Cours de mathématiques

TOME I

LOGIQUE & THÉORIE DES ENSEMBLES

Mathématiques générales

France ∼ 2025

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Table des matières

Chapitre 1

Logique mathématique

Résumé

Les mathématiques sont formées sur les bases de la théorie des ensembles, construction étroitement intriquée avec la logique théorique. Pour appréhender la première de façon satisfaisante, il n'est pas nécessaire pourtant de comprendre les mécanismes très savants de la seconde ; c'est pourquoi nous fournissons aux débutants, comme tous les manuels de mathématique l'ont toujours proposé, un préambule de logique dite pratique, sans axiomatisation dure. Au cours de cette démarche, nous tirerons deux conclusions : d'une part, de la beauté et de la rigueur des fondations sur lesquelles s'étendent les règles de la logique « habituelle » ; d'autre part, de la difficulté de se convaincre de son bien-fondé... deux constats fort paradoxaux. En tout cas, nous ne pouvons qu'exhorter le lecteur a susciter toute son attention dès les premières lignes de ce cours, même si seulement les parties prochaines auront l'air de la praticité.

1.1 Calcul des propositions

La logique est la science qui permet d'établir la vérité, mais la vérité de quoi ? Celle des propositions. C'est la brique de base, partout reprise, de la logique.

« Définition ». *(Proposition, assertion)*

Une *proposition* est une phrase assertive ou parfois *assertion* constituée de mots (*métalangage*) ou de symboles mathématiques (*langage mathématique*) qui soit bien formée.
En pratique, on confond souvent les termes *proposition* et *assertion*.

Ce n'est pas une bonne définition, à cause du syntagme *bien formé* qui n'a jamais été défini. On précise dans la remarque suivante dans quelle mesure cette notion pourrait être axiomatisée (en légitimant ainsi notre construction[1]).

À cause de la mauvaise définition des propositions avec laquelle nous sommes forcés de composer, nous voyons qu'il n'est pas possible de déterminer définitivement du fait qu'une proposition donnée en soit une ou non. Nous comptons sur la liste d'exemples donnée ci-dessous pour forger dans l'esprit du lecteur une conception empirique de ce qu'est une proposition, qui peut suffire longtemps encore.

Exemples

1. « $2+2=4$ » est une proposition.

   Il se trouve qu'elle est vraie ; on l'apprend en classe de maternelle.
2. « $2+2=5$ » est une proposition.

   Puisque la précédente est vraie, on démontre avec les règles de l'arithmétique des entiers naturels que celle-ci est fausse.
3. « $2+=4$ » n'est pas une proposition.

   En effet, elle est *mal formée* au niveau du langage mathématique.
4. « $x+1=4$ » n'est pas une proposition.

   En effet, le symbole x n'est pas défini dans aucun des langages, courant ou mathématique. Cependant, « $\forall x \in \mathbb{N} \quad x+1=4$ » est une assertion bien formée, même si elle est bien évidemment fausse.
5. « César a franchi le Rubicon » est une proposition.

   Sa véracité revient en détermination à l'historien. Encore faut-il définir précisément tous les termes : César, le Rubicon, l'action de franchir...
6. « Tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » est une proposition.

   Les mathématiciens ignorent encore aujourd'hui si elle est vraie ou fausse, ce qui est, j'en conviens, un peu honteux.
7. « J'ai faim » est une proposition.

   Il est nécessaire de sous-entendre : que *je* est Louis Lascaud, que l'action se déroule à 16 h 24 le 17 janvier 2023, que la faim est une notion biologiquement déterminée sans ambiguïté.
8. « As-tu faim ? » n'est pas une proposition.

   En effet, ce n'est pas une phrase assertive, mais interrogative. Même problème pour une phrase du type : « Viens ! ».
9. « Par une demain » n'est pas une proposition.

   En effet, elle est mal formée au niveau du métalangage.

Si, normalement, cette définition est largement suffisante pour l'instant, ça n'est pas toujours évident, même pour des étudiants en mathématiques déjà avancé dans leurs

études supérieures. Nous citons cet exemple véridique.
On demande de démontrer que tout groupe fini d'exposant 2 a pour ordre une puissance de 2. L'élève propose de raisonner par récurrence sur le cardinal du groupe, ce qui est très possible. Néanmoins, énoncer l'hypothèse de récurrence et la propriété à montrer en hérédité est une vraie difficulté pour lui : on voit écrire : « on suppose que tout groupe d'ordre n dont tout élément est d'ordre 2 a pour cardinal une puissance de 2 ; montrons que le plus petit groupe de cardinal supérieur a pour cardinal une puissance de 2 supérieure ». Cette dernière phrase n'est pas une proposition valide et fausse la résolution du problème ! Ce qui semble grossier sorti du contexte, n'est pas si ridicule en conditions.

Remarque. Il est aisé de voir comment la formule *bien formé* peut être formalisée. Dans la définition précédente, nous nous sommes permis d'inclure des *mots* dans les propositions, ce qui fait partie du *métalangage* mathématique, en opposition au *langage* mathématique composé exclusivement de symboles. En effet, toute proposition mathématique peut être écrite seulement avec des symboles : par exemple, « $\forall x \; \forall y \quad (x = y) \iff ((\forall t \in x, t \in y) \wedge (\forall t \in y, t \in x))$ » n'est autre que le principe de double inclusion que connaissent bien les étudiants de première année lorsqu'il veulent montrer l'égalité de deux ensembles. À partir de là, on peut supposer que, dans la définition des propositions, nous nous restreignons aux propositions contenant un métalangage que l'on peut convertir en langage mathématique. Pour exemple, « x appartient à E » n'est autre qu'une phrase en français pour dire mathématiquement « $x \in E$ ». Ainsi, en toute rigueur, « César a franchi le Rubicon », comme on l'a indiqué déjà, n'est pas une proposition... À cause de César, du Rubicon et de l'action de franchir qui ne font pas partie de la théorie des ensembles, tout au moins sans définition préalable.

Puisque, comme toute autre science, les résultats mathématiques doivent pouvoir être formalisés au-delà de la multiplicité des langages, la précision de la science a mathématique a forcé à éliminer ainsi le risque de malentendu lié au langage oral ou courant en faisant le choix de traduire les propositions en un langage artificiel formel ne contenant que des termes logiques. Dès la deuxième section de ce cours, nous commencerons d'en donner les principes.

En mathématiques, une proposition bien formée du métalangage ne comporte pas forcément de point final.

Comme dans toutes les mathématiques, nous travaillons de surcroît dans le cadre d'un certain calcul *littéral*, c'est-à-dire avec des lettres, afin de pouvoir généraliser nos constructions, ici, sur les propositions. Habituellement, nous notons par les lettres P,Q,R,S, etc., des propositions quelconques, non déterminées par une phrase du même type que celles ci-dessous (constituée de métalangage ou de langage mathématique, ou des deux), mais qui, sans condition autre, le pourraient être à n'importe quel moment.

$\longrightarrow$ *Notation.* Pour donner un nom littéral à une proposition déterminée, par exemple, « César n'a jamais franchi le Rubicon », nous notons de la manière suivante :

$$P : \text{« César n'a jamais franchi le Rubicon ».}$$

Les lecteurs avancés reconnaîtront à juste titre la rédaction propre à l'en-tête d'un raisonnement par récurrence (Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $n \leqslant 2^n$ » par exemple).

Astuce !

Pour les lecteurs n'ayant pas commencé la lecture de ce cours par le présent chapitre, nous déconseillons vivement de jamais quantifier P,Q... dans des formules impliquant de telles propositions. En effet, non seulement l'usage des quantificateurs $\forall, \exists$ est par définition réservé aux ensembles, mais en outre, la théorie dite *logique du premier ordre*, dont nous utilisons les outils, interdit formellement la quantification des prédicats (une proposition n'étant autre qu'un prédicat à aucun argument). Ainsi, en logique théorique, cet usage est incorrect ; dans la logique naïve que nous présentons, il est plutôt mal placé. Rien n'empêche, par contre, d'écrire : « Pour toute proposition P, [...] ».

1.1.1 Axiomatique primaire d'une logique naïve

En guise d'activité introductive, on propose au lecteur l'exercice suivant à résoudre avec plus de jugeotte que d'austérité d'esprit.

Exercice 1 *(Quelques valeurs de vérité à attribuer)*

Pour chacun des assertions suivantes, donner sa valeur de vérité, à savoir le vrai ou le faux.

1. « Le rosier est une plante »
2. « La baleine est un poisson »
3. « $15684 + 749412 = 795096$ »
4. « Le nombre 4 est un nombre premier »
5. « Il existe des fonctions continues non dérivables »
6. « 5 est un nombre premier ssi deux droites parallèles et disjointes n'ont aucun point commun »
7. « Si 5 est impair, alors la somme des angles d'un triangle plan vaut 180ř. »
8. « Tout quadrilatère avec deux côtés opposés égaux et deux angles opposés égaux est un parallélogramme »

Pour formaliser proprement les fondements du calcul propositionnel, par souci purement cosmogonique[1], nous introduisons une fonction multivaluée sur la classe des propositions lui attribuant une valeur de vérité. On rappelle qu'une fonction multivaluée f de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est une fonction définie sur une partie de $\mathcal{C}$ et qui à tout élément x de cette partie associe un ou plusieurs éléments de $\mathcal{D}$, par exemple y, et que dans ce cas, on note $f(x) \ni y$.

Axiome. *(Notion de booléen)*

Une proposition peut être vraie ou fausse. Plus précisément, on suppose qu'il existe une fonction définie partout sur la collection de toutes les propositions à valeurs dans $\{0{,}1\}$ (a priori multivaluée).

$\longrightarrow$ *Notation.* Notons valver cette fonction multivaluée. On a donc :

$$\text{valver} : \mathcal{P} \multimap \{0{,}1\}$$

avec le symbole des multifonctions, en notant $\mathcal{P}$ la classe de toutes les propositions.

On appelle *vrai* le nombre 1 et *faux* le nombre 0.

Avec ce premier axiome, nous y allons calmement. Nous énonçons qu'à toute proposition, c'est-à-dire à toute assertion bien formée, on peut faire correspondre au moins une *valeur de vérité*, ce qui, dans le langage courant, correspond au vrai et au faux. Cependant, sans les précisions suivantes, on ignore si une proposition peut être ni vraie ni fausse, ou s'il existe des propositions vraies et fausses simultanément. Les deux axiomes qui arrivent énoncent que ces deux cas de figure sont exclus.

Axiome. *(Principe du tiers exclu, principe de la double valeur)*

La fonction valver est définie partout.

Le plus important des deux axiomes précédents est le mot **partout**.

On constate que cet axiome énonce exactement qu'une proposition est soit vraie, soit fausse, mais au moins l'un des deux.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note simplement

$$P$$

[1] Et qui risque d'alourdir le discours gravement. On invite donc les lecteurs fragiles à se focaliser sur les points importants.

pour $=$ valver$(P) \ni 1$, mais parfois, ce qui est regrettable, on note « P est vraie » par souci de clarté, avec ou sans guillemets. On peut aussi d'ores et déjà noter Non P, ou encore $\neg P$ pour valver$(P) \ni 0$, ou, ce qui est encore plus regrettable, « P est fausse », toujours pour clarté.

Exercice 2

Que dire de la proposition « Tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ?

▷ **Éléments de réponse.**

Cette assertion (*conjecture de Goldbach*) est, d'après le principe précédent, soit vraie, soit fausse. Nous ignorons en fait si elle est vraie ou fausse, mais qu'importe : ce n'est pas parce que nous ne savons pas la valeur de vérité de cette proposition, qu'elle n'en a pas.

Axiome. *(Principe de non-contradiction)*

L'application valver est en fait monovaluée.

On constate que cet axiome énonce exactement qu'une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse ; c'est-à-dire, conjoint à l'axiome précédent, qu'une proposition est soit vraie, soit fausse, l'un des deux, et un seul des deux.

Exercice 3

Se convaincre que l'on ne peut trouver de proposition vraie et fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Par exemple, en déduire que tout est vrai, et tout est faux. Montrer ensuite que la proposition « tout est vrai et tout est faux » est fausse, puis tourner en rond. On admet alors qu'un diallèle est un illogisme.

Des logiques non binaires

La propriété (ou, pour nous, axiome) précédente n'est autre que la **bivalence** de la logique classique, unique logique utilisée depuis Aristote jusqu'à son développement formel à la fin du XIX^{e} siècle. Son principe très ancien rend ainsi compte d'une intuition profonde : les choses sont vraies ou fausses ; elles doivent absolument être l'une des deux, et rien n'est vrai et faux à la fois, faute de paradoxe. Cette logique est celle sur laquelle devait se fonder tous les écrits des logiciens pendant deux millénaires. Elle n'est pas aussi définitive pour tout le monde.

Certains mathématiciens étudient des logiques *polyvalentes* (on dit aussi *multivalentes*) c'est-à-dire où les propositions peuvent prendre plus de deux valeurs de vérité. Les premières logiques polyvalentes sont développées dans les années 1920 à la suite des travaux du mathématicien polonais Jan Łukasiewicz. Par exemple, la *logique tertiaire* entend répondre aux besoins de la mécanique quantique en prenant en compte trois états de vérité, VRAI, FAUX et INCONNU (ou, comme il conviendrait mieux de dire, INDÉTERMINÉ). Il est important de voire que ce troisième état est complètement absent de notre modèle de logique théorique, comme on l'a déjà mentionné : une proposition, même de valeur de vérité inconnue (par quelqu'un), est soit vraie, soit fausse.

Il existe même des logiques dont le nombre de valeurs de vérité possible est infini, et même non dénombrable ! La *logique floue* inventée en 1965 par Lofti Zadeh permet de créer des propositions dont la valeur de vérité prend ses valeurs dans l'intervalle de réels [0,1], en fonction du degré de sûreté de la proposition : 0 si elle est résolument fausse, 1 si elle est résolument vraie.

Remarque. Les deux axiomes précédent permettent d'énoncer le fait suivant : valver est une multifonction monovaluée définie partout... Autrement dit, c'est une simple application de la classe de toutes les propositions dans $\{0,1\}$. Nous admettons qu'il n'y a eu qu'un intérêt pédagogique à amener successivement que, d'une part, valver est définie partout, ce qui en fait une multi-application, et d'autre part, qu'elle est monovaluée, ce qui en fait une simple fonction. On peut donc noter en toute rigueur, dans le formalisme des classes :

$$\text{valver} \in \{0,1\}^{\mathcal{C}}.$$

Certains logiciens adoptent un point de vue très ensembliste de la logique naïve, en remarquant que, après ce qui a été vu précédemment, $\mathcal{C}$ s'écrit comme la réunion disjointe de la sous-classe des propositions vraies $\mathcal{V}$ et la sous-classe des propositions fausses qui est son complémentaire $\mathcal{F}$. On a même exactement $\mathcal{V} = \text{valver}^{-1}(\{1\})$ et $\mathcal{F} = \text{valver}^{-1}(\{1\})$. Pour eux, le calcul propositionnel s'effectue non plus sur $\mathcal{C}$ grâce à valver mais sur $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation définie sur $\mathcal{C}$ par $P\mathcal{R}Q$ ssi $\text{valver}(P) = \text{valver}(Q)$ et l'on travaille avec l'application quotient $\widetilde{\text{valver}}$. Dans cette conception, il n'y a que deux propositions : une proposition vraie, appelée *le vrai*, notée $\top$, et une proposition fausse, appelée *le faux*, notée $\bot$. Comme les conceptions $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ de la logique naïve se chevauchent, on n'écrit jamais les propositions $\tilde{P}$, et même lorsque la première conception prévaut, on s'autorise à écrire, pour « P est vraie » successivement :

$$P = \top \text{ ou } P \iff \top \text{ ou } P : \top,$$

de même pour « P est fausse ».

Remarquons d'ores et déjà que $\mathcal{R}$ n'est autre que la relation d'équivalence définie plus bas dans ce document. La conception $\tilde{\mathcal{C}}$ a l'intérêt de ne considérer que le vrai et le faux indépendamment de la réalité pratique des propositions ; quant aux constructions de la section suivante, elle les légitime totalement *(voir à ce moment)*.

Cette identification des propositions à leurs valeurs de vérité n'aura plus vraiment de sens pour les prédicats qui, eux, *prennent* véritablement des valeurs de vérité de façon variante.

Reformulation. ***(Axiomes des propositions)***

On peut résumer les trois faits précédents par les points suivants :

(i) Une proposition, si elle existe, peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux.

(ii) Il n'existe pas d'autres valeurs de vérité.

(iii) Toute proposition prend au moins l'une des deux valeurs de vérité vrai ou faux.

(iv) Une proposition ne prend pas simultanément les deux valeurs de vérité vrai et faux.

Motivation. Nous allons définir, pour développer dans le bon sens le calcul propositionnel, des opérations pour créer des formules, qui ne seront autres que des propositions compositions de propositions au moyen d'opérations : $f(P,Q,R)$. Selon la conception précédente, la création $f(P)$ n'a que peu d'intérêt logique : P ne peut toujours prendre que deux valeurs et bien sûr $f(P)$ en tant que proposition (si tant est que, bien sûr, elle est bien formée), mais une proposition de la forme $f(P_1,\ldots,P_n)$ peut prendre toujours seulement deux valeurs de vérité en tant que proposition bien formée, mais cette valeur variera dans 2^n cas selon les valeurs de vérité prises par $P_1,\ldots,P_n$!

Afin de *calculer* avec les propositions, on distinguera chacun de ses 2^n cas de figure. Afin de tous les représenter, on aura profit, dès que $n \geqslant 2$, de les écrire dans un tableau, appelé *table de vérité* comme représentée ci-dessous, ayant pour buts exhaustivité et clarté, et qui facilite beaucoup en pratique le calcul propositionnel comme on pourra l'éprouver très rapidement.

P
V
F

TABLE 1.1 : *Table de vérité triviale à une variable.* —
Lorsqu'on a qu'une proposition, elle ne peut prendre que la variable de vérité *vrai* ou *faux*. On sent déjà qu'il n'y aura donc que deux opérateurs unaires : l'identité et la négation, c'est-à-dire, conserver les deux valeurs de vérité ou les inverser.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

TABLE 1.2 : *Table de vérité à deux variables (sans proposition composée à calculer).* — Voilà la forme générale d'une table de vérité à deux variables. **Important.** Pour ne pas s'y perdre, on commence toujours par la gauche où l'on inscrit les valeurs de vérité vraies et fausses à la suite (on divise par deux le tableau, le haut et le bas). Dans chacune de ces divisions, on divise le tableau en deux, le haut et le bas, qui seront les places respectivement du vrai et du faux de la deuxième proposition, et ainsi de suite, de sorte que la dernière colonne sera constituée par l'alternance une à une des valeurs vrai et faux de la n-ième proposition.

	P_1	P_2	$\cdots$	P_n	$f(P_1, P_2, \dots, P_n)$
	V	V	$\cdots$	V	V
	V	V	$\cdots$	F	F
$2^n/2$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
	V	F	$\cdots$	V	F
	V	F	$\cdots$	F	F
	F	V	$\cdots$	V	V
	F	V	$\cdots$	F	F
$2^n/2$	$\vdots$	V	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
	F	F	$\cdots$	V	F
	F	F	$\cdots$	F	V

TABLE 1.3 : *Table de vérité à n variables.* — Généralisation des faits précédents.

Ce qu'il faut retenir

→ La logique naïve travaille sur les *propositions*. On suppose qu'elles existent, elles ne sont pas définies très proprement mais on essaie d'identifier leur *bonne formation*.

→ Comme au fil de toute démarche axiomatique, ces propositions, quoique non définies, sont régies par des *axiomes*. Ceux-ci portent sur la notion de *valeur de vérité*, qu'une proposition peut prendre selon des règles précises.

→ Une certaine façon de voire les choses (conception quotient, point de vue ensembliste) alors est d'*identifier* les propositions à leurs valeurs de vérité, ce qui peut paraître cruel mais est très cohérent pour l'œil pratique. Plus couramment, on adopte une conception classique (*i.e.* sur les classes, point de vue prédicatif).

→ Pour écrire les calculs sur un ensemble fini de propositions, on utilisera le formalisme des *tableaux de vérité* permettant de représenter clairement tous les cas de figure selon que des propositions quelconques prennent l'une ou l'autre des deux valeurs de vérité possibles.

→ Ce qui est intéressant, en logique puis en mathématique, c'est de former des formules complexes qui soient vraies pour les 2^n valeurs de vérité considérées : une telle formule sera appelée *théorème du calcul propositionnel*. Plus généralement, mais peut-être aussi de façon plus biaisée, on peut considérer que toute l'activité mathématique consiste à établir de telles formules, appelées alors *théorèmes*.

1.1.2 Opérations sur les propositions

1.1.2.1 Négation d'une proposition

La définition suivante n'en est pas vraiment une dans la première conception de la logique naïve, mais elle en est une dans la deuxième. Ainsi, dans la première conception, il faudra remplacer le mot « Définition » par « Axiome » et commencer l'énoncé par *On admet qu'il existe une unique proposition telle que...*

La négation transforme une proposition en une autre proposition : ce sera un opérateur unaire (d'ailleurs, le seul, avec l'identité bien sûr qui ne change rien à la proposition, ce qui nous fera intéresser très vite aux opérateurs binaires entre propositions).

Définition. ***(Négation)***

Soit P une proposition. On appelle *négation* de P la proposition Q telle que Q est vraie si P est fausse et Q est fausse si P est vraie. On note : $\neg P$ ou $\textsc{Non}(P)$ ou $\textsc{Non}\ P$ ou $\mathrm{Neg}(P)$.

Exercice 4

Se convaincre que l'on ne peut trouver de proposition ni vraie, ni fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit une proposition ni vraie ni fausse. Que dire de sa négation ?

Remarque. L'opération de négation d'une proposition peut être entièrement définie par sa table de vérité, comme suit :

P	NON P
V	F
F	V

TABLE 1.4 : *Table de vérité de la négation.* —
Cette table a pour nous valeur de définition.

Intuitivement, la négation d'une proposition est celle qui dit le « contraire » de la proposition de départ. Comme on l'a déjà évoqué (encore ! qu'est-ce qu'on évoque dans ce cours), elle échange les valeurs de vérité selon celles de la proposition initiale, tandis que l'identité (que nous ne prenons pas la peine de définir, car ce n'est même pas un opérateur dans la conception quotient) les conserve.

On admet pour l'instant que deux propositions sont équivalentes ssi elles ont les mêmes valeurs de vérité, vraies ou fausses.

Propriété. ***(Involutivité de la négation)***

Pour toute proposition P, $\neg\neg P \iff P$. Autrement dit, l'opérateur de négation est involutif.

▷ La méthode incontournable pour montrer ce genre de formules, même ici très élémentaire, est la formalisation en tables de vérité. On rédigé de la manière suivante : ■

Logique intuitionniste : *first encounter*

La double négation, selon le théorème précédent, est traité directement dans notre logique. Ce n'est plus le cas en logique intuitionniste.

1.1.2.2 Conjonction

1.1.2.3 Disjonction

1.1.2.4 Implication

1.1.2.5 Équivalence

1.1.2.6 Opérateurs binaires (en général)

1.1.3 Conséquences du calcul propositionnel

Théorème. *(Reformulation du principe de non-contradiction)*

Non P ou P.

1.2 Prédicats

1.2.1 Définition

1.2.2 Principe de la preuve

1.3 Théorèmes de la logique classique

1.3.1 Lois usuelles

1.3.2 Principes démonstratifs

Chapitre 2

Les raisonnements mathématiques

Résumé

On classifie les façons de démontrer les plus classiques en mathématiques, et qui sont les seules qui serviront chez nous.

2.1 Méthodes générales de démonstration

2.1.1 Méthodes de démonstration directes

2.1.2 Méthodes de démonstration indirectes

2.1.2.1 Contraposée versus absurde

2.1.3 Autres méthodes générales de démonstration

2.2 Pratique de la démonstration

2.2.1 Principes de démonstration

2.2.2 Paradigmes de preuve

2.2.2.1 Paradigmes analytiques

2.3 Quelques pièges dans les démonstrations mathématiques

Chapitre 3

Théorie naïve des ensembles

Résumé

On présente une théorie des ensembles munie de l'axiomative naïve de la fin du XIXᵉ siècle. Cet absence d'axiomatique n'empêche pas l'arithmétique cardinale et ordinale toutefois. Toute considération touchant aux modèles de théorie est hors de propos.

3.1 La démarche axiomatique en philosophie des sciences

NOUS avons déjà rencontré l'exemple trébuchant de la logique naïve. Essayons de généraliser ce processus.

3.2 Axiomes de la théorie des ensembles

3.2.1 L'axiome de choix

3.2.1.1 Théorème de Zorn

Définition. ***(Maximal)***

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Un élément a de E est dit *maximal* si pour tout $x \in E$, $a \leqslant x \implies a = x$. On définit de même la notion d'*élément minimal.*

Définition. ***(Chaîne)***

Une *chaîne* d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est une partie A de cet ensemble E sur laquelle la restriction $\leqslant_{|A\times A}$ de l'ordre est totale.

Définition. ***(Ensemble inductif)***

Un ensemble inductif E est un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée (par un élément a priori dans E).

Théorème. *(Lemme de Zorn)*

Tout ensemble inductif a un élément maximal.

Preuve.

$\triangleright$ Nous donnons une preuve plutôt laborieuse de ce résultat, dite « par au-dessus » (*top-down* en anglais). Celle-ci est beaucoup moins judicieuse qu'une preuve « par en dessous » (*bottom-up* en anglais), qui est l'autre preuve classique du lemme de Zorn, mais a l'avantage de ne pas recourir à la théorie des ordinaux.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné inductif. Remarquons que l'ensemble vide n'est pas inductif. Soit σ une fonction de choix sur la famille de toutes les parties non vides de E. Pour $X \subseteq E$ et $a \in E$, on note $X \preccurlyeq a$ pour $\forall x \in X \quad x \leqslant a$ et de même pour une inégalité stricte. Pour toute chaîne C, on définit $C^+ = C \cup \{\sigma(\{a \mid C \prec a\})\}$ si $\{a \mid C \prec a\}$ est non vide, et $C^+ = C$ sinon.

Soit C une chaîne quelconque de E (il en existe toujours une, par exemple la partie vide). Parce que E est inductif, il existe a vérifiant $C \preccurlyeq a$ par définition. Si a est maximal dans E, il n'y a rien à faire. Sinon, par définition, il existe un certain b dans E vérifiant $a < b$, et donc par transitivité $C \prec b$. Par conséquent, si C est une chaîne telle que $\{a \mid C \prec a\}$ soit vide, c'est-à-dire vérifiant $C^+ = C$, alors il existe une élément maximal dans E. Nous allons construire une telle chaîne.

On appelle *close* toute famille K de chaînes de E telle que $C \in K$ entraîne $C^+ \in K$, et que, si J est une partie de K formées de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion, alors leur réunion appartienne encore à K. La famille de toutes les chaînes de A est évidemment close, et l'on vérifie que toute intersection de familles closes est close. Il existe donc une plus petite famille close K (l'intersection de toutes les familles closes, qui ne pose pas de problème de définition puisque l'ensemble des familles closes est non vide). Posons enfin $K' = \{C \in K \mid \forall D \in K \quad C \subseteq D \text{ OU } D \subseteq C\}$. On va montrer que $K' = K$, c'est-à-dire que K est composée de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Supposons cela démontré. On pose C la réunion des éléments de K. Par définition, on a $C \in K$ et donc $C^+ \in K$. Or, par construction, on a $D \subseteq \bigcup K = C$ pour toute chaîne D dans K. En particulier, on a donc $C^+ \subseteq C$, d'où $C^+ = C$, comme souhaité.

Revenons sur notre postulat. Puisque K est la plus petite famille close, et que l'on a $K' \subseteq K$, il suffit, pour montrer $K' = K$, de montrer que K' est close. Soit $C \in K'$. Posons $K_C = \{D \in K \mid D \subseteq C \text{ OU } C^+ \subseteq K'\}$. Supposons que $D \in K_C$. Si $C^+ \subseteq D$, on a *a fortiori* $C^+ \subseteq D^+$. Pour $C = D$, on a trivialement $C^+ = D^+$. Supposons alors $D \subsetneq C$. Par hypothèse, D^+ est dans K, et C est dans K', donc on a $D^+ \subseteq C$ ou $C \subsetneq D^+$. Le second cas est incompatible avec $D \subsetneq C$ puisque D^+ privé de D est un singleton. Dans tous les cas, $D \in K_C$ entraîne donc $D^+ \in K_C$. Supposons maintenant que J soit un sous-ensemble de K_C formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Ou bien on a $D \subseteq C$ pour tout D dans J, et l'on a alors $\bigcup J \subseteq C$, ou bien il existe D dans J vérifiant $C^+ \subseteq D$, et l'on a alors $C^+ \subseteq \bigcup J$: dans les deux cas, $\bigcup J$ est dans K_C. Ainsi, K_C est une famille close, donc $K_C = K$, ce qui montre que C^+ est dans K' dès que C s'y trouve.

Finalement, supposons que J est un sous-ensemble de K' formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Soit D une chaîne quelconque dans K. Ou bien on a $C \subseteq D$ pour toute chaîne C dans J, dont on déduit que $\bigcup J \subseteq D$, ou bien il existe C dans J vérifiant $D \subseteq C$, dont on déduit que $D \subseteq \bigcup J$. Donc, dans tous les cas, $\bigcup J \in K'$. Il en résulte que K' est close, et on a donc $K' = K$. ■

3.2.2 L'axiome de fondation

Un petit développement sur l'axiome de fondation, axiome supplémentaire de la théorie des ensembles classiques (au même titre que l'axiome du choix) et qui n'est pas du tout utile. C'est pourquoi les discussions à propos de son adoption ne sont pas véhémentes, et l'on peut considérer des théories tout à fait semblables en termes des mathématiques que nous connaissons munies soit d'un axiome de fondation, soit d'un axiome d'anti-fondation. Le principe général de l'axiome de fondation est d'interdire la construction d'ensembles qui s'appartiennent eux-mêmes.

3.2.2.1 Retour sur la relation d'appartenance

En théorie naïve des ensembles, on pose qu'il existe des objets, appelés *ensembles*, liés par une relation dite d'appartenance, et notée $\in$, et dont les règles de construction sont regroupées en une liste d'axiomes. Tout ce que nous appelons *élément* est ensemble, et réciproquement tout ensemble peut-être vu comme un élément[1]. Ce que sont les ensembles n'est pas précisé. Plus généralement, on regroupe le concept intuitif de collection d'objets sous le terme de *classe*, de sorte que tout ensemble soit une classe, mais ce n'est pas réciproque : par exemple, la classe regroupant tous les ensembles n'est pas un ensemble (paradoxe de Russell) ; elle est dite impropre.

La liste des axiomes choisis constitue les fondements de la théorie ; si quelques axiomes semblent essentiels à la construction d'une théorie des ensembles pertinente, pour d'autres, la communauté n'est pas décidée, tant qu'ils sont indépendants (aucun axiome n'est conséquence logique des autres), c'est en particulier le cas pour l'axiome du choix. Ceci mène à l'élaboration de différents *modèles* d'une théorie, à laquelle nous associons les noms de leur créateur, avec plus ou moins de précision : Z pour Zermelo, ZF pour Zermelo et Fraenkel, ZFC pour ce système d'axiomes additionné de l'axiome du choix.

Ainsi les axiomes, qui sont admis obtusément, ont pour but primaire de régir les règles de construction d'ensembles et relatives à la relation d'appartenance notée $\in$, en hommage au ϵ grec, pour le verbe « est » en latin. Le but de cette section est de donner de la relation d'appartenance quelques propriétés importances, avec pour conséquence notable la construction véritable des entiers naturels.

3.2.2.1.1 Notion intuitive d'appartenance

Axiome. ***(Relation d'appartenance)***

Sur la classe des ensembles, il existe une relation notée $\in$, c'est-à-dire une partie (impropre) de $\mathrm{Ens} \times \mathrm{Ens}$.

[1] En effet, si E : Ens, *i.e.* « E est un ensemble », alors d'après l'axiome de la paire, $E \in F$ en posant $F = \{E\}$.

Exemples

1. $1,2,3 \in \mathbb{N}$;
2. $-1 \notin \mathbb{N}$;
3. $-1,1 \in \mathbb{Z}$;
4. $(-1,1) \notin \mathbb{N}$;
5. $(-1,1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
6. $(-1,1) \in \{-1\} \times \{1\}, \{-1,1\}^2$;
7. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
8. $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}^2$;
9. $\mathbb{N} \notin \mathbb{R}$;
10. $\emptyset \in \{\emptyset\}$;
11. $\emptyset \notin \emptyset$;
12. $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\}$;
13. $\{1,2,3\} \notin \{1,2,3,4\}$;
14. $\{1,2,3\} \in \{\{1,2,3\}, 1,2,3,4\}$;
15. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{-1\}$;
16. $\{\emptyset\} \notin \emptyset$.

Quelques propriétés très intuitives.

Propriété. ***(Non-transitivité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance n'est pas transitive (mais pas intransitive).

$\triangleright$ Il suffit de prendre pour exemples : $1 \in \{1,2\} \in \{\{1,2\}, 2\}$, mais $1 \notin \{\{1,2\}, 2\}$. La construction et structure des ensembles entiers naturels sera justifiée plus tard. ■

Propriété. ***(Non-totalité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance est partielle.

$\triangleright$ On a $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ et $\{\{\emptyset\}\} \notin \emptyset$ (le vérifier soi-même). ■

Remarques.

1. Par essence de la théorie des ensembles, tout objet est ensemble. Un problème émerge : il n'y a pas de distinction absolue entre les ensembles et leurs éléments. On comprend que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,..., $\mathbb{R}$, soient des ensembles, mais on conçoit mal que $1,2, \pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t, \int_1^{+\infty} e^t\mathrm{d}t$ le soient également. C'est pourtant le cas.
2. L'axiome de fondation, noté AF dans la suite, répond aux questions suivantes : $\in$ est-elle réflexive ? et $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique ? On propose au lecteur de se poser la question lui-même avant de trouver la réponse dans la suite.

Exercice 1

Expliciter les ensembles $1,2,\pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \displaystyle\int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t$.

3.2.2.1.2 Axiomes déjà connus quant à $\in$

Axiome. ***(Principe d'extensionnalité)***

Pour tous A,B : Ens, $(A = B) \iff (\forall x \quad (x \in A \iff x \in B))$.

Remarques.

1. C'est le premier axiome.
2. C'est en fait une définition, celle de « $=$ ». Cette relation d'égalité est définie entre les ensembles, et l'on peut garder en mémoire que toutes les relations d'égalités utilisées quotidiennement sont des *restrictions* de cette relation définie sur une classe impropre.
3. Le syntagme « $\forall x$ » seul apparaissant dans la formulation de l'axiome n'est pas un abus, mais la notation la plus correcte pour : « pour tout ensemble x... ». Quand on note, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathfrak{Re}(x) = x$, on raccourcit la plus correcte : $(\forall x, x \in \mathbb{R} \implies \mathfrak{Re}(x) = x)$.

Un petit rappel qui ne fait pas de mal.

Définition. ***(Inclusion)***

Pour tous A,B : Ens, on dit que $A \subseteq B$ si $\forall x \quad x \in A \implies x \in B$.

Remarque. L'idée fondamentale de l'inclusion est son rapport avec l'appartenance : l'appartenance $\in$ est un notion locale, alors que l'inclusion $\subseteq$ est une notion globale.

On donne quelques applications du principe d'extensionnalité, sachant qu'un peu de raisonnement axiomatique n'est pas luxueux. Dans le théorème suivant, l'existence d'un ensemble des parties en conséquence de l'axiome d'existence d'ensemble des parties. Nous ne donnons pas tous les axiomes, au risque de faire inventaire. Le lecteur intéressé peut les trouver à l'adresse : http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/AnnexeA.pdf.

Théorème. ***(Identité d'ensembles par les ensembles des parties)***

Pour tous A,B : Ens, $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

$\triangleright$ Si $A = B$, $\forall x \quad x \in A \iff x \in B$. Or $\forall X \quad X \subseteq A \iff \forall x \in X \quad x \in A$, donc on vérifie : $\forall X \quad X \subseteq A \iff X \subseteq B$, soit par définition $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$: c'est l'extensionnalité, car $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Réciproquement, si $A \neq B$, il existe $x \in B, x \notin A$ (ou $x \in A, x \notin B$, cas qui se traite de la même manière). Dans le premier cas, $\{x\} \subseteq B$ mais $\{x\} \not\subseteq A$, car sinon $x \in A$. Ainsi $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ mais $\{x\} \notin \mathcal{P}(A)$, donc par extensionnalité $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$. Par contraposée, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$, d'où l'équivalence. ■

Remarque. Une chose remarquable du théorème, et que l'égalité des ensembles des parties n'est qu'une égalité d'ensembles, et pas une correspondance deux à deux des parties.

Théorème. ***(Singletons associés)***

$\forall A,B \quad A = B \iff \{A\} = \{B\}$.

▷ D'une part, on suppose $A = B$. Soit $x \in \{A\}$. Alors puisque c'est un singleton, $x = A$. Or $A = B$, donc $x = B$, et $B \in \{B\}$ donc $x \in \{B\}$. Ainsi $\{A\} \subseteq \{B\}$. Semblablement, $\{B\} \subseteq \{A\}$, donc par double inclusion $\{A\} = \{B\}$.

Réciproquement, supposons $\{A\} = \{B\}$. $A \in \{A\}$ et $\{A\} = \{B\} \iff (\forall x \in \{A\} \quad x \in \{B\}$ ET $\forall x \in \{B\} \quad x \in \{A\})$. Le premier point de la conjonction, avec la première remarque faite donne $A \in \{B\}$, soit $A = B$, car $\{B\}$ est un singleton. ■

Remarques.

1. De même que pour le théorème précédement, l'existence du singleton contenant A est axiomatique. (Elle vient de l'axiome... de la paire. Il n'y pas d'axiome du singleton : pour l'en déduire, il suffit de prendre, dans la paire, les deux éléments identiques, et l'on se rend compte qu'un axiome de singleton serait superflu, car il est déjà constructible à partir de l'axiome de la paire.)
2. La contraposée du théorème donne : $A \neq B \iff \{A\} \neq \{B\}$.

Propriété. ***(Partition triviale par événements atomiques, partition discrète)***

Soit Ω un ensemble. Alors $(\{x\})_{x\in\Omega}$ partitionne Ω.

▷ Il suffit de reprendre point par point la définition de partition.

- ⋆ **Habitations.** Soit $x \in \Omega$, c'est-à-dire $\{x\}$ dans la partition. $\mathrm{card}(\{x\}) = 1 \neq 0$, donc les parties de la partition ne sont pas vides.
- ⋆ **Disjonction deux à deux.** C'est la contraposée du théorème des singletons associés.
- ⋆ **Réunion.** $\bigcup_{x\in\Omega} x = \Omega$. En effet : $X \in \bigcup_{x\in\Omega} x \iff \exists x \in \Omega \quad x = X$, soit $\bigcup_{x\in\Omega} x \iff x \in \Omega$. Ainsi, on a l'égalité par extensionnalité,

ce qui termine la preuve. ■

Remarque. On aurait pu le démontrer beaucoup plus rapidement : l'égalité sur E est une relation d'équivalence, dont les classes sont les $(\{x\})_{x\in\Omega}$ et d'après le théorème fondamental des relations d'équivalence, c'est une partition de Ω.

3.2.2.1.3 Clarification de l'ambivalence entre ensemble et élément

On a vu que tout élément est en fait un ensemble complétement, et que la distinction entre les deux n'est réellement qu'un agrément de langage. Dans l'assertion :

$$E \in F,$$

E,F sont des ensembles, mais on dit plutôt que E est un élément, à savoir un élément de F. D'autre part, tout ensemble peut être vu comme un élément, on l'a déjà remarqué, car $\forall x \quad x \in \{x\}$, ce qui justifie de confondre le concept d'élément avec celui d'ensembles. Nous voulons, dans ce qui suit, corriger les imprécisions mentales issues de l'ambivalence entre les deux termes.

Propriété. ***(Inclusions générales)***

(i) Tout ensemble inclut un ensemble ;
(ii) tout ensemble est inclus dans un ensemble ;
(iii) si $\mathrm{card}(E) \geqslant 1$, un ensemble E inclut un autre ensemble ;
(iv) dans le cas général, tout ensemble est inclus dans un autre ensemble.

▷ Successivement :

1. $E \subseteq E$;
2. $E \subseteq E$;
3. $\emptyset \subseteq E$, et $E \neq \emptyset$, car, par hypothèse, il est de cardinal non nul, et l'ensemble vide existe d'après un axiome ;
4. Soit F un ensemble, $F \notin E$. Il existe d'après le paradoxe de Cantor. Alors $E \subseteq E \cup \{F\} = G$, mais $G \neq E$, car $F \in G$ mais $F \notin E$. ■

En général, un élément d'un ensemble n'en est pas une partie. Par exemple $\{1\} \in \{\{1\}\}$, mais $1 \notin \{\{1\}\}$ donc $\{1\} \nsubseteq \{\{1\}\}$. Ceci n'est pas universel, c'est même faux dès que $E \ni \emptyset$ (pourquoi ?). Réciproquement, une partie d'un ensemble, en général, ne lui appartient pas : $\{1,2\} \notin \mathbb{N}$ alors que $\{1,2\} \subseteq \mathbb{N}$.

Propriété. ***(Remarques supplémentaires)***

(i) Un ensemble n'est pas nécessairement disjoint de l'ensemble de ses parties ;
(ii) on peut avoir $E \subseteq F$ et $E \in F$ même si $E \neq \emptyset$;
(iii) pour tout E, il existe F tel que $E \subseteq F$ et $E \in F$.

▷ (i) et (ii) ont déjà été traités ci-dessus. Pour (iii), il suffit de choisir $F = E \cup \{E\}$. ■

Remarquons que $E \cup \{E\} \neq E$: cette propriété universelle découle de l'axiome de fondation ; avant de l'introduire, on rend compte des implications d'une trop grande liberté dans les constructions relatives relation d'appartenance.

3.2.2.2 Bizarreries de la relation d'appartenance

Formalisons les conséquences des propriétés juste précédentes, pour en montrer les limites. Le premier objet bizarre engendré par de telles constructions est celui d'*ensemble transitif*.

3.2.2.2.1 Ensembles transitifs

On a vu que $\in$ n'était pas a priori transitive, mais également, qu'elle n'était pas pour autant intransitive. Les ensembles transitifs sont tels que la transitivité est toujours vraie, lorsqu'on ne regarde qu'eux, un par un.

Définition. ***(Ensemble transitif)***

Un ensemble est dit *transitif* si les éléments de ses éléments en sont tous des éléments, autrement dit, A est transitif ssi $\forall x \in A \ \forall a \in X \quad x \in A$.

Exemples

1. $\emptyset$ est transitif. En effet, $\forall x \in \emptyset \ \forall a \in x \quad x \in \emptyset$, car toute propriété commençant par $\forall x \in \emptyset$ est vraie par principe d'explosion ;
2. $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ est transitif (le vérifier) ; ainsi l'ensemble vide n'est pas le seul transitif.

La notion d'ensemble transitif n'est pas du tout intuitive : elle montre les pathologies de la relation d'appartenance. AF n'interdit pas les ensembles transitifs, mais il les limite[1], en pratique, à ceux que nous voyons maintenant, c'est-à-dire, l'ensemble vide et ses composés selon le théorème suivant.

L'ensemble des parties d'un ensemble A est noté indifféremment $\mathcal{P}(A)$ ou $\mathfrak{b}(A)$.

Propriété. ***(Caractérisation de la transitivité par l'ensemble des parties)***

Un ensemble A est transitif ssi $A \subseteq \mathfrak{b}(A)$.

▷ C'est une simple reformulation de la définition. Le lecteur un peu perdu aura intérêt à rédiger l'équivalence. ■

Théorème. ***(Construction des ensembles transitif)***

Soit A un ensemble transitif. Alors :
- $A \cup \{A\}$ est transitif ;
- $\mathcal{P}(A)$ est transitif.

▷ Successivement :

[1] En effet, si $E \in E$, alors E est automatiquement transitif.

1. On fait une disjonction des cas : si $x \in A \cup \{A\}$, soit $x \in A$, dans ce cas, on applique la transitivité de A, donc pour tout $a \in x$, $x \in A$ donc $x \in A \cup \{A\}$. Si d'autre part $x \in \{A\}$, alors $x = A$, donc si $a \in x = A$, $a \in A$ donc $a \in A \cup \{A\}$ de même.
2. Si $x \in a \in \mathcal{P}(A)$, $x \in a \subseteq A$, soit $x \in A$ par définition de l'inclusion, donc par définition $x \subseteq A$, soit $x \in \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(A)$ est transitif. ■

On espère avoir assez brouillé les esprits croyant l'apparente commodité de la relation d'appartenance. Avant de passer à l'énoncé de AF, on rappelle le paradoxe suivant, beaucoup utile.

3.2.2.2.2 Paradoxe de Russell

Soit la collection des objets : $\{X \mid X \notin X\} = \mathcal{C}$.

Paradoxe. ***(Paradoxe de Russell)***

La construction de $\mathcal{C}$ est paradoxale.

▷ Par principe logique de tiers-exclu, on a, soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Supposons pour commencer $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Alors par définition de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}$ est un X tel que $X \in \mathcal{C}$. Inversement, supposons que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Par définition, $\mathcal{C}$ contient tous les X tels que $X \notin X$, et $\mathcal{C}$ vérifie ce prédicat logique, donc $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Ainsi, dans les deux cas logiques possibles, on a $(\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C})$, donc cette proposition est universellement vraie. Or elle est universellement fausse selon le principe de non-contradiction, donc la propriété « la propriété $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ est vraie » est la fois vraie et fausse, ce qui est contradictoire par non-contradiction. ■

Le constat du paradoxe de Russell a conduit à la création d'un des premiers axiomes de la théorie des ensembles, les schémas de séparation : on ne peut pas construire des ensembles à partir de rien, mais il y a une règle : si E existe, et $\mathcal{P}$ est un prédicat logiquement bien formé sur E, alors on peut considérer l'ensemble $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, d'où le nom de définition par séparation et compréhension. C'est la raison pour laquelle il faut écrire toujours : $\forall x \in \mathbb{R}$..., $\forall f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$... (Notons qu'il faut également postuler l'existence d'au moins un ensemble, ce que l'on fait avec l'axiome de l'ensemble vide.)

La faute commise dans le paradoxe de Russell est d'avoir postulé l'existence de l'ensemble $\mathcal{C}$: il n'est pas défini par séparation, donc a priori, il n'existe pas. En effet, l'on sait que $\mathcal{C}$, d'après l'axiome de fondation, est Ens la classe de tous les ensembles, et d'après le théorème de Cantor, ce n'est pas un ensemble, autrement dit une classe impropre.

3.2.2.3 L'axiome de fondation proprement dit

⟶ *Notation.* On notera $ZF_\bullet$ l'ensemble des axiomes de Zermelo-Fraenkel sans l'axiome de fondation, et $ZF = ZF_\bullet + AF$.

On rappelle les quelques interrogations initiales de cette section :

- $\in$ est-elle réflexive ?
- $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique, ou sous quelles conditions ?

c'est-à-dire, existe-t-il, et lesquels, des ensembles E,F tels que :

- $E \in E$?
- $E \in F$ et $F \in E$?

3.2.2.3.1 Énoncé et premières propriétés

Axiome. *(Axiome de fondation)*

Pour tout ensemble A, $A \neq \emptyset \implies \exists B \in A\ B \cap A = \emptyset$.

Remarques.

1. C'est chelou.
2. On verra que ceci exprime que la relation $\in$ est *bien fondée* sur la classe des ensembles, c'est-à-dire, qu'il existe toujours sur tout ensemble et l'ensemble des éléments qu'il contient, et l'ensemble des éléments qu'ils contiennent, etc., un élément minimal pour l'appartenance, et donc qu'il n'existe pas de suite infinie du type $E \ni F \ni G \ni$... Nous verrons même que, modulo un axiome du choix spécial, cette assertion est équivalente à AF.

Théorème. *(Irréflexivité de $\in$)*

Pour tout ensemble E, $E \notin E$.

▷ Si $E \in E$ pour un certain ensemble E, notons $A = \{E\}$. Dans ce cas, $A \neq \emptyset$, car A est un singleton donc de cardinal $1 \neq 0$. De plus, si $x \in A$, $x \in \{E\}$ soit $x = E$ et $x \cap A \neq \emptyset$, car $x \cap A = E \cap \{E\}$, et puisque $E \in \{E\}$ et $E \in E$ par hytpohèse, on aurait $E \in E \cap \{E\}$, ce qui contredirait AF. Par contraposition, $AF \implies \forall E,\ E \notin E$, c'est-à-dire $\nexists E,\ E \in E$. ■

Remarques.

1. Ce théorème d'irréflexivité se réécrit en : il n'existe pas d'ensemble E tel que $E = \{E\}$.
2. On en déduit immédiatement ce que l'on a évoqué tout à l'heure : pour tout ensemble E, $E \cup \{E\} \neq E$. En effet, cela voudrait dire que, comme $E \in E \cup \{E\}$, $E \in E$.
3. On constate que l'irréflexivité est encore vérifiée pour l'ensemble vide. En effet, $\emptyset$ ne peut contenir aucun élément, y compris $\emptyset$.

On arrive désormais aux équivalences centrales de cette partie, qui donnent tout son sens à la formulation initiale un peu obscure de l'axiome de fondation. Avant cela, on rappelle l'énoncé de l'axiome du choix dépendant qui servira ensuite pour établir une formulation équivalente de AF.

Axiome. ***(Axiome du choix dépendant)***

Pour tout $X \neq \emptyset$, pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur X, si le domaine de définition de $\mathcal{R}$ est bien X (autrement dit si tout élément $x \in X$ est bien tel qu'il existe un $y \in X$ tel que $(x,y) \in \mathcal{R}$), alors il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $x_n \mathcal{R} x_{n+1}$. On note cet axiome DC.

Propriété. ***(Formulations diverses de l'axiome de fondation)***

On considère les propriétés suivantes :

AF l'axiome de fondation ;

(I) l'irréflexivité de la relation d'appartenance ;

(II) « Il n'existe pas $x_1,...,x_n$ n ensembles, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 = x_n$ et $x_1 \in ... \in x_n$ » ;

(III) « $\in$ est bien fondée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles décroissante pour $\in$ ».

Alors on a les implications relatives comme représentées sur la figure **??**. En particulier, elles sont toutes vraies dans un système ayant pour axiome AF. Les autres sont de simples conséquences logiques les unes des autres, mais $(III) \iff AF$ en présence de l'axiome du choix dépendant.

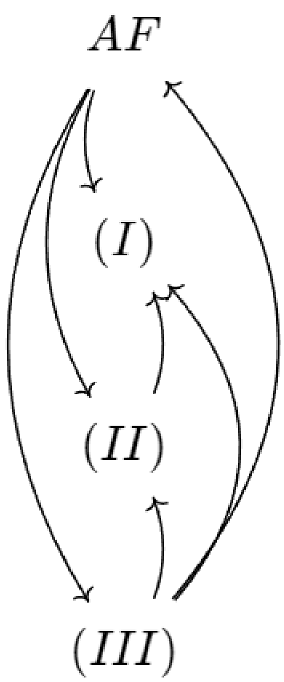


FIGURE 3.2.1 : *Formulations faibles de l'axiome de fondation.* — Illustration des implications réciproques.

▷ Montrons chacune des flèches précédentes, qui représentent des implications.

▶ $AF \implies (I)$. On l'a déjà montré, c'est l'objet de la propriété précédente.

- $AF \implies (II)$. De même, par contraposée. Supposons $x_1 \in ... \in x_n = x_1$. On pose $E = \{x_1,...,x_n\}$, qui n'est pas vide puisque $n \neq 0$. On construit ainsi un contre-exemple de l'axiome de fondation. En effet, soit $x \in E$. $x = x_i$ où $i \in [\![1,n]\!]$, car $x_1 = x_n$. $x \cap E = x_i \cap \{x_1,...,x_{n-1}\}$. Dans le premier cas, $i \neq 1$. On a $x_{i-1} \in x_i$ par hypothèse et $x_{i_1} \in \{x_1,...,x_{n-1}\}$, donc $x_{i-1} \in x \cap E$ qui est donc non vide. Dans le deuxième cas, $i = 1$. Alors $x_{n-1} \in x_i = x_n$ et $x_{n-1} \in \{x_1,...,x_{n-1}\}$ donc $x_{n-1} \in x \cap E$ qui n'est pas vide encore une fois. Ainsi $\neg AF$.
- $AF \implies (III)$. Remarquons en passant que c'est faux pour une suite qui serait croissante, il suffit de prendre $x_0 = \emptyset$ et $x_{i+1} = \{x_i\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit donc une suite infinie décroissante $x_0 \ni ... \ni x_n \ni ...$; l'axiome de la réunion permet de former $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} = \mathrm{Im}(x)$: l'existence de la suite (x_n) est hypothétique donc certaine. $E \neq \emptyset$, car $E \ni x_{47}$. Soit $x \in E$. $x \cap E = x_i \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$, $i \in \mathbb{N}$ fixé choisi. On a à la fois $x_{i+1} \in x_i$ par hypothèse de chaîne et $x_{i+1} \in \{x_0,...,x_n,...\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$ donc $x_{i+1} \in x \cap E$ qui est non vide. Ainsi, on nie l'axiome de fondation et l'on conclut par contraposition.
- $(III) \implies (I)$. On raisonne encore par contraposée : si $A \in A$, alors la suite constante $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ convient pour nier (III).
- $(III) \implies (II)$. On raisonne par contraposée, en concaténant : $x_n \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ....$ Plus précisément, on définit comme contre-exemple de (III) la suite infinie décroissante : $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x_n$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_i = x_{n-k-1}$ où k est le reste dans la division euclidienne de i par n.
- $(II) \implies (I)$. Il suffit de prendre $n = 1 \in \mathbb{N}^*$.
- $(III),DC \implies AF$. Toujours par contraposition. Le principe de démonstration est le suivant : nions AF. On suppose qu'il existe $A_0 \neq \emptyset$ tel que $\forall B \in A_0, B \cap A_0 \neq \emptyset$ (c'est exactement $negAF$). A_0 étant non vide, prenons $B_0 \in A_0$. $B_0 \cap A_0$ d'après ce qui précède, donc on peut prendre $A_1 \in B_0 \cap A_0$. Mais en particulier $A_1 \in A_0$, donc $A_1 \cap A_0 \neq \emptyset$ par hypothèse. Alors on peut prendre $A_2 \in A_1 \cap A_0$. Mais $A_2 \in A_0$, donc $A_2 \cap A_0 \neq \emptyset$ toujours par hypothèse, et l'on prend $A_3 \in A_2 \cap A_0$, etc. Cette intuition que l'on va pouvoir creuser à l'infini dans les éléments de B, d'où le terme de fondation, se formalise exactement avec DC. On prend, dans la définition de DC, $X = A_0 \neq \emptyset$ et pour relation $\ni$ la relation symétrique de $\in$. $\ni$ est bien définie partout sur X, en effet c'est l'hypothèse : $\forall B \in A_0 \quad B \cap A_0 \neq \emptyset$, c'est-à-dire, $\forall B \in A_0 \quad \exists x \in A_0\ x \in B$ soit $B \ni x$. Ainsi, DC s'applique et il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N} \quad x_i \ni x_{i+1}$, soit $\neg(III)$,

et tout est démontré. ■

Enfin, on règle le compte de la symétrie de la relation d'appartenance. On voit qu'elle n'est pas symétrique, et même asymétrique. De plus, elle n'est asymétrique que si l'un des deux ensembles est vide afin d'appliquer le principe d'explosion.

Corollaire. ***(Asymétrie de la relation d'appartenance)***

Il n'existe pas d'ensembles E, F tels que $E \in F$ et $F \in E$.

▷ C'est une conséquence de (II) pour $n = 2$. ■

Remarque. Une autre façon de le dire, est qu'aucun ensemble n'est élément d'un de ses éléments.

Motivation. Il est naturel de se demander si l'on peut clore le diagramme ci-dessous, de sorte que les quatre propositions soient en fait équivalentes : (II), et a fortiori (I), impliquent-ils AF ? La question n'a peut-être pas de réponse, car trouver un exemple de théorie (on dit : un *modèle*) dans laquelle les axiomes de ZF sont vérifiés est en fait impossible, c'est le théorème d'incomplétude de Gödel, et il serait problématique de montrer alors que AF et (I) ne sont pas équivalentes, d'où la difficulté de traiter $\neg AF \implies \neg(I)$.

3.2.2.3.2 Conséquences pour la construction d'objets mathématiques

Exercice 2

Montrer que $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$.

Exercice 3

Montrer que, pour tout ensemble x, $\{\{x\}\} \neq x$.

Exercice 4

Montrer que, pour tout ensemble x, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{p \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p \text{ fois}} \neq x$.

Exercice 5

Montrer que, pour tout ensemble x, pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{n \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{n \text{ fois}} \neq \underbrace{\{\{...\{}_{p \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p \text{ fois}}$ ssi $n \neq p$.

On va, sommairement, construire de façon ensembliste quelques-uns des objets mathématiques les plus utilisés, notamment les entiers naturels de l'ensemble $\mathbb{N}$. L'axiome de fondation permet, non de créer les entiers naturels (c'est l'axiome de l'infini qui le permet), mais de montrer que les constructions obtenues sont deux à deux distinctes, autrement, de justifier que $1 \neq 2$. Il est important de comprendre que la « représentation » ci-dessous est bel et bien une construction, c'est-à-dire une façon tout au moins de justifier l'existence de tels objets, même si, l'on en convient, ce qu'ils sont n'a pratiquement aucun intérêt à côté de leurs propriétés ; elles sont l'objet de l'arithmétique.

Définition. ***(Représentation des entiers naturels de Von Neumann)***

Nous posons : $0 = \emptyset$, puis : $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, puis $2 = \{0{,}1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc., c'est-à-dire, à l'infini (ce qui est justifié par l'axiome de l'infini) $n+1 = n \cup \{n\}$. L'existence de $\emptyset$ est garantie par l'axiome de l'ensemble vide.

John Von Neumann

D'origine hongroise, fils d'un banquier réputé, János Lajos Neumann, dit Von Neumann commence à étudier à Budapest. Enfant surdoué, il lit et mémorise tout ce qui lui tombe sous la main, parle grec et latin à l'âge de six ans. Calculateur prodige, il stupéfie ses instituteurs et les amis de la famille, dont Lipót Fejér qui dirigera sa thèse, par sa mémoire prodigieuse et ses capacités en calcul mental.

Malgré une situation politique instable en Hongrie, Neumann entreprend des études supérieures de mathématiques à Budapest en 1919 qu'il complète par trois années d'études de chimie à Berlin et Zurich. Il rencontrera ainsi Erhard Schmidt, Herman Weyl et Polya. Il s'intéresse en fait plus aux ensembles et aux nombres transfinis de Cantor qu'à la chimie... C'est à Budapest qu'il soutiendra finalement sa thèse dirigée par Fejér portant sur les ensembles transfinis, fin 1926.

Professeur à Göttingen puis à l'université de Berlin, la réputation de Neumann s'instaure outre-Atlantique : il se rend aux États-Unis à Princeton à l'invitation de Veblen en 1930 à l'occasion de la mise en place du tout nouveau Institute for Advanced Study.

Juif, afin d'échapper à la répression du pouvoir hitlérien soutenu par le régime hongrois, von Neumann s'installe définitivement aux États-Unis en 1933 et fit toute sa carrière au célèbre institut. Il meurt prématurément, en 1954, à 54 ans, d'un cancer des os sans doute causé par ses nombreuses expositions aux radiations lors des expérimentations pour la mise au point de la première bombe atomique.

L'ensemble formé par cette infinité d'ensembles est noté $\mathbb{N}$; on peut lui définir une addition, une multiplication, et vérifier qu'elles vérifient toutes les propriétés habituelles qui lui sont associés ; également un ordre qui permet d'énoncer la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: toute partie non vide a un minimum. C'est peu intéressant et sans révolution conceptuelle non plus ; le lecteur intéressé trouvera une construction plutôt complète dans *Épistémologie mathématique* de Henri Lombardi. De plus, on vérifie qu'il vérifie les cinq propriétés axiomatiques de l'arithmétique de Peano, que nous énonçons à titre informatif ci-dessous :

Définition. ***(Arithmétique de Peano)***

On appelle *entiers naturels de Peano*, un ensemble $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes, dits *axiomes de Peano* :

(i) il contient au moins un élément, notons le 0 ;

(ii) il existe une fonction σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée *successeur* ;

(iii) aucun entier naturel n'est suivi par 0 ($0 \notin \mathrm{Im}(\sigma)$) ;

(iv) deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux (σ est injective) ;

(v) un principe de récurrence : si un ensemble contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Habituellement, la fonction successeur est donnée par $\sigma(n) = n + 1$.

Concluons par l'intérêt principal de cette partie.

Théorème. ***(Distinction deux à deux des entiers naturels)***

En présence de l'axiome de fondation, les entiers naturels de Von Neumann sont deux à deux distincts.

$\triangleright$ On l'a déjà vu : n ne peut appartenir à n, pour tout n, donc $n + 1 \neq n = n \cup \{n\}$. Ceci montre que deux entiers successifs sont distincts. Pour montrer que les entiers naturels sont deux à deux distincts, il s'agit simplement le principe du quatrième exercice présenté ci-dessus, qui en découle. ■

Nous espérons que, par ces considérations, le lecteur sera convaincu que la totalité des objets mathématiques qu'il manipule est une construction ensembliste : un ordre, par exemple, est une relation sur, disons, $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une partie du produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: la notation $n \leqslant p$ traduit simplement $(n,p) \in \leqslant$. Une fonction f est un triplet $f = (E,F,\Gamma)$, où E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée et Γ une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété fondamentale des fonctions : tout élément a au plus une image. Les nombres réels sont identifiés, par exemple, aux coupures de Dedekind : ce sont alors des couples (A,B) tels que $A,B \subseteq \mathbb{Q}$, $AcupB = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall a \in A\ \forall b \in B \quad a < b$. Et ainsi de suite.

3.2.2.3.3 Considérations logiques

On peut montrer que si $ZF_\bullet$ est consistant, *i. e.* s'il n'y a pas d'incohérence dans ses axiomes et qu'un modèle est envisageable, alors il ne prouve ni AF, ni sa négation : on dit que AF est indépendant des axiomes de $ZF_\bullet$. Cela s'exprime :

$$ZF_\bullet \text{ consistant } \implies ZF \text{ consistant } .$$

Méthode. *(Étudier un ensemble)*

- S'il est partie ou sur-ensemble d'un autre ensemble ?
- Sous-parties remarquables
- Déterminer son cardinal
- Dénombrer certaines parties spéciales (c'est-à-dire déterminer leur cardinal)
- Est-il ensemble des parties d'un certain ensemble ? Se réalise-t-il naturellement comme tel ou partie ?

3.3 Opérations sur les ensembles

3.3.1 Limites d'ensembles

3.3.2 Limites de chaînes d'ensembles

Définition. *(Convergence d'une suite d'ensembles)*

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles. On dit que $(A_n)_n$ *converge*, si $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ la *limite* de la suite (A_n).

3.3.3 Limites inductives et projectives d'ensembles

Définition. *(Ensemble ordonné filtrant)*

Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné, a priori partiellement. On dit que $(I, \leqslant)$ est un *ensemble (ordonné) filtrant (à droite)* si pour tous $i,j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$. On dira que $(I, \leqslant)$ est un *ensemble filtrant à gauche* si l'ordre opposé est filtrant (mais, dans la pratique, on emploiera la même dénomination pour les deux).

Exemples. *(Ensembles filtrants)*

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est filtrant.
2. Les ensembles totalement ordonnés sont filtrants.
3. Un treillis est filtrant à gauche et à droite.
4. Typiquement, un ensemble de parties, une topologie, une tribu, etc., est filtrante.

