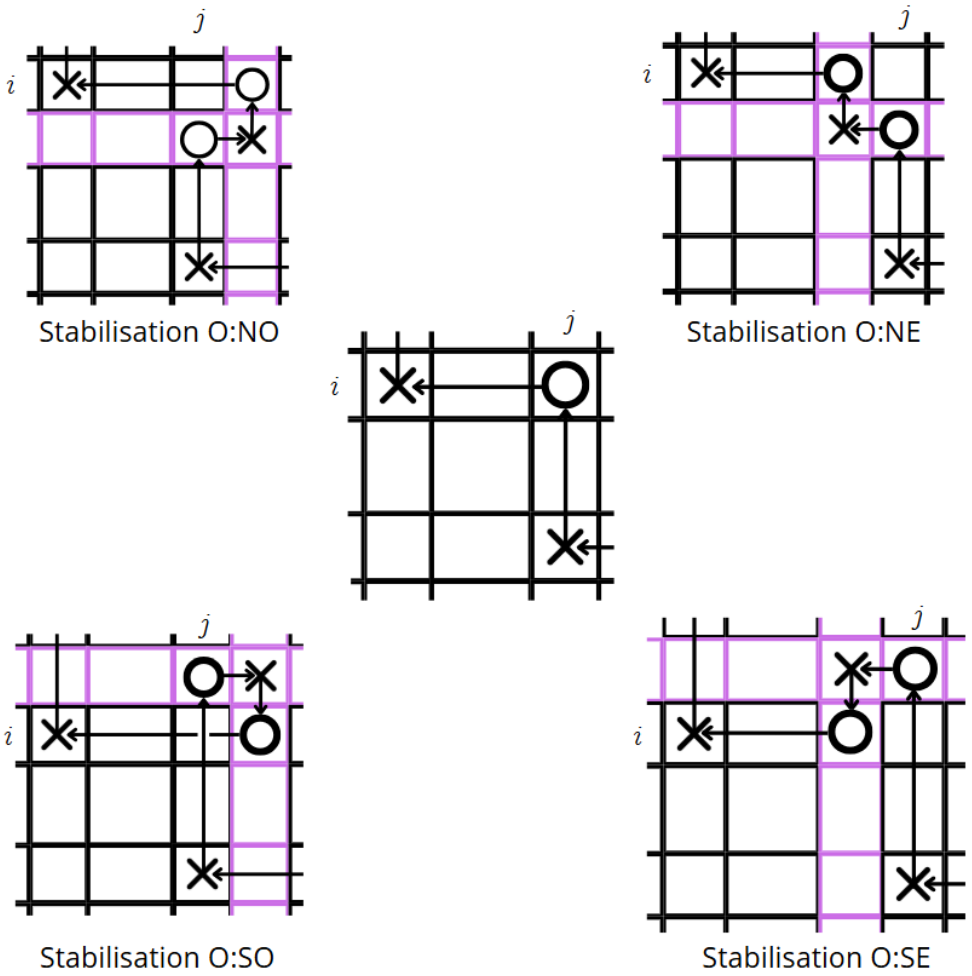


Figure 2.6 – Les quatre stabilisations partant d'un symbole $\mathbb{O}$ (la situation initiale est représentée au centre), nommées en fonction de l'unique case vide du kink. Les colonnes et lignes ajoutées sont en rose clair. Les diagrammes sont identiques à réalignement près hors des cases représentées. Les cases longues représentent un nombre quelconque de cases.

Théorème 2.9 (Cromwell)**.** [**Crom95,** p. 42], [**Dyn06,** Proposition 4], [**OSS15**] *Deux diagrammes en grille représentent des entrelacs équivalents si et seulement si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de grille, i.e. : commutation de lignes, commutation de colonnes, stabilisation ou déstabilisation.*

Démonstration. [**Crom95**] et [**Dyn06**] utilisent le formalisme de la présentation en arcs et [**OSS15**] traduit leurs preuves pour les diagrammes d'entrelacs classiques. On sait déjà que tout diagramme d'entrelacs D de L admet un diagramme de grille $\mathbb{G}$ tel que $L(\mathbb{G})$ est équivalent à L, et donc le diagramme d'entrelacs $D(\mathbb{G})$ donné par $\mathbb{G}$ est isotope à D. Le point-clef est de montrer que $D(\mathbb{G})$ et D sont reliés par des mouvements de grille, pour $\mathbb{G}$ quelconque.

On peut vérifier d'abord que les mouvements de grille correspondent à des isotopies planes ou à des mouvements de Reidemeister, puis, que tout mouvement de Reidemeister correspond à une suite finie de mouvements de grille. Or, il suffit de le vérifier sur la famille génératrice à quatre éléments des mouvements de Reidemeister orientés présentés sur la Figure 1.18. □

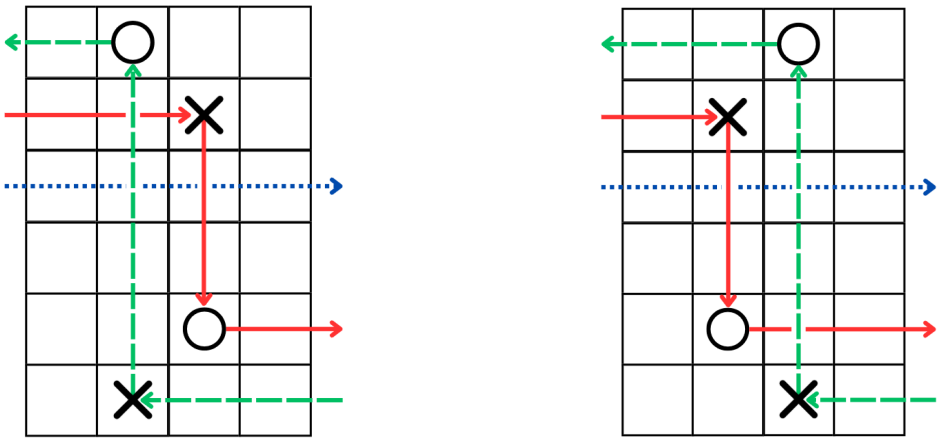


Figure 2.7 – Le mouvement de Reidemeister $R3$ se traduit par une commutation.

Remarque 2.10. **(a)** Un *échange*, *i.e.* une commutation de premier type pour laquelle deux des symboles des lignes (respectivement colonnes) adjacentes sont sur la même colonne (respectivement sur la même ligne), ce qui correspond au cas où les projections sur l'axe horizontal (respectivement sur l'axe vertical) coïncident sur la longueur d'une case seulement, est une composée de mouvements de grille, voir par exemple la Figure 2.8. On peut donc l'exclure tacitement des mouvements de grille élémentaires du Théorème 2.9. Similairement, une commutation de second type pour laquelle deux des symboles sont adjacents, possiblement les quatre deux à deux, est une composée des autres mouvements de grille (en excluant les échanges) et on peut donc l'exclure tacitement de la liste des mouvements de grille.

(b) Une permutation cyclique des lignes ou des colonnes d'un diagramme en grille est également une composée de mouvements de grille.

[**OSS15,** Lemma 3.25] démontre qu'une permutation cyclique est une suite de commutations, de stabilisations et de déstabilisations de type NO et SE. En fait, il est intuitif qu'une permutation cyclique (disons, la n-ième colonne devient la première colonne) ne change pas la classe d'équivalence de l'entrelacs : dans $\mathbb{R}^3$, cela revient (dans cet exemple), grâce à la convention de grille de la Remarque 2.2, à faire passer un brin à l'arrière du reste du diagramme. Pour une permutation cyclique de lignes, cela revient à faire passer un brin à l'avant du reste du diagramme. On pourra essayer de s'en convaincre en observant la Figure 2.2, par exemple. Pour conclure, on remarque qu'une permutation cyclique quelconque n'est autre qu'une composée de ces deux manipulations ou de leurs inverses.

(c) Une transposition de lignes ou de colonnes qui n'est pas une commutation (de premier ou de second type) est appelée *commutation croisée*. A priori, elle ne préserve pas la classe d'équivalence de l'entrelacs représenté : deux grilles différant d'une commutation croisée représentent des diagrammes d'entrelacs différant du signe d'un croisement, comme sur l'exemple de la Figure 2.9.

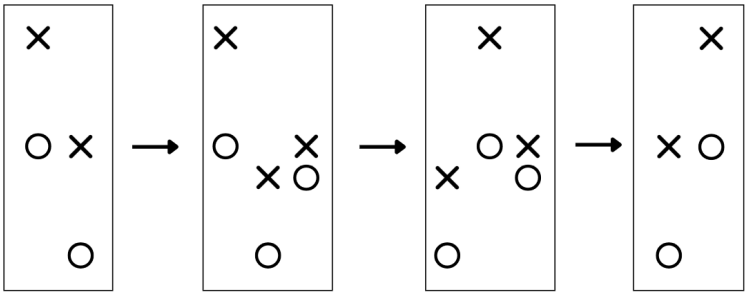


Figure 2.8 – Un échange de colonnes exprimé comme suite d'une stabilisation, d'une commutation de premier type et d'une déstabilisation

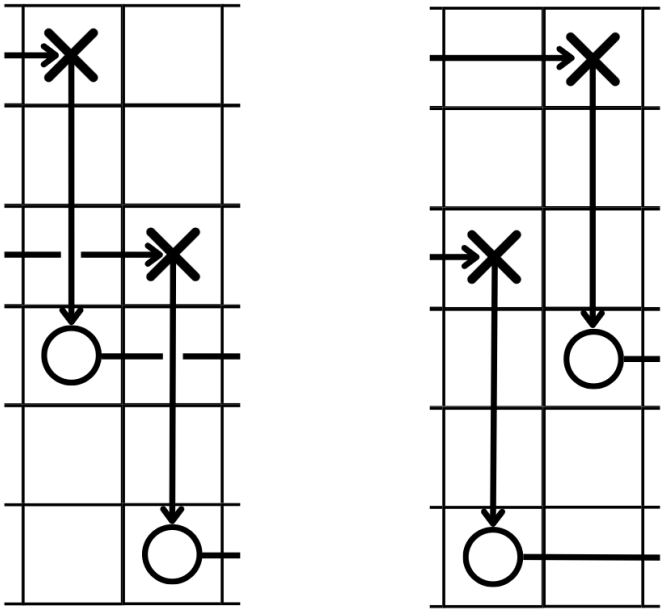


Figure 2.9 – Une commutation croisée. En changeant le signe d'un croisement à gauche, on obtient un diagramme où un mouvement de type $R2$ est possible, qui équivaut donc à la situation de droite.

Un intérêt des diagrammes en grille est donc d'exprimer l'équivalence d'entrelacs par une liste entièrement déterminée de mouvements, contrairement au théorème de Reidemeister qui s'autorise des isotopies planaires quelconques. De plus, pour chaque entier naturel n, il n'y a qu'un nombre fini de façons de représenter un nœud dans une grille de nombre n (éventuellement aucune). En ce sens, la représentation en grille élimine l'imprécision due aux isotopies planaires de diagrammes d'entrelacs. Au passage, on retrouve qu'on a un nombre dénombrable de classes d'équivalence d'entrelacs.

2.3 Diagrammes en grille et symétries du carré

On considère une grille $\mathbb{G}$. Le diagramme d'entrelacs $D(\mathbb{G})$ associé représente un entrelacs $L = L(\mathbb{G})$.

	transformation de la grille (placement des $\mathbb{O}$ et des $\mathbb{X}$)	entrelacs représenté
(i)	rotation d'angle π	L
(ii)	rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$	$-L^*$
(iii)	rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$	$-L^*$
(iv)	symétrie par rapport à l'horizontale	L^*
(v)	symétrie par rapport à la verticale	L^*
(vi)	symétrie par rapport à la diagonale principale $\diagup$	$-L$
(vii)	symétrie par rapport à la diagonale secondaire $\diagdown$	$-L$
$(viii)$	$\rho \in D_4 \setminus \{id\}$	$\in \{L, -L, L^*, -L^*\}$
(ix)	permutation cyclique	L
(x)	échange des ronds et des croix	$-L$

En particulier, ces transformations sur $\mathbb{G}$ ne changent pas le type de l'entrelacs, *i.e.* l'ensemble $\{L, -L, L^*, -L^*\}$.

Montrons ces propriétés.

(i) Le diagramme de L donné par $\mathbb{G}$ est simplement tourné d'un demi-tour et la convention de grille (Remarque 2.2) assure qu'aucun croisement n'a changé de signe (cf Figure 2.10a).

(ii) Le diagramme de L donné par $\mathbb{G}$ est simplement tourné d'un quart de tour, mais la convention de grille impose que tous les croisements changent de signe (cf Figure 2.10b). C'est une façon de représenter l'entrelacs miroir. De plus, la façon de construire les diagrammes en grille décrite à la Remarque 2.2 assure également que les brins inversent tous leurs orientations (par exemple, ceux horizontaux qui arrivaient à un $\mathbb{X}$, en partent désormais puisqu'ils sont verticaux). En somme, l'entrelacs représenté est l'inverse du miroir.

(iii) C'est la composition des deux transformations précédentes.

(iv) Cela revient à réfléchir le diagramme de L par rapport au plan perpendiculaire à celui dans lequel $\mathbb{G}$ est représentée contenant l'axe de symétrie horizontal de $\mathbb{G}$. Les croisements changent tous de signe (cf Figure 2.10c) mais pas l'orientation de chaque brin ; on obtient bien un miroir de L.

(v) On fait tourner d'abord le diagramme de $\frac{\pi}{2}$, donc L devient $-L^*$. Une symétrie par rapport à l'horizontale devient alors une symétrie par rapport à la verticale. D'après le point précédent, on obtient $(-L^*)^* = -L$. En faisant enfin tourner le diagramme de $-\frac{\pi}{2}$, on obtient $-(-L)^* = L^*$.

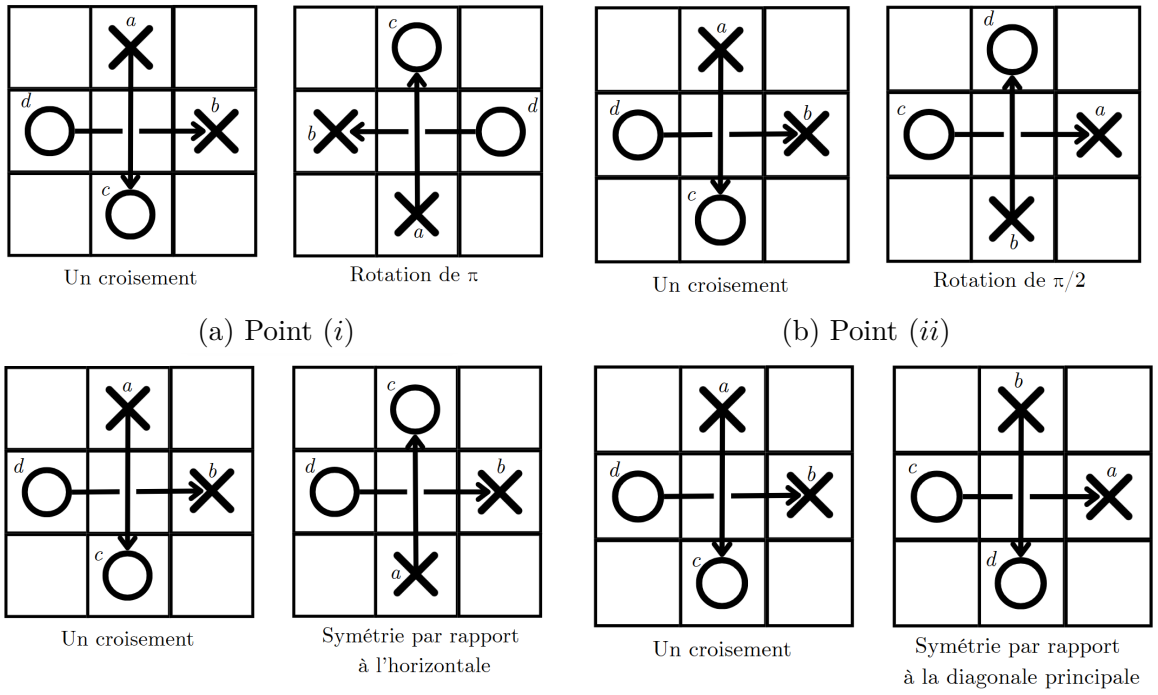
(vi) Le diagramme de L est le même à isotopie près (une rotation par rapport à la droite portée par la diagonale $\diagup$), mais l'orientation de chaque brin est inversée (cf Figure 2.10d) sans que le croisement change de signe (pour s'en convaincre : le retourner selon une rotation de π dans l'espace, puis changer l'orientation des deux brins) ; on obtient bien un inverse de L.

(vii) Même raisonnement que pour le point (v).

(viii) Simple résumé des points précédents.

(ix) Voir la Remarque 2.10.

(x) En effet, d'après la convention pour tracer un diagramme d'entrelacs à partir d'une grille, cette opération revient seulement à inverser l'orientation de tous les segments, et donc à inverser l'orientation de l'entrelacs.



(a) Point (i) (b) Point (ii)

(c) Point (iv) (d) Point (vi)

Figure 2.10 – Perturbations « locales » des croisements par des symétries du carré

2.4 Classification des petits diagrammes en grille

Dans la Section 3, on donnera une méthode pour calculer le polynôme d'Alexander d'un entrelacs L à partir d'une représentation en grille $\mathbb{G}$ de L. Si $\mathbb{G}$ est de nombre n, cette méthode nécessite le calcul d'un déterminant de taille n. Il est donc crucial de minimiser le nombre de grille du diagramme en grille choisi pour L.

Remarque 2.11. Pour montrer qu'une grille associée à un entrelacs est de nombre minimal, il faut et il suffit de montrer qu'aucune déstabilisation n'est possible, sachant qu'une déstabilisation n'est possible qu'en présence d'un schéma de trois symboles adjacents sur la grille. Mais on peut imaginer qu'une suite d'autres mouvements de grille soit nécessaire avant de faire apparaître ce schéma !

Dans l'exemple du nœud de huit 4_1, lorsqu'on dresse l'un de ses diagrammes en grille à partir de son diagramme comme le nœud twist W_{-3} (de la manière quasi algorithmique décrite en Section 2.1), on obtient une grille 7×7. Ce processus est décrit sur la Figure 2.13 (on comparera avec la Figure 2.14 qui traite du nœud de neuf 5_2). On ne peut pas déstabiliser la grille obtenue

sans autre mouvement de grille préalable. D'après le théorème de Cromwell, il est nécessaire d'appliquer des commutations ou des stabilisations à cette grille avant de lui appliquer une déstabilisation qui permettront d'obtenir la grille de la Figure 2.2, puisque ces deux grilles représentent des nœuds équivalents.