Définition. *(Système inductif d'ensembles)*

Soient $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné filtrant. On appelle *système inductif* $(E_i, f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ *d'ensembles*, une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles et une famille doublement indexée d'applications $f_i^j : E_i \to E_j$ dits *morphismes de transitions* pour chaque couple d'indices $(i,j) \in I^2$, de sorte que $f_i^i = id_{E_i}$ pour tout $i \in I$, et pour tous $i,j,k \in I$ avec $i \leqslant j \leqslant k$, $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$.

Définition. ***(Limite inductive d'ensembles)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système inductif d'ensembles. La *limite inductive* de ce système est l'ensemble quotient de la réunion disjointe $\bigsqcup_{i\in I} E_i$ par la relation d'équivalence $(i,x) \sim (j,y) \iff \exists k \geqslant i,j \quad f_i^k(x) = f_j^k(y)$. On note E_∞ l'ensemble quotient. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on note $\varinjlim\limits_{n\to+\infty} E_n$ cet ensemble.

On peut plonger $\varphi_i : E_i \to E_\infty$ en prenant $\varphi_i(x) = \overline{(i,x)}$.

Propriété. ***(Propriété universelle de la limite inductive)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système inductif d'ensembles. La limite inductive X, munie des flèches $(\varphi_i)_i$, si elle existe, vérifie les relations de compatibilité $\varphi_i = \varphi_j \circ f_i^j$ pour tous $i \leqslant j$ et pour tout autre ensemble $(Y,\psi_i)_i$ vérifiant les relations analogues, il existe une unique flèche $u : X \to Y$ telle que tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_i^j"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

commute.

La limite inductive est donc unique à isomorphisme près.

Remarque. On pourra vérifier en temps et en heure que cette construction existe également dans la catégorie des groupes, des anneaux, des modules, des corps, des espaces topologiques, et d'autres encore, au sens où le résultat conserve la structure des objets du système inductif.

Exemples. ***(Limites inductives)***

1. Si I possède un maximum ω, en particulier si I est fini non vide, alors la limite de tout système inductif sur I égale E_ω.
2. Dans le cas d'une suite d'ensembles (E_n) croissante, avec pour morphismes de transition les injections canoniques, la limite inductive s'identifie à la limite ensembliste qui est donc la réunion des E_n.
3. Si p est un nombre premier, on peut considérer le système d'ensembles $\mathbb{U}_{p^n}$ avec les injections canoniques, dont la limite inductive est le *groupe de Prüfer*, constitué de toutes les racines de l'unité dont l'ordre est une puissance de p.
4. De même, soit p un nombre premier. Alors la limite inductive des corps $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ est le corps $\overline{\mathbb{F}_p}$.

5. Si E est un espace topologique et $a \in E$, le *germe en a des fonctions de E dans $\mathbb{R}$* est la limite inductive des ensembles $\mathcal{C}(U,\mathbb{R})$ sur le système des voisinages U de a ordonnés par l'inclusion, qui est filtrant à gauche.

Définition. ***(Système projectif d'ensembles)***

Soient $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné quelconque. On appelle *système projectif* $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ *d'ensembles*, une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles et une famille doublement indexée d'applications $f_i^j : E_i \to E_j$ dits *morphismes de transitions* pour chaque couple d'indices $(i,j) \in I^2$, de sorte que $f_i^i = id_{E_i}$ pour tout $i \in I$, et pour tous $i,j,k \in I$ avec $i \leqslant j \leqslant k$, $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

Définition. ***(Limite projective d'ensembles)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système projectif d'ensembles. La *limite projective* de ce système est l'ensemble $\left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \mid \forall i,j \in I \quad i \leqslant j \implies a_i = f_i^j(a_j)\right\}$. On note $\varprojlim E_i$ l'ensemble quotient. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on note $\overleftarrow{\lim\limits_{n\to+\infty}} E_n$ cet ensemble.
On peut projeter $\pi_i : \varprojlim E_i \to E_i$ en considérant les projections canoniques d'un produit d'ensembles restreinte à $\varprojlim E_i$.

Propriété. ***(Propriété universelle de la limite projective)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système projective d'ensembles. La limite inductive X, munie des flèches $(\pi_i)_i$, si elle existe, vérifie les relations de compatibilité $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ pour tous $i \leqslant j$ et pour tout autre ensemble $(Y,\psi_i)_i$ vérifiant les relations analogues, il existe une unique flèche $u : X \to Y$ telle que tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

commute.
La limite projective est donc unique à isomorphisme près.

Remarque. Même remarque que pour la limite inductive *(voir plus haut)*.

Exemples. ***(Limites projectives)***

1. Si l'ordre I est en fait l'égalité, en particulier si I n'est a priori pas ordonné, alors la limite de tout système projectif sur I égale son produit.
2. Dans le cas d'une suite d'ensembles (E_n) décroissante, avec pour morphismes de transition les surjections canoniques, la limite inductive est isomorphe à la limite ensembliste qui est donc l'intersection des E_n.

Fait. ***(Dualité inductif/projectif)***

La limite inductive est la limite projective de la catégorie duale.

3.4 Applications et fonctions

3.4.1 Injections, surjections, bijections

3.4.1.1 Propriétés additionnelles sur les injections et les surjections

Propriété. ***(Factorisation canonique des applications)***

Toute application $f : X \to Y$ entre deux ensembles se factorise de manière unique à bijection près sous la forme

$$f = i \circ p$$

où E est un ensemble, $p : X \to E$ est une surjection et $i : E \to Y$ est une injection.
De plus, f est injective si et seulement si $E = X$ et $p = id_X$ convient. De même, f est surjective si et seulement si $E = Y$ et $i = id_Y$ convient.
Enfin, en toute généralité, $f(x) = f(y) \iff p(x) = p(y)$ pour n'importe quels $x,y \in X$.

$\triangleright$ On pose simplement $E = \mathrm{Im}(f)$, p la corestriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ et i l'inclusion canonique de $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$. Remarquons, pour ceux qui connaissent, que l'on aurait aussi pu prendre $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la projection canonique où $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$, et $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \to Y$ l'application factorisée qui est alors injective par construction.

Soient $x,y \in X$ tels que $p(x) = p(y)$. Alors $f(x) = f(y)$, car $i(p(x)) = i(p(y))$, autrement dit $x \sim y$. Donc p se factorise en $p = b\pi$, où $b : X/\mathcal{R} \to E$ est surjective en tant que factorisée d'une surjective. De plus, b est injective. En effet, si l'on a $x' = \pi(x)$ et $y' = \pi(y)$ dans $X/\mathcal{R}$ tels que $b(x') = b(y')$, on a $b\pi(x) = b\pi(y) = p(x) = p(y)$ d'où $x \sim y$ soit $\pi(x) = \pi(y) = x' = y'$. Ainsi, si $f = ip = i'p'$ deux décompositions comme précédemment, $ib\pi = i'b'\pi$ où b,b' sont des bijections. De plus, π est surjective donc admet un inverse à droite, d'où $ib = i'b'$, puis $i = i'b'b^{-1}$. Ainsi i et i', respectivement p et p', ne diffèrent que par une bijection. La dernière remarque suit immédiatement. ■

Exercice 6

Montrer que application $f : X \to Y$ entre deux ensembles se factorise de manière unique à bijection près sous la forme
$$f = p \circ i$$
où E est un ensemble, $p : X \to E$ est une surjection et $i : E \to Y$ est une injection.

▷ **Éléments de réponse.**

On pose $E = (X \times \{0\}) \sqcup (Y \times \{1\})$, $i : x \mapsto (x{,}0)$ et $p : (a{,}n) \mapsto \begin{cases} f(a) \text{ si } n = 0 \\ a \text{ sinon.} \end{cases}$

3.5 Cardinalité

3.5.1 Théorème de Cantor-Bernstein

Théorème. *(Théorème de Cantor-Bernstein)*

Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A dans B, et s'il existe une injection de B dans A, alors A et B sont en bijection. Autrement dit, la relation $\longrightarrow$ est antisymétrique.

▷ Il existe un grand nombre de preuves du théorème de Cantor-Bernstein ; nous en donnons une constructive et qui ne fait pas recours à l'axiome du choix. Soient A et B deux ensembles, dont on suppose qu'il existe une application injective $f : A \longrightarrow B$, et d'autre part qu'il existe une application $g : B \longrightarrow A$ injective. Ce sont des applications, c'est-à-dire que tout élément de leur départ admet une image.

Remarquons que la corestriction $\tilde{g} : B \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \subseteq A$, qui à un élément de B fait correspondre son image par g, est toujours injective, et surjective par construction. C'est donc une bijection. Si l'on exhibe une bijection $h : A \longrightarrow \mathrm{Im}(g)$, c'est-à-dire un bijection de A sur son sous-ensemble $\mathrm{Im}(g)$ a priori strict, alors la fonction $h^{-1} \circ \tilde{g} : B \longrightarrow A$ est une bijection de B dans A et A et B sont en bijection.

Pour construire h, on introduit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de A en posant $A_0 = \complement_A \mathrm{Im}(g)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = g \circ f(A_n)$. De façon immédiate, on a, pour tout entier naturel n, $A_n = (g \circ f)^n(A_0)$. Démontrons d'abord que les A_n sont toutes deux à deux disjointes. Si i est un entier naturel non nul, alors $A_i = (g \circ f)^i(A_0) = g(f \circ (g \circ f)^{i-1})(A_0)$. Par suite, $A_i \subseteq \complement_A A_0$, ce qui signifie exactement que A_i et A_0 sont disjoints. Soit maintenant un entier naturel n. Par composition, $g \circ f$ est une injection, puis encore $(g \circ f)^n$ est injective. En composant l'intersection $A_0 \cap A_i = \emptyset$ par une injection, on obtient l'inclusion $(g \circ f)^n(A_0) \cap (g \circ f)^n(A_i) \subseteq g \circ f(\emptyset) = \emptyset$, l'image de l'ensemble vide par une application étant toujours vide. Ainsi $(g \circ f)^n(A_0) \cap (g \circ f)^n(A_i) = \emptyset$. Or $(g \circ f)^n(A_0) = A_n$ et $(g \circ f)^n(A_i) = A_{n+i}$, donc A_n est disjoint de A_{n+i} pour tous $n \geq 0, i > 0$. Par conséquent, les $A_n, n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints.

Cette construction permet d'écrire que : $g \circ f(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} g \circ f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. (Le caractère injectif n'intervient pas dans cette égalité.)

Définissons la fonction h par :

$$h : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathrm{Im}(g) \\ a & \longmapsto & \begin{cases} g \circ f(a) \text{ si } a \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \\ a \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Vérifions que h est une application bijective.

- $\star$ Elle est bien définie partout sur son ensemble de définition.
- $\star$ Elle est aussi à valeurs dans $\mathrm{Im}(g)$, puisque par construction, $g \circ f$ envoie $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \mathrm{Im}(g)$, et que si $a \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, alors en particulier $a \notin A_0 = \complement_A \mathrm{Im}(g)$ donc $a = h(a) \in \mathrm{Im}(g)$.
- $\star$ L'injectivité provient de ce que d'abord $g \circ f$ est une injection. Par suite, $id_{|\complement_A \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}$ et les $(g \circ f)_{|A_n}$ sont des injections, par restriction. De plus, ces injections sont à images disjointes d'après ce que nous avons montré précédemment, car les A_0,...,A_n,... sont deux à deux disjointes et toutes dans $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ qui est disjoint de $\complement_A \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
- $\star$ D'autre part, on a dit que $g \circ f$ envoie $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, ce qui garantit la surjectivité. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(g)$, alors $y \notin A_0$, et l'on a :

  1er cas. $y \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Alors la remarque précédente donne l'existence d'un antécédent dans $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subseteq A$.

  2nd cas. $y \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n A_n$. Alors $y \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, donc $h(y) = y$ et l'antécédent y convient.

Ainsi h est une bijection, ce qui permet de conclure. ■

Exercice 7

1. Montrer que $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ est semi-convergente.
2. En admettant le théorème de Cantor-Bernstein, montrer que $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ a exactement la puissance du continu.

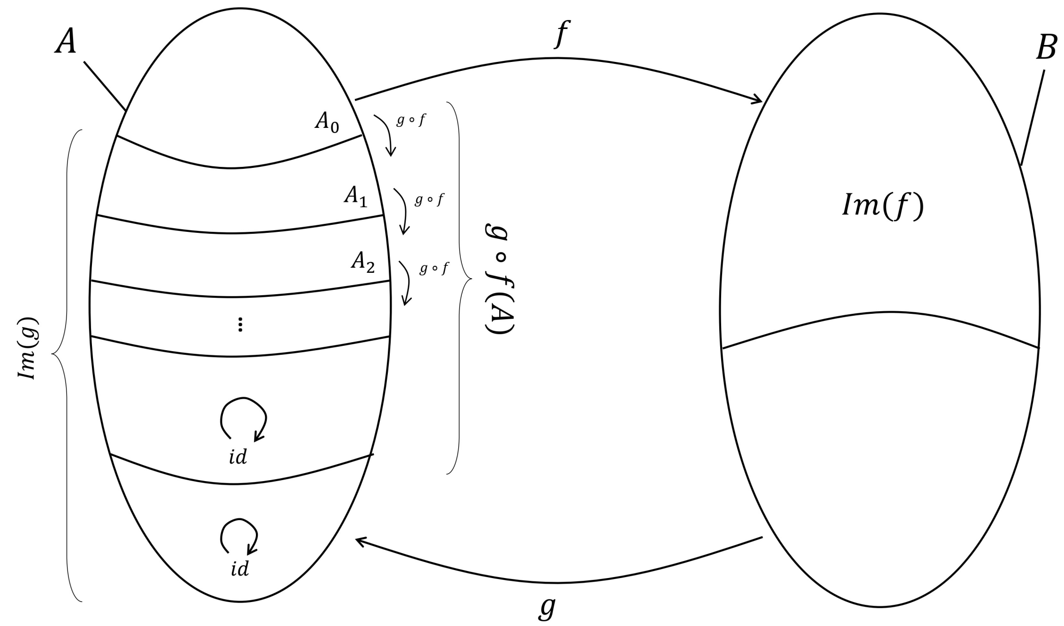


FIGURE 3.5.1 : *Illustration de la preuve du théorème de Cantor-Bernstein.* —

3.5.2 Arithmétique cardinale

Exercice 8

Montrer qu'un ensemble E non vide est infini ssi l'on a conjointement $E^E \simeq \mathcal{P}(E)$ et $\mathrm{card}(E) \neq 2$.

3.5.3 Dénombrabilité

On suppose connus les fondements sur les ensembles de la première année de classe préparatoire. Quelques références sûres pour ces notions sont données en bibliographie.

Exercice 9

1. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que tout intervalle non trivial est en bijection avec $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

Nous ne nous donnons pas en objet de former ici un cours complet sur les cardinaux dénombrables, mais seulement un complément de cours rudimentaire sur lequel les habitudes des classes préparatoires sont lacunaires : deux démonstrations non seulement au programme, mais dont les méthodes sont réutilisables. On rappelle d'abord une convention fluctuante.

Définition. ***(Dénombrabilité)***

Deux définitions coexistent pour la dénombrabilité :

- La convention faible : un ensemble est *dénombrable* par définition si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, ou, ce qui est équivalent, s'il s'injecte dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas, *infini dénombrable* signifie exactement « en bijection avec $\mathbb{N}$ ». Un ensemble dénombrable est donc soit fini (un ensemble est fini si et seulement s'il est en bijection avec un certain $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$) soit infini dénombrable.
- La convention forte : *dénombrable* signifie maintenant « en bijection avec $\mathbb{N}$ » et le terme *au plus dénombrable* couvre les ensembles finis ou dénombrables au sens fort. *Infini dénombrable* est alors un pléonasme. **C'est la convention du programme donc nous nous efforcerons de nous y soumettre.**

Dans les deux cas, on réserve le mot *indénombrable* pour les cardinaux plus grands que $\mathbb{N}$ (on dit qu'un cardinal A est plus grand que B si l'ensemble B s'injecte dans A).

Exercice 10

Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Remarque. Un ensemble est infini si et seulement s'il n'est pas fini. On dit qu'un ensemble est *infini au sens de Dedekind* s'il est équipotent à l'une de ses parties strictes, ou, ce qui est équivalent, s'il est plus grand que $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il contient une partie infinie dénombrable. Dans la théorie des ensembles classiques, tout ensemble infini au sens de Dedekind est infini. La réciproque n'est pas démontrable dans le système ZF où ne figure pas l'axiome du choix, mais dès lors qu'on l'y rajoute (ou du moins sa forme dite dénombrable), les deux notions sont équivalentes. Dans ce cas, un ensemble est infini si et seulement s'il en existe une suite d'éléments deux à deux distincts (c'est alors une injection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble), et $\mathbb{N}$ est le plus petit infini (*i.e.* $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini).

Exercice 11

Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini dans un ensemble infini est infini.

Exercice 12

1. *(Théorème de Cantor)* Soit E un ensemble. Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne peuvent être en bijection.
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini ?
3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble des parties d'aucun ensemble qui soit infini dénombrable.

Exercice 13

On admet le résultat de cours de la partie suivante.

1. Montrer qu'un ensemble E est infini au sens de Dedekind, ssi $\mathbb{N} \hookrightarrow E$ (que l'on formule : $\mathbb{N}$ s'injecte dans E, ou encore E contient une copie de $\mathbb{N}$).
2. Établir que cette condition est équivalente à ce qu'il existe une suite d'éléments de E deux à deux distincts.
3. Montrer que tout ensemble infini au sens de Dedekind est infini au sens classique.
4. L'axiome du choix dénombrable annonce que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des ensembles non vides, il existe une suite x telle que pour tout n, $x_n \in E_n$. Montrer que modulo cet axiome, tout ensemble infini est infini au sens de Dedekind.
5. En déduire que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini.

3.5.3.1 Parties de $\mathbb{N}$

Le théorème suivant, explicitement au programme, permet de décrire le cardinal de toutes les parties de $\mathbb{N}$, dont on a vu qu'il était le premier infini : elles sont soient finies, soit automatiquement dénombrables dans la convention que nous avons fixé. On verra brièvement qu'une telle taxonomie n'est généralement plus possible entre les parties des cardinaux infinis.

Exercice 14

Montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ est infinie ssi elle est non majorée.

Propriété. ***(Axiome du bon ordre de $\mathbb{N}$)***

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un minimum.

$\triangleright$ Tout dépend de ce que l'on pose comme axiome de $\mathbb{N}$. ■

Propriété. ***(Cardinal des parties de $\mathbb{N}$)***

Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable, autrement dit, toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit infinie dénombrable, ou encore, tout partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

$\triangleright$ On choisit cette dernière formulation. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On veut former une bijection de $\mathbb{N}$ sur A, c'est-à-dire une suite bijective. On la définit par récurrence de la manière suivante : on pose $u_0 = \min(A)$ et $u_0,\ldots,u_n$ étant déjà construits, on pose $u_{n+1} = \min\{x \in A \mid x > u_n\}$. Montrons que cette suite est bien définie, à valeurs dans A, injective et surjective.

- $\star$ La suite est bien définie, car u_n n'est pas un majorant de A : en effet, si c'était le cas, A serait majorée et une partie de $\mathbb{N}$ est finie ssi elle est majorée. Ainsi $\{x \in A \mid x > u_n\}$ est une partie non vide de A, partie de $\mathbb{N}$, donc par axiome, elle admet un plus petit élément. Remarquons que par construction $u_{n+1} > u_n \qquad (*)$.

- ⋆ Le minimum d'une partie lui appartient, donc u_n appartient à la partie de A définie ci-dessus donc à A. De même u_0 est dans A, donc la suite est bien définie en image également.
- ⋆ D'après la remarque $(*)$, u est strictement croissante donc en particulier injective.
- ⋆ Il reste à montrer que u est surjective. Soit $a \in A$. On considère $A_0 = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Par injectivité, cette partie de $\mathbb{N}$ est infinie donc non majorée, en particulier non majroée par a. L'ensemble A_1 des majorants de A_0 est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc par axiome un plus petit élément que nous noterons $a_n = \min(A_1)$. Alors par définition du minimum, $a_n > a$ et $a_{n-1} \leqslant a$. Supposons un instant que cette dernière inégalité soit stricte. Alors par construction, $a_n = \min\{x \in A \mid x > a_{n-1}\}$ et par cette dernière hypothèse, $a_n \leqslant a$ par définition du minimum et $a \in A$ appartenant à ce dernier ensemble. C'est absurde avec $a_n > a$, donc il y a égalité : $a = a_{n-1}$ ce qui donne un antécédent par la suite $a : n-1$.

Ceci conclut la démonstration. ■

Remarques.

1. Cette méthode est exactement la même que celle qui permet de montrer ce résultat souvent passé sous silence : étant donnés $x_1, ..., x_n$ n réels deux à deux distincts, il existe une unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}$ les ordonne dans l'ordre croissant.
2. Des arguments semblables permettent de montrer ce que nous appelons personnellement *lemme de recouvrement croissant*[1] : étant donné I un ensemble et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ($\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n \supseteq I$) de parties de I (il y a donc égalité dans le recouvrement) croissant ($J_n \subseteq J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), la suite des couronnes définie par $I_0 = J_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = J_n \setminus J_{n-1}$ forme une partition à parties éventuellement vides (*i.e.* un partage) de I.

Exercice 15

1. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$?

Exemple fondamental. ***(Suite des nombres premiers)***

L'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P}$ est infini : en effet, si $p_1, ..., p_n$ sont les seuls nombres premiers, alors $n = p_1...p_n + 1$ est encore premier, mais distinct de tous les autres... Puisque $\mathcal{P}$ est une partie de $\mathbb{N}$, elle est infinie dénombrable et l'on peut, d'après la preuve précédente, former la suite croissante des nombres premiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut par exemple montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge, et que plus généralement $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$ a le même critère de convergence

[1] Ceci est utilisé dans le cadre du programme comme lemme des théorèmes de limite monotone en probabilités discrètes. Il sert aussi à démontrer un corollaire du théorème de sommation par paquets, que l'on utilise notamment dans une preuve par récurrence de l'identité d'Euler.

que celui de Riemann.

Exercice 16

Soit (u_n) une suite réelle et A une partie de $\mathbb{N}$. À quelle condition la quantité $\sum\limits_{n\in A} u_n$ est-elle définie ?

Les cardinaux

Le cardinal est la notion intuitive de nombre d'éléments, et notamment dans le cas des ensembles finis où la notion est plus élémentaire. Cependant, dans le cas des ensembles finis, elle mène à de nombreux paradoxes et notamment à celui donnant que des ensembles peuvent avoir exactement le même nombre d'éléments (et donc, le même cardinal) que leurs parties strictes : par exemple, l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers naturels pairs, propriété qui vient d'après ce que l'on a dit précédemment caractériser justement les ensembles infinis.

On dit que deux ensembles ont le même cardinal s'ils sont en bijection. Ceci définit une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles (qui n'est pas un ensemble !) dont les classes ont pour représentants des ensembles typiques, qui sont habituellement : $\emptyset$, les $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, etc. Et encore, tous les cardinaux ne sont pas représentés par cette suite, strictement croissante pour l'ordre cardinal.

C'est Gottlob Frege et Georg Cantor qui définissent ces notions, posant les fondements de la théorie des ensembles à partir des années 1880, que ce dernier décrit comme l'étude de l'infini. Celle-ci est profondément liée à la logique théorique, deux branches mathématiques tout à fait co-dépendantes.

3.5.3.2 Réunion dénombrable de dénombrables

Lorsqu'on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable (voir ci-après), il est facile d'établir qu'une réunion finie d'ensembles finis est dénombrable. En effet, si les $A_1, ..., A_k$ sont des ensembles, leur réunion s'injecte trivialement dans $\prod\limits_{i=1} kA_i$. La question se pose différemment dans le cas d'une réunion au plus dénombrable. Dans la suite, on utilisera le fait dû à l'axiome du choix qu'un ensemble *non vide* s'injecte dans un autre si et seulement s'il existe une surjection en sens inverse.

Exercice 17 *(Grille de Cantor)*

Montrer que $(p,q) \longmapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, sans nécessairement expliciter la bijection réciproque.

Théorème. ***(Dénombrabilité des réunions dénombrables de dénombrables)***

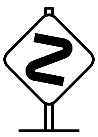
Si I est au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables, alors leur réunion est encore au plus dénombrable. Le théorème est encore vrai en remplaçant par *dénombrable* à chaque occurrence de *au plus dénombrable*.

$\triangleright$ On a vu le cas I fini ; ne considérons plus que I infini dénombrable. On peut donc prendre $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles tous au plus dénombrables. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une surjection $f_n : N \twoheadrightarrow A_n$. Considérons l'application $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ qui à un couple (n,k) fait correspondre $f_n(k)$: l'existence d'une telle fonction est garantie par l'**axiome du choix**. Cette application est une surjection par définition de la réunion puis surjectivité des f_n : pour tout $x \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, il existe k tel que $x \in A_k$ puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = f_n(k)$. Or $\mathbb{N}^2$ est au plus dénombrable *(voir ci-après)*, donc $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ (son cardinal est plus petit que $\mathbb{N}$). Enfin, dans le cas de la dénombrabilité forte, il suffit de remarquer que A_0 s'injecte dans $\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i$ pour avoir l'*infinie* dénombrabilité. ■

Remarque. La dernière phrase est inutile si l'on convient de la dénombrabilité faible, comme expliqué ci-haut, ce qui lui donne tout son intérêt. Mais en pratique, il est trivial de vérifier qu'une opération sur ensembles infinis est infinie.

Exercice 18

1. Un nombre réel est *algébrique*, s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Partitionner intelligemment $\mathbb{Q}[X]$ pour trouver le cardinal de l'ensemble des nombres algébriques.
2. *(Théorème de Liouville)* En déduire qu'il existe au moins un réel transcendant, c'est-à-dire non algébrique.



Il ne faut pas confondre ce dernier résultat théorématique avec celui sur les produits cartésiens, qui présente une dissymétrie. En effet, un produit cartésien fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, mais c'est faux pour un produit cartésien infini, même dénombrable : on a vu que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ était indénombrable dans le premier exercice.

Justifions cette première affirmation. Soit k un entier naturel (non nul, le produit cartésien vide étant vide), et $p_1,\ldots,p_k$ k nombres premiers. Alors l'application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ qui à $(n_1,\ldots,n_k)$ fait correspondre $p_1^{n_1}\times\ldots\times p_k^{n_k}$ est injective d'après le théorème fondamental de d'Alembert, ce qui donne la dénombrabilité de $\mathbb{N}^k$, et à une bijection près celle d'un produit cartésien fini d'au plus dénombrables (une manière beaucoup plus rapide que celle de la grille de Cantor).

Principe. ***(Hôtel de Hilbert)***

Ainsi, le principe de l'hôtel de Hilbert démontre qu'un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 19

Montrer que $\mathbb{R}^n$, en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, est de dimension infinie. *Une base de* $\mathbb{R}$ *vu comme un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel est appelée base de Hamel.*

Un ensemble a la puissance du continu, par définition, s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$, qui est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. La fameuse *hypothèse du continu*, dont il a été démontré (Kurt Gödel en 1938 puis Paul Cohen en 1963 avec sa célèbre méthode du *forcing*) qu'elle était indécidable, à savoir démontrable et de négation démontrable, dans le cadre usuel de la théorie des ensembles, stipule qu'il n'existe pas de cardinal strictement compris entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, autrement dit, que toute partie de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable ou a la puissance du continu. Cette affirmation rompt la continuité du théorème sur les parties de $\mathbb{N}$ établi à la partie précédente à laquelle on pouvait s'attendre.

Propriété. ***(Réunions dénombrables de puissances du continu)*** **HP**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles ayant la puissance du continu, alors leur réunion est encore dénombrable.

▷ À faire en exercice, de façon tout à fait similaire à la démonstration précédente. ■

Si l'on s'aperçoit que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents[1] (*i.e.* en bijection), on peut démontrer qu'une réunion de puissances de continu sur un ensemble ayant la puissance de continu a la puissance

[1] Montrons ce résultat à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein, théorème dont la preuve, quoique difficile, permet d'établir que si deux ensembles s'injectent l'un dans l'autre réciproquement, ils sont en bijection. $\mathbb{R}$ s'injecte dans $\mathbb{R}^2$ par l'application canonique $x \longmapsto (x,0)$. Réciproquement, exhibons une injection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour ça, il suffit d'exhiber une bijection de $[0,1[^2$ dans $[0,1[$, puisque comme c'est un intervalle non trivial, $[0,1[$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. Posons l'application qui à deux éléments de $[0,1[$ associe l'entrelacement des décimales de leurs développements illimités propres, définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1[^2 & \longrightarrow & [0,1[\\ (0{,}a_1a_2a_3\ldots ; 0, b_1b_2b_3\ldots) & \longmapsto & 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots . \end{array}$$

Cette fonction est bien définie d'après l'existence et l'unicité du développement illimité propre d'un réel, c'est-à-dire qu'on ne peut choisir qu'une unique suite de décimales non stationnaire à 9 qui représente un réel donné. Montrons son injectivité. Soient $(0{,}a_1a_2a_3\ldots ; 0, b_1b_2b_3\ldots)$, $(0{,}a'_1a'_2a'_3\ldots ; 0, b'_1b'_2b'_3\ldots) \in [0,1[$, les représentations ici étant des développements illimités propres. Supposons que $\varphi(0{,}a_1a_2a_3\ldots ; 0, b_1b_2b_3\ldots) = \varphi(0{,}a'_1a'_2a'_3\ldots ; 0, b'_1b'_2b'_3\ldots)$, c'est-à-dire $0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots = 0, a'_1b'_1a'_2b'_2a'_3b'_3\ldots$, alors ces écritures ne sont pas des développements impropres. En effet, si $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ est stationnaire à 9, alors à partir d'un certain rang N, $(a_n, b_n) = (9{,}9)$ pour tous $n \geqslant N$. En particulier, (a_n) est stationnaire à 9, ce qui est exclu. De même pour l'écriture de droite. Or il y a unicité du développement décimal propre, ce qui impose : $a_1 = a'_1$ sur la première décimale, puis $b_1 = b'_1$, puis $a_2 = a'_2$, etc., de sorte que $0{,}a_1a_2a_3\ldots = 0{,}a'_1a'_2a'_3\ldots$ d'une part et $0, b_1b_2b_3\ldots = 0, b'_1b'_2b'_3\ldots$ d'autre part, ce qui montre l'injectivité de φ.

du continu. Plus généralement, si l'on sait montrer que tout ensemble infini est équipotent à son carré, ce qui n'est pas évident, mais vrai, alors on peut démontrer pareillement que si $(A_i)_{i\in E}$ est une famille dont tous les éléments sont de cardinal E, leur réunion a pour cardinal E au plus.

Exercice 20

En informatique théorique, on considère des *alphabets* finis, c'est-à-dire ensembles finis, prenons-en un $\mathscr{A}$, dont les éléments sont appelés *lettres*. Un *mot fini* sur $\mathcal{A}$ est un n-uplet d'éléments de $\mathscr{A}$. L'ensemble des *langages* sur $\mathscr{A}$ est défini comme $\mathcal{P}(\mathscr{A}^*)$. On dit qu'un langage $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{A}^*$ est *reconnu par un algorithme* s'il existe un programme informatique ayant pour entrées les $u \in \mathscr{A}^*$ et qui calcule la fonction caractéristique de $\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe des langages indécidables, c'est-à-dire qui ne sont pas reconnus par des algorithmes.

3.6 Quotients d'ensemble : ensembles sans structure donnée (préambule aux quotients de groupe)

Ces notions sont complètement hors programme. Toutefois, elles permettent de s'éclaircir grandement les idées sur certaines notions en théorie des groupes mais également en algèbre linéaire comme nous l'allons voir. De plus, elle permet de clore la théorie élémentaire des opérations ensemblistes : la somme (réunion), la différence (différence ensembliste, différence symétrique), le produit (cartésien ou intersection), sont complétés par le quotient, qu'il faut introduire au moyen d'un objet à première vue retors : la relation d'équivalence.

Ne nous leurrons pas pourtant : lorsqu'il s'agit d'ensembles simplement, il n'y a pas de notion de quotient de deux ensembles, mais seulement d'*ensemble quotient par une relation d'équivalence*. On ne pourra définir la notion de quotient d'ensembles par l'une de ses parties, et encore il les faudra structurées (sous-groupe pour un groupe, sous-espace vectoriel, etc., ce qui correspondra à la notion de diviseur) que dans de telles structures.
On rappelle un résultat de mathématiques supérieures dans sa totalité.

Théorème. *(Théorème fondamental des relations d'équivalence)*

Soit E un ensemble. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \{\overline{x}_{\mathcal{R}} \mid x \in E\}$ est une bijection de l'ensemble des relations d'équivalence sur E dans l'ensemble des partitions de E.

▷ Il s'agit démontrer d'abord que cette application est bien définie, c'est-à-dire que les classes d'une relation d'équivalence partitionnent l'ensemble sur lequel elle est définie, ce qui est un résultat de sup (le refaire !). On vérifie facilement qu'à toute partition de E, on peut faire correspondre une relation d'équivalence définie par l'appartenance de deux éléments à la même partie de la partition. Ces deux applications sont alors bijections réciproques. ■

Exercice 21

Le n-ième nombre de Bell, noté B_n, est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. *(Relation d'Aitken)* Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
2. *(Formule de Dobinski)* En déduire que $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ le n-ième moment de la Poisson de moyenne $\lambda = 1$.
3. *(Congruence de Touchard)* Montrer que si p est premier, alors $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1}\ [p]$.

Exemple. ***(Relation « avoir le même signe »)***

Si l'on partitionne $\mathbb{R}^*$ en ses deux composantes connexes, on obtient la relation « avoir le même signe ». Remarquer que c'est la relation engendrée par la partition donnée par les fibres de la fonction signe σ, une fibre par une fonction f n'étant autre que l'image réciproque d'un point.

Propriété

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors pour tous $x,y \in E$, $x\mathcal{R}y \iff \overline{x} = \overline{y}$.

▷ En exercice. ■

Définition. ***(Ensemble quotient par une relation d'équivalence)***

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors on note $E/\mathcal{R}$ l'*ensemble quotient par* $\mathcal{R}$ défini par $E/\mathcal{R} = \{\overline{x}_{\mathcal{R}} \mid x \in E\}$.

⟶ *Convention.* On aurait aussi pu définir, de manière équivalente, l'ensemble quotient par un système de représentants de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un élément de la classe de x et un seul dans l'ensemble quotient pour tout x de E. Cependant, nous fixons la construction de la preuve précédente.

Fixons maintenant E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On se permet de la noter $\sim$. Pour rappel, on peut noter indifféremment $\overline{x}_{\mathcal{R}} = \overline{x}_{\sim} = \overline{x} = cl(x)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté la classe d'équivalence de l'élément $x \in E$.

Définition-propriété. ***(Projection canonique)***

L'application $\pi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ qui à x fait correspondre la classe de x par $\mathcal{R}$, notée $\overline{x}_{\mathcal{R}}$, est une surjection appelée *projection canonique.*

▷ La surjectivité vient de la réflexivité de $\mathcal{R}$. ■

Propriété

Pour tout $a \in E/\mathcal{R}$, $\pi^{-1}(a) = cl(x)$ où x est un antécédent de a par π (il en existe au moins un d'après la proposition précédente).

▷ Évident. ■

A priori, bien sûr, l'ensemble et l'ensemble des classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ n'ont pas le même cardinal.

Exercice 22

Montrer que la projection canonique est une bijection ssi $\mathcal{R}$ égale la relation d'égalité sur E, notée $=_E$.

▷ **Éléments de réponse.**

Elle est bijective si et seulement si elle est injective.

Heuristique

L'introduction de la notion d'ensemble quotient débrouille la perplexité initiale devant l'idée d'appeler quotient un ensemble formée des classes d'une relation : la surjectivité permet tout d'abord d'avoir que, dans tous les cas, même en milieu infini, $\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E/\mathcal{R})$, ce qui permet d'assimiler $\mathcal{R}$ à, par exemple, un nombre supérieur à 1, dans le cas E non vide, par l'artifice frauduleux ci-dessous :

$$\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{card}(E)}{\mathrm{card}(\mathcal{R})} \text{ donc } \mathrm{card}(\mathcal{R})\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E) \text{ donc } \mathrm{card}(\mathcal{R}) \geqslant 1,$$

nombre qui diviserait E en autant parties disjointes. L'important dans la suite sera double : d'une part que la structure quotientée soit préservée (ce qui sera à peu près toujours le cas, et constituera à chaque section la première partie sur la compatibilité de la structure avec la relation d'équivalence : sous-groupe distingué, linéarité de la projection, continuité en topologie...), d'autre part, l'établissement de théorèmes de factorisation et d'isomorphisme à propos des morphismes partant de structures quotientées dont on verra que, par cet effet, ils sont, sous certaines hypothèses, « simplifiables » en applications quotients.

Exercice 23

Une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ permet de définir l'argument principal d'un complexe : quel est le cardinal de l'ensemble quotient par elle ?

Les théorèmes sur les ensembles quotients sont très bien résumés par les diagrammes. Nous introduisons d'ores et déjà celui qui sert de base à tous les autres avec les propriétés précédentes.

On rappelle que parmi les applications qui sont des flèches $\longrightarrow$, les injections sont notées $\hookrightarrow$, les surjections sont notées $\twoheadrightarrow$, et les bijections sont notées $\simeq$ ou comme la conjonction d'une injection et d'une surjection.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, two heads, "\pi"'] \\ E/\mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Exercice 24

Pour se débarbouiller l'esprit sur le raisonnement par analyse-synthèse, montrer que :

1. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Toute matrice à coefficients dans un corps de caractéristique différente de 2 ($2 \neq 0$) se décompose de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Pour toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie, il existe une unique base de son dual, base duale, notée $(e_i^*)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$.

Théorème. ***(Théorème de factorisation pour les applications)***

Soit F un ensemble quelconque et f une application de E dans F. Alors f est compatible avec $\mathcal{R}$ (*i.e.* $\forall x,y \in E \quad x \sim y \implies f(x) = f(y)$) si et seulement s'il existe une unique application $\tilde{f}$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$ (se qui se réécrit $f(x) = \tilde{f}(\overline{x})$ pour tout $x \in E$). Dans ce cas de compatibilité, on dit qu'on *passe au quotient* dans l'application f.

▷ La preuve est très facile si l'on se focalise sur le choix des bons arguments.

▶ Dans le sens direct, on suppose que f est compatible avec la relation $\mathcal{R}$. On montre l'unicité et l'existence de $\tilde{f}$ par analyse-synthèse. Supposons que pour tout $x \in E$, puisque par définition $\pi(x) = \overline{x}$, $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$: ceci définit de manière explicite et donc unique l'application $\tilde{f}$, ce qui termine l'analyse. Le point crucial est que **cette écriture a un sens**, vu que $f(x)$ ne dépend pas du représentant choisi de $\overline{x}$ *ce qui est exactement ce que signifie la condition de compatibilité*. Pour la synthèse, c'est encore plus immédiat : pour tout $x \in E$, $\overline{x} = \pi(x)$ donc $\tilde{f}(\overline{x}) = \tilde{f} \circ \pi(x)$. Mais l'hypothèse de synthèse définit ce que l'analyse conclut, soit $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$, d'où $f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x)$ ce qui signifie par définition de l'égalité des fonctions que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

▶ Réciproquement, si l'on suppose que f se factorise en $\tilde{f} \circ \pi$ (de façon unique, mais on ne s'en sert pas), soient $x \sim y$ deux éléments de E. Alors $\pi(x) = \pi(y)$ par définition de π. Ainsi $\tilde{f} \circ \pi(x) = \tilde{f} \circ \pi(y)$ puisque $\tilde{f}$ est une application, et par hypothèse ces deux quantités égalent $f(x) = f(y)$, et donc f est compatible avec $\mathcal{R}$.

Ainsi f est compatible si et seulement elle se factorise, ce qu'il fallait démontrer. ■

La situation se présente comme suit :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Le théorème de factorisation établit donc la commutation de ce diagramme.

Exemple fondamental. ***(Anneaux quotients)***

Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau et

$$f : \begin{array}{rl} \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{A} \\ k & \longmapsto k.1_{\mathbb{A}} \end{array}$$

(l'unique) morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ est fini, $\mathrm{Ker}(f)$ étant un idéal de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $p\mathbb{Z}$ où p est pris minimal, $p \neq 0$ puisque f ne peut être injective par cardinalité. Dans ce cas, f est compatible avec la relation de congruence modulo p sur les entiers, et l'on peut définir

$$\tilde{f} : \begin{array}{rl} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{A} \\ \overline{k} & \longmapsto k.1_{A}. \end{array}$$

Il faut remarquer que c'est bien la compatibilité et elle seule (équivalence dans le théorème de factorisation) qui permet de définir ce nouveau morphisme, même il faut vérifier indépendamment que l'application est un morphisme : ce n'est pas dur mais ce sera systématique dans la partie suivante. Si $\mathbb{A}$ est intègre, et l'on peut montrer qu'un anneau fini est intègre ssi c'est un corps, alors on vérifie que p est premier. Dans ce cas, $\tilde{f}$ est injectif car c'est un morphisme de corps, ce qui nous donne notamment que tout corps fini de cardinal premier p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que tout corps fini a pour cardinal p^d où d est un certain entier : la dimension sur $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ de $\mathbb{K}$ vu comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

Exercice 25

Fournir un exemple où une application ne passe pas au quotient par une relation d'équivalence donnée.

Méthode. ***(Recette pour passer au quotient dans les applications)***

J'ai une application φ d'un ensemble quotient Q dans F un ensemble quelconque.

1. J'identifie la relation d'équivalence qui quotiente : $Q = E/\mathcal{R}$ et E l'ensemble initial.
2. Je vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence pour justifier mon propos.
3. Je pose une application f de E dans F définie sans aucun problème et qui devra, une fois passée au quotient, retomber sur φ.
4. Je montre que pour tous éléments x,y de E, si $x\mathcal{R}y$, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont égaux.
5. Je peux maintenant définir une application $\varphi = \tilde{f} : Q \longrightarrow F$ sans trouble, telle que pour tout $\overline{x} \in Q$, $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$, et j'insiste bien sur ce que cette construction n'est possible que grâce à la compatibilité vérifiée précédemment.

Si je veux une propriété d'injectivité, de surjectivité, voire de bijectivité pour mon application, je me réfère au résultat de l'exercice suivant.

Un corollaire d'intérêt principalement formel.

Théorème. ***(Théorème de factorisation carré pour les applications)***

Soit F un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{S}$ que l'on se permet de noter $\equiv$, ses classes $\hat{\ }$ et f une application de E dans F. Alors f est compatible avec $\mathcal{R}$ modulo $\mathcal{S}$ (*i.e.* $\forall x,y \in E \quad x \sim y \implies f(x) \equiv f(y)$) si et seulement s'il existe une unique application $\tilde{f}$ telle que $\chi \circ f = \tilde{f} \circ \pi$ (se qui se réécrit $\widehat{f(x)} = \tilde{f}(\overline{x})$ pour tout $x \in E$). Dans le cas de compatibilité, on dit encore qu'on passe au quotient dans f.

▷ On applique le théorème de factorisation à l'application $\chi \circ f$, l'ensemble F étant maintenant $F/\mathcal{S}$. Il suffit de vérifier alors que la compatibilité de $\chi \circ f$ avec $\mathcal{R}$ est équivalente à la compatibilité de f avec $\mathcal{R}$ modulo $\mathcal{S}$, ce qui est immédiat par définition de cette dernière notion. ■

Le diagramme correspondant est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[d, "\chi"] \\
E/\mathcal{R} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & F/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Exercice 26

Dans chacun des deux théorèmes précédents, montrer que :

1. $\tilde{f}$ est injective ssi $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$ (respectivement $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) \equiv f(y)$) ;
2. $\tilde{f}$ est surjective ssi f est surjective ;

3. $\tilde{f}$ est bijective ssi f est surjective et $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$ (respectivement f est surjective et $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) \equiv f(y)$).

Méthode. *(Recette pour passer au quotient dans les applications entre deux espaces quotients, amélioration)*

Souvent, c'est exactement la même que précédemment : **la structure quotient de l'espace d'arrivée n'intervient pas** : on factorise une application $f : E \to F$ en $\tilde{f} : E/\mathcal{R} \to F$, puis on compose par la projection $\pi : F \to F/\mathcal{S}$, ce qui revient à poser $\overline{f} = \pi \circ \tilde{f}$. Pour une illustration, voir dans la section consacrée en ALGÈBRE sur les MAGMAS.

Moins souvent, il faut utiliser le théorème précédent :

Méthode. *(Passage au quotient simultané)*

Parfois, on dispose de deux ensembles $E/\mathcal{R}$ et $F/\mathcal{S}$ quotients par des relations d'équivalence et l'application $f : E/\mathcal{R} \to F$ **ne peut être définie**. Il faut alors montrer :

$$x\mathcal{R}x' \implies f(x)\mathcal{S}f(x')$$

qui permet de définir une application directement entre $E/\mathcal{R}$ et $F/\mathcal{S}$.

Remarque. Ces deux méthodes sont en fait équivalentes, car l'égalité dans l'espace quotient d'arrivée équivaut à l'équivalence dans l'espace d'arrivée. Ainsi on peut considérer $\pi \circ f$ puis appliquer la méthode amélioré mot à mot.

Exercice 27 *(Difficile)*

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{P}^n$ le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ où ici $0 \in \mathbb{R}^n$ par la relation : pour $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \lambda y$. Montrer que pour naturels n,m, l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+m-1} \\ (x_0,y_0),(x_1,y_1) & \longmapsto & (x_0y_0,x_1y_0,x_0y_1,x_1y_1) \end{array}$$
(*plongement de Segre*) est bien définie. (En GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE, il permet de justifier que le produit de deux variétés projectives est encore une variété projective.)

On examine enfin un cas particulier important, celle de la relation $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ qui est définie sur tout ensemble étant donné une application f partant de cet ensemble, dont les classes sont parfois appelées *fibres*. Le théorème de factorisation appliqué à f donne un résultat intéressant.

Théorème. ***(Théorème d'isomorphisme ensembliste, théorème de bijection quotient)***

Soit f une application de E dans F deux ensembles quelconques. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E définie par $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Dans ce cas, f est compatible avec $\mathcal{R}$ et l'application quotient de f par cette relation réalise une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(f)$.

▷ Encore une fois, le théorème ne consiste qu'en des astuces de langage. Procédons par étapes claires et distinctes pour rasséréner les esprits malades. D'abord, on vérifie aisément que la relation des fibres $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence : la réflexivité est tautologique, la transitivité vient de ce que deux choses égales à un même sont égales, et la symétrie de celle de la relation d'égalité même. Dans ce cas, $E/\mathcal{R} = \{f^{-1}(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

Pour pouvoir avoir seulement l'audace de rêver du théorème de factorisation, il nous faut vérifier la compatibilité de f avec $\mathcal{R}$. Nous laissons aux cerveaux fatigués le soin de découvrir par eux-mêmes, pourquoi c'est évident. La relation d'équivalence des fibres est également la relation d'équivalence associée à l'application f, définissable sur tout ensemble dont elle part par « avoir la même image par f ». Cette compatibilité exprime que cette relation est moins fine que la relation définie dans le théorème.

La remarque du paragraphe surprécédent donne en particulier, ayant introduit l'application quotient $\tilde{f}$ par $\mathcal{R}$, que $\boxed{\tilde{f}[f^{-1}(y)] = y}$. En effet

Soient deux éléments de $E/\mathcal{R}$; d'après l'expression de l'ensemble quotient ci-dessus, il existe $y, y' \in \mathrm{Im}(f)$ tels que ces éléments s'écrivent $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y')$. Si $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = \tilde{f}(f^{-1}(y'))$, alors d'après ce qui précède $y = y'$ (c'est tout simplement une réécriture des deux termes), d'où $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$, et donc $\tilde{f}$ est injective.

De surcroît, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\tilde{f})$. En effet, $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \{\tilde{f}(f^{-1}(y)) \mid f^{-1}(y) \in E/\mathcal{R}\} = \{\tilde{f}(f^{-1}(y)) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$ d'après l'égalité encadrée et encore d'après l'égalité encadrée ceci égale $\{y \mid y \in \mathrm{Im}(f)\} = \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi $\tilde{f}$ est une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \mathrm{Im}(f)$, ce qui termine la démonstration. ■

Ceci constitue un résultat théorique : l'utilité de la relation d'équivalence associée à f est factice ; il permet seulement d'établir que l'image d'une application est isomorphe, au sens ensembliste (c'est-à-dire en bijection) avec l'espace des fibres par f, ce qui se récrit : $\mathrm{Im}(f) \simeq \{f^{-1}(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$. Remarquons qu'on aurait pu l'établir plus élémentairement.

Exercice 28

1. Démontrer que, pour dénombrer son troupeau, un berger peut se « contenter » de compter les pattes puis diviser par quatre.
2. *(Lemme des bergers)* Soit f une surjection de A dans B deux ensembles finis, telle que pour tout y dans B, y ait exactement k antécédents par f. Montrer qu'alors $\mathrm{card}(E) = k.\mathrm{card}(F)$ et retrouver ce qui précède[a].
3. Que dire si f n'est plus surjective ?

[a] *O fortunatos nimium, sua si bona norint, agricolas...*

A picture is worth a thousand words.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathrm{Im}(f) \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, hook, two heads, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

À ce stade, nous recommandons très chaudement d'étudier la notion algébrique de quotient dans l'ordre suivant :

- sous-groupes distingués et groupes quotients,
- anneaux quotients,
- espaces vectoriels quotients et co-dimension,
- topologie quotient.

L'étude des structures quotients est un tout : il est très envisageable de ne s'intéresser à ce concept qu'à partir de la troisième année universitaire, mais dans ce cas, mieux vaut enchaîner les cinq chapitres cités ci-haut (y compris le préambule à propos des ensembles quotients).

On dispose d'une vue d'ensemble des structures quotients (ainsi que du parallélisme de construction) grâce au **tableau récapitulatif** de la figure 3.1.

Catégorie	Quotient par...	Théorème de factorisation	Théorème d'isomorphisme
Ensembles	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$	f est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists! \tilde{f} \quad f = \tilde{f} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \text{Im } f$ (par $\tilde{f}$)
Magmas	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$ avec laquelle la loi de magma est compatible	φ morph. est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \text{Im } \varphi$ (par $\tilde{\varphi}$)
Monoïdes, groupes (naïvement)	Idem	Idem	Idem
Groupes	Sous-groupe distingué H	$H \subseteq \text{Ker}(f)$ ssi $\exists! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$G/\text{Ker}(f) \simeq \text{Im } \varphi$
Anneaux	Idéal I	$I \subseteq \text{Ker}(f)$ ssi $\exists! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$A/\text{Ker}(f) \simeq \text{Im } \varphi$
Espaces vectoriels	Sous-espace vectoriel V	$V \subseteq \text{Ker}(f)$ ssi $\exists! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$E/\text{Ker}(f) \simeq \text{Im } \varphi$
Espaces topologiques	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$, quotient muni de la topologie quotient	f C^0 est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists! \tilde{f}$ C^0 $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \text{Im } f$ (par $\tilde{f}$)

Table 3.1 : *Tableau récapitulatif des phénomènes de factorisation et d'isomorphisme dans les structures quotients selon les catégories. —*
Il est très beau.

Signalons avant de partir le fait suivant, qui se transpose aux autres catégories :

Fait. ***(Universalité des projections)***

Soient X,Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ surjective. Alors il existe une relation d'équivalence R sur X, compatible avec f, telle que $Y \simeq X/R$.

Conséquence essentielle du théorème d'isomorphisme. En fait, il suffit de prendre $xRy \iff f(x) = f(y)$.

Chapitre 4

Théorie de la logique

Résumé

On expose la théorie de la logique formalisée telle que présentée classiquement en maîtrise de mathématiques pures.

4.1 Logique du premier ordre

Chapitre 5

Théorie des catégories

Résumé

Les catégories sont à première vue la version plus-plus des ensembles. S'il est assez faux de dire que la théorie des catégories trivialise des résultats mathématiques, il est très vrai de constater qu'elle uniformise un certain nombre de concepts d'apparence transverses, et c'est par là d'ailleurs que sourdent les premiers résultats substantiels. En bonus, on donnera un sens précis aux notions d'essentialité, canonicité, enrichissement, fonctorialité, naturalité et universalité. En conséquence, on s'attache à décrire dans un premier temps le vocabulaire, avec force exemple, pour que le lecteur se familiarise avec ; il reste difficile de n'être pas rebuté par l'aridité des premiers théorèmes (caractérisation des équivalences, lemme de Yoneda)... Courage surtout !

5.1 Exposé : premières définitions sur les catégories

5.1.1 Introduction

Objectifs et produits de la théorie des catégories

Le but de S. Eilenberg et S. MacLane, in *General theory of natural equivalences*, 1945, est de formaliser la notion vague de *naturalité* d'un morphisme.

Par exemple, si V est un espace vectoriel de dimension finie, on a un morphisme « naturel » $V \longrightarrow V^{**}$ donné par $x \mapsto (\mathrm{ev}_x : l \mapsto l(x))$, par opposition à des isomorphismes $V \simeq V^*$ qui dépendent d'un choix de base dans V.

De façon surprenante, le formalisme d'Eilenberg-MacLane s'est avéré efficace pour :

1) unifier des concepts mathématiques ;
2) établir de nouveaux liens entre sujets mathématiques différents ;
3) poser les bonnes questions.

Ce formalisme est maintenant utilisé en topologie, algèbre (commutative et non commutative), géométrie algébrique, théorie des représentations, informatique théorique, etc.

5.1.2 Définitions

La théorie des catégories prolonge celle des ensembles et doit se placer dans le cadre axiomatique (semblable) de la théorie des classes.

Définition. ***(Catégorie)***

La *catégorie* est l'élément de base de la théorie des catégories. On est en présence d'une catégorie $\mathcal{C}$, si l'on a :

- une collection d'*objets*, représentée par une classe, propre ou impropre, parfois identifiée[a] à $\mathcal{C}$;
- la collection des *flèches* ou *morphismes* entre ces objets, ou plus précisément, pour tous A,B objets de $\mathcal{C}$, une collection de morphismes de A vers B ;
- l'association, à toute flèche f de A dans B, de son *départ* ou *domaine* A et de son *arrivée* ou *co-domaine* B ;
- une loi de composition interne entre les flèches, appelée *composition*, définie dès que le co-domaine de celle de droite correspond au domaine de celle de gauche ;
- l'associativité de la composition, avec la définition habituelle ;
- un élément neutre pour la composition pour chaque objet A de la catégorie $\mathcal{C}$, noté id_A appelé *(morphisme/flèche) identité*.

[a] Formellement, dans les notations, mais jamais conceptuellement : les flèches ont un intérêt bien supérieur à celui des objets dans une catégorie, voir plus bas.

Remarques.

1. On note parfois $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ou $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{C}$ et l'on note $X \in \mathcal{C}$ au lieu de $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ pour « X est un objet de $\mathcal{C}$ ».
   On note parfois $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ la classe de tous les morphismes de $\mathcal{C}$.
2. Il est courant d'utiliser des lettres minuscules pour noter les objets d'une catégorie abstraite. Cependant, il est pratique d'utiliser les majuscules dans un cours introductif pour catalyser l'intuition.
3. Pour tous X,$Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ la classe des morphismes entre X et Y de X à Y, ou, lorsque la catégorie en jeu est claire, simplement $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Pour insister sur la catégorie, on note aussi parfois $\mathcal{C}(X,Y)$, mais c'est dommage, car on pourrait confondre avec une notation pour les applications continues de X dans Y lorsque ça a un sens.

4. **Important :** on écrit simplement $f : X \longrightarrow Y$ pour $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Cette notation doit être employée savamment, car elle ne fait pas mention de la catégorie considérée (dans un espace de Banach par exemple, on s'y perd facilement).
   Elle reste bien pratique. Il n'est même pas utile de noter le nom de la flèche : on parle des propriétés de $X \to Y$, chose tout à fait légitime et depuis la Terminale.
5. Avec ces notations, la composition est définie $\circ : \mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$. Ainsi, à deux flèches f et g convenant, on associe une flèche notée $f \circ g$ ou plus concisément fg.
6. L'associativité s'écrit, en toutes lettres : pour $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T$, on a $(fg)h = f(gh))$.
7. Tout ceci se passe évidemment de la même manière qu'avec des applications, mais ne nous leurrons pas : en général, les flèches ne seront pas des applications. En outre, une catégorie est aveugle aux éventuels éléments de ses objets.
8. L'identité de A se note aussi $\mathbb{1}_A$. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a $id_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$. On a de plus : pour tous $g : Y \to X$ et $f : X \to Y$, $id_X g = g$ et $f id_X = f$.

Autres remarques.

1. On peut intérpréter une catégorie comme un contexte mathématique. La théorie des catégories a alors pour but de passer d'un contexte à un autre.
2. La théorie de catégorie a aussi pour motivation de démontrer les théorèmes observés de façon analogue dans diverses catégories, une fois pour toutes. Les premiers exemples que nous verrons de ce principe auront leu dans le cadre de l'algèbre linéaire, où l'étudiant a déjà l'habitude de « changer de point de vue » de façon technique.
3. Une catégorie est totalement encodée par ses morphismes : la connaissance d'un objet se confond avec celle de son identité. C'est pourquoi les objets, en théorie des catégories, ont une importance moindre face aux flèches.
4. *(Une catégorie est un monoïdoïde)* Un monoïde est exactement la donnée d'une catégorie dont la classe des objets est réduite à un point. En effet, si $\star$ est un point, alors cette catégorie est déterminée par $\mathrm{Hom}(X,X)$, qui, d'après les axiomes de catégorie, doit et doit seulement être un monoïde (non nécessairement commutatif). Par conséquent, étant donnée une catégorie $\mathcal{B}$, on peut considérer son *groupe de Grothendieck* $K(\mathcal{B})$ qui n'est autre que son symétrisé en tant que monoïde sur chaque objet. C'est un exercice de base de vérifier qu'on a bien encore affaire à une catégorie.
5. La collection des objets de Ens *(voir premier exemple ci-dessous)* n'est pas un ensemble. Une façon de n'avoir affaire qu'à des ensembles est d'utiliser les *univers de Grothendieck* : on fixe un univers de Grothendieck $\mathcal{U}$, un « très gros ensemble » vérifiant au passage les propriétés de stabilité suivantes :
   - $\star$ $\mathcal{U}$ est transitif,
   - $\star$ toute paire d'éléments de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$,
   - $\star$ si $x \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$,

⋆ si $I \in \mathcal{U}$ et $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} x_i \in \mathcal{U}$,

et au lieu de Ens on utilise $\mathrm{Ens}_{\mathcal{U}}$, la catégorie des ensembles $X \in \mathcal{U}$, dits *ensembles $\mathcal{U}$-petits*. Alors $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ est un ensemble !

Ce processus se généralise aux autres catégories présentées ci-dessus. Moralement, $\mathcal{U}$ est l'ensemble des ensembles de travail dans un contexte donné.

Exemples. ***(Catégories)***

1. L'exemple le plus rudimentaire est celui où la catégorie est celle des ensembles, on la note Ens ou Set en anglais. Les morphismes $X \to Y$ sont toutes les applications de X vers Y et la composition est la composition des applications. Notons que la collection $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est propre.

2. Les catégories suivantes : $\mathrm{Mag}, \mathrm{Mon}, \mathrm{Grp}$ ou Gp, Ann ou An, Krp ou Kr, sont respectivement les catégories des magmas, des monoïdes, des groupes, des anneaux unitaires, des corps commutatif, avec pour morphismes les (homo)morphismes respectifs. Là-aussi, on remarque que les collections d'objets sont propres.

On définit aussi pour plus de précisions la catégorie Ab des groupes abéliens ; aussi, la catégorie ACU de l'algèbre commutative dont les objets sont les anneaux commutatifs unitaires.

3. Si R est un anneau (associatif, unitaire), commutatif ou non, on note les catégories Mod_R ou $\mathrm{Mod}(R)$ des R-modules à droite et R-Mod des R-modules (à gauche). On peut voir un R-module à droite comme un R-module à gauche sur l'anneau opposé et réciproque. Si l'anneau R est commutatif, c'est donc la même notion. En particulier, si k est un corps (commutatif), alors on dispose de la catégorie $\mathrm{Mod}_k := \mathrm{Vect}_k$ ou k-Vect des k-espaces vectoriels. On définit de même les catégories mod où l'on impose les modules de type fini. La catégorie $\mathrm{Free}(R)$ est la catégorie des R-modules libres.

4. On définit de même la catégorie des k-algèbres notée k-Alg ou k-alg. ou $\mathrm{alg.}_k$. La catégorie des algèbres associatives (sous-entendu sur k) est notée Ass, souvent confondue à la première, et pour préciser que l'on parle d'algèbres associatives unitaires, on utilise la catégorie 1-Ass.

5. Citons la catégorie Top des espaces topologiques avec pour morphismes les applications continues, ou encore la catégorie Met des espaces métriques. On rencontre la catégorie hTop dite *catégorie d'homotopie* est la catégorie Top quotientée (au sens que l'on image) par toutes les relations d'équivalence d'homotopie entre applications continues.

La *catégorie des espaces topologiques pointés* est légèrement différente : les objets sont les espaces topologiques dont on a choisi un point (X,x) où $x \in X$ et un morphisme entre deux espaces topologiques pointés (X,x) et (Y,y) est une application continue

φ telle que $\varphi(x) = y$.

6. La catégorie Ord est la catégorie des ensembles ordonnés dont les morphismes sont les applications croissantes. On définit de même la catégories Preord des ensembles préordonnés dont les morphismes sont encore les applications croissantes.
7. *(Cas de la catégorie de toutes les catégories)* Il n'existe pas de catégorie de toutes les catégories dont les morphismes seraient les foncteurs que l'on définira plus tard. La collection des objets n'existe pas, car une catégorie non petite, *i.e.* dont la classe des objets est propre, ne peut appartenir à une classe elle-même. On ne peut non plus définir la catégorie de tous les foncteurs, dont les morphismes seraient toutes les transformations naturelles.
   Cependant, cette limitation pourra être contournée grâce au principe d'agrandissement de l'univers, ou pourra tout simplement être ignorée par le lecteur. Dans ce cas, la catégorie des petites catégories, que nous notons Cat, pourra être comprise comme la catégorie de toutes les catégories, et il pourra noter de son côté **cat** la catégorie de toutes les petites catégories, notation que nous n'utiliserons donc pas pour laisser le choix du sens, par commodité et sans grand impact conceptuel.

Dans tous ces exemples, les objets des catégories sont des ensembles munis de structures supplémentaires et les morphismes sont des appplications qui respectent les structures. On appellera *catégories concrètes* ce type de catégories. Il existe aussi beaucoup de catégories « abstraites » qui sont d'un autre type que ceux-là.

Exemples. *(Catégories dont les objets ne sont pas des ensembles structurés)*

1. La *catégorie vide* $\emptyset$ n'a aucun objet et aucun morphisme.
2. Une *catégorie nulle*, parfois notée 0 pour en fixer une, est une catégorie ayant un unique objet et pour unique morphisme l'identité de cet objet. Toute les catégories nulles seront isomorphes entre elles.
3. La catégorie Rel est la catégorie des relations dont les objets sont les ensembles (oui !) et les morphismes les relations binaires entre ces ensembles. La composition de deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ est donnée par $(a,c) \in S \circ R \iff \exists b \in B \quad (a,b) \in \mathbb{R}$ ET $(b,c) \in S$.
4. Soit k un corps. La *catégorie des matrices sur* k, notée $\mathrm{Mat}(k)$ ou parfois $\mathbb{V}_j$, a pour objets les entiers $n \in N$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}(k)}(n,m) = \mathrm{Mat}_{m,n}(k)$, la composition étant la multiplication des matrices (bien définie, voir la définition de la composition !).
5. Soit G un groupe. La *catégorie classifiante* BG a un seul objet $\cdot$ et $\mathrm{Hom}_{BG}(\cdot, \cdot) = G$ avec pour composition la loi de groupe.
   La même construction s'applique à un monoïde, et **toute catégorie avec un seul objet est obtenue ainsi, à « isomorphisme » près** *(voir plus haut).*
6. La catégorie $\tilde{BG}$, quant à elle, a pour classe d'objets G, et est telle qu'il y ait un

et un seul morphisme entre deux objets donnés de G, autrement dit, pour tous $x,y \in G$, $\mathrm{Hom}(x,y) = \{\emptyset\}$ où $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset$. Notons que cette construction n'utilise pas la structure de groupe sur G : elle vaut pour n'importe quelle classe d'objets.

7. La *catégorie discrète* sur une classe $\mathcal{C}$ est donnée par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \{id_X\}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \emptyset$ si $X \neq Y$. Elle est définie à isomorphisme de catégories près *(voir plus tard)* et est toujours localement petite. Toute sous-catégorie d'une catégorie discrète est encore discrète et toute catégorie contient une unique catégorie discrète ayant la même classe d'objets, qui n'est pas pleine dès que la catégorie de départ n'était pas elle-même discrète.
8. Si $(P, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonné, ou même seulement préordonné, la *catégorie d'incidence* $\mathrm{cat}(P)$ a pour objets les éléments de P et on a pour $x,y \in P$ un seul morphisme $j_{xy} : x \longrightarrow y$ si $x \leqslant y$ et aucun morphisme de x vers y si $x \nleqslant y$. La composition est définie par : si $f \in \mathrm{Hom}(x,y)$ et $g \in \mathrm{Hom}(y,z)$, $g \circ f$ est l'unique morphisme de $\mathrm{Hom}(x,z)$, bien définie, car $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ si f et g existent, donc $x \leqslant z$ par transitivité. Souvent, par abus de notation, on écrira P au lieu de $\mathrm{cat}(P)$. Par exemple, si X est un espace topologique, on peut prendre $P = \mathrm{Open}(X)$ l'ensemble des parties ouvertes de X. Si $x \in X$, on note $\mathrm{Ongd}(x) \subseteq \mathrm{Open}(X)$ la catégorie des voisinages ouverts de x dans X (pour « open-neighbourhood ») qui est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Open}(X)$.
9. *(Catégories de chemins)* On définiera un autre type de catégorie abstraite à l'aide des carquois dans la section sur-sur-suivante.

Exercice 1

Définir la composition avec des matrices à 0 lignes ou 0 colonnes, ou les deux : $[] = id_0$.

▷ **Éléments de réponse.**

Par définition, une matrice à n lignes et à m colonnes est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ dans k. Si n ou m est nul, l'un des facteurs du produit fini $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ est nul, donc il est nul. On cherche donc les applications de $\emptyset$ dans k. Il n'y en a qu'une, notons-là Ω. Or pour composer une matrice A avec une telle matrice, il faut qu'elle ait 0 ligne ou 0 colonne, c'est selon ; il n'y a donc qu'une seule opération à définir : $\Omega \circ \Omega$. Le résultat doit avoir 0 lignes et 0 colonnes pour les mêmes raisons que précédemment. Il suffit donc de poser : $\Omega \circ \Omega = \Omega$.

Propriété. ***(Unicité des morphismes identités)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X \in \mathcal{C}$. Le morphisme id_X est unique.

▷ La preuve est la même que d'habitude. Soient id_X, id'_X deux morphismes vérifiant les propriétés de l'identité. On peut composer sans problème, puisque $X = X$, de sorte que $id_X id'_X = id_X$ mais également $id_X id'_X = id'_X$ en appliquant à id'_X la définition. D'où $id_X = id'_X$. ■

Exercice 2 *(Catégories triviales)*

Comme toute théorie, la généralisation de notions par une notion supérieure, ici la catégorie, généralisant celle de classe structurée par des morphismes, donne également naissance à des exemples plus abstraits. Essayons d'en déterminer quelques petits exemples.

1. Existe-t-il une catégorie à 0 objets et 0 morphismes ?
2. Existe-t-il une catégorie à 0 objets et 1 morphisme ?
3. Existe-t-il une catégorie à 1 objet et 0 morphismes ?
4. Existe-t-il une catégorie à 1 objet et 1 morphisme ?
5. Existe-t-il une catégorie à 1 objet et 2 morphismes ?

5.1.3 Diagrammes commutatifs

Définition. ***(Diagramme, diagramme commutatif)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *diagramme* dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'un nombre fini ou non d'objets de $\mathcal{C}$ et de flèches de $\mathcal{C}$. On le représente souvent en plaçant les objets sur des points du plan à deux dimensions ou de l'espace à trois dimensions et les flèches sont représentées par les arêtes orientées du polygone ou polyèdre formés par eux.
On dit qu'un diagramme *commute* si pour tout couple d'objet X,Y apparaissant dans le diagramme, pour deux chaînes finies de flèches entre X et Y, *i.e.* $X \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} Y$ et $X \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_m} Y$, on a : $f_n \circ \dots \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_1$.

Exemples. ***(Diagrammes commutatifs)***

1. Un *triangle* (dans ce contexte) est un diagramme à trois objets et trois flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

ainsi donc un tel triangle commute si et seulement si $h \circ f = g$.

2. Un *carré* est un diagramme à quatre objets et quatre flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ Z \arrow[r, "u"'] & W \end{tikzcd}$$

ainsi donc un tel carré commute si et seulement si $h \circ f = u \circ g$.

3. On rencontre également des pentagones, des hexagones, des octogones, définis de manière similaire.

4. Un *tétraèdre* est un diagramme à quatre objets et six flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "w"] & \\
 & Y \arrow[u, "u"] \arrow[r, "v"] & Z \\
T \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

ainsi donc un tel tétraèdre, sous cette forme, commute si et seulement si $u \circ g = f$, $v \circ g = h$ et $w \circ f = h$.

Attention, il y a plusieurs formes non équivalentes entre elles de tétraèdres, qui dépendent du sens de la flèche w !

5. Voici un exemple de diagramme infini :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[drr, "f_3"] & & & \\
X_0 \arrow[r, "g_1"'] & X_1 \arrow[r, "g_2"'] & X_2 \arrow[r, "g_3"'] & X_3 & \dots
\end{tikzcd}$$

qui commute si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g_{i+1} \circ f_i = f_{i+1}$.

Principe

Si tous les sous-polygones ou sous-polyèdres d'un diagramme commutent, alors tout le diagramme commute.

Corollaire. ***(Concaténation de diagrammes commutatifs)***

La concaténation de diagrammes commutatifs le long de flèches communes est encore commutative.

$\longrightarrow$ *Convention.* Une flèche « à trouver », « à construire » ou « à définir » est parfois tracée en pointillés comme on l'illustrera abondamment dans la suite.

$\longrightarrow$ *Notation.* Pour préciser qu'un diagramme commute, ce qui est souvent superflu, ou qu'une certaine partie d'un diagramme commute, on peut inscrire un signe égal ou un petit cercle fléché au centre du polygone/polyèdre commutatif.

Exercice 3

Montrer que si un diagramme admet une *queue*, *i.e.* une chaîne à sens unique de morphismes connectée « au bout » à un seul objet du reste du diagramme, elle peut être omise dans l'écriture de toute condition de commutation sans rien changer à cette condition.

Fait

Tout diagramme est triangulable, *i.e.* se ramène à des diagrammes composés de triangles.
Il suffit de composer les queues, typiquement

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] \arrow[ddd] & & \\
& X' \arrow[dr, "g"] & \\
& & X'' \arrow[dll] \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

se ramène à

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "gf"] \arrow[dd] & \\
& X'' \arrow[dl] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

en composant f et g.

5.1.4 Catégories petites, localement petites

Dans la dernière remarque ci-dessus, on a relevé un problème quant à la « taille » d'une catégorie $\mathcal{C}$. Il est plus judicieux de s'intéresser à la taille des classes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$.

On rappelle qu'une classe propre ne peut appartenir elle-même à une classe, ce qui permet d'éviter le paradoxe de Russell.

Définition. ***(Catégorie localement petite)***

Une catégorie est *localement petite* si pour tous objets A,B, la classe des morphismes de A dans B, notée $\mathrm{Hom}(A,B)$, est impropre (autrement dit, c'est un ensemble).

Exemples. ***(Catégories localement petites)***

1. Ens est localement petite. Grp, Ann, Krp, sont localement petites. Pour tout anneau R, pour tout corps k, Mod_R, R-Mod et Vect_k sont localement petites. Top est localement petite. Plus généralement, les catégories concrètes sont localement petites.
2. Par extension, toute catégorie concrète *(voir ce mot)* est localement petite.
3. Il se trouve que la plupart des catégories non concrètes d'étude facile sont encore plus petites, et sont mêmes petites, au sens donné ci-dessous.

4. Les exemples naturels de catégories non localement petites seront donnés par des catégories de foncteurs. Par exemple, Fun(Ens,Ens) n'est pas localement petite.

Définition. ***(Catégorie petite)***

Une catégorie est *petite* si de plus la classe de tous ses morphismes est impropre.
Une catégorie non petite est dite *large*.

Exemples. ***(Catégories petites)***

1. La catégorie des matrices sur un corps k est petite.
2. Toute catégorie classifiante est petite, c'est évident.
3. *(Catégorie des petites catégories)* Les petites catégories et les foncteurs entre elles forment une catégorie localement petite, que l'on appelle Cat.

Remarque. Une catégorie petite est localement petite (car toute partie d'un ensemble est un ensemble), mais la réciproque est fausse.

De plus, **la classe des objets d'une catégorie petite n'est pas forcément impropre**, car on n'est pas forcé, pour définir une certaine catégorie de « prendre toutes les flèches possibles » *(voir ci-dessous)*. C'est le cas cependant pour les catégories concrètes et dont de plus le foncteur d'oubli vers Set est plein *(voir cela plus tard)*.

Contre-exemple. ***(Catégorie localement petite non petite)***

La catégorie Ens est localement petite mais n'est pas petite.

En effet, il y au moins autant d'ensembles E que de morphismes id_E. Comme on a vu, Ob(Ens) est une classe propre. □

Contre-exemple. ***(Une autre catégorie localement petite non petite)***

La catégorie Cat convient également. □

La collection des objets d'une petite catégorie n'est pas nécessairement impropre ! On peut considérer la catégorie $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens})$ et pour tous $x,y \in \mathrm{Ens}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \{\emptyset\}$. On définit la composition par $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset$. C'est une catégorie. Elle est trivialement petite, car $\bigcup\limits_{x,y\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \bigcup\limits_{\mathbb{C}^2}\{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ qui est un ensemble à 1 élément... mais la classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ n'est pas un ensemble.

Heuristique

Tout ceci est cohérent avec l'assertion que l'on peut reconnaître une catégorie à partir de ses morphismes.

Principe. *(Agrandissement de l'univers)*

En fait, la notion de localement petite pourrait être définie « par rapport à la catégorie Ens ». En fait, si l'on *agrandit l'univers*, autrement dit si l'on remplace Ens par une autre catégorie intuitivement plus grande, on dispose d'une notion tout à fait semblable à la petitesse locale et on peut espérer appliquer dans ce contexte les théorèmes sur les catégories localement petites !
Toutes les catégories sont petites à agrandissement de l'univers près.

Définition. *(Catégorie finie)*

Une catégorie est *finie* si elle n'a qu'un nombre fini de morphismes, et donc d'objets.

5.1.5 Carquois, catégories de chemins

On définit dès maintenant cette notion qui précède celle des catégories.

Définition. *(Carquois)*

Un *carquois* est un quadruplet $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ où Q_0 est un ensemble de *points* ou *sommets*, Q_1 est un ensemble de *flèches*, et s et t sont des applications $Q_1 \to Q_0$ qui envoient une flèche α sur sa *source* $s(\alpha)$, respectivement son *but* $t(\alpha)$. On note $s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$. Ainsi, un carquois n'est autre qu'un graphe orienté.
Un *carquois fini* est un carquois dont l'ensemble des sommets ainsi que des flèches est fini.

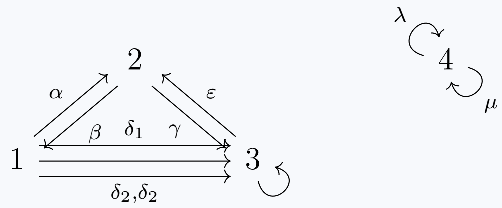
On développe dans des exemples la façon de représenter graphiquement un carquois

Exemples. *(Carquois et notation)*

1. Exemple sur un carquois à trois éléments : on peut écrire $Q : 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3$ où $Q_0 = \{1,2,3\}$, $Q_1 = \{\alpha,\beta\}$, $s(\alpha) = 2$, $t(\alpha) = 3$, $s(\beta) = 1$, $t(\beta) = 2$. Ce carquois serait distinct du suivant même si l'on enlevait l'élément 4 et ses deux flèches repliées sur lui-même.
2. Autre exemple :

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\gamma"] & & & 4 \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[loop right, "\mu"] \\
1 \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, "\delta"'] & & 3 \arrow[ul, shift left, "\varepsilon"] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

qui est bien distinct de



car $Q_1 \neq Q'_1$.

3. Si $\mathcal{C}$ est une (petite) catégorie alors son carquois sous-jacent est donné par $Q = \mathrm{car}(\mathcal{C})$ a $Q_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $Q_1 = \coprod_{x,y \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ avec les applications évidentes[a] s et t. Heuristiquement, on oublie la composition dans $\mathcal{C}$. Ainsi, **une catégorie est une structure de carquois enrichie**.

[a] Un élément de Q_1 est formellement un triplet, s lui attribue sa première composante et t la deuxième.

On essaie d'aller dans l'autre sens.

Définition. ***(Chemin de carquois)***

Soit Q un carquois. Un *chemin* de Q est une suite

$$(y \mid \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n \mid x)$$

telle que $t(\alpha_1) = y$, $t(\alpha_{i+1}) = s(\alpha_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $s(\alpha_n) = x$ pour $n \geqslant 0$, autrement dit, $x \xrightarrow{\alpha_n} x_1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_2 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\alpha_2} x_n \xrightarrow{\alpha_1} y$.
En particulier, pour $x \in Q_0$ on a le *chemin paresseux* ou *stationnaire* ou *trivial* $e_x = \varepsilon_x = (x \mid x)$ en prenant $n = 0$.
Attention, un chemin dans un carquois dépend du choix des flèches et pas seulement des éléments.

Remarque. Il n'y a pas forcément, pour un carquois donné, des chemins de toutes longueurs $n \in \mathbb{N}$. Un chemin paresseux est un chemin de longueur 0. Une flèche est un chemin de longueur 1.

Définition. ***(Catégorie des chemins)***

La *catégorie des chemins* $\mathrm{Ch}(Q) = \mathcal{P}Q$ d'un carquois Q a pour objets les sommets de Q et pour morphismes les chemins de Q avec pour composition la composition assez naturelle des chemins donnée par :

$$(z \mid \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n \mid y) \cdot (y \mid \beta_1 \mid \ldots \mid b_n \mid x) = (z \mid \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n \mid x).$$

Exemples. ***(Catégories de chemins)***

1. La catégorie des chemins de $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ a seulement trois morphismes : e_1, e_2 et $(2 \mid \alpha \mid 1)$. Elle est assez trivialement isomorphe (dans un sens à définir formellement plus tard) à la catégorie associée à l'ensemble $P = \{1 \leqslant 2\}$.
2. La catégorie des chemins de $1 \circlearrowleft \alpha$ a une infinité de morphismes : les α^n, pour $n \in \mathbb{N}$, avec $\alpha^0 = id_1 = (1 \mid 1) = e_1$. Plus généralement, un carquois possédant une flèche d'un élément sur lui-même contient donne lieu à une catégorie de chemins ayant une infinité de morphismes.
3. Réciproquement, la catégorie $\mathcal{P}Q$ des chemins d'un carquois Q est finie si et seulement si Q n'a pas de cycles orientés, *i.e.* des structures de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[dr] & \\
x_0 \arrow[ur] & & & x_3 \arrow[d] \\
x_n \arrow[u] & & & \vdots \\
 & \cdots \arrow[ul] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

ainsi donnée. Par exemple, les catégories de chemins de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 2 & \end{tikzcd}$, de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 1 \end{tikzcd}$

ou de $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$ sont finies, mais pas les catégories de chemins de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$

ou de $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd}$.

À ne pas confondre avec un

Définition. ***(Morphisme de carquois)***

Soient (Q_0,Q_1,s,t) et (Q'_0,Q'_1,s',t') deux carquois. Un *morphisme de carquois* de Q vers Q' est la donnée de deux applications $f_0 : Q_0 \to Q'_0$ et $f_1 : Q_1 \to Q'_1$ telles que pour toute flèche $F \in Q_0$, $s'(f_0(F)) = f_1(s(F))$ et $t'(f_0(F)) = f_1(t(F))$. Autrement dit, c'est une application qui préserve source et but des flèches.

VOC On peut donc définir la *catégorie des carquois*, notée souvent $\mathcal{CAR}$, dont les objets sont tous les carquois et les morphismes sont les morphismes de carquois. Remarque : cette catégorie contient la catégorie de toutes les catégories.

On utilisera plus tard la définition suivante :

Définition. ***(Carquois libre, carquois sur une catégorie)***

Un *carquois libre* ou *carquois de Kronecker* est une catégorie formée à partir d'un carquois $X = (E,V,s,t)$ constitué de deux objets qui sont E et V, de deux morphismes s et t en plus des deux morphismes identités.
Si C est une catégorie, un *carquois sur* C est un foncteur $X \to C$.

Définition. ***(Catégorie de carquois sur une catégorie)***

La *catégorie de carquois sur* C, notée $\mathrm{Quiv}(C)$, est la catégorie de foncteurs C^X dont les objets sont les carquois sur C $X \to C$, et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Remarques.

1. Si C est la catégorie des ensembles, ce qui est souvent le cas, alors la catégorie des carquois correspond à la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie duale X^{op}.
2. On a un foncteur d'oubli $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Quiv}$.

5.1.6 Construction de catégories à partir de catégories

5.1.6.1 Sous-catégorie, sous-catégorie pleine

Définition. ***(Sous-catégorie)***

Une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de certains objets de $\mathcal{C}$, mais pas forcément tous, et de certaines flèches de $\mathcal{C}$, mais pas forcément toutes, de sorte que $\mathcal{C}'$ soit une catégorie.
Il faut donc imposer toutefois :

(i) pour tout $X \in \mathcal{C}'$, $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,X)$:

(ii) pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{C}'$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}j'}(Y,Z), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $fg \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Z)$.

Définition. ***(Sous-catégorie pleine)***

Une sous-catégorie est dite *pleine* si pour tous objets A,B de $\mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Remarque importante. Donc, une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ est déterminée seulement par le choix $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

De même, la donnée d'une sous-catégorie pleine est celle d'une sous-classe de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ dont on dit que les morphismes entre ses objets, sont les morphismes de $\mathcal{C}$ entre objets de $\mathcal{C}'$.

Heuristique

La notion de sous-catégorie pleine est la théorisation de la situation courante : « un morphisme de trucs-machines (par exemple, de groupes abéliens) est un morphisme de trucs (respectivement groupes) entre trucs-machins (respectivement groupes abéliens) ».

Exemples. ***(Sous-catégories et sous-catégories pleines)***

1. Ab est une sous-catégorie pleine de Grp.
2. Ab privé du morphisme $k \mapsto 2k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, est une sous-catégorie non pleine de Grp.

Contre-exemple. ***(Pas des sous-catégories !)***

Grp n'est pas une sous-catégorie de Ens.
Cela vient de ce que l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ peut être muni de plusieurs structures de groupe : typiquement, une isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, une autre à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
De même, Ann n'est pas une sous-catégorie de Ab. $\square$

Exercice 4 *(Sous-carquois, sous-carquois plein)*

Si Q est un carquois et $Q' \subseteq Q$ un *sous-carquois*[a], *i.e.* $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ et les restrictions de s et t coïncident avec s et t, montrer qu'alors $\mathrm{Ch}(Q') \subseteq \mathrm{Ch}(Q)$ est une sous-catégorie de $\mathrm{Ch}(Q)$. Montrer aussi que, si elle est pleine, alors $Q' \subseteq Q$ est *plein*, *i.e.* contient toutes les flèches de Q à source et but dans Q'. Que dire de la réciproque ?

[a] Il revient au même de dire que l'inclusion $Q' \hookrightarrow Q$ est un morphisme de carquois.

5.1.6.2 Quotient d'une catégorie par un objet

Définition. ***(Quotient d'une catégorie par un objet)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S un objet de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/S$ la catégorie définie comme suit : ses objets sont les couples (X,f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et $f : X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{C}$; les morphismes de (X,f) vers (Y,g) sont les morphismes $\varphi : X \to Y$ tel que $f = g \circ \varphi$, autrement dit tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

On peut également construire le quotient dual $S\backslash\mathcal{C}$ du premier comme la catégorie dont les objets sont les couples (X,f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et où $f : S \to X$ est un morphisme, et dont les flèches sont définies comme on peut imaginer.

Exercice 5 *(Exemples de quotient d'une catégorie par un objet)*

On étudie quelques cas particuliers.

1. Si $\mathcal{C} = \mathrm{Ann}$ et $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ann})$, comment réaliser $\mathcal{C}/A$?
2. Même question si $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ et $S = \{\star\}$.
3. La catégorie des groupes pointés est-elle un quotient dual par un objet terminal ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. En fait, il vaut mieux décrire $A\backslash\mathcal{C}$. On obtient la catégorie A-Alg des A-algèbres.
2. Là encore, il vaut mieux décrire $S\backslash\mathcal{C}$. On peut alors y reconnaître la catégorie des espaces topologiques pointés dont on rappelle que les morphismes sont les applications continues qui fixent les points pointés.
3. Dans la catégorie des groupes, le singleton standard est un objet nul comme on le verra plus tard. Or un morphisme du singleton standard dans un groupe G est nécessairemen trivial. Ainsi, un groupe pointé sous cette acception est toujours de la forme (G,e_G), ce qui ne correspond pas à la notion habituelle de pointage : la *catégorie des groupes pointés* est formée des couples (G,g) où $G \ni g$ est un groupe et un morphisme $f : (G,g) \to (G',g')$ est un morphisme de groupes $f : G \to G'$ tel que $f(g) = g'$.

5.1.6.3 Quotient d'une catégorie par une congruence

Exercice 6 *(Congruence dans une catégorie)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour chaque paire d'objets X,Y de $\mathcal{C}$, soit $\sim_{X,Y}$ une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. On dit que la famille de relations $\sim_{X,Y}$ définit une *congruence*, simplement notée $\sim$, dans $\mathcal{C}$, si les $\sim_{X,Y}$ sont compatibles avec la composition, c'est-à-dire si les conditions suivantes sont vérifiées : si $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont tels que $f \sim_{X,Y} g$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,Z)$, alors $hf \sim_{X,Z} hg$; si $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont tels que $f \sim_{X,Y} g$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $fh \sim_{W,Y} gh$. Montrer que si $\sim$ est une congruence sur $\mathcal{C}$, alors on définit une catégorie $C/\sim$, dite *catégorie quotient*, en prenant pour objets les mêmes objets que ceux de $\mathcal{C}$, et pour morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\sim_{X,Y}$ avec une composition à préciser.
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et $\sim^0$ une famille de relations $\sim^0_{X,Y}$ sur les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, si $\sim$ est la plus petite congruence contenant $\sim^0$, on posera $\mathcal{C}/\sim^0 := \mathcal{C}/\sim$.

▷ **Éléments de réponse.**

Évidemment prenons pour $X \in \mathcal{C}$, *i.e.* $X \in \mathcal{C}/\sim$, $id_{X,\mathcal{C}/\sim} = \overline{id_X}$. Son caractère d'élément neutre, ainsi que l'associativité de la décomposition, découlent sans trop de problème du passage au quotient de ces propriétés sur un monoïde, phénomène général. Le gros de la preuve est de vérifier que la composition est elle-même bien définie. Il s'agit alors de montrer que, si $f \sim_{X,Y} g$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $X,Y \in \mathcal{C}$, et si $h \sim_{Y,Z} k$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $Z \in \mathcal{C}$, alors on a bien $hf = kg$ modulo $\sim_{X,Z}$, autrement dit $hf \sim_{X,Z} kg$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. C'est facile : On a

$hf \sim_{X,Z} hg$ par la première propriété et $hg \sim_{X,Z} kg$ par le deuxième propriété, d'où par transitivité de $\sim_{X,Z}$, $hf \sim_{X,Z} kg$, et on peut aller se coucher.

Exemples. *(Quotients de catégorie par congruence)*

1. *(Fondamental)* Étant donné un carquois, on définit la *catégorie des chemins commutative* du carquois Q, notée $\tilde{\mathrm{Ch}(Q)}$, obtenue en déclarant équivalents deux chemins quelconques sur le carquois Q ayant même source et même but.
   Ceci permet de reformuler les définitions relatives aux diagrammes commutatifs dans le langage des carquois. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, D_0 un ensemble d'objets de $\mathcal{C}$ et D_1 un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ dont sources et buts sont dans D_0, on obtient un carquois D, dit diagramme dans $\mathcal{C}$. Il est commutatif, si et seulement si, $D = \tilde{\mathrm{Ch}(D)}$.
2. On a déjà rencontré la catégorie d'homotopie $h\mathrm{Top}$ qui n'est autre le quotient de Top par les homotopies. On remarque alors que $h\mathrm{Top}$ n'est en fait pas une catégorie concrète !

Exercice 7 *(Quotient d'une catégorie de chemins)*

1. Calculer le nombre de morphismes de la catégorie de chemins du carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"'] & 2 \arrow[d, "a"] \\ 3 \arrow[r, "c"'] & 4 \end{tikzcd}$$

   modulo $ab \sim cd$.
2. Même question pour le carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

   modulo $a \sim b$.
3. Même question pour le carquois précédent, mais cette fois modulo $ca \sim cb$.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On trouve $4 + 4 + 2 = 10$ morphismes = chemins dans la catégorie de chemins de ce carquois, puis 9 dans la catégorie du carquois quotienté.
2. On trouve $3 + 2 + 1 = 6$ chemins dans la catégorie quotientée.
3. Cette fois, on trouve $3 + 3 + 1 = 7$ chemins dans la catégorie quotientée.

5.1.6.4 Catégorie opposée

Définition. ***(Catégorie opposée)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a, par définition, les mêmes objets, ses collections de morphismes sont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ pour tous objets X,Y et la composition est donnée par $g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$. Autrement dit, si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ_{\mathcal{C}} g"] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "g"'] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g\circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f = f\circ_{\mathcal{C}} g"] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

En particulier, les identités sont les mêmes dans les deux catégories.

La catégorie opposée est celle dont on garde les objets et inverse le sens des flèches.

Celui ayant déjà entendu par de groupe opposé, de module à droite... n'a peut être aucun souci avec cette définition. C'est dommage : il est important de sentir l'abstraction assez peu raisonnable de cette définition qui consiste à créer des flèches qui n'existent pas entre des objets. En particulier, l'opposée d'une catégorie concrète est assez sûrement non concrète.

Propriété. ***(Involutivité de l'opposition)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors $\mathcal{C}^{\mathrm{op}\,\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Exemples. ***(Catégories opposées)***

1. Si $(P,\leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonnée, alors $\mathrm{cat}(P)^{\mathrm{op}} \simeq_{\text{isomorphisme}} \mathrm{cat}(P^{\mathrm{op}})$ (toujours en un sens dont la définition est à venir).
2. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, alors $\mathrm{car}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} = \mathrm{car}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ où le carquois opposé est lui-même défini en prenant les mêmes points et en inversant le sens de chaque flèche.
   Échanger s et t !
   Autrement dit, $(Q_0,Q_1,s,t)^{\mathrm{op}} = (Q_0,Q_1,t,s)$.
3. Si Q est un carquois, alors $\mathrm{Ch}(Q)^{\mathrm{op}} \simeq_{\text{isomorphisme}} \mathrm{Ch}(Q^{\mathrm{op}})$.
4. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ n'est pas isomorphe, ni même équivalente, à Ens.
   Ceci vient du fait que pour tout ensemble A, toute application de $A \to \emptyset$ est un isomorphisme (parce qu'il n'y en a aucune). Si $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ était équivalente à Ens, on aurait l'existence d'un ensemble Z telle que toute application de Z dans A soit un isomorphisme, *i.e.* une bijection comme on

le montrera plus tard. Si $Z = \emptyset$, c'est grossièrement faux. Sinon, soit $z_0 \in Z$. En particulier, $id_Z : Z \to Z$ est un isomorphisme. Rajoutons un élément à Z pour avoir $Z' = Z \cup \{Z\} \neq Z$, grâce à l'axiome de fondation, et prolongeant id_Z à Z' en posant $f(Z) = z_0$. Alors z_0 à deux antécédents par $\tilde{id_Z}$ dans Z', donc $\tilde{id_Z}$ ne peut être un isomorphisme, contradiction.

5. Si G est un groupe, alors $B(G^{\text{op}}) = (BG)^{\text{op}}$, et du fait que G et G^{op} sont isomorphes, BG et $(BG)^{\text{op}}$ sont des catégories isomorphes, en particulier équivalentes.

Principe. ***(Principe de dualité)***

Pour toute propriété catégorique vérifiée sur une catégorie $\mathcal{C}$, la propriété duale, c'est-à-dire obtenu en inversant le sens des flèches, est vraie dans $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Si l'on se place dans une catégorie munie d'une structure additionnelle, par exemple linéaire, additive, triangulée, etc., il faut vérifier que cette structure est stable par opposition, c'est-à-dire que la catégorie opposée est muni de la même structure de façon compatible. C'est pourquoi nous énonçons systématiquement des propriétés de stabilité d'une structure par $\cdot^{\text{op}}$.

5.1.6.5 Produit de catégories

Définition. ***(Produit de deux catégories)***

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Le *produit de catégories* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ des deux catégories, est défini par $\text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((x,x'),(y,y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(x',y')$ pour tous $x,x' \in \mathcal{C}$, pour tous $y,y' \in \mathcal{D}$. La composition est définie de manière évidente, terme à terme.

Définition. ***(Produit quelconque de catégories)***

Soit Λ une classe et $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de catégories indexée par Λ. La *catégorie produit* $\mathcal{C} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda$ est celle dont les objets sont les familles $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ avec $X_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et les morphismes entre deux objets $f : (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont les familles de morphismes $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, la composition étant définie composante par composante par $gf = (g_\lambda f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $g = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

$\longrightarrow$ *Convention.* Si $\Lambda = \emptyset$, on a que le produit de catégories vide est la catégorie vide $\emptyset$.

$\longrightarrow$ **Notations.**

1. Si $\Lambda = [\![1,n]\!]$, on note le produit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n$.
2. Si tous les $\mathcal{C}_\lambda$ sont égaux, disons à $\mathcal{D}$, on note $\mathcal{C} = \mathcal{D}^\Lambda$.

Exemples. *(Produits de catégories)*

1. Si P et P' sont des ensembles partiellement ordonnés, alors $\mathrm{cat}(P \times P') \simeq_{\text{isomorphime}} \mathrm{cat}(P) \times \mathrm{cat}(P')$.
2. *(Exercice moins évident)* Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des chemins du carquois à une seule flèche $1 \xrightarrow{\alpha} 2$, alors $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ n'est pas isomorphe ni même équivalente à une catégorie de chemins.

5.1.7 Morphismes particuliers d'une catégorie

Heuristique

Dans une catégorie concrète, on peut parler de morphismes bijectifs, injectifs, surjectifs... car les objets ont des éléments, mais dans une catégorie générale, ils n'en ont pas. La philosophie à partir de là est (comme toujours) de remplacer les éléments « $x \in X$ » par des morphismes « $f : Y \to X$ ».

5.1.7.1 Endomorphismes

Définition. *(Endomorphisme)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle *endomorphisme* de X un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$. On note : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$.

5.1.7.2 Sections, rétractions

Définition. *(Section, rétraction)*

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X,Y deux objets de $\mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ avec

$$f \circ g = id_Y.$$

On dit que g est une *section* de f et que f est une *rétraction* de g.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "id_Y"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, une section est un *inverse à droite* et un *inversible à gauche* encore appelé *monomorphisme scindé* ou *rétractable*, une rétraction un *inverse à gauche* et un *inversible à droite* encore appelé *épimorphisme scindé* ou *sectionnable.*

Mnémonik : retenir la relation $rs = 1$.

Remarque. Bien évidemment, les notions de section et rétraction sont duales l'une de l'autre.

5.1.7.3 Monomorphismes

Définition. ***(Monomorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme, $X,Y \in \mathcal{C}$. On dit que f est un *monomorphisme* ou *mono* si pour tous $g,h : U \to X$, U parcourant $\mathcal{C}$, on a $fg = fh \implies g = h$.

Remarque. Il revient au même de dire que l'application $f_* : \mathrm{Hom}(Z,X) \to \mathrm{Hom}(Z,Y), g \mapsto f \circ g$ est injective pour tout objet $Z \in \mathcal{C}$.

Mnémonik : Le suffixe mono-, qui nous vient du grec, signifie *un seul*. Ceci rappelle la propriété d'injectivité. Si l'on n'aime pas l'étymologie, on peut calculer que cette propriété dans un anneau signifie l'inversibilité à gauche.

Reformulation pratique. ***(Monomorphie par diagramme)***

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme si et seulement si pour tous morphismes $g,h : W \to X$, la commutation de

$$W \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

implique que la double flèche n'est qu'une.

Fait. ***(Monomorphie et injectivité)***

Dans une catégorie concrète, un morphisme injectif est un monomorphisme, mais la réciproque est fausse en général même dans une catégorie concrète.

En effet, un morphisme injectif f admet une rétraction ensembliste f' telle que $f'f = id$. Supposons que $fg = fh$. Alors $f'fg = f'fh$ dans Ens dans laquelle se plonge notre catégorie, soit $g = h$. On verra des contre-exemples de la réciproque dans les exemples qui suivent.

Exemples. ***(Monomorphismes)***

1. Une identité est un monomorphisme.
2. Dans la catégories des ensembles Ens, les monomorphismes sont les injections.

   Ens étant concrète, montrons simplement qu'un monomorphisme $f : X \to Y$ est une application injective. Soient $x,y \in X$. Soient $g : \begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \longrightarrow & X \\ \emptyset & \longmapsto & x \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \longrightarrow & X. \\ \emptyset & \longmapsto & y \end{array}$ Alors si $f(x) = f(y)$, *i.e.* $fg(\emptyset) = fh(\emptyset)$, puisque $\{\emptyset\}$ n'a qu'un élément, $fg = fh$, d'où $g = h$. En particulier $g(\emptyset) = h(\emptyset)$ soit $x = y$.

3. De même, dans la catégorie des espaces topologiques Top, les monomorphismes sont les injections continues.

   On utilise le raisonnement précédent mot pour mot, en munissant $\{\emptyset\}$ de n'importe quelle topologie (d'ailleurs, il n'y en a qu'une), disons la topologie discrète. Les applications g et h étant constantes, elles seront nécessairement continues et la preuve fonctionne dans le contexte de Top.

4. Dans la catégorie des groupes Grp, les monomorphismes sont les morphismes injectifs.

   Le raisonnement précédent ne tient plus. À la place, soif $f : X \to Y$ un monomorphisme. Soient $G : \{e\}$ le groupe nul et $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soient $g : G \to X$ l'application constante égale au nul et $h : H \to X$ l'inclusion canonique. Alors $fg = fh$ sont toutes les deux nulles, d'où $h = g$. En particulier, $H = \mathrm{Ker}(f) = G = \{e\}$ donc f est injectif.

5. Dans la catégorie des anneaux Ann, les monomorphismes sont les morphismes injectifs.

   Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux qui est un monomorphisme. La preuve précédente ne fonctionne plus, car $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas un anneau unitaire. Soient $x,y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$. Soient les morphismes donnés par propriétés universelles $g : \mathbb{Z}[X] \to A$, $X \mapsto x$ et $h : \mathbb{Z}[X] \to A$, $X \mapsto y$. Puisque f est un morphisme, $fg = fh$, d'où $g = h$, d'où $g(X) = x = y = h(X)$.

6. Si A est un anneau, les monomorphismes dans Mod A sont les morphismes de modules qui sont injectifs. On en déduit le même résultat dans Ab en prenant $A = \mathbb{Z}$ (ce qui ne se déduisait pas tout à fait immédiatement de la propriété dans Grp) et dans k-Vect en prenant $A = k$ où k est un corps. Le résultat tient encore dans une catégorie de type alg..

   Encore une fois, il suffit de montrer qu'un monomorphisme $f : M \to N$ est injectif. La preuve utilisée pour les groupes fonctionne alors mot pour mot.

7. Dans la catégorie des groupes abéliens divisibles, il existe des monomorphismes qui ne sont pas injectifs, typiquement, la projection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

On retrouve des propriétés semblables à celles des applications injectives dans Ens.

Propriété. ***(Composition de monomorphismes)***

Le composé de deux monomorphismes est un monomorphisme.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un monomorphisme, alors u est un monomorphisme.

Corollaire. ***(Sections et monomorphismes)***

Toute section (*i.e.* tout morphisme inversible à gauche) est un monomorphisme.

Exercice 8

Fournir un contre-exemple pour la réciproque : un monomorphisme non inversible à gauche.

▷ **Éléments de réponse.**

Comme on le verra plus en détail dans la section suivante, l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ en tant qu'anneaux est un monomorphisme, mais il n'y a aucun morphisme d'anneaux de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, donc aucune chance de trouver une rétraction...

On introduit également la notion duale.

5.1.7.4 Épimorphismes

Définition. ***(Épimorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme, $X,Y \in \mathcal{C}$. On dit que f est un *épimorphisme* ou *épi* si pour tous $g,h : Y \to Z$, Z parcourant $\mathcal{C}$, on a $gf = hf \implies g = h$.

Mnémonik : Le suffixe épi-, qui nous vient du grec, signifie *sur*. Ceci rappelle la propriété de surjectivité. Si l'on n'aime pas l'étymologie, on peut calculer que cette propriété dans un anneau signifie l'inversibilité à droite.

Remarque. Il revient au même de dire que l'application $f^* : \mathrm{Hom}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X,Z), g \mapsto g \circ f$ est injective pour tout objet $Z \in \mathcal{C}$.

Reformulation pratique. ***(Épimorphie par diagramme)***

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme si et seulement si pour tous morphismes $g,h : Y \to Z$, la commutation de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

implique que la double flèche n'est qu'une.

Fait. ***(Lien monomorphie-épimorphie)***

Les épimorphismes sont les monomorphismes de la catégorie opposée et inversement.

Fait. ***(Épimorphie et surjectivité)***

Dans une catégorie concrète, un morphisme surjectif est un épimorphisme, mais la réciproque est fausse en général même dans une catégorie concrète.

En effet, un morphisme surjectif f admet une section ensembliste f' telle que $ff' = id$. Supposons que

$gf = hf$. Alors $gff' = hff'$ dans Ens dans laquelle se plonge notre catégorie, soit $g = h$. On verra des contre-exemples de la réciproque dans les exemples qui suivent.

Exemples. ***(Épimorphismes)***

1. Une identité est un épimorphisme.
2. Dans la catégories des ensembles Ens, les épimorphismes sont les surjections.

   Ens étant concrète, montrons simplement qu'un épimorphisme $f : X \to Y$ est une application surjective. Soit $y \in Y$. Soit $Z = \{0,1\}$, ensemble à deux éléments. On pose $g : Y \to Z, t \mapsto 1$ et $h : Y \to Z, t \mapsto [t \in \mathrm{Im}(f)]$. Alors $gf = hf$, d'où $g = h$. En particulier, $g(y) = 1 = h(y)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.
3. De même, dans la catégorie des espaces topologiques Top, les épimorphismes sont les surjections continues.

   On utilise le raisonnement précédent mot pour mot, en munissant $\{0,1\}$ de la topologie grossière. Les applications g et h seront alors continues automatiquement et la preuve fonctionne dans le contexte de Top.
4. Dans la catégorie des groupes Grp, les épimorphismes sont les morphismes surjectifs, mais c'est plus difficile à voir.

   Soit $f : G \to H$ un épimorphisme de groupes. Alors $K = \mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de H, non nécessairement distingué. On fait agir H à gauche sur l'ensemble des classes à gauche de K, par $x.yK = (xy)H$, ce qui nous donne un morphisme de de groupes g de H dans $\mathfrak{S}(H/K)$. Pour tout $x \in H$, $g(x)$ envoie yK sur xyK. Ajoutons un élément à H/K et étendons g de H dans $\mathfrak{S}(H/K \cup \{\infty\})$ en posant $g(x)(\infty) = \infty$ pour tout $x \in H$. Soit $\tau = (K\infty)$ qui est une transposition de $\mathfrak{S}(H/K \cup \{\infty\}$. Posons $h = \tau \circ g \circ \tau$. Alors on peut montrer au cas par cas que $hf = gf$, dont on déduit que $h = g$, *i.e.*, si $x \in H$, $g(x) = h(x)$. En particulier, $g(x)(K) = xK = h(x)(K) = K$, soit $x \in K$, d'où $\mathrm{Im}(f) = H$, et f est surjectif.
5. Attention : l'inclusion $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux mais n'est pas surjective ! C'est aussi un monomorphisme dans la catégorie des anneaux, mais ce n'est pas un isomorphisme.

   En effet, Ann est concrète et l'inclusion canonique $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est injective, donc f est un monomorphisme. Supposons $gf = hf$ pour g,h morphismes d'anneaux convenant. Soit $q \in \mathbb{Q}$. $q = \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, $g(q) = g(\frac{k}{n}) = \frac{g(k)}{g(n)}$, car g est un morphisme d'anneaux unitaires, puis $g(q) = \frac{g(f(k))}{g(f(n))} = \frac{h(f(k))}{h(f(n))} = \frac{h(k)}{h(n)} = h(q)$, d'où $g = h$.
   Cependant, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes. En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \emptyset$.
6. Si A est un anneau, les épimorphismes dans Mod A sont les morphismes de modules qui sont surjectifs. On en déduit le même résultat dans Ab en prenant $A = \mathbb{Z}$ (ce qui ne se déduisait pas tout à fait immédiatement de la propriété dans Grp) et dans k-Vect en prenant $A = k$ où k est un corps. Le résultat tient encore dans une catégorie de type alg..

Encore une fois, il suffit de montrer qu'un épimorphisme $f : M \to N$ est surjectif. C'est plus simple que pour les groupes, car l'objet $N/\mathrm{Im}(f)$ existe. Considérons alors la projection $\pi : N \to N/\mathrm{Im}(f)$ et l'application nulle $g : N \to N/\mathrm{Im}(f)$. Alors $\pi f = gf$, d'où $\pi = g$. Or $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g) = N$, d'où $N = \mathrm{Im}(f)$ et f est surjective.

7. Dans la catégorie des espaces topologiques séparés, il existe des épimorphismes qui ne sont pas surjectifs, typiquement, le plongement $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, qui est d'image dense.

On retrouve des propriétés semblables à celles des applications surjectives dans Ens.

Propriété. ***(Composition d'épimorphismes)***

Le composé de deux épimorphismes est un épimorphisme.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un épimorphisme, alors v est un épimorphisme.

Corollaire. ***(Rétractions et épimorphismes)***

Toute rétraction (*i.e.* tout morphisme inversible à droite) est un épimorphisme.

Exercice 9

Fournir un contre-exemple pour la réciproque : un épimorphisme non inversible à droite.

▷ **Éléments de réponse.**

L'inclusion $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$, étudiée ci-dessus, convient.

5.1.7.5 Isomorphismes

Nous introduisons une notion capitale en mathématiques.

Définition. ***(Isomorphisme)***

Un isomorphisme entre deux objets X, Y d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme f de X dans Y tel qu'il existe un morphisme g de Y dans X tel que $g \circ f = f \circ g = id_X$. On note $\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur Y. On dit que g est le *morphisme inverse* ou *réciproque* de f.

A priori, avoir une seule des deux égalités ne suffit pas, comme largement illustré précédemment.

Il revient au même, dans une catégorie concrète, de se donner un morphisme bijectif donc l'inverse est encore un morphisme. Dans beaucoup de catégories, cette dernière condition est automatiquement vérifiée : groupes, espaces vectoriels, etc. Ce n'est pas général toutefois : par exemple, dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, l'inverse d'une bijection croissante n'est pas nécessairement croissante.

Lemme. ***(Unicité du morphisme réciproque)***

Si un morphisme est inversible dans sa catégorie, son morphisme inverse est strictement unique.

▷ Si g et g' sont deux inverses de f, $g \circ f = id_X$ d'où $g \circ f \circ g' = g' = g \circ id_Y = g$. ■

On a en fait mieux :

Théorème. ***(Caractérisation des isomorphismes)***

Un isomorphisme est exactement une section-rétraction.

▷ Il est clair qu'un isomorphisme est à la fois une section et une rétraction. Réciproquement, supposons que $f : X \to Y$ soit une section et une rétraction, de sorte que respectivement $fg = id_Y$ et $hf = id_X$. Alors $h = h(fg) = (hf)g = g$, donc f est un isomorphisme. ■

En particulier, on a :

Propriété. ***(Isomorphisme $\implies$ épimorphisme et monomorphisme)***

Tout isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme.

Contre-exemple. ***(Épimorphisme et monomorphisme qui n'est pas un iso.)***

On a déjà vu un exemple dans la section précédente : l'inclusion canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ est un épimorphisme et plus étonnamment un monomorphisme de la catégorie Ann. Cependant, ce n'est pas un isomorphisme.
En effet, si $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ étaient isomorphes en tant qu'anneaux, il ne seraient en tant que groupe mais $\mathbb{Q}$ n'est pas monogène. □

Exemple. ***(Isomorphismes dans les catégories concrètes)***

Dans une catégorie concrète $\mathcal{C}$ où les monomorphismes sont les morphismes injectifs et les épimorphismes sont les morphismes surjectifs **et où tout morphisme bijectif a pour inverse un morphisme**, les isomorphismes de $\mathcal{C}$ sont les morphismes bijectifs.

Contre-exemple. ***(Morphisme bijectif qui n'est pas un iso.)***

Dans la catégorie Top, les isomorphismes sont les homéomorphismes, or il existe des bijections continues qui ne sont pas des homéomorphismes. □

On a des propriétés de calcul semblables à celles des ensembles.

Propriété. ***(Morphisme réciproque d'un isomorphisme)***

Le réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Propriété. ***(Composition d'isomorphismes)***

Le comoposé de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Corollaire. ***(Relation d'isomorphie)***

Dans toute catégorie $\mathcal{C}$, la relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur la casse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un isomorphisme, alors v est une rétraction et u est une section.

On a enfin :

Proposition. ***(Mono + épi scindé $\implies$ iso)***

Tout monomorphisme sectionnable est un isomorphisme.

▷ Soit s une section d'un monomorphisme f, *i.e.* $fs = id$. Alors $f(sf) == (fs)f = f = f.id$, puis par monomorphie $sf = id$, autrement dit s est l'inverse de f. ■

Proposition. ***(Épi + mono scindé $\implies$ iso)***

Tout épimorphisme rétractable est un isomorphisme.

▷ C'est la propriété duale de : mono + épi scindé $\implies$ iso. ■

5.1.7.5.1 Unicité, essentialité et canonicité

Définition. ***(Unique àip, essentiellement unique)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X \in \mathcal{C}$ vérifiant une propriété P est dit *unique à isomorphisme près (àip)* ou *essentiellement unique* si deux objets vérifiant P sont isomorphes dans $\mathcal{C}$.

Définition. ***(Unique àipàuip, canonique)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X \in \mathcal{C}$ vérifiant une propriété P est dit *unique à isomorphisme près à unique isomorphisme près (àipàuip)* ou *canonique* si deux objets vérifiant P sont isomorphes dans $\mathcal{C}$ et qu'il n'existe qu'un seul isomorphisme entre eux.

Canonique est trop utilisé à tort dans le langage courant. Il ne faut le confondre avec unique et préférer le terme automatique pour signifier une construction induite par l'évidence.

Définition. ***(Singleton standard)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie concrète. S'il existe, et s'il est unique à isomorphisme près, « l' » objet de cardinal 1 dans $\mathcal{C}$ est abusivement appelé *singleton standard.*

Exemples. ***(Singletons standard)***

1. Dans la catégorie des ensembles, le singleton $\{\emptyset\}$ est standard.
2. Dans la catégorie des espaces topologiques, le singleton $\{\star\}$ est standard.
   Car toute application constante est continue.
3. Dans la catégorie des groupes, le groupe nul $\{0\}$ est standard.
   Car il n'y a qu'une loi de composition possible sur ce groupe.

Remarque. Rien n'oblige a priori qu'une application constante entre deux points soit un morphisme... (mais quand même, ce serait abuser).

5.1.7.5.2 Invariance

Définition. ***(Invariant)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Un *invariant* de $\mathcal{C}$ relatif à $\mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui passe au quotient simultanément sur les classes pour la relation d'isomorphie, *i.e.* pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$ isomorphes, $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.

Définition. ***(Invariant complet)***

Un *invariant complet* ou *total* est un invariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sur une catégorie relatif à une catégorie tel que $\tilde{F} : \mathcal{C}/\simeq_{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}/\simeq_{\mathcal{D}}$ soit injectif en tant qu'application de classes, *i.e.* pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, si $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes, alors X et Y le sont.

5.1.7.5.3 Catégorie essentiellement petite

Définition. ***(Catégorie essentiellement petite, svelte)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *localement petite* ou *svelte* si elle est localement petite et si la classe de ses classes d'isomorphismes forme un ensemble.

Exemple. ***(Catégorie essentiellement petite)***

Si R est un anneau, la catégorie des R-modules à droite de type fini mod R est essentiellement petite.

Exercice 10

Montrer qu'en présence de l'axiome du choix, une catégorie $\mathcal{C}$ est essentiellement petite si et seulement si elle est équivalente à une petite catégorie.

▹ **Éléments de réponse.**

Ce n'est pas si évident. En particulier, distinguons le fait qu'il existe seulement un petit nombre de classes d'isomorphismes, *i.e.* la classe de toutes forme un ensemble, avec le fait que $\bigcup_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ soit un ensemble, ce qui est plus fort, car cela impliquerait que $\mathcal{C}$ est petite, puisque $\{id_X, X \in \mathcal{C}\} \subseteq \bigcup_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

D'une part, localement petite + petit nombre de classe d'isomorphismes + axiome du choix sur les classes $\implies$ équivalente à une petite catégorie : soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, c'est-à-dire que pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un ensemble et $\{\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y), X,Y \in \mathcal{C}\}$ est un ensemble, où $\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est la classe des isomorphismes de X à Y. En admettant l'axiome du choix sur les classes, soit $\mathcal{T}$ un système de représentants de la relation d'isomorphisme sur la classe des objets de $\mathcal{C}$. Remarquer que $\mathcal{T}$ est un ensemble en vertu de notre seconde hypothèse. Soit $\mathcal{P}$ une catégorie dont la classe des objets est $\mathcal{T}$ et pour tous $X,Y \in \mathcal{T}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, puisque $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ défini par : pour $X \in \mathcal{C}$, $F(X)$ est l'unique objet de $\mathcal{C}$ isomorphe à X (disons, par $g_X : F(X) \to X$ et l'on choisit arbitrairement $(g_X)_{X\in\mathcal{C}}$ avec l'axiome du choix encore) choisi dans $\mathcal{T}$, et pour $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, $F(f) = g_Y^{-1} \circ f \circ g_X$, ce qui est compatible avec la composition. Alors F est essentiellement surjectif par construction. De plus, il est fidèle, puisque g_Y, g_X sont inversibles, et plein, écrire : $f = g_Y \circ F(X) \circ g_X^{-1}$. Enfin, $\mathcal{P}$ est une catégorie petite : en effet, $\mathcal{T}$ est un ensemble, donc $\bigcup_{X,Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$ est un ensemble, puisque les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$ sont des ensembles, car $\mathcal{C}$ est localement petite.

Réciproquement, équivalente à une petite catégorie $\implies$ localement petite + petit nombre de classe d'isomorphismes : si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ est une équivalence où $\mathcal{P}$ est petite, en particulier localement petite, pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un ensemble, puisqu'il est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F(X),F(Y))$ par pleine fidélité.

Donc $\mathcal{C}$ est localement petite. D'autre part, soit encore $\mathcal{T}$ un système de représentants de l'isomorphie dans $\mathcal{C}$. On voit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{T}$ est un ensemble, ce qui est équivalent à ce que $\{id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X), X \in \mathcal{T}\}$ soit un ensemble. Pour $X' \in \mathcal{P}$, il existe au plus un $X \in \mathcal{T}$ tel que $F(X) = X'$. Ainsi l'on a une injection de $\{id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X), X \in \mathcal{T}\}$ dans $\{id_{X'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X',X'), X' \in \mathcal{P}\}$, qui est un ensemble, car inclus dans $\bigcup_{X,Y \in \mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$. Remarquons qu'il suffit pour la réciproque que $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathcal{P}$.

Exercice 11 *(Caractérisations de la petitesse essentielle)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{C} \cong \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est petite ;

(ii) la catégorie des préfaisceaux $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})$ est localement petite ;

(iii) pour tout préfaisceau $q : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ et copréfaisceau $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, la cofin $\int_{y \in \mathcal{C}} py \times qy$ est petite ;

(iv) tout préfaisceau sur $\mathcal{C}$ est *petit*, *i.e.* c'est la colimite petite de foncteurs représentables ;

(v) pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ de codomaine localement petit, pour tout objet $b \in \mathcal{B}$, le préfaisceau $\mathcal{B}(F?,b) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est petit.

5.1.7.6 Automorphismes

Définition. ***(Automorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle *automorphisme* de X un élément de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X,X)$ qui est un isomorphisme. On note $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ l'ensemble des automorphismes, ou isomorphismes de X.

Remarque. Étant donné un objet $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ n'est jamais vide : il contient toujours id_X.

Propriété. ***(Composition d'automorphismes)***

Le composé de deux automorphismes est un automorphisme.

▷ Puisque le composé de deux endomorphismes est toujours défini, et un endomorphisme lui-même. ■

Propriété. ***(Description des isomorphismes)***

Soit C une catégorie et X,Y deux objets de C. Si X et Y sont isomorphes (dans C), par disons $\varphi : X \simeq Y$, alors l'ensemble des isomorphismes de X dans Y est $\varphi \circ \alpha$ pour α

parcourant $\mathrm{Aut}(X)$.
De même, l'ensemble des isomorphismes de X dans Y est $\alpha \circ \varphi$ pour α parcourant $\mathrm{Aut}(Y)$.

▷ Il est clair qu'un tel objet est un isomorphisme de X dans Y, d'inverse $\alpha^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Réciproquement, soit $f : X \longrightarrow Y$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme (par composition) de X dans X, donc $\alpha = f^{-1} \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(X)$. Ainsi $\varphi \circ \alpha^{-1} = f$. Puisque $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}(X)^{-1}$, le théorème est montré. La propriété duale se montre semblablement ■

Corollaire

Un objet est unique à isomorphisme près à unique isomorphisme près, si et seulement si, il est unique à isomorphisme près et son groupe d'automorphisme est trivial.

Exercice 12 *(Quelques objets uniques àipàuip)*

1. Quels sont les objets uniques àipàuip de Ens ?
2. Quels sont les objets uniques àipàuip de Grp ?
3. En déduire les objets uniques àipàuip de Ann.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Soit X un ensemble unique àipàuip, en particulier $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ens}}(X) = \mathfrak{S}(X) = \{id_X\}$. Alors $\mathrm{card}(X) < 2$. Réciproquement, $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$ sont uniques àipàuip.
2. Soit G un groupe unique àipàuip. Alors $\mathrm{Aut}(G) = \{id_G\}$. En particulier, $\mathrm{Int}(G) = \{id_G\}$, donc G est commutatif. De plus, $x \mapsto x^{-1}$ est l'identité, autrement dit, $x^{-1} = x$ pour tout $x \in G$, soit $x^2 = e_G$ pour tout x. Ainsi, G est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^I$. Si I a plus de deux éléments, l'échange des deux premières composantes fournit un automorphisme non trivial. Donc $I = \{\emptyset\}$ ou $I = \emptyset$. On trouve donc $G = \{0\}$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Réciproquement, $\mathrm{Aut}(\{0\}) = \{id\}$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\}$.
3. Ce sont les mêmes que dans Grp !

Principe. ***(Changement d'échelle en théorie des catégories)***

Nous avons vu que toutes les catégories forment une catégorie dont les morphismes sont les foncteurs. Ainsi, on peut appliquer tout ce vocabulaire aux foncteurs !
Nous allons voir aussi que les foncteurs entre deux catégories données forment une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles. Ainsi, on peut aussi appliquer tout ce vocabulaire aux transformations naturelles !
Par un effort d'abstraction supplémentaire, on comprend que ce processus peut continuer.

5.1.7.7 Groupoïde

Définition. ***(Groupoïde)***

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible, autrement dit, telle que pour tous objets X de Y de cette catégorie, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ soit un groupe (au sens des classes).

Définition-propriété. ***(Cœur d'une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors il existe un plus grand groupoïde, qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$. On la note $H(\mathcal{C})$ et on l'appelle le *cœur* de $\mathcal{C}$.

▷ Par analyse-synthèse, $\mathrm{Ob}(H(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ et pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,Y) = \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. ■

Remarque. Tout groupoïde $\mathcal{G}$ est son propre cœur et pour tout objet $X \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ est un groupe au sens des classes.

Exemple. ***(Cœur d'une catégorie d'incidence)***

Soit $(P,\leqslant)$ un préordre. Alors $H(\mathrm{cat}(P))$ a pour morphismes entre X et Y l'unique morphisme de $X \to Y$ si $X \leqslant Y$ ET $Y \leqslant X$ et aucun morphisme sinon. En particulier, si $\leqslant$ est un ordre, $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,Y) = \emptyset$ si et seulement si $X \neq Y$ et $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,X) = id_X$.

Lemme

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Soient $X,Y \in \mathcal{G}$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ soit non vide, contenant f. Alors $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ sont isomorphes par les pré- et post-compositions f^* et f_*.

▷ La preuve est semblable à celle donnée pour la description des isomorphismes entre deux objets via les groupes d'automorphismes. ■

Définition. ***(Groupoïde connexe)***

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. On dit que $\mathcal{G}$ est *connexe* si pour tous $X,Y \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y) \neq \emptyset$.

Propriété. ***(Classification des groupoïdes connexes)***

Les groupoïdes connexes sont exactement les classes d'équivalence au sens des équivalences de catégories de catégories classifiantes de groupes.

▷ Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe. Grâce à l'axiome du choix sur les classes, choisissons $y_{Y,Y'}$ pour tous $X,Y \in \mathcal{G}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y,Y')$, en imosant $y_{Y,Y} = id_Y$. On vérifie que l'on définit alors un groupe en posant $G = \bigcup\limits_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ muni de la loi de composition, pour $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z'$, $g \cdot f := g y_{Y,Y'} f$. Soit F un foncteur de $\mathcal{G}$ dans BG, forcément constante sur les éléments, et qui vaut l'identité sur les morphismes : c'est possible *(et si ce n'est pas clair, revoir la définition de catégorie classifiante)*. On a donc un foncteur pleinement fidèle de F dans $\mathcal{G}$. Il est évidemment essentiellement surjectif, puisque constant sur les objets.

Réciproquement si $\mathcal{G}$ est une catégorie équivalente à la catégorie classifiante d'un groupe par F, soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{G}$. Alors $F(f) : F(X) \to F(Y)$ est inversible, d'inverse $g' : F(Y) \to F(X)$. Puisque F est plein, soit $g : Y \to X$ tel que $F(g) = g'$, alors g est un inverse de f. Montrons enfin que $\mathcal{G}$ est connexe. Soient $X,Y \in \mathcal{G}$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{BG}(FX,FY) = G \neq \emptyset$. ■

Heuristique

Si M est un espace topologique, le groupoïde fondamental de M, noté $\pi(M)$, dont les objets sont les points de M et les morphismes entre deux points sont les classes d'homotopie de chemins joignant ces deux points. Alors $\pi(M)$ a une structure de groupoïde et $\pi(M)$ est connexe si et seulement si M est connexe.

Mnémonik : la théorie de l'homotopie en topologie algébrique et la théorie des catégories sont deux formulations d'une même idée.

5.1.8 Sous-objets et objets quotients

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, fixée.

5.1.8.1 Sous-objets

Définition-propriété. ***(Équivalence de monomorphismes à but fixé)***

Soit Y un objet de $\mathcal{C}$. On considère la classe $\mathcal{E}$ des morphismes (X,f) où $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$ en posant que (X,f) et (X',f') sont *équivalents* si et seulement si l'on peut trouver $g : X \to X'$ tel que $f'g = f$ et $h : X' \to X$ tel que $fh = f'$, *i.e.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & \\ & Y \\ X' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ & Y \\ X' \arrow[ur, "f'"'] \arrow[uu, "h"] & \end{tikzcd}$$

commutent.

Lemme

Si (X,f) et (X,f') sont deux paires de monomorphismes à but fixé équivalents, alors $X \simeq X'$ dans $\mathcal{C}$.

▷ On remarque que, dans la définition précédente, $h = g^{-1}$. ■

Ce n'est pas une condition suffisante !

Contre-exemple

Dans $\mathbb{R}$-Vect contenant l'objet $E = \mathbb{R}^3$ de base canonique (e_1,e_2,e_3), les deux sous-esapces F,G de bases respectives (e_1,e_2) et (e_2,e_3) sont isomorphes, mais les inclusions $F \hookrightarrow E$ et $G \hookrightarrow E$ ne sont pas équivalentes. Ainsi le sous-objet F ne sera pas le sous-objet G de E. □

Définition. ***(Sous-objet)***

Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme entre deux objets X,Y de $\mathcal{C}$. Le *sous-objet* défini par f est la classe d'équivalence de (X,f).

Exercice 13 *(Sous-objets dans les catégories concrètes)*

Vérifier que dans Ens,Grp,Ann,Mod $R, R \in$ Ann, Top, les sous-objets sont les sous-ensembles, les sous-groupes, les sous-anneaux, les sous-R-modules, les sous-espaces topologiques munis de la topologie relative.

5.1.8.2 Objets quotients

On peut dualiser.

Définition. ***(Objet quotient)***

Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme entre deux objets X,Y de $\mathcal{C}$. L'*objet quotient* défini par f est la classe d'équivalence de (Y,f) dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Exercice 14 *(Objets quotients dans les catégories concrètes)*

Vérifier que dans Ens,Grp,Ann,Mod $R, R \in$ Ann, Top, les sous-objets sont les ensembles quotients par une relation d'équivalence, les groupes quotients, les anneaux quotients, les R-modules quotients, les espaces topologiques quotients munis de la topologie quotient.

▹ **Éléments de réponse.**

Là, pas moyen de simplement dire : « on dualise ».

5.2 Foncteurs et transformations naturelles

5.2.1 Foncteurs

5.2.1.1 Définition

Afin de représenter les liens entre les différentes catégories, on introduit la notion de foncteur, qui traduit celle de **morphismes entre catégories**.

Définition. ***(Foncteur)***

Un *foncteur* ou *foncteur covariant* d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$, noté comme une application $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, est la donnée d'une fonction qui à tout objet X de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$ et d'une fonction qui à tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, associe un morphisme $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ de $\mathcal{D}$, vérifiant les deux propriétés supplémentaires : $F(id_X) = id_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et pour tous objets X,Y,Z et morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

VOC Un foncteur de $\mathcal{C}$ dans elle-même est appelé un *endofoncteur*.

Remarques.