On pourrait même imaginer [1] un cas de figure d'une grille $\mathbb{G}$ pour laquelle aucune déstabilisation ni commutation n'est possible immédiatement, mais qu'après une certaine suite de stabilisations et de commutations, on peut stabiliser deux fois la grille obtenue (et donc diminuer le nombre de $\mathbb{G}$ sans changer l'entrelacs représenté).

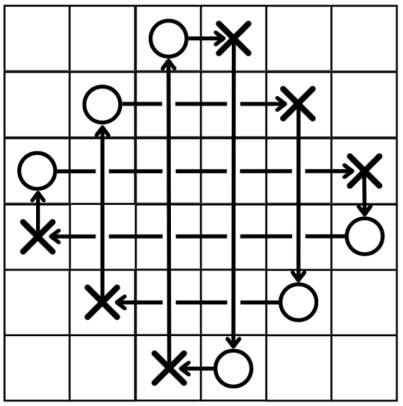
Proposition 2.12. *Un entrelacs représenté par un diagramme en grille de nombre n admet au plus n^2 croisements. De plus, pour $n \geqslant 2$ pair, il existe un diagramme de grille $\mathbb{G}_n$ de nombre n avec un nombre de croisements $c(\mathbb{G}_n) = \frac{n(n-2)}{2}$ et pour $n \geqslant 5$ impair, il existe un diagramme de grille $\mathbb{G}'_n$ de nombre n avec un nombre de croisements $c(\mathbb{G}'_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.*

Démonstration. Puisqu'il y a n^2 cases dans un diagramme en grille de nombre n et qu'il y a au plus un croisement par case, le premier point de la Proposition 2.12 est immédiat.

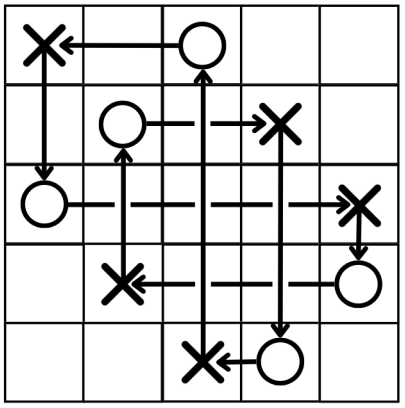
Exhibons les suites de diagrammes $(\mathbb{G}_n)$ et $(\mathbb{G}'_n)$. On les construit selon la géométrie suivante :

1. C'est en fait ce qu'il se passe lorsqu'aucune déstabilisation n'est possible et la seule commutation possible est un échange. La Figure 2.8 montre qu'alors une stabilisation est nécessaire avant commutation et déstabilisation : on parle de *simplification non monotone*.

Dans la Figure 2.13, commuter la dernière et l'avant-dernière colonne. Le seul mouvement de grille possible est alors un échange. Comme cette grille de 4_1 n'est pas de nombre minimal, on a là un exemple.



(a) Modèle de $\mathbb{G}_n$ pour n pair, ici pour $n = 6$



(b) Modèle de $\mathbb{G}'_n$ pour n impair, ici pour $n = 5$

Figure 2.11 – Des exemples parmi les grilles $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{G}'_n$

Notons que les entrelacs représentés par ces diagrammes en grille sont scindés, mais peu importe. Remarquons aussi que ce sont les grilles qui nous intéressent et non seulement les entrelacs représentés : une permutation des colonnes, par exemple, peut changer la quantité $c(\mathbb{G}_n)$. Un simple calcul donne :

$$c(\mathbb{G}_n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} 2(2k) = 4\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} k = 4\frac{\frac{n-2}{2}(\frac{n-2}{2}+1)}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$$

puis :

$$c(\mathbb{G}'_n) = (n-2) + \sum_{k=0}^{\frac{n-5}{2}}(2k+1) + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}(2k) = \sum_{k=0}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

ce qui donne l'estimation attendue. □

Ainsi, le nombre maximal de croisements d'un diagramme d'entrelacs représenté par un diagramme en grille de nombre n est au moins en $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$, ce qui n'est guère avenant. On se contente donc de décrire les grilles représentant des entrelacs de nombre $n \leqslant 5$.

Proposition 2.13. *On considère les grilles à transformations près, celles-ci étant listées à la Section 2.3.*

1. *Grilles* 1×1 *: impossible, car on ne peut placer plus d'un symbole par case, or il faut un* $\mathbb{O}$ *et un* $\mathbb{X}$ *mais il n'y a qu'une case.*
2. *Grilles* 2×2 *: une seule grille (à symétries près bien entendu), qui est associée au nœud trivial (Figure 4.2).*
3. *Grilles* 3×3 *: deux grilles associées au nœud trivial,*
   - *l'une sans croisement (Figure 4.4),*
   - *l'autre avec une boucle de type* $R1$ *(en prenant* $\sigma_{\mathbb{O}} = (1, 3, 2)$ *et* $\sigma_X = (1, 2, 3)$*), mais ce sont les mêmes à permutation cyclique près.*
4. *Grilles* 4×4 *:*
   - *trois grilles associées au nœud trivial ;*
   - *deux grilles associées à l'entrelacs scindé à deux composantes :*
     - *l'une par concaténation de deux grilles* 2×2*,*
     - *l'autre en imbriquant deux représentations* 3×4 *du nœud trivial (Figure 2.12) ;*
   - *deux grilles associées aux entrelacs de Hopf (Figures 4.6 et 4.8).*
5. *Grilles* 5×5 *:*
   - *multiples grilles associées au nœud trivial (par exemple la Figure 2.11b) ;*
   - *multiples grilles associées à l'entrelacs scindé à deux composantes ;*
   - *multiples grilles associées aux entrelacs de Hopf (selon la taille choisie pour chaque chaque composante) ;*
   - *deux grilles associées aux deux nœuds de trèfle (Figure 4.11 et sa symétrisée par rapport à l'horizontale).*

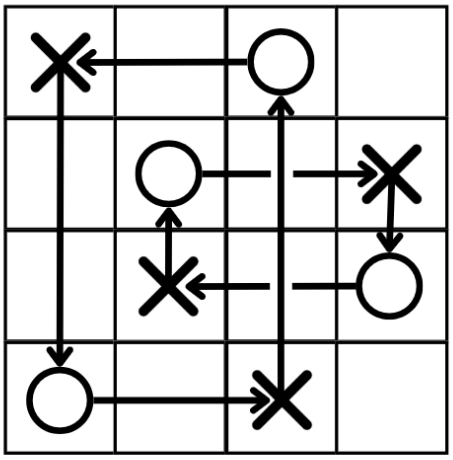


Figure 2.12 – Entrelacs scindé à deux composantes. Grâce à la convention de grille, il est très facile de créer des diagrammes de grille d'entrelacs scindés.

Le nombre de grille minimal pour représenter un entrelacs L est un invariant que nous notons $\gamma(L)$. Le site KnotInfo ([**Kno**]) recense cet invariant sous le nom d'*arc index*. On a $\gamma(U) = 2$ et pour tout nœud K, $\gamma(K) \geqslant 5$. Pour le nœud de huit par exemple, cet invariant

vaut $\gamma(4_1) = 6$ et pour le nœud de neuf 5_2 de la Figure 2.14, $\gamma(5_2) = 7$. Il n'y a aucun entrelacs tel que $\gamma(L) = 3$.

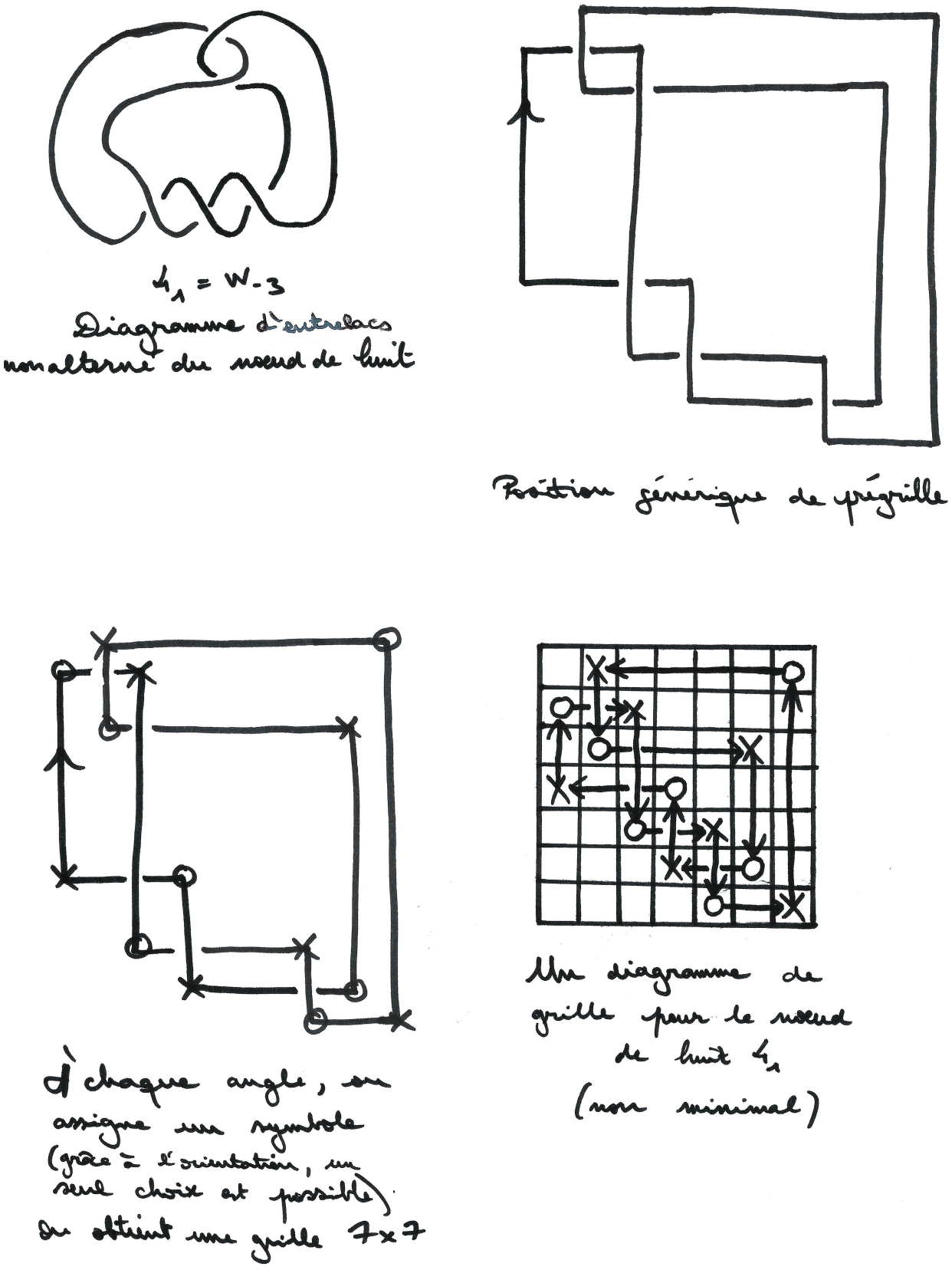


Figure 2.13 – Création d'un diagramme en grille du nœud de huit à partir de l'un de ses diagrammes d'entrelacs

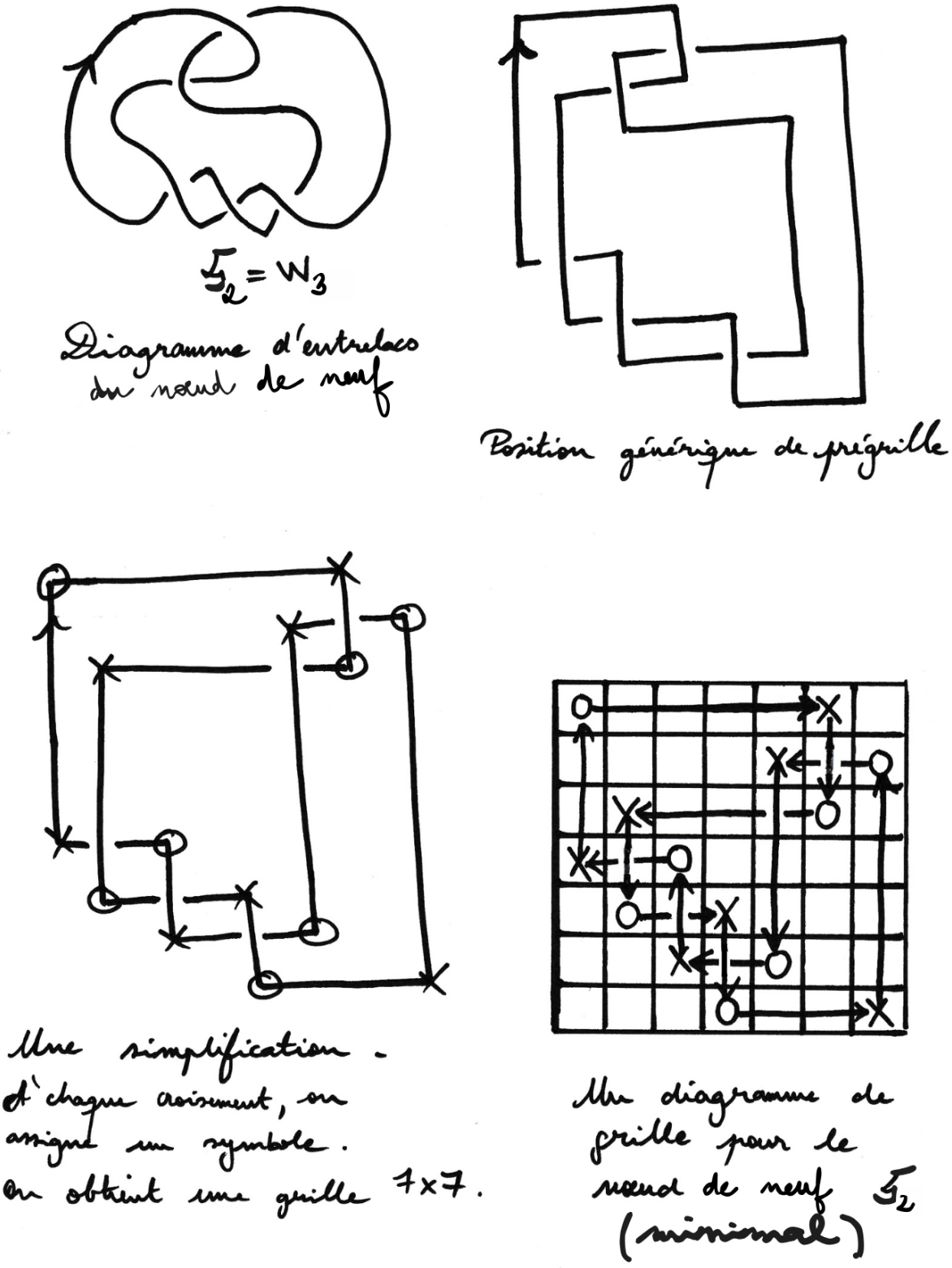


Figure 2.14 – Création d'un diagramme en grille du nœud de neuf à partir de l'un de ses diagrammes d'entrelacs

3 Une définition du polynôme d'Alexander par les grilles

Là encore, on suit globalement la présentation de [**OSS15,** Chapter 3, Section 3].

3.1 Indice d'une région d'un diagramme en grille

Définition 3.1. *Soit γ un lacet continu du plan (a priori non simple). Soit x_0 un point du plan. On définit l'*indice *de x_0 par rapport à γ, et l'on note $\iota_\gamma(x_0)$, comme la somme des nombres algébriques*[1] *d'intersection à chaque intersection de γ avec une demi-droite ρ d'extrémité x_0, dite* rayon.

Si le lacet γ est lisse ou linéaire par morceaux, il n'y a qu'un nombre fini d'intersection d'une telle demi-droite avec γ, ce qui légitime la définition précédente. On rappelle que le nombre algébrique d'intersection est défini de la manière suivante : si ρ rencontre γ en un point d'ordre 1, on utilise la convention donnée par la Figure 3.1. Si ρ rencontre γ en un point d'ordre $\geqslant 2$, il existe un voisinage V de ce point telle que $\gamma^{-1}(V \cap \mathrm{Im}(\gamma))$ soit, à reparamétrisation près de γ, une réunion disjointe d'un nombre fini de segments ouverts $I_1, ..., I_n$ inclus dans [0,1]. Alors le nombre algébrique d'intersection est défini comme la somme des nombres algébriques d'intersection de γ avec $\gamma_{|I_1}, ..., \gamma_{|I_n}$ munis de l'orientation directement induite par γ.

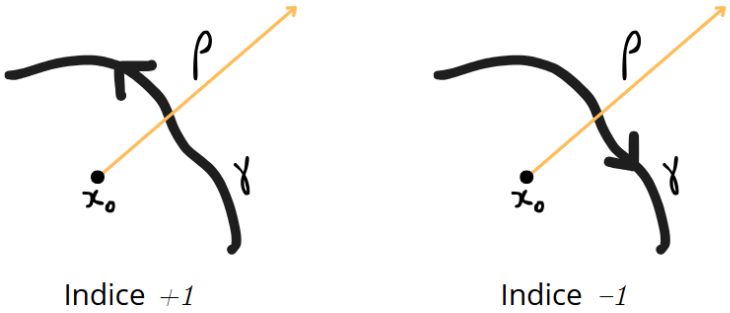


FIGURE 3.1 – Convention de signe pour le nombre algébrique d'intersection d'un rayon avec un lacet

Lemme 3.2. *La définition de l'indice ne dépend pas du rayon choisi.*

Démonstration. On considère la fonction $S^1 \simeq SO(2) \to \mathbb{Z}, \rho \mapsto \iota_{\gamma,\rho}(x_0)$. Montrons qu'elle est localement constante :

(i) hors d'un point multiple (c'est-à-dire d'ordre > 1, ou > 2 dans le cas du point $\gamma(0) = \gamma(1)$), on invoque la continuité du lacet : il existe un voisinage de ce point qui ne contient également que des points simples ;

1. Par convention, le sens positif est le sens antihoraire. Cela revient, en suivant la convention de la Définition 1.16, à lire le rayon ρ dessus et le lacet γ dessous ; on se rapportera à la Figure 3.1.