1. On note parfois, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, $F : X \mapsto FX$.
2. Un foncteur est la double donnée d'une correspondance entre objets et de correspondances entre flèches. On note ainsi parfois, $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, l'application $F = F_{X,Y} : \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY). \\ f & \longmapsto & F_{X,Y} f \end{array}$

   On pourra retenir l'illustration suivante :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{D}$$

$$\begin{array}{ccc} F_{\text{obj}} : X & \longmapsto & F(X) \\ {\scriptstyle F_{\text{mor}}:f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ F_{\text{obj}} : Y & \longmapsto & F(Y). \end{array}$$

3. On a en particulier pour tout $(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$. Plus encore, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(F(X))$ est un morphisme de groupes (vocabulaire à utiliser de préférence pour une catégorie localement petite).

VOC On note parfois $Id_{\mathcal{C}}$ le *foncteur identité* d'une catégorie, qui à $X \mapsto X$ et à $f \mapsto f$, mais pas systématiquement : on utilisera la même notation que pour les morphismes dans certains cas.

Définition. ***(Foncteur contravariant)***

Un *foncteur* ou *foncteur contravariant* d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$, noté, de la même manière qu'un foncteur, comme une application $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, est la donnée d'une fonction qui à tout objet X de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$ et d'une fonction qui à tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, associe un morphisme $F(f) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ de $\mathcal{D}$, vérifiant les deux propriétés supplémentaires : $F(id_X) = id_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et pour tous objets X,Y,Z et morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, $\boxed{F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)}$.

Reformulation pratique. ***(Foncteur contravariant)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ des catégories. Un *foncteur contravariant* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Remarques.

1. Ainsi, si l'on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$, alors on a

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "g"'] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g\circ_{\mathrm{op}} f"] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et donc

$$\begin{tikzcd} FX & FY \arrow[l, "Fg"'] & FZ \arrow[l, "Ff"'] \arrow[ll, bend left, "F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)."] \end{tikzcd}$$

2. L'illustration du foncteur covariant devient alors dans le cas du foncteur contravariant :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{D}$$

$$\begin{tikzcd} F_{\mathrm{obj}} : X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "F_{\mathrm{mor}}:f"'] & F(Y) \\ {} \arrow[r, mapsto] & {} \\ F_{\mathrm{obj}} : Y \arrow[r, mapsto] & F(X). \arrow[uu, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

Lemme. ***(Covariance de l'identité)***

Les identités de catégories sont des foncteurs covariants.

Définition. ***(Fonctoriel)***

Une construction entre deux catégories est dite *fonctorielle* si elle induit un foncteur. La *fonctorialité* de cette construction équivaut ce qu'elle transforme les objets d'une catégorie et les morphismes d'une catégorie respectivement en les objets et les morphismes d'une autre, de façon compatible, ce qui signifie exactement qu'elle préserve l'identité (à ne pas oublier !) et la composition des morphismes.

Principe. ***(Foncteurs et diagrammes commutatifs)***

Toute foncteur transforme un diagramme commutatif en un diagramme commutatif.

▷ Une preuve formelle n'aurait strictement aucun intérêt. Il suffit simplement de le remontrer au cas par cas en utilisant la propriété : $F(gf) = F(g)F(f)$. Plus précisément, si

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

est commutatif, *i.e.* $h = gf$, alors

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[dl, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(h)"] & \\ F(Y) \arrow[rr, "F(g)"'] & & F(Z) \end{tikzcd}$$

est commutatif, car $F(h) = F(g)F(f)$. On peut se ramener à ce cas par triangulation des diagrammes. ■

Propriété. ***(Foncteurs et isomorphismes)***

Un foncteur transforme un isomorphisme en un isomorphisme.

▷ Ce sont les deux propriétés conjuguées : $F(gf) = F(g)F(f)$ et $F(id_X) = id_{F(X)}$. ■

Plus précisément :

Propriétés. ***(Foncteurs et morphismes particuliers)***

1. Un foncteur préserve les rétractions.
2. Un foncteur préserve les sections.
3. Un foncteur préserve les endomorphismes.
4. Un foncteur préserve les automorphismes.

▷ Même raisonnement. ■

Contre-exemple. ***(Foncteurs et monomorphismes, épimorphismes)***

Un foncteur ne préserve pas nécessairement un monomorphisme, ni un épimorphisme d'ailleurs.
Considérons le foncteur d'oubli de Ann dans Ens. Alors l'épimorphisme canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ne devient pas un épimorphisme dans Ens, car ce n'est pas une application surjective.
Il est plus dur en raison de l'exercice suivant et de l'adjonction oubli-libre de trouver un contre-exemple pour les monomorphismes. Considéronsle foncteur π_0 : Top $\to$ Ens qui à X associe l'ensemble de ses composantes connexes. Alors le monomorphisme $\{0,1\} \to [0,1]$ est envoyé sur la fonction $\{0,1\} \to \{*\}$ qui n'est pas injective. $\square$

Exercice 15 *(Préservation des monomorphismes par des foncteurs)*

Montrer que les monomorphismes, respectivement les épimorphismes, sont préservés par les adjoints à droite, respectivement à gauche, ou plus généralement par n'importe quel foncteur préservant les produit fibrés, respectivement les sommes amalgamées.

Définition. ***(Bifonctoriel)***

Un *bifoncteur* ou plus simplement *foncteur* est un foncteur sur un produit de deux catégories. Autrement dit, un foncteur $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ où $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{E}$ sont trois catégories, est la donnée d'un foncteur $F(\ \cdot\ ,Y)$ pour tout objet Y de $\mathcal{D}$ et d'un foncteur $F(X,\ \cdot\ )$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$.

Définition. ***(Bifonctoriel)***

Une construction entre deux catégories est dite *bifonctorielle* si elle induit un bifoncteur. La *bifonctorialité* traduit ce fait.

Exemples. ***(Foncteurs, foncteurs contravariants, bifoncteurs)***

1. L'application de Top dans Top qui à un espace topologique X associe son cône CX est fonctorielle. En effet, d'une application continue $f : X \to Y$ où Y est un autre espace topologique, on déduit une application également continue $Cf : CX \to CY$ qui prolonge f au sens suivant : pour tout $x \in X$, pour tout $t \in [0,1]$, $f(x,t) = (f(x),t) \in CY$. Cette construction envoie id_X sur id_{CX} et respecte sans problème la composition.
2. Le produit tensoriel est une construction *bifonctorielle* de la catégorie Mod A, A un anneau fixé, au sens suivant : soient M,N,M',N' sont des A-modules. Tout morphisme $f : M \to M'$ de A-modules et tout morphisme $g : N \to N'$ de A-modules induisent des morphismes de A-modules : $f \otimes id_N : M \otimes N \to M' \otimes N$ tel que

$(f \otimes id_N)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$ pour tous $m \in M, n \in N$ et $id_M \otimes g : M \otimes N \to M \otimes N'$ tel que $(id_M \otimes g)(m \otimes n) = m \otimes g(n)$. Ces applications $f \mapsto f \otimes id_N$ et $g \mapsto id_M \otimes g$ sont fonctorielles, puisqu'elles préservent les morphismes identités et la composition. De plus, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "f \otimes id_N"] \arrow[d, "id_M \otimes g"'] & M' \otimes N \arrow[d, "id_{M'} \otimes g"] \\ M \otimes N' \arrow[r, "f \otimes id_{N'}"'] & M' \otimes N' \end{tikzcd}$$

commutatif.

3. *(Foncteurs d'oubli)* On peut considérer le foncteur de Grp dans Ens qui à un groupe fait correspondre l'ensemble sous-jacent. C'est la même chose pour n'importe quelle structure algébrique (magma, monoïde, anneau, algèbre...) ; par exemple encore, nommément, si k est un corps, le foncteur d'oubli U : Mod $k \to$ Ens envoie un espace vectoriel V sur l'ensemble sous-jacent V. En topologie, on peut considérer le foncteur d'oubli Top $\longrightarrow$ Ens qui à un espace topologique associe l'ensemble sous-jacent.

4. *(Foncteur d'oubli partiel)* On n'est pas forcé d'enlever toute la structure en composant par le foncteur d'oubli. Ainsi, on dispose par exemple d'un foncteur « d'oubli partiel » ou *foncteur d'inclusion* de Ann dans Grp qui à un anneau fait correspondre le groupe sous-jacent. On peut alors également considérer le foncteur de Top dans Top_h qui à $x \mapsto x$ et à $f \mapsto [f]$ (de Top vers Top_h et non le contraire !). Semblablement, on dispose d'un foncteur de la catégorie des k-algèbres associatives unifères vers la catégorie des algèbres de Lie sur k :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ass}_k & \longrightarrow & \mathrm{Lie}_k \\ (A, + , \times , \cdot\ ) & \longmapsto & (A, + , \cdot\ ,(a,b) \mapsto [a,b] = ab - ba). \end{array}$$

5. *(Foncteur de linéarisation)* On peut tenter d'inverser le foncteur d'oubli partant de Mod k vers Ens. Le foncteur de linéarisation L : Ens $\to$ Mod k envoie un ensemble X sur l'espace vectoriel $LX := kX$ de toutes les combinaisons linéaires formelles d'éléments de X. Par exemple, si X est fini, $X = \{x_1,...,x_n\}$, $LX = \{a_1x_1 + ...a_nx_n \mid a_i \in K \quad \forall i\}$, avec $x_i = 1x_i \in LX$ et un isomorphisme i : $LX \xrightarrow{\sim} k^n \ni e_i = i(x_i)$.

6. *(Foncteur coreprésenté)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Alors remarquons que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un foncteur.

En exercice.

À partir de là, il n'est pas difficile de voir que les restrictions aux composantes de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ seront encore des foncteurs.

Si $\mathcal{C}$ est localement petite et $X \in \mathcal{C}$, le *foncteur coreprésenté par* X est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni g \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)=f_*"] \\ Y' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \ni f \circ g \end{tikzcd}$$

(car l'on a bien $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Y' \end{tikzcd}$). Ce foncteur associe à un objet Y l'ensemble des applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et à un morphisme f, la *composition par* f : $\begin{array}{rccl} f_*: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$. Pour revérifier que c'est bien un foncteur, *i.e.* qu'il respecte identité et composition de façon covariante, zéro difficulté, il suffit de l'écrire.

7. *(Foncteur représenté)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $X \in \mathcal{C}$. Le *foncteur représenté par* X est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \ni g \circ f \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)=f^*"] \\ Y' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y',X) \ni g \end{tikzcd}$$

(car l'on a bien $\begin{tikzcd} Y \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ & X \\ Y' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$). Ce foncteur associe à un objet X l'ensemble des applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et à un morphisme f, la *précomposition par* f ou *transposée* de f : $\begin{array}{rccl} f^*: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$. Là aussi, pour revérifier que c'est bien un foncteur contravariant, *i.e.* qu'il respecte identité et composition de façon contravariante, zéro difficulté, il suffit de l'écrire.

Exercice 16

Montrer que le premier axiome des foncteurs n'est pas superflu.

▷ **Éléments de réponse.**

Considérons le foncteur de la catégorie des groupes dans elle-même qui à un groupe, associe un groupe nul fixé (sans problème, puisqu'il est unique àipàuip), et à toute flèche associe l'identité du groupe nul qui est d'ailleurs une flèche nulle. Ce foncteur préserve bien la composition (il faut l'admettre toutefois, de façon bien étrange) mais $id_{\mathbb{Z}}$ est envoyé sur $id_{\{0\}}$.

Définition. ***(Composition ENTRE FONCTEURS)***

On peut égaler définir la *composition entre foncteurs* pour $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, on définit GF de façon évidente : si $X \in \mathcal{C}$, GF lui associe $G(F(X)) \in \mathcal{E}$ et pour $X,Y \in \mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, GF lui associe $G(F(f)) : GF(X) \to GF(Y)$ dans $\mathcal{E}$.

5.2.1.2 Isomorphismes (foncteurs)

Définition. ***(Isomorphisme (foncteur), foncteur isomorphique)***

Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont deux catégories et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, on dit que le foncteur F est un *isomorphisme (de catégories)* si $FG = Id_{\mathcal{D}}$ et $GF = Id_{\mathcal{C}}$.
Deux catégories seront dites *isomorphes (au sens fort* s'il existe un foncteur isomorphique entre les deux.

Il ne faut a priori pas confondre cette notion avec celle des isomorphismes à l'intérieur d'une catégorie.

Théorème. ***(Caractérisation des isomorphismes (foncteurs))***

Un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible.

▷ On applique le théorème de caractérisation des isomorphismes en tant que section-rétraction à la catégorie de toutes les catégories. ■

Remarque. Notons que l'on ne définira **pas** l'équivalence de catégories avec l'existence d'un foncteur bi-inversible. Une notion plus intéressante que les isomorphismes foncteurs sont les équivalences de catégories, que nous verrons dans la section suivante.

Exemples. ***(Foncteurs isomorphismes)***

1. Si R est un anneau commutatif, R-Mod et Mod R sont isomorphes.

5.2.1.3 Foncteur fidèle

L'injectivité intuitive d'un foncteur est traduite par la notion de fidélité, et la surjectivité intuitive d'un foncteur est traduite par la notion de plénitude.

Définition. ***(Foncteur fidèle)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *fidèle* si pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, pour tous morphismes $f,g : X \longrightarrow Y$, si $F(f) = F(g)$, alors $f = g$.
Autrement dit, F est fidèle si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, $f \mapsto Ff$ est injective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

Un foncteur fidèle n'a pas nécessairement besoin d'être injectif sur les objets ou les morphismes des catégories mises en jeu. Deux objets X et X' peuvent s'envoyer sur le même objet dans $\mathcal{D}$, et même deux morphismes $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ peuvent s'envoyer sur le même morphisme dans $\mathcal{D}$, avec alors nécessairement $(X,Y) \neq (X',Y')$.

5.2.1.4 Foncteur plein

Définition. ***(Foncteur plein)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *plein* si pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, pour tout morphisme $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$, il existe un morphisme $f : X \to Y$ tel que $g = F(f)$.
Autrement dit, F est plein si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ est surjective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

De la même manière, un foncteur plein n'est pas forcément surjectif sur les objets ou sur les morphismes. Il peut y avoir des objets de $\mathcal{D}$ qui ne sont pas de la forme FX avec X dans $\mathcal{C}$, et des morphismes entre ces objets ne peuvent alors pas être image d'un morphisme de $\mathcal{C}$.

5.2.1.5 Foncteur pleinement fidèle

Définition. ***(Foncteur pleinement fidèle)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.
Autrement dit, F est pleinement fidèle si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ est bijective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

Proposition. ***(La pleine fidélité induit un plongement)***

Un foncteur pleinement fidèle est injectif à isomorphisme près sur les objets, *i.e.* si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est pleinement fidèle, $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories, alors pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $F(X) \simeq F(Y) \implies X \simeq Y$.

Exemples. ***(Foncteurs pleins, fidèles, pleinement fidèles)***

1. Le foncteur d'oubli Grp $\to$ Ens est fidèle, car tout morphisme entre deux groupes est une application entre leurs ensembles sous-jacents. Cependant, il n'est pas plein, car certaines applications entre groupes ne sont pas des morphismes.
2. Son adjoint canonique Ens $\to$ Grp qui à un ensemble S fait correspondre le groupe abélien libre des $\mathbb{Z}$-combinaisons linéaires formelles d'éléments de S, est quant à lui plein.
3. Le foncteur d'inclusion Ab $\to$ Grp est pleinement fidèle, car tout morphisme de groupes abéliens est un morphisme de groupes et tout morphisme de groupes entre deux groupes abéliens est un morphisme de groupes abéliens.

5.2.1.6 Foncteur essentiellement surjectif

Définition. ***(Foncteur essentiellement surjectif)***

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories. On dit que F est *dense* ou *essentiellement surjectif* si pour tout $Y \in \mathcal{D}$, il existe un objet $X \in \mathcal{C}$ tel que Y est isomorphe à FX dans $\mathcal{D}$.

Exemples. ***(Surjectivité essentielle)***

1. Le foncteur d'abélianisation Grp $\to$ Ab qui à tout groupe associe son abélianisé est essentiellement surjectif.

   En effet, tout groupe abélien est isomorphe à l'abélianisé de son groupe sous-jacent par l'oubli Ab $\to$ Grp.
2. Un foncteur vers une catégorie dont tous les objets sont isomorphes (par exemple une catégorie classifiante, la catégorie des ensembles dénombrables...) est trivialement essentiellement surjectif.
3. Un peu moins débile, une sous-catégorie constituée d'une transversale pour l'isomorphie induit par définition un foncteur d'inclusion essentiellement surjectif.

5.2.2 Quelques définitions simples formalisées par les foncteurs

5.2.2.1 Sous-catégories, sur-catégories

Reformulation pratique. ***(Sous-catégorie)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Alors $\mathcal{C}$ est une *sous-catégorie* de $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, dit *oubli* de la structure de $\mathcal{C}$, injectif sur les classes d'objets sous-jacente.

Reformulation pratique. *(Sous-catégorie pleine)*

Une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est pleine si le foncteur d'oubli de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ est plein, et donc qu'on a un plongement *(voir ci-après)*.

Définition. *(Sur-catégorie)*

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. On dit que $\mathcal{D}$ est une *sur-catégorie* de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$.

5.2.2.2 Catégories concrètes

Définition. *(Catégorie concrète)*

Une catégorie est *concrète* ou encore *concrétisable* s'il existe un foncteur fidèle, dit *foncteur d'oubli* ou *d'inclusion* de cette catégorie vers la catégorie des ensembles ; on peut donc la voir comme une sous-catégorie de Ens.

VOC *(Enrichissement de structure)* On dit en général qu'une structure, représentée par une catégorie $\mathcal{C}$, est *enrichie* par rapport à une autre $\mathcal{C}'$, *au-dessus* d'une certaine propriété qui la caractérise (loi algébrique, propriété topologique, que sais-je), s'il existe un foncteur d'inclusion, *i.e.* fidèle $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$.

Propriété. *(Petitesse locale des catégories concrètes)*

Toute catégorie concrète est localement petite.

▷ Soit $\mathcal{C}$ une catégorie concrète. Alors il existe $U : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ fidèle. Soient $x,y \in \mathcal{C}$. Le foncteur U induit une application injective de classes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(Ux,Uy)$ qui est un ensemble, car Ens est localement petite. ■

Remarque. Plus généralement, **toute catégorie enrichie au-dessus d'une catégorie localement petite est petite**.

Exercice 17 *(Les catégories sont méchantes)*

Un foncteur d'inclusion est-il toujours un plongement, *i.e.* un foncteur fidèle est-il toujours une équivalence sur son image ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non ! Le foncteur d'oubli Grp → Ens est fidèle et surjectif, mais Grp et Ens ne sont pas équivalentes. À méditer plus profondément.

Exercice 18 *(Propriétés des oublis partiels)*

1. Le foncteur qui oublie la structure multiplicative de la catégorie Ann des anneaux unitaires vers celle des groupes abéliens Ab est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?

2. Le foncteur qui envoie un anneau unitaire de Ann sur son groupe des unités dans Grp est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?

3. Le foncteur qui envoie un anneau unitaire de Ann sur l'anneau non nécessairement unitaire sous-jacent dans la catégorie PseudoAnn est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il n'est pas plein, car certains morphismes de groupes additifs sous-jacents à des anneaux n'envoient pas les 1 sur les 1. Il suffit de considérer l'anneau $\mathbb{Z}$ et $k \mapsto 2k$.

Il est fidèle, car il vaut l'identité sur les morphismes.

Il n'est pas essentiellement surjectif. En effet, considérer le groupe abélien $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors ce n'est pas le groupe sous-jacent d'un anneau. Soit k la caractéristique de cet anneau (unitaire) ; pour tout $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $ka := \underbrace{a + ... + a}_{k \text{ fois}} = (k.1)a = 0$, donc l'ordre des éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est borné par k, or $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.

Remarquons qu'en partant de PseudoAnn, le foncteur est essentiellement surjectif. En effet, il suffit de définir, pour un groupe abélien G, la multiplication de la manière suivante : $a \cdot b = 0$ pour tous $a,b \in G$.

2. Il n'est pas plein, car certains morphismes de groupes multiplicatifs sous-jacents à des anneaux n'envoient pas les 1 sur les 1. Il suffit de considérer l'anneau $\mathbb{F}_5$ et le morphisme $1_{F_5} \mapsto \overline{5}$.

La coïncidence sur le groupe des unités a peu de chances d'entraîner l'égalité des morphismes. Considérons l'anneau $\mathcal{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $\mathcal{K}^* = \{(1,1)\}$. Alors l'identité et le morphisme $(x,y) \mapsto (y,x)$ coïncident bien sur $\mathcal{K}^*$, mais pas sur $\mathcal{K}$.

La question se reformule ainsi : tout groupe est-il le groupe multiplicatif d'un certain anneau unitaire ? La réponse est non. Considérons le groupe $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Un anneau de caractéristique différente de 2 possède une unité différente de 1, à savoir -1, qui est un élément central d'ordre 2. Or il n'y a pas de tel élément dans G qui est d'ordre impair, donc si $G = A^*$, alors A est de caractéristique 2. Soit r un élément de A^* d'ordre premier $p \neq 2$. Il engendre un sous-anneau donné comme un quotient de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ dans laquelle $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se plonge. Or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un produit fini de corps finis $\mathbb{F}_{2^k}$, et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se plonge dans un certain $\mathbb{F}_{2^k}$ si et seulement si $p \mid 2^{k-1}$. Ainsi, A^* a un élément d'ordre $2^k - 1$ où k satisfait $p \mid 2^{k-1}$. Mais G a bien un élément d'ordre 5, mais n'a pas d'élément d'ordre $2^4 - 1 = 15$ ou plus.

De plus, c'est le premier exemple possible, puisque $\{0\},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathcal{K}$ sont les groupes d'unités respectivement de $\mathbb{Z},\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_4,\mathbb{F}_5,\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

3. Il n'est pas plein, puisque le morphisme de pseudo-anneaux $1 \mapsto$ -1 n'est pas un morphisme d'anneaux.

Il est fidèle, car encore il vaut l'identité sur les morphismes.

Il n'est évidemment par essentiellement surjectif.

5.2.2.3 Plongement d'une catégorie dans une autre

Définition. ***(Plongement catégorique)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ se *plonge* dans une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Exemples. ***(Plongements catégoriques)***

1. Ab se plonge dans Grp.
2. Grp ne se plonge pas dans Ens ! Attention : le foncteur d'oubli, fidèle, n'est pas plein.

Parfois, on appelle *plongement* un foncteur fidèle. Cette définition a l'intérêt de correspondre avec l'idée plus intuitive de plongement, car les foncteurs fidèles sont les monomorphismes de Cat.

Exercice 19 *(Théorème de Cantor-Bernstein dans* Cat*)*

(Pour résoudre cet exercice, il faut connaître la notion d'équivalence.) Supposons qu'une catégorie $\mathcal{C}$ se plonge dans une catégorie $\mathcal{D}$ et réciproquement. Les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont-elles équivalentes ?

▷ **Éléments de réponse.**

En général, non. On peut s'intéresser par exemple à des catégories d'incidence ou même à des catégories classifiantes de groupes.

5.2.3 Transformations naturelles

5.2.3.1 Naturalité

Définition. ***(Transformation naturelle)***

Soient $F,G : C \longrightarrow D$ deux foncteurs entre deux catégories C,D. Un *morphisme de foncteurs* ou *transformation naturelle* $\eta : F \longrightarrow G$ est la donnée pour tout $x \in C$ d'un morphisme de D, $\eta_x = \eta x : F(x) \longrightarrow G(x)$, tel que pour tout $f : x \longrightarrow y$ de $\mathrm{Hom}_C(x,y)$),

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"] & G(y) \end{tikzcd}$$

commute, soit : $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$.
On note parfois une transformation naturelle φ :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & D \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

et on appelle ce diagramme 2-*cellule* et la propriété qu'il renferme *naturalité*.

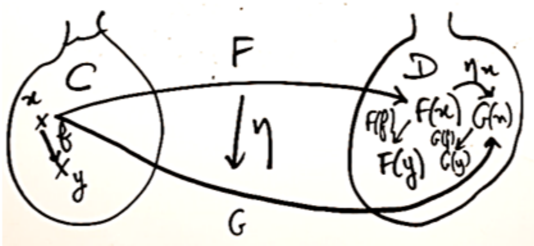


Figure 5.2.1 : *Transformation naturelle entre deux foncteurs entre deux mêmes catégories.* — La commutation se passe dans D, les objets x,y sont dans C.

Astuce !

Pour montrer qu'un objet η est une transformation naturelle, rien ne sert de vérifier que ce diagramme est commutatif sur les identités $f = id_x$, car c'est automatique.

Exemple fondamental. ***(Bidualité et transformation naturelle)***

Soient k un corps et $\mathbb{D} : \text{Mod } k \to \text{Mod } k, V \mapsto V^{**}$. Pour $V \in \text{Mod } k$, soit $\varphi V : V = Id_{\text{Mod } k}(V) \to V^{**} = \mathbb{D}(V), v \mapsto (\text{ev}_v : l \mapsto l(v))$.
Alors φ est une transformation naturelle de $Id_{\text{Mod } k}(V)$ vers $\mathbb{D}$. En effet, pour $U \xrightarrow{f} V$ linéaire, on a

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi U"'] & V \arrow[d, "\varphi V"] \\ U^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

avec en formules :

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & f(u) \arrow[r, mapsto] & (m \mapsto m(f(u))) \arrow[dl, equal] \\ (l \mapsto l(m)) \arrow[r, mapsto] & (m \mapsto (m \circ f)(v)) & & \end{tikzcd}$$

qui est bien un carré commutatif.

Heuristique

La naturalité se traduit par le fait suivant : si l'on enferme deux mathématiciens dans des pièces séparées et leur demande de construire un certain morphisme, il y a de grandes chances qu'ils construisent le même.

En pratique, les termes de fonctorialité et de naturalité sont souvent confondus ! De plus, le terme *naturalité* est bien souvent employé abusivement.

Mnémonik : la fonctorialité est une propriété de composition, la naturalité est une propriété de commutation.

Définition. *(Composition de transformations naturelles)*

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Si l'on a des morphismes de foncteurs

$$F \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} H,$$

alors $\varphi\psi$ donné par $\varphi\psi(X) = (\varphi X) \circ_{\mathcal{D}} (\psi X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ est encore un morphisme de foncteurs.

▷ Il suffit de voir que le diagramme

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\psi X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "\varphi X"] \arrow[d, "Gf"] & HX \arrow[d, "Hf"] \\ FY \arrow[r, "\psi X"] & GY \arrow[r, "\varphi Y"] & HY \end{tikzcd}$$

commute. ■

Remarques.

1. Pour des morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=70, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G, description}] \arrow[r, bend right=70, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}, \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\psi"] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

la composition $\varphi\psi$ est parfois appelée *composition verticale*. Il existe aussi une *composition horizontale* : si l'on a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

alors la composition horizontale $\varphi \star \psi : FH \to GK$ est la composition diagonale dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} FH \arrow[r, "\varphi H"] \arrow[d, "F\psi"'] & GH \arrow[d, "G\psi"] \\ FK \arrow[r, "\varphi K"] & GK \end{tikzcd}$$

où l'on a composé morphismes fonctoriels et foncteurs *(voir ci-après)*. Elles ne s'appliquent pas à la même situation, ce qui élimine toute confusion : **on compose verticalement deux transformations naturelles d'un même foncteur sur un même autre ; on compose horizontalement deux transformations naturelles sur deux foncteurs comosables**.

2. Si on considère à la fois les catégories, les foncteurs et les morphismes de foncteurs, on obtient l'exemple paradigmatique d'une 2-*catégorie*, *i.e.* une catégorie « enrichie en catégories » où l'on suppose qu'il existe également des morphismes entre les morphismes. Quant au vocabulaire, les 1-morphismes (ici : les foncteurs) entre 2-objets (ici : les catégories) sont eux-mêmes les objets d'une catégorie dont les morphismes s'appellent 2-morphismes (ici : les morphismes de foncteurs). To be continued.

5.2.4 Composition des foncteurs et des morphismes fonctoriels

Définition-propriété. ***(Composition des foncteurs et des morphismes fonctoriels)***

Soient F,G_1,G_2 des foncteurs et $\varphi : G_1 \to G_2$ une transformation naturelle. Pour tout objet X, s'ils sont composables dans le bon sens, on définit des transformations naturelles :

$$\varphi F : G_1 F \to G_2 F, (\varphi F)_A = \varphi_{F(A)}$$

ou

$$F\varphi : FG_1 \to FG_2, (F\varphi)_A = F(\varphi_A)$$

pour tout A convenant.

Avec la définition de la composition horizontale, il est immédiat que

Fait. *(Composition foncteurs-morphismes fonctoriels & composition horizontale)*

Avec les notations précédentes, $\varphi F = \varphi \star Id_F$ et $F\varphi = Id_F \star \varphi$.

Propriétés. *(Associativités de la composition foncteurs-morphismes fonctoriels)*

1. Avec les notations évidentes, $(\varphi F)F' = \varphi(FF')$;
2. de même $H'(H\varphi) = (H'H)\varphi$;
3. aussi $H(\varphi F) = (H\varphi)F$.

Proposition

Si φ est un isomorphisme, alors φH est $H\varphi$ sont également des isomorphismes.

5.2.4.1 Centre d'une catégorie

Définition. *(Centre d'une catégorie)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le *centre* $Z(\mathcal{C})$ est la classe des endomorphismes du foncteur $Id_{\mathcal{C}}$.

Lemme. *(Structure du centre)*

Le centre d'une catégorie muni de la composition des transformations naturelles est un monoïde commutatif.

▷ En déroulant les définitions, sur une transformation η de $Id_{\mathcal{C}}$ sur lui-même on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, tout morphisme $f : X \to Y$. En particulier, pour $X = Y$ et $f = \varphi_X$ où φ est une autre transformation de $Id_{\mathcal{C}}$ sur lui-même, on a $\varphi_X \circ \eta_X = \eta_X \circ \varphi_X$, et c'est bien comme ça que l'on a défini la composition des transformations naturelles. ■

Exemples. *(Centres de catégories)*

1. Le centre de la catégorie classifiante d'un groupe G est le centre du groupe G.
   Puisque la donnée d'une transformation naturelle de id_{BG} est déterminée par sa donnée sur l'unique objet de BG.
2. Le centre de la catégorie Ens est trivial.
   On verra que $Id_{\mathrm{Ens}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\emptyset\},?)$. Ainsi, $Z(\mathrm{Ens}) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\emptyset\},?)) \simeq \mathrm{Hom}(\{\emptyset\},\{\emptyset\}) = \{id_\emptyset\} \simeq \{\emptyset\}$ par le lemme de Yoneda.

Exercice 20 *(Centre d'une catégorie de modules)*

Montrer que, lorsque A est un anneau, le centre de Mod A est isomorphe au centre de A.

▷ **Éléments de réponse.**

On pose $\Psi : \begin{array}{ccc} Z(\mathrm{Mod}\ A) & \longrightarrow & Z(A) \\ \eta & \longmapsto & \eta_A(1) \end{array}$ et $\Phi : \begin{array}{ccc} Z(A) & \longrightarrow & Z(\mathrm{Mod}\ A). \\ z & \longmapsto & (R_M^z : M \to M, a \mapsto az)_{M \in \mathrm{Mod}\ A} \end{array}$ Ce sont deux applications bien définies, qui sont des morphismes de monoïdes et réciproques l'une de l'autre.

Heuristique

On retiendra : plus la catégorie est grande, plus le centre a des chances d'être petit, à moins que la structure de la catégorie a une certaine rigidité.

5.2.4.2 Catégories de foncteurs

On peut maintenant définir :

Curiosité. ***(Catégorie des foncteurs)***

Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, on a le morphisme identité noté par Id_F ou id_X donné par $(Id_F)(X) = id_{FX}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et l'on a vu que l'on pouvait définir la composée (verticale) deux morphismes de foncteurs. De cette façon, on obtient la *catégorie des foncteurs* $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D}) = \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les foncteurs et les morphismes les transformations naturelles.
De même qu'avec toute catégorie, il peut exister des foncteurs entre catégories de foncteurs, et des transformations naturelles entre eux, etc.

$\longrightarrow$ *Notation.* Pour deux foncteurs $F,G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre deux catégories, on note parfois $\mathrm{Nat}(F,G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G)$ la classe des transformations naturelles de F à G.

Exercice 21 *(Petitesse des catégories des foncteurs)*

Montrer que :

1. si $\mathcal{C}$ est petite et $\mathcal{D}$ est localement petite, alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est localement petite ;
2. si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont petites, alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est petite.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il s'agit de montrer que pour deux foncteurs $F,G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, la classe des transformations naturelles η de F à G forme un ensembles. Or une telle transformation se ramène à la donnée des η_X pour $X \in \mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{C}$ est petite, la classe de ses objets est un ensemble. Par l'axiome de la réunion, il suffit donc de montrer qu'à objet fixé la classe des choix de η_X est impropre. Or η_X doit être dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X))$. Puisque $\mathcal{D}$ est localement petite, ceci est un ensemble, d'où le résultat.

2. On a déjà que $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est localement petite par ce qui précède. On peut même écrire : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X))$ par une bijection de classes. Puisque $\bigcup_{X',Y'\in\mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X',Y')$ est un ensemble par hypothèse, notons le E, $\bigcup_{F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) \hookrightarrow \bigcup_{F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}} \bigsqcup_{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X)) \hookrightarrow E$ est un ensemble, ce qu'il fallait montrer.

Principe. ***(Catégorie des « morphismes entre deux objets »)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit Q le carquois $1 \longrightarrow 2$. Alors une sous-catégorie $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Fun}(\mathrm{Ch}(Q),\mathcal{C})$ est la donnée d'un ensemble de morphismes $f_{X,Y} : X \to Y, X,Y \in \mathcal{C}$, vérifiant une certaine propriété.
Les morphismes de $\mathcal{P}$ entre deux objets $f : X \to Y, g : X' \to Y'$ de $\mathcal{P}$ sont les couples de morphismes (h_1,h_2) avec $h_1 : X \to X'$ et $h_2 : Y \to Y'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & Y \arrow[d, "h_2"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

▷ En effet, les objets de $\mathrm{Ch}(Q)$ ne sont jamais que 1 et 2. Il y a trois morphismes : l'image de 1 caractérise X puisque c'est id_X, celle de 2 caractérise Y puisque c'est id_Y, et celle de $1 \longrightarrow 2$ est un morphisme de X dans Y dans $\mathcal{C}$. Quant aux morphismes de $\mathcal{P}$, ce sont des morphismes de foncteurs, autrement dit des transformations naturelles, d'où la condition. ■

(Nous mentionnerons la catégorie des morphismes injectifs *entre deux espaces vectoriels quelconques en tant que catégorie quasi abélienne non abélienne. Elle se construit formellement de la manière précédente.)*

5.2.4.3 Isomorphismes naturels

Définition. ***(Isomorphisme naturel)***

Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ entre deux foncteurs $F,G : C \to D$, C,D deux catégories, est inversible si et seulement si pour tout $x \in C$, $\eta_x \in \mathrm{Hom}(F(x),G(x))$ est un isomorphisme. Dans ce cas, on parle d'*équivalence naturelle* ou d'*isomorphisme naturel.*

Propriété. ***(Caractérisation des isomorphismes naturels)***

Une transformation naturelle est un isomorphisme naturel si et seulement si c'est un isomorphisme dans la catégorie de foncteurs dont elle fait partie des morphismes.

▷ Soit η un isomorphisme naturel de F à G. Par hypothèse, pour tout $x \in C$, on peut poser $\varphi_x = \eta_x^{-1} \in \mathrm{Hom}_D(G(x),F(x))$. De plus, à partir de $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$, on calcule $\mathbb{F}(f) \circ \eta_x^{-1} =$

$\eta_y^{-1} \circ F(f)$ ce qui signifie exactement que φ est une transformation naturelle. Par définition de la composition horizontale, on a clairement $\eta\varphi = Id_G$ et $\varphi\eta = Id_F$.

Réciproquement, supposons qu'il existe φ une transformation naturelle de G à F avec $\eta\varphi = Id_G$ et $\varphi\eta = Id_F$. Soit $x \in C$. Alors $Id_{Fx} = id_{F(x)} = \varphi_x \circ \eta_x \in \mathrm{Hom}_D(F(x),F(x))$ et $Id_{Gx} = id_{G(x)} = \eta_x \circ \varphi_x \in \mathrm{Hom}_D(G(x),G(x))$. Autrement dit, η_x est une section-rétraction de D, donc par théorème, un isomorphisme de D. ■

Exemples. ***(Isomorphismes naturels)***

1. $Id_{\mathrm{Ens}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},?)$. Plus tard, on dira que l'identité de Ens est un foncteur représentable représenté par le singleton standard.

   Notons F le foncteur représenté $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},?)$. Posons $\eta_x : Id_{\mathrm{Ens}}(X) = X \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},X)$ le morphisme de Ens, *i.e.* l'application, qui à $x \in X$ associe l'unique application constante de valeur x de $\{\star\}$ dans X. En posant φ_x qui à une application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},X)$ associe $f(\star) \in X$, on obtient clairement un inverse de η_x dans Ens. Reste à vérifier la condition de commutation, ce que l'on réserve au lecteur motivé.

   Remarquons au passage que pour tout $X \in \mathrm{Ens}$, FX s'identifie à X.

5.2.5 Équivalences de catégories

On peut maintenant définir l'équivalence de catégories, qui est nettement moins forte que l'existence d'un foncteur inversible (l'isomorphie-foncteurs au sens fort défini plus haut), et en fait la bonne notion à considérer pour dire que deux catégories sont foncièrement les mêmes.

Définition. ***(Équivalence de catégories)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Une *équivalence de catégorie* est un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel qu'il existe un autre foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $FG \simeq Id_{\mathcal{D}}$ et $DG \simeq Id_{\mathcal{C}}$ par des isomorphismes naturels. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *équivalentes*. On dit que G est un *quasi-inverse* de F et réciproquement. On note : $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, ou s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Remarques.

1. Le quasi-inverse est unique à équivalence naturelle près mais pas à unique équivalence naturelle près, c'est-à-dire qu'il est essentiellement unique, mais pas canonique. Autrement, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; par contre, même le quasi-inverse fixé, l'équivalence naturelle de la composition à l'identité n'est pas unique. (Mais sont-elles naturellement isomorphes dans Fun ? Vous avez trois heures.)

Propriété. ***(Équivalence de catégories $\implies$ isomorphie)***

Deux catégories équivalentes sont isomorphes.

$\triangleright$ On retrouve le cas de l'isomorphie lorsque $\varepsilon : FG \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{D}}$ et $\eta : Id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ sont des égalités. ■

Méthode. ***(Montrer que deux catégories sont équivalentes)***

Souvent (comparer avec l'équivalence d'homotopie, si possible), les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasi-inverses l'un de l'autre à exhiber sont relativement simples et grossiers, et dans beaucoup de cas, l'une des compositions, disons FG, est égale à l'identité $Id_{\mathcal{D}}$. Il ne reste alors plus qu'à montrer que $GF \simeq Id_{\mathcal{C}}$. Pour cela, appliquer la définition des transformations naturelles : pour tout $X \in \mathcal{C}$, exhiber un <u>iso</u>morphisme dans $\mathcal{D}$ de $GF(X)$ à X (ou l'inverse, mais alors, ne pas changer d'âne au milieu du gué !) qui soient compatibles avec les images des morphismes de $\mathcal{C}$.

Exemples. ***(Équivalences de catégories)***

1. Voici un exemple non trivial. Soient k un corps, n un entier naturel, Mod $\mathfrak{M}_n(k)$ la catégorie des $\mathfrak{M}_n(k)$-modules à gauche et le foncteur représenté

$$F : \mathrm{Mod}\ \mathfrak{M}_n(k) \longrightarrow \mathrm{Vect}_k, M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_n(k)}(k^n, M)$$

(il s'agit de voir k^n dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_n(k)}(k^n, M)$ comme espace des lignes sous l'action de $\mathfrak{M}_n(k)$).

On peut reformuler cela en termes de produits tensoriels. Notons V l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(k)$ des vecteurs colonnes considérés comme $\mathfrak{M}_n(k)$-k-bimodule et W l'espace $\mathfrak{M}_{1,n}(k)$ des vecteurs lignes considéré comme k-$\mathfrak{M}_n(k)$-bimodule. On pourra montrer que les foncteurs $V \otimes_k ?$ et $W \otimes_{\mathfrak{M}_n(k)} ?$ définissent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

Alors on montre que F est une équivalence, de réciproque $G : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Mod}\ \mathfrak{M}_n(k), E \mapsto \mathrm{Hom}_k(k^n, E)$, et qui envoie k^n sur k et réciproquement, donc toutes les propriétés et constructions intrinsèques, *i.e.* définies uniquement en termes de morphismes, d'une catégorie à l'autre sont préservées par F et son quasi-inverse. Par exemple, tout espace vectoriel V est isomorphe à une somme directe en général infinie de copies de k. Donc tout $\mathfrak{M}_n(k)$-module est isomorphe à une somme directe de copies de k^n.

Notons que cette équivalence induit une équivalence $\mathrm{mod}(\mathfrak{M}_n(k)) \to \mathrm{mod}\ k$, et l'on a donc un théorème de composition des $\mathfrak{M}_n(k)$-modules de type fini comme sommes directes finie de copies de k^n.

2. La catégorie des pérordres finis est équivalente à la catégorie des espaces topologiques

finis.

Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique, on peut poser $x \leqslant y$ si et seulement si x est dans l'adhérence de $\{y\}$.

Théorème. ***(Caractérisation pratiques des équivalences de catégories)***

Un foncteur est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

$\triangleright$ C'est plus fastidieux que n'en laissent croire certains manuels. Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories et $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ et $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ deux foncteurs.

$\Longrightarrow$: Soit (G,η,φ) un quasi-inverse de F, de sorte que $GF \overset{\varphi}{\simeq} id_C$ et $FG \overset{\eta}{\simeq} id_D$. En particulier, puisque φ est un isomorphisme naturel, $f = \varphi_Y G(F(f))\varphi_X^{-1}$ pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, $f \mapsto F(f)$ est injective donc F est fidèle, et de même G est fidèle. Elle est surjective puisque si $g : F(X) \to F(Y)$ est donné, en posant $f := \varphi_Y G(g)\varphi_X^{-1} : X \to Y$, on a $GF(f) = \varphi_X f \varphi_Y^{-1}$ comme pour tout morphisme de $\mathcal{C}$ soit par construction de $f : G(F(f)) = G(g)$ d'où $F(f) = g$ par fidélité de G ; ainsi, F est pleinement fidèle. D'autre part, si $Y \in \mathcal{C}$, $Y \overset{\eta}{\simeq} F(G(Y)) = F(X) \in F(\mathcal{C})$ en posant $X := G(Y) \in \mathcal{C}$, donc il est essentiellement surjectif.

$\Longleftarrow$: si F est essentiellement surjectif, pour tout $Y \in \mathcal{D}$, on choisit (si l'on croît à l'axiome du choix sur la collection $\mathcal{D}$) un objet $X \in \mathcal{C}$ et tant qu'à faire un isomorphisme $\psi_Y : F(X) \simeq Y$. On pose $G(Y) = X$ ce qui définit G sur les objets. En particulier pour tout $Y \in \mathcal{D}$, on a déjà un isomorphisme $\psi_Y : FG(Y) \simeq Y$ de $\mathcal{D}$. Définissons G sur les morphismes. Pour $g : Y \longrightarrow Y'$ dans $\mathcal{D}$, par pleine fidélité de F, il existe un unique $G(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY,GY')$ qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} FGY \arrow[r, "FG(g)"] \arrow[d, "\psi_Y"'] & FGY' \arrow[d, "\psi_{Y'}"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y'. \end{tikzcd}$$

puisque $\varphi_{Y'}^{-1} g \varphi_Y$ est un morphisme de FGY vers FGY' et F est plein. Par construction, G est donc un foncteur et $\psi : FG \simeq Id_{\mathcal{D}}$ est alors un isomorphisme naturel : la fonctorialité de G découle de ce que $FG(g) = \varphi_{Y'}^{-1} g \varphi_Y$ avec F fidèle. Si maintenant $X \in \mathcal{C}$, on a $\psi_{FX} : FGFX \to FX$ un isomorphisme qui par pleine fidèle de F vient d'un unique morphisme $\varphi_X : GFX \to X$, dont on voit toujours de la même façon que c'est un isomorphisme par pleine fidélité de F *(voir le corollaire suivant)*. De plus, pour tous $X,X' \in \mathcal{C}$, $\varphi_{X'} GFf = f\varphi_X$ puisque F est fidèle et

$$F(\varphi_{X'} \circ GFf) = F(\varphi_{X'}) \circ F(GFf) = \psi_{F(X')} \circ (FG)(Ff) = Ff \circ \psi_{F(X)} = Ff \circ F(\varphi_X) = F(f \circ \varphi_X)$$

donc φ est un isomorphisme naturel $GF \simeq Id_{\mathcal{C}}$, d'où le résultat quitte à considérer φ^{-1}. ■

Corollaire

$F(\varphi_X) = \eta_{F(X)}^{-1}$ pour $X \in \mathcal{C}$, *i.e.* $F(\varphi_X)\eta_{F(X)}^{-1} = id_{FGF(X)}$.

▷ En effet, on a dans la preuve précédente le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\psi_X^{-1})"] \arrow[dr, "Id_F"'] & FGF(X) \arrow[d, "\varphi_{F(X)}"] \\ & F(X). \end{tikzcd}$$

en tout X objet de $\mathcal{C}$. ■

VOC En l'absence de l'axiome du choix, un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif est appelé *équivalence faible de catégories*. Heuristiquement, il est préférable, même si c'est moins pratique, de montrer qu'un foncteur est une équivalence en exhibant un quasi-inverse.

Dans la preuve précédente de la nécessité, un raisonnement du genre : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ a pour inverse $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFX,GFY)$ est faux.

Exercice 22 *(La plénitude d'un quasi-inverse dépend de la fidélité de l'autre)*

Illustrer la remarque précédente.

Exercice 23 *(Pleinement fidèle $\neq$ inversible)*

Donner un exemple de foncteur pleinement fidèle qui n'est pas une équivalence de catégories.

▷ **Éléments de réponse.**

On a vu que le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ est pleinement fidèle. Cependant, Ab et Grp ne peuvent être équivalentes, car le théorème de classification des groupes de type fini est vrai dans Ab, mais pas dans Grp.

Application. *(Description de la catégorie des matrices par les espaces vectoriels de dimension finie)*

Soient k un corps et Mat_k la catégories des matrices sur k. Soit $F : \mathrm{Mat}_k \to \mathrm{mod}k$ le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur k^n (voir k^n comme espace des colonnes) et qui envoie une matrice $A : n \to m$ sur l'application linéaire $k^n \to k^m, x \mapsto Ax$. Alors F est une équivalence de catégories.

En effet, c'est bien un foncteur étant donné que la multiplication des matrices se répercute comme composition des applications linéaires. Il est dense, car tout espace vectoriel sur k de dimension finie est isomorphe à un certain k^n où n est sa dimension. Enfin, F est aussi pleinement fidèle, en effet : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(n,m) = \mathfrak{M}_{m,n}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(F(n),F(m)) = \mathrm{Hom}_k(k^n,k^m)$.

Remarquons qu'il n'était pas dûr d'exhiber un quasi-inverse : en effet, $G : E \mapsto \dim(E)$ et $f \mapsto \mathfrak{M}(f)$ dans les bases canoniques est tel que $GF = Id_{\mathrm{Mat}_k}$ et $FG \simeq Id_{\mathrm{mod}k}$, mais

même avec un foncteur d'expression simple, il y a moins de vérifications à faire en utilisant le théorème (en plus qu'il n'y a pas à réfléchir).
Heuristiquement, la catégorie des matrices symbolise la catégorie des espaces vectoriels en dimension finie, chose peu surprenant.

Contre-exemple. ***(Équivalence qui n'est pas un isomorphisme)***

Mieux : nous allons exhiber deux catégories équivalentes mais non isomorphes.
L'exemple précédent convient. En effet, la catégorie Mat_k est petite, mais pas mod k !
Or il est clair qu'un isomorphisme de catégories induit une bijection entre les classes d'objets. □

5.2.6 Dualité

Commençons par quelques remarques sur les catégories opposées et les foncteurs contravariants.

Remarques.

1. Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Puisque l'opposée de l'opposée est la catégorie, un foncteur covariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.
2. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ contravariant, *i.e.* par définition un foncteur covariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, est sans abus de notation égal à un foncteur covariant de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ (le vérifier sur un papier). Réciproquement, un foncteur covariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Cette remarque permet de boucler la dualité entre covariance et convariance, comme nous allons l'illustrer dans la preuve suivante.
3. Par conséquence, si $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est contravariant, alors il est contravariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Réciproquement, si un foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est covariant, c'est un foncteur covariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.
4. Enfin, un foncteur covariant est un foncteur contravariant sur une certaine catégorie, et réciproquement. On peut également remplacer « sur » par « à valeurs dans » dans les deux cas.

Définition-propriété. ***(Dualité entre catégories)***

On dit que deux catégories $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ sont *duales*, et que l'on a une *dualité* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, si l'on a une équivalence de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{D}$.

▷ Il faut vérifier que la dualité est une notion symétrique. Supposons qu'on a une équivalence F de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{D}$, avec donc un quasi-inverse G de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Exhibons une équivalence de $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{C}$. On pose un *foncteur opposé* G^{op} qui à $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ associe $G^{\mathrm{op}}(X) := G(X)$ et qui à $f : X \to Y$ morphisme de G associe $G^{\mathrm{op}}(f) := G(f) : G(Y) \to G(X)$, bien défini car $G(f)$ vit dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et qui définit bien un foncteur covariant de $\mathcal{D}^{\text{op}} \to \mathcal{C}$, *i.e.* contravariant de $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$. On peut définir F^{op} de manière similaire. Il est facile de vérifier ensuite que $F^{\text{op}}G^{\text{op}} = Id_{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ et $G^{\text{op}}F^{\text{op}} = Id_{\mathcal{C}}$. ■

Définition. ***(Anti-équivalence de catégories)***

On dit que deux catégories $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ sont *(anti-équivalentes)*, et que l'on a une *(anti-)équivalence* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, si l'on a une équivalence contravariante (avec quasi-inverse contravariant également) de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$.

On a là deux points de vue techniquement distincts, mais révélateurs d'une seule et même notion.

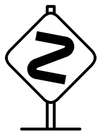
Fait. ***(Anti-équivalence = dualité)***

Deux catégories sont duales l'une de l'autre si et seulement si elles sont anti-équivalentes.

Cela découle des deux remarques initales de cette section.

Heuristique

Cela vient du fait qu'il n'existe pas d'« identité contravariante ».



L'équivalence et la dualité sont fondamentalement différent ! Deux catégories équivalentes sont foncièrement les mêmes, tandis que deux catégories duales ou anti-équivalentes sont foncièrement opposées.
Et pourtant, on dit parfois que deux catégories anti-équivalentes sont équivalentes, par abus de langage : ceci prévaut surtout dans des cas pratico-pratiques ou les objets priment sur les morphismes.

Définition. ***(Autodualité)***

Une catégorie est *autoduale* si elle est équivalente à sa duale.

Remarque. Ainsi, tous les théorèmes d'une catégorie autoduale sont vrais sous leur forme duale.

5.2.7 Lemme de Yoneda

En théorie des catégories, le lemme de Yoneda est un théorème de plongement d'une catégorie localement petite dans une catégorie de foncteurs : les objets sont identifiés à certains types de foncteurs, dits représentables, et les morphismes aux transformations naturelles entre ces foncteurs, qui de plus sont là toutes décrites. En un sens, il généralise là le théorème de Cayley pour les groupes. On pourra faire là un parallèle avec la dernière proposition de la section AUTOMORPHISMES.

5.2.7.1 Vocabulaire des préfaisceaux

On conseille au lecteur de jeter un œil à la section sur les FAISCEAUX en lisant seulement la partie sur les PRÉFAISCEAUX. Un *préfaisceau* à valeur dans une catégorie $\mathcal{C}$ n'est autre en effet qu'un foncteur contravariant à valeurs dans cette catégorie, ainsi, si I est une catégorie, souvent prise petite, un foncteur $F : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$. Ce vocabulaire peut être utilisé à profit pour énoncer le lemme de Yoneda, et aussi, il fournit des exemples de plus en plus intéressants. Dans ce contexte, on peut également définir :

- ⋆ un *morphisme de préfaisceaux* qui n'est autre qu'une transformation naturelle dans $\mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$;
- ⋆ la *catégorie des préfaisceaux* sur I à valeur dans $\mathcal{C}$ définie simplement par $\mathrm{Pre}(I,\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(I^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$.
- ⋆ Plus tard, on étudiera spécifiquement les préfaisceaux sur un espace topologique, *i.e.* sur l'ensemble partiellement ordonné de ses ouverts, à valeurs dans la catégorie Ab des groupes abéliens. La notion de préfaisceau de fonctions régulières, déjà rencontrée sans doute, est alors l'exemple fondamental d'un préfaisceau abélien.

5.2.7.2 Foncteurs de points

⟶ *Notation.* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie **localement petite**. Alors on rappelle que l'on peut définir pour tout objet A de $\mathcal{C}$ un *foncteur* Hom covariant de $\mathcal{C}$ dans Ens défini par

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$$
$$f \mapsto (g \mapsto f \circ g)$$

(à partir du bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} := \mathrm{Hom}$) qui, par un effort d'abstraction supplémentaire, fournit un foncteur <u>contravariant</u> h^{-} de $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

En remplaçant $\mathcal{C}$ par son opposée, il s'agit de considérer maintenant le foncteur covariant $h_{-} : A \mapsto h_A = \mathrm{Hom}_C(-,A)$ qui donne un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

Le foncteur contravariant $h_A = \mathrm{Hom}(-,A)$ est appelé *foncteur des points* de A et le foncteur covariant $h^A = k_A = \mathrm{Hom}(A,-)$ *foncteur des copoints* de A. On remarque que ces deux concepts n'en font qu'un :

$$h_{X,\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(T,X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) = k_{X,\mathcal{C}}(T)$$

pour tous $X,T \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire que le foncteur k_X de $\mathcal{C}$ n'est autre que le foncteur h_X de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. On peut donc se limiter à l'étude d'un seul des deux.

On a donc deux « sur-foncteurs » de points donnés par

$$\begin{array}{cccl} \underbrace{h_{-}}_{\text{contravariant}} & : & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \\ & & A & \longmapsto \underbrace{h^A = k_A = \mathrm{Hom}(A,?) : \begin{array}{rl} \mathcal{C} & \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ X & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \end{array}}_{\text{coreprésenté, covariant}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcll}
\underbrace{h^-}_{\text{covariant}} : & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) & \\
& A & \longmapsto \underbrace{h_A = \ \mathrm{Hom}(?,A) : \begin{array}{rl} \mathcal{C} & \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ X & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \end{array}}_{\text{représenté, contravariant.}} &
\end{array}$$

Le lecteur attentif aura remarqué que nous n'avons pas explicité la façon dont les h_{-} et h^{-} sont définis sur les morphismes. Intéressons-nous aux foncteurs de copoints, qui sont covariants, de sorte que le sur-foncteur de copoints est contravariant.

Certains expressions comme « prenons un préfaiscau dans $F \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,Ens) » ne sont pas claires : est-ce un préfaisceau sur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, *i.e.* un foncteur covariant ? Dans ce texte, nous utiliserons toujours les conventions de moindre effort pour la compréhension.

Fait

Tout morphisme de A vers B dans $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle de h^B dans h^A.

Illustrons le fait que la naturalité exprime que, étant donnés deux mathématiciens dans des pièces différentes à qui l'on donne le même problème, le problème est naturel s'ils en ressortiront avec la même solution.

Soit $u : A \to B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Construisons $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,?) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,?)$ une transformation naturelle. Soit donc $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. La naturalité se traduit par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,Y) \\
{\scriptstyle \eta_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,f):g \mapsto fg]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y)
\end{array}$$

soit pour tout morphisme $g : B \to X$, $f\eta_X(g) = \eta_Y(fg)$. Il n'y a pas mille façons de résoudre cette équation : on pose $\eta_X = g \mapsto gu$, et les deux membres sont égaux à fgu, ce qui signifie exactement que l'on peut post-composer et pré-composer par deux morphismes dans n'importe quel ordre. Rien d'impressionnant, en somme.

Quant aux foncteurs de points, on inverse le sens de tout.

Le lemme de Yoneda affirme en particulier, et ce n'est plus surprenant après avoir expliqué le fait précédent, que toute transformation naturelle de h^B dans h^A est de cette forme, *i.e.* que h_{-} est plein ; mieux, il caractérise l'ensemble des transformations naturelles de h^A dans n'importe quel foncteur de $\mathcal{C}$ dans Ens.

5.2.7.3 Énoncé et preuve du lemme de Yoneda

Lemme. ***(Lemme de Yoneda)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, toute transformation naturelle ψ de h^A sur un foncteur $T : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est uniquement déterminée par l'élément de $T(A)$ défini comme l'image de $id_A \in h^A(A)$ par $\psi(A)$. Plus précisément, on dispose d'une bijection de classes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(h^A,T) &\longrightarrow T(A) \\ \psi &\longmapsto \psi(A)(id_A). \end{aligned}$$

En particulier, pour tous objets A et B de $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Nat}(h^A,h^B) \simeq h^B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A).$$

$\triangleright$ Montrons l'injectivité. Soit ψ une transformation naturelle de h^A sur T. Pour tout élément f dans $h^A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, on a $f = h^A(f)(id_A)$. En appliquant cette identité à l'application ensembliste $\psi(B) : h^A(B) \to T(B)$, on obtient $\psi(B)(f) = \psi(B)[h^A(f)(id_A)] = T(f)[\psi(A)(id_A)]$ également par définition d'une transformation naturelle. En faisant varier f, on voit que ψ est uniquement déterminé par $\psi(A)(id_A)$, d'où le résultat.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit v un élément de $T(A)$. La preuve de l'injectivité permet de deviner un antécédent de v : définissons, pour tout objet B de $\mathcal{C}$, $\psi_v(B) : \begin{aligned} h^A(B) &\longrightarrow T(B) \\ f &\longmapsto T(f)(v) \end{aligned}$ et vérifions que ψ_v est bien une transformation naturelle. Pour toute flèche $g : B \to C$ et pour tout élément f de $h^A(B)$, on peut donc écrire $T(g)[\psi_v(B)(f)] = T(g)[T(f)(v)] = T[gf](v) = \psi_v(C)(gf)$. Or, la composée gf peut-être regardée comme l'image de f par $h^A(g)$, ce qui se reformule en $T(g)[\psi_v(B)(f)] = \psi_v(C)[h^A(g)(f)]$. En faisant varier f, $T(g) \circ \psi_v(B) = \psi_v(C) \circ h^A(g)$, ce qui est vérifié pour toute flèche g, et donc ψ_v est bien une transformation naturelle de h^A sur T d'image v par construction. ■

Reformulation pratique. ***(Lemme de Yoneda pour les préfaisceaux)***

Soit $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur et $X \in \mathcal{C}$ localement petite. Alors on a une bijection

$$\varepsilon X : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X),F) \xrightarrow{\sim} FX, \varphi \mapsto (\varphi_X)(id_X).$$

C'est-à-dire que l'ensemble des transformations naturelles d'un foncteur représenté par X dans un foncteur F est en bijection avec l'ensemble des éléments de $F(X)$.

Essayons de le re-démontrer sous cette forme.

Preuve.

$\triangleright$ À partir de rien, on vérifie que $\varphi \mapsto (\varphi X)(id_X)$ est bien à valeurs dans FX et qu'on obtient un inverse $\eta X : FX \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X),F)$ en envoyant $x \in FX$ sur $\eta X^x : \mathrm{Hom}(?,X) \to F$

donné par $(\eta X)_Y^x : \mathrm{Hom}(Y,X) \to FY, y \mapsto F(y)(x)$. Il y a étonnamment peu de choses à vérifier. Mais essayons de développer calmement et visuellement les notions.

Rappelons que $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}})$. Ainsi $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) \to F$ est une transformation naturelle si et seulement si pour tout morphisme $f : A \to B$, $A,B \in \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \arrow[d, "\varphi_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) \arrow[l, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X)"'] \arrow[d, "\varphi_B"] \\
F(A) & F(B) \arrow[l, "F(f)"]
\end{tikzcd}$$

commute, *i.e.* pour tout $g : B \to X$, $\varphi_A gf = F(f)\varphi_B g$. En particulier, $\varphi_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \to F(X)$ et l'on peut bien considérer $\varphi_X(id_X) \in F(X)$. L'application inverse ηX, plus simplement notée η, est définie en $x \in FX$ par $\eta_X(y : A \to X) = F(y)(x)$, puisque par contravariance $F(y) = FX \to FA$, pour n'importe quel $A \in \mathcal{C}$. Alors η est bien une transformation naturelle, puisque$F(gf)(x) = (F(f)F(g))(x) = F(f)[F(g)(x)]$ qui est la condition de commutation ci-dessous.

Vérifions enfin que ces applications sont inverses l'une de l'autre. Si φ est une telle transformation naturelle, alors en $A \in \mathcal{C}$, $\eta_A^{\varphi_X(id_X)}$ associe à $y : A \to X$, $F(y)(\varphi_X(id_X)) = \varphi_A id_X y = \varphi_A y$ par commutation, d'où $\eta_A = \varphi_A$ puis $\eta = \varphi$. Ainsi $\eta X \varepsilon X = id_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X),F)}$. Réciproquement, soit $x \in FX$. Calculons $\eta_X^x(id_X)$. On a $id_X : X \to X$ d'où $F(id_X) = F_{id_X} : FX \longrightarrow FX$, d'où $F(id_X)(x) = x$, doù $\varepsilon X \eta X = id_{FX}$. Le lemme est ainsi démontré. ■

Remarques.

1. Si l'on applique ceci à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et un foncteur covariant $F : \mathcal{C} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, on trouve la bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?),F) \xrightarrow{\sim} FX, \varphi \mapsto (\varphi X)(id_X).$$

2. On appelle indifféremment lemme de Yoneda la propriété énoncée sous ce nom et sa reformulation duale.

Exercice 24 *(Endomorphismes d'un foncteur représenté)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Montrer que pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X)) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?))$ dans Ens.

▷ **Éléments de réponse.**

Il n'y a rien d'autre à faire que d'appliquer le lemme de Yoneda à $F = \mathrm{Hom}(X,?)$.

Heuristique

Le lemme de Yoneda exprime le fait que deux objets X et Y sont isomorphes dans une catégorie si et seulement si toutes les relations dans lesquelles ils sont impliqués sont identiques, autrement dit s'ils ont les mêmes ensembles de morphismes avec tous les autres objets de la catégorie.

5.2.7.4 Foncteur de Yoneda

Définition. ***(Foncteur de Yoneda)***

Avec les notations précédentes, le *foncteur de Yoneda* ou *plongement de Yoneda* est le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) \\ X &\longmapsto X^\wedge := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) = h_A = k_A. \end{aligned}$$

On note abusivement $X^\wedge$ ce foncteur. On a $X^\wedge = h^-$ qui à un objet associe son foncteur des points.

On définit semblablement le foncteur dual $\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}). \\ X &\longmapsto X^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) = h^A \end{aligned}$ On note encore abusivement $X^\vee$ ce foncteur. On a $X^\vee = h_-$ qui à un objet associe son foncteur des copoints.

Remarques.

1. On préfère les préfaisceaux $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ aux *copréfaisceaux*, car, d'abord, les préfaisceaux sont plus courants, et pour les préfaisceaux, le foncteur de Yoneda $X^\wedge$ est covariant (mais à tout point il associe un foncteur représenté, donc contravariant).
2. Le lemme de Yoneda nous dit donc exactement que si $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un préfaisceau, alors on a la bijection naturelle $\{$morphismes de préfaisceaux $X^\wedge \xrightarrow{\varphi} F\} \xrightarrow{\sim} \{$éléments de $FX\}, \varphi \mapsto (\varphi_X)(id_X)$.