(ii) sur un point multiple, dans le cas d'une intersection transverse d'une part, par définition du nombre algébrique d'intersection, l'indice est constant sur un voisinage assez petit du point multiple. En effet, en supposant sans perte de généralité que les positions relatives de ρ et γ sont telles que sur la figure 3.2 (cas 2 transverse), pour une rotation d'angle $|\theta| \ll 1$, l'indice vaut $1 + 1 = 2$, de même qu'en le point multiple considéré (correspondant ici à $\theta = 0$) ;

(iii) dans le cas d'une intersection tangente d'autre part, en supposant sans perte de généralité que les positions relatives de ρ et γ sont telles que sur la figure 3.2 (cas 2 tangent), pour une rotation d'angle $0 < \theta \ll 1$, l'indice est nul puisque $\rho(\theta)$ ne rencontre pas γ. Pour une rotation d'angle $1 \ll \theta < 0$, le rayon $\rho(\theta)$ rencontre deux fois γ en des intersections algébriques opposées, donc l'indice est encore nul.

Ces raisonnements ne valent bien sûr que si le rayon ρ ne rencontre aucun autre point de γ, mais ils se généralisent immédiatement en remarquant que l'indice est additif.

Puisque S^1 est connexe, $\iota_{\gamma,\rho}(x_0)$ est constante en ρ. □

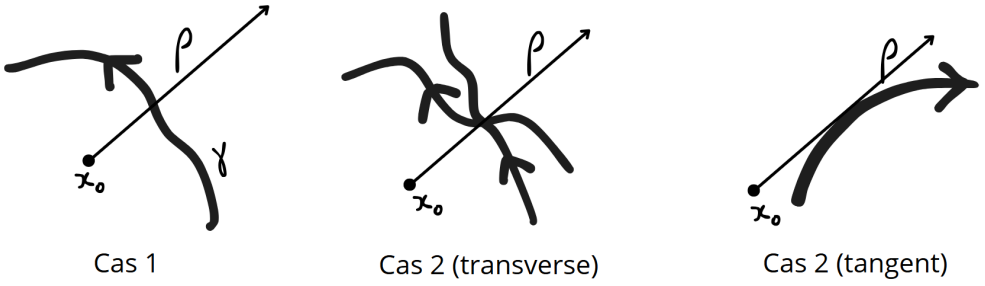


Figure 3.2 – Trois cas d'intersection du rayon avec le lacet : en un point simple, en une intersection transverse, en un point de tangence.

Lemme 3.3. *L'indice $\iota_\gamma : x_0 \mapsto \iota_\gamma(x_0)$ est constant sur les zones du plan délimitées par le diagramme d'entrelacs γ associé à une grille.*

Démonstration. Soit C une telle zone, qui par définition est une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Puisque C est ouverte, elle est connexe par lignes polygonales (voir par exemple [**Gou08,** Théorème 5 p. 43]). Il suffit donc de montrer que si l'on a $x_1, x_2 \in C$ tels que $[x_1, x_2] \subseteq C$, on a $\iota_\gamma(x_1) = \iota_\gamma(x_2)$. Or un rayon ρ issu de x_2, porté par le segment $[x_1, x_2]$ et dans le sens de $\overrightarrow{x_1x_2}$ permet de calculer l'indice de x_2, et le rayon $\rho \cup [x_1, x_2]$ permet de calculer l'indice de x_1. Puisque $[x_1, x_2]$ ne rencontre pas γ, l'indice est le même pour x_1 et x_2. □

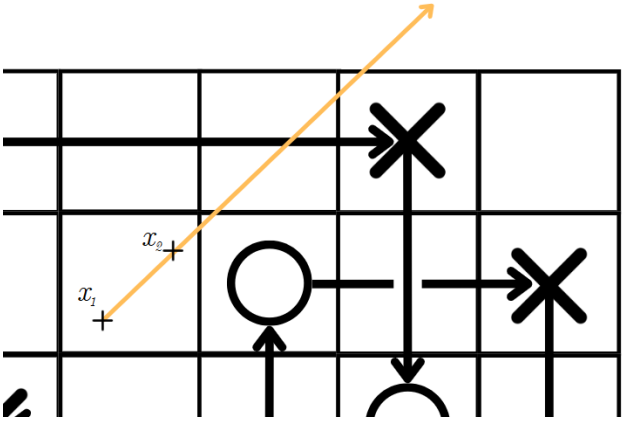


Figure 3.3 – L'indice ne change pas à l'intérieur d'une zone

Dans la suite, on s'intéressera aux indices des points du réseau formé par une grille. Afin de faciliter la lecture, pour les petits indices, on convient de couleurs standards pour colorier une zone selon son indice comme dans l'exemple de la Figure 3.4 :

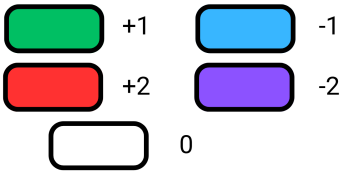


Table 2 – Convention de coloriage des zones selon leur indice

Remarquons dès maintenant que les indices de deux zones adjacentes diffèrent de 1, ce qui consiste d'ailleurs en une définition de l'indice pour [**Ale28,** p. 277] en fixant que l'indice de la région non bornée du plan est nul.

3.2 Matrice du démineur d'une grille

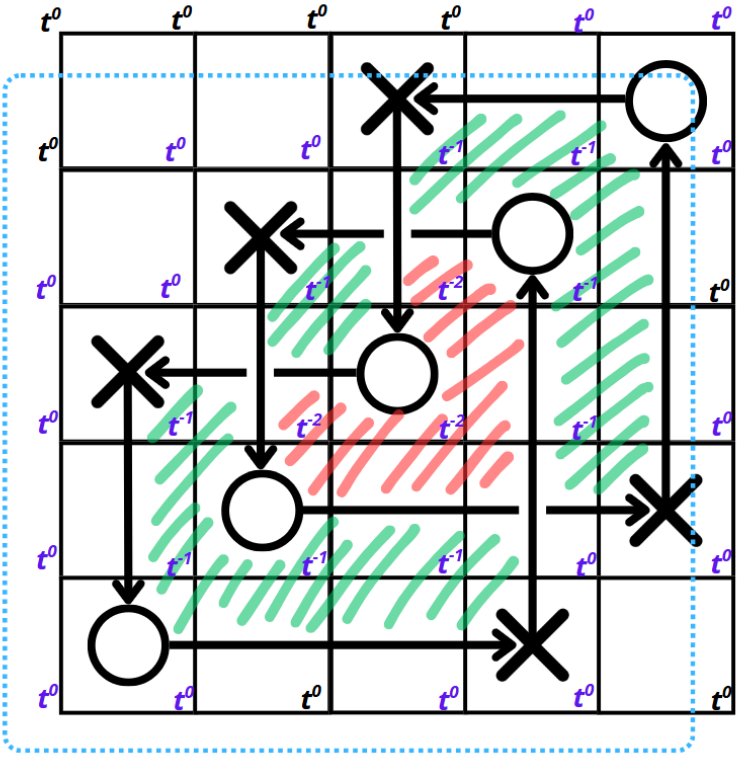
La terminologie suivante s'inspire de [**Sch13**].

Définition 3.4. *Étant donnée une grille $\mathbb{G}$ de nombre n, on considère les points d'intersection des lignes horizontales et des lignes verticales repérés par leurs coordonnées dans $[\![0,n]\!]^2 \subseteq \mathbb{Z}^2$, si la grille est dans la premier quadrant et son coin en bas à gauche est en $(0,0)$. Chacun de ces points a un indice relativement au diagramme $D(\mathbb{G})$ associé à $\mathbb{G}$.*

La matrice du démineur $\mathbf{M}(\mathbb{G}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$ *est la matrice :*

$$(t^{-\iota_{D(\mathbb{G})}(j-1,n-i)})_{i,j\in[\![1,n]\!]}.$$

La matrice du démineur suit donc la géométrie des zones de $D(\mathbb{G})$ et ignore le segment horizontal en haut de $\mathbb{G}$ et le segment vertical à droite de $\mathbb{G}$ (voir la Figure 3.4).



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & t^{-1} & t^{-2} & t^{-1} \\ 1 & t^{-1} & t^{-2} & t^{-2} & t^{-1} \\ 1 & t^{-1} & t^{-1} & t^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 3.5 – Matrice du démineur pour $\mathbb{G}$

Figure 3.4 – Diagramme complet pour une grille $\mathbb{G}$ du nœud de trèfle gauche 3_1^*

Dans le diagramme de la Figure 3.4 :

- ⋆ les zones colorées notent l'indice selon la convention donnée par la Table 2 ;
- ⋆ la délimitation en pointillés indique les points de la grille apparaissant dans la matrice du démineur représentée en 3.5 ;
- ⋆ les $t^k, k \in \mathbb{Z}$ aux coins des cases sont les entrées de la matrice du démineur, et donc $-k$ est toujours l'indice du point de la grille.
- ⋆ Les t^k plus clairs sont ceux correspondant aux points apparaissant dans le calcul du facteur de normalisation (voir la Section 3.3).

On donne des exemples détaillés de calculs de matrices de démineur dans la Section 4.

Proposition 3.5 (Une formule simplifiée pour le déterminant de la matrice du démineur)**.** *Pour toute grille $\mathbb{G}$ de nombre n,*

$$\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = (-1)^{n+1}(t-1)^{n-1}\det(\mathbf{M}'(\mathbb{G}))$$

où $\mathbf{M}'(\mathbb{G})$ est maintenant la matrice carrée de taille $n-1$ de terme général $(\frac{t^{{}^tD(\mathbb{G})^{(i,j)}}-1}{t-1})_{i,j}$ indexé par seulement les points « internes » de la grille (c'est-à-dire en enlevant les quatre bords de la grille).

Démonstration. On retranche la première colonne à toutes les autres et on développe selon la dernière ligne. □

Exemple 3.6. Dans le cas du nœud de trèfle gauche de la grille 3.4, on obtient

$$\mathbf{M}'(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t^{-1} & -t^{-1} \\ 0 & -t^{-1} & -t^{-2}(t+1) & -t^{-1} \\ -t^{-1} & -t^{-2}(t+1) & -t^{-2}(t+1) & -t^{-1} \\ -t^{-1} & -t^{-1} & -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Facteur de normalisation associé à une grille

Définition 3.7. *Soit $\mathbb{G}$ une grille. Chaque symbole $\mathbb{O}$ ou $\mathbb{X}$ est dans une case ayant quatre coins qui ont chacun un indice. Pour chaque symbole, on somme ces quatre indices et l'on somme le résultat pour tous les symboles de $\mathbb{G}$, ce qui donne un entier Σ. On pose $a(\mathbb{G}) = \frac{\Sigma}{8}$ et on l'appelle* facteur de normalisation *associé à $\mathbb{G}$.*

Exemple 3.8. On reprendre l'exemple de la Figure 3.4 pour le nœud 3_1^*. Les t^k plus clairs sont ceux correspondant aux points apparaissant dans le calcul de $a(\mathbb{G})$. Attention, il ne suffit pas a priori de sommer les opposés de leurs exposants, car certains peuvent être comptés plusieurs fois (selon le nombre de cases contenant un symbole dont ils sont un coin) !

On compte les contributions pour chaque symbole, pris par exemple de gauche à droite et de haut en bas :

$$\begin{aligned} 8a(\mathbb{G}) = {} & 0+0+1+0 \\ & +0+0+0+1 \\ & +0+0+1+0 \\ & +1+1+1+2 \\ & +0+0+1+0 \\ & +1+2+2+2 \\ & +1+2+1+1 \\ & +1+0+0+0 \\ & +0+1+0+0 \\ & +1+0+0+0 \\ 8a(\mathbb{G}) = {} & 24 \end{aligned}$$

d'où $a(\mathbb{G}) = 3$.

On donnera d'autres exemples de calculs de facteurs de normalisation dans la section 4.

3.4 Facteur de signe associé à une grille

Définition 3.9. *Soit $\mathbb{G}$ une grille de nombre n. On appelle* facteur de signe *associé à $\mathbb{G}$ le signe $s(\mathbb{G}) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}})$ où $\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}})$ désigne la signature de la permutation $\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}})$.*

Remarque 3.10. Selon [**OSS15,** p. 53], $s(\mathbb{G})$ (noté $\epsilon(\mathbb{G})$ dans [**OSS15**]) est la signature de la permutation f telle que $\sigma_{\mathbb{O}} f^{-1} = \sigma_n := (n, n-1, ..., 1)$, d'où $\varepsilon(f) = \varepsilon(\sigma_n)\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}})$. Or deux interprétations se chevauchent pour σ_n :

(i) soit c'est le cycle $(n, n-1, ..., 1)$ de longueur n,

(ii) soit c'est la permutation définie par $\sigma_n(1) = n, \sigma_n(2) = n-1, ..., \sigma_n(n) = 1$ (notation suggérée plus haut par le livre dans la Figure 3.1 page 44).

Selon que l'on choisisse (i) ou (ii), on a $\varepsilon(\sigma_n) = (-1)^{n+1}$ ou $\varepsilon(\sigma_n) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ respectivement.

L'exemple du calcul du polynôme d'Alexander (voir la Section 3.5) du nœud trivial pour un diagramme en grille de nombre $n = 3$ (voir la Section 4.2) détermine que c'est la seconde interprétation qu'il faut suivre. En effet, dans ce cas, $(-1)^{n+1} = 1$ mais $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = -1$. **C'est celle que nous utilisons dans la preuve du 3.12 (elle intervient de façon cruciale dans le Lemme 5.4).**

Exemple 3.11. On reprendr l'exemple de la Figure 3.4 pour le nœud 3_1^*. Alors $\sigma_{\mathbb{O}} = id_{[\![0,5]\!]}$, d'où $\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$. D'autre part, le nombre de grille est $n = 5$, d'où $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1$ donc $s(\mathbb{G}) = +1$.

On donnera d'autres exemples détaillés de calculs de facteurs de signe dans la section 4.

3.5 Formule du polynôme d'Alexander à partir des grilles

Théorème 3.12. *Soit $\mathbb{G}$ une grille de nombre n représentant un entrelacs L. Alors le polynôme d'Alexander symétrisé de L est égal à :*

$$\begin{aligned}\Delta_L(t) &= s(\mathbb{G})\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})(t))t^{a(\mathbb{G})}(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}\\ &= (-1)^k s(\mathbb{G})t^{a(\mathbb{G})}t^{-\frac{k}{2}}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})(t))(t-1)^k\\ \Delta_L(t) &= s(\mathbb{G})t^{a(\mathbb{G})}t^{-\frac{k}{2}}\det(\mathbf{M}'(\mathbb{G})(t))\end{aligned}$$

en posant $k = 1 - n$.

La preuve du Théorème 3.12 sera faite en détail dans la section 5.

Le site de Daniele Celoria ([**Cel**]) permet de représenter les diagrammes en grille et calcule le polynôme d'Alexander associé. Attention, les permutations $\sigma_{\mathbb{O}}$ et $\sigma_{\mathbb{X}}$ y sont définies sur $[\![0, n-1]\!]$ et la permutation $\sigma_{\mathbb{O}}$ est à lire de droite à gauche après rotation du carré de 90° dans le sens direct.

4 Exemples de calcul

Remarque 4.1. **(a)** Dans la matrice du démineur d'une grille de nombre n, il apparaît un nombre fini de puissances de t, *i.e.* $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ est à valeurs dans $\left\{t^k, k \in [\![-\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil]\!]\right\}$. Par conséquent lors du calcul du déterminant de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ les lignes ou colonnes ont beaucoup de coefficients en commun ce que l'on va pouvoir exploiter avec la multilinéarité.

(b) On a les factorisations utiles :

- $\star$ $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$,
- $\star$ $t^{-1} - 1 = (t-1)(-t^{-1})$,
- $\star$ $t^{-2} - 1 = (t-1) \times (-(t^{-2} + t^{-1})) = (t-1) \times (-t^{-2}(t+1))$.

(c) Si les croisements de la grille ont en majorité des indices négatifs, il est judicieux de faire le changement de variable $u = t^{-1}$ pour le calcul.