   Il nous arrivera d'identifier les éléments de FX avec les morphismes $X^\wedge \to F$ via cette bijection.
3. Si, pour F, on choisit un autre foncteur représentable $F = Y^\wedge$ pour un $Y \in \mathcal{C}$, on obtient la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(X^\wedge,Y^\wedge) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. D'où le corollaire suivant :

Corollaire. ***(Pleine fidélité du foncteur de Yoneda)***

Le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ est pleinement fidèle.
Autrement dit, $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

▷ En effet, $\varphi \mapsto (\varphi_X)(id_X)$ est réciproque de l'application canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(X^\wedge,Y^\wedge)$ induite par $\cdot\,^\wedge$. ■

Le foncteur de Yoneda n'a en général aucune raison d'être essentiellement surjectif, autrement toute catégorie serait à équivalence près une catégorie de foncteurs. La notion de foncteur représentable, et donc de propriété universelle, précise le défaut de surjectivité essentielle du Yoneda.

Application. ***(Le théorème de Cayley)***

Ces considérations sont une génération large du théorème du Cayley pour les groupes, qui énonce que tout groupe se plonge dans son groupe des permutations.
On sait que tout groupe peut-être vu comme une catégorie à un seul objet, qui est alors petite donc localement petite. Le lemme de Yoneda s'applique : la catégorie $G \mathrel{\widehat{=}} BG$ se plonge dans $\mathrm{Fun}(G,\mathrm{Ens})$ par disons $\mathcal{F}$. Or un tel foncteur se ramène, puisqu'elle n'a qu'un objet, a sa donnée sur les morphismes, *i.e.* les éléments de G. Notons $S = \mathcal{F}(G)$ l'unique objet de BG. Alors $\mathcal{F}$ envoie $g \in G$ sur un morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(S,S)$. Puisque $\mathcal{F}$ est pleinement fidèle et g est un isomorphisme dans BG, $\mathcal{F}(g) \in \mathfrak{S}(S)$, ce qu'il fallait montrer.

5.3 Universalité, adjonction et limites

5.3.1 Propriétés universelles, foncteurs représentables

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite, petite à agrandissement de l'univers près.

Définition. ***(Foncteur représentable, co-représentable)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur (contravariant de $\mathcal{C}$ dans Ens). On dit que F est *représentable* s'il existe un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ et un isomorphisme de foncteurs $q : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?;X_0) \xrightarrow{\sim} F$, autrement dit s'il est isomorphe à un foncteur représenté, ou encore s'il est dans l'image essentielle du plongement de Yoneda associé à $\mathcal{C}$. Le couple (F,q) est une *représentation* de F.
Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ (covariant de $\mathcal{C}$ dans Ens) est dit *co-représentable* ou plus simplement *représentable* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0,?) \xrightarrow{\sim} F$, autrement dit s'il est isomorphe à une foncteur co-représenté, ou encore s'il est dans l'image essentielle du plongement de Yoneda contravariant associé à $\mathcal{C}$. Le couple (F,q) est alors une *(co-)représentation* de F.

Reformulation pratique. ***(Représentabilité)***

F est coreprésentable si et seulement si l'on a une famille d'isomorphismes $(q_X)_{X\in\mathcal{C}}$ chacun de $F(X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0,X)$ tels que pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$,

$$\forall x \in FX \quad F(f)(x) = q_Y^{-1}[f \circ (q_X(x))].$$

De même, F est représentable si et seulement si l'on a une famille d'isomorphismes $(r_X)_{X\in\mathcal{C}}$ chacun de $F(X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X_0)$ tels que pour tout $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$,

$$\forall y \in FY \quad F(f)(y) = r_X^{-1}[(r_Y(y)) \circ f].$$

La représentation de foncteurs permet de construire des objets, même si ce n'est pas évident à première vue puisque l'on travaille sur des applications. Éprouvons-le sur des exemples.

Exemples. ***(Foncteurs représentables, co-représentables)***

1. *(Abélianisé)* Soit G un groupe. Définissons $F: \begin{array}{ccc} \mathrm{Ab} & \longrightarrow & \mathrm{Ens.} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,A) \end{array}$ On sait que pour tout A abélien, tout morphisme $f : G \to A$ s'écrit $h\pi$ pour un unique $h : G^{ab} \to A$ où $\pi : G \to G^{ab}$ est la projection canonique. Autrement dit, on a une bijection $\eta_A : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab},A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,A)$ qui à $h \mapsto h\pi$. Clairement, les η_A, $A \in \mathrm{Ab}$, forment un morphisme de foncteurs $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab},?) \to F$ est même un isomorphisme. Donc F est co-représentable et (G^{ab},η) est une co-représentation.
2. Le foncteur $\mathcal{P} : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \mathcal{P}(X), f \longmapsto (A \mapsto f^{-1}(A))$ est représentable par l'ensemble $\{0,1\}$.
   Dans la condition pratique de représentabilité, on peut considérer $r_X : A \mapsto \mathbb{1}_A$.
3. *(Produit cartésien)* Prenons un peu d'avance sur la suite en décrivant le paradigme de représentation qui permet de construire le produit, par exemple le produit cartésien. Soient $X,Y \in \mathrm{Ens}$ fixés. On définit $F : \mathrm{Ens}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, T \mapsto \mathrm{Hom}(T,X) \times \mathrm{Hom}(T,Y)$, décrit sur les morphismes par des applications transposées. Alors F est représentable par $X \times Y$.
   La construction duale aurait donné le coproduit, qui n'est autre que la somme dans les catégories Mod R, k-Vect, Ab...
   Remarquons au passage qu'il est curieux de construire le produit ensembliste en utilisant le produit ensembliste. En effet, les constructions par propriété universelle se transmettent par oubli : si elles n'existent pas dans Ens, elles n'ont aucune chance de se transposer dans une autre catégorie $\mathcal{C}$ concrète.
4. *(Quotient)* Soit A un anneau, soit I un idéal de A. Le foncteur $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}, B \mapsto \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A,B) \mid I \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}$ est représentable par A/I. Même chose pour les autres catégories admettant un quotient « facilement ».
5. *(Noyau)* Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Le foncteur $F : \mathrm{Grp}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, H \mapsto \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(H,G) \mid f \circ g = e_{G'}\}$ est représenté par $\mathrm{Ker}(f)$.
6. *(Sous-corps parfait maximal, clôture parfaite)* Soit $p \in \mathcal{P}$. Soient p-Krp la catégorie des corps de caractéristique p et D sa sous-catégorie pleine des corps parfaits. Soit $K \in D$. Le foncteur $F : D^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, L \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-Krp}}(L,K)$ est représentable par le plus grand sous-corps parfait de K, qui est l'intersecion des sous-corps de puissances

p^n-ièmes de K, soit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K^{p^n}$.

Dualement, le foncteur $F : D^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, L \mapsto \mathrm{Hom}_{p\text{-Krp}}(K,L)$ est représentable par la clôture parfait de K, qui est la réunion dans $\overline{K}$ des extensions engendrées par les racines p^n-ièmes d'éléments de K, soit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K^{p^{-n}}$.

7. *(Intérieur)* Si X est un espace topologique et A une partie de X, le foncteur de $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} = \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ défini par $F(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(X)}(U,A)$, où $\mathcal{P}(X)$ est la catégorie d'incidence de $\mathcal{P}(X)$, est représentable par $\mathring{A}$.

8. *(Objet libre, polynômes)* Soit I un ensemble et A un anneau commutatif. Le foncteur de Mod A dans Ens, respectivement Grp, respectivement Ab, respectivement Mod, respectivement A-alg., qui à un A-module F associe F^I est représentable. On obtient alors respectivement : le A-module libre $A^{(I)}$, le groupe libre sur I, le groupe commutatif $A^{(I)}$, le monoïde libre des mots sur l'alphabet I, l'algèbre des polynômes à indéterminées dans I.

Le lecteur se réjouira d'apprendre que la construction d'une algèbre de polynômes et d'un groupe libre sur un alphabet est la manifestation d'une seule et même construction universelle.

9. *(Complété)* Soit E un espace métrique. Le foncteur de la catégorie des espaces métriques complets dans Ens qui à un espace métrique complet X associe $\mathrm{Hom}(E,X)$ est représenté par le complété de E.

10. *(Topologie induite)* Soient $X \in \mathrm{Top}$ et Y une partie de X. La topologie induite par X sur Y muni de l'injection canonique représente le foncteur de Top dans Ens qui à A associe l'ensemble des applications continues de A dans X dont l'image est incluse dans Y.

11. *(Lemme de Yoneda)* Passons à un niveau d'abstraction supplémentaire : une reformulation du lemme de Yoneda dit que pour tout $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{ev}_X : \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \to \mathrm{Ens}, F \mapsto FX$ est représentable, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X)$ en est un représentant et εX donne une représentation.

Cas particulier, les faisceaux topologiques : soient T un espace topologique, $\mathcal{C} = \mathrm{Open}(T)$, U un ouvert de T. Alors le foncteur $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ens}) \to \mathrm{Ens}, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}U$ est représentable et un représentant est $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(T)}(?,U) : \mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$. Explicitement, si $V \in \mathrm{Open}(T)$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,U) = \begin{cases} \{*\} \text{ si } V \subseteq U \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$

Exercice 25 *(Universalité de la complétion d'un monoïde)*

On peut se rappeler que la complétion en groupe d'un monoïde M est un groupe M^+ muni d'une application $M \to M^+$ telle que pour tout morphisme de monoïdes $c : \phi : M \to G$ où G est un groupe il existe un unique morphisme de groupes $\tilde{\varphi} : M^+ \to G$ factorisant φ, *i.e.* $\varphi = \tilde{\varphi} \circ c$. Montrer que cette construction existe et est unique pour tout monoïde M.

On sait déjà décrire les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \to F$ de façon plus explicite et l'on peut montrer que

Propriété

Si (X_0,η) et (X_0',η') sont deux représentations d'un foncteur F d'une catégorie localement petite vers Ens„ il existe un unique isomorphisme $\varphi : X_0' \xrightarrow{\sim} X_0$ **dans** $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ tel que $\eta \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,\varphi) = \eta'$.

$$\begin{tikzcd}
X_0 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \arrow[dr, "\eta"] & \\
 & & F. \\
X_0' \arrow[uu, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0') \arrow[uu, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,\varphi)"] \arrow[ur, "\eta'"'] &
\end{tikzcd}$$

▷ C'est en fait une conséquence directe du lemme d'Yoneda, puisque $\eta^{-1} \circ \eta'$ une trasnformation naturelle entre deux foncteurs représentés. ■

Remarque. Supposons que $F \in \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ est représentable. Il s'ensuit du lemme d'Yoneda que dans une représentation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \xrightarrow{\sim} F$, η est donné par $(\eta X_0)(id_{X_0}) = x_0$.

Corollaire. ***(Unicité àipàuip du représentant)***

Il y a unicité à isomorphisme unique près dans $\mathcal{C}$ d'un représentant X_0 de F.

▷ Par ce qui précède,

$$\begin{tikzcd}
 & F & \\
X_0^\wedge \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, dashed] & & X_0'^\wedge \arrow[ul, "\eta'"']
\end{tikzcd}$$

donc par pleine fidélité du foncteur de Yoneda, il existe un unique isomorphisme dans $\mathcal{C}$ $\varphi : X_0 \longrightarrow X_0'$. ■

VOC Un élément $x_0 \in FX_0$ *exhibe* X_0 comme représentant de F, si le morphisme $X_0^\wedge \to F$ correspondant à x_0 par la réciproque de la bijection de Yoneda est un isomorphisme.

Exemples. ***(Exhibiteur d'un représentant)***

1. Soit F le problème universel de l'abélianisé $G^{ab} = X_0$ de G. Alors $FX_0 = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,G^{ab})$. La projection canonique $\pi : G \to G^{ab} = G/D(G)$ exhibe G^{ab} comme représentant de F. Par la réciproque de la reformulation du lemme de Yoneda, le morphisme de foncteur associé à $x_0 = \pi$ est donné en $A \in \mathrm{Ab}$ et $f : G^{ab} \to A$ par $\eta_A(f) = f\pi$. C'est un isomorphisme de foncteurs, ce qu'il fallait vérifier.

En fait, on dit, par exemple pour l'abélianisé, que $G \xrightarrow{\pi} G^{ab}$ est la solution du problème universel donné par les morphismes de G vers un groupe abélien, terminologie déjà rencontrée sans doute en pratique.

Principe. ***(Problème universel)***

Un *problème universel* dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ ou $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. On dit aussi que le problème est *posé par* le foncteur F. Ce problème admet une *solution* si ce foncteur F est représentable ou co-représentable et, dans ce cas, la solution est une représentation ou co-représentation η. Cette solution vérifie par construction la *propriété universelle* définie par F.

Définition. ***(Objet libre, objet colibre)***

Soit $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \ni X$ un foncteur entre deux catégories, X un objet. Un *objet libre* au-dessus de X relativement à G ou *solution du problème universel* posé par G pour X est la donnée d'une paire (D,i) où $D \in \mathcal{D}$ et $i : X \to G(D)$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, dit *canonique* attaché à X, induisant pour chaque $U \in \mathcal{D}$ une bijection fonctorielle en U $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,U) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GU), u \mapsto Gu \circ i$, ce qui revient à dire que pour chaque morphisme $f : X \to GU$ de $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $u : D \to U$ dans $\mathcal{D}$ tel que $f = Gu \circ i$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & GD \arrow[d, dashed, "Gu"] \\ & GU. \end{tikzcd}$$

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \ni U$ un foncteur entre deux catégories, U un objet. Un *objet (co)libre* au-dessous de U relativement à F ou *solution du problème universel* posé par F pour U est la donnée d'une paire (C,j) où $C \in \mathcal{C}$ et $j : F(C) \to U$ est un morphisme de $\mathcal{D}$, dit *canonique* attaché à X, induisant pour chaque $X \in \mathcal{C}$ une bijection fonctorielle en X $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,U), f \mapsto j \circ Ff$, ce qui revient à dire que pour chaque morphisme $u : FX \to U$ de $\mathcal{D}$, il existe un unique morphisme $f : X \to C$ dans $\mathcal{C}$ tel que

$u = j \circ Ff$:

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "j"] & U. \\ FX \arrow[u, dashed, "Ff"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Les exemples donnés de foncteur représentables permettent d'établir le lien entre représentabilité et existence d'un objet libre au-dessus d'un objet, par rapport à un foncteur.

Fait. ***(Caractérisation de l'universalité)***

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est un foncteur, un objet $X \in \mathcal{C}$ admet un objet libre relativement à G, si et seulement si, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G?)$ est coreprésentable, et cet objet libre est alors une coreprésentation.
De même, si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur, un objet $U \in \mathcal{C}$ admet un objet (co)libre relativement à F, si et seulement si, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,U)$ est représentable, et cet objet (co)libre est alors une représentation.

5.3.2 Objets finaux, objets initiaux

On donne deux exemples d'apparence un peu simplistes de propriétés universelles, mais pas tant que ça : toute propriété universelle s'y ramène à changement de point de vue près.

Définition. ***(Objet initial)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *initial* si, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X_0 \to Y$.

Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *initial* si pour tout objet A, il existe une unique flèche $f : X_0 \to A$.

$$X_0 \xrightarrow{f} A$$

Définition. ***(Objet final)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *final* si, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $Y \to X_0$.

Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *final* si pour tout objet A, il existe une unique flèche $g : A \to X_0$.

$$X_0 \xrightarrow{g} A$$

Exemples

1. L'ensemble vide $\emptyset$ est initial dans Ens et le singleton $\{*\}$ est final dans Ens.
2. Le groupe nul est initial et final dans Grp. L'anneau nul est initial et final dans Ann la catégorie des anneaux unitaires. L'espace nul $\{0\}$ est initial et final dans la catégorie k-Vect. De même dans Mod(R) et R-Mod si R est un anneau.
3. Le préfaisceau nul $U \mapsto \{0\}$ est initial et final dans la catégorie Pre(X,Ab) pour un espace topologique X.
4. La catégorie des corps n'a pas d'objet initial ! Mais, la catégorie des corps de caractéristique fixée p a un objet initial, c'est le corps premier de caractéristique p. Ainsi, il existe un recouvrement de Krp par des sous-catégories admettant toutes des objets initiaux.

Fait. ***(Dualité finalité-initialité)***

La finalité est l'initialité dans la catégorie opposée et vice versa.

Propriété. ***(Unicité àipàui des objets initiaux)***

Si X_0 et X_0' sont deux objets initiaux d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphisme.

▷ Il existe un unique $\varphi : X_0 \to X_0'$ et unique $\psi : X_0' \to X_0$ et il existe $\varphi : X_0 \xrightarrow{\sim} X_0'$ et on doit avoir $\varphi\psi = id_{X_0'}$ et $\psi\varphi := id_{X_0}$, car il n'existe qu'un seul morphisme $X_0 \to X_0$ respectivement $X_0' \to X_0'$. ■

Proposition. ***(Unicité àipàui des objets finaux)***

Si X_0 et X_0' sont deux objets finaux d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphisme.

▷ On applique la preuve précédente dans la catégorie duale où les isomorphismes sont forcément en bijection avec ceux de la catégorie d'origine. ■

Soyons plus efficace.

Propriété. ***(Propriété universelle des objets terminaux)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $* : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ le préfaisceau constant de valeur $\{*\}$, qui envoie tous les morphismes sur $id_{\{*\}}$[a]. Notons $*' : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \{*'\}$ le copréfaisceau constant de valeur $\{*'\}$. Alors :

1. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est final si et seulement s'il représente $* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \xrightarrow{\sim} *$.
2. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est initial si et seulement s'il représente $*' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0,?) \xrightarrow{\sim} *'$.

[a] Notons que $\{*\}$ est l'unique préfaisceau à isomorphisme unique près $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ tel que $|FX| = 1$ pour tout $X \in \mathcal{C}$.

Heuristique

Donc les objets initiaux et finaux sont des solutions de problèmes universels au sens du paragraphe précédent. En particulier, on retrouve le fait (trivial) qu'ils sont unique à isomorphisme unique près[a].

[a] Ce qui confirme : « la théorie des catégories sert à montrer que certains énoncés triviaux sont trivialement triviaux ».

On peut faire le constat inverse, qui n'est pas si inutile : toute solution d'un problème universel est objet final d'une catégorie bien choisie. On en retire en particulier une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un objet final dans une catégorie, et donc initial à dualité près.

Exercice 26

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ un foncteur. La *catégorie des éléments* $\int F$ de F a pour objets les couples (X,x), $X \in \mathcal{C}$, $x \in FX$, et morphismes $(X,x) \to (X',x')$ les morphismes $X \xrightarrow{f} X'$ tels que $(Ff)(x) = x'$, la composition provenant de celle de $\mathcal{C}$. Notons que tout objet (X,x) correspond à un unique morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) = X^\vee \xrightarrow{\varphi} F$ par Yoneda : $\varphi_X(id_X) = x \in FX$.
Montrer que $\int F$ a un objet final (X_0,x_0) si et seulement si F est représentable et que le cas échéant, x_0 exhibe X_0 comme solution du problème universel posé par F, *i.e.* $X_0^\vee \xrightarrow{\varphi} F$ tel que $\varphi_{X_0}(id_{X_0}) = x_0$ est un isomorphisme.

▷ On pourrait résoudre cet exercice à la main, mais il est bien plus rapide d'utiliser le foncteur de Yoneda (contravariant, car on considère des copréfaisceaux). Remarquer par exemple que dans $\int F$:

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & X^\vee \arrow[r] & F \\
(X',x') & X'^\vee \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

commute si et seulement si $(Ff)(x) = x'$. ■

5.3.3 Opérations de base dans les catégories définies par des propriétés universelles

5.3.3.1 Produits et coproduits

Définition. ***(Produit dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *produit* de $(X_i)_{i\in I}$ existe si le foncteur produit $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_i) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, Y \mapsto \underbrace{\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_i)}_{\text{produit d'ensembles}}$ est représentable, et alors on note $\prod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ un représentant, unique à isomorphisme unique près.

Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *produit* de $(X_i)_i$ est l'objet $\prod_{i\in I} X_i$ de $\mathcal{C}$ muni des morphismes *projections* $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ pour tous $i \in I$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_i : Y \to X_i, i \in I$, il existe un unique $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ où $\pi_i f = f_i$ pour tout i.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, bend left, "f_i"] & \\
\prod_{i\in I} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Définition. ***(Co-produit dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *coproduit* de $(X_i)_{i\in I}$ existe si le foncteur produit $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, Y \mapsto \underbrace{\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i,Y)}_{\text{produit d'ensembles}}$ est co-représentable, et alors on note $\coprod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ un représentant, unique à isomorphisme unique près.

Soient $(X_j)_{j\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *coproduit* ou *réunion disjointe* ou *somme directe (externe) quelconque* de $(X_i)_i$ est l'objet $\coprod_{j\in I} X_j$ de $\mathcal{C}$ muni des morphismes *plongements* $i_j : X_j \to \coprod_{j\in I} X_j$ pour tous $j \in I$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_j : X_j \to Y, j \in I$, il existe un unique $f : \coprod_{j\in I} X_j \to Y$ où $fi_j = f_j$ pour tout j.

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & Y \arrow[d, dashed, "f"] \\
& \coprod_{j\in I} X_j
\end{tikzcd}$$

Remarques.

1. Donc si $(p_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{j\in I}^{\mathcal{C}}(X_j,X_i)$ exhibe $\prod_{j\in I}^{\mathcal{C}} X_j$ comme produit des $X_i, i \in I$, on a la bijection

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \prod_{j\in I}^{\mathcal{C}} X_j) &\longrightarrow \prod_{j\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_j) \\
f &\longmapsto (p_j f)_{j\in I}.
\end{aligned}$$

On peut faire une remarque semblable pour le coproduit qu'on laisse énoncer au lecteur.

2. Supposons $I = \{1,2\}$. Alors la bijection de représentabilité traduit les propriétés universelles suivantes.

Soient $X_1,X_2 \in \mathcal{C}$. Le *produit (fini)* de X_1 et X_2 est l'objet $X_1 \times X_2 = X_1 \prod X_2$ de $\mathcal{C}$ muni de deux morphismes *projections* $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_1 : Y \to X_1$ et $f_2 : Y \to X_2$, il existe un unique $f : Y \to X_1 \times X_2$ où $\pi_1 f = f_1$ et $\pi_2 f = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

Soient $X_1,X_2 \in \mathcal{C}$. Le *coproduit (fini)* ou *union disjointe* ou *somme (directe) (externe)* de X_1 et X_2 est l'objet $X_1 \sqcup X_2 = X_1 \coprod X_2$ de $\mathcal{C}$ muni de deux morphismes *plongements* $i_1 : X_1 \to X_1 \coprod X_1$ et $i_2 : X_2 \to X_1 \coprod X_2$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_1 : X_1 \to y$ et $f_2 : X_2 \to y$, il existe un unique $f : X_1 \coprod X_1 \to Y$ où $fi_1 = f_1$ et $fi_2 = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\
& X_1 \coprod X_2 \arrow[d, dashed, "f"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

3. Supposons $I = \emptyset$. Par convention le produit de la famille vide d'ensembles est l'ensemble singleton. Alors $\prod_{\emptyset}^{\mathcal{C}}$ est l'objet initial de $\mathcal{C}$, s'il existe.

De même le coproduit de la famille vide d'ensembles est l'ensemble vide. Alors $\coprod_{\emptyset}^{\mathcal{C}}$ est l'objet final de $\mathcal{C}$, s'il existe.

Exemples. ***(Produits)***

1. Si $\mathcal{C} = \text{Ens}$, alors $\prod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ est le produit habituel des ensembles X_i.
2. Si $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$, le produit est le produit habituel des modules. C'est en particulier le cas pour les groupes abéliens et les espaces vectoriels.

Exemples. ***(Coproduits)***

1. Si $\mathcal{C} = \text{Ens}$, alors $\coprod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ est la réunion disjointe des ensembles X_i, souvent réalisée par $\bigcup_{i\in I} \{i\} \times X_i$.
2. Si $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$, le coproduit est la somme directe de modules. C'est en particulier le cas pour les groupes abéliens et les espaces vectoriels.

5.3.3.2 Égalisateurs et coégalisateurs

Définition. ***(Égalisateur dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soient X,Y deux objets de $\mathcal{C}$. Soient $f,g : X \to Y$ des morphismes de $\mathcal{C}$. L'*égalisateur* de (f,g) existe si le foncteur $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Ens}, W \mapsto \{h : W \to X \mid fh = gh\} \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$ est représentable et dans ce cas, on le définit comme un représentant. On le note $\text{eq}(f,g)$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E = \text{eq}(f,g) \arrow[r, "h_0"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Remarque. Donc, si $h_0 : E \to X$ exhibe E comme égalisateur, alors

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W,E) &\longrightarrow \{h : W \to X \mid fh = gh\} \\
k &\longmapsto h_0 \circ k
\end{aligned}$$

est une bijection.

> Soient $X_1,X_2 \in \mathcal{C}$ et $f,g : X_1 \to X_2$ deux morphismes *parallèles* dans $\mathcal{C}$. L'*égalisateur* ou *égaliseur* de X_1 et X_2 est l'objet E de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme également appelé *égaliseur*

$\mathrm{eg}(f,g) = \mathrm{eq}(f,g) = e : E \to X_1$ qui *égalise* la paire (f,g), *i.e.* $fe = ge$, tel que pour tout objet E' et morphisme $e' : E' \to X_1$ égalisant (f,g), *i.e.* $fe' = ge'$, il existe un unique $y : E' \to E$ tel que $e' = ey$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \\ E' \arrow[u, dashed, "y"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Les exemples suivants s'avancent un peu, sans grand problème.

Exemple. ***(Égalisateurs)***

Si $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\ R$ pour un anneau R et $f : L \to M$ est une application R-linéaire entre deux R-modules L et M, alors $\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{eq}(L \xrightarrow{f} M, L \xrightarrow{0} M)$. En particulier, si $f,g : L \to M$ sont des applications R-linéaires, alors $\mathrm{eq}(f,g) \simeq \mathrm{Ker}(f - g : L \to M)$. Il est important de remarquer dès maintenant que cette description est possible parce que l'on peut définir la différence de deux morphismes, ce qui bien sûr, n'est pas le cas de toute catégorie.

Définition. ***(Co-égalisateur dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soient X,Y deux objets de $\mathcal{C}$. Soient $f,g : X \to Y$ des morphismes de $\mathcal{C}$. Le *coégalisateur* de (f,g) existe si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, W \mapsto \{h : Y \to W \mid hf = gf\}$ est coreprésentable et dans ce cas, on le définit comme un coreprésentant. On le note $\mathrm{coeq}(f,g)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "h_0"] \arrow[dr, "h"'] & E = \mathrm{coeq}(f,g) \arrow[d, "k"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

Remarque. Donc, si $h_0 : Y \to E$ exhibe E comme égalisateur, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E,W) &\longrightarrow \{h : X \to W \mid hf = hg\} \\ k &\longmapsto k \circ h_0 \end{aligned}$$

est une bijection.

Soient $X_1,X_2 \in \mathcal{C}$ et $f,g : X_1 \to X_2$ deux morphismes *parallèles* dans $\mathcal{C}$. Le *co-égalisateur* ou *co-égaliseur* de X_1 et X_2 est l'objet E de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme également appelé *co-égaliseur* $\mathrm{coeg}(f,g) = \mathrm{coeq}(f,g) = e : X_2 \to E$ qui *coégalise* la paire (f,g), *i.e.* $ef = eg$, tel que pour tout objet E' et morphisme $e' : X_2 \to E'$ coégalisant (f,g), *i.e.* $e'f = e'g$, il existe un unique $y : E' \to E$ tel que $ye = e'$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & E \arrow[d, dashed, "y"] \\ & & E' \end{tikzcd}$$

Exemple. ***(Co-égalisateurs)***

On reprend la situation de l'exemple précédent. Si $f : L \to M$ est R-linéaire, alors $\mathrm{Coker}(f) \simeq \mathrm{coeq}(L \xrightarrow{f} M, L \xrightarrow{0} M)$ et si $f,g : L \to M$ sont des morphismes alors $\mathrm{coeq}(f,g) \simeq \mathrm{Coker}(f - g : L \to M)$. Heuristiquement, il y a donc une plus grande symétrie entre le noyau et le conoyau qu'entre le noyau et l'image, ce qui est prévisible par l'esprit fin : le noyau et l'image souvent ne vérifient pas des propriétés semblables.

$\longrightarrow$ *Convention.* Attention, on appelle alternativement égaliseur, respectivement coégaliseur, l'objet représentant du problème universel et le morphisme canonique qui lui est associé, ou le couple qu'ils forment.

Propriétés

1. Tout égalisateur est un monomorphisme.
2. Tout coégalisateur est un épimorphisme.

▷ Successivement :

1. Soient f,g deux morphismes parallèles et e leur égalisateur, qui vérifie par définition $fe = ge$. Soient f',g' deux morphismes tels que $ef' = eg'$. Alors $fef' = feg'$ d'où $gef' = feg'$. De même, $gef' = geg'$. En particulier, $geg' = feg'$, donc eg' égalise (f,g). Par suite, il existe un unique morphisme t tel que $et = eg'$, d'où $t = f'$. D'autre part, de $gef' = geg'$ on peut encore déduire $fef' = geg' = feg' = gef'$ donc ef' égalise (f,g). Par suite, il existe un unique morphisme t' tel que $et' = ef'$, d'où $t' = g'$. Mais $ef' = eg'$, donc $et' = eg'$, donc $t' = t$ par unicité de t ou de t'. Donc $f' = g'$.
2. On dualise. ■.

5.3.4 Foncteurs adjoints

D'où viennent les adjoints

La notion de foncteur adjoint, presque aussi importante que celle de transformation naturelle, a été inventée par Daniel Kan dans son article *Adjoint functors*, trans. AMS 87, 1958, 294-329.

Définition. ***(Adjonction dans une catégorie)***

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories localement petites. Une *paire adjointe* est la donnée d'un couple de foncteurs $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ avec des bijections (bi)fonctorielles en $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$:

$$\alpha(X,Y) = \alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY), X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D},$$

c'est-à-dire que les $\alpha(X,Y)$ définissent un isomorphisme de bifoncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F?,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,G-)$ définis de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$, l'objet α étant une *adjonction* entre L et R. On note $L \dashv R$. On dit que L est *adjoint à gauche* de $\mathbb{R}$ et R est *adjoint à droite* de L.

Reformulation pratique. ***(Énoncé pratique de la fonctorialité de l'adjonction)***

La fonctorialité en chaque variable se détaille comme suit. Si $f : X \to X'$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, alors pour tout $Y \in \mathcal{D}$, il existe une carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX',Y) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Lf,Y)"] \arrow[r, "\alpha_{X',Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',RY) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,RY)"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont bijectives. De même, si $g : Y \to Y'$ est un morphisme de $\mathcal{D}$, alors pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \arrow[r, "\alpha_{X,Y}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Rg)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y') \arrow[r, "\alpha_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY')
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont bijectives.

Remarque. Souvent, il y a des techniques plus directes pour montrer que les bijections sont naturelles en chaque variable et il sera rare d'écrire un tel diagramme, quitte à simplement énoncer la propriété dont il est l'essence dans certains cas.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note souvent $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ pour rendre compte des deux foncteurs dans les deux sens.

Mnémonik : on voit que L est à gauche et que R est à droite.

Exemple fondamental. ***(Adjonction oubli-libre entre*** Ab ***et*** Ens***)***

Soit $U : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur d'oubli. Soit $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ qui à un ensemble X associe le groupe abélien formé des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles finies des élements de X, défini sur les morphismes $\varphi : X \to X'$ par $L([x]) = [\varphi(x)]$.
Pour $X \in \mathrm{Ens}$ et $A \in \mathrm{Ab}$, on a les applications $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,UA) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(LX,A)$ qui à

f associent l'unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $\tilde{f} : LX \to A$ telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X \hookrightarrow LX, x \mapsto 1.x$. Il y a trois choses à vérifier :

- ⋆ les $\alpha_{X,Y}$ sont des bijections, l'inverse étant évident à expliciter ;
- ⋆ la fonctorialité en $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$;
- ⋆ la fonctorialité en Ab.

Ces vérifications ne sont qu'une réécriture des deux diagrammes donnés précédemment, car tout s'ensuit sans aucune astuce.

Remarque importante. Supposons que nous avons une adjonction $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, avec isomorphismes $\alpha(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY)$. En appliquant cette relation à $X = RY \in \mathcal{C}$, on obtient $\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LRY,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(RY,RY) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(RY)$ d'où une application $\boxed{\alpha^{-1}_{RY,Y}(id_{RY}) = \varphi_Y : LRY \to Y}$ correspondant par cette identification à id_{RY}, et φ_Y est un morphisme dans $\mathcal{D}$. Semblablement, si l'on prend $Y = LX \in \mathcal{D}$, on obtient $\alpha' = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,LX) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RLX)$, d'où $\boxed{\alpha_{X,LX}(id_{LX}) = \psi_X : X \to RLX}$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.

On peut plus ou moins facilement démontrer que φ et ψ sont fonctoriels respectivement en Y et X. On en déduit que l'on a des transformations naturelles $\varphi : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ et $\psi : Id_{\mathcal{C}} \to RL$.

VOC On appelle ψ l'*unité* de l'adjonction et φ la *coünité* ou *co-unité* de l'adjonction. Ce sont les *morphismes d'adjonction* de l'adjonction.

Exemple fondamental. ***(Adjonction oubli-libre, suite : unité et coünité de l'adjonction)***

Soit $A \in \mathrm{Ab}$. Alors la coünité de l'adjonction oubli-libre est

$$\begin{aligned} \varphi_A : \quad LUA &\longrightarrow A \\ \underbrace{x_1.a_1 + \ldots + x_n.a_n}_{\text{CL formelle d'éléments de l'ensemble } A} &\longmapsto \underbrace{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n}_{\text{élément calculé à l'aide de la loi de } (A,+).} \end{aligned}$$

(On remarque que $\varphi_A : LUA \to A$ contient l'information sur l'addition de A.)
Soit maintenant $X \in \mathrm{Ens}$. Alors l'unité de l'adjonction oubli-libre est tout simplement

$$\begin{aligned} \psi X : \quad X &\longrightarrow ULX \\ x &\longmapsto 1.[x] \end{aligned}$$

où LX est vu comme un ensemble, même si c'est un groupe.

Heuristique

Les unités et coünités ne font pas grand chose sur les éléments.

A priori, unités et coünités ne sont pas des isomorphismes de foncteurs, sinon on aurait des équivalences !
On peut dès lors penser aux foncteurs adjoints comme des presque-équivalences.

Propriété. ***(Détermination d'une adjonction par ses unité et coünité)***

Dans une adjonction avec les notations de la définition, on peut reconstruire α à partir de la coünité φ et de l'unité ψ comme suit : $LX \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow$ $\begin{tikzcd} RLX \arrow[r, "Rf"] & RY \\ X \arrow[u, "\psi X"] & \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow \alpha(X,Y)(f) = (Rf)\circ(\psi X) : X \to RY$ et $X \xrightarrow{g} RY \rightsquigarrow$ $\begin{tikzcd} LX \arrow[r, "Lg"] & LRY \arrow[d, "\varphi Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$ $\rightsquigarrow \alpha(X,Y)^{-1}(g) = (\varphi Y)(Lg) : LX \to Y$.

Notons :

Fait

L'unité d'une adjonction permet de la reconstruire. En particulier, l'unité d'une adjonction détermine la coünité.
De même, la cöunité d'une adjonction permet de la reconstruire. En particulier, la cöunité d'une adjonction détermine son unité.

Corollaire. ***(Équivalence $\implies$ adjonction)***

Deux quasi-inverses sont adjoints l'un de l'autre et dans les deux sens.

De plus :

Corollaire. ***(Adjonction et équivalence)***

Deux adjoints sont des équivalences si et seulement si leur unité et leur coünité sont des isomorphismes (naturels).

En fait, on a plus précisément :

Corollaire. ***(Adjonction et pleine fidélité)***

Un adjoint à droite est pleinement fidèle si et seulement si la coünité de l'adjonction est un isomorphisme fonctoriel.
Un adjoint à gauche est pleinement fidèle si et seulement si l'unité de l'adjonction est un isomorphisme fonctoriel.

▷ Montrons la première propriété et la deuxième s'en déduit en dualisant. Comme $\varepsilon : LR \to Id_D$ la coünité est un morphisme de foncteurs, pour tout $f : X \to Y$ de $\mathcal{D}$, le carré

$$\begin{tikzcd} LRX \arrow[r, "LRf"] \arrow[d, "\varepsilon X"'] & LRY \arrow[d, "\varepsilon Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute, donc

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "(\varepsilon X)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(RX,RY) \arrow[d, "\simeq"] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LRX,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & Rf \arrow[d, mapsto] \\ f(\varepsilon X) \arrow[r, phantom, "="] & (\varepsilon Y)(LRf) \end{tikzcd}$$

commute également. Il s'ensuit par le lemme de Yoneda que $\varepsilon X : LRX \to X$ est inversible si et seulement si le morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,?) \xrightarrow{R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(RX,R?)$ est inversible. Clairement, ce morphisme est alors inversible pour tous $X \in \mathcal{D}$ si et seulement si $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est pleinement fidèle. ■

Remarque. On ne déduit pas le corollaire surprécédent du précédent. En effet, il n'y a pas de théorème de Cantor-Bernstein dans Cat.

Exercice 27 *(Une commutation élégante)*

Montrer que φ et ψ rendent commmutatifs :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi R"] \arrow[rr, bend right, "Id_R"'] & RLR \arrow[r, "R\varphi"] & R \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\psi"] \arrow[rr, bend right, "Id_L"'] & LRL \arrow[r, "\varphi L"] & L, \end{tikzcd}$$

Plus précisément, on a réciproquement :

Proposition. ***(Description de l'ensemble des adjonctions)***

Soient $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ des foncteurs. On a une bijection entre A l'ensemble des bijections bifonctorielles $\alpha(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY)$ et B l'ensemble des couples de morphismes dit coünité $\varphi : LR \to id_{\mathcal{D}}$ et unité $\psi : id_{\mathcal{C}} \to RL$ tels que

$$(R\varphi)(\psi R) = Id_R \text{ et } (\varphi L)(L\psi) = Id_L.$$

⊛ *(Idée de la preuve.)* On a construit des applications $A \to B$ et $B \to A$. Il reste à vérifier qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. ■

Remarque. (Changement d'échelle pour l'adjonction) La définition de B n'utilise que les notions de foncteur (*i.e.* 1-morphisme) et de morphisme de foncteurs (*i.e.* 2-morphisme). Cette définition a donc un sens dans toute 2-catégorie.

Lemme. ***(Unicité àipàuip de l'adjoint à droite)***

Soit $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Supposons que R_1 et $R_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont deux adjoints à droite (donnés avec leurs bijections α_1 et α_2). Alors on a un isomorphisme canonique $R_1 \xrightarrow{\sim} R_2$.

▷ On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,R_1X) \underset{\alpha_1(?,X)}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L?,X) \underset{\alpha_2}{\to} \mathcal{C}(?;R_2X)$ un isomorphisme avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,R_1X)$, fonctoriel en X entre $(R_1X)^\wedge$ et $(R_2X)^\wedge$. Comme le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle, on obtient un isomorphisme $R_1X \xrightarrow{\sim} R_2X$ fonctoriel en X, *i.e.* un isomorphisme de foncteurs $R_1 \xrightarrow{\sim} R_2$. ■

Lemme. ***(Unicité àipàuip de l'adjoint à gauche)***

Soit $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Supposons que L_1 et $L_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont deux adjoints à gauche (donnés avec leurs bijections α_1 et α_2). Alors on a un isomorphisme canonique $L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

▷ De même. ■

On se pose la question pratique suivante : à quelles conditions sur R existe-t-il un adjoint à gauche L ? et la question symétrique avec les adjoints à droite, ce qui peut être passé sous silence au vu de la définition. Voici une condition nécessaire.

Lemme. ***(Comportement des produits et coproduits par adjonction)***

Supposons qu'on a une adjonction $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, avec α. Supposons que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{D}$ tel que $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i$ existe. Alors $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}}(RX_i)$ existe et est canoniquement isomorphe à $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i)$.

De même, supposons que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{C}$ tel que $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ existe. Alors $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}}(LX_i)$ existe et est canoniquement isomorphe à $L(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i)$.

▷ Soit $Y \in \mathcal{C}$. On a les bijections $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{C}(Y,RX_i) \underset{\text{adj.}}{\xrightarrow{\sim}} \prod\limits_{i\in I} \mathcal{D}(LY,X_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(Ly,\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i) \underset{\text{adj.}}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{C}(Y,R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i))$ (par définition du produit) donc la composée est la fonctorielle en Y. Donc le foncteur produit $\prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,RX_i)$ est représenté par $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i)$ d'où un isomorphisme canonique $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}}(RX_i)$.

La preuve est symétrique pour le cas des coproduits et des foncteurs adjoints à gauche. ■

Mnémonik : on peut retenir le slogan suivant, que les adjoints à droite préservent les produits quelconques, les adjoints à gauche préservent les co-produits quelconques.

Exercice 28 *(Un foncteur sans adjoint à gauche)*

Montrer que le foncteur libre L : Ens $\to$ Ab adjoint à gauche du foncteur d'oubli U : Ab $\to$ Ens, n'admet pas d'adjoint à gauche.

▷ **Éléments de réponse.**

En effet, s'il admettait un adjoint à gauche, cela signifierait que c'est un adjoint à droite, et donc qu'il préserve les produits. Cependant, le groupe abélien libre sur un produit n'a aucune raison d'être isomorphe au produit des groupes abéliens libres. Un raisonnement de rang rien que pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nous le montre : le groupe abélien libre sur ce produit a une base à 9 éléments, mais le produit des groupes abéliens libres sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui sont de rang 3 est de rang 6.

Ce comportement se généralisera bientôt aux limites et colimites.

Exemples. ***(Foncteurs adjoints)***

1. L'adjonction oubli-libre de Ens dans Ab se décline sur les objets libres d'autres catégories : R-modules pour R un anneau, k-espaces vectoriels pour k un corps, etc.
2. Soient k un corps, $Alg := k$-Ass la catégorie des k-algèbres associatives unifères, et Lie la catégorie ds k-algèbres de Lie. On considère $F : Alg \to$ Lie qui à A fait correspondre l'algèbre de Lie munie du crochet canonique. Alors F admet un adjoint à gauche noté U qui envoie une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur son algèbre enveloppante $U\mathcal{G}$.
3. Soit Cat la catégorie des petites catégories, dont les morphismes sont les foncteurs. Soit $\mathcal{CAR}$ la catégorie des carquois, dont les morphismes sont les morphismes de foncteurs. On a le foncteur d'oubli de la composition
$$\begin{aligned} U : \quad \mathrm{Cat} &\longrightarrow \mathcal{CAR} \\ \mathcal{C} &\longmapsto Q_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), Q_1 = \coprod_{X,Y \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(X,Y), \text{applications source et but évidentes} \end{aligned}$$
et de l'autre côté, le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{CAR} \to$ Cat qui à Q associe la catégorie des chemins $\mathcal{P}Q$. Le foncteur $\mathcal{P}$ est adjoint à gauche du foncteur U. Par exemple, si
$$Q : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \\ 3 & \end{tikzcd}$$
, alors la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{P}Q \to \mathcal{C}$ est équivalente à celle d'un morphisme de carquois $Q \to U\mathcal{C}$, *i.e.* un diagramme
$$\begin{tikzcd} F1 \arrow[r] \arrow[d] & F2. \\ F3 & \end{tikzcd}$$
La preuve de ce fait casse sérieusement la tête, mais elle commence par exhiber des bijections $\mathrm{Fun}(\mathcal{P}Q,\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Hom}(Q,\mathcal{C}^{\text{oublié}})$ pour tout carquois Q, toute catégorie $\mathcal{C}$. Par définition d'un morphisme de carquois, c'est immédiat, et la facilité de la

construction laisse à croire que la fonctorialité de ces bijections se montre sans difficulté.

4. L'inclusion Ab $\to$ Grp a un adjoint à gauche : c'est le foncteur abélianisation $G \mapsto G^{ab}$ de Grp dans Ab qui à $h : A \to B$ fait correspondre $h^{ab} : A^{ab} \to B \xrightarrow{\pi} B^{ab}$.
5. Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux petites catégories. Soit $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ une adjonction. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie et notons R^* et L^* les foncteurs $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{T}) \rightleftarrows \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{T})$ donnés par précomposition avec R et L respectivement. Alors R^* est adjoint à gauche de L^*.
Il est plus simple ici de construire des morphismes d'adjonction en utilisant la caractérisation des adjonctions.

Exercice 29

Déduire de l'adjonction Cat-$\mathcal{CAR}$ que toute petite catégorie est isomorphe au quotient de la catégorie des chemins d'une carquois par une congruence.

▷ **Éléments de réponse.**

On peut, à quotient par congruence près d'une catégorie, changer une transformation naturelle en isomorphisme naturel.

Théorème. ***(Caractérisation un peu tautologique des adjonctions)***

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, respectivement $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. On a équivalence entre :

(i) F admet un adjoint à droite, respectivement à gauche ;

(ii) pour tout $Y \in \mathcal{D}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,Y) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable, respectivement pour tout $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F?) : \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$ est coreprésentable.

▷ $(i) \implies (ii)$: soit $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un adjoint à droite (donné avec α). Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X) \xrightarrow[\alpha]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$. Cela signifie que GX représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X)$.

$(ii) \implies (i)$: pour tout objet $X \in \mathcal{D}$, définissons $GX \in \mathcal{C}$ en choisissant une représentation. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX)$. Il reste à définir Gf pour un morphisme $f : X \to Y$. Considérons

$$\begin{tikzcd}
h \in \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F?,X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX) \arrow[d, dotted, "\text{morphisme de foncteurs}"] & = (GX)^\wedge & GX \arrow[d, dashed, ":=Gf"] \\
fh \in & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GY) & = (GY)^\wedge & GY
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'il existe Gf rendant commutatif les carrés par la pleine fidélité du foncteur de Yoneda. On vérifie que G est bien un foncteur et qu'il est adjoint à droite de F. ■

On peut donc énoncer :

Propriété

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout objet X de $\mathcal{C}$ admet un objet libre solution du problème universel posé par G ;

(ii) pour chaque $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G?)$ est coreprésentable ;

(iii) G admet un adjoint à gauche, *i.e.* c'est un adjoint à droite.

Propriété

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) tout objet U de $\mathcal{D}$ admet un objet (co)libre solution du problème unversel posé par F ;

(ii) pour chaque $U \in \mathcal{D}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,U)$ est représentable ;

(iii) G admet un adjoint à droite, *i.e.* c'est un adjoint à gauche.

5.3.5 Opérations dans les catégories définies par des foncteurs adjoints

5.3.5.1 Produits tensoriels

Définition-propriété. ***(Produit tensoriel)***

Soient A,B deux anneaux et X_B^A un A-B-bimodule. Rappelons que Mod A désigne la catégorie des A-modules à droite. Soit M un B-module à droite. Alors on munit le groupe abélien $\mathrm{Hom}_B(X_B,M_B) = \{f : X \to M \mid f \text{ additif et } f(xb) = f(x)b \quad \forall x \in X, \forall b \in B\}$ d'une structure de A-module à droite en posant, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_B(X,M)$, $(fa)(x) := f(ax)$ pour tous $a \in A, x \in X$. On obtient ainsi un foncteur $R : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A, M \mapsto \mathrm{Hom}_B(X,M)$.

Le foncteur $R = \mathrm{Hom}_B(X,?) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A$ admet un adjoint à gauche L noté $L = ?\otimes_A X_B : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ B$, dit *produit tensoriel* ou *tensorisation sur A par X*, de sorte qu'on a des bijections bifonctorielles $\mathrm{Hom}_A(N,\mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A X,M)$, $N \in \mathrm{Mod}\ A$, $M \in \mathrm{Mod}\ B$.

▷ En effet, pour tout A-module M, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\ A}(M,\mathrm{Hom}_B(X,?))$ est représentable et l'on applique la propriété précédente. On peut construire ainsi $\mathrm{Hom}_A(N,\mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}_{A,B}(N \times X,M_B) = \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A X,M)$ l'ensemble des applications A-bilinéaires et B-linéaires. ■

Mnémonik : dans les deux membres, les trois symboles N,X,M apparaissent dans le même ordre. C'est une formule d'associativité.

Exercice 30

Donner l'unité et la coünité de l'adjonction ci-dessus.

▷ **Éléments de réponse.**

L'unité est donné par $\eta_{M\otimes_A X}(x)(y) = x \otimes y$ et la coünité est donnée par $\varepsilon_{\mathrm{Hom}_A(X,N)}(f \otimes x) = f(x)$.

Remarques.

1. Par exemple, si $N = A^n$ est le module libre de rang $n \in \mathbb{N}$ sur A, alors on a $\mathrm{Hom}_B(A^n \otimes_A X_B, M_B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A^n, \mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(X,M)^n = \mathrm{Hom}_B(X^n, M)$ fonctoriel en $M \in \mathrm{Mod}\ B$. Par le lemme de Yoneda, on obtient un isomorphisme canonique $A^n \otimes_A X \xrightarrow{\sim} X^n$.
2. De la même façon, si I est un ensemble, éventuellement infini, $\underbrace{A^{(I)}}_{\bigoplus_I A} \otimes_A X \xrightarrow{\sim} X^{(I)}$ par le même argument.
3. On retrouve ainsi nombre de propriétés attendues du produit tensoriel en utilisant sa propriété universelle. Fait à retenir !

Exercice 31 *(Dimension infinie et adjonction tensorielle)*

Soit V un espace vectoriel. Montrer que le foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même donné par $W \mapsto W \otimes V$ a un adjoint à gauche et un adjoint à droite si et seulement si V est de dimension finie. Observer que ces adjoints sont canoniquement isomorphes dans ce cas.

Indication On pourra utiliser le fait que quand V est de dimension finie, on pourra montrer que $V^*\otimes_k ? = \mathrm{Hom}(V, ?)$.

5.3.6 Limites et colimites

5.3.6.1 Définition : diagrammes, cônes, limites

On introduit un point de vue seulement reformulatif qui permet d'énoncer paisiblement la notion de limite ou colimite.

Définition. *(I-diagramme)*

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ s'appelle aussi un *I-diagramme* ou *diagramme de forme I* dans $\mathcal{C}$.
On peut également parler de I-diagramme où I est une catégorie quelconque, mais le plus souvent, on s'intéresse aux cas où I à deux objets, est finie, dénombrable ou petite.

VOC Ainsi, un diagramme est exactement un foncteur covariant, de même qu'un préfaisceau est exactement un foncteur contravariant ; le choix de vocabulaire ne dépend que du point de vue.

Reformulation pratique. ***(Diagramme de forme I)***

Un diagramme $I \to \mathcal{C}$ est la donnée pour tout $i \in I$ d'un objet $X_i \in \mathcal{C}$ tel que pour toute flèche $\alpha : i \to j$ dans I, on ait une flèche $f_\alpha : X_i \to X_j$ dans $\mathcal{C}$ et ceci de telle sorte que tout diagramme commutatif de I s'envoie sur un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}$.
En particulier, si I n'a pas de flèches, un I-diagramme est une collection d'objets de $\mathcal{C}$, et si $I = \mathbb{N}$ avec sa structure ordonnée usuelle, un I-diagramme est un système inductif dénombrable au sens des ensembles, et même si I est une catégorie d'incidence, par définition un I-diagramme est un *système inductif*.

Exemples. ***(I-diagrammes)***

1. Si I est la catégorie des chemins du carquois carré

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & 2 \arrow[d, "c"] \\ 3 \arrow[r, "d"'] & 4 \end{tikzcd}$$

modulo la congruence engendrée par $ab \sim cd$, alors un I-diagramme dans $\mathcal{C}$ est exactement un carré commutatif dans $\mathcal{C}$.

2. Comme déjà mentionné, si I est la catégorie de chemins du carquois $1 \longrightarrow 2$, alors un diagramme sur I à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un couple d'éléments de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme entre eux.

Définition. ***(Foncteur diagonal)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Le *foncteur diagonal* $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des I-diagrammes sur $\mathcal{C}$ envoie un objet $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ sur le foncteur constant $\Delta\mathfrak{c}$ de valeur $\mathfrak{c}$, défini sur n'improte quel morphisme de $\mathcal{C}$ par $id_{\mathfrak{c}}$.

Définition. ***(Cône, cocône)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$. Un *cône* de *sommet* $\mathfrak{c}$ *au-dessus* d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ est un morphisme $\lambda : \Delta\mathfrak{c} \to F$ dans $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$, autrement dit une transformation naturelle du foncteur constant au sommet vers le diagramme.
Un cône ou *cocône* de sommet ou *cosommet* $\mathfrak{c}$ *sous* un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ est un morphisme $\mu : F \to \Delta\mathfrak{c}$ dans $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$, autrement dit une transformation naturelle du

diagramme vers le foncteur constant au sommet.

Remarques.

1. Pour définir un cône, pour un morphisme quelconque $i \xrightarrow{f} j$ de I, il nous faut ainsi un carré commutatif
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{c} \arrow[r, "id_{\mathfrak{c}}"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & \mathfrak{c} \arrow[d, "\lambda_j"] \\ F_i := F(i) \arrow[r, "Ff"'] & F_j := F(j), \end{tikzcd}$$
qui se récrit plus simplement
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{c} \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ F_i \arrow[rr, "Ff"'] & & F_j. \end{tikzcd}$$

2. Par exemple, si $I = (\mathbb{N}, \leqslant)^{\mathrm{op}}$, alors un cône sur $F : I \to \mathcal{C}$ est un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} & \cdots & & & \mathfrak{c} \arrow[dlll, "\lambda_3"'] \arrow[dll, "\lambda_2"] \arrow[dl, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_0"] \\ \cdots & F_3 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0, \end{tikzcd}$$
qui ressemble effectivement à un cône.

3. Pour définir un cocône, pour un morphisme quelconque $i \xrightarrow{f} j$ de I, il nous faut ainsi un triangle commutatif
$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{c} & \\ F_i \arrow[ur, "\mu_i"] \arrow[rr, "Ff"'] & & F_j. \arrow[ul, "\mu_j"'] \end{tikzcd}$$

4. Dans le cas où $I = (\mathbb{N}, \leqslant)^{\mathrm{op}}$, un cocône sur $F : I \to \mathcal{C}$ est un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} & \cdots & & & \mathfrak{c} \\ \cdots & F_3 \arrow[r] \arrow[urrr, "\mu_3"] & F_2 \arrow[r] \arrow[urr, "\mu_2"'] & F_1 \arrow[r] \arrow[ur, "\mu_1"'] & F_0, \arrow[u, "\mu_0"'] \end{tikzcd}$$
qui ressemble effectivement à un cône.

Définition. ***(Limite)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. La *limite*, ou *limite inverse*, ou *limite projective* (terminologie déconseillée) d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ existe si le foncteur $\mathrm{Nat}(\Delta ?, F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta ?, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable et alors la limite $\lim\limits_{I} F$ est un représentant, de sorte que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \lim_I F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta\mathfrak{c}, F)$ fonctoriellement en $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$.

Dans le cas I dénombrable, cette condition ressemble à :

$$\begin{tikzcd}
 & \lim\limits_{I} F \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[ddrr] \arrow[ddrrr] & & & & \\
 & & \cdots & & \mathfrak{c} \arrow[ullll, dashed, bend right] \arrow[dll, "\lambda_3"'] \arrow[dl, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\
\cdots & F_3 \arrow[r] & F_2 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0. &
\end{tikzcd}$$

Soient D une (finie, petite) catégorie et $F : D^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un foncteur, dit *diagramme*. La *limite* ou *limite inverse* ou *limite projective* du diagramme F est un objet L de $\mathcal{C}$ muni d'une famille de morphismes $(\varphi_X)_{X \in D}$ chacun de L dans $F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $F(f)\varphi_X = \varphi_Y$, *i.e.* (L,φ) est un *cône*, de sorte que pour tous objet N et morphismes $(\psi_X)_{X\in D}$ chacun de N dans $F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $F(f)\psi_X = \psi_Y$, il existe un unique $u : N \to L$ où $\varphi_X u = \psi_X$ en tout $X \in D$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[ddl, bend right, "\psi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_Y"] & \\
 & L \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_X"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Remarque importante. *(Les limites sont objets finaux des catégories de cônes)* Un cône $(\Delta \lim_I F) \to F$ exhibe $\lim_I F$ comme limite si et seulement s'il est final dans la *catégorie des cônes* $\Delta\mathfrak{c} \xrightarrow{\lambda} F$ notée $Cone(F)$ et dont les morphismes sont les morphismes $f : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}'$ tel que $\lambda' \cdot Ff = \lambda$.

Exemples. ***(Limites)***

1. *(Les limites discrètes sont les produits)* Supposons que I est discrète. Alors un I-diagramme X dans $\mathcal{C}$ est simplement une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, *i.e.* $(X_i)_{i\in \mathrm{Ob}(I)}$ et dans ce cas $\lim_I F \simeq \prod\limits_{i\in I} X_i$ si elle existe.
2. *(Les égaliseurs sont des limites)* Supposons que I est la catégorie des chemins de $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$. Alors un I-diagramme X est la donnée de $X_1 \underset{X_\beta}{\overset{X_\alpha}{\rightrightarrows}} X_2$ dans $\mathcal{C}$ et

$\lim_I X \simeq \mathrm{eq}(X_\alpha, X_\beta)$ avec explicitement

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{c} \arrow[d] \arrow[dr] & \\ X_1 \arrow[r, shift left, "X_\alpha"] \arrow[r, shift right, "X_\beta"'] & X_2. \end{tikzcd}$$

3. *(Produit fibré)* Supposons que I est la catégorie des chemins de $\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \arrow[r, "\alpha"'] & 3 \end{tikzcd}$. Alors la limite d'un I-diagramme $\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[d, "X_\beta = g"] \\ X_1 \arrow[r, "X_\alpha = f"'] & A \end{tikzcd}$ s'appelle le *produit fibré* ou *carré cartésien* ou *pullback*, « tiré en arrière » de X_1 et X_2 *sur/au-dessus de* A, dépendant des morphismes f,g (plus gracieusement, c'est la limite d'un diagramme de la forme $\bullet \longrightarrow \bullet' \longleftarrow \bullet''$ alors appelé *empan*), et vérifie la propriété universelle : c'est l'objet $X_1 \times_A X_2 = X_1 \star_A X_2$ muni de deux morphismes *projections* $\pi_1 : X_1 \times_A X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times_A X_2 \to X_2$, s'il existe, tel que $f\pi_1 = g\pi_2$, de sorte que pour tout objet Y et morphismes $p_1 : Y \to X_1$ et $p_2 : Y \to X_2$ tels que $fp_1 = gp_2$, il existe une unique $y : Y \to X_1 \times_A X_2$ tel que $\pi_1 y = p_1$ et $\pi_2 y = p_2$.

$$\begin{tikzcd} Y = \mathfrak{c} \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\ & X_1 \times_A X_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ & X_1 \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Un produit fibré est donc la composition d'un produit et d'un égaliseur.

Parfois, on signifie qu'on a affaire à un produit fibré grâce à un petit symbole de coin :

$$\begin{tikzcd} X_1 \times_A X_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

orienté vers ledit produit, symbolique que nous n'utiliserons que dans les situations peu claires. Lorsque l'application g respectivement f est un épimorphisme canonique, on note $X_1 \times_A X_2 := X_1 \times_g X_2$ respectivement $X_1 \times_A X_2 = X_1 \times_f X_2$.

Méthode. ***(Produits et produits fibrés, coproduits et sommes amalgamées)***

Dans une catégorie ayant un objet nul, les produits sont des cas particuliers de produits fibrés et les coproduits sont des cas particuliers de sommes amalgamées. En effet, pour tous objets A,B, $A \times_0 B = A \times B$ et $A \sqcup_0 B = A \sqcup B$.

Des morphismes vers l'objet nul sont nuls, donc absorbants, donc n'induisent pas de contrainte de commutation supplémentaire. Ceci explique pourquoi il est plus efficace de montrer dans de tels contextes des propriétés calculatoires directement avec les produits fibrés, respectivement les sommes amalgamées, même si elles peuvent sembler plus anecdotiques en pratiques.

Les colimites sont en fait plus courantes que les limites.

Définition. ***(Colimite)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. La *colimite*, ou *limite directe*, ou *limite inductive* d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ existe si le foncteur $\mathrm{Nat}(F,\Delta ?) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(F, \Delta ?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est coreprésentable et alors la colimite $\operatorname*{colim}_I F$ est un représentant, de sorte que l'on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}_I F,\mathfrak{c}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(F,\Delta\mathfrak{c})$ fonctoriellement en $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$.

Dans le cas I dénombrable, cette condition ressemble à :

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname*{colim}_I F \arrow[rr, dashed] & & \mathfrak{c} & \\
\cdots & F_3 \arrow[r] \arrow[u] \arrow[urr, "\mu_3"] & F_2 \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[ur, "\mu_2"] & F_1 \arrow[r] \arrow[ull] \arrow[u, "\mu_1"] & F_0. \arrow[ulll] \arrow[ul, "\mu_0"']
\end{tikzcd}$$

Soient D une (finie, petite) catégorie et $F : D^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ un foncteur, dit *diagramme*. La *co(-)limite* ou *limite directe* ou *limite inductive* du diagramme F est un objet L de $\mathcal{C}$ muni d'une famille de morphismes $(\varphi_X)_{X\in D}$ chacun de $F(X)$ dans L tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $\varphi_X F(f) = \varphi_Y$, *i.e.* (L,φ) est un *co-cône*, de sorte que pour tous objet N et morphismes $(\psi_X)_{X\in D}$ chacun de $F(X)$ dans N tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $\psi_X F(f) = \psi_Y$, il existe un unique $u : L \to N$ où $u\varphi_X = \psi_X$ en tout $X \in D$.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\psi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\varphi_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "\psi_Y"] \\
& L \arrow[d, dashed, "u"'] & \\
& N &
\end{tikzcd}$$

Remarque importante. *(Les colimites sont objets initiaux des catégories de cocônes)* Un cône $F \to (\Delta \mathrm{colim}_I F)$ exhibe $\mathrm{colim}_I F$ comme colimite si et seulement s'il est initial dans la catégorie des (co)cônes $F \xrightarrow{\mu} \Delta \mathfrak{c}$ notée $Cocone(F)$ ou encore $Cone(F)$ et dont les morphismes sont les morphismes $f : \mathfrak{c}' \to \mathfrak{c}$ tel que $\lambda = Ff \cdot \lambda'$.

Exemples. ***(Colimites)***

1. *(Les colimites discrètes sont les coproduits)* Supposons que I est discrète. Alors un I-diagramme X dans $\mathcal{C}$ est simplement une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, *i.e.* $(X_i)_{i \in \mathrm{Ob}(I)}$ et dans ce cas $\mathrm{colim}_I F \simeq \coprod_{i \in I} X_i$ si elle existe.
2. *(Les coégaliseurs sont des colimites)* En analogie avec l'exemple ci-dessus, on obtient les co-égalisateurs comme des colimites de diagramme sur une catégorie de chemins $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2 \;\simeq\; 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$.
3. *(Somme amalgamée)* Supposons que I est la catégorie des chemins de $\begin{tikzcd} 3 & 2 \arrow[l, "\beta"] \\ 1 \arrow[u, "\alpha"] & \end{tikzcd}$.

   Alors la limite d'un I-diagramme $\begin{tikzcd} A & X_2 \arrow[l, "X_\beta = g"'] \\ X_1 \arrow[u, "X_\alpha = f"] & \end{tikzcd}$ s'appelle la *somme amalgamée* ou le *(co)-produit amalgamé* ou *coproduit fibré* ou *carré cocartésien* ou *pushout*, « poussé en avant » de X_1 et X_2 *le long de* A, dépendant des morphismes f,g (plus gracieusement, c'est la colimite cette fois d'un diagramme de la forme $\bullet \longrightarrow \bullet' \longleftarrow \bullet''$ dit *empan*), et vérifie la propriété universelle : c'est l'objet $X_1 \sqcup_A X_2 = X_1 \coprod_A X_2$ muni de deux morphismes *plongements* $i_1 : X_1 \to X_1 \sqcup_A X_2$ et $i_2 : X_2 \to X_1 \sqcup_A X_2$ tels que $i_1 f = i_2 g$, de sorte que pour tout objet Y et morphismes $j_1 : X_1 \to Y$ et $j_2 : X_2 \to Y$ tels que $j_1 f = j_2 g$, il existe une unique $y : X_1 \sqcup_A X_2 \to Y$ tel que $y i_1 = j_1$ et $y i_2 = j_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\ X_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & X_1 \sqcup_A X_2 \arrow[dr, dashed, "y"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

   Une somme amalgamée est donc la composition d'un coproduit et d'un coégaliseur.
   Parfois, on signifie qu'on a affaire à une somme amalgamée grâce à un petit symbole

de coin :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "i_2"] \\ X_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & X_1 \sqcup_A X_2 \end{tikzcd}$$

orienté vers ledit coproduit, symbolique que nous n'utiliserons que dans les situations peu claires. Lorsque l'application g respectivement f est un épimorphisme canonique, on note $X_1 \sqcup_A X_2 := X_1 \sqcup_g X_2$ respectivement $X_1 \sqcup_A X_2 = X_1 \sqcup_f X_2$.

4. La somme amalgamée dans la catégorie des groupes est le produit amalgamée. La comparaison avec Ens nous montre qu'une même colimite peut varier sensiblement d'une catégorie même concrète à une autre. Le théorème de Van Kampen a pour corollaire que le groupe fondamental transforme les sommes connexes de Top_* en sommes amalgamées de Grp.

5. Tout ensemble $X \in$ Ens est la colimite de ses parties finies $X' \subseteq X$.

Où ici I est l'ensemble partiellement ordonné des parties finies $X' \subseteq X$ et $F : I \to$ Ens envoie $X' \in I$ sur $X' \in$ Ens.

Observons que dans ce cas la colimite s'identifie à la réunion.

Tout espace vectoriel V est la colimite de ses sous-espaces vectoriels $V' \subseteq V$ de dimension finie. Par contre, en général, il n'est pas la limite de ses quotients $V' \twoheadrightarrow V''$ de dimension finie (en exercice) !

Même philosophie encore dans : toute extension algébrique est la réunion de ses sous-extensions finies.

6. Soient p un nombre premier, $F : \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to$ Ann, le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et une inégalité $n' \geqslant n$ sur le morphisme quotient de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Alors $\lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}} F = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$ l'*anneau des entiers p-adiques*. Soient maintenant p un nombre premier, $F : \mathbb{N} \to$ Ab le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et une inégalité $n \leqslant n'$ sur l'injection $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \overline{k} \mapsto \overline{p^{n'-n}k}$. Alors $\mathrm{colim}_{\mathbb{N}} F = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ est le *groupe de p-Prüfer* qui est le groupe de p-torsion de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

7. *(La localisation est une colimite filtrante)* Soit R un anneau et S une partie multiplicative de R. Soit I la catégorie dont les éléments sont les points de S et les morphismes $s_1 \to s_2$ sont les $\{s \in S \mid s_1 s = s_2\}$. Soit F le foncteur de I dans Mod R qui envoie s sur R et $s_1 \to s_2$ sur la multiplication par s de R dans R. Alors $S^{-1}R = \mathrm{colim} F(s)$.

Remarque. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}}(\Delta?, F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ Ens est représentable pour tout $F \in \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$, *i.e.* $\lim_I F$ existe pour tout F si et seulement si le foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ admet un adjoint à droite. Dans ce cas, l'adjoint envoie F sur $\lim_I F$, qui est donc fonctoriel en F.

De même, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}}(F, \Delta?) : \mathcal{C} \to$ Ens est coreprésentable pour tout $F \in \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$, *i.e.* $\mathrm{colim}_I F$ existe pour tout F si et seulement si le foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche. Dans ce cas, l'adjoint envoie F sur $\mathrm{colim}_I F$, qui est donc fonctoriel en F.

Exercice 32 *(Les limites/colimites ensemblistes sont sous-objet/quotient d'un produit/coproduit)*

Soit $F : I \to \mathrm{Ens}$ est un diagramme dans Ens. Montrer que

$$\lim_I F \simeq \{(x_i) \in \prod_{i\in I} F_i \mid \forall f : i \to j \text{ dans } I \quad (Ff)(x_i) = x_j\} \subseteq \prod_{i\in I} F_i.$$

Montrer de même que

$$\operatorname{colim}_I F = \coprod_{i\in I} F_i / \sim\ ,$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(Ff)(x_i) \sim x_j$ pour tout morphisme $f : i \to j$ de I.

Principe. ***(Dualité limite-colimite)***

Limites et colimites sont respectivement duales.

Lemme

Si $F : I \to \mathcal{C}$ est un diagramme, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta\mathfrak{c},F) \simeq \lim_I{}^{\mathrm{Ens}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F?)$$

(limite dans la catégorie des ensembles) et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(F,\Delta\mathfrak{c}) \simeq \lim_I{}^{\mathrm{Ens}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F?,\mathfrak{c})$$

(encore la limite (et non la colimite) dans la catégorie des ensembles).

Corollaire

1. Un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ admet une limite si et seulement si le foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, \mathfrak{c} \mapsto \lim\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i)$ est représentable et alors $\lim_I F$ est un représentant.
2. Un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ admet une colimite si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \mathfrak{c} \mapsto \lim\limits_{i\in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_i,\mathfrak{c})$ est coreprésentable et alors $\operatorname{colim}_I F$ est un représentant.

5.3.6.2 Limites et colimites dans les catégories de foncteurs

Exercice 33 *(Curryfication des foncteurs)*

Soit J une petite catégorie (on garde I et $\mathcal{C}$ des définitions de la section précédente). Montrer qu'on a un isomorphisme de catégories canonique $\mathrm{Fun}(I \times J,\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}(I,\mathrm{Fun}(J,\mathcal{C}))$, $F \mapsto (i \mapsto (j \mapsto F(i,j)))$.

Lemme. ***(Calcul des limites composante par composante)***

Soient J une petite catégorie et $F : I \to \mathrm{Pre}(J,\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(J^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$. Alors pour que $\lim_I F$ existe, il suffit que $\lim\limits_{i\in I} F(i,j)$ existe pour tout $j \in J$ et alors $(\lim_I F)(j) = \lim_{i\in I} F(i,j)$. De même : pour que $\mathrm{colim}_I F$ existe, il suffit que $\mathop{\mathrm{colim}}\limits_{i\in I} F(i,j)$ existe pour tout $j \in J$ et alors $(\mathrm{colim}_I F)(j) = \mathop{\mathrm{colim}}\limits_{i\in I} F(i,j)$.

▷ À faire, car c'est facile. ■

Mnémonik : les limites et colimites dans les catégories de foncteurs peuvent se calculer composante par composante, on dit aussi « point par point », si tant est que la limite ou colimite dans chaque composante existe.

Exemple. ***(Limites et colimites dans les catégories de préfaisceaux usuelles)***

Soit J un petite catégorie. Toutes les limites et colimites dans $\mathrm{Pre}(J,\mathrm{Ens})$ et $\mathrm{Pre}(J,\mathrm{Ab})$ peuvent se calculer composante par composante.

La condition du lemme est suffisante mais pas nécessaire en général.

Contre-exemple

On prend

Dans ce cas, $\lim_I F$ existe mais $\lim_I (Fi)(j)$ n'existe pas pour au moins un $j \in J$. □

5.3.6.3 Préservation des limites et colimites

Définition. ***(Préservation d'une limite, d'une colimite)***

Soient I une petite catégorie, $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $D : I \to \mathcal{C}$ un foncteur tel que $\lim_I D$ existe et soient $p_i : \lim_I D \to D_i$ pour $i \in I$ les morphismes canoniques qui exhibent $\lim_i D$ comme limite. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, $\mathcal{D}$ une catégorie. Notons que l'on a les morphismes

$$\begin{tikzcd}
F\lim_I D \arrow[r, "Fp_i"] \arrow[dr, dashed] & FD_i \\
& \lim\limits_{i\in I}(FD)(i) \arrow[u, "\lambda_i"']
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "D"] \arrow[dr, "FD"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

On dit que F *préserve* $\lim_I D$ si les $(Fp_i)_{i\in I}$ exhibent $F\lim_I D$ comme limite de FD, *i.e.* s'ils induisent un isomorphisme $F\lim_I D \simeq \lim_I FD$.
La même définition tient pour les colimites avec cette fois $\mathrm{colim}_I FD \simeq F(\mathrm{colim}_I D)$.
On dit qu'un foncteur est *continu* s'il préserve toutes les limites. De même, il est dit *cocontinu* s'il préserve toutes les colimites.

Exemples. ***(Foncteurs préservant les limites)***

1. *(Les foncteurs représentables préservent les limites)* Pour $X \in \mathcal{C}$, on considère le foncteur $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. L'une des reformulations de la propriété universelle de $\lim_I$ nous dit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?)$ préserve toutes les limites. De même, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ préserve toutes les colimites. **Attention ! Dissymétrie : les limites dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont des colimites dans $\mathcal{C}$, *i.e.* $\mathrm{Hom}(?,X)$ transforme les colimites dans $\mathcal{C}$ en des limites dans Ens.**
2. Le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(?,X)$ préserve toutes les limites qui veulent bien exister.

Théorème. ***(Adjonction et limites)***

Les adjoints à droite préservent les limites et les adjoints à gauche préservent les colimites. En particulier, un adjoint à gauche commute aux sommes, aux conoyaux, aux sommes amalgamées et aux limites inductives, et un adjoint à droite commute aux produits, aux noyaux, aux produits fibrés et aux limites projectives.

▷ Soit $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ un couple de foncteurs adjoints. Soit $F : I \to \mathcal{C}$ un diagramme. On a des bijections, pour $D \in \mathcal{D}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,R\lim_I F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\mathcal{D},\lim_I F) = \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\mathcal{D},F(?)) = \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,RF(i))$ ce qui signifie que $R\lim_I F$ est bien un représentant. ■

Exemples. ***(Foncteurs adjoints préservant les limites)***

1. Si A,B sont deux anneaux et X un A-B-bimodule, alors $?\otimes_A X : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ B$ préserve les colimites, en particulier les conoyaux et les coproduits qui sont les sommes directes et $\mathrm{Hom}_B(X,?) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A$ préserve les limites, en particulier les noyaux et les produits.
2. *(Méthode générale de construction des structures dans une catégorie concrète)* Le foncteur d'oubli $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Ens}$ admet la topologie grossière pour adjoint à droite, car toute application à valeurs dans un gro. De même, il admet la topologie discrète

pour adjoint à gauche. Ainsi, U préserve les limites et les colimites. En particulier, le produit, la somme, le produit fibré, la somme amalgamée... dans Top sont construites sur les constructions ensemblistes sur lesquelles il n'y a plus qu'à définir une topologie vérifiant la propriété universelle sollicitée.

Définition. ***(Foncteur limite, foncteur colimite)***

Si $\mathcal{C}$ est cocomplète, respectivement complète pour toute catégorie I, la colimite définissent respectivement des foncteurs

$$\underset{I}{\operatorname{colim}}, \underset{I}{\lim} : \operatorname{Fun}(I,\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$$

définis par $F \mapsto \underset{i\in I}{\operatorname{colim}} F(i)$ respectivement $\underset{i\in I}{\lim} F(i)$. La propriété universelle des colimites définit le foncteur sur les transformations naturelles qui sont les flèches de $\operatorname{Fun}(I,\mathcal{C})$.

Lemme. ***(Adjonctions colimite-constance, limite-constance)***

Soient $I,\mathcal{C}$ deux catégories.
S'il existe, le foncteur colim_I, respectivement $\lim_I$, est adjointe à gauche, respectivement à droite, du foncteur constant $cst : \mathcal{C} \to \operatorname{Fun}(I,\mathcal{C})$ qui à tout objet $C \in \mathcal{C}$ associe la foncteur constant $cst(C)$ sur les objets de I par $i \mapsto C$ et sur les flèches par $\alpha \mapsto (C \xrightarrow{id} C)$.
De plus, l'unité, respectivement la coünité, de l'adjonction $\operatorname{colim}_I : cst\operatorname{Fun}(I,\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathcal{C} : cst$, respectivement $: \mathcal{C} \rightleftarrows \operatorname{Fun}(I,\mathcal{C}) : \lim_I$, nous donne les morphismes canoniques $F(i) \to \operatorname{colim}_I F$ de la colimite, respectivement $\lim_I F \to F(j)$ de la limite.

Proposition. ***(Commutation des (co)limites, Fubini pour les limites)***

Soit $F : I \times J \to \mathcal{C}$ un diagramme sur un produit de petites catégories. Alors on a des isomorphismes canoniques $\underbrace{\underset{I}{\lim}\,\underset{J}{\lim}\,F}_{\underset{i\in I}{\lim}\,\lim_J F(i,?)} \simeq \underbrace{\underset{J}{\lim}\,\underset{I}{\lim}\,F}_{\underset{j\in J}{\lim}\,\lim_I F(?,j)} = \lim_{I\times J} F$, si toutes ces limites existent.
De même, on a des isomorphismes canoniques $\underbrace{\operatorname{colim}_I \operatorname{colim}_J F}_{\operatorname{colim}_{i\in I}\operatorname{colim}_J F(i,?)} \simeq \underbrace{\operatorname{colim}_J \operatorname{colim}_I F}_{\underset{j\in J}{\operatorname{colim}}\operatorname{colim}_I F(?,j)} = \operatorname{colim}_{I\times J} F$, si toutes ces limites existent.

Par contre, en général, le morphisme canonique $\operatorname{colim}_J \lim_I F \to \lim_I \operatorname{colim}_J F$ n'est pas inversible, *i.e.* les limites ne commutent pas avec les colimites. En revanche, il l'est si I est fini et J est filtrant et $\mathcal{C} = \text{Ens}$, comme on va le voir.

5.3.6.4 Colimites filtrantes et fibrés

Définition. ***(Catégorie filtrante)***

Une petite catégorie I est *filtrante* si

(i) pour tous $i,i' \in I$, il existe $j \in I$ et des morphismes $i \to j$, $i' \to j$,

(ii) pour tous couples de morphismes $f,g : i \to j$ de I, il existe un morphisme $h : j \to k$ tel que $hf = hg$, autrement dit, tel que le diagramme

$$i \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{h} k$$

commute.

Exemples. ***(Catégories filtrantes)***

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est filtrante.
2. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Soit $\mathrm{Ongd}(x) \subseteq \mathrm{Open}(X)$ la catégorie des voisinages ouverts de x dans X (pour *open-neighbourhood*) qui est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Open}(X)$. Alors $\mathrm{Ongd}(x)^{\mathrm{op}}$ est filtrante.

Définition. ***(Colimite filtrante)***

Une colimite $\mathrm{colim}_I F$ est *filtrante* si I est filtrante.

Théorème. ***(Commutation des limites finies avec les colimites filtrantes)***

Si I est une catégorie finie et J une (petite) catégorie filtrante et $F : I \times J \to \mathrm{Ens}$, respectivement $F : I \times J \to \mathrm{Ab}$, est un foncteur, alors le morphisme canonique $\mathrm{colim}_J \lim_I F \to \lim_I \mathrm{colim}_J F$ est inversible et c'est donc un isomorphisme $\mathrm{colim}_J \lim_I F \simeq \lim_I \mathrm{colim}_J F$. Ainsi, dans Ens et dans Ab, les *limites finies*, *i.e.* les limites sur des catégories finies, commutent avec les colimites filtrantes.

▷ On peut lire MacLane, IX, 2. ■

Corollaire. ***(Commutation des limites et colimites chez les préfasiceaux)***

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie quelconque. Dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ ou $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ab})$, les limites finies commutent avec les colimites filtrantes au même sens que précédemment.

▷ En effet, dans ces catégories, les limites et colimites peuvent également se calculer componsante par composante. ■

On trouvera des illustrations encore plus concrètes, notamment grâce à la notion de *fibre*, dans la section sur les Faisceaux.

5.3.6.5 Catégories complètes et cocomplètes

Définition. ***(Catégorie complète, cocomplète)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ est *complète* si elle admet toutes les *petites limites* c'est-à-dire limites sur des petites catégories.
Elle est *cocomplète* si elle admet toutes les *petites colimites.*
Une catégorie est parfois dite *bicomplète* si elle est complète et cocomplète.

Exemples

1. Les catégories Ens, Ab et Mod R pour tout anneau R sont complètes et cocomplètes. Remarquons par exemple dès à présent que dans Mod R les limites et les colimites discrètes coïncident.
2. La catégorie des espaces topologiques est complète et cocomplète.
3. Soit k un corps. La catégorie k-Vect de tous les espaces vectoriels est complète et cocomplète. Par contre, mod $k \subseteq$ Mod k la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie n'est ni complète ni cocomplète.

   Par exemple, si I est une ensemble infini, alors la famille constante $I \to f\text{Mod } k, i \mapsto k$ n'admet pas de colimite ni de limite : dans Mod k, on a $\coprod_I k = \bigoplus_I k$, $\prod_I{}^{\text{Mod } k} k = \prod_{i \in I} k$ le produit habituel et ces espaces sont de dimension infinie sur k
4. La catégorie de tous les groupes est complète et cocomplète.
5. La catégorie des anneaux unitaires est comlète et cocomplète. En général, les catégories concrètes usuelles sont complètes et cocomplètes, mais ce n'est pas automatique.
6. En général, les catégories concrètes de certains ensembles supposés finis sont finiment bicomplètes mais ni complètes, ni cocomplètes.
7. La catégorie des corps n'est ni complète, ni cocomplète, ni même *finiment complète*, ni *finiment cocomplète.*

   Le produit ou la somme directe de deux corps n'est pas un corps.
8. Si $\mathcal{C}$ est complète, respectivement cocomplète, alors pour toute petite catégorie I, la catégorie Fun$(I,\mathcal{C})$ est encore complète, respectivement cocomplète, car limites et colimites peuvent se calculer composante par composante.
9. Cat est bicomplète.

Proposition

Si $\mathcal{C}$ est localement petite et J est petite et si $\mathcal{C}$ admet des J-limites, pour tout $X \in \mathcal{C}$, pour tout $F : J \to \mathcal{C}$, il y a un isomorphisme fonctoriel en X et en F : $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim F)$.

Exercice 34

Montrer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie complète et $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont le foncteur inclusion admet un adjoint à droite, alors $\mathcal{D}$ est encore complète. Et donc dualement : une sous-catégorie pleine dont le foncteur inclusion admet un adjoint à gauche est encore cocomplète.

▹ **Éléments de réponse.**

En effet, les adjoints à droite préservent les limites, ce qui permet de redescendre à la sous-catégorie via l'unité de l'adjonction.

Contre-exemple. *(Catégorie complète mais pas cocomplète)*

La catégorie des treillis complets dont les morphismes sont les applications préservant les bornes est complète, mais pas cocomplète.
La catégorie duale donne un exemple de catégorie cocomplète mais pas complète. □

Vérifier qu'une catégorie admet toutes les petites limites peut sembler vertigineux ; en fait, il suffit d'en vérifier deux types particuliers.

Théorème

Une catégorie localement petite est complète si et seulement si elle admet tous les petits produits et les égalisateurs.

▷ Le sens direct est immédiat. Réciproquement, commençons par exprimer toute limite $\lim_I F$ dans Ens en termes de produits et d'égalisateurs. On a $\lim_I F = \{(x_i) \subseteq \prod_{i\in I} F_i \mid \forall j \xrightarrow{f} k \text{ dans } I \quad (Ff)(x_j) = x_k\}$. Cela montre que $\lim_I F \simeq \mathrm{eq}(\varphi,\psi : \prod_{i\in I} F_i \to \prod_{f:j\to k} F_k)$ où φ et ψ on pour composantes $\varphi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_j} F_j \xrightarrow{Ff} F_k$ et $\psi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_k} F_k$. Soit maintenant $F : I \to \mathcal{C}$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. On veut représenter le foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, \mathfrak{c} \mapsto \lim_{I\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \lim_I F)$. Pour $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$, on a $\lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) = \mathrm{eq}(\varphi,\psi : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) \to \prod_{f:j\to k} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_k)) \simeq \mathrm{eq}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \prod_{i\in I} F_i \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} Fk)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \mathrm{eq}^{\mathcal{C}}(\Phi,\Psi : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \to \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} F))$ par propriété universelle de l'égalisateur, où Φ et Ψ ont les composantes $\Phi_f : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \xrightarrow{\pi_j} F_j \xrightarrow{Ff} F_k$ et $\Psi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_k} F_k$, donc $\lim_I F$ existe dans $\mathcal{C}$ et est représenté par $\mathrm{eq}^{\mathcal{C}}(\Phi,\Psi : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \to \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} F)$. ■

5.3.6.6 Limites et colimites dans les catégories de préfaisceaux

On énonce un corollaire d'un des exemples donnés précédemment :

Corollaire. ***(Bicomplétude des catégories de préfaisceaux)***

Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ est complète et cocomplète.

▷ Ce n'est autre que $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})$. ■

Remarque. Le plongement de Yoneda permet donc de voir une catégorie localement petite dans une catégorie complète et cocomplète.

Proposition. ***(Propriété universelle de la catégorie des préfaisceaux)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vers une catégorie cocomplète, il existe un foncteur G cocontinu, unique à unique isomorphisme près qui factorise F par le foncteur de Yoneda Y :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) \arrow[d, dashed, "\exists! G"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

Autrement dit, la catégorie des préfaisceaux est une *complétion cocomplète* de la catégorie initiale.

L'omniprésence des préfaisceaux représentables dans la catégorie des préfaisceaux est encore plus forte que cela. Le résultat suivant montre qu'ils forment une sous-catégorie dense, c'est-à-dire que tout préfaisceau peut s'écrire canoniquement comme une colimite de préfaisceaux représentables. Tout l'enjeu est alors de trouver la catégorie qui indice cette colimite.

Définition. ***(Catégorie des éléments d'un préfaisceau)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie des éléments d'un préfaisceau F sur $\mathcal{C}$* admet pour objet les paires (c,x) où $c \in \mathcal{C}$ et $x \in F(c)$ et pour morphismes $(c,x) \to (d,y)$ les morphismes $f : c \to d$ de $\mathcal{C}$ tels que $F(f^{\mathrm{op}})(y) = x$. On la note $E(F)$.

Fait. ***(Oubli de la catégorie des éléments)***

La catégories des éléments d'un préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ est canoniquement muni d'un foncteur oubli $\Pi : E(F) \to \mathcal{C}$, $(c,x) \mapsto c$.

Théorème. ***(Théorème de densité)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Tout préfaisceau F sur $\mathcal{C}$ est la limite de la composée du foncteur oubli avec le plongement de Yoneda sur la catégorie de ses éléments :

$$F \cong \operatorname*{colim}_{E(F)} Y \circ \Pi.$$

▷ Soit F un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans Ens. Comme le foncteur colimite est adjoint à gauche du foncteur constant Δ qui à tout préfaisceau Z associe le foncteur $\Delta_Z : e \in E(X) \to Z \in$ Fun($\mathcal{C}$,Ens), on doit avoir une bijection naturelle

$$\mathrm{Nat}(X,Z) \simeq \mathrm{Nat}(Y \circ \Pi, \Delta_Z).$$

Une transformation naturelle $\alpha : X \to Z$ est équivalente à la donnée d'un élément $z_{(c,x)} \in F(c)$ pour tout $c \in \mathcal{C}$ et tout $x \in F(c)$ vérifiant $F(f^{\mathrm{op}})(z_{(d,y)}) = z_{(c,x)}$ pour tout morphisme $f : c \to d$ de $\mathcal{C}$ et tout $y \in F(d)$ tel que $F(f^{\mathrm{op}})(y) = x$. On est donc amené à considérer cette catégorie d'indices issue du préfaisceau F qui n'est autre que la catégorie des éléments de F.

Le lemme de Yoneda fournit une transformation naturelle $\psi_{(c,x)} : Y_C \to Y$ associée à tout élément $z_{(c,x)}$. La condition de compatibilité vérifiée par les $z_{(c,x)}$ est équivalente au fait que les $\psi_{(c,x)}$ forment une transformation naturelle $\psi : Y \circ \Pi \to \Delta_Z$. L'application $\alpha \mapsto \psi$ est bijective, par le lemme de Yoneda, et elle est naturelle en $Z \in$ Fun($\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$,Ens), ce qui conlut la démonstration. ■

Exercice 35

Dans le cas du préfaisceau foncteur des points, expliciter cette expression ; que dit-elle ?

Ce qu'il faut retenir

- → Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Un objet défini par une propriété universelle, s'il existe, est unique à isomorphisme près et à unique isomorphisme près. En effet, il est défini par un foncteur représentable.
- → Cependant, il n'existe pas forcément dans $\mathcal{C}$, mais souvent toujours dans Ens, autrement l'objet n'a aucune chance d'exister dans les catégories concrètes. On se passe de préciser à chaque fois que l'objet est tel que « s'il existe ».
- → Les flèches *à construire* des diagrammes, *i.e.* écrites en pointillés, sont des isomorphismes si et seulement si le « deuxième objet » est également une limite du même diagramme. Remarquer en pratique que le sens de la flèche entre l'objet construit et l'objet tiers s'écrit toujours dans un seul sens qui puisse imposer au moins une nouvelle condition de commutation.
- → Toute limite est objet final d'une certaine catégorie, toute colimite est objet initial d'une certaine catégorie, ce qui permet de démontrer d'un seul coup toutes les propriétés précédentes.

5.3.7 Fins et cofins

5.3.8 Extensions de Kan

Mnémonik : tous les concepts sont des extensions de Kan.

5.3.9 Topos

5.4 Catégories additives

5.4.1 Objets nuls

Définition. ***(Objet nul)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *nul* s'il est à la fois final et initial.

Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *nul* si pour tout objet A, il existe une unique flèche $f : X_0 \to A$ et une unique flèche $g : A \to X_0$.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_{X_0}"'] & A \arrow[r, "g"] & X_0 \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on a forcément $gf = id_{X_0}$.

Exemples. ***(Objets nuls)***

1. La catégorie Ens n'a pas d'objet nul.
2. Par contre, la catégorie $\text{Ens}_\star$ des ensembles pointés (X,x_0) dont les morphismes sont également pointés, a un objet nul : $(\{\star\},\star)$.
3. De même, Top n'a pas d'objet nul, mais la catégorie des espaces topologiques pointés $\text{Top}_\star$, si, donné semblablement.
4. Si R est un anneau, Mod R a un objet nul : le module nul $\{0\}$. De même dans Ab pour $R = \mathbb{Z}$ et k-Vect pour $R = k$ un corps.
5. Si I est une petite catégorie, alors le préfaisceau constant de valeurs $\{0\}$ est l'objet nul de $\text{Pre}(I,\text{Ab})$.

Proposition. ***(Unicité àipàui des objets nuls)***

Si X_0 et X_0' sont deux objets nuls d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphiseme.

▷ Un objet nul est en particulier un objet initial. ■

⟶ *Notation.* On note parfois $X_0 = 0$ un objet nul.

5.4.2 k-catégories

Soit k un anneau commutatif, ce qui vaut pour tout le reste de cette section.

Définition. ***(k-catégorie)***

Une *k-catégorie* $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite où chaque ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour $X,Y \in \mathcal{C}$ est muni d'une structure de k-module telles ques les compositions

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), (f,g) \mapsto fg \text{ pour } X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

soient k-bilinéaires, *i.e.* (en notant d'une seule et mêmes manières toutes les lois sur les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$) $\begin{cases} (f_1+f_2)g = f_1g + f_2g, f(g_1+g_2) = fg_1 + fg_2 \\ (xf)g = f(xg) = x(fg) \qquad \forall f_1,f_2,g_1,g_2,f,g \ \forall x \in k. \end{cases}$
En particulier la composition induit un morphisme k-linéaire $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. On dit aussi que $\mathcal{C}$ est *enrichie sur* $(\mathrm{Mod}\ k, \otimes_k)$.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $0_{X,Y}$ le morphisme nul de X dans Y qui est l'élément neutre de $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), +_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)})$. Si $X = Y$, on note plus simplement $0_{X,Y} = 0_X$.

Définition. ***(Catégorie pré-additive)***

Une catégorie *pré-additive* est une catégorie $\mathbb{Z}$-additive au sens de cette définition, c'est-à-dire que l'on prend $k = \mathbb{Z}$,ce qui revient à considérer seulement des lois de groupes et non plus des lois de k-modules sur les ensembles de morphismes.

Remarque. Une k-catégorie est en particulier préadditive, car pour tout anneau k il existe un morphisme $\mathbb{Z} \to k$.

Exemples. ***(k-catégories, catégories préadditives)***

1. *(La catégorie classifiante d'une k-algèbre est une k-catégorie ponctuelle)* Soit A une k-algèbre, *i.e.* on a $A \in \mathrm{Mod}\ k$ muni d'une application linéaire $\mu : A \otimes_k A \to A$ associative avec unité $\eta : \begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & A \\ 1 & \longmapsto & 1_A \end{array}$. Alors $\mathcal{C} = \{\star\}$ avec $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(x) = A$ est une k-catégorie. Réciproquement, toute k-catégorie a un seul objet définit une algèbre sur l'espace des endomorphismes de son unique objet.
   Heuristiquement, **une k-catégorie en général est « une k-algèbre à plusieurs objets »**.
2. Passons aux applications linéaires. Si A est une k-algèbre encore une fois (mais cette fois-ci ayons en tête le cas où k est un corps), alors $\mathrm{Mod}\ A$ porte une structure naturelle de k-catégorie puisque pour $f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ donne $\lambda f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ pour tout $\lambda \in k$.
   En particulier si a est un anneau, $\mathrm{Mod}\ a$ est une a-catégorie. C'est en particulier

le cas pour Ab qui est une $\mathbb{Z}$-catégorie et K-Vect où K est un corps qui est une K-catégorie.

En particulier encore, Ab est préadditive, mais également Mod a et K-Vect.

3. L'opposée d'une k-catégorie est encore une k-catégorie.
4. Toute sous-catégorie pleine d'une k-catégorie est encore une k-catégorie.
5. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie localement petite, alors $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ acquiert une structure de k-catégorie.

Définition. ***(Foncteur linéaire)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux k-catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un *foncteur k-linéaire* s'il induit des morphismes de k-modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ pour tous objets X,Y de $\mathcal{C}$, *i.e.* si toutes les applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ sont k-linéaires pour $X,Y \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire

$$\forall f,gX \to Y \ \forall x \in k \quad F(xf+g) = xF(f) + F(g).$$

Exemples. ***(Foncteurs linéaires)***

1. L'identité est toujours k-linéaire.
2. Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux k-catégories. Si $\mathcal{D}$ a un objet nul, le *foncteur nul* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ qui à tout objet associe $0_{\mathcal{D}}$ et à toute morphisme f de $\mathcal{C}$ associe $id_{0_{\mathcal{D}}}$, est k-linéaire.
3. Si A et B sont des k-algèbres et X un A-B-bimodule, alors les adjoints réciproques $? \otimes_A X : \mathrm{Mod}\ A \rightleftarrows \mathrm{Mod}\ B : \mathrm{Hom}_B(X,?)$ sont k-linéaires.
4. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie, alors le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}), X \mapsto X^\wedge = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X)$ se factorise par $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, dashed, "k\text{-Yoneda}"] \arrow[dr, "\text{Yoneda}"'] & \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k) \arrow[d, "\text{oubli}_*"] \\ & \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \end{tikzcd} \qquad \text{induit par } \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r] & \mathrm{Mod}\ k \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ & \mathrm{Ens}. \end{tikzcd}$$

On appelle ce « nouveau foncteur » le foncteur de k-Yoneda, appellation abusive puisqu'il dépend de $\mathcal{C}$ et non seulement de k.

Contre-exemple. ***(Foncteur quadratique)***

Soit k un corps ; Le foncteur $\mathrm{Mod}\ k \to \mathrm{Mod}\ k, V \mapsto V \otimes_k V$ n'est pas k-linéaire. □

Rappelons que pour $M_1,M_2 \in \mathrm{Mod}\ R$, le morphisme canonique $M_1 \coprod M_2 \to M_1 \prod M_2$ dans Mod R est inversible, et toutes les deux sont isomorphes à l'objet définitif $M_1 \oplus M_2$. Il en est d'ailleurs de même dans $\mathrm{Fun}(I, \mathrm{Mod}\ R)$ pour toute petite catégorie R, car les limites et colimites s'y calculent composante par composante. Généralisons :

Fait. ***(Morphisme canonique du coproduit dans le produit)***

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, étant donnée une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, on définit un *morphisme canonique* $\varphi : \coprod\limits_{j\in I} X_j \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ caractérisé par $\pi_i\varphi\iota_j = \begin{cases} id_{X_i} \text{ si } i = j \\ 0 = 0_{X_i,X_j} \text{ sinon.}\end{cases}$

La famille $(\delta_i^j)_{i,j\in I}$ où $\delta_i^j = 0_{X_i,X_j}$ si $i \neq j$ et $\delta_i^j = id_{X_i}$ si $i = j$ caractérise bien un morphisme φ. En effet, pour tous $i,j \in I$, on a un morphisme de $\delta_i^j : X_i \to X_j$ qui se prolonge de manière unique (propriété universelle du produit) en $\varphi_i : X_i \to \prod\limits_{j\in I} X_j := Y$, tel que $\pi_j\varphi_i = \delta_i^j$. Ainsi, pour tout $i \in I$, on a un morphisme $\varphi_i : X_i \to Y$ objet de $\mathcal{C}$ qui se factorise donc de manière unique (propriété universelle du coproduit) en $\varphi : \coprod\limits_{i\in I} \to Y$ tel que $\varphi\iota_i = \varphi_i$ pour tout $i \in I$. Alors $\varphi : \prod \to \coprod$ convient, car alors $\pi_j\varphi\iota_i = \pi_j\varphi_i = \delta_i^j$ pour tous i,j. Remarques :

- ⋆ La construction aurait pu se faire en sens inverse dans aucun problème.
- ⋆ Attention, en théorie des catégories abstraite, il est hors de question de parler de somme directe d'éléments, ni d'éléments tout court.
- ⋆ Plus généralement, toute famille de morphismes $(f_{i,j})_{i,j\in I}$ définit un unique morphisme du coproduit dans le produit vérifiant $\pi_f\iota_j = f_{i,j}$ en tous i,j.

Proposition

Soient $\mathcal{C}$ une k-catégorie et $X,Y \in \mathcal{C}$. Alors le produit $X \prod Y$ existe si et seulement si $X \coprod Y$ existe et dans ce cas, le morphisme canonique $X \coprod Y \to X \prod Y$ est inversible, ce qui signifie que produit et coproduit d'une même famille sont isomorphes.
Cette propriété se généralise sans problème à toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$.

▷ Notons $\mathfrak{c} \mapsto \mathfrak{c}^\wedge$ le foncteur k-Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$. Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ petite. On observe, pour la même raison que dans le cas de $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$, qu'il est pleinement fidèle. Supposons que $X \prod Y$ existe. Alors $(X \prod Y)^\wedge \simeq X^\wedge \prod Y^\wedge$ car le foncteur de Yoneda commute avec des produits arbitraires. Or on a remarqué que dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$ les produits finis sont canoniquement isomorphes aux coproduits finis. Donc $X^\wedge \coprod Y^\wedge \xrightarrow{\sim} X^\wedge \prod Y^\wedge$. Donc les morphismes

$$\begin{tikzcd}
X^\wedge \arrow[dr] & & & \\
& X^\wedge \coprod Y^\wedge \arrow[r, "\sim"] & X^\wedge \prod Y^\wedge \arrow[r, "\sim"] & (X \prod Y)^\wedge \\
Y^\wedge \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

exhibent $(X \prod Y)^\wedge$ comme le coproduit de $X^\wedge$ et $Y^\wedge$ dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$. Comme le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle, les morphismes $i_X : X \to X \prod Y$ et $i_Y : Y \to X \coprod Y$ exhibent $X \prod Y$ comme coproduit de X et Y dans $\mathcal{C}$. Donc $X \coprod Y$ existe et $X \coprod Y \xrightarrow{\sim} X \prod Y$. Si on applique cet argument à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui est encore une k-catégorie, on obtient le reste de l'affirmation. Reste à se ramener au cas d'une catégorie petite. C'est laissé en exercice. ■

Exercice 36

Dans la preuve précédente, construire i_X et i_Y explicitement et vérifier directement qu'ils exhibent $X \coprod Y$ comme coproduit de X et Y et conclure la démonstration de la propriété précédente.

Corollaire. ***(Objet nul d'une k-catégorie)***

Une k-catégorie admet un objet nul si et seulement si elle admet un objet initial si et seulement si elle admet un objet final.

▷ On peut prendre une famille vide dans la proposition précédente. ■

Lemme

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\pi_i : X \to X_i$ et $\iota_j : X_j \to X$, les i,j parcourant I. On suppose que $\pi_i\iota_j = \delta_i^j id_{X_i}$. Alors on a équivalence entre :

(i) $(\pi_i)_{i\in I}$ exhibe X comme produit des X_i,

(ii) $(\iota_j)_{j\in I}$ exhibe X comme coproduit des X_j,

(iii) $id_X = \sum_{i\in I} \iota_i\pi_i$.

Astuce !

Pour vérifier (i) ou (ii), on a besoin de connaître toute la catégorie $\mathcal{C}$, tandis que la catégorie (iii) ne dépend que des X, X_i, ι_j, π_i pour $i,j \in I$. En particulier il n'y a qu'un nombre fini de variables qui interviennent.

Définition. ***(Biproduit)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\pi_i : X \to X_i$ et $\iota_j : X_j \to X$, les i,j parcourant I. On suppose que $\pi_i\iota_j = \delta_i^j id_{X_i}$. Si l'une des conditions

(i) $(\pi_i)_{i\in I}$ exhibe X comme produit des X_i

(ii) $(\iota_j)_{j\in I}$ exhibe X comme coproduit des X_j

(iii) $id_X = \sum_{i\in I} \iota_i\pi_i$

est satisfaite, on appelle $(X,(\pi_i),(\iota_j))$ le *biproduit* des X_i, et l'on écrit $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$.

Propriété. ***(Foncteur d'un biproduit)***

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur k-linéaire $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux k-catégories, alors F préserve les biproduits finis.

▷ En effet, les propriétés (i) et (ii) sont préservées par les foncteurs. ■

Remarque importante. Dans une k-catégorie $\mathcal{C}$, un morphisme $f : \bigoplus_{j=1}^{m} X_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$ entre biproduits finis est donc déterminé par la matrice $n \times m$: $(f_{ij})_{i,j}$ où $f_{ij} = \pi_i f \iota_j$. Par abus de notation, on écrit $f = (f_{ij})_{i,j}$.

Exercice 37 *(Composition des matrices dans une k-catégorie)*

Dans une k-catégorie, une composition $h = fg : \bigoplus_{j=1}^{m} X_j \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{k=1}^{p} Z_k$ est donnée par la matrice produit $h_{kj} = \sum_{i=1}^{n} f_{ki} g_{ij}$.

5.4.3 Catégorie k-linéaire ou k-additive

Définition. ***(Catégorie k-linéaire, k-additive)***

Une catégorie *k-linéaire* ou *k-additive* est une k-catégorie qui admet tous les biproduits finis, ou, ce qui est donc équivalent, tous les produits finis, ou encore tous les coproduits finis.

Corollaire

Une catégorie k-linéaire a un objet nul.

Remarque. Bien sûr, par récurrence immédiate, il suffit de considérer les biproduits à deux facteurs. Mais attention alors ! En pratique, l'existence de l'objet nul n'est automatique et il faut donc vérifier deux choses : existence de l'objet nul et du produit de deux objets.

⟶ *Notation.* On note $0_{\mathcal{C}}$ l'objet nul d'une k-catégorie linéaire $\mathcal{C}$.

Attention à ne pas se perdre entre les morphismes nuls entre deux objets, le morphisme nul d'un objet dans lui-même, et les objets nuls qui sont tous isomorphes. On a de plus $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(0_{\mathcal{C}}) = \{id_{0_{\mathcal{C}}} = 0_{0_{\mathcal{C}}}\}$.

Définition. ***(Catégorie additive)***

Une *catégorie additive* est une catégorie $\mathbb{Z}$-additive.

Remarque. Une catégorie k-linéaire est en particulier additive, car pour tout anneau k il existe un morphisme $\mathbb{Z} \to k$.

Définition. ***(Foncteur additif)***

Un foncteur *additif* est un foncteur $\mathbb{Z}$-linéaire entre catégories additives.

Exemples. ***(Catégories linéaires)***

1. Si A est une k-algèbre, alors Mod A est k-linéaire.
   En particulier si a est un anneau, Mod a est a-linéaire. C'est en particulier le cas pour Ab qui est $\mathbb{Z}$-linéaire et K-Vect où K est un corps qui est K-linéaire.
   En particulier encore, Ab est additive, mais également Mod a et K-Vect dès que a, K sont de caractéristique nulle.
2. Si I est une petite catégorie et $\mathcal{A}$ est k-linéaire, alors Fun$(I,\mathcal{A})$ est k-linéaire.
3. Si A est une k-algèbre, la k-catégorie classifiante à un objet $\star$ avec End$(\star) = A$ est une k-catégorie mais n'est pas une catégorie k-linéaire si $A \neq 0$.

Exercice 38

Construire un anneau non nul R tel que la catégorie $\{\star,0\}$ où End$(\star) = R$ soit additive.

Le fait suivant est peu surprenant.

Remarque. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Soient $X,Y \in \mathcal{C}$. Alors la loi de groupe $+ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est déterminée par la catégorie ensembliste sous-jacente à $\mathcal{C}$, car pour $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on a

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}} Y$$

donc $f + g = \begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}$ et les morphismes $\begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}$ s'expriment facilement en termes de la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$. Par conséquent, **être additive est en fait une propriété de la catégorie ensembliste sous-jacente à $\mathcal{C}$ et non une structure supplémentaire sur $\mathcal{C}$**.

Exercice 39 *(Comment reconnaître si une catégorie ensembliste est en fait additive)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admette un objet nul et tous les produits et coproduits finis, de sorte que le morphisme canonique $\varphi : \coprod X_i \to \prod X_i$ (pour $i \neq j$, $\pi_i \varphi \iota_j$ est envoyé sur

0 l'unique morphisme se factorisant par l'objet nul) pour toute famille finie $(X_i)_i$ soit inversible, si enfin la loi $+$ définie comme dans la remarque précédente, qui est alors bien définie, associative et commutative, est une loi de groupe, alors $\mathcal{C}$ munie des lois $+$ sur tous les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est $\mathbb{Z}$-linéaire.

▷ **Éléments de réponse.**

Il n'y a plus qu'une chose à vérifier, la bilinéarité de $+$ par rapport à la composition.

Proposition. ***(Caractérisation des foncteurs additifs)***

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories additives. Alors F est additif si et seulement si $F0_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} 0_{\mathcal{D}}$ et $F(X \oplus Y) = FX \oplus FY$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

▷ Clairement la condition est nécessaire. La suffisance résulte de la description de la loi d'addition sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour $X,Y \in \mathcal{C}$, en termes de la catégorie ensembliste sous-jacent à $\mathcal{C}$. ■

On peut énoncer une propriété encore énoncée partiellement mais qui nous servira assez tôt.

Définition-propriété. ***(Suites courtes scindées dans une additive)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

une suite dans $\mathcal{A}$, notée $(*)$. On a équivalence entre :

(i) il existe un isomorphisme de suites, au sens évident,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_L"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\wr"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id_N"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_L \\ 0 \end{pmatrix}"'] & L \oplus N \arrow[r, "(0 \quad id_N)"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ;$$

(ii) l'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?)$ de la suite $(*)$ est exacte pour tout $X \in \mathcal{C}$;

(iii) l'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X)$ de la suite $(*)$ est exacte pour tout $X \in \mathcal{C}$.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que la suite $(*)$ est *exacte scindée*, ou mieux *scindable*, un *scindage* ou *scission* étant déterminée par le choix d'un isomorphisme de suites.

Attention ! On ne sait pas ce que signifie que $(*)$ est exacte dans une catégorie additive quelconque.

Exercice 40 *(Équivalence de suites exactes courtes sur un exemple)*

Déterminer toutes les classes d'équivalence de suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, où $(\alpha,\beta) \sim (\alpha',\beta')$ s'il existe un automorphisme γ de M tel que $\alpha' = \gamma\alpha$ et $\beta = \beta'\gamma$. Montrer qu'il y en a deux dont l'une est formée de suites scindées et l'autre de suites non scindées.

5.4.4 Noyaux et conoyaux

On introduit dès maintenant une notion générale à toute catégorie k-linéaire, k un anneau commutatif.

Définition. ***(Noyau d'un morphisme au sens des catégories)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Soient $X,Y \in \mathcal{A}$ et $f : X \to Y$. Le *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ ou $\ker(f)$, est $\mathrm{eq}(f,0_{X\to Y})$.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{C}$. Le *noyau* de f est l'objet $\mathrm{Ker}(f) = K$ muni d'un morphisme $k : K \to X_1$ vérifiant $fk = 0_{K\to X_2}$, tel que pour tous objet K' de $\mathcal{C}$ et morphisme $k' : K' \to X_1$ vérifiant $fk' = 0_{K'\to X_2}$, il existe une unique $v : K' \to K$ telle que $kv = k'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "f"] & \\
& K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"'] & X_2 \\
K' \arrow[uur, "k'"] \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Diagramme à regarder en penchant la tête vers la droite.

Définition. ***(Conoyau d'un morphisme au sens des catégories)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Soient $X,Y \in \mathcal{A}$ et $f : X \to Y$. Le *co(-)noyau* de f, noté $\mathrm{Coker}(f)$ ou $\mathrm{coker}(f)$, est $\mathrm{coeq}(f,0_{X\to Y})$.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{C}$. Le *conoyau* ou *quotient par l'image* de f est l'objet $\mathrm{Coker}(f) = Q$ muni d'un morphisme $q : X_2 \to Q$ vérifiant $qf = 0_{X\to Q}$, tel que pour tous objet Q' de $\mathcal{C}$ et morphisme $q' : X_2 \to Q'$ vérifiant $q'f = 0_{X\to Q'}$, il existe une unique $u : Q \to Q'$ telle que $uq = q'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, "q'"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"'] \arrow[drr, "0"'] & Q \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
 & & Q'
\end{tikzcd}$$

Diagramme à regarder en penchant la tête vers la gauche.

Remarque. En particulier, le noyau est un sous-objet du départ X et le conoyau est un objet quotient de l'arrivée Y, ce qui ne devrait surprendre personne.

Exercice 41 *(Conoyau dans* Grp*)*

Montrer que pour $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que le conoyau de f est le quotient de H par le sous-groupe normal engendré par l'image de f.

Propriétés

1. Tout noyau est un monomorphisme.
2. Tout conoyau est un épimorphisme.

▷ Ce sont des égaliseurs et coégaliseurs. ■

La relation :

$$fe = ge \iff (f - g)e = 0$$

qui vaut dans toute k-catégorie ou catégorie préadditive permet d'écrire :

Fait. ***(Les (co)égaliseurs sont des (co)noyaux)***

Soit $\mathcal{A}$ une k-catégorie. Tout égalisateur est un noyau d'un certain morphisme, plus précisément, si f,g sont deux morphismes parallèles de $\mathcal{A}$, $\mathrm{eq}(f,g) = \mathrm{Ker}(f - g)$. En particulier les égalisateurs de $\mathcal{A}$ sont exactement les noyaux de $\mathcal{A}$.
De même, tout coégalisateur est un conoyau d'un certain morphisme, plus précisément, si f,g sont deux morphismes parallèles de $\mathcal{A}$, $\mathrm{coeq}(f,g) = \mathrm{Coker}(f - g)$. En particulier les coégalisateurs de $\mathcal{A}$ sont exactement les conoyaux de $\mathcal{A}$.
Cela a été détaillé dans les premiers exemples sur les égalisateurs et coégalisateurs.

Propriété. ***(Monomorphismes et noyaux)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = 0$.

▷ Supposons que f est un monomorphisme. On a $f0_{0\to X} = 0_{0\to Y}$ et si $u : U \to X$ est tel que $fu = 0_{U\to Y}$, alors $u = 0$ par monomorphie, et il existe un unique morphisme $y : U \to 0$, là seulement par propriété de l'objet nul, tel que donc bien $0_{0\to X}y = u = 0$. Ainsi, $0_{0\to X}$ est un noyau de f.

Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(f) = 0$, supposons $fg = fh$, soit $f(g - h) = 0$. En particulier $g - h$ se factorise par $\mathrm{Ker}(f)$, autrement dit par $0_{\mathcal{C}}$, *i.e.* $g - h = 0$, d'où $g = h$. ■

Propriété. ***(Épimorphismes et conoyaux)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f est un épimorphisme si et seulement si $\mathrm{Coker}(f) = 0$.

▷ On dualise la propriété précédente. ■

Corollaire

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. **Si** f est un isomorphisme **alors** $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ sont nuls.

▷ Direct. ■

Exercice 42

Montrer que la réciproque est fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Il suffit de considérer...

Propriétés. ***(Morphisme nul par noyau ou conoyau)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

1. $f = 0_{X\to Y}$ si et seulement si $(X, id_X) = \mathrm{Ker}(f)$.

2. $f = 0_{X\to Y}$ si et seulement si $(Y, id_Y) = \mathrm{Im}(f)$.

▷ Preuve similaire aux raisonnements précédents. ■

5.4.5 Quotients k-linéaires

Dès maintenant, on utilise davantage la notation $\mathcal{C}(X,Y)$ que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Définition. ***(Idéal d'une k-catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Un *idéal* $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ est la donnée de sous-k-modules $\mathcal{I}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$ tels que pour $f \in \mathcal{C}(Y,Z)$ et $g \in \mathcal{C}(X,Y)$, on a $fg \in \mathcal{I}(X,Z)$ dès que $f \in \mathcal{I}(Y,Z)$ ou $g \in \mathcal{I}(X,Y)$. On note $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{C}$.

Définition. ***(Quotient k-linéaire)***

Soient $\mathcal{C}$ une k-catégorie et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{C}$. Le *quotient k-linéaire de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{I}$* est le quotient de $\mathcal{C}$ par la congruence donnée par $f \sim_{\mathcal{I}} g \iff f - g \in \mathcal{I}(X,Y)$ pour $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $X,Y \in \mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ ce quotient.

Remarques.

1. Explicitement, on a $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\mathcal{I}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}/\mathcal{I}$ et la composition dans $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est induite par celle de $\mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est k-linéaire et le foncteur de projection canonique $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ est k-linéaire.

Propriété. ***(Propriété universelle du quotient k-linéaire)***

On a la propriété universelle du foncteur canonique π envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ idéal de $\mathcal{C}$, parmi les foncteurs k-linéaires $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$: il existe un unique foncteur $\tilde{F} : \mathcal{C}/\mathcal{I} \to \mathcal{D}$ de plus k-linéaire tel que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}/\mathcal{I} \arrow[ur, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

commute, *i.e.* $F = \tilde{F}\pi$, si et seulement si pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, pour tous morphismes $f,g : X \to Y$ tels que $f \sim_{\mathcal{I}} g$, on a $F(f) = F(f)$ dans $\mathcal{D}$.

Exemples. ***(Quotients k-linéaires)***

1. Si A est une algèbre et I un idéal bilatère de A, alors $\mathcal{A} = \{\star\}$ avec $\mathrm{End}(\star) = A$ admet I comme idéal, et la catégorie $\mathcal{A}/I$ est donnée par l'algèbre A/I.

5.4.6 Catégories libres

Définition-propriété. ***(k-catégorie libre)***

Soit $\mathcal{S}$ une catégorie ensembliste. La k-catégorie libre sur $\mathcal{S}$, notée $k\mathcal{S}$, a les mêmes objets que $\mathcal{S}$, les k-modules de morphismes $\mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}}(X,Y) = k\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X,Y)$ qui sont les combinaisons k-linéaires formelles de morphismes $f : X \to Y$ de f et les compositions sont celles qui étendent bilinéairement celles de $\mathcal{S}$, précisément, si les $f_i : Y \to Z$ et les $g_j : X \to Y$:

$$\left(\sum_{i\in I} k_i f_i\right)\left(\sum_{j\in J} t_j f_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} k_i t_j (f_i \circ g_i).$$

▷ Il est clair que c'est une k-catégorie par ce que l'on a posé. ■

Exemples. ***(k-catégories libres)***

1. Si $\mathcal{S}$ est la catégorie classifiante d'un groupe G, alors $k\mathcal{S}$ est la catégorie à un objet associée à l'algèbre de groupe kG.
2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ confondu à sa catégorie d'incidence. Soit $\mathcal{I} \subseteq k\mathcal{S}$ l'idéal engendré par tous les morphismes $n \to n+2$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $k\mathcal{S}/\mathcal{I}$ est

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & -2 \arrow[r] & -1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

où l'on indique l'annulation par des pointillées. Soit A une k-algèbre. Alors la donnée d'un foncteur $M : k\mathcal{S}/\mathcal{I} \to \mathrm{Mod}\ A$ est la donnée d'un diagramme

$$\dots \longrightarrow M^{-1} \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow M^2 \longrightarrow \dots$$

où toutes les compositions $M^n \to M^{n+1} \to M^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}$, s'annulent.
Plus précisément, on a un isomorphisme de catégories $\mathrm{Fun}_k(k\mathcal{S}/\mathcal{I},\mathrm{Mod}\ A) \xrightarrow{\sim} \{\text{complexes de } A\text{-modules}\}$ *(selon une définition que, si l'on ne se rappelle pas, on pourra éprouver dès la section suivante).*

Fait. ***(Adjonction** Cat-k-Cat**)***

Notons k-Cat la catégorie des petites k-catégories. Le foncteur $\mathrm{Cat} \to k\text{-}\mathrm{Cat}, \mathcal{S} \to k\mathcal{S}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $k\text{-}\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ qui à une k-catégorie, associe sa catégorie ensembliste sous-jacente.

5.4.7 Complexes sur une catégorie additive

Définition. ***(Objet gradué)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Un *($\mathbb{Z}$-)objet gradué (cohomologiquement)* sur $\mathcal{A}$ est une famille $X = (X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, un *morphisme* $f : X \to Y$ *(gradué) de degré* n entre objets gradués est une famille de morphismes $f^p : X^p \to Y^{p+n}$, $p \in \mathbb{Z}$.

On pourra penser $\mathcal{A}$ comme une catégorie additive. On considère souvent les *morphismes gradués de degré* 0 entre deux objets gradués et les *endomorphismes gradués de degré* ± 1 *d'un objet gradué.*

Remarque. Si $f : Y \to Z$ est gradué de degré n et $g : X \to Y$ est gradué de degré m, leur composition fg de composantes $(fg)^p : X^p \xrightarrow{g^p} Y^{p+m} \xrightarrow{f^{p+m}} Z^{p+m+n}$ est graduée de degré $m+n$.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathcal{G}r(\mathcal{A})$ *la catégorie des objets gradués* ayant pour objets les objets gradués de $\mathcal{A}$ et pour morphismes les $\mathbb{Z}$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}r(\mathcal{A})}(X,Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \{\text{morphismes gradués } f : X \to Y \text{ de degré } n\}$. Cet ensemble est une k-algèbre graduée. En particulier, $\mathcal{G}r(\mathcal{A})$ est une catégorie k-linéaire.

Définition. ***(Complexe de (co)chaînes, différentielle)***

Soit $\mathcal{A}$ est une catégorie k-linéaire. Un *complexe de cochaînes (libre)* ou simplement *complexe* sur/de $\mathcal{A}$ est un couple (C,d_C) où C est un objet gradué et $d_C : C \to C$ un endomorphisme gradué de degré 1, dit *différentielle*[a], tel[b] que $d_C^2 = 0$.
Un *complexe de chaînes (libre)* ou simplement *complexe* sur/de $\mathcal{A}$ est un couple (C,d_C) où C est un objet gradué et $d_C : C \to C$ un endomorphisme gradué de degré -1, dit *différentielle*, tel que $d_C^2 = 0$.

[a] A priori, cela n'a rien à voir avec une différentielle du calcul différentiel.
[b] Cette notation est implicite. Elle signifie que si $C = (C_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, si $d_C = (d^p : C^p \to \mathbb{C}^{p+1})_{p\in\mathbb{Z}}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, si $d^{p+1} \circ d^p = 0_{C^p \to C^{p+1}}$. Même remarque pour les complexes de chaîne *(voir ci-après)* où maintenant $d_C = (d^p : C^p \to C^{p-1})_{p\in\mathbb{Z}}$ et $d^{p-1} \circ d^p = 0_{C^p \to C^{p-2}}$.

Définition. ***(Morphisme de complexes de cochaînes)***

Un *morphisme (de complexes) de cochaînes* d'une catégorie k-linéaire $\mathcal{A}$ est un morphisme gradué $f : (C,d_C) \to (D,d_D)$ de degré 0 entre deux complexes de cochaînes $(C,d_C),(D,d_D)$ sur $\mathcal{A}$, réalisé par $f : C \to D$ tel[a] que $f \circ d_C = d_D \circ f$.
Un *morphisme (de complexes) de chaînes*, ou à l'anglaise *chain map*, d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ est un morphisme gradué $f : (C,d_C) \to (D,d_D)$ de degré 0 entre deux complexes de chaînes $(C,d_C),(D,d_D)$ sur $\mathcal{A}$, réalisé par $f : C \to D$ tel que $f \circ d_C = d_D \circ f$ (même sens qu'avant !).

[a] Encore une fois, cette notation est implicite. Elle signifie, avec les notations précédentes, que si $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f^{p+1} \circ d_C^p = d_D^p \circ f^p : C^p \to D^{p+1}$. Même remarque pour les morphismes de complexes de chaînes *(voir ci-après)* où maintenant $f^{p-1} \circ d_C^p = d_D^p \circ f^p : C^p \to D^{p-1}$.

Remarque. On peut composer les morphismes de complexes de cochaînes et chaque complexe de cochaînes admet un morphisme identité. De même pour les complexes de chaînes.

Définition. ***(Complexes de (co)-chaînes isomorphes)***

Deux complexes de cochaînes C,C' sont *isomorphes* s'il existe deux morphismes de complexes de cochaînes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $f \circ g = id_{C'}$ et $g \circ f = id_C$. Deux complexes de chaînes C,C' sont *isomorphes* s'il existe deux morphismes de complexes de chaînes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $f \circ g = id_{C'}$ et $g \circ f = id_C$.

Mnémonik : les différentielles et les morphismes de complexes ont toujours pour indice (ici notés en exposant...) celui de l'objet de $\mathcal{A}$ de l'objet gradué qui est leur source.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ou encore $CompCh(\mathcal{A}) = CoCh(\mathcal{A})$ la *catégorie des complexes de cochaînes* sur $\mathcal{A}$. Elle sera plus utilisée dans ce cours que la catégorie des complexes de chaînes sur $\mathcal{A}$, notée $Ch(\mathcal{A})$, car on privilégie le sens de lecture de gauche à droite.

Mnémonik : la théorie de l'homologie vient historiquement des problèmes d'intégration des formes différentielles, et la première théorie de l'homologie étudiée à l'Université est souvent la cohomologie de de Rham, qui s'écrit de droite à gauche :

$$\mathcal{E}^0(M) \to \mathcal{E}^1(M) \to \mathcal{E}^2(M) \to \dots$$

où M est une variété différentielle et $\mathcal{E}^i(M)$ est l'espace des i-formes différentielles sur M. De plus, la différentielle de ce complexe est vraiment l'opérateur de différentiation.

Exercice 43 *(Dualité chaînes-cochaînes)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. On rappelle que $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ est additive. Vérifier que $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$.

Heuristique

Concrètement, un complexe de cochaînes (C,d_C) est un diagramme

$$\dots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \dots$$

tel que d^0d^{-1} et de même en tout indice relatif, et un morphisme $f : (C,d) \to (D,e)$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d^{-2}"] & C^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"] & C^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^0"] & C^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "f^1"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "e^{-2}"'] & D^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"'] & D^0 \arrow[r, "e^0"'] & D^1 \arrow[r, "e^1"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

commutatif, *i.e.* tel que $e^0f^0 = f^1d^0$ et de même en tout indice relatif.
Semblablement, un complexe de chaînes (C,d) est un diagramme

$$\dots \xleftarrow{d^{-1}} C^{-1} \xleftarrow{d^0} C^0 \xleftarrow{d^1} C^1 \xleftarrow{d^2} \dots$$

tel que $d^{-1}d^0$ et de même en tout indice relatif, et un morphisme $f : (C,d) \to (D,e)$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots & C^{-1} \arrow[l, "d^{-1}"'] \arrow[d, "f^{-1}"] & C^0 \arrow[l, "d^0"'] \arrow[d, "f^0"] & C^1 \arrow[l, "d^1"'] \arrow[d, "f^1"] & \dots \arrow[l, "d^2"'] \\
\dots & D^{-1} \arrow[l, "e^{-1}"] & D^0 \arrow[l, "e^0"] & D^1 \arrow[l, "e^1"] & \dots \arrow[l, "e^2"]
\end{tikzcd}$$

commutatif, *i.e.* tel que $e^0f^0 = f^{-1}d^0$ et de même en tout indice relatif.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note souvent $C_\bullet$, $D_\bullet$, etc. un complexe de chaînes. On note souvent $f_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ un morphisme de complexes de chaînes. On utilise les notations C_* et C^*, mais également, et c'est trompeur, pour désigner un terme quelconque du complexe C.

Remarques.

1. *(Complexes de modules)* Dans beaucoup de cas pratiques, on considère $\mathcal{A} = R$-Mod où R est un anneau. On notera alors le plus souvent $Ch(R) = Ch(R\text{-Mod}) = \mathcal{C}(R\text{-Mod})$. Cette notation se propose à $\mathcal{C}(R)$, ce qui ne pose pas de réel problème.
2. *(Opérations sur les complexes de chaînes et de cochaînes)* Si $\mathcal{A}$ est stable par une certaine opération catégorique, l'opération en question peut se transmettre sur les complexes, par définition, terme à terme, si tant est que la différentielle s'adapte. On dispose ainsi des notions de :
   - ⋆ *sous-complexe* par restriction et corestriction de la différentielle **si** elle stabilise les sous-objets ;
   - ⋆ *complexe quotient* **si** la différentielle passe au quotient simultanément ;
   - ⋆ *produit de complexes*, avec la différentielle produit ;
   - ⋆ *somme disjointe de complexes*, avec la différentielle somme directe ;
   - ⋆ *produit tensoriel de complexes* $(C,d)(C',d')$, avec la différentielle $d\otimes 1 + 1\otimes d'$;
   - ⋆ ou encore de*complexe noyau*, *complexe image*, de *limites* et *colimites de complexes*.
3. *(Complexes bornés)* Certains complexes de chaînes ou de cochaînes sont *arrêtés* ou *bornés* à gauche/devant, à droite/derrière ou les deux. On note respectivement

$\mathcal{C}^+(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \ll 0\}$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \gg 0\}$ et $\mathcal{C}^b(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall |p| \gg 0\}$ leurs sous-catégories pleines respectives, ou parfois leur clôture par isomorphismes. On utilise également couramment les mêmes notations avec les indices en bas ou $\mathcal{C} \rightsquigarrow Ch$. Ce sont bien des cas particuliers de complexes de chaînes et de cochaînes où l'on considère que les termes de l'objet gradué ainsi que la différentielle sont, à partir d'un certain rang (au voisinage de $\pm\infty$ selon) sont nuls. On rappelle qu'aux extrémités de ces complexes, par exemple réalisées par $X \xrightarrow{d_0} 0$ où X est le dernier objet non nul, alors d_0 ne peut être que l'unique morphisme de X dans 0 objet final. Même chose dans l'autre sens. Dans le cas des complexes bornés, il a bien sûr moins de commutations à vérifier pour montrer qu'un truc est une différentielles, car toutes les nullités qui impliquent des morphismes nuls sont automatiques. Une remarque similaire vaut pour des morphismes de chaînes et cochaînes **bornés au même rang**. Si l'on souhaite s'affranchir formellement de ce qu'un complexe borné est un complexe, il faut faire attention à l'écriture des indices, car jusque-là on pouvait toujours changer $p \rightsquigarrow p \pm 1$ dans nos conditions ; on doit regarder comment écriture les conditions de complexe au cas par cas.