4.1 Nœud trivial 2×2

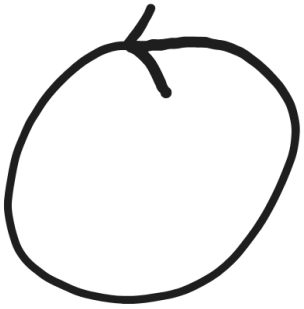


FIGURE 4.1 – Nœud trivial, orientation directe dans le plan de la page

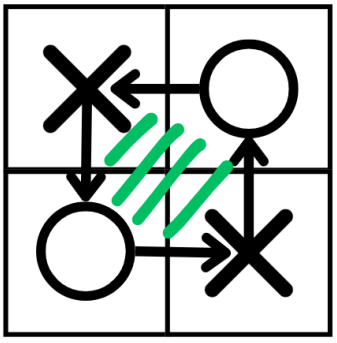


FIGURE 4.2 – Un diagramme en grille de nombre 2 pour le nœud trivial

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 2$
	$k = -1$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = id$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = -1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = t^{-1}(t-1)$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = 4$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = \frac{1}{2}$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = 1$

4.2 Un nœud trivial 3×3

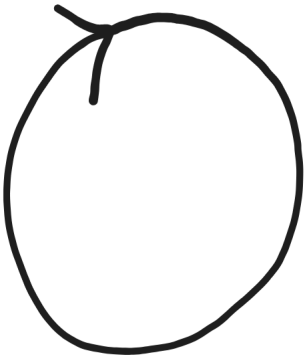


Figure 4.3 – Nœud trivial, orientation indirecte dans le plan de la page

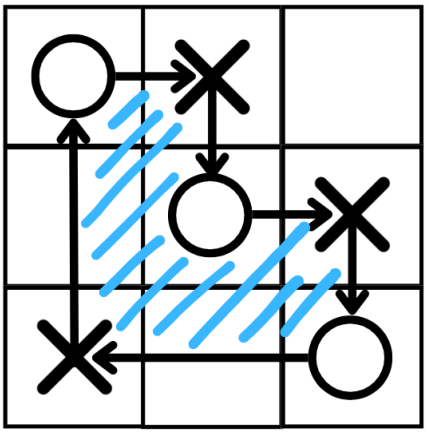


Figure 4.4 – Un diagramme en grille de nombre 3 pour le nœud trivial

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 3$
	$k = -2$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (1,3)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = -1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = 1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = (t-1)^2$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = -8$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = -1$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = 1$

4.3 Entrelacs de Hopf positif

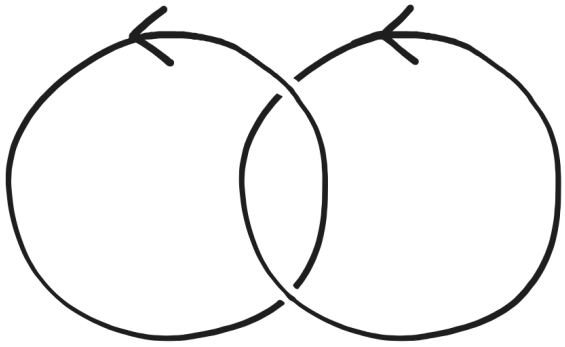


Figure 4.5 – Entrelacs de Hopf positif

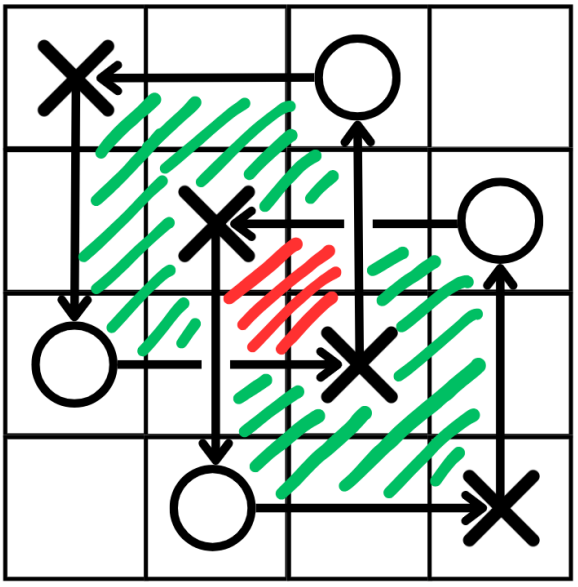


Figure 4.6 – Un diagramme en grille de nombre mininmal pour l'entrelacs de Hopf positif

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 4$
	$k = -3$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (1,2)(3,4)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = 1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} & t^{-1} & 1 \\ 1 & t^{-1} & t^{-2} & t^{-1} \\ 1 & 1 & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = -t^{-4}(t-1)^4$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = 16$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = 2$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$

4.4 Entrelacs de Hopf négatif

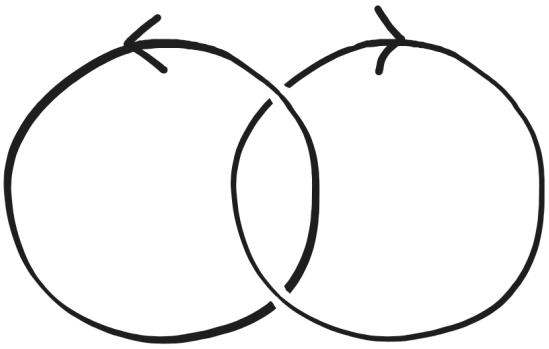


Figure 4.7 – Entrelacs de Hopf négatif

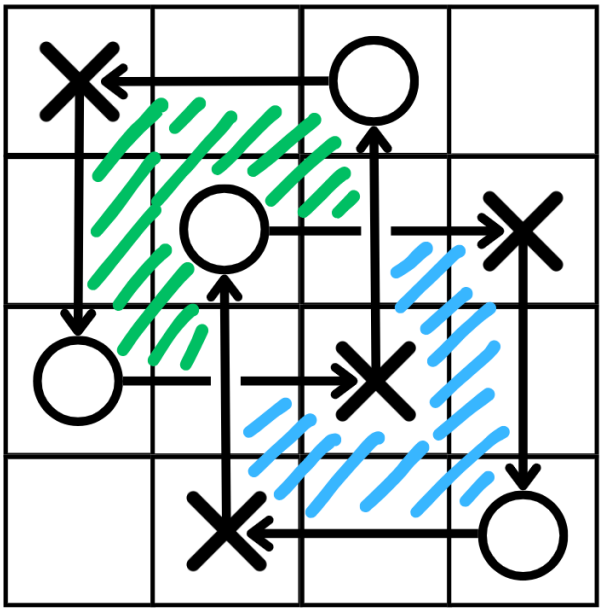


Figure 4.8 – Un diagramme en grille de nombre minimal pour l'entrelacs de Hopf négatif

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 4$
	$k = -3$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (1, 2, 3, 4)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = -1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = 1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} & t^{-1} & 1 \\ 1 & t^{-1} & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = -t^{-2}(t-1)^4$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = 0$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = 0$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$

4.5 Nœud de trèfle droit

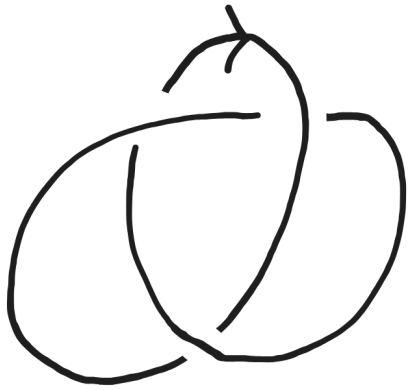


Figure 4.9 – Nœud de trèfle droit

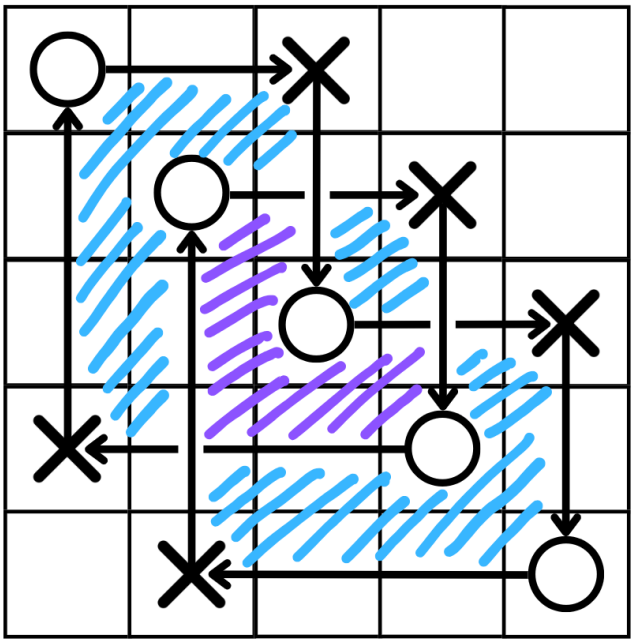


Figure 4.10 – Un diagramme en grille de nombre minimal pour le trèfle droit

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 5$
	$k = -4$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (1,5)(2,4)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = 1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t & t & 1 & 1 \\ 1 & t & t^2 & t & 1 \\ 1 & t & t^2 & t^2 & t \\ 1 & 1 & t & t & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = (t-1)^4(t^2-t+1)$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = -24$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = -3$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t - 1 + t^{-1}$

4.6 Nœud de trèfle gauche

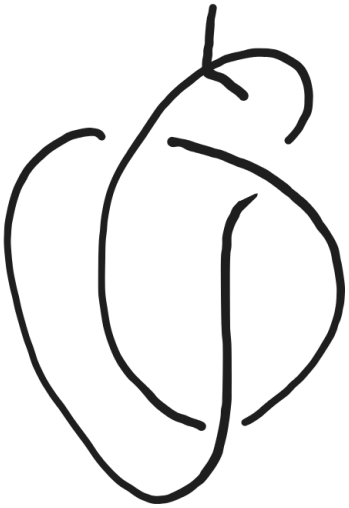


Figure 4.11 – Nœud de trèfle gauche

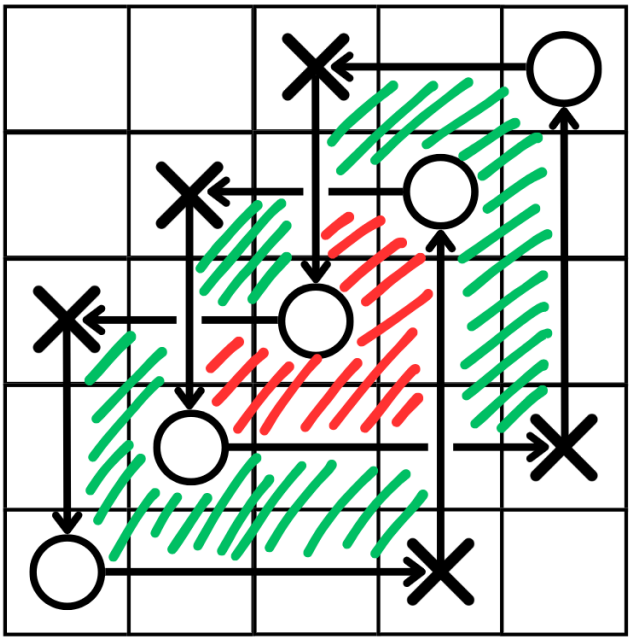


Figure 4.12 – Un diagramme en grille de nombre minimal pour le trèfle gauche

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 5$
	$k = -4$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = id$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = 1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & t^{-1} & t^{-2} & t^{-1} \\ 1 & t^{-1} & t^{-2} & t^{-2} & t^{-1} \\ 1 & t^{-1} & t^{-1} & t^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = t^{-4}(t-1)^4(t^{-2} - t^{-1} + 1)$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = 24$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = 3$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t - 1 + t^{-1}$

4.7 Nœud de huit

Le nœud de huit 4_1 est inversible ($-4_1 \simeq 4_1$) et amphichéral ($4_1^* \simeq 4_1$). Il n'y a donc vraiment « qu'un » nœud de huit.

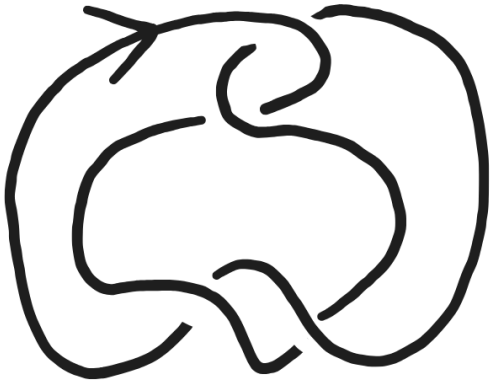


Figure 4.13 – Nœud de huit W_2

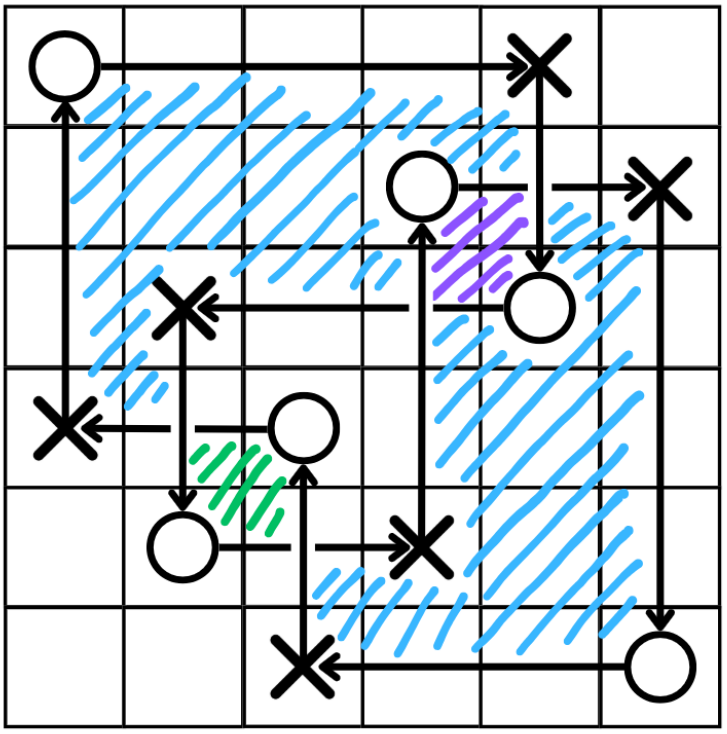


Figure 4.14 – Un diagramme en grille pour le nœud de huit

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 6$
	$k = -5$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (1,6)(4,5)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = 1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = -1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & t & t & t & t & 1 \\ 1 & t & t & t & t^2 & t \\ 1 & t & 1 & 1 & t & t \\ 1 & 1 & t^{-1} & 1 & t & t \\ 1 & 1 & 1 & t & t & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = (t-1)^5(t-3+t^{-1})$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = -20$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = -\frac{5}{2}$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t - 3 + t^{-1}$

4.8 Anneaux borroméens

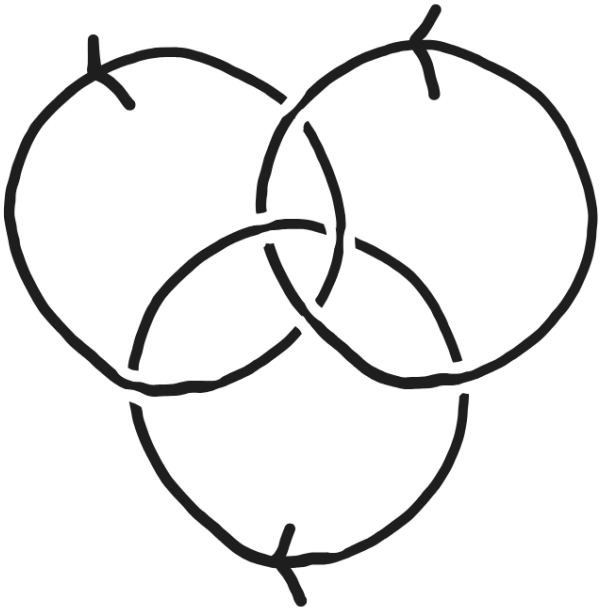


Figure 4.15 – Anneaux borroméens

Nombre de $\mathbb{G}$	$n = 8$
	$k = -7$
	$\sigma_{\mathbb{O}} = (2, 5, 3, 4, 6, 7)$
	$\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}}) = -1$
Facteur de signe	$s(\mathbb{G}) = -1$
Matrice du démineur	$\mathbf{M}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & u & u & u & u & u \\ 1 & u & u & u^2 & u^2 & u^2 & u & u \\ 1 & u & u & u^2 & u & u & 1 & u \\ 1 & u & 1 & u & 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & u & 1 & 1 & u^{-1} & u^{-1} & u^{-1} & 1 \\ 1 & u & u & u & 1 & u^{-1} & u^{-1} & 1 \\ 1 & u & u & u & u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $u = t^{-1}$ $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = t^{-9}(t-1)^{11}$
	$\Sigma = 8a(\mathbb{G}) = 28$
Facteur de normalisation	$a(\mathbb{G}) = \frac{7}{2}$
Polynôme d'Alexander	$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = t^{-2}(t-1)^4 = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^4$

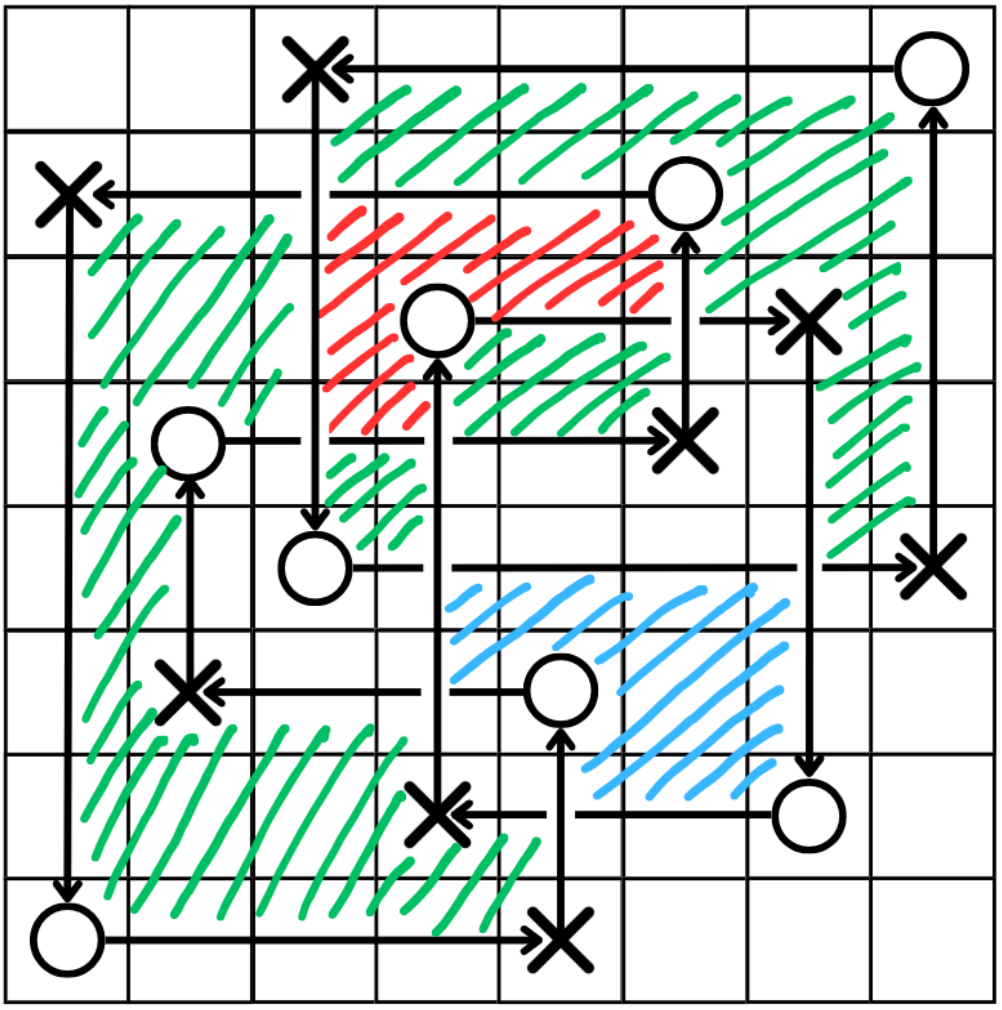


Figure 4.16 – Un diagramme en grille pour des anneaux borroméens

5 Preuve de la formule du polynôme d'Alexander par les diagrammes en grille

Dans cette section, on montre le Théorème 3.12 en suivant les arguments de [**OSS15,** pp. 53-56]. On pose, pour une grille $\mathbb{G}$:

$$\Delta_{\mathbb{G}}(t) = s(\mathbb{G})\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})(t))t^{a(\mathbb{G})}(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n} = (-1)^k s(\mathbb{G})t^{a(\mathbb{G})}t^{-\frac{k}{2}}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})(t))(t-1)^k.$$

5.1 Quelques lemmes utiles

Lemme 5.1. *Soit σ une permutation. Alors $\varepsilon(\sigma) = \det(P_\sigma)$. Par conséquent, si $\mathbb{G}$ est une grille, $s(\mathbb{G}) = \det(\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G})})$.*

Démonstration. Le morphisme $\sigma \mapsto P_\sigma$ identifie $\mathfrak{S}_n$ au groupe G des matrices de permutation de taille n. De plus, l'application $\sigma \mapsto \det(P_\sigma)$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas identiquement égal à 1, c'est donc le morphisme signature. Le deuxième point s'ensuit, car $s(\mathbb{G}) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\varepsilon(\sigma_{\mathbb{O}})$ et $\Pi_\sigma = P_{\sigma_n}P_\sigma$, et l'on a bien $\varepsilon(\sigma_n) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. □

Remarque 5.2 (Multiplicativité). Lorsqu'on calcule un rapport de quantités de la forme t^i où i est l'indice d'un point d'une grille, on peut considérer que l'indice est nul dans les points au bord de la portion de grille représentée.