4. On introduit également les complexes *concentrés en degré(s) positif(s)*, respectivement *négatif(s)*, en on utilise malheureusement les mêmes notations, lorsque $X^p = 0$ pour tout $p < 0$, respectivement $p > 0$. On utilise l'adjectif *strictement* lorsque $p \leqslant 0$, respectivement $\geqslant 0$. On parle aussi de complexes $\mathbb{N}$-*gradués*, respectivement $\mathbb{Z}_-$-*gradués*, respectivement $\mathbb{N}^*$-*gradués*, respectivement $\mathbb{Z}_-^*$-*gradués*. Un *complexe* $\mathbb{Z}$-*gradué* n'est autre qu'un complexe en toute généralité mais il laisse penser à une généralisation assez évidente à d'autres ensembles de graduation, typiquement, des groupes abéliens comme on le rencontre en algèbre linéaire.
Dans la notation des complexes de chaînes, il n'est pas rare de rencontrer $Ch_{grand0}(R) = Ch^{\geqslant 0}(R)$ pour désigner les complexes de chaînes de R-modules concentrés en degré positif, *i.e.* la sous-catégorie pleine des *complexes de chaînes positivement gradués*, de même $Ch_{petit0}(R) = Ch^{\leqslant 0}(R)$ en degré négatif, *i.e.* la sous-catégorie pleine des *complexes de chaînes négativement gradués*, et les notations correspondantes $Ch_{>0}(R) = Ch^{>0}(R)$,$Ch_{<0}(R) = Ch^{<0}(R)$ pour les concentrations en degré strictes.
5. *(Plongement d'une catégorie dans ses complexes)* Le foncteur canonique $\Pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ qui envoie $X \in \mathcal{A}$ sur le *complexe concentré en degré* 0 :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{X}_{\text{degré } 0} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

et chaque morphisme $f : X \to Y$ sur le morphisme de complexes nul en tout degré $\neq 0$, est pleinement fidèle. Notons au passage qu'il est surjectif sur les morphismes. Souvent, on identifie donc $\mathcal{A}$ avec une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ via ce foncteur.

Cette remarque est heuristiquement très importante : par exemple, la catégorie des modules est incluse dans la catégorie des complexes de chaînes (de modules), autrement dit, l'algèbre homologique contient l'algèbre linéaire !
Il est tout à fait possible de plonger $X \in \mathcal{A}$ en degré quelconque $i \in \mathbb{Z}$. Avec le formalisme des suspensions introduit un peu plus tard, on remplacera alors par le complexe $X[i] := \Sigma^i \pi(X)$. On notera simplement $X = X[0]$.

6. *(Adjonctions de la concentration)* Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le foncteur d'*évaluation* $E_n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}, (X,d_X) \to X^n$ a un adjoint à droite R qui à un objet $Y \in \mathcal{C}$ associe le complexe concentré en degré n sur Y (pour les mêmes raisons que précédemment : les conditions de commutation sur un complexe concentré sont drastiquement réduites) qui est aussi un adjoint à gauche.
7. Si l'objet gradué X est muni d'une structure multiplicative, typiquement si c'est une algèbre, on parle et retrouve la notion d'*algèbre graduée*. Munie d'une différentielle, un tel complexe est alors appelé *algèbre différentielle graduée*. On rappelle qu'une algèbre A munie d'un morphisme $d : A \to A$ vérifiant $d \circ d = 0$, et simplement appelée *algèbre différentielle*. Dans le cas où pour deux éléments $u,v \in A$ de degrés homogènes respectifs a,b, on a $uv = (-1)^{ab}vu$, on parle d'*algèbre différentielle commutativement graduée*, et leur catégorie est appelée $DGCA(R) = CDGA(R)$ où R est l'anneau de base.

Corollaire. ***(Structure de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$)***

Soient k un anneau commutatif, $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Alors la catégorie des complexes de cochaînes $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est une catégorie k-linéaire.
De même, la catégorie des complexes de chaînes est k-linéaire.

$\triangleright$ On définit la loi sur les morphismes de complexes de cochaînes terme à terme, et il est immédiat ensuite que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, avec les notations évidentes, $(xf+g)^{p+1}d_C^p = d_D^p(xf+g)^p$ puisque $xf^{p+1}d_C^p + g^{p+1}d_C^p = xd_D^p f + d_D^p g^p$. ■

Principe

Les calculs sur objets gradués peuvent se faire, quoique avec un abus de notation sévère, sans prendre en compte les indices (mais éventuellement une suspension *(voir dans la suite comme annoncé)*).

Remarque. Les biproduits dans la catégorie des objets gradués et des celle des complexes de cochaînes, ainsi que des complexes de chaînes, se calculent composante par composante et la différentielle est donnée par la matrice diagonale des différentielles.

Fait. ***(Foncteurs et complexes)***

Un foncteur transforme un complexe en un autre complexe.

Exemple fondamental. ***(Résolution barre, augmentation)***

Soient k un corps, A une k-algèbre et $M \in \operatorname{Mod} A$. Considérons le diagramme, où $\otimes = \otimes_k$:

$$\ldots \xrightarrow{d} \underbrace{M \otimes A^{\otimes p} \otimes A}_{\text{degré } -p} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} M \otimes A \otimes A \xrightarrow{d} \underbrace{M \otimes A}_{\text{degré } 0} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

où $d(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_p \otimes a_{p+1}) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_p \otimes a_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i m \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{p+1}$, par exemple : $d : M \otimes A \otimes A \to M \otimes A, ma \otimes b - m \otimes ab$. Alors ce complexe $B(M,A)$ est un complexe de A-modules, car $d^2 = 0$, libres (et oui).
De plus, on a un morphisme de complexes $B(M,A) \xrightarrow{\varepsilon} M$ où M note le complexe concentré sur M en degré nul, donné par $m \otimes a \mapsto ma$. On appelle $B(M,A)$ la *résolution barre*, ou *complexe barre*, ou *construction barre*, ou *complexe standard* de M et ε son *augmentation*. Parfois, on utilise la notation $|$ au lieu de la notation $\otimes$ pour le produit tensoriel.

Heuristique

La façon précédente de construire des différentielles, *i.e.* via une somme alternée, est la façon générique de construire des complexes. C'est celle que l'on retrouve en homologie simpliciale, en cohomologie de de Rham, en cohomologie des groupes finis...

Principe. ***(Différentielle alternée d'un complexe de chaîne)***

On traite le cas des complexes de chaînes pour changer. On considère

$$\ldots \xrightarrow{d^3} C^2 \xrightarrow{d^2} C^1 \xrightarrow{d^1} C^0 \xrightarrow{0} \ldots$$

une chaîne. On suppose que les C^n sont des groupes abéliens libres sur des ensembles X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n une base de X_n et l'on suppose que tout $s \in S_n$ est encodée par un n-uplet $s \mathrel{\widehat{=}} (s_1,\ldots,s_n)$ tel que $(s_1,\ldots,\hat{s}_i,\ldots,s_n)$ encode un $s' \in S_{n-1}$ si $n \geqslant 1$. On suppose que d est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur C^n vers C^{n-1} par :

$$\forall \sigma \in S_n \quad d^n(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (s_1,\ldots,\hat{s}_i,\ldots,s_n)$$

et étendue par $\mathbb{Z}$-linéarité. Alors (C,d) est un complexe.

▷ En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
d^n d^{n+1}(\sigma) &= d^n(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i(s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{n+1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i d((s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{n+1})) \\
&= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(-1)^{i+j}(s_1,\dots,\hat{s}_j,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{n+1}) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j+1}(s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,\hat{s}_j,\dots,s_{n+1}) \\
&= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(-1)^{i+j}(s_1,\dots,\hat{s}_j,\dots,\hat{s}_i,\dots,s_{n+1}) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}(s_1,\dots,\hat{s}_i,\dots,\hat{s}_j,\dots,s_{n+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque les variables sont muettes, d'où $d^n d^{n+1} = 0$. ■

Homologies, homotopies

La théorie de l'homologie est de même que la théorie de l'homotopie, que l'on peut toutes deux énoncer dans un contexte purement catégorique, des théories associant des invariants à un certain objet. Aucune des deux n'est efficace, car en général, l'homologie est facile à calculer mais difficile à introduire et l'homotopie facile à introduire amis difficile à calculer, et en plus, aucune des deux ne marche à fond : ni l'homologie ni l'homotopie ne produisent des invariants caractérisant. Notons qu'alors que l'homologie, dont les méthodes sont utilisées depuis plus d'un siècle, est une théorie qui s'essouffle quelque peu, la théorie de l'homotopie est en plein essor.

La donnée d'une théorie de l'homologie, car il y en a autant que de catégories, est essentiellement la donnée d'une différentielle entre une chaîne bien choisie, parfois fort abstraite. La notion correspondante en théorie de l'homotopie peut être formalisée sous le concept d'opérade.

Des résolutions comme la résolution barre vont nous permettre de calculer des foncteurs dérivés (à gauche). Pour les caractériser par une propriété universelle, on introduit la catégorie homotopique et sa structure triangulée.

5.5 Catégories triangulées

5.5.1 La catégorie homotopique

Définition. ***(Morphismes homotopes à 0)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. En abusant de la notation C pour (C,d_C), un morphisme $f : C \to D$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est dit *homotope à* 0 ou 0-*homotope* s'il existe un morphisme d'objets gradués de degré -1 noté souvent par la lettre $h : C \to D$, dit *homotopie (de f) à* 0, tel[a] que $f = d_D h + h d_C (= h d_C + h d_D)$.

Deux morphismes de complexes de (co)chaînes sont *homotopes*, ou à l'anglaise *chain homotopic*, si leur différence est homotope à 0.

[a] Explicitement, si $C = (C^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $D = (D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $f = (f^p : C^p \to D^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, $h = (h^p : C^p \to D^{p-1})_{p\in\mathbb{Z}}$, cela signifie que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $f^p = d_D^{p-1} \circ h^p +_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C^p,D^p)} h^{p+1} \circ d_C^p : C^p \to \mathbb{D}^p$.

Définition. ***(Complexes homotopiquement équivalents)***

Un morphisme de complexes de (co)chaînes f est une *équivalence d'homotopie*, ou à l'anglaise une *chain homotopy equivalence*, s'il existe un morphisme de complexes g en sens inverse tel que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont chacune homotopes aux identités. Deux complexes de (co)chaînes sont *homotopiquement équivalents* ou *homotopes* s'il existe une équivalence d'homotopie entre les deux.

Fait. ***(Isomorphes $\Longrightarrow$ homotopiquement équivalents pour les complexes)***

Deux complexes de cochaînes ou de chaînes isomorphes sont en particulier homotopiquement équivalents.

Heuristique

En reprenant les notations de la dernière remarque heuristique, une homotopie à 0 est la donnée de

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d^{-2}"] & C^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"] & C^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "f^0"] \arrow[dl, "h^0"] & C^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "f^1"] \arrow[dl, "h^1"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "e^{-2}"'] & D^{-1} \arrow[r, "e^{-1}"'] & D^0 \arrow[r, "e^0"'] & D^1 \arrow[r, "e^1"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

QUI NE FASSE PAS COMMUTER LE DIAGRAMME a priori, mais à moitié, au sens tel que tout f^i soit la somme des deux moitiés du parallélogramme dont il est diagonal, par exemple $f^0 = e^{-1}h^0 + h^1 d^0$ et de même en tout indice relatif.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note htp_0 où $htp_0(X,Y) = \{d_Y.h + h.d_X \mid h : X \to Y$ gradué de degré $-1\}$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}(A)$, l'idéal de $\mathcal{C}(A)$ formé des morphismes homotopes à 0 de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

En effet, si g est un morphisme de complexes, il est de degré nul et commute avec la différentielle d'où $fg = d_D hg + hd_C g = d_D hg + hgd_C$ où hg est encore de degré $-1+0=-1$, et de même $g'f = g'd_D h + g'hd_C = d_D g'h + g'hd_C$ où $g'h$ est encore de degré -1.

Fait. ***(Foncteurs additifs et complexes complexes)***

Un foncteur additif envoie des complexes homotopes sur des complexes homotopes.

La définition d'homotopie de complexes est additive.

Définition. ***(Catégorie homotopique sur une catégorie additive)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. On définit la *catégorie homotopique de* $\mathcal{C}(A)$ ou *catégorie modulo homotopie de* $\mathcal{C}(A)$ par $\mathcal{H}(A) = \mathcal{K}(\mathcal{A}) := \mathcal{C}(\mathcal{A})/htp_0$.

Lemme. ***(Morphismes dans la catégorie homotopique)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Soient $X,Y \in \mathcal{A}$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X,Y)/\cong$$

où $\cong$ est l'homotopie des complexes de cochaînes.

▷ Découle directement de la définition d'une catégorie quotient. ■

Reformulation pratique. ***(Équivalence d'homotopie)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. On appelle *équivalence d'homotopie* tout morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ dont l'image dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est un isomorphisme.

L'exemple suivant est un peu casse-tête, mais citons-le pour les lecteurs les plus exigeants.

Exemple fondamental. ***(Résolutions barres et catégorie homotopique)***

L'inclusion $\mathrm{Free}(A) \hookrightarrow \mathrm{Mod}\ A$ induit un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{H}(\mathrm{Free}(A)) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)$. Notons $\overline{\varepsilon}$ l'image de ε dans la catégorie $\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)$. Alors $\overline{\varepsilon} : B(A,M) \to M$ est définie
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A)) \ni F \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "\forall"'] & B(A,M) \arrow[d, "\overline{\varepsilon}."] \\ & M \end{tikzcd}$$
. Pour tout $F \in \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))$, $\overline{\varepsilon}$ induit une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))}(F,B(A,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)(F,M)$. Autrement dit, $B(A,M)$ représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)}(?,M) : \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}\ k, F \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)}(F,M)$.

Heuristique

Le fait que deux objets isomorphes dans $\mathcal{A}$ induisent des complexes homotopes, *i.e.* égaux dans la catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, est l'idée fondamentale des invariants de type complexe. C'est par exemple le cas pour des espaces topologiques qui ont des complexes de chaînes singulières homotopes (et donc des groupes d'homologie singulières isomorphes), un théorème fondamental de l'homologie topologique qui se démontre par décomposition prismatique.

On voit donc que le travail sur des complexes de chaînes est une généralisation d'invariants déjà connus : par exemple, le groupe fondamental est un invariant topologique dans la catégorie des groupes, mais c'est aussi un invariant dans la catégorie des complexes de chaînes dans Grp, car tout groupe est un complexe concentré en degré. Le complexe peut être alors vu comme une suite, graduée de surcroît, d'invariants. Typiquement, on peut penser aux groupes d'homotopie (mais ils ne sont pas bien gradués...). Le mieux est de penser à l'invariant « nombre de composantes connexes par arcs » qui est le premier, *i.e.* au degré 0, groupe commutatif, dans Ab donc, qui est abélienne, du complexe d'homologie singulière.

Lemme

Une foncteur additif préserve les morphismes de chaînes homotopes.

▷ Immédiat. ■

Corollaire. ***(Passage des foncteurs additifs à la catégorie homotopique)***

Tout foncteur additif $F : C \to D$ entre catégories k-linéaires se factorise $\mathcal{H}F : \mathcal{H}(C) \to \mathcal{H}(D)$ de sorte que $\pi_{D\to\mathcal{H}(D)} \circ F = \mathcal{H}F \circ \pi_{C\to\mathcal{H}(D)}$.

La structure triangulée de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, introduite ci-dessous, est utile pour démontrer de telles affirmations dans le cas plus général.

Définition. ***(Foncteur suspension)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Le *foncteur suspension* ou *foncteur décalage* ou *foncteur transition* $\Sigma : \mathcal{G}r(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}r(\mathcal{A})$ envoie $X = (X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ sur ΣX tel que $(\Sigma X)^p = X^{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et un morphisme f de degré n, $f^p : X^p \to Y^{p+n}$ sur le morphisme Σf de degré n tel que $(\Sigma f)^p = f^{p+1} : X^{p+1} \to Y^{p+n+1}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, de visu : si

$$X = (\dots \; X^{-1} \; X^0 \; X^1 \; \dots)$$

alors

$$\Sigma X = (\dots \; X^0 \; X^1 \; X^2 \; \dots)$$

alignés.

On définit également le *foncteur suspension* (encore) $\Sigma : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A})$ qui envoie (X,d_X) sur le complexe de cochaînes sur l'objet gradué suspendu et l'opposée de la différentielle suspendue $(\Sigma X, -\Sigma d_X)$ où donc $d_{\Sigma X} := -\Sigma d_X$ et $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ sur $\Sigma f : (\Sigma X, d_{\Sigma X}) \to (\Sigma Y, d_{\Sigma Y})$ par .

▷ Il faut vérifier dans le dernier point que l'on a encore un morphisme de complexes de ΣX vers ΣY. Il suffit d'utiliser les commutations dans les carrés « précédents de 1 » dans les complexes non suspendus, pour la commutation dans les carrés des complexes suspendus, sachant que la multiplication par -1 est bénigne par bilinéarité. De visu, on obtient par exemple $e^0 f^0 = f^1 d^0$ et cela donne $-e^0f^0 = (-e^0)f^0 = f^1(-d^0)$ soit $e^{-1}_{\Sigma Y}(\Sigma f)^{-1} = (\Sigma f)^0 d^{-1}_{\Sigma X}$. ■

$\longrightarrow$ *Notation. (Suspension itérée)* n note parfois de façon postfixe : $\Sigma X = X[1]$, ce qui laisse à penser à juste titre que l'on pourrait généraliser $1 \rightsquigarrow n \in \mathbb{Z}$: par définition, $\Sigma[n] = (\Sigma[n-1])[1]$ pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $n \leqslant 0$ on utilise la définition de $\Sigma[-1]$ donnée de façon évidente toujours en opposant la différentielle, ce qui revient à dire que pour tout objet gradué X, $(\Sigma[n]X)^p = X^{p+n}$ et si X est un complexe de différentielle d, la différentielle de $\Sigma[n]X$ est donnée par $(-1)^n d$. La suspension $\Sigma[-1]$ est parfois appelée *désuspension*. Il est clair que $\Sigma[k]\circ\Sigma[k'] = \Sigma[kk'] = \Sigma[k']\circ\Sigma[k]$ et $\Sigma[0] = id$, donc que les suspensions induisent un morphisme de monoïdes de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathrm{End}(\mathcal{C}(\mathcal{A})),\circ)$.

Attention au changement de signe pour la différentielle de l'image du foncteur suspension sur $\mathcal{C}(A)$!

Heuristique

Donc explicitement si $X = (\dots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} \dots)$ est un complexe de cochaînes, $X[1] = \Sigma X = (\dots \longrightarrow X^0 \xrightarrow{-d_X^0} X_1 \xrightarrow{-d_X^1} X^2 \xrightarrow{-d_X^2} \dots$.

Propriété. ***(Linéarité du foncteur suspension)***

Le foncteur suspension est k-linéaire.

Définition-propriété. ***(Cône d'un morphisme de complexes)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Son *cône* ou *cofibre homotopique* est le complexe $C(f) = \mathrm{Cone}(f) = (Y \oplus \Sigma X, \begin{pmatrix} d_Y & f \\ 0 & d_{\Sigma X}\end{pmatrix})$ où $\oplus$ désigne le biproduit dans $\mathcal{G}r(\mathcal{A})$. Précisément pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$d^p_{C(f)} : Y^p \oplus X^{p+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_Y^p & f^{p+1} \\ 0 & d_X^{p+1}\end{pmatrix}} Y^{p+1} \oplus X^{p+2}.$$

$\rhd$ On a bien $\begin{pmatrix} d_Y & f \\ 0 & -d_X\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_Y & f \\ 0 & -d_X\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_Y^2 & d_Yf - f_Xd \\ 0 & d_X^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$. ■

Remarque. Dualement, on a le *cocône* ou *fibre homotopique* d'un morphisme de complexes donnée par $coC(f) = \mathrm{coCone}(f) = (X \oplus \Sigma Y, \begin{pmatrix} d_{\Sigma X} & f \\ 0 & d_X\end{pmatrix})$.

Exercice 44 *($C(f)$ est le « conoyau à homotopie près » de f)*

Considérons

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h=\begin{pmatrix} 0 \\ id_X \end{pmatrix}"] \arrow[dr, bend right, "k"'] & Y \arrow[r, "i=\begin{pmatrix} id_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "j"] & C(f) \arrow[dl, dashed, "\exists ! g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

où h est un morphisme gradué de degré -1. On a $i \circ f = d_{C(f)}h + hd_X$, propriété notée $(\star)$. Montrer que (i,h) est universel pour la propriété $(\star)$, *i.e.*, pour tout $Z \in \mathcal{C}(A)$, on a la bijection

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(C(f),Z) &\longrightarrow \{(j,k) \mid j : Y \to Z \text{ de } \mathrm{mor}(\mathcal{C}(\mathcal{A})), k \text{ 1-gradué}, gf = dk + kd\}. \\ g &\longmapsto (gi,gh) \end{aligned}$$

▷ Autrement dit, montrons que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\forall g"] & C(f) \arrow[dl, dashed, "\exists ! \overline{g}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

pour tout h de degré -1, soit $h^n : X^{n+1} \to U^n$. Ainsi, $gf = dh + hd$ signifie : pour tout n, $g^n \circ g^n = d_X^{n-1} \circ h^{n-2} + h^n \circ d_X^n$. Montrons qu'il existe un unique $\overline{g} : C(f) \to U$ tel que $\overline{g} \circ i = g$ et $\overline{g} \circ h = h$. On aura en fait $\overline{g} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ et l'on peut donc récrire $\overline{g} \circ i = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_1 = g$ et $\overline{g} \circ h = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_1 = h$. Ainsi, par analyse, $\overline{g}^n = \begin{pmatrix} g^n & h^n \end{pmatrix}$. Vérifions en synthèse que $\overline{g}$ est un morphisme, *i.e.* $\overline{g}^{n+1} \circ d_{C(f)}^n = d_U^n \circ g^n$. L'expression de gauche vaut $\begin{pmatrix} g^{n+1} & h^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_Y^n & f^{n+1} \\ 0 & -d_X^{n+1} \end{pmatrix}$ et celle de droite $d_X^n \circ \begin{pmatrix} g^n & h^n \end{pmatrix}$ et en faisant commuter g avec les différentielles, on obtient la même chose. ■

Corollaire. ***(Homotopie à zéro et cône)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire et $g : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Un morphisme $g : X \to Y$ est homotope à 0 si et seulement si g se factorise dans $C(id_X)$.

▷ Si $f : X \to Y$ est un morphisme de complexes, alors

$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} C(f) = (X \oplus \Sigma Y, \begin{pmatrix} d_X & f \\ 0 & -d_Y \end{pmatrix})$ le conoyau d'homotopie de f. En particulier, pour $f = id_X$, on trouve

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & X \arrow[r, "\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "g"] & C(id_X) \\ & Y & \end{tikzcd}$$

et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(C(id_X),Y)) \simeq \{(g,h) \mid g : X \to Y, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}, h$ gradué de degré $1, g = d_Y.h + hd_X\}$. En particulier, un morphisme $g : X \to Y$ est homotope à 0 si et seulement si g se factorise dans $C(id_X)$, ce qu'il fallait montrer. ■

Introduisons une structure particulière sur $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Définition. ***(Σ-suite, triangle dans la catégorie homotopique)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Une Σ-*suite* de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est un diagramme $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$, où les X,Y,Z sont des images projetées de complexes de cochaînes de $\mathcal{A}$ et les $X \longrightarrow Y$, $Y \longrightarrow Z$ et $Z \longrightarrow \Sigma X$ sont des images projetées morphismes de complexes de cochaînes.

Un *morphisme de* Σ-*suites* est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X', \end{tikzcd}$$

ce qui permet de définir la *catégorie des* Σ-*suites*.

Définition. ***(Triangle dans une catégorie d'homotopie)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Un *triangle* dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est une Σ-suite isomorphe à l'image dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ d'une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} C(f) \xrightarrow{(0 \ id)} \Sigma X$.

Un *morphisme de triangles* est un morphisme de Σ-suites entre triangles, la catégorie des triangles de $\mathcal{A}$ triangles formant alors une sous-catégorie pleine de la catégorie des Σ-suites.

Remarque. On note le morphisme parfois un triangle $X \to Y \to Z \to \Sigma X$ par

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "|" marking] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

où la flèche $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\;$, parfois représentée avec le taquet dans la première moitié de la hampe, ne représente pas un morphisme.

Théorème. ***(Structure triangulée de la catégorie d'homotopie)***

On a les propriétés suivantes :

1. toute Σ-suite isomorphe à un triangle est un triangle ;

2. pour tout objet X, la suite $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle ;

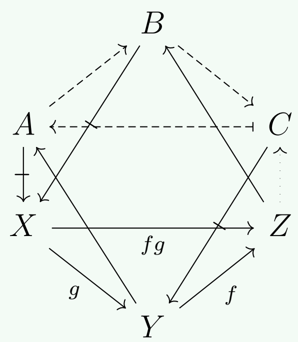
3. Pour tout morphisme $u : X \to Y$, il existe un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$;

4. Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ est un triangle, alors $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$ aussi (attention au signe !), et réciproquement si $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{u} \Sigma Y$ est un triangle, alors $X \xrightarrow{-u[-1]} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ où T est un quasi-inverse de Σ ;

5. si l'on a des triangles (u,v,w) et (u',v',w') et un carré commutatif $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$, il existe un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma X \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma a} \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma X'; \end{array}$$

6. supposons donnés des triangles $X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow A \longrightarrow \Sigma X$, $Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma Y$ et $X \xrightarrow{fg} Z \longrightarrow B \longrightarrow \Sigma X$. Alors il existe un triangle $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ tel que dans l'octaèdre



les faces qui ne sont pas des triangles distingués sont commutatifs et $(BCYX)$, $(ABZY)$ le sont aussi.

▷ Successivement :

1. Par définition et transitivité de la relation d'isomorphisme.

2. On pourra consulter la section I.1.4 de *Sheaves on manifols*, Koshinava, Schapira. ■

5.5.2 Axiomes des catégories triangulées

Définition. ***(Σ-suite, triangle)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Une Σ-*suite* de $\mathcal{A}$ est un diagramme $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ dans $\mathcal{A}$.

Un *morphisme de* Σ-*suites* est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X', \end{tikzcd}$$

ce qui permet de définir la *catégorie des* Σ-*suites* de $\mathcal{A}$.

Définition. ***(Catégorie triangulée)***

Une *catégorie triangulée* est une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'une autoéquivalence $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ appelée *foncteur suspension* ou *foncteur décalage* ou *foncteur transition* et une classe de Σ-suites $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ appelées *triangles* qui vérifient six axiomes suivants.

($TR0$) Toute Σ-suite isomorphe à un triangle est un triangle.

($TR1$) *(Triangles triviaux)* Pour tout objet X, la suite $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle.

($TR2$) *(Compléter un morphisme en un triangle)* Pour tout morphisme $u : X \to Y$, il existe un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$.

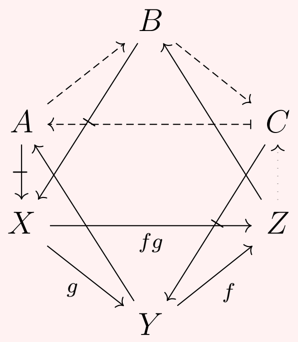
($TR3$) *(Faire tourner les triangles à gauche, à droite)* Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ est un triangle, alors $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma Y$ aussi (attention au signe !), et réciproquement : si $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{u} \Sigma Y$ est un triangle, alors $X \xrightarrow{-Tu} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ où T est un quasi-inverse de Σ.

($TR4$) *(Compléter un carré en un morphisme de triangles)* Si l'on a des triangles (u,v,w) et (u',v',w') et un carré commutatif $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$, il existe un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "c"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'. \end{tikzcd}$$

($TR5$) *(Axiome de l'octaèdre)* Supposons donnés des triangles $X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow A \longrightarrow \Sigma X$, $Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma Y$ et $X \xrightarrow{fg} Z \longrightarrow B \longrightarrow \Sigma X$. Alors il existe un triangle

$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ tel que dans l'octaèdre



les faces qui ne sont pas des triangles distingués sont commutatifs et les deux parallélogrammes $(BCYX), (ABZY)$ contenant le centre le sont aussi.

Un *morphisme de triangles* est un morphisme de Σ-suites entre triangles, la catégorie des triangles de $\mathcal{A}$ triangles formant alors une sous-catégorie pleine de la catégorie des Σ-suites.

VOC Si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle, on dit que Y est une *extension* de Z par X et que Z est le *troisième objet (canonique)* ou *sommet* du morphisme $X \longrightarrow Y$. De plus, ΣX est le *suspendu* de X que l'on appelle *base* du triangle.

$\longrightarrow$ *Convention.* On utilise parfois la terminologie alternative où une Σ-suite est un *triangle (tout court)* et un triangle devient un *triangle distingué.*

Remarques.

1. Souvent, Σ est un automorphisme de catégorie, c'est-à-dire un isomorphisme de catégories sur elle-même.
2. Le morphisme c dans $(TR4)$ n'est pas unique en général. Cependant, on verra que l'objet Z dans $(TR2)$ est unique à isomorphisme près.
3. Les triangles sont les analogues dans les catégories de complexes des suites exactes courtes de modules $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$; c'est ce que dit le lemme suivant. L'énoncé $(TR5)$ est alors l'analogue du troisième théorème d'isomorphisme.

   Supposons que l'on ait une tour de sous-modules $X \subseteq Y \subseteq Z$ et des suites exactes courtes : $0 \longrightarrow X \overset{g}{\hookrightarrow} Y \longrightarrow Y/X = A \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow Y \overset{f}{\hookrightarrow} Z \longrightarrow Z/Y = C \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow X \overset{fg}{\hookrightarrow} Z \longrightarrow Z/X = B \longrightarrow 0$. On a alors une suite exacte courte $0 \longrightarrow A = Y/X \longrightarrow B = Z/X \longrightarrow C = Z/Y \longrightarrow 0$, car ${}^{Z/X}\!\big/_{Y/X} \xrightarrow{\sim} Z/Y$.

Lemme

Si $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle d'une catégorie triangulée, alors $fg = 0$.

▷ Par l'axiome $(TR1)$, on a le triangle $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$. Par l'axiome $(TR4)$, on peut compléter le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "id_x"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

en un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "id_x"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "id_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "f"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

dont on déduit $fg = 0$ par la commutativité du carré central. ■

Exemples. ***(Catégories triangulées)***

1. Si $\mathcal{A}$ est additive, alors $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est triangulée par le théorème de la section précédente.
2. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ n'a aucune raison d'être triangulée.
3. *(Catégorie triangulée opposée)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Supposons pour simplifier que $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un automorphisme. Alors $\mathcal{C}^{\text{op}}$ munie de Σ^{-1} et des triangles $\Sigma^{-1}Z \xleftarrow{-\Sigma^{-1}w} X \xleftarrow{u} Y \xleftarrow{v} Z$ tels que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ est un triangle dans $\mathcal{C}$ est encore triangulée.

5.5.3 Foncteurs homologiques

Définition. ***(Foncteur (co)homologique)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Un foncteur[a] $\mathcal{C} \to \text{Ab}$, respectivement $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \text{Ab}$ est *homologique*, respectivement *cohomologique* s'il est additif et pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$, la suite $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ$, respectivement $FX \xleftarrow{Fu} FY \xleftarrow{Fv} FZ$ est exacte.

On parle aussi de foncteur *exact*.

[a] Certains auteurs généralisent, sans aucun problème, Ab à n'importe quelle catégorie de modules.

Remarque. Si $F : \mathcal{C} \to \text{Ab}$ est homologique, on pose $F^k = F \circ \Sigma^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors tout triangle $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ induit une suite exacte longue

$$\dots F^{k-1}Z \longrightarrow F^kX \longrightarrow F^kY \longrightarrow F^kZ \longrightarrow F^{k+1}X \longrightarrow \dots$$

par l'axiome de rotation $(TR3)$.

Lemme. ***(Exactitude du foncteur*** Hom***)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Pour tout $U \in \mathcal{C}$, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,U)$ sont (co)homologiques.

$\triangleright$ Soit $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow \Sigma X$ un triangle. On sait déjà que $fg = 0$. Par suite, la suite $\mathrm{Hom}(U,X) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(U,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(U,Z)$ est un complexe. Soit $h : U \to Y$ un morphisme tel que $fh = 0$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id_U"] \arrow[d, dashed, "k"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-id_{\Sigma U}"] \arrow[d, dashed] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "e"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma g"'] & \Sigma Y. \end{tikzcd}$$

Par $(TR3)$, chaque ligne dont on retire l'élément extrémal à gauche sont des triangles. Par $(TR4)$, on peut trouver un morphisme $\Sigma U \to \Sigma X$ faisant commuter le diagramme de droite. Puisque Σ est une équivalence, ce morphisme est de la forme Σk pour un certain $k : U \to X$, tel que $gk = h$. ■

Le lecteur ayant déjà travaillé en profondeur la théorie élémentaire des modules se rappellera certainement :

Lemme. ***(Lemme des cinq dans*** Ab***)***

Supposons que l'on ait un diagramme commutatif de la catégorie des groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "k'"'] & E' \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Si a, b, d et e sont bijectifs, alors c l'est également.

Corollaire. ***(Lemme des cinq dans une catégorie triangulée)***

Supposons que l'on ait un morphisme de triangles dans une catégorie triangulée :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

de sorte que a et b soient des isomorphismes. Alors c est un isomorphisme.

▷ Par le lemme de Yoneda, il suffit de démontrer que $\mathrm{Hom}(U,c) : \mathrm{Hom}(U,Z) \to \mathrm{Hom}(U,Z')$ est bijective pour tout $U \in \mathcal{C}$. L'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?)$ du diagramme étendu

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"] \arrow[d, "\Sigma a"] & \Sigma Y \arrow[r, "-\Sigma v"] \arrow[d, "\Sigma b"] & \Sigma Z \arrow[d, "\Sigma c"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X' \arrow[r, "-\Sigma u'"'] & \Sigma Y' \arrow[r, "-\Sigma v'"'] & \Sigma Z'
\end{tikzcd}$$

est un diagramme de groupes abéliens dont les lignes sont exactes, de sorte que $\mathrm{Hom}(U,c)$ est bijectif par le lemme des cinq. ■

Remarque. Il n'y a que quatre termes dans les lignes du lemme des cinq sur une catégorie triangulée.

5.5.4 Cône sur un morphisme

Corollaire

Si deux triangles d'une catégorie triangulée (u,v,w) et (u,v',w') ont la même base u, alors ils sont isomorphes.

▷ Par l'axiome $(TR4)$, on obtient $c : Z \to Z'$ tel que (id_X,id_Y,c) est un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "c"'] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X.
\end{tikzcd}$$

Par le lemme des cinq, c'est un isomorphisme. ■

Définition. ***(Cône)***

Le *cône* sur un morphisme $u : X \to Y$ est le troisième terme dans tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$.

Remarque. C'est donc bien défini : par le $(TR2)$, il existe toujours un tel triangle. Par le corollaire précédent, le cône sur sur u est unique à isomorphisme (non unique a priori !) près.

Corollaire. ***(Morphisme inversible)***

Un morphisme $u : X \to Y$ est inversible si et seulement si son cône est un objet nul.

▷ On utilise encore le lemme de Yoneda et la suite exacte longue induite par le triangle dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?)$. ■

Preuve.

▷ *(Méthode sans utiliser Yoneda)* Passons-nous de ces outils un peu abstrait. On considère le morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma id"] \\ X \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

qui se complète par φ par propriété précédente. Puisque φ est un isomorphisme, on a $C(f) = 0$.

Réciproquement, si $C(f) = 0$, on a un triangle $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$, d'où en faisant tourner $\Sigma X^{-1} \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$. D'autre part, on a un triangle trivial $X \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$, d'où $0 \longrightarrow XX \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0$. On peut donc compléter par φ le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Sigma X^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où 0 et id_X sont des isomorphismes, donc φ l'est aussi. Par commutation dans le deuxième carré, $\varphi \circ f = id_X$. Donc f est un isomorphisme en tant qu'isomorphisme réciproque. ■

Exemple. ***(Morphismes inversibles dans la catégorie homotopique)***

Si $\mathcal{A}$ est additive, un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ devient inversible dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ si et seulement si $C(f)$ est un objet nul de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, *i.e.* $\overline{id_{C(f)}} = 0$, *i.e.* $id_{C(f)} \sim_{htp_0} 0$, *i.e.* $id_{C(f)} = dh + hd$ pour un morphisme gradué $h : C(f) \to C(f)$ de degré 1.

5.5.5 Suites exactes courtes dans les catégories triangulées

Théorème. ***(Biproduit de triangles)***

Soient $X_i \xrightarrow{u_i} Y_i \xrightarrow{v_i} Z_i \xrightarrow{w_i} \Sigma X_i$ pour $i \in [\![1,2]\!]$ deux triangles. Alors la Σ-suite $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}} Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}} \Sigma(X_1 \oplus X_2)$ est encore un triangle.

▷ On forme un triangle $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X_1 \oplus X_2)$ et l'on montre qu'il est isomorphe à la Σ-suite ci-dessus. ■

Remarque. La catégorie des triangles d'une catégorie triangulée est donc additive.

Corollaire. ***(Les suites exactes scindées donnent des triangles)***

Si $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ est une suite exacte scindée dans $\mathcal{C}$, alors $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{0} \Sigma X$, où 0 est le morphisme nul, est un triangle.

$\triangleright$ La suite donnée est isomorphe à $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & id \end{pmatrix}} Z \longrightarrow 0$ et donc la Σ-suite $(u,v,0)$ est isomorphe à la somme direct des Σ-suites $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ et $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow \Sigma 0$. Ce sont deux triangles par $(TR1)$ et $(TR3)$. Donc leur somme directe est un triangle par le théorème précédent. ■

5.5.6 Morphismes particuliers dans les catégories triangulées

Lemme. ***(Caractérisation des suites exactes scindées triangulées)***

Soit $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{e} \Sigma X$ un triangle. Alors les propositions :

(i) p est un épimorphisme ;

(ii) i est un monomorphisme ;

(iii) $e = 0$;

(iv) la suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$ est exacte scindée

sont équivalentes.

$\triangleright$ En exercice. ■

Corollaire. ***(Monomorphismes dans une catégorie triangulée)***

Dans une catégorie triangulée, les seuls monomorphismes sont les monomorphismes scindés, *i.e.* rétractable.

Ceci est tout à fait faux dans la plupart des catégories de modules où l'on rappelle que les monomorphismes sont les morphismes injectifs, par exemple $\mathbb{Z} \xrightarrow[k \mapsto 2k]{} \mathbb{Z}$ n'est pas scindé dans Ab.

Corollaire. ***(Épimorphismes dans une catégorie triangulée)***

Dans une catégorie triangulée, les seuls épimorphismes sont les épimorphismes scindés, *i.e.* sectionnables.

5.5.7 Sous-catégorie triangulée

Définition. ***(Sous-catégorie triangulée)***

Si $\mathcal{C}$ est une *catégorie triangulée*, alors une *sous-catégorie triangulée* $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie **pleine** telle que $\Sigma\mathcal{C}' = \mathcal{C}'$ et *stable par extensions*, *i.e.* si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle et $X,Z \in \mathcal{C}'$, alors $Y \in \mathcal{C}'$.

Proposition. ***(Lemme d'extension des triangles)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Si $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie triangulée et $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ un triangle de $\mathcal{C}$, alors les trois termes X,Y,Z sont dans $\mathcal{C}'$ si et seulement si deux parmi les trois le sont. Il s'agit de tourner le triangle !

Proposition. ***(Structure de la sous-catégorie triangulée)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Si $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie triangulée, alors $\mathcal{C}'$ muni du foncteur induit par $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et des triangles de $\mathcal{C}$ dont les trois termes sont dans $\mathcal{C}'$, est une catégorie triangulée.

Exemple. ***(Sous-catégories triangulées)***

$\mathcal{H}(\mathcal{A})$ a les sous-catégories suivantes :

- $\mathcal{H}^-(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \gg 0\}$;
- $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \ll 0\}$;
- $\mathcal{H}^b(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall |p| \gg 0\}$.

Une sous-catégorie triangulée $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ contient tous les objets nuls de $\mathcal{C}$, ce qui n'est pas le cas des précédentes. La catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ contient « beaucoup » d'objets nuls ; ce sont les *complexes contractiles* (X,d_X), *i.e.* tels qu'il existe $h : X \to X$ gradué de degré -1 tel que $d_X h + h d_X = id_X$. Par exemple, pour $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \deg p - 1 & & \deg p & & \\ X = (\ldots 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \underset{h^p = id_A}{\overset{id_A}{\rightleftarrows}} & A & \longrightarrow & 0 \ldots). \end{array}$$

5.5.8 Foncteurs triangulés

Définition. ***(Foncteur triangulé)***

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories triangulées de foncteurs suspension $\Sigma_{\mathcal{C}}$ et $\Sigma_{\mathcal{D}}$. Un *foncteur triangulé* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un couple (F,φ) où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur additif et

$$\varphi : F\Sigma_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\mathcal{D}}F$$

un isomorphisme de foncteurs tel que pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ de $\mathcal{C}$, la Σ-suite

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Fu"] & FY \arrow[r, "Fv"] & FZ \arrow[r, "\varphi_X \circ F(w)"] \arrow[dr, "Fw"'] & \Sigma_{\mathcal{D}}FX \\ & & & F\Sigma_{\mathcal{C}}X \arrow[u, "\varphi X"'] \end{tikzcd}$$

est un triangle.

Exemples. ***(Foncteurs triangulés)***

1. L'inclusion $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ d'une sous-catégorie triangulée est un foncteur triangulée où ici φ est trivial.

Propriété. ***(Composition des foncteurs triangulés)***

La composée de deux foncteurs triangulés est un foncteur triangulé.

▷ ■

Définition. ***(Morphisme de foncteurs triangulés)***

Définition. ***(Paire adjointe de foncteurs triangulés)***

5.6 Catégories abéliennes

5.6.1 Catégories de modules

Fait. ***(Lien modules-espaces vectoriels)***

Si k est un corps, la catégorie Mod $k \simeq k$-Mod est égale à la catégorie k-Vect.

Fait. *(Lien modules-groupes abéliens)*

La catégorie des $\mathbb{Z}$-modules est équivalente à Ab.

Le fait que les produits semi-directs, qui émergent naturellement des suites exactes courtes scindées, soient des produits directs dans la catégorie des groupes abéliens, se généralise naturellement aux modules. On pourra voir également le lien avec le fait que tout sous-espace vectoriel admette un supplémentaire, autrement dit que **toute suite exacte courte d'espaces vectoriels soit scindée**.

Propriété. *(Caractérisation des suites scindées)*

Soit $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \qquad (\star)$ une suite exacte courte de A-modules. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i) f est rétractable, *i.e.* il existe $r : M \to L$ un morphisme de A-modules tel que $rf = id_L$;

(ii) g est sectionnable, *i.e.* il existe $s : N \to M$ un morphisme de modules tel que $gs = id_N$;

(iii) la suite $(\star)$ est scindée = scindable, *i.e.* il existe un isomorphisme $h : M \to L \oplus N$ qui rende le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_L"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i_L"'] & L \oplus N \arrow[r, "p_N"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutatif.

On donne quelques théorèmes fondamentaux, qui sont, souvent dans le contexte des suites exactes de groupes abéliens, les premiers exemples académiques de ce sport olympique appelé *chasse aux diagrammes*, où il s'agit simplement d'obtenir des relations entre images et noyaux en faisant commuter des carrés dans un diagramme multiple.

Principe. *(Chasse aux diagrammes)*

Étant donnée une longue suite d'hypothèses sur des morphismes, typiquement, la donnée de plusieurs suites exactes et de morphismes entre elles, on peut travailler sur un diagrammes pour aider les preuves. Il y a alors deux façons de procéder :

1. On s'aide du diagramme mais on écrit tout, et l'on revient à des propriétés « point par point » de l'injectivité, la surjectivité, etc. Dans ces situation, les diagrammes sont les cartes du monde homologique.
2. On utilise des propriétés générales des diagrammes. Elles sont données principalement par les lemmes suivants. Ces propriétés sont souvent communes à des catégories par

exemple abéliennes où les objets ne sont pas a priori des ensembles.
Heuristiquement, la chasse aux diagrammes proprement dite, *i.e.* la deuxième façon de procéder ci-dessus, est censée être plus limitée : il est intuitif que l'on ne pourra pas obtenir autant de propriétés en raisonnant sur des propriétés extérieures aux objets qu'en revenant au point. Et pourtant... le formalisme allégé des diagrammes permet d'en faire beaucoup plus.

Lemme. ***(Lemme des cinq)***

Soit A un anneau. Soient $M_1,\ldots,M_5$ et $N_1,\ldots,N_5$ des A-modules, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$, des morphismes de A-modules $f_i : M_i \to N_i$ et pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, des morphismes de modules $\alpha_i : M_i \to M_{i+1}$ et $\beta_i : N_i \to N_{i+1}$, tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

commute et que ses lignes soient exactes. Alors :

(i) *(version forte du lemme des cinq)* si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives, alors f_3 est injective ;

(ii) *(version forte duale du lemme des cinq)* si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective ;

(iii) *(version faible du lemme des cinq)* si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Remarquons que, dans Mod A, on peut remplacer la notion de morphisme injectif par celle de monomorphisme de modules et la notion de morphisme surjectif par celle d'épimorphisme de modules.

▷ Soit $y \in \mathrm{Ker}(f_3)$. Alors $0 = \beta_3 f_3(c) = f_4\alpha_3(c)$ donc $\alpha_3(c) = 0$ et $y = \alpha_2(x)$ pour un certain $x \in M_2$. On a $\beta_2 f_2(x) = f_3\alpha_2(x) = 0$. Ainsi $f_2(x) = \beta_1(x')$ pour un certain $x' \in N_1$. Puisque f_1 est surjective, on a $x' = f_1(x_0)$ pour un certain $x_0 \in M_1$. On a $\alpha_1(x_0) = x$ puisque f_2 est injective et $f_2\alpha_1(x_0) = \beta_1 f_1(x_0) = f_2(x)$. Mais alors nous avons $y = \alpha_2(x) = \alpha_2\alpha_1(x_0) = 0$, d'où le résultat. Dans la même veine, on montre l'énoncé dual. La version faible découle des deux versions fortes. ■

Remarque. Le lemme des cinq permet donc d'établir des isomorphismes. Dans le cas des suites exactes courtes en lignes où $M_1 = N_1 = 0 = M_5 = N_5$, les flèches f_1 et f_5 sont automatiquement des isomorphismes et il n'y a que deux choses à vérifier : la commutation des deux carrés centraux et la bijectivité de f_2 et f_4.

Lemme. ***(Lemme du serpent)***

Soit A un anneau. Soient A,B,C et A',B',C' des A-modules, des morphismes de A-modules $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \longrightarrow C$ et $g_1 : A' \to B'$, $g_2 : B' \to C'$ et pour tout $M \in \{A,B,C\}$ dans cet ordre, des morphismes modules α,β,γ respectivement de $M \to M'$, tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' & \end{tikzcd}$$

commute et que ses lignes soient exactes. On rappelle que si f est un morphisme de modules à valeurs dans M, alors $\mathrm{Coker}(f) = M/\mathrm{Im}(f)$. Alors il existe un morphisme $\delta : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$, parfois appelé *connectant* qui rende la suite

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$$

exacte, où les applications dont les noms sont omis sont induites par f_1, f_2, g_1 ou g_2. Si de plus f_1 est injective, alors $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ l'est aussi. De même, si g_2 est surjective, alors $\mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$ est surjective.

▷ Remarquons d'abord que tout carré commutatif de A-modules $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$ peut se compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \ker(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta) \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\beta) \arrow[d] \\ 0 & 0. \end{tikzcd}$$

À partir de là, il n'est pas simple de construire δ. ■

Remarque. On cherchera pour comprendre le nom, le serpent dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& \ker(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\gamma) \arrow[d] & \\
& A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d] & C'. \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\gamma) \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

très commutatif.

Exercice 45 *(Les trois grands théorèmes de la chasse aux diagrammes)*

Trouver les liens logiques entre le lemme des 5, le snake lemma et le TFAH.

5.6.2 Généralités sur les catégories abéliennes

5.6.2.1 Images et coimages

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire où k est un anneau commutatif, en particulier, si $\mathcal{A}$ est additive et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{A}$. On rappelle que le noyau $\operatorname{Ker}(f)$ existe si le foncteur $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}, U \to \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,X) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(U,Y))$ est représentable et alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un représentant. De même, le conoyau $\operatorname{Coker}(f)$ existe si le foncteur $\mathcal{A} \to \mathrm{Ab}, V \mapsto \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,V) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X,V))$ est représentable et $\operatorname{Coker}(f)$ est alors un représentant. Par définition, on a donc des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(?,\operatorname{Ker}(f)) \longrightarrow \mathcal{A}(?,X) \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(?,Y)$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\operatorname{Coker}(f),?) \longrightarrow \mathcal{A}(Y,?) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(X,?).$$

En particulier, on retrouve que $\operatorname{Ker}(f) \to X$ est un monomorphisme et $Y \to \operatorname{Coker}(f)$ est un épimorphisme.

Considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "q"'] \arrow[drr, dashed, "f_2"] & & & Y \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& & \mathrm{Coker}(i) \arrow[urr, dashed, "f_1"'] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

dont il est intéressant de considérer que tous les noyaux et conoyaux existent.

Définition. ***(Image)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{A}$. On suppose que f admet un conoyau $(\mathrm{Coker}(f),\pi)$ où $\pi : Y \to \mathrm{Coker}(f)$ est le morphisme canonique. L'*image* de f, si elle existe, est le noyau du morphisme π, (K,j) où $j : K \to Y$ est un nouveau morphisme canonique. On note $\mathrm{Im}(f)$ ou $\mathrm{im}(f) := \mathrm{Ker}(\pi)$ le noyau du conoyau de f.

Remarque. On peut récrire plus succinctement : si elle existe, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{eq}(\mathrm{coeq}(f,0),0)$.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{C}$. On suppose que f admet un conoyau (Q,q) *(voir cette colimite)*. L'*image* de f est l'objet $\mathrm{Im}(f) = I$ muni d'un morphisme $i : X \to X_2$ vérifiant $qi = 0_{I\to Q}$, tel que pour tous objet I' de $\mathcal{C}$ et morphisme $i' : I' \to X_2$ vérifiant $qi' = 0_{I'\to Q}$, il existe une unique $t : I' \to I$ telle que $it = i'$ **et c'est tout**.

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \arrow[r, "q"] & Q \\
& I \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"'] & \\
I' \arrow[uur, "i'"] \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[uurr, "0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Définition. ***(Coimage)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire. Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{A}$. On suppose que f admet un noyau $(\mathrm{Ker}(f),i)$ où $i : \mathrm{Ker}(f) \to X$ est le morphisme canonique. La *co(-)image* de f, si elle existe, est le conoyau du morphisme i, (Q,q) où $q : X \to Q$ est un nouveau morphisme canonique. On note $\mathrm{Coim}(f)$ ou $\mathrm{coim}(f) := \mathrm{Coker}(i)$ le conoyau du noyau de f.

Remarque. On peut récrire plus succinctement : si elle existe, $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{coeq}(\mathrm{eq}(f,0),0)$.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de $\mathcal{C}$. On suppose que f admet un noyau (K,k) *(voir cette limite)*. La *coimage* ou *quotient par le noyau* ou *quotient canonique* de f est l'objet $\mathrm{Coim}(f) = P$ muni d'un morphisme $p : X_1 \to P$ vérifiant $pk = 0_{K\to P}$, tel que pour tous objet P' de $\mathcal{C}$ et morphisme $p' : X_1 \to P'$ vérifiant $p'k = 0_{K\to P'}$, il existe une unique $s : P \to P'$ telle que $sp = p'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "0"'] \arrow[ddrr, bend right, "0"'] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, "p'"] & X_2 \\
& P \arrow[dr, dashed, "s"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}$$

Propriétés

1. Toute image est un monomorphisme.
2. Toute coimage est un épimorphisme.

Propriété. *(Monomorphismes et coimages)*

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Coim}(f) = (X,id_X)$.

Propriété. *(Épimorphismes et images)*

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. Alors f est un monomorphisme si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = (Y,id_Y)$.

Corollaire

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. **Si** f est un isomorphisme **alors** $\mathrm{Im}(f) = Y$ et $\mathrm{Coim}(f) = X$.

Exercice 46 *(M)*

ontrer que la réciproque est fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Il suffit de considérer...

Propriétés. *(Morphisme nul par image ou coimage)*

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie ayant un objet nul et dans laquelle tout morphisme admet un noyau et un conoyau, ou seulemnt ceux mis en jeu ici. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

1. $f = 0_{X \to Y}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = 0$.
2. $f = 0_{X \to Y}$ si et seulement si $\mathrm{Coim}(f) = 0$.

▷ Preuve similaire aux raisonnements précédents. ■

Exercice 47

Si (Q,i) est la coimage de f et (I,i) l'image de f, a-t-on $Q = \mathrm{Coim}(i)$? De même, si (P,π) est le conoyau de f et (K,k) le noyau de f, a-t-on $P = \mathrm{Coker}(k)$?

Fait. *(Morphisme canonique de la coimage dans l'image)*

Tout morphisme $f : X \to Y$ admettant noyau, conoyau, image et coimage se factorise en un morphisme $\overline{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ tel que $f = j\overline{f}q$.

On a $fi = 0$ donc par propriété universelle du noyau de f, $f = f_1 q$ pour un unique $f_1 : \mathrm{Coker}(i) \to Y$. On a $\pi f_1 = 0$, car $\pi f_1 q = \pi f = 0 = 0q$ et q est un épimorphisme. Donc par propriété universelle du conoyau de f, $f_1 = j\overline{f}$ pour un unique $\overline{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$.

Remarque. On aurait pu construire $\tilde{f}$ grâce à f_2. En effet, $\pi f = 0$ donc par propriété universelle du conoyau de f, $f = jf_2$ pour un unique $f_2 : X \to \mathrm{Ker}(\pi)$. On a $f_2 i = 0$, car $jf_2 i = fi = 0 = j0$ et j est un monomorphisme. Donc par propriété universelle du noyau de f, $f_2 = \tilde{f}q$ pour un unique $\tilde{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$. Par construction, on a encore $f = j\overline{f}q$.

Heureusement $\tilde{f} = \overline{f}$. En effet, $j\overline{f}q = j\tilde{f}q$, mais j et q sont respectivement un monomorphisme et un épimorphisme, d'où l'égalité.

Notons que si $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ R$, R un anneau, alors $\overline{f}$ est un isomorphisme. Cela donne envie de généraliser les catégories de modules à des catégories abéliennes vérifiant le théorème d'isomorphisme.

5.6.2.2 Définition et premières propriétés

Définition. *(Catégorie abélienne)*

Une catégorie $\mathcal{C}$ est *abélienne* si elle est additive, tout morphisme admet un noyau et un conoyau et pour tout morphisme $f : X \to Y$, le morphisme canonique $\overline{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme *(théorème d'isomorphisme)*.

Définition. ***(Catégorie préabélienne)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ est *préabélienne* si elle est additive et tout morphisme admet un noyau et un conoyau.

Exemples

1. Si R est un anneau, Mod R est abélienne. De même, R-Mod est abélienne.
2. Si R est un anneau noethérien à droite, mod R est abélienne. Si maintenant R est noethérien à gauche, R-mod est abélienne.
3. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, alors $\mathcal{A}^{\text{op}}$ est abélienne.
4. Si $\mathcal{A}$ est abélienne et I est une petite catégorie, alors $\text{Fun}(I,\mathcal{A})$ est abélienne.
5. En particulier, si T est un espace topologique, $\text{Pre}(T,\text{Ab})$ est abélienne.
6. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, la catégorie des complexes $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est abélienne.

   Si $\mathcal{J}$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie, *i.e.* une catégorie préadditive, si $\mathcal{A}$ est abélienne, alors la catégorie $\text{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ des foncteurs $\mathbb{Z}$-linéaires $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ est abélienne, car c'est une sous-catégorie pleine de $\text{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ stable par formation de biproduits. Par exemple si $\mathcal{J}$ est la $\mathbb{Z}$-catégorie libre $\mathbb{Z}\mathcal{S}/\mathcal{J}$, alors on trouve que la catégorie $\text{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{J},\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes sur $\mathcal{A}$ est encore abélienne.
7. La catégorie d'homotopie d'une catégorie abélienne n'est pas abélienne a priori.
8. Par caractérisation par les isomorphismes, Ann n'est pas abélienne.

Contre-exemple. ***(Catégorie préabélienne non abélienne)***

On considère la catégorie $\mathcal{A}$ des groupes abéliens topologiques séparés. Elle est additive et tout morphisme admet un noyau et un conoyau.
Considérons l'inclusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. On a $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Coker}(f) = \{0\}$. Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\mathbb{R} \to \text{Coker}(f)) = \mathbb{R}$ et $\text{Coim}(f) = \text{Coker}(0 \to \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, mais $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes en tant que groupes abéliens topologiques. $\square$

Contre-exemple. ***(Encore une catégorie préabélienne non abélienne)***

Soit k un corps. Soit $\mathcal{A} \subseteq \text{Fun}(\mathcal{P}(1 \to 2),\text{Mod } k)$ la sous-catégorie formée des morphismes *injectifs* $V_1 \to V_2$ entre k-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{A}$ est additive, admet tous les noyaux (on les calcule composante par composante) et tous les conoyaux (ils ne se calculent pas composante par composante en général !), mais n'est pas abélienne : considérer $(0 \to k) \xrightarrow{f} (k = k)$, $f_1 = 0$, $f_2 = id_k$.
Dans cette catégorie, les morphismes entre $V_1 \overset{f}{\hookrightarrow} V_2$ et $W_1 \overset{g}{\hookrightarrow} W_2$ sont les couples

(h_1,h_2) avec $h_1 : V_1 \to W_1$ et $h_2 : V_2 \to W_2$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & V_2 \arrow[d, "h_2"] \\ W_1 \arrow[r, "g"'] & W_2. \end{tikzcd}$$

Cette catégorie est k-linéaire par addition et multiplication scalaire des couples de morphismes qui est une opération bilinéaire par rapport à la composition ce que l'on vérifie sur chaque composante de chaque couple. Elle admet tous les biproduits finis par extension de cette propriété sur Mod k : à f et g comme précédemment, on associe $P_1 \overset{p}{\hookrightarrow} P_2$ défini par $V_1 \oplus W_1 \overset{f \oplus g}{\hookrightarrow} V_2 \oplus W_2$.

Cette catégorie admet tous les noyaux. Dans le diagramme ci-dessus, il suffit de poser $k_1 = \mathrm{Ker}(h_1) \overset{k=f_{|k_1}}{\hookrightarrow} \mathrm{Ker}(k_2) = h_2$ qui est bien définie à valeurs dans k_2 : si $h_1(x) = 0$, $g \circ h_1(x) = 0 = h_2(f(x))$ d'où $f(x) \in \mathrm{Ker}(k_2)$ et est bien injectif par restriction d'une injection.

De plus, elle admet tous les conoyaux, mais ce n'est pas si simple. Alors je me débrouille et je pose :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, hook, "f_A"'] & B_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, hook, "f_B"'] & B_1/f_B^{-1}(\mathrm{Im}(\varphi_2)) \arrow[d, hook, "f_B"] \\ A_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "p_2"'] & B_2/\mathrm{Im}(\varphi_2) \end{tikzcd}$$

car l'application induite $f : B_1/A_1 \to B_2/A_2$ ne serait a priori par injective. Il me faut vérifier que $p_2 \circ \varphi_2 = 0$, $p_1 \circ \varphi_1 = 0$ et que f_B est injective. Toutes ces propriétés sont simples, et il suffit de les écrire. Si maintenant j'ai un deuxième diagramme

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, hook, "f_A"'] & B_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, hook, "f_B"'] & Z_1 \arrow[d, hook, "f_Z"] \\ A_1 \arrow[r, "\varphi_2"'] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"'] & Z_2 \end{tikzcd}$$

qui commute, *i.e.* $\psi_1 \circ \varphi_1 = 0$, $\psi_2 \circ \varphi_2 = 0$ et $f_Z \circ \psi_1 = \psi_2 \circ f_B$. Alors on construit deux applications :

- ⋆ $\mathrm{Im}(\varphi_2) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_2)$ d'où $\overline{\psi_2} : B_2/\mathrm{Im}(\varphi_2) \to Z_2$ telle que $\overline{\psi_2} \circ p_2 = \psi_2$.
- ⋆ Soit $x \in f_B^{-1}(\mathrm{Im}(\varphi_2))$. Alors $f_Z \circ \psi_1(x) = \psi_2 \circ f_B(x) = 0$ car $f_B(x) = \varphi_2(a)$ pour un certain $a \in A$. Or f_Z est injective, donc $\psi_1(x) = 0$, donc $f_B^{-1}(\mathrm{Im}(\varphi_2)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_2)$, donc il existe $\overline{\psi_1} : B_1/f_B^{-1}(\mathrm{Im}(\varphi_2)) \to Z_1$ telle que $\overline{\psi_1} \circ p_1 = \psi_1$.

Cependant, cette catégorie n'est pas abélienne ! Considérons :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & k \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & k^2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \arrow[d, hook] \\
0 \arrow[r] & k^2 \arrow[r] & k^2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et l'on a là un monomorphisme et épimorphisme qui n'est pas un isomorphisme, car $k \not\simeq k^2$, mais on va voir que c'est toujours le cas dans une catégorie abélienne. □

Exercice 48

Dans le contre-exemple précédent, remarquer que Fun($k\mathcal{P}$,Mod k) est équivalente à Fun($\mathcal{P}$,Mod k).

Remarque importante. Une catégorie abélienne admet toutes les limites et colimites finies : elles s'expriment en termes de biproduits, noyaux et conoyaux.

5.6.2.3 Foncteurs exacts entre catégories abéliennes

Définition. ***(Foncteur exact)***

Soient $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est

1. *exact à gauche* si F préserve toutes les limites finies ;
2. *exact à droite* si F préserve toutes les colimites finies ;
3. *exact* s'il préserve toutes les limites et colimites finies, autrement dit s'il est exact à gauche et à droite.

On a donc déjà montré :

Propriété. ***(Exactitude des adjoints)***

Tout adjoint à droite est exact à gauche. Tout adjoint à gauche est exact à droite.

Exemples. ***(Foncteurs exacts)***

1. Soient A deux anneaux et X un A-module. Alors $\mathrm{Hom}_A(X,?)$: Mod $A \to$ Mod A est exact à gauche.

   C'est un adjoint à droite.

   On dira que X est *projectif* si ce foncteur est exact, *i.e.* exact à droite.
2. Soient A deux anneaux et X un A-module. Alors $\mathrm{Hom}_A(?,X)$: Mod $A \to$ Mod A est exact à gauche.

   C'est un adjoint à droite.

On dira que X est *injectif* si ce foncteur est exact, *i.e.* exact à droite.

3. Si A est un anneau, le bifoncteur $\mathrm{Hom}_A(?,-) : \mathrm{Mod}\ A \times \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ A$ est exact à gauche.

Arguments semblables.

4. Soient A,B deux anneaux non nécessairement commutatifs. Soit X un A-B-bimodule. Alors $?\otimes_A X : \mathrm{Mod}\ A \longrightarrow \mathrm{Mod}\ B$ est exact à droite, et de même $X \otimes_B ? : \mathrm{Mod}\ B \longrightarrow \mathrm{Mod}\ A$ est exact à droite.

Ce sont des adjoints à gauche.

On dira que X est *plat* si ce foncteur est exact, *i.e.* exact à gauche.

La caractérisation suivante, laissée à l'appréciation du lecteur, utilise la notion de suite exacte, définie (enfin ! on n'avait défini que les suites exactes courtes scindées) dans la section sursuivante.

Lemme. ***(Caractérisation de l'exactitude à gauche d'un foncteur)***

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact à gauche ;

(ii) F préserve les noyaux ;

(iii) pour toute suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{A}$, la suite $0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

Lemme. ***(Caractérisation de l'exactitude à droite d'un foncteur)***

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact à droite ;

(ii) F préserve les conoyaux ;

(iii) pour toute suite exacte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, la suite $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

Lemme. ***(Caractérisation de l'exactitude d'un foncteur)***

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact ;

(ii) F préserve les noyaux et préserve les conoyaux ;

(iii) pour toute suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, la suite $0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

5.6.2.4 Théorème de plongement de Freyd-Mitchell

On dispose, pour simplifier les choses, du métathéorème suivant :

Théorème. ***(Freyd-Mitchell)***

Toute catégorie abélienne svelte se plonge par un foncteur exact dans une catégorie de modules.

⊛ *(Idée de la preuve.)* On peut supposer $\mathcal{A}$ petite à équivalence près. Le foncteur de Yoneda $\mathcal{A} \to \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est pleinement fidèle et exact à gauche, mais pas à droite. Son image est formée des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,A)$, $A \in \mathcal{A}$ qui sont exacts à gauche. Donc il induit un foncteur $\mathcal{A} \to \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$, où $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \subseteq \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est la sous-catégorie pleine des foncteurs exacts à gauche. On montre que $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est abélienne (son inclusion est exacte à gauche mais pas à droite) et que le foncteur $\mathcal{A} \to \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est exact. Bien sûr, il est aussi pleinement fidèle. Autrement dit, on considère

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}), X \mapsto X^{\wedge} \\ & \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \end{tikzcd}$$

où la ligne du haut n'est pas exacte mais la flèche du bas, si. On montre que $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est une catégorie de Grothendieck, *i.e.* elle est cocomplète, les colimites filtrantes y sont exactes et elle admet un générateur, *i.e.* un objet tel que tout objet soit quotient d'une somme infinie de cet objet. Il s'ensuit qu'elle admet un cogénérateur injectif I. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(?,I) : \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}\ R$ où $R = \mathrm{End}(I)^{\mathrm{op}}$ est exact et pleinement fidèle. Par composition, on obtient un foncteur exact et pleinement fidèle $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{Mod}\ R$. En appliquant cet argument à $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, on a terminé. ■

Remarques.

1. En particulier, une catégorie abélienne svelte, quoique définie abstraitement, est une catégorie concrète.
2. Le théorème s'applique en particulier à toute catégorie petite, ce que l'on peut vérifier pour une catégorie localement petite à agrandissement de l'univers près.

5.6.2.5 Exactitude dans les catégories abéliennes

On fixe $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition. ***(Complexe (à trois termes))***

Un *complexe à trois termes* dans $\mathcal{A}$ est la donnée de $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans $\mathcal{A}$, *i.e.* tous les autres termes et morphismes de l'objet gradué indexé par $\mathbb{Z}$ sont nuls, tel que $gf = 0 := 0_{X\to Z}$.

Propriété. ***(Complexe dans une catégorie abélienne)***

On a $gf = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-objet de $\mathrm{Ker}(g)$.

Définition. ***(Suite exacte dans une catégorie abélienne)***

On dit qu'une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{A}$ est *exacte* si $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$, léger abus pour dire : toute image de f est un noyau de g. Plus généralement, une suite quelconque de $\mathcal{A}$ est une *suite exacte* si toutes ses sous-suites à trois termes sont exactes.

Définition. ***(Suite exacte courte)***

Une *suite exacte courte* est une suite exacte de la forme $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ où 0 est l'objet nul de $\mathcal{A}$.

Fait. ***(Suite exacte $\implies$ complexe)***

Toute suite exacte est un complexe.

Il suffit bien sûr de le prouver pour une suite exacte à trois termes. Supposons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Soit le plongement $i : \mathrm{Im}(f) \to Y$ canonique. Alors $gi = 0$, mais pour $p : X \to \mathrm{Coim}(f)$ canonique, $f = i\tilde{f}p$ d'où $gf = gi\tilde{f}p = 0$.

Exercice 49 *(Autodualité de l'exactitude)*

Une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est dite *coexacte* si $\mathrm{Coim}(g) = \mathrm{Coker}(f)$. Montrer qu'une suite est exacte si et seulement si elle est coexacte.

Indication On pourra montrer que ces deux conditions sont équivalentes à une même, à savoir $\mathrm{Coker}(f)\mathrm{Ker}(g) = 0$.

Propriétés. ***(Suites exactes triviales)***

Soient $\mathcal{A} \ni X,Y$ une catégorie abélienne et $f : X \to Y$.

1. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{id_Y} Y$ est exacte si et seulement si $f = 0$.
2. $X \xrightarrow{id_X} X \xrightarrow{f} Y$ est exacte si et seulement si $f = 0$.

▷ Montrons le premier point, le second étant semblable. On a $\mathrm{Ker}(id_Y) = 0$, donc la suite est exacte si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = 0$, *i.e.* $f = 0$. ■

Lemme. *(Caractérisation des morphismes particuliers)*

Soient $\mathcal{A} \ni X,Y$ une catégorie abélienne et $f : X \to Y$.

1. f est un monomorphisme si et seulement si $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est exacte.
2. f est un épimorphisme si et seulement si $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte.
3. f est un isomorphisme si et seulement si $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte *(propriété fortement utilisée en algèbre homologique)*.

▷ Montrons le premier point, les autres étant semblables. On sait que $id_X = \mathrm{Coker}(0 \to X$, doù $\mathrm{Im}(0 \to X) = \mathrm{Ker}(id_X) = 0$. Ainsi, la suite donnée est exacte si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = 0$, *i.e.* f est un monomorphisme. ■

Fait. *(Reformulation des suites exactes courtes)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite courte dans $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

est exacte si et seulement si f est un monomorphisme, g est un épimorphisme et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

Exemples. *(Suites exactes courtes dans une catégorie abélienne)*

1. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de noyau k et de conoyau l. Les suites suivantes sont exactes :
   (i) $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y$;
   (ii) $X \xrightarrow{f}\xrightarrow{l} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$;
   (iii) $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{l} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$.
2. Soit $f : X \to Y$ une flèche.
   - Si f est un épimorphisme de noyau k, alors la suite
   $$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$
   est exacte courte.
   - Si f est un monomorphisme de conoyau l, alors la suite
   $$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{l} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$
   est exacte courte.
3. Soit $\mathcal{I}$ une petite catégorie, $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $F,G,H : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ des foncteurs additifs. Une suite $F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$ de morphismes fonctoriels (sur lesquels on peut définir la composition horizontale) est exacte dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ si et seulement si pour

tout $x \in \mathcal{I}$, la suite $F(x) \xrightarrow{\varphi_x} G(x) \xrightarrow{\psi_x} H(x)$ est $\mathcal{C}$-exacte.

4. Si $f : C_\bullet \to D_\bullet$ est un morphisme de complexes de $\mathcal{A}$, alors $0 \longrightarrow D_\bullet \longrightarrow C(f) \longrightarrow \Sigma C_\bullet \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes.

Théorème. *(Unicité de la décomposition des morphismes stricts)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive dans laquelle admettant noyau et conoyau. Soit un morphisme f de $\mathcal{C}$ s'écrivant sous la forme $f = jp$ où j est un noyau et p un conoyau. Si $f = j'p'$ où j' est un monomorphisme et p' un épimorphisme dont les départ et arrivée respectifs ne sont pas nécessairement ceux de j et p, alors il existe un isomorphe u tel que $j' = ju$ et $p = up'$.

Corollaire

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive dans laquelle admettant noyau et conoyau. Soit $f = jp$ un morphisme strict où j est un noyau et p un conoyau. Alors $j = \mathrm{Im}(f)$ et $p = \mathrm{Coim}(f)$.

Corollaire. *(Caractérisation des morphismes stricts)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive dans laquelle admettant noyau et conoyau. On dit qu'un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un *morphisme strict* s'il s'écrit $f = jp$ où j est un noyau et p un conoyau.

Alors f est strict si et seulement si $\tilde{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme.

Reformulation pratique. *(Abélianité par les morphismes stricts)*

Une catégorie abélienne est une catégorie additive dont chaque morphisme admet un noyau et un conoyau et tout morphisme est strict.

Conséquence. *(Factorisation des morphismes dans une catégorie abélienne)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit f un morphisme de $\mathcal{A}$. Alors

$$f = \mathrm{Im}(f)\mathrm{Coim}(f).$$

Lemme. *(Suite très courte à gauche dans une catégorie abélienne)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite de $\mathcal{A}$. Elle est exacte si et seulement si $f = \mathrm{Ker}(g)$.

Lemme. *(Suite très courte à droite dans une catégorie abélienne)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ une suite de $\mathcal{A}$. Elle est exacte si et seulement si $g = \mathrm{Coker}(f)$.

Corollaire. *(Caractérisation des suites exactes courtes)*

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit suite courte dans $\mathcal{A}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Cette suite courte est exacte, *i.e.* f est un monomorphisme, g est un épimorphisme et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

(ii) f est un monomorphisme et g est son conoyau.

(iii) g est un épimorphisme et f et son noyau.

(iv) $f = \mathrm{Ker}(g)$ et $g = \mathrm{Coker}(f)$.

Remarques.

1. Dans une catégorie abélienne, tout monomorphisme est le noyau de son conoyau et tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.
   En particulier, la réponse au dernier exercice de la section Images et coimages est positive.
   En effet, soit f un monomorphisme, de sorte que $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est exacte. On peut la compléter en une suite encore exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ de sorte que $f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$. L'énoncé dual s'ensuit. En particulier, dans une catégorie abélienne, les monomorphismes sont exactement les noyaux de morphismes, ou encore les égaliseurs de morphismes, et les épimorphismes sont exactement les conoyaux de morphismes, ou encore les coégaliseurs de morphismes.
2. Un morphisme dans un catégorie linéaire est un monomorphisme, respectivement un épimorphisme, si et seulement si, son noyau, respectivement son conoyau, sont nuls. Dans une catégorie abélienne, une morphisme est donc un isomorphisme si et seulement si son noyau et son conoyau sont nuls.
   En effet, il ne manque plus qu'à vérifier que si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Coker}(f) = 0$, alors f est un isomorphisme. Mais cela découle de la description des isomorphismes en termes de monos et d'épis donnée ci-après.
3. De plus, si f est un morphisme d'une catégorie abélienne, f est un monomorphisme si et seulement si $f = \mathrm{Im}(f)$ et un épimorphisme si et seulement si $f = \mathrm{Coim}(f)$. En particulier, au vu de la propriété citée, f est un isomorphisme si et seulement si $f = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Coim}(f)$ (et l'on se rend compte des abus commis).

On en déduit un fait important :

Propriété. ***(Condition nécessaire pour qu'une catégorie soit abélienne)***

Dans une catégorie abélienne, un morphisme est un isomorphisme si et seulement si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

▷ En effet, dans une catégorie abélienne, tout morphisme $f : X \to Y$ est strict, et on peut donc lui appliquer le théorème d'unicité de la décomposition des morphismes stricts. On écrit $f := id_Y f = f id_X$. Or f, id_X et id_Y sont des noyaux et des conoyaux d'après la première remarque ci-dessus, sont des monomorphismes et des épimorphismes respectivement. Ainsi, il existe u un isomorphisme tel que $uf = id_X$ et $fu = id_Y$, donc f est un isomorphisme. ■

Exercice 50 *(Monos scindés d'une catégorie abélienne)*

On se demande quels sont les monomorphismes d'une catégorie de modules : montrer que ce sont exactement les morphismes injectifs. *(En particulier, c'est vrai pour k-*Vect *et* Ab*.)* Sont-ce exactement les morphismes rétractables ?
Écrire l'énoncé dual.

5.6.2.6 Scission dans les catégories abéliennes

Définition. ***(Morphisme de suites exactes courtes)***

Un morphisme de suites exactes courtes dans $\mathcal{A}$ est un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Lemme. ***(Lemme fondamental sur les morphismes de suites exactes courtes)***

Dans le diagramme ci-dessus, ci α et γ sont des monomorphismes, respectivement épimorphismes, respectivement isomorphismes, alors β l'est aussi.

▷ Exercice facile si l'on suppose le théorème de plongement de Freyd-Mitchell, moins facile sinon. ■

Fait

Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, toute suite de la forme

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

est exacte courte.

Lemme. ***(Lemme du scindage)***

Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. On a équivalence entre :

(i) $i : A \to B$ admet une rétraction, *i.e.* $r : B \to A$ tel que $ri = id_A$;

(ii) $p : B \to C$ admet une section, *i.e.* $p : C \to B$ tel que $ps = id_C$;

(iii) la suite exacte est scindée, *i.e.* il existe un isomorphisme $\beta : B \to A \oplus C$ tel qu'on ait un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_A"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_A \\ 0 \end{pmatrix}"'] & A \oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & id_C \end{pmatrix}"'] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

▷ Rien de sorcier par rapport à ce que l'on connaît sur les modules. ■

5.6.3 Complexes sur une catégorie abélienne

5.6.3.1 Rappels sur les algèbres graduées

5.6.3.2 Notions d'algèbre homologique

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne fixée. On pourra penser à une catégorie de modules, ou à celle des groupes abéliens. On a rappelé et précisé la définition de complexe donnée dans Complexes sur une catégorie additive dans Exactitude dans les catégories abéliennes.

Définition. ***(Exactitude d'un complexe en un point)***

Un complexe $\ldots \longrightarrow X^p \longrightarrow X^{p+1} \longrightarrow \ldots$, $p \in \mathbb{Z}$, de $\mathcal{A}$ est dit *exact* en (degré) p ou (par un abus dangereux !) en X^p si le *sous-complexe* à trois objets $X^{p-1} \longrightarrow X^p \longrightarrow X^{p+1}$ est exact = une suite exacte (à trois termes), autrement dit si $\mathrm{Im}(d^p-1) = \mathrm{Ker}(d^p)$.

Définition. ***(Complexe exact, acyclique, suite exacte longue)***

Un complexe $\ldots \longrightarrow X^p \longrightarrow X^{p+1} \longrightarrow \ldots$, $p \in \mathbb{Z}$, de $\mathcal{A}$ est dit *exact* et *acyclique* si tout complexe extrait à trois termes est exact, autrement dit s'il est exact en tout point. En pratique on parle aussi de *suite exacte longue*.

Définition. ***(Cobords, cocycles, cohomologie d'un complexe)***

Soit X un complexe dans $\mathcal{A}$:

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

et pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $Z^nX = \mathrm{Ker}(d^n)$ l'objet ou espace des *cocyles* au rang n du complexe sous-objet de X^n, $B^nX = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ l'objet ou espace des *cobords* au rang n du complexe objet quotient de X^n. On pose $H^nX = \mathrm{Coker}(B^nX \to Z^nX) := Z^nX/B^nX$ la *cohomologie* ou *objet de cohomologe* au rang n du complexe, où $B^nX \to Z^nX$ est la flèche canonique construite comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{coker}(d^n) & \\
X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "q"'] & X^{n+1} \arrow[u, "\pi"'] \arrow[r, "d^{n+1}"] & {} \\
B^n = \mathrm{im}(d^n) = \ker(\pi) \arrow[ur, "j"'] \arrow[r, dashed, "h"'] & Z^{n+1}X = \ker(d^{n+1}) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

où i sont canonique, j également par construction de l'image, et q est la composée du morphisme $q' : X^n \to \mathrm{Coim}(d^n)$ avec $\tilde{d^n}$ l'isomorphisme canonique de $\mathrm{Coim}(d^n)$ à $\mathrm{Im}(d^n)$. Puisque q' est un épimorphisme, q l'est. De plus, $d^{n+1}j = 0$. En effet, $d^{n+1}jq = d^{n+1}d^n = 0 = 0q$, car $jq = d^n$, d'où le résultat en simplifiant à droite. Par ropriété universelle du noyau, il existe $h : B^{n+1}X \to Z^{n+1}X$ telle que $ih = j$. En particulier, puisque encore $jq = d^n$, $\boxed{ihq = d^n}$.

De même, soit X un cocomplexe dans $\mathcal{A}$:

$$\dots \longleftarrow X^{n-1} \xleftarrow{d^n} X^n \xleftarrow{d^{n+1}} X^{n+1} \longleftarrow \dots$$

et pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $Z^nX = \mathrm{Ker}(d^n)$ l'objet ou espace des *cyles* au rang n du cocomplexe sous-objet de X^n, $B^nX = \mathrm{Im}(d^{n+1})$ l'objet ou espace des *bords* au rang n du cocomplexe objet quotient de X^n. On pose $H^nX = \mathrm{Coker}(B^nX \to Z^nX) := Z^nX/B^nX$ l'*homologie* ou *objet d'homologie* au rang n du cocomplexe, où $B^nX \to Z^nX$ est la flèche canonique construite de manière semblable au cas des complexes.

Remarques.

1. Intéressons-nous aux complexes plutôt qu'aux cocomplexes, à dualisation près.
2. Visuellement, on a un diagramme, dit *grand diagramme de l'homologie* :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\dots \arrow[rr] & & X^{n-2} \arrow[rrr, "d^{n-2}"] \arrow[dr] & & & X^{n-1} \arrow[rrr, "d^{n-1}"] \arrow[dr] & & & X^{n} \arrow[rrr, "d^{n}"] \arrow[dr] & & & X^{n+1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \dots \\
\dots \arrow[r] & Z^{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^{n-1}X \arrow[r] & Z^{n-1}X \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^{n}X \arrow[r] & Z^{n}X \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^{n+1}X \arrow[r] & Z^{n+1}X \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^{n+2}X \arrow[r] & \dots \\
& & H^{n-2}X \arrow[ur] & & & H^{n-1}X \arrow[ur] & & & H^{n}X \arrow[ur] & & & H^{n+1}X \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

où les lignes de couleur sont exactes à tout rang et que l'on a complété d'une troisème ligne via les factorisations canoniques du conoyau : les flèches $Z^nX \to H^nX$ sont des épimorphismes. Comment construire la flèche restante ?

3. *(Caractérisation de l'acyclicité)* On voit que X est acyclique si et seulement si $B^nX \xrightarrow{\sim} Z^nX$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, *i.e.* $H^nX = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Tout morphisme de complexe $f : X \to Y$ engendre un double carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z^nX \arrow[r] \arrow[d, dashed, "Z^nf"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\
Z^nY \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

et donc un morphisme induit $Z^nf : Z^nX \to Z^nY$ de $\mathcal{A}$.

En effet, notons $y = f^n i$ où i est le noyau de X^n. Notons de même i' le noyau de Y^n. Alors $d_Y^n y = d_Y^n f^n i = f^{n+1} d_X^n i = f^{n+1} 0 = 0$, donc puisque $Z^nY = \mathrm{Ker}(d_Y^n)$, il existe $u : Z^nX \to Z^nY$ tel que $i'u = y$, *i.e.* $i'u = f^n i$. Il suffit de poser $Z^nf = u$.

De même, il engendre un double carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r] \arrow[d, "f^n"'] & BX^n \arrow[d, dashed, "B^nf"] \\
Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r] & BY^n
\end{tikzcd}$$

et donc un morphisme induit $B^nf : B^nX \to B^nY$ de $\mathcal{A}$.

Semblable à ce qui précède.

Enfin, on a un morphisme induit par Z^nf noté $H^nf : H^nX \to H^nY$ dans $\mathcal{A}$.

Notons $h : B^nX \to Z^nX$ et $h' : B^nY \to Z^nY$ canoniques :

$$\begin{tikzcd}
B^nX \arrow[r, "h_X^n"] \arrow[d, "B^nf"'] & Z^nX \arrow[r, "q"] \arrow[d, "Z^nf"] & \mathrm{coker}(h_X^n) = Z^nX/B^nX \arrow[d, dashed, "H^nf"] \\
B^nY \arrow[r, "h_Y^n"'] & Z^nY \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{coker}(h_Y^n) = Z^nY/B^nY
\end{tikzcd}$$

de sorte que $(\pi Z^nX)h = \pi h' B^nf = 0B^nf = 0$, qui nous permet de factoriser πZ^nX en H^n : $\mathrm{Coker}(h) \to but(\pi)$. Le diagramme présenté est bien commutatif, car il abrège la réunion des deux diagrammes précédents et du grand diagramme de l'homologie.

On a donc trois foncteurs additifs Z^n,B^n,H^n de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}$, respectivement appelés *foncteur cocycle,foncteur cobord* et *foncteur cohomologie*.

Fait. ***(Fonctorialité de l'homologie)***

L'homologie est une notion fonctorielle.
Plus précisément, pour tous morphismes de complexes $f : C \to C'$, $g : C' \to C''$, pour tout $n \in N$, $H^n(g \circ f) = H^n(g) \circ H^n(f)$ et $H^n(id_C) = id_{H^n(C)}$.

Corollaire

Tout diagramme commutatif de complexes induit un diagramme commutatif en homologie.

Remarque. Un complexe de différentielle toujours nulle coïncide avec son homologie.

Propriétés. ***(Exactitude du foncteur cocycle, exactitude du foncteur cobord)***

1. Z^n est exact à gauche.
2. B^n est exact à droite.

Exercice 51

Montrer qu'en général, H^n n'est exact ni à gauche ni à droite.

Aucun de ces trois foncteurs n'est cohomologique : ça n'aurait aucun sens, car $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ n'est pas triangulée.

On rappelle que le conoyau d'homotopie permet d'énoncer la caractérisation suivante : un morphisme de complexes $g : X \to Y$ est homotope à 0 si et seulement si g se factorise dans $C(id_X)$.

Lemme. ***(Acyclicité des cônes d'identité)***

Soit X un complexe de $\mathcal{A}$. Le complexe $C(id_X)$ est acyclique.

▷ Soit $C = C(id_X)$. Alors C est isomorphe à C' :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{degré } n & \text{degré } n+1 & \\
C = (\dots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \dots) \\
C' = (\dots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] & \dots)
\end{tikzcd}$$

où les flèches de la première ligne sont de la forme $\begin{pmatrix} d & id \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, celles de la deuxième ligne de la forme

$\begin{pmatrix} 0 & id \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et les flèches verticales de la forme $\begin{pmatrix} id & 0 \\ \alpha & id \end{pmatrix}$ et clairement $B^nC' \simeq X^n \simeq Z^nC'$ donc $H^nC \simeq H^nC' = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ■

Lemme

Si $f : X \to Y$ est homotope à 0, alors $H^n f = 0 : H^n X \to H^n Y$.

▷ On a une factorisation $f = g$ canonique : $X \to C(id_X) \xrightarrow{g} Y$. Ainsi $H^n f$ se factorise à travers $H^n C(f) = 0$. ■

Remarque. Ainsi, le foncteur $H^n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ se factorise dans $\mathcal{H}(\mathcal{A}) : \mathcal{C}(\mathcal{A})/htp_0$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "H^n"] & \\ \mathcal{H}(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^n"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

et l'on note encore H^n ce factorisé.

5.6.3.3 Quasi-isomorphismes

Définition. ***(Quasi-isomorphisme)***

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est un *quasi-isomorphisme* s'il induit un isomorphisme en homologie, c'est-à-dire si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme induit $H_n(f) : H^n(X) \to H^n(X)$ est un isomorphisme.

Fait

Tout isomorphisme de complexes est un quasi-isomorphisme.
Cela vient de la fonctorialité de H^n ! En effet, $f \circ g = id_{\mathcal{C}}$, d'où $f_* \circ g_* = id_H$ en homologie, de même dans l'autre sens ; donc, f est à induction près un isomorphisme en tout degré sur l'homologie, autrement dit un quasi-isomorphisme.

Contre-exemple. ***(Quasi-isomorphisme $\not\Longrightarrow$ isomorphisme de complexes)***

Le complexe de chaînes singulières d'un espace topologique ponctuel est quasi-isomorphe à $\mathbb{Z}$ vu comme complexe concentré en degré nul. Pourtant, on a là deux complexes non isomorphes. □

Et oui ! On rappelle qu'un monoïde quotient a plus d'inversibles a priori que sa base.

Propriété. ***(Équivalence d'homotopie $\Longrightarrow$ quasi-isomorphisme)***

Toute équivalence d'homotopie de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est un quasi-isomorphisme.

Contre-exemple. ***(Quasi-isomorphisme $\not\Longrightarrow$ équivalence d'homotopie)***

La réciproque est fausse : un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie. Et même, l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque. De plus, ces deux énoncés sont équivalents !

On renvoie à la théorie de l'homologie singulière pour plus de renseignements et des illustrations qui seront de toute façon plus parlante que des exemples hors-sol donnés ici. $\square$

Dans certains cas particulièrement favorables :

Proposition. ***(Homologie en milieu libre sur un anneau principal)***

Deux complexes différentiels de modules libres sur un anneau principal, par exemple des groupes abéliens libres, des espaces vectoriels, sont homotopiquement équivalents si et seulement s'ils ont la même homologie.

Contre-exemple. ***(Même homologie $\not\Longrightarrow$ quasi-isomorphes)***

Les deux complexes de groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ont même homologie sans qu'il existe de quasi-isomorphisme entre eux dans un sens ou dans l'autre. $\square$

5.6.3.4 Complexes contractiles

Définition. ***(Complexe contractile)***

Un complexe X est dit *contractile* si c'est un objet nul dans $\mathcal{HA}$, *i.e.* si $id_X \sim 0$.

Conséquence

Tout complexe contractile est acyclique.

Remarque. Un complexe à trois termes

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

est acyclique si et seulement si la suite $0 \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ est exacte. De même, **un complexe à trois termes de la forme ci-dessus est contractile si et seulement si cette suite est exacte scindée.**

Propriété. ***(Cône d'une équivalence d'homotopie)***

Le cône d'une équivalence d'homotopie est contractile.

On conseille au lecteur de se rappeler la définition d'ESPACE TOPOLOGIQUE CONTRACTILE ; elle guide nos définitions qui, sans leur connaissance, risquent de devenir de plus en plus abstraite.

5.6.3.5 Théorème fondamental de l'algèbre homologique

Lemme. ***(Lemme du serpent dans une catégorie abélienne)***

Considérons le diagramme commutatif dans $\mathcal{A}$ de lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "p'"'] & C'. & \end{tikzcd}$$

Alors il existe un morphisme canonique $\mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha)$ dit *connectant*, fonctoriel en le diagramme tel que la suite

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\gamma)$$

soit exacte.

$\triangleright$ On considère, comme on le peut, que $\mathcal{A}$ est exactement plongée dans une catégorie de modules. Alors δ est construite comme dans le lemme du serpent pour les modules. ■

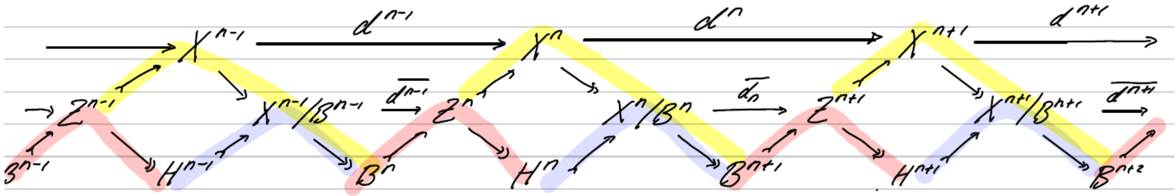
Théorème. ***(Théorème fondamental de l'homologie (TFAH))***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Toute suite exacte courte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ de complexes de cochaînes, *i.e.* de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, engendre une suite exacte longue en homologie, par le procédé suivant : il existe des morphismes canoniques $\delta^n : H^nC \to H^{n+1}A$, fonctoriels en la suite, tels que la suite

$$\ldots \longrightarrow H^nA \xrightarrow{H^ni} H^nB \xrightarrow{H^np} H^nC \xrightarrow{d^n} H^{n+1}A \longrightarrow \ldots$$

qui continue en $n \in \mathbb{Z}$, soit exacte.

▷ On se rappelle que pour tout complexe (X,d_X), on a le grand diagramme de l'homologie explicité en remarques sous la définition d'hommologie. Il vient en fait d'un diagramme encore plus grand :



où les suites colorées sont indépendemment exactes. Ainsi, la séquence donnée en énoncé donne des diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& H^{n-1}A \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}B \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}C \arrow[d] \arrow[dddll, "\delta^{n-1}"] & \\
& B^nA \arrow[r] \arrow[d] & B^nB \arrow[r] \arrow[d] & B^nC \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^nA \arrow[r] \arrow[d] & Z^nB \arrow[r] \arrow[d] & Z^nC \arrow[d] & \\
& H^nA \arrow[r] \arrow[d] & H^nB \arrow[r] \arrow[d] & H^nC \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

aux lignes et colonnes exactes, les flèches $H^n \to X^n/B^n$ étant données par le troisème théorème d'isomorphisme. Le lemme du serpent engendre donc les morphismes requis δ^{n-1}. ■

VOC Au regard de son lien puissant avec lui, le TFAH est aussi appelé lemme du serpent plus simplement.

Exhiber une suite exacte (longue) est une technique fondamentale.

Méthode. ***(Informations issues de la SEL en homologie)***

Sous couvert de certains termes nuls, on peut montrer que
- ⋆ une flèche $A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ est un épimorphisme ;
- ⋆ une flèche $0 \longrightarrow A \longrightarrow B$ est un monomorphisme ;
- ⋆ deux objets $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ sont isomorphes ;
- ⋆ si l'on a deux suites exactes courtes de complexes et un morphisme entre les deux qui est un quasi-isomorphisme sur deux des termes intérieurs, par fonctorialité et lemme des cinq, les deux suites exactes longues sont quasi-isomorphes *i.e.* isomorphes teermes à termes.

Si l'une des flèches est nulle, cela implique l'injectivité ou la surjectivité d'une flèche mais pas la nullité d'un terme. Si l'un des termes est nul, c'est bien plus fort, car cela implique la nullité d'au moins deux flèches !

Corollaire. ***(Dévissage des complexes de modules)***

Soit C un complexe de modules. Soit C' un sous-complexe de C. Si C' est acyclique, alors C est quasi-isomorphe à C/C'.
Réciproquement, si C/C' est acyclique, alos C' était quasi-isomorphe à C.

$\triangleright$ On a la suite exacte courte $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C/C' \longrightarrow 0$ et on considère la suite exacte longue correspondante en homologie. ■

Citons également au passage :

Propriété. ***(Quasi-isomorphismes nuls)***

Un complexe est acyclique si et seulement s'il est quasi-isomorphe au complexe identiquement nul.

$\triangleright$ Voyons-le indépendemment. Le sens réciproque est immédiat, car le complexe identiquement nul est d'homologie nul. Pour le sens direct, il suffit de poser le morphisme nul du complexe en question vers le complexe nul. Il induit tout bonnement des morphismes nuls qui sont des isomorphismes en homologie, puisque tout est nul. ■

Corollaire. ***(Caractérisation des quasi-isomorphismes par le cône)***

Un morphisme de complexes $f : X \to Y$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône $C(f)$ est acyclique.

$\triangleright$ On a une suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} \Sigma X \longrightarrow 0$ où $C(f) = Y \oplus \Sigma X$ est un objet gradué, $i = \begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}$ et $p = \begin{pmatrix} 0 & id \end{pmatrix}$. Il engendre une suite exacte longue en homologie $\dots \longrightarrow H^nY \xrightarrow{H^ni} H^nC(f) \xrightarrow{H^np} H^n\Sigma X \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}Y \xrightarrow{H^{n+1}i} H^{n+1}C(f) \xrightarrow{H^{n+1}p} \dots$. On peut vérifier que, grâce à l'isomorphisme $H^n\Sigma X \xrightarrow{\sim} H^{n+1}X$, le morphisme δ^n peut être identifié à $H^{n+1}f$. Clairement, on a $H^nC(f) = 0$ pour tout entier n, si et seulement si δ^n est inversible pour tout entier. ■

Exercice 52

Calculer l'homologie du cône et du cocône du morphisme $M \xrightarrow{0} N$ où M,N sont deux modules considérés comme des complexes concentrés.

$\triangleright$ **Éléments de réponse.**

Pour faire le lien, on pourra remarquer que $H_*(coC(f)) \simeq H* + 1(C(f))$.

Lemme

Soit $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes. Alors le morphisme $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} : C(i) \to W$ est un quasi-isomorphisme.

▷ On a un morphisme de suites exactes de complexes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "id_U"] \arrow[d, "id_U"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"'] & U \arrow[r, "p"'] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui, en formant les cônes sur les morphismes verticaux, nous donne une suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow C(id_U) \longrightarrow C(i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}} W \longrightarrow 0$. Puisque $C(id_U)$ est contractile, donc acyclique, il suit que $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ est un quasi-isomorphisme. ■

Remarque. En d'autres mots, si $i : U \to V$ est un monomorphisme, alors son conoyau d'homotopie $C(i)$ est canoniquement quasi-isomorphe à son conoyau au sens strict du terme $\mathrm{Coker}(i)$.

Cette caractérisation des quasi-isomorphismes par le cône simplifie nombre de preuves. Par exemple, on a la

Propriété. ***(Caractérisation homologique des foncteurs exacts)***

Un foncteur additif entre catégories abéliennes est exact si et seulement s'il préserve les quasi-isomorphismes.

▷ Si F est exact, par définition en suites exactes, il commute au passage à l'homologie ; en particulier, il préserve les complexes acycliques. Il suffit d'utiliser maintenant le fait qu'un morphisme est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône est acyclique, et que tout foncteur sur des complexes de chaînes induit par un foncteur entre des catégories abéliennes préserve les cônes.

Réciproquement, par contraposée, supposons que $0 \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow 0$ soit une suite exacte courte qui n'est pas préservée par F, de sorte que $F(a) \longrightarrow F(b) \longrightarrow F(c)$ n'est pas exacte. Or, un complexe à trois termes est exact si et seulement s'il est acyclique, ce qui est équivalent à dire qu'il est quasi-isomorphe à 0. Ainsi, F ne préserve pas les quasi-isomorphismes. ■

5.6.3.6 Propriété fondamentale 2 pour 3

Propriété. ***(Propriété** 2 **pour** 3**)***

Si l'on a six objets A,B,C,A',B',C' dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, si dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ A' \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] & C' \end{tikzcd}$$

les deux lignes sont exactes et $\hookrightarrow$, $\twoheadrightarrow$ notent respectivement les monomorphismes et les épimorphismes, alors si deux des morphismes verticaux sont des (quasi-)[a]isomorphismes, le troisième l'est aussi.

[a] Éventuellement dans le cas où en fait $A,B,C,A',B',C' \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ou $Ch(\mathcal{A})$.

▷ Conséquence directe du lemme des cinq, déjà même évoquée. ■

5.6.3.7 Lemmes diagrammatiques

Définition. ***(Propriété** 2 **pour** 6**)***

Une paire de catégories (C,W) avec $W \subseteq C$ satisfait la propriété 2 *pour* 6 si pour tous morphismes $X \to Y \to Z \to A$ tels que $X \to Z$ et $Y \to A$ sont dans W, alors toutes les flèches sont dans W.

5.6.3.8 Résolutions

Lemme. ***(Caractérisation des résolutions à gauche)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $X \in \mathcal{A}$. Une *résolution truc à gauche* de X est, de façon équivalente,

(i) un quasi-isomorphisme

$$\begin{tikzcd} X = & (\dots & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots) \\ P = \arrow[u, "\text{qis}"] & (\dots & \dots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots) \end{tikzcd}$$

où les P^i sont trucs pour tout $i \in \mathbb{Z}_-$;

(ii) une suite exacte $\dots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ où les P^i sont trucs pour tout $i \in \mathbb{Z}_-$;

(iii) un complexe d'objets trucs concentré en degrés négatifs et dont l'homologie est nulle ailleurs qu'en 0, où elle vaut X.

Dualement :

Lemme. ***(Caractérisation des résolutions à droite)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $X \in \mathcal{A}$. Une *résolution truc à droite* de X est, de façon équivalente,

(i) un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} X = & (\ldots & \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow ...) \\ {\scriptstyle \text{qis}}\big\uparrow & & \\ I = & (\ldots & \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow ...) \end{array}$$

où les I^i sont trucs pour tout $i \in \mathbb{N}$;

(ii) une suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \ldots$ où les I^i sont trucs pour tout $i \in \mathbb{N}$;

(iii) un complexe d'objets trucs concentré en degrés positifs et dont l'homologie est nulle ailleurs qu'en 0, ou elle vaut X.

5.6.4 Notion de catégorification

Définition. ***(Catégorification abélienne)***

Soit A un anneau qui est libre en tant que groupe abélien. On suppose qu'il existe une base $(a_i)_{i\in I}$ de A telle que la multiplication soit *positive dans a*, *i.e.* que $a_ia_j = \sum_k c_{ij}^k a_k$ avec $c_{ij}^k \in \mathbb{N}$ pour tous i,j,k entiers naturels.
Soit B un A-module. Une *catégorification (abélienne) (faible)* de (A,a,B) est la donnée d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ de groupe de Grothendieck $K(\mathcal{B})$, d'un isomorphisme ϕ : $K(\mathcal{B}) \to B$ et d'endofoncteurs exacts $F_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ pour tous $i \in I$ tels que

- $\star$ le foncteur F_i relève l'action de multiplication par a_i sur le module B, plus clairement $\phi(F_i) = a_i\phi$;
- $\star$ il existe des isomorphismes naturels $F_iF_j \simeq \bigoplus_k F_k^{c_{ij}^k}$.

5.7 Catégories dérivées

5.7.1 Localisation de catégories

Définition. ***(Foncteur rendant un morphisme inversible)***

Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories. Soit s un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que F *rend s inversible* si Fs est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$.

$\longrightarrow$ *Notation.* Si S est une collection de morphismes de $\mathcal{C}$, on note $\mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine, *i.e.* contenant toutes les transformations naturelles possibles, de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ ayant pour objets les foncteurs rendant chacun tous les morphismes de S inversibles. On dit aussi que $F \in \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ *rend S inversible.*

Définition. ***(Localisation d'une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S une collection de morphismes de $\mathcal{C}$. Une *localisation (de Gabriel-Zisman)* de $\mathcal{C}$ par rapport à S est une catégorie $\mathcal{L}$ munie d'un foncteur (non nécessairement pleinement fidèle) $P : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$ rendant S inversible et universelle pour la 2-propriété suivante : pour toute catégorie $\mathcal{J}$, le foncteur $\mathrm{Fun}(\mathcal{L},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{J}), G \mapsto GP$ est une équivalence, *i.e.* le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "\forall F \text{ rendant } S \text{ inversible}"] & \\ \mathcal{L} \arrow[r, dashed, "\exists G"'] & \mathcal{J} \end{tikzcd}$$

commute à équivalence près.

Un foncteur $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une *localisation* tout court si c'est une localisation par rapport à $S_L = \{s \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}) \mid Ls \text{ est inversible}\}$.

Exemples. ***(Catégories localisées)***

1. Si $\mathcal{A}$ est additive, alors le foncteur canonique $\mathcal{CA} \to \mathcal{HA}$ est une localisation de $\mathcal{CA}$ par rapport à l'équivalence d'homotopie.

Proposition. ***(Unicité de la localisation)***

Si elle existe, une catégorie localisation est unique à équivalence canonique près.

▷ Par propriété universelle. ■

Exercice 53 *(Transitivité de la localisation)*

Soient $S_1 \subseteq S_2$ des collections de morphismes tels que les localisations $P_i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i$ par rapport à S_i existe pour $i = 1$ et 2. Soit $R : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ induit par P_2 par propriété universelle. Montrer qu'alors R est la localisation de $\mathcal{D}_1$ par rapport à $P_1(S_2)$, *i.e.* :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P_1"'] \arrow[dr, "P_2"] & \\ \mathcal{D}_1 \arrow[r, dashed, "R"'] & \mathcal{D}_2. \end{tikzcd}$$

On identifie la localisation par un détour sur les carquois.

Proposition. ***(Existence de la localisation)***

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Soit $S \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{C})$. Il existe une catégorie $\mathcal{C}[S^{-1}]$ et un foncteur $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ induisant un isomorphisme $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C}, \mathcal{J}), F \mapsto FP$ pour toute catégorie $\mathcal{J}$. En particulier, le localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S existe et est donnée par $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

▷ Soit $Q_{\mathcal{C}}$ le carquois sous-jacent à $\mathcal{C}$, et $\mathcal{P}Q_{\mathcal{C}}$ la catégorie de chemins de $Q_{\mathcal{C}}$. Soit $C : \mathcal{P}Q_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ le foncteur canonique et $\sim_{\mathcal{C}}$ la congruence sur $\mathcal{P}Q_{\mathcal{C}}$ telle que $p \sim_{\mathcal{C}} q$ si et seulement si $Cp = Cq$. Alors le foncteur C induit un isomorphisme $\mathcal{P}Q_{\mathcal{C}}/\sim_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$. Soit $Q_{\mathcal{C}}[S^{-1}]$ le carquois obtenu à partir de $Q_{\mathcal{C}}$ en ajoutant des flèches $s' : Y \to X$ pour toute flèche $s : X \to Y$ donnée par un moprhisme dans S. Soit $\sim$ la congruence sur $\mathcal{P}(Q_{\mathcal{C}}[S^{-1}])$ engendrée par $\sim_{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{P}\mathcal{C}_Q \subseteq \mathcal{P}(Q_{\mathcal{C}}[S^{-1}])$ et par $ss' \sim id_Y$ et $s's = id_X$ pour tous $s : X \to Y$ dans S. Posons $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{P}(Q_{\mathcal{C}}[S^{-1}])/\sim$. Puisque $\sim$ contient $\sim_{\mathcal{C}}$, on a un foncteur bien défini $\mathcal{C} \xrightarrow{L} C[S^{-1}]$ induit par l'inclusion $Q_{\mathcal{C}} \to Q_{\mathcal{C}}[S^{-1}]$. Il est facile de vérifier que L induit un isomorphisme $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{J} \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C}, \mathcal{J}), F \mapsto FP$ pour toute catégorie $\mathcal{J}$. ■

$\longrightarrow$ *Notation.* On note : $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{P}(Q_{\mathbb{C}}[S^{-1}])/\sim$ la catégorie localisée rapport à $S \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{C})$.

Théorème. ***(Adjonction et localisations)***

Soient $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ une paire de foncteurs adjoints avec les morphismes d'adjonction $\varepsilon : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ et $\eta : Id_{\mathcal{C}} \longrightarrow RL$. Soit S la classe des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que Ls soit inversible. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) R est pleinement fidèle ;

(ii) $\varepsilon : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ est inversible ;

(iii) L est une localisation, *i.e.* le foncteur $H : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{D}$ tel que $HP = L$ est une équivalence ;

(iv) pour toute catégorie $\mathcal{J}$, le foncteur $L^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ est pleinement fidèle.

Schématiquement :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{D} \arrow[u, shift right, "R"'] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{J}.
\end{tikzcd}$$

▷ $(i) \iff (ii)$: C'est une propriété générale des adjonctions.

$(ii) \implies (iii)$ Montrons que PR est un quasi-inverse de H. On a $HP = L$ d'où $HPR = LR$ isomorphe à $Id_{\mathcal{D}}$ par ε, par hypothèse. Visuellement,

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, shift right, "L"'] \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{D}. \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que PRH est isomorphe à $Id_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$. Puisque P induit un foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{C}[S^{-1}]) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C}[S^{-1}]), F \mapsto FP$, il suffit de montrer que $PRHP$ est isomorphe à P. Or $HP = L$, donc il faut montrer que PRL est isomorphe à P. On a un morphisme $P\eta : P \to PRL$ obtenu par $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to RL$. Il est inversible, puisque ηX appartient à S pour tout $X \in \mathcal{C}$. En effet, on a $(\varepsilon L)(L\eta) = Id_L$, et ε est inversible par hypothèse. Visuellement,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\eta"] \arrow[rr, bend right, "Id_L"'] & LRL \arrow[r, "\varepsilon L"] & L. \end{tikzcd}$$

$(iii) \implies (iv)$ Par hypothèse, H est une équivalence donc l'implication suit du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J}) \arrow[r, "H^*"'] \arrow[dr, "L^*"'] & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{J}) \arrow[d, hook, "P^*"] \\ & \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J}). \end{tikzcd}$$

$(iv) \implies (ii)$ Le foncteur $L^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J})$ est adjoint à droite de $R^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J})$ avec les morphismes d'adjonction donéns par $(R^*L^*)(F) = FLR \xrightarrow{F\varepsilon} F = (Id)^*F$ et $(Id) * G = G \xrightarrow{G\eta} GRL = (L^*R^*)(G)$. Ainsi, il est pleinement fidèle, et donc le morphisme $R^*L* \to Id$ doit être inversible par l'équivalence $(i) \iff (ii)$. Ceci implique que ε est inversible, car l'on peut prendre $F = Id_{\mathcal{D}}$. ■

Corollaire. ***(Pullback d'une localisation)***

Un foncteur pullback d'une localisation est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée des foncteurs qui envoient la classe des équivalences faibles sur les équivalences.

Exemple. ***(Localisation d'une catégorie de modules et modules de fractions)***

Soit A un anneau commutatif. Soit S_0 une partie multiplicative de A, et l'on note A_{S_0} la localisation de A en S_0. Le morphisme canonique $A \to A_{S_0}$ induit un foncteur pleinement fidèle $R : \mathrm{Mod}\ A_{S_0} \to \mathrm{Mod}\ A$. Son adjoint à droite $L : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ A_{S_0}$ envoie M sur la localisée $M_{S_0} = M_R \otimes R_{S_0}$. On voit que $\mathrm{Mod}\ A_{S_0}$ est alors la localisation de la catégorie $\mathrm{Mod}\mathbb{A}$ par rapport aux morphismes $f : M \to M'$ tels que $f_{S_0} : M_{S_0} \to M'_{S_0}$ soit inversible.

5.7.2 Catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, que l'on pourra supposer petite.

La notion suivante est due à Grothendieck au début des années 1960.

Définition. *(Catégorie dérivée)*

La *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$ est la localisation $\mathcal{DA}$ de la catégorie de complexes de $\mathcal{A}$ par rapport à la collection Qis des quasi-isomorphismes, soit $\mathcal{DA} := (\mathcal{CA})[\mathrm{Qis}^{-1}]$.

Remarques.

1. Par définition, les foncteurs cohomologie $H^n : \mathcal{CA} \to \mathcal{A}$ rendent tous les quasi-isomorphismes inversibles. Ainsi, ils induisent des foncteurs $H^n : \mathcal{DA} \to \mathcal{A}$. Il suit qu'un morphisme de $\mathcal{CA}$ est inversible dans $\mathcal{DA}$ si et seulement s'il est est un quasi-isomorphisme.
2. Toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme et le foncteur $\mathcal{CA} \to \mathcal{HA}$ est la localisation de $\mathcal{CA}$ par rapport aux équivalence d'homotopie. Il suit que $\mathcal{DA}$ est aussi la localisation de $\mathcal{HA}$ par rapport aux classes d'homotopie des quasi-isomorphismes, soit $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\overline{\mathrm{Qis}}^{-1}]$.
   Cette description est quant à elle due à Verdier, en 1962. Le grand avantage de cette définition est qu'elle permet souvent de décrire les morphismes dans $\mathcal{DA}$ relativement explicitement, comme on le voit dans le théorème suivant.

Exercice 54 *(La catégorie dérivée n'est pas gentille)*

1. Donner un exemple d'une catégorie dérivée n'admettant pas certains noyaux.
2. Montrer que si R est un anneau, $\mathcal{D}(R)$ admet tous les noyaux si et seulement si R est semi-simple.
3. Montrer qu'une catégorie dérivée n'admet aucun conoyau.

Autres avantages techniques : souvent, le *foncteur (canonique) de projection* $Q : \mathcal{HA} \xrightarrow{Q} \mathcal{DA}$ a un adjoint à gauche ou à droite (qui est alors automatiquement pleinement fidèle !). D'autre part, on a toujours un « calcul de fractions » pour les qis dans $\mathcal{HA}$ pour calculer les morphismes de $\mathcal{DA}$, ce que l'on détaillera dans l'une des sections suivantes.

Théorème. *(Adjoints des foncteurs de projection)*

(a) *(Cas des modules)* Soit R un anneau. Le foncteur de projection $Q : \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R$ admet un adjoint à gauche $X \mapsto \underline{p}X$ et un adjoint à droite $X \mapsto \underline{i}X$.

(b) *(Cas des faisceaux)* Soit T un espace topologique. Alors le foncteur de projection $\mathcal{H}(\mathrm{Sh}(T)) \to \mathcal{D}(\mathrm{Sh}(T))$ admet un adjoint à droite $X \mapsto \underline{i}X$.

Remarques.

1. Dans les deux cas, le foncteur canonique $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ est un adjoint à gauche donc commute avec les coproduits.
2. Par le théorème sur les adjoints des localisations, les foncteurs $\underline{p}$ et $\underline{i}$ sont pleinement fidèles, de sorte que $\mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R, X \mapsto \underline{p}X$ est un plongement, de même

pour $\mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R, X \mapsto \underline{i}X$.

Remarque. Soit $X = (\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots)$ un complexe contré en degré nul. Alors $\underline{i}X$ est homotopiquement équivalent à $(\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots)$ la *résolution injective de M* et $\underline{p}X$ est homotopiquement équivalent à $(\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow \dots)$ la *résolution projective de M*.

5.7.3 Projectifs et injectifs

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, typiquement Mod R où R est un anneau ou $\mathrm{Sh}(T)$ où T est un espace topologique en vertu du double théorème qui précède.

Cette section est à lire en parallèle de Modules projectifs, d'Algèbre linéaire.

Définition. ***(Objet projectif)***

Un objet $P \in \mathcal{A}$ est *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,?) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ est exact, ou ce qui est équivalent[a], s'il est exact à droite.

[a] Voir la section intitulée Foncteurs exacts.

Proposition. ***(Caractérisation de la projectivité)***

Un objet $P \in \mathcal{A}$ est projectif si et seulement si P a la propriété de relèvement par rapport aux épimorphismes $p : B \to C$, *i.e.* pour tout $f : P \to C$, il existe $\tilde{f} : P \to B$ tel que $p\tilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{f}"'] \arrow[d, "\forall f"] & \\ B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

exacte

Définition. ***(Objet injectif)***

Un objet $I \in \mathcal{A}$ est *injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ est exact, ou ce qui est équivalent[a], s'il est exact à droite.

[a] Voir la section intitulée Foncteurs exacts.

Proposition. ***(Caractérisation de l'injectivité (des modules))***

Un objet $I \in \mathcal{A}$ est injectif si et seulement si P a la propriété de relèvement par rapport aux monomorphismes $i : A \to B$, *i.e.* pour tout $g : A \to I$, il existe $\tilde{g} : B \to I$ tel que

$\tilde{g}i = g$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\forall g"'] & B. \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{g}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

exacte

Définition. ***(Module plat)***

Un R-module P, R un anneau est *plat* si le foncteur $? \otimes_R P : \mathrm{Mod}\ R \longrightarrow \mathrm{Mod}\ R$ est exact, ou ce qui est équivalent[a], s'il est exact à gauche.

[a] Voir la section intitulée FONCTEURS EXACTS.

Propriété

Tout module projectif est plat.

On peut retrouver par des raisonnements catégoriques nombre de propriétés des modules projectifs et parfois injectifs.

Exemples. ***(Projectifs, injectifs)***

1. *(Projectivité de la base)* Dans $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ R$, $P = R_R$ est projectif car $\mathrm{Hom}_R(R_R, M) \xrightarrow{\sim} M_{|\mathbb{Z}}, f \mapsto f(1)$ est un foncteur exact en $M \in \mathrm{Mod}\ R$.
2. *(Exemple fondamental d'un module de torsion injectif)* $I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_RR, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R-module à droite injectif, car $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_Z({}_RR, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_Z M \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_Z(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Visuellement,

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, two heads] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

$$l = \tilde{f}(1) \dashrightarrow f(1)$$

Donc $\mathrm{Hom}_R(?, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(?_{|\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce foncteur est exact, car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif dans la catégorie des groupes abéliens $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}\ \mathbb{Z}$. Notons qu'il n'est pourtant pas plat.
3. *(Coproduit de projectifs, produit d'injectifs)* Si $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'objets projectifs, alors $\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ est encore projectif s'il existe. En effet, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda, ?) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_\lambda, ?)$ est un produit de foncteurs exacts, donc exact, car un produit de suites exactes de groupes abéliens est exact.

Si $(I_\lambda)_{\lambda\in I}$ est une famille d'objets injectifs, alors $\prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est encore injectif s'il existe, car $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,\prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \simeq \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,I_\lambda)$.

En particulier, dans une catégorie linéaire, un biproduit quelconque d'objets projectifs est projectif s'il existe et un biproduit quelconque d'objets injectifs est injectifs s'il existe. Attention ! Les propositions (semi-)duales sont fausses ; contre-exemple : $R^{\mathbb{N}}$.

4. *(Liberté $\implies$ projectivité)* En particulier, on voit que tout module libre $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R = R^{(\Lambda)}$ est projectif.
5. On en déduit aussi que tout module $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Lambda}$ est injectif.
6. *(Projectifs et facteurs directs)* Si $P = P_1 \oplus P_2$ dans $\mathcal{A}$ est projectif, alors P_1 et P_2 sont projectifs, car si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,?) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_2,?)$ est exact alors chacun des deux est exact.

   En effet, si $A_i \xrightarrow{j_i} B_i \xrightarrow{p_i} C_i$ pour $i = 1,2$ sont des complexes de groupes abéliens telle que $0 \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{j_1\oplus j_2} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{p_1\oplus p_2} C_1 \oplus C_2 \longrightarrow 0$ est exacte, alors chaque suite $0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$ est exacte !
7. Si $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, alors $R \simeq P_1 \oplus P_2$ où $P_1 = \mathbb{Z}\times\{0\}$ et $P_2 = \{0\}\times\mathbb{Z}$. Alors P_1 et P_2 sont projectifs sans être libres. En fait, un module est projectif si et seulement si c'est un facteur direct d'un module libre.

On n'a pas de caractérisation aussi simples des modules injectifs, mais on dispose du lemme suivant :

Lemme. ***(Lemme de Baer)***

Soit R un anneau. Un R-module E est injectif si et seulement si pour tout idéal I de R, $\mathrm{Hom}_R(R,E) \to \mathrm{Hom}_R(I,E)$ est surjective.

Application. ***(Projectivité et injectivité sur un corps)***

Tous les espaces vectoriels sont projectifs et injectifs.

Exercice 55 *(Projectifs et injectifs, le cas de $\mathbb{Q}$)*

Montrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat non projectif, mais que c'est un module injectif.

Exercice 56

Montrer que toute suite exacte courte dont le quatrième terme est projectif est scindée, et que si de plus le troisième terme est projectif, alors le deuxième terme l'est.

Définition. ***(Catégorie ayant assez de projectifs)***

La catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a *assez de projectifs* si tout objet X est quotient d'un objet projectif, *i.e.* il existe un épimorphisme $p : P \to X$ où P est projectif.

Définition. ***(Catégorie ayant assez d'injectifs)***

La catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a *assez d'injectifs* si tout objet X est sous-objet d'un objet injectif, *i.e.* il existe un monomorphisme $i : X \to I$ où I est injectif.

Exemples. ***(Assez de projectifs, assez d'injectifs)***

1. $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ R$ a assez de projectifs, car tout module est quotient d'un module libre, donc projectif : $R^{(\Lambda)}$, où Λ est un certain ensemble. Mod R a aussi assez d'injectifs, ce qui est plus étonnant, mais si on pose $E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors tout module admet un monomorphisme vers $E^\Lambda = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} E$.
2. Si T est un espace topologique, alors $\mathrm{Sh}(T)$ a assez d'injectifs. Cependant, il n'a pas assez de projectifs, ce qui justifie l'étude de la cohomologie des faisceaux.
3. Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et a assez de projectifs, respectivement assez d'injectifs alors $Ch_{\leqslant 0}(\mathcal{A})$ respectivement $Ch_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes en degrés positifs sur $\mathcal{A}$ aussi. Dualement, si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs ou assez d'injectifs, alors anti-respectivement $\mathcal{C}_{\leqslant 0}(\mathcal{A})$,$\mathcal{C}_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ aussi.

   Si $X^\bullet \in Ch_{\geqslant 0}(\mathcal{A})$ et $X^i \to I^i$ est un plongement dans un injectif pour tout $i \in I$, alors $X^\bullet$ se plonge dans $I^\bullet := \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \oplus I^1 \longrightarrow I^1 \oplus I^2 \longrightarrow I^2 \oplus I3 \longrightarrow \ldots$ avec les différentielles sommées. Reste à montrer que $I^\bullet$ est injectif. C'est le coproduit des complexes $J_0^\bullet := \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$ et $J_i^\bullet := \ldots \longrightarrow 0I^i \longrightarrow I^i \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$ pour tous les $i > 0$. Puisque le produit $=$ coproduit d'injectifs est injectif, on conclut.

Méthode. ***(Passez d'assez de projectifs à assez d'injectifs)***

Utiliser le foncteur Hom.

Exercice 57

Supposons que P_0 est projectif dans $\mathcal{A}$ et que tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un coproduit $P_0^{(\Lambda)}$ de copies de $\mathcal{A}$, en particulier $\mathcal{A}$ a assez de projectifs.

1. Montrer que tout projectif P de $\mathcal{A}$ est facteur direct d'un objet $P^{(\Lambda)}$, Λ un ensemble.
2. En déduire qu'un module est projectif si et seulement si il est facteur direct d'un module libre.
3. En déduire qu'un module est injectif si et seulement si il est facteur direct d'un module de la forme $E^{(\Lambda)}$, Λ un ensemble.

5.7.4 Résolutions projectives et résolutions injectives

Soit toujours $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition. ***(Résolution projective)***

Une *résolution projective* de $X \in \mathcal{A}$ est une résolution à gauche de X par des objets projectifs de $\mathcal{A}$.

Définition. ***(Résolution injective)***

Une *résolution injective* de $X \in \mathcal{A}$ est une résolution à droite de X par des objets injectifs de $\mathcal{A}$.

Lemme

(a) Si $\mathcal{A}$ admet assez de projectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution projective.
(b) Si $\mathcal{A}$ admet assez d'injectifs, alors tout objet de $\mathcal{A}$ admet une résolution injective.

▷ Successivement :

1. On procède par récurrence : si $X \in \mathcal{A}$, il existe un épimorphisme $P^0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} X$, car $\mathcal{A}$ a assez de projectifs.
   On a la suite exacte
   $$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$
   et $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est quotient d'un projectif P^{-1}, d'où une suite exacte
   $$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow 0.$$
   On obtient
   $$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P^{-3} \arrow[rr] \arrow[d] & & P^{-2} \arrow[rr] \arrow[d] & & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\ & \ker(d^{-2}) \arrow[urr] & & \ker(d^{-1}) = \ker(\varepsilon_{-2}) \arrow[urr] & & \ker(\varepsilon_{-1}) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$
   On continue à choisir des épimorphismes $P^{-i-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(d^{-1})$, $i \leqslant -2$, pour obtenir un complexe acyclique de composantes projectifs en les degrés négatifs.
2. Se montre de la même façon. ■

Corollaire

Tout module admet des résolutions projectives et injectifs.

Les résolutions projectives ne sont pas uniques. Par exemple, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in \operatorname{Mod} \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, admet la résolution projective

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = P^{-1} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} = P^0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mais aussi

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \pi \end{pmatrix}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Lemme. ***(Relèvement des morphismes à une résolution projective)***

Soient M,N des R-modules, R un anneau, $\eta : P_* \to M$ une résolution projectif de M et $\alpha : Q_* \to N$ un quasi-isomorphisme. Pour tout morphisme de R-modules $f : M \to N$, il existe un morphisme de complexes de chaînes de R-modules $\tilde{f}_* : P_* \to Q_*$ rendant

$$\begin{tikzcd} P_* \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\eta"'] & Q_* \arrow[d, "\alpha"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

commutatif. De plus, $\tilde{f}$ est unique à homotopie de chaînes près.

Remarques.

1. On peut reformuler le lemme de la manière suivante : si P_* est un complexe de termes projectifs, si $f : Q_* \to N_*$ est un quasi-isomorphisme surjectif en tout degré, alors on a la propriété de relèvement

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & Q_* \arrow[d, "f"] \\ P_* \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & N_*. \end{tikzcd}$$

2. Les résultats duaux avec les complexes de modules injectifs, les résolutions injectives et les quasi-isomorphismes injectifs en tout degré, sont semblables.

Corollaire

Deux résolutions projectives, respectivement injectives, d'un même objet sont homotopes.

▷ On applique la proposition à $f = id : M \to M$ un module et à deux résolutions projectives, puis on invoque le théorème de Freyd-Mitchell enfin pour passer à toute catégorie abélienne. ■

Théorème

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et S un anneau. Soit $F : \mathcal{C} \to S$-Mod un foncteur exact à droite, respectivement à gauche.

1. Si P_*,Q_* sont deux résolutions projectives de $M \in \mathcal{C}$, alors il existe un quasi-isomorphisme canonique à homotopie de chaînes près $F(P_*) \to F(Q_*)$.
2. La contruction $M \mapsto F(P_*(M))$ où $P_*(M)$ est une résolution projective, respectivement injective de M induit un foncteur $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}(S)$ et en particulier les groupes d'homologie $M \mapsto H_i(F_*(P_*(M)))$ s'étendent en un foncteur $\mathcal{C} \to S$-Mod où $\mathcal{D}(C)$ est la catégorie dérivée de C.

Théorème

(a) Supposons que $\mathcal{A}$ a assez de projectifs. Pour tout complexe X borné à droite, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X,Q?) : \mathcal{H}\mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ est corepresénté : il existe un qis $\underline{p}X \xrightarrow{s} X$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}\mathcal{A}}(\underline{p}X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X,QY), f \mapsto Qf \circ (Qs)^{-1}$.

(b) Si X est concentré en degré, alors pour le qis $\underline{p}X \to X$, on peut choisir une quelconque résolution projective $P \to X$.

Par dualité, on a un théorème analogue pour les catégories abéliennes avec assez d'injectifs et les résolutions injectives.

Remarques.

1. Si on a un mophisme $X \to X_2$ où X,X_2 sont bornés à droite, dans $\mathcal{D}\mathcal{A}$, provenant par exemple d'un morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X,Q?) \longleftarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}\mathcal{A}}(X_2,Q?)$, on descend sur un morphisme de $\mathcal{H}\mathcal{A}$ donné par $\underline{p}X \to \underline{p}X_2$. De cette façon, $X \mapsto \underline{p}X$ devient un foncteur $\mathcal{D}^-\mathcal{A} \to \mathcal{H}\mathcal{A}$ où $\mathcal{D}^-\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine des complexes bornés à droite. En particulier, on obtient un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{D} \to \mathcal{H}\mathcal{A}, M \mapsto (0 \longrightarrow M \longrightarrow M) \mapsto \underline{p}M$.
   Notons que si $X \to X_i$ est un qis, alors $\underline{p}X \to \underline{p}X$ est une équivalence d'homotopie.
2. Attention, le théorème précédent sur le cas des modules Mod R et des préfaisceaux $\mathrm{Sh}(T)$ n'est pas un cas particulier de ce théorème mais un énoncé plus fort dans deux cas