Illustrons ce fait sur l'exemple de la Figure 5.1. On considère dans les deux cas que le segment vertical le plus à gauche représente l'extremité gauche de la grille. Sur la figure de gauche, l'indice de la zone grise est $j = 1$ et celui de la zone noire est $j - 1 = 0$. Imaginons maintenant qu'un brin passe sur la colonne à l'extremité gauche du diagramme, ce qui donne la figure de droite. Cette perturbation change l'indice des deux zones considérées précédemment. L'indice de la zone gris clair devient $j' = 0$ et celui de la zone gris anthracite $j' - 1 = -1$. Dans les deux cas : $t^j/t^{j-1} = t$ et $t^{j'}/t^{j'-1} = t$, donc le rapport des indéterminées prises avec l'indice en exponsant reste le même.

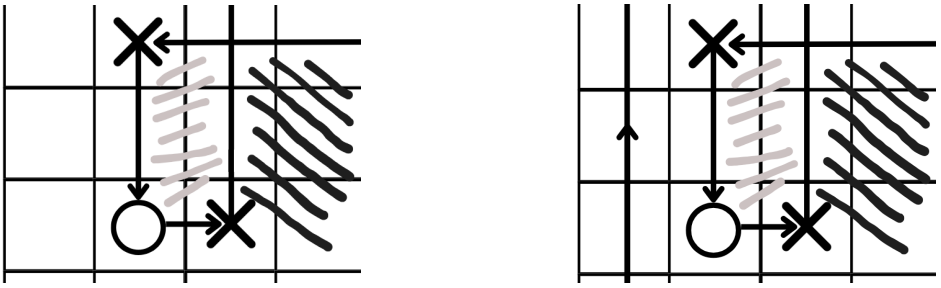


FIGURE 5.1 – Illustration du lemme multiplicatif

Lemme 5.3 (Invariances des termes de Δ_G par transformations)**.** ***(a)*** *Par symétrie le long de la diagonale secondaire, la quantité $a(\mathbb{G})$ est changée est $-a(\mathbb{G})$, la quantité $\mathbf{M}(\mathbb{G})(t)$ est changée en ${}^t\mathbf{M}(\mathbb{G})(t^{-1})$ et la quantité $s(\mathbb{G})$ est invariante.*

(b) *Par échange des ronds et des croix, la quantité $a(\mathbb{G})$ est changée en $-a(\mathbb{G})$ et la quantité $\mathbf{M}(\mathbb{G})(t)$ est changée en $\mathbf{M}(\mathbb{G})(t^{-1})$.*

Démonstration. Notons $-\mathbb{G}$ la grille symétrisée par rapport à la diagonale secondaire. Les points de $\mathbb{G}$ y sont envoyés bijectivement sur des points d'indices opposés. On a $s(-\mathbb{G}) = s(\mathbb{G})$ d'après la Remarque 5.1, puisque $\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(-\mathbb{G})} = {}^t\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G})}$ et le déterminant est invariant par transposition. L'indice de chaque zone est donc changé en son opposé par la transformation $\mathbb{G} \to -\mathbb{G}$, d'où $a(-\mathbb{G}) = -a(\mathbb{G})$ et de plus $\det(\mathbf{M}(-\mathbb{G})(t)) = \det(\mathbf{M}(\mathbb{G})(t^{-1}))$.

D'autre part, échanger les ronds et les croix ne change pas le lacet sous-jacent mais seulement le sens de parcours de chaque segment, c'est-à-dire le sens de parcours du lacet. Ainsi tous les indices sont changés en leurs opposés. □

5.2 La quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ est un invariant d'entrelacs

Lemme 5.4. *La fonction $\Delta_{\mathbb{G}}$ est invariante par stabilisations (et donc par déstabilisations, qui ne sont autres que les inverses des stabilisations).*

Démonstration. Traitons le cas des stabilisations à partir d'une croix. En utilisant librement la Remarque 5.2, on peut colorier les zones du diagramme en grille entourant le kink selon leurs indices relatifs, voir la Figure 5.2. Sur la figure, les cases plus longues représentent un nombre quelconque de cases (entre lesquelles peuvent passer des brins, ce que notre coloriage ne laisse pas forcément entendre, mais ceci n'importe pas puisqu'on s'intéresse toujours à la différence de deux lignes). Sur une colonne fixée, si la zone rose/foncée est d'indice j, la zone jaune/claire est d'indice $j+1$ et la zone bleue/hachurée en sens inverse est d'indice $j+2$. Notons que tous les brins sortants ne sont pas représentés, car ils n'interviennent pas dans notre preuve et leur direction n'influe pas, comme nous l'allons voir.

Voyons les modifications dans la quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ dans chacun des quatre cas. On note systématiquement $\mathbb{G}$ la grille de la Figure 5.2a et $\mathbb{G}'$ la grille après stabilisation. Dans les quatre cas, le nombre de grille n de $\mathbb{G}$ devient $n+1$ pour $\mathbb{G}'$, donc k devient $k-1$, et l'on a $(-1)^{k-1}t^{-\frac{k-1}{2}}(t-1)^{k-1} = -(t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{-1}) \times (-1)^k(t^{-\frac{k}{2}}(t-1)^k)$. Pour calculer $a(\mathbb{G}')$, il suffit de faire le calcul pour les zones représentées, le reste de la somme étant le même dans les quatre cas et s'additionnant simplement pour obtenir $8a(\mathbb{G})$. Mieux, il suffit de faire le calcul des contributions des trois symboles du kink, ce qui donne qui donne $8a_{loc}(\mathbb{G})$. Sur la Figure 5.2a, $8a_{loc}(\mathbb{G}) = j + 3(j+1) = 4j+3$. La matrice $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} & & & & & \\ * & & \vdots & \vdots & & * \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ * & & \vdots & \vdots & & * \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Les numéros des lignes intervenant dans la preuve sont indiquées sur les Figures 5.2, à consulter en regard du texte (on rappelle que, dans la matrice $\mathbb{M}(\mathbb{G})$, la première ligne de la grille n'est pas prise en compte) ; ci-dessous, la ligne et la colonne ajoutée par la stabilisation est indiquée en rouge clair dans les matrices $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$.

(i) Stabilisation NO : dans la matrice

$$\mathbf{M}(\mathbb{G}') = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-j} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

on soustrait la $(i+2)$-ième ligne à la $(i+1)$-ième ligne. Alors la $(i+1)$-ième ligne est nulle sauf au coefficient de la p-ième colonne, où elle vaut $t^{-j} - t^{-(j+1)} = t^{-(j+1)}(t-1)$. En développant selon la $(i+1)$-ième ligne, on obtient alors $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}')) = (-1)^{p+(i+1)}(t^{-(j+1)}(t-1))\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$. D'autre part, $8a_{loc}(\mathbb{G}') = 5j+7(j+1) = 12j+7$. Ainsi $a(\mathbb{G}') - a(\mathbb{G}) = a_{loc}(\mathbb{G}') - a_{loc}(\mathbb{G}) = j + \frac{1}{2}$, d'où $t^{a(\mathbb{G}')} = t^{a(\mathbb{G})}t^j t^{\frac{1}{2}}$. Enfin, en développant la matrice Π de $\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}')$ par rapport à sa p-ième colonne, on obtient en utilisant le Lemme 5.1 que $s(\mathbb{G}') = (-1)^{p+(i+2)}s(\mathbb{G})$. Par conséquent,

$$\Delta_{\mathbb{G}'}(t) = (-1)^{p+(i+2)}s(\mathbb{G}).(-1)^{p+i+1}t^{-j}t^{-1}(t-1)\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})).t^{a(\mathbb{G})}t^j t^{\frac{1}{2}}.(-t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{-1})(t^{-\frac{k}{2}}(t-1)^k),$$

qui se simplifie en $\Delta_{\mathbb{G}'}(t) = \Delta_{\mathbb{G}}(t)$.

(ii) Stabilisation NE : dans la matrice

$$\mathbf{M}(\mathbb{G}') = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-j} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

même soustraction et même développement. Le coefficient $(i+1,p)$ vaut $t^{-(j+1)} - t^{-j} = -t^{-(j+1)}(t-1)$. On obtient alors $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}')) = (-1)^{p+(i+1)}(-t^{-(j+1)}(t-1))\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$. D'autre part, $8a_{loc}(\mathbb{G}') = 5j + 7(j+1) = 12j + 7$. Enfin, $s(\mathbb{G}') = (-1)^{(p-1)+(i+2)}s(\mathbb{G})$. De même, on obtient en multipliant $\Delta_{\mathbb{G}'}(t) = \Delta_{\mathbb{G}}(t)$.

(iii) Stabilisation SO : dans la matrice

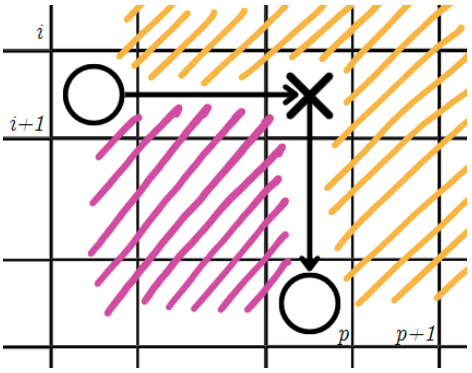
$$\mathbf{M}(\mathbb{G}') = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+2)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

on soustrait cette fois-ci la i-ième ligne à la $(i+1)$-ième ligne. Le coefficient $(i+1,p)$ vaut $t^{-(j+2)} - t^{-(j+1)} = -t^{-(j+2)}(t-1)$. On obtient alors $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}')) = (-1)^{p+(i+1)}(-t^{-(j+2)}(t-1))\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$. D'autre part, $8a_{loc}(\mathbb{G}') = 9(j+1)+3(j+2) = 12j+15$. Enfin, $s(\mathbb{G}') = (-1)^{p+(i+1)}s(\mathbb{G})$. De même, on obtient en multipliant $\Delta_{\mathbb{G}'}(t) = \Delta_{\mathbb{G}}(t)$.

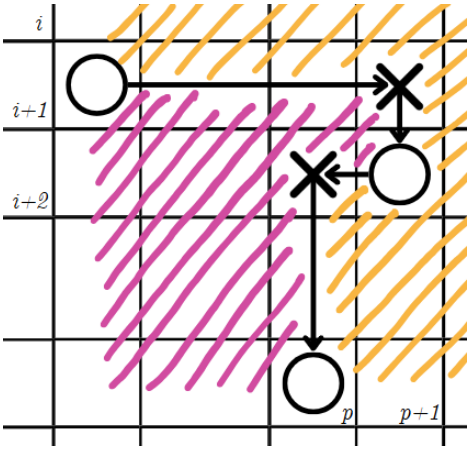
(iv) Stabilisation SE : dans la matrice

$$\mathbf{M}(\mathbb{G}') = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-(j+1)} & t^{-j} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ & \dots & t^{-j} & t^{-j} & t^{-(j+1)} & \dots & \\ * & & \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

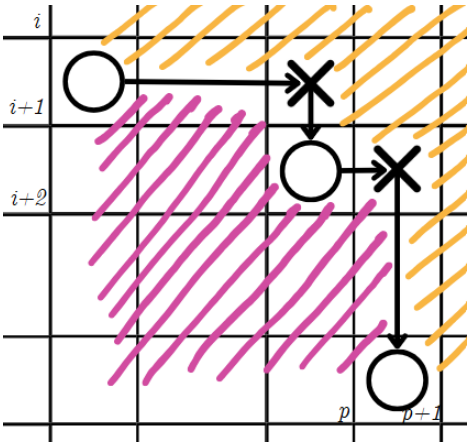
on soustrait encore la i-ième ligne à la $(i+1)$-ième ligne. Le coefficient $(i+1,p)$ vaut $t^{-j} - t^{-(j+1)} = t^{-(j+1)}(t-1)$. On obtient alors $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}')) = (-1)^{p+(i+1)}(t^{-(j+1)}(t-1))\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$. D'autre part, $8a_{loc}(\mathbb{G}') = 5j+7(j+1) = 12j+7$. Enfin, $s(\mathbb{G}') = (-1)^{(p-1)+(i+1)}s(\mathbb{G})$. De même, on obtient en multipliant $\Delta_{\mathbb{G}'}(t) = \Delta_{\mathbb{G}}(t)$.



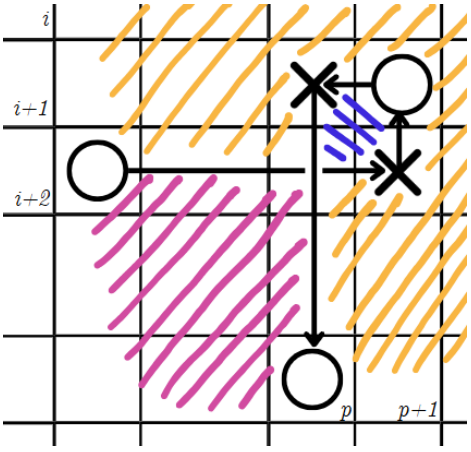
(a) Situation avant la stabilisation



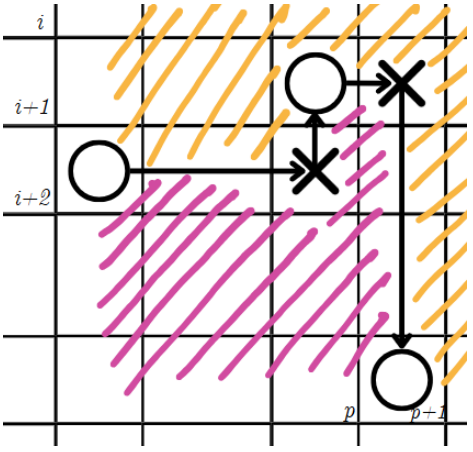
(b) Stabilisation NO



(c) Stabilisation NE



(d) Stabilisation SO



(e) Stabilisation SE

Figure 5.2 – Les quatre stabilisations à partir d'un $\mathbb{X}$

Pour traiter les quatre autres stabilisations/déstabilisations, on échange simplement les ronds et les croix. D'après le Lemme 5.3, ceci a pour conséquence de changer t en t^{-1}, ainsi, par ce qui précède et puisque $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ est multipliée par $(-1)^{1-n}$ sous $t \mapsto t^{-1}$ et bien sûr $(-1)^k$ est invariant, $(-1)^{1-n}\Delta_{\mathbb{G}}(t^{-1})$ et $-(-1)^{1-n}\Delta_{\mathbb{G}'}(t^{-1})$ sont égaux au facteur de signe près (le signe -1 apparaissant à cause du changement de taille de la grille, *i.e.* $n \mapsto n \pm 1$), donc $\Delta_{\mathbb{G}}(t)$ et $-\Delta_{\mathbb{G}'}(t)$ sont égaux au facteur de signe près. Il suffit pour conclure d'examiner ce qui se passe pour $s(\mathbb{G})$. Il s'agit donc maintenant d'étudier $\sigma_{\mathbb{X}}$. Pour obtenir la permutation $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G})$ à partir de $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathbb{G}')$, on développe la matrice nécessairement à partir de la coordonnée d'un $\mathbb{X}$ qui est

nécessairement adjacent au symbole $\mathbb{O}$ par rapport auquel on a développé dans les quatre cas précédents. Ce développement induit donc dans chaque cas un signe -1, qui est compensé par celui provenant de $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$. □

Lemme 5.5. *La fonction $\Delta_{\mathbb{G}}$ est invariante par commutations de premier type.*

Démonstration. Considérons dans un premier temps les commutations de colonnes. On considère les situations génériques suivantes, où quatre cas se présentent selon l'ordre dans lequel apparaissent les ronds et les croix en lisant de bas en haut. Tout d'abord, n'importe quel exemple permet de se convaincre que, dans n'importe quel cas de commutation de premier type :

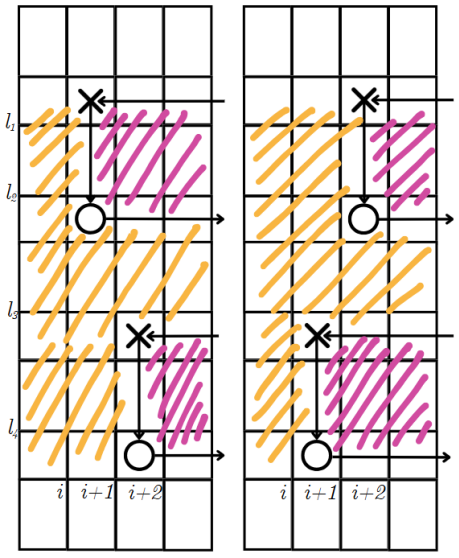
(i) le nombre de grille n est inchangé, donc le terme $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ n'influe pas ;

(ii) la quantité $a(\mathbb{G})$ est inchangée ;

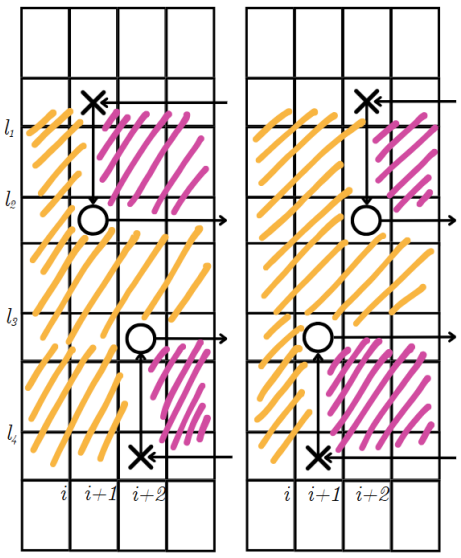
(iii) la quantité $s(\mathbb{G})$ est changée en son opposée. En effet, la matrice $P_{\sigma_{\mathbb{O}}}$ est modifiée seulement par une permutation de deux colonnes, donc son déterminant est changé en son opposé.

Dans les quatre cas, on considère pour l'instant que les brins partent tous vers la droite.

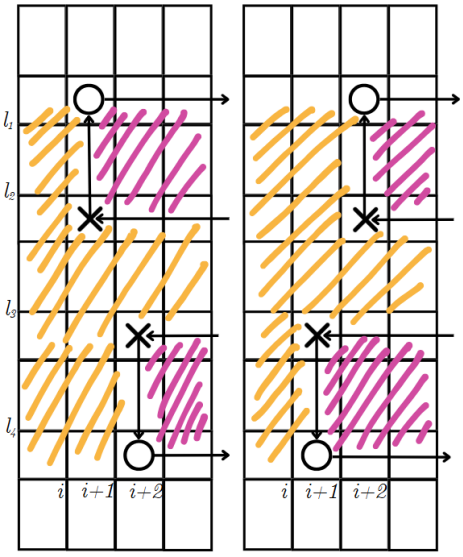
Sur la Figure 5.3, les cases plus longues représentent là encore un nombre quelconque de cases. Remarquons qu'il est possible cette fois qu'un brin horizontal passe dans ces cases (comme dans le cas d'un mouvement de Reidemeister 3), ce qui rendrait notre coloriage impropre. Cependant, **seuls influent dans les calculs les indices relatifs entre deux points de même altitude**. Les couleurs n'ont aucune raison de coïncider d'un cas à l'autre. Pour un des quatre cas fixé, si l'on note j l'indice d'un point zone rose/foncée, alors un point de la zone jaune/claire **la ligne étant fixée par ailleurs** est d'indice $j \pm 1$ (attention, la convention est différente de la preuve de la Proposition 5.4). Pour traduire ce fait, on note j_l l'indice de la zone rose/foncée à la ligne l. On numérote les lignes de bas en haut.



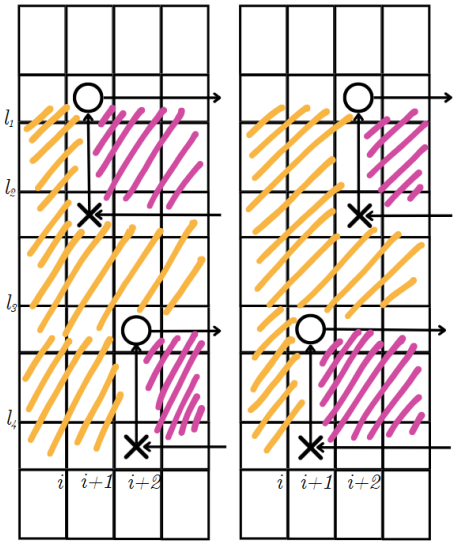
(a) Commutation de premier type XOXO



(b) Commutation de premier type XOOX



(c) Commutation de premier type OXXO



(d) Commutation de premier type OXOX

Figure 5.3 – Les quatre cas de figure pour les commutations de premier type

Remarquons dès à présent que l'on peut écarter deux cas grâce à la symétrie par échange des ronds et des croix : la commutation représentée sur la Figure 5.3a est la commutation représentée sur la Figure 5.3d sous cette symétrie, et de même la commutation de la Figure 5.3b est la commutation de la Figure 5.3c sous cette symétrie. Si les quantités $\Delta_{\mathbb{G}}(t)$ sont invariantes par les premières, alors d'après le Lemme 5.3, puisque $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ est multipliée par $(-1)^{n-1}$ sous $t \mapsto t^{-1}$ et bien $(-1)^k$ est invariant, $(-1)^{n-1}\Delta_{\mathbb{G}}(t^{-1})$ et $(-1)^{n-1}\Delta_{\mathbb{G}'}(t^{-1})$ sont égaux dans les quatre cas au facteur de signe s près, donc $\Delta_{\mathbb{G}}(t)$ et $\Delta_{\mathbb{G}'}(t)$ sont égaux au facteur de signe près, en notant $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ les deux grilles différant d'une commutation. il suffit pour conclure d'examiner ce qui se passe pour $s(\mathbb{G})$. Il s'agit maintenant d'étudier $\sigma_{\mathbb{X}}$. Or dans chacun des quatre cas des Figures 5.3, le changement de signe de s en considérant $\sigma_{\mathbb{X}}$ à la place de $\sigma_{\mathbb{O}}$ est le même, à savoir qu'il est changé en son opposé, car $\Pi_{\sigma_{\mathbb{X}}}$ est modifiée seulement par une permutation de deux colonnes, donc son déterminant est lui aussi changé en son opposé. On traite donc seulement les

cas des commutations XOXO et XOOX.

Remarquons aussi que le sens dans lequel partent les brins n'importe pas non plus, grâce à la Remarque 5.2. En effet, dans la suite de la preuve, nous nous intéressons toujours aux indices relatifs entre deux points de même altitude, et on voit qu'en changeant de direction un des quatre brins d'un des quatre cas des Figures 5.3, les différences d'indices relatifs à ligne fixée ne changent pas. Notons que cet argument n'est valide que parce qu'il est possible de choisir des rayons horizontaux pour calculer l'indice, ce qui est justifié par le Lemme 3.2.

Déterminons donc les modifications dans la quantité $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ dans les deux cas restants. On note $\mathbb{G}$ la grille de gauche, « avant commutation » et $\mathbb{G}'$ la grille de droite, « après commutation ».

(i) Commutation de premier type XOXO : dans $\mathbf{M}(\mathbb{G})$, on soustrait la i-ième colonne à la $(i+1)$-ième colonne et dans $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$, on soutrait la $(i+2)$-ième colonnes à la $(i+1)$-ième colonne. Les déterminants des matrices obtenues valent encore respectivement $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ et $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'))$. De plus, les matrices obtenues ne diffèrent que sur leurs $(i+1)$-colonnes, de la manière suivante : la $(i+1)$-ième colonne de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{j_l} - t^{j_{l_1}-1} \\ \vdots \\ t^{j_l} - t^{j_{l_1}-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et celle de $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{j_{l_1}-1} - t^{j_l} \\ \vdots \\ t^{j_{l_1}-1} - t^{j_l} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les seuls termes non nuls sont donc situés entre les lignes l_1 et l_2 (entre les lignes l_2+1 et l_3, puis entre les lignes l_3+1 et l_4, les différences s'annulent). Ainsi, ces deux colonnes sont opposées l'une de l'autre.

(ii) Commutation de premier type XOOX : même opération. Alors les matrices obtenues ne diffèrent que sur leurs $(i+1)$-colonnes, de la manière suivante : la $(i+1)$-ième colonne de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{-j_{l_1}} - t^{-(j_{l_1}-1)} \\ \vdots \\ t^{-j_{l_1}} - t^{-(j_{l_1}-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et celle de $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{-(j_{l_1}-1)} - t^{-j_l} \\ \vdots \\ t^{-(j_{l_1}-1)} - t^{-j_l} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où le même constat que précédemment : les deux colonnes sont opposées l'une de l'autre. Ainsi, dans les deux cas, $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ est changé en son opposé. Puisque le seul terme de $\Delta_{\mathbb{G}}$ qui change également est $s(\mathbb{G})$, qui est aussi changé en son opposé, globalement $\Delta_{\mathbb{G}}(t) = \Delta_{\mathbb{G}'}(t)$.

Enfin, pour traiter le cas des commutations de lignes, on invoque une symétrie par rapport à une diagonale secondaire. En effet, considérons deux diagrammes en grille $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ différant seulement d'une commutation de premier type entre deux lignes. Alors les grilles $\mathbb{G}_T$ et $\mathbb{G}'_T$ symétrisées par rapport à la diagonale $\diagdown$ diffèrent seulement d'une commutation de premier type entre deux colonnes. D'après ce qui précède, $\Delta_{\mathbb{G}_T}(t) = \Delta_{\mathbb{G}'_T}(t)$ puis par le Lemme 5.3 et puisque de plus la quantité $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ est multipliée par $(-1)^{1-n}$ sous $t \mapsto t^{-1}$, on a $(-1)^{1-n}\Delta_{\mathbb{G}}(t^{-1}) = (-1)^{1-n}\Delta_{\mathbb{G}'}(t^{-1})$, d'où $\Delta_{\mathbb{G}}(t) = \Delta_{\mathbb{G}'}(t)$. □

Lemme 5.6. *La fonction $\Delta_{\mathbb{G}}$ est invariante par commutations de second type.*

Démonstration. Considérons là encore dans un premier temps les commutations de colonnes. On considère les situations génériques suivantes, où quatre cas se présentent selon l'ordre dans lequel apparaissent les ronds et les croix. Tout d'abord, n'importe quel exemple permet de se convaincre que, dans n'importe quel cas de commutation de second type :

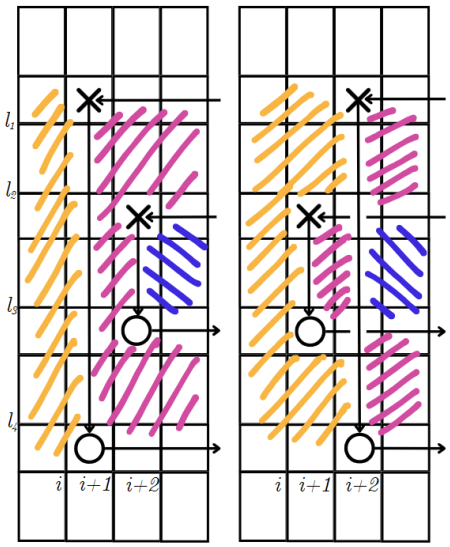
(i) le nombre de grille n est inchangé, donc le terme $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ n'influe pas ;

(ii) la quantité $s(\mathbb{G})$ est changée en son opposée, pour les mêmes raisons que pour les commutations de premier type ;

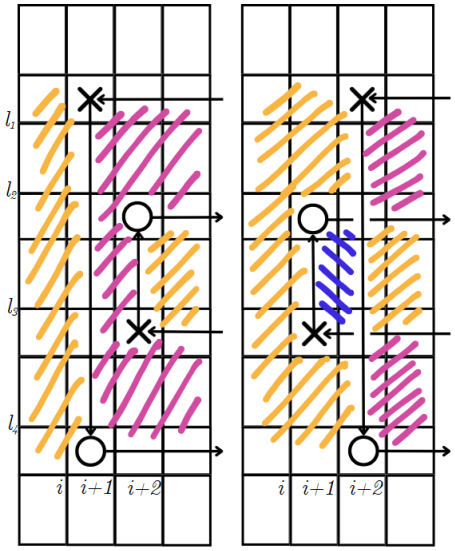
(iii) la quantité $a(\mathbb{G})$, quant à elle, n'est a priori pas conservée.

Dans les quatre cas représentés, on considère que les brins partent tous vers la droite.

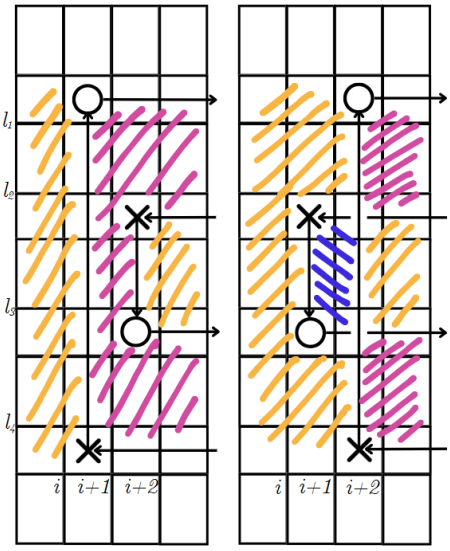
Sur la Figure 5.4, de même que sur la Figure 5.3, les cases plus longues représentent toujours un nombre quelconque de cases et il est possible qu'un brin horizontal passe dans ces cases, mais là encore, seuls influent dans les calculs les indices relatifs entre deux points de même altitude et d'autre part les couleurs n'ont aucune raison de coïncider d'un cas à l'autre. Pour un des quatre cas fixé, si l'on note j l'indice d'un point zone rose/foncée, alors un point de la zone jaune/claire (la ligne étant fixée par ailleurs) est d'indice $j \pm 1$ et un point de la zone bleue/hachurée en sens inverse est d'indice $j \mp 1$ ou $j \pm 2$ selon les cas (voir les Figures 5.4a et 5.4b). Pour traduire ce fait, on note j_l l'indice de la zone rose/foncée à la ligne l. On numérote les lignes de bas en haut.



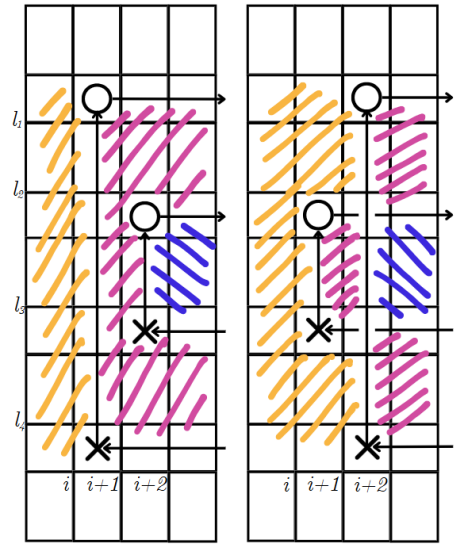
(a) Commutation de second type XOXO. Si, à ligne fixée, l'indice de la zone rose/foncée est m, celui de la zone jaune/claire est $m-1$ et celui de la zone bleue/hachurée en sens inverse est $m+1$.



(b) Commutation de second type XOOX. Si, à ligne fixée, l'indice de la zone rose/foncée est m, celui de la zone jaune/claire est $m-1$ et celui de la zone bleue/hachurée en sens inverse est $m-2$.



(c) Commutation de second type OXXO



(d) Commutation de second type OXOX

Figure 5.4 – Les quatre cas de figure pour les commutations de second type

Comme dans le Lemme 5.5, on peut écarter tout de suite deux cas par symétrie par échange des ronds et des croix ; on traite donc seulement les cas des commutations XOXO et XOOX. Aussi, le sens dans lequel partent les brins n'importe pas non plus dans le cas des commutations de second type également, pour la même raison qu'avec les commutations de premier type.

Déterminons d'abord les modifications dans la quantité $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ dans les deux cas restants. On note $\mathbb{G}$ la grille de gauche, « avant commutation » et $\mathbb{G}'$ la grille de droite, « après commutation ».

(i) Commutation XOXO : dans $\mathbf{M}(\mathbb{G})$, on soustrait la $(i+2)$-ième colonne à la $(i+1)$-ième colonne et dans $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$, on soutrait la i-ième colonnes à la $(i+1)$-ième colonne. Les

déterminants des matrices obtenues valent encore respectivement $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ et $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'))$. De plus, les matrices obtenues ne diffèrent que sur leurs $(i+1)$-colonnes, de la manière suivante : la $(i+1)$-ième colonne de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}+1)} \\ \vdots \\ t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et celle de $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ \vdots \\ t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où les seuls termes non nuls sont donc situés entre les lignes l_2+1 et l_3 (entre les lignes l_1 et l_2, puis entre les lignes l_3+1 et l_4, les différences s'annulent). Ainsi, ces deux colonnes sont proportionnelles, précisément : $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = -t^{-1}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'))$.

(ii) Commutation XOOX : même opération. Alors les matrices obtenues ne diffèrent que sur leurs $(i+1)$-colonnes, de la manière suivante : la $(i+1)$-ième colonne de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ \vdots \\ t^{-j_{l_3}} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

et celle de $\mathbf{M}(\mathbb{G}')$ vaut

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0t^{-(j_{l_3}-2)} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ \vdots \\ t^{-(j_{l_3}-2)} - t^{-(j_{l_3}-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où le même constat que précédemment : ces deux colonnes sont proportionnelles, précisément : $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G})) = -t^{-1}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'))$.

Déterminons maintenant les modifications dans la quantité $a(\mathbb{G})$.

(i) Commutation XOXO : d'après la Remarque 5.2, il suffit de calculer $8a(\mathbb{G})$ (voir le Lemme 5.4 pour la notation) pour les symboles visibles, car on étudie une différence de facteurs de normalisation et les grilles présentées ne diffèrent pas en dehors des colonnes représentées. On se limite de plus aux lignes entre l_1 et l_4. Or $8a_{loc}(\mathbb{G}) = [(m-1)+m] + [3m+(m+1)] + [3m+(m+1)] + [(m-1)+m] = 12m$ et $8a_{loc}(\mathbb{G}') = [(m-1)+m] + [3(m-1)+m] + [3(m-1)+m] + [(m-1)+m] = 12m-8$ d'où $8(a_{loc}(\mathbb{G}') - a_{loc}(\mathbb{G})) = -8$ d'où $a(\mathbb{G}) = a(\mathbb{G}') + 1$ d'où $t^{a(\mathbb{G})} = t.t^{a(\mathbb{G}')}$.

(ii) Commutation XOOX : de même, on a ici $8a_{loc}(\mathbb{G}) = [(m-1)+m] + [3m+(m-1)] + [3m+(m-1)] + [(m-1)+m] = 12m-4$ et $8a_{loc}(\mathbb{G}') = [(m-1)+m] + [3(m-1)+(m-2)] + [3(m-1)+(m-2)] + [(m-1)+m] = 12m-12$ d'où $8(a_{loc}(\mathbb{G}') - a_{loc}(\mathbb{G})) = -8$ d'où $a(\mathbb{G}) = a(\mathbb{G}') + 1$ d'où $t^{a(\mathbb{G})} = t.t^{a(\mathbb{G}')}$.

Dans les deux cas, le terme t^{-1} introduit par $a(\mathbb{G}')$ compense le terme t introduit par $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'))$ donc le produit de ces deux quantités est donc opposé pour $\mathbb{G}$ et pour $\mathbb{G}'$. Puisque le seul terme de $\Delta_{\mathbb{G}}$ qui change également est $s(\mathbb{G})$, qui est aussi changé en son opposé, globalement $\Delta_{\mathbb{G}}(t) = \Delta_{\mathbb{G}'}(t)$.

Enfin, pour traiter le cas des commutations de lignes, on invoque le même argument final au mot près que pour le Lemme 5.5. □

Corollaire 5.7. *Si deux grilles $\mathbb{G}, \mathbb{G}'$ représentent des entrelacs équivalents, alors $\Delta_{\mathbb{G}} = \Delta_{\mathbb{G}'}$. Ainsi, $\Delta_{\mathbb{G}}$ fournit un invariant d'entrelacs, de la manière suivante : si π est une fonction qui à un entrelacs L associe une grille $\mathbb{G}$ telle que $L(\mathbb{G}) = L$, alors la fonction $L \mapsto \Delta_{\pi(L)}$ est un invariant d'entrelacs.*

Démonstration. On rappelle que la Remarque 2.10 permet d'exclure le cas des échanges. Les Lemmes 5.5, 5.6 et 5.4 suffisent donc pour conclure. □

5.3 La quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ vérifie la relation d'écheveau

Lemme 5.8. *L'invariant $\Delta_{\mathbb{G}}$ vérifie la relation d'écheveau de la Proposition 1.26.*

Démonstration. On veut montrer que si L^+, L^-, L_0 sont trois entrelacs ne différant que selon le schéma de la Figure 1.6, alors il existe trois grilles $\mathbb{G}_+, \mathbb{G}_-, \mathbb{G}_0$ qui les représentent respectivement et telles que

$$\Delta_{\mathbb{G}_+}(t) - \Delta_{\mathbb{G}_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta_{\mathbb{G}_0}(t).$$

Pour ce faire, on introduit une quatrième grille $\mathbb{G}_0'$ qui représente également L_0, ce qui ne pose pas de problème puisque la quantité $\Delta_{\mathbb{G}}$ est un invariant. On remarque qu'il est possible de choisir $\mathbb{G}_+$,$\mathbb{G}_-$,$\mathbb{G}_0$,$\mathbb{G}_0'$ de sorte que de plus :

(i) $\mathbb{G}_+$ et $\mathbb{G}_-$ diffèrent par une commutation croisée,

(ii) $\mathbb{G}_0$ et $\mathbb{G}_0'$ diffèrent d'une commutation,

(iii) $\mathbb{G}_+$ et $\mathbb{G}_0$ diffèrent seulement par le placement de leurs symboles $\mathbb{X}$ (nécessairement, leurs ordonnées sont échangées),

(iv) et donc $\mathbb{G}_+$ et $\mathbb{G}_0'$ diffèrent seulement par le placement de leurs symboles $\mathbb{O}$ (nécessairement, leurs ordonnées sont échangées).

Ces grilles sont données sur la Figure 5.5. Enfin, on peut voir que quitte à réaliser des isotopies planes sur les diagrammes d'entrelacs de L^+, L^- et L_0, on peut prendre des grilles (les grilles algorithmiques pour ces diagrammes décrites en Section 2.1) pour lesquelles ces colonnes sont les deux colonnes à l'extrémité gauche du diagramme et de plus les croix sont en haut et les ronds sont en bas ; et même, exactement dans la disposition donnée en travaillant un peu plus. Ceci a l'interêt de fixer les directions des brins sortant pour notre preuve ci-dessous.

On observe alors que :

(i) $s(\mathbb{G}_+) = -s(\mathbb{G}_-) = s(\mathbb{G}_0) = -s(\mathbb{G}_0')$;

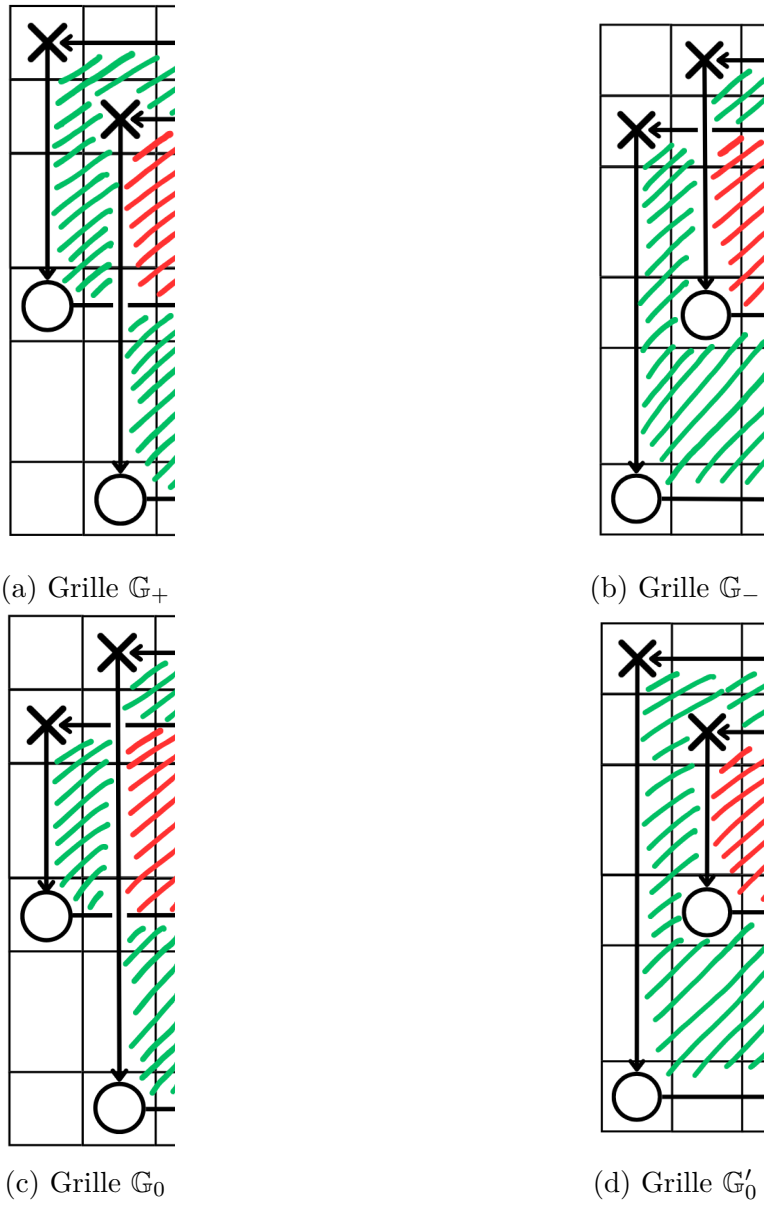
(ii) $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_+)) - \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0) = \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0')) - \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_-))$;

(iii) $8a(\mathbb{G}_+) = 8a(\mathbb{G}_0') - 4 = 8a(\mathbb{G}_0) + 4 = 8a(\mathbb{G}_-)$,
d'où $a(\mathbb{G}_+) = a(\mathbb{G}_0') - \frac{1}{2} = a(\mathbb{G}_0) + \frac{1}{2} = a(\mathbb{G}_-)$.

En effet, successivement :

(i) on a $\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_0) = \sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_+)$ mais $\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_-) = \sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_0') = (1{,}2)\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_+)$ (et le nombre de grille en aucun cas) ;

(ii) l'indice des zones n'apparaissant pas est le même dans les quatre grilles. On remarque que les matrices de démineur ne diffèrent pour les quatre grilles qu'en leurs deuxièmes colonnes, c'est-à-dire celles données par les points entre les deux premières colonnes de la grille. On peut donc utiliser la linéarité du déterminant par rapport à sa deuxième colonne, et après ce calcul $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_+)) - \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0))$ vaut $\begin{vmatrix} & t^{-1}-1 & & & \\ & 0 & & & \\ C_1 & \vdots & C_2 & \dots & C_n \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \end{vmatrix}$, et de même pour $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0') - \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_-)$, d'où l'identité.



(a) Grille $\mathbb{G}_+$

(b) Grille $\mathbb{G}_-$

(c) Grille $\mathbb{G}_0$

(d) Grille $\mathbb{G}'_0$

Figure 5.5 – Représentation en grille d'un triplet d'écheveau. En dehors des colonnes représentées, ces grilles sont égales. Les cases plus longues représentent un nombre quelconque de cases (entre lesquelles aucun autre brin ne passe que ceux représentés).

(iii) Il suffit de faire le calcul pour les colonnes représentées, le reste de la somme étant le même dans les quatre cas et s'additionnant simplement pour obtenir $8a(\mathbb{G})$. Or la somme partielle de $8a(\mathbb{G})$ vaut $1+1+1+(1+1+1+2) = 8$ pour $\mathbb{G}_+$, $1+1+1+(1+1+1+2) = 8$ pour $\mathbb{G}_-$, $1+1+1+1$ pour $\mathbb{G}_0$ et $1+1+(1+1+1+2)+(1+1+1+2) = 12$ pour $\mathbb{G}'_0$, d'où le résultat.

Partant de ces relations, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{\mathbb{G}_+}}{(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}} - \frac{\Delta_{\mathbb{G}_-}}{(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}} &= s(\mathbb{G}_+)t^{a(\mathbb{G}_+)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_+)) - s(\mathbb{G}_-)t^{a(\mathbb{G}_-)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_-)) \\
&= s(\mathbb{G}_+)t^{a(\mathbb{G}_+)}[\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_+)) + \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_-))] \\
&= s(\mathbb{G}_+)t^{a(\mathbb{G}_+)}[\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0)) + \det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'_0))] \\
&= s(\mathbb{G}_+)t^{a(\mathbb{G}_+)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0)) + s(\mathbb{G}_+)t^{a(\mathbb{G}_+)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'_0)) \\
&= s(\mathbb{G}_0)t^{a(\mathbb{G}_0)+\frac{1}{2}}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0)) + s(\mathbb{G}'_0)t^{a(\mathbb{G}'_0)-\frac{1}{2}}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'_0)) \\
\frac{\Delta_{\mathbb{G}_+}}{(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}} - \frac{\Delta_{\mathbb{G}_-}}{(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}} &= (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) \underbrace{s(\mathbb{G}'_0)t^{a(\mathbb{G}'_0)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}'_0))}_{= s(\mathbb{G}_0)t^{a(\mathbb{G}_0)}\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}_0)) = \frac{\Delta_{\mathbb{G}_0}}{(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}}}
\end{aligned}$$

puisque $\Delta_{G_0} = \Delta_{G'_0}$. En multipliant enfin par $(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ de chaque côté (le nombre de grille n est le même pour les quatre grilles $\mathbb{G}_+, \mathbb{G}_-, \mathbb{G}_0, \mathbb{G}'_0$), on a la relation recherchée. □

5.4 Conclusion

Lemme 5.9. *La fonction $\Delta_{\mathbb{G}}$ vaut 1 si $\mathbb{G}$ représente le nœud trivial.*

Démonstration. Puisque $\Delta_{\mathbb{G}}$ est un invariant d'entrelacs, on peut prendre une grille 2×2 qui représente le nœud trivial. Le calcul est fait dans la Section 4.1. □

Démonstration du Théorème 3.12. La fonction Δ_G est un invariant d'entrelacs (Corollaire 5.7), vaut 1 en le nœud trivial (Lemme 5.9) et vérifie la relation d'écheveau (Lemme 5.8). Par la Proposition 1.26, on a $\Delta_{\mathbb{G}} = \Delta_L$. □

6 Applications : propriétés calculatoires du polynôme d'Alexander

La méthode de calcul du polynôme d'Alexander par les grilles (définition Γ) décrite par la Section 3 est peu avantageuse en pratique. En effet, la définition d'Alexander de [**Ale28**] (définition A) de Δ_L nécessite le calcul d'un déterminant de taille n où n est le nombre de croisement d'un diagramme de L. Or la Section 2.4 et ci-dessous la Table 3 permettent de se convaincre qu'un diagramme d'un entrelacs (non trivial, non scindé) à n croisements ne peut en général être représenté par une grille de nombre plus petit que n. En outre, les techniques utilisées dans le calcul du déterminant de grille de la définition Γ et de celui de la définition A sont sensiblement les mêmes : matrices contenant uniquement des petites puissances de t, ayant un grand nombre de cases nulles ou égales à 1 et dont les lignes ou colonnes adjacentes sont similaires. En revanche, la définition Γ fournit toujours une forme normalisée de Δ_L tandis que la définition A (ou encore celle donnée par le calcul de Fox, par exemple, voir [**BA21,** Définition 9.10]) ne donne Δ_L qu'à un inversible près de $\mathbb{Z}\left[t^{\frac{1}{2}}, t^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Ceci s'explique par ce que le troisième chapitre de [**OSS15**] est en réalité une préparation à l'homologie de grille décrite en [**OSS15,** Chapter 4]. De même que l'homologie de Khovanov catégorie le polynôme de Jones, l'homologie de grille catégorie le polynôme d'Alexander ; c'est donc en particulier un invariant qui le contient.

Nous proposons pour pallier ce fait quelques développements personnels : il s'agit de retrouver les propriétés de base du polynôme d'Alexander grâce sa définition via les diagrammes en grille.

Name	Arc Index
3_1	5
4_1	6
5_1	7
5_2	7
6_1	8
6_2	8
6_3	8
7_1	9
7_2	9
7_3	9
7_4	9
7_5	9
7_6	9
7_7	9
8_1	10
8_2	10
8_3	10
8_4	10
8_5	10
8_6	10

Table 3 – Capture d'écran du site KnotInfo : indices d'arc des petits nœuds.
Si l'on note $c(L)$ le nombre minimal de croisements d'un diagramme de L, alors en général, $c(L) \leqslant \gamma(L)$. Le premier contre-exemple est le nœud torique $T_{4,3}$, noté 8_{19}, pour lequel $c(L) = 8 > \gamma(L) = 7$.

6.1 Invariances

Lemme 6.1. *Le polynôme d'Alexander d'un entrelacs L est symétrique, i.e. : $\Delta_L(\frac{1}{t}) \equiv \Delta_L(t)$. Ainsi, si Δ_L est le polynôme d'Alexander symétrisé, $\Delta_L\left(\frac{1}{t}\right) = \Delta_L(t)$ au signe près.*

Démonstration. C'est clair en lisant la Définition 1.24, quitte à factoriser par un monôme en $t^{\pm\frac{1}{2}}$ dans le déterminant, ce qui ne change pas la classe du polynôme d'Alexander. □

Proposition 6.2 (Polynôme d'Alexander de l'inverse)**.** *Soit L un entrelacs. Alors $\Delta_{-L} = \Delta_L$ au signe près.*

Démonstration. D'après la Section 2.3, une grille représentant $-L$ est donnée par la symétrisée de $\mathbb{G}$ par rapport à sa diagonale secondaire $\diagdown$. On utilise alors le premier point du Lemme 5.3. Puisque de plus la quantité $(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})^{1-n}$ est invariante au signe près en changeant t pour t^{-1}, on a $\Delta_{-L}(t) = \Delta_L(t^{-1})$ au signe près. Par le lemme 6.1, $\Delta_{-L} = \Delta_L$ au signe près, puis $\Delta_{-L} = \Delta_L$. □

Proposition 6.3 (Polynôme d'Alexander du miroir)**.** *Soit L un entrelacs. Alors $\Delta_{L^*} = \Delta_L$ au signe près.*

Démonstration. D'après la Section 2.3, une grille représentant L^* est donnée par la symétrisée de $\mathbb{G}$ par rapport à son axe de symétrie horizontal. Notons $\mathbb{G}^*$ cette grille. Clairement, $a(\mathbb{G}^*) = -a(\mathbb{G})$. D'autre part, $\mathbf{M}(\mathbb{G}^*)$ est obtenue à partir de $\mathbf{M}(\mathbb{G})$ par changement de t en t^{-1} et permutation des lignes selon la permutation $(1,n)(2,n-1)...(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1)$ si n est pair est $(1,n)(2,n-1)...(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}+1)$ si n est impair. Ainsi, $\Delta_{L^*}(t) = \Delta_L(t^{-1})$ au signe près, puis par le Lemme 6.1, $\Delta_{L^*} = \Delta_L$ au signe près. □

6.2 Polynôme d'Alexander d'un entrelacs scindé

Proposition 6.4. *Soient L, L' deux entrelacs. Alors $\Delta_{L\sqcup L'} = 0$. Autrement dit, le polynôme d'Alexander d'un entrelacs scindé est nul.*

Démonstration. On représente les entrelacs L, L' par des diagrammes en grille $\mathbb{G}_L, \mathbb{G}_{L'}$ de nombres n et p respectivement. On remarque alors qu'une grille $\mathbb{G}$ de nombre $n+p$ pour $L \sqcup L'$ est donnée par blocs par $\begin{bmatrix} \mathbb{G}(L) & 0 \\ 0 & \mathbb{G}(L') \end{bmatrix}$ où les entrées nulles désignent des parties de la grille sans aucun symbole $\mathbb{O}$ ni $\mathbb{X}$. La $(n+1)$-ième colonne de la matrice du démineur de cette grille est uniquement composée de 1. En effet, le $(n+1)$-ième segment vertical de $\mathbb{G}$ a tous les brins de L strictement à sa gauche, et tous les brins de L' strictement à sa droite, donc ne rencontre aucun brin, donc l'indice est nul sur cette droite. Comme la première colonne de la matrice du démineur est toujours uniquement composée de 1, le déterminant $\det(\mathbf{M}(\mathbb{G}))$ est nul, donc $\Delta_{\mathbb{G}}$ est nul. □

6.3 Polynôme d'Alexander d'une somme connexe

Définition 6.5. [**MK96,** p. 28], [**BA21,** Définition 3.8] *Soient K, K' deux nœuds. La somme connexe de K et K', notée $K\#K'$, désigne le nœud obtenu de la manière suivante : étant donné un diagramme de $K \sqcup K'$, on identifie quitte à effectuer des isotopies planaires un petit disque comme sur la Figure 6.1 à gauche, et on le remplace par le petit disque de droite sans changer le diagramme en-dehors. C'est le diagramme d'un nœud que nous définissons comme $K\#K'$.*

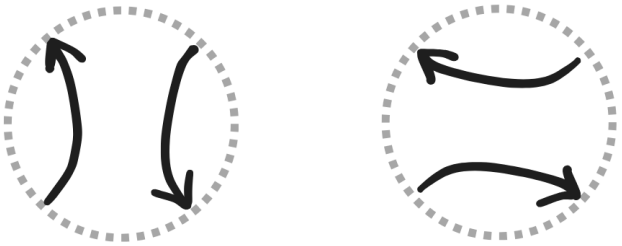
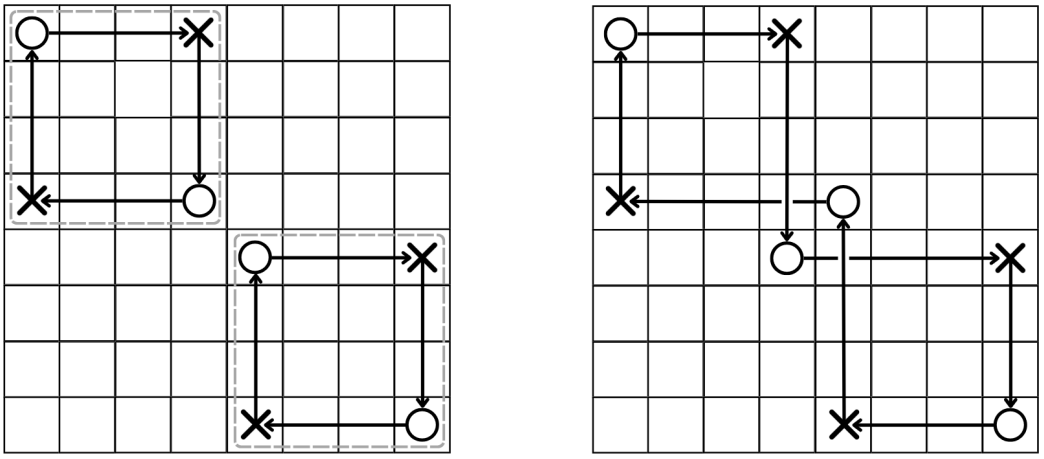


Figure 6.1 – Somme connexe de deux nœuds

La classe d'équivalence de ce nœud ne dépend que de K et K'.

Proposition 6.6. *Soient K, K' deux nœuds. Alors $\Delta_{K\#K'} = \Delta_K \Delta_{K'}$.*

Démonstration. L'idée est, comme dans la preuve de la Proposition 6.4, de juxtaposer « par blocs » deux diagrammes de K et K' Dans la figure 6.2, on traite le cas où les deux colonnes centrales adjacentes, qui appartiennent à l'une et l'autre des grilles d'origine, sont de la forme XOOX. On peut toujours se ramener à ce cas par échange des ronds et des croix puis symétrie diagonale, ce qui d'après la Section 2.3 ne change pas le type du nœud. Les grilles ci-dessous représentent la somme connexe de deux nœuds triviaux, mais c'est par pure commodité : on considérera seulement les deux colonnes centrales.



(a) Avant (b) Après

Figure 6.2 – Représenter une somme connexe dans un diagramme en grille

Dans le cas de la Figure 6.2a, on effectue le changement représenté portant uniquement sur les deux colonnes centrales pour obtenir la Figure 6.2b. On se convainc aisément que le diagramme obtenu à partir de la grille 6.2b est bien un diagramme en grille de la somme connexe $K\#K'$, quitte à « dénouer » deux fois le diagramme d'entrelacs obtenu.

Notons $\mathbb{G}_K$ le diagramme en grille de K choisi, $\mathbb{G}_{K'}$ celui de K', de nombres respectifs n_1 et n_2 et notons $\mathbb{G}_\#$ le diagramme de la Figure 6.2b. Notons aussi $\mathbb{G}_0$ le diagramme de la Figure 6.2a. Quitte à stabiliser suffisamment les grilles $\mathbb{G}_K$ et $\mathbb{G}_{K'}$, on peut supposer que $n_1 = n_2 = n$ et que ces deux entiers sont pairs. Les grilles $\mathbb{G}_0$ et $\mathbb{G}_\#$ sont alors de nombre $n_1 + n_2 = 2n$. Alors, par le Lemme 5.1, $s(\mathbb{G}_\#) = s(\mathbb{G}_K)s(\mathbb{G}_{K'})$ et comme $\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_0)}$ et $\Pi_{\sigma_{\mathbb{O}}(\mathbb{G}_\#)}$ ne diffèrent que d'une permutation de colonnes, et donc leur déterminant d'un facteur -1, on a : $s(\mathbb{G}_\#) = -s(\mathbb{G}_K)s(\mathbb{G}_{K'})$. Puisque $k(\mathbb{G}_\#) = k(\mathbb{G}_K)+k(\mathbb{G}_{K'})-1$, on a l'égalité $(-1)^{k(\mathbb{G}_\#)}s(\mathbb{G}_\#) = (-1)^{k(\mathbb{G}_K)}s(\mathbb{G}_K)(-1)^{k(\mathbb{G}_{K'})}s(\mathbb{G}_{K'})$. D'autre part, on a $t^{-\frac{k(\mathbb{G}_\#)}{2}} = t^{\frac{1}{2}}.t^{-\frac{k(\mathbb{G}_K)}{2}}.t^{-\frac{-k(\mathbb{G}_{K'})}{2}}$. Enfin, en développant la matrice $\mathbf{M}'(\mathbb{G}_\#)$ par rapport à sa $(n+1)$-ième ligne, dont l'unique coefficient non nul vaut t^{-1}, alors, puisque ce coefficient est sur la diagonale, on obtient que $\det(\mathbf{M}'(\mathbb{G}_\#)) = t^{-1}\det(\mathbf{M}'(\mathbb{G}_K))\det(\mathbf{M}'(\mathbb{G}_{K'}))$ en utilisant la formule du déterminant par blocs.

Pour conclure, il suffit de calculer le changement dans le facteur de normalisation (ce qui au demeurant n'est pas utile si l'on ne considère que le polynôme d'Alexander à un inversible près). En utilisant la Remarque 5.2, on peut ne considérer que les contributions des deux symboles $\mathbb{O}$ au cœur de la grille. Notons les a_{loc} comme nous l'avons déjà fait dans la preuve du Lemme 5.4. Alors $8a_{loc}(\mathbb{G}_K) = -1$, $8a_{loc}(\mathbb{G}_{K'}) = -1$ et $8a_{loc}(\mathbb{G}_\#) = +1 + 1 = 2$. Ainsi $t^{a(\mathbb{G}_\#)} = t^{\frac{1}{2}}t^{a(\mathbb{G}_K)}t^{a(\mathbb{G}_{K'})}$.

En regroupant tout cela dans la dernière expression donnée dans la Théorème 3.12, on obtient la formule recherchée. □

7 D'autres invariants donnés par les diagrammes en grille

L'ouvrage [**OSS15,** Sections 3.4 and 3.5] donne deux autres méthodes pour calculer des invariants d'entrelacs à partir de diagrammes en grille. L'une d'elle fournit une présentation du groupe d'entrelacs.

Définition 7.1. [**CF63,** p. 72] *Soit L un entrelacs, image dans $\mathbb{R}^3$ d'un plongement d'une réunion disjointe de cercles. Le* groupe *de l'entrelacs L est le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ de l'espace topologique $\mathbb{R}^3 \setminus L$. On le note $\pi(L)$.*

Si L est un entrelacs, $\mathbb{R}^3 \setminus L$ est connexe par arcs, ce qui justifie l'omission du point base dans la définition précédente. De plus, le groupe d'entrelacs est un invariant d'entrelacs.

Proposition 7.2. *Soient L un entrelacs et $\mathbb{G}$ un diagramme en grille de nombre n représentant L. Alors*

$$\pi(L) = \{x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_{n-1}\}$$

où, si l'on considère que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i symbolise le i-ième segment horizontal de $D(\mathbb{G})$ (comptés à partir de la gauche), alors pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, r_j est le produit des générateurs

intersectant de gauche à droite la j-ième ligne horizontale de la grille $\mathbb{G}$ séparant deux rangs de $\mathbb{G}$ (comptés à partir du haut).

Exemple 7.3. Reprenons la grille 2.2 du nœud de huit. Les notations de la Proposition 7.2 s'interprètent de la manière suivante :

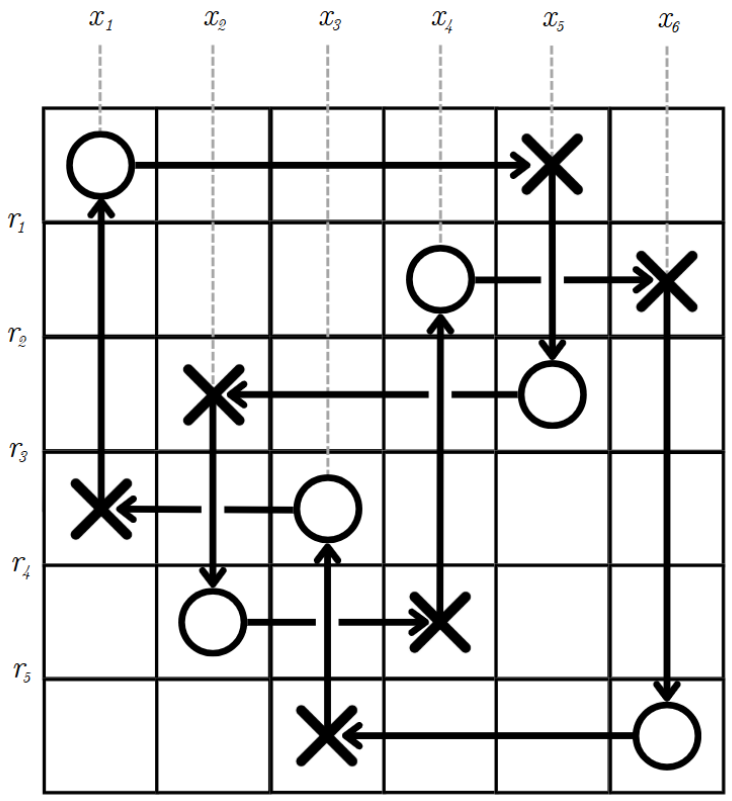


FIGURE 7.1 – Présentation du groupe du nœud de huit à partir d'une grille

On a donc :

- ⋆ $r_1 = x_1x_5$;
- ⋆ $r_2 = x_1x_4x_5x_6$;
- ⋆ $r_3 = x_1x_2x_4x_6$;
- ⋆ $r_4 = x_2x_3x_4x_6$;
- ⋆ $r_5 = x_3x_6$;

d'où $\pi(4_1) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \mid r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \rangle$.

Les relations r_1 et r_5 signifient que $x_1 = x_5^{-1}$ et $x_6 = x_3^{-1}$, ce qui permet de récrire r_2 sous la forme $x_1x_4 = x_3x_1$ et donc x_4 est conjugué à x_3 par $x_1 \in \langle x_1, x_3 \rangle$; de même, r_4 se récrit $x_2x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1} = 1$ et donc x_2 est conjgué à x_1^{-1} par $x_3^{-1}x_1 \in \langle x_1, x_3 \rangle$; on peut les supprimer des générateurs. La relation restante se reformule en x_1, x_3 pour donner :

$$\pi(4_1) = \left\langle x_1, x_3 \mid x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1} = x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1 \right\rangle.$$

C'est bien un présentation du groupe du nœud de huit, comme donnée en [**Rol03,** p. 57].

Même constat qu'au début de la Section 6 : si des simplifications sont parfois possibles comme dans l'Exemple 7.3, la présentation obtenue de $\pi(L)$ est a priori en n générateurs où n est la taille de la grille choisie pour L. Or, la présentation de Wirtinger du groupe d'un entrelacs fait intervenir k générateurs où k est le nombre d'arcs d'un de ses diagrammes, il n'est pas certain qu'en pratique[1] $n \leqslant k$, et donc que notre méthode est meilleure que celle-ci.

Néanmoins, le formalisme des grilles permet de démontrer que :

Proposition 7.4. *Soient L, L' deux entrelacs. Alors $\pi(L \sqcup L')$ est isomorphe au produit libre $\pi(L) * \pi(L)$.*

Démonstration. De même que pour la preuve de Proposition 6.4, on représente les entrelacs L, L' par des diagrammes en grille $\mathbb{G}_L, \mathbb{G}_{L'}$ de nombres n et p respectivement. Une grille $\mathbb{G}$ de nombre $n+p$ pour $L \sqcup L'$ est donnée par blocs par $\begin{bmatrix} \mathbb{G}(L) & 0 \\ 0 & \mathbb{G}(L') \end{bmatrix}$. On a donc des présentations $\pi(L) = \langle x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_{n-1} \rangle$ et $\pi(L') = \left\langle y_1, ..., y_n \mid r'_1, ..., r'_{p-1} \right\rangle$ telles que données par la Proposition 7.2. Or, la n-ième ligne horizontalle de $\mathbb{G}$ ne coupe augment segment horizontal de $D(\mathbb{G})$. Par suite, la Proposition 7.2 donne que

$$\pi(L \sqcup L') = \left\langle x_1, ..., x_n, x_{n+1} = y_1, ..., x_{n+p} = y_p \mid r_1, ..., r_{n-1}, r'_1, ..., r'_{p-1} \right\rangle,$$

ce qui correspond à une présentation du produit libre $\pi(L) * \pi(L')$ (voir [**Kna06,** Proposition 7.16]). □

Proposition 7.5. *Soient K, K' deux nœuds. Alors il existe deux présentations $\langle S,x \mid R \rangle$ et $\langle S',x' \mid R' \rangle$ de $\pi(K)$ et $\pi(K')$ respectivement telles que*

$$\pi(K \# K') = \left\langle S,S',x,x' \mid R,R',x' = x^{-1} \right\rangle.$$

Démonstration. De même que pour la preuve de la Proposition 7.4, on représente les nœuds K, K' par des diagrammes en grille $\mathbb{G}_K, \mathbb{G}_{K'}$ de nombres n et p respectivement. On reprend la construction d'une grille pour la somme connexe de deux nœuds faite dans la preuve de la Proposition 6.6 et représentée sur la Figure 7.2. On a des présentations $\pi(K) = \langle x_1, ..., x_n \mid R = \{r_1, ..., r_{n-1}\} \rangle$ et $\pi(K') = \left\langle y_1, ..., y_n \mid R' = \{r'_1, ..., r'_{p-1}\} \right\rangle$ telles que données par la Proposition 7.2.

Cette fois, la n-ième ligne de la grille rencontre les segments horizontaux correspondant aux générateurs x_n de $\pi(K)$ et y_1 de $\pi(K')$, ce qui correspond à un nouveau relateur $r_0 = x_n y_1$. En posant $x = x_n, x' = y_1, S = \{x_1, ..., x_{n-1}\}, S' = \{y_2, ..., y_p\}$, on obtient le résultat annoncé. □

1. Notons que pour les « petits entrelacs » de la section 4, c'est pourtant le cas : $k \geqslant n$, donc notre méthode de calcul est a priori plus efficace (à ceci près que les relateurs sont plus grands, ceux de la présentation de Wirtinger étant tous de longueur 4).

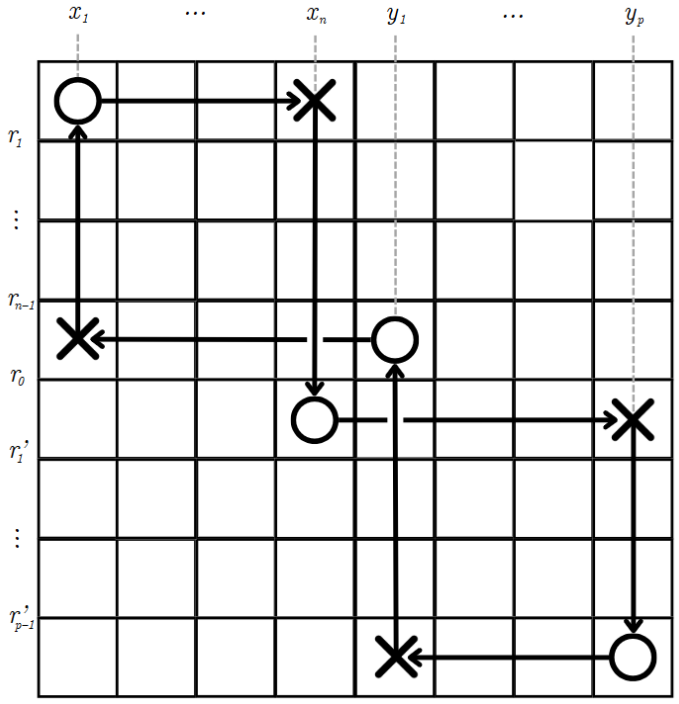


FIGURE 7.2 – Groupe de nœud d'une somme connexe

Références

[Ale28] Alexander, J. W. (1928). Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2), 275-306.

[BA21] Ben Aribi, Fathi. *Advanced Topics in Mathematics : La théorie des nœuds via le polynôme d'Alexander*, cours de master, UCLouvain, 2021. Lien : `http://www.normalesup.org/~benaribi/Cours_Alexander_31mai2021.pdf`

[Bl10] Blanchet, Christian. *Nœuds, tresses et théories d'homologie*, cours spécialisé de M2, Université Paris-Diderot, 2010. Lien : `https://webusers.imj-prg.fr/~christian.blanchet/enseignement/2010-11/`

[Cel] Celoria, Daniele. Programme informatique dessinant le diagramme d'entrelacs associé à une grille et calculant son polynôme d'Alexander. Lien : `https://poisson.phc.dm.unipi.it/~celoria/grid_alexander.html`

[CF63] Crowell, R. H., & Fox, R. H. (1963). *Introduction to Knot Theory.*

[Crom95] Cromwell, P. R. (1995). Embedding knots and links in an open book I : Basic properties. *Topology and its Applications*, 64(1), 37-58.

[Crom04] Cromwell, P. R. (2004). *Knots and links.* Cambridge university press.

[Dyn06] Dynnikov, I. A. (2006). Arc-presentations of links : monotonic simplification. *Fundamenta Mathematicae*, 190, 29-76.

[Gos93] Gostiaux, B. (1993). *Cours de mathématiques spéciales. Tome 2 - Topologie, analyse réelle.* PUF

[Gou08] Gourdon, X. (2008). *Les maths en tête : mathématiques pour MP*. Analyse.* Ellipses

[Kaw96] Kawauchi, A. (1996). *Survey on knot theory*. Springer Science & Business Media.

[Kna06] Knapp, A. W. (2006). *Basic algebra*. Springer Science & Business Media.

[Kno] Site *KnotInfo : Table of Knots*. Lien : `https://knotinfo.math.indiana.edu/index.php?isdesktop=1`

[Lin] Site *LinkInfo : Table of LinkInvariants*. Lien : `https://linkinfo.sitehost.iu.edu/`

[MK96] Murasugi, K., & Kurpita, B. (1996). *Knot theory and its applications* (Vol. 526). Boston : Birkhäuser.

[OSS15] Ozsváth, P. S., Stipsicz, A. I., & Szabó, Z. (2015). *Grid homology for knots and links* (Vol. 208). American Mathematical Soc.

[Pol10] Polyak, M. (2010). Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topology*, 1(4), 399-411.

[Rol03] Rolfsen, D. (2003). Knots and links (No. 346). *American Mathematical Soc.*.

[Sch13] Scherich, N. (2013). The Alexander polynomial. Lien : `https://nancyscherich.com/wp-content/uploads/2018/01/the-alexander-polynomial.pdf`

[Suw17] Suwara, P. (2017). Minimal generating sets of directed oriented Reidemeister moves. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 26(04), 1750016.

[Tur01] Turaev, V. (2001). *Introduction to combinatorial torsions*. Springer Science & Business Media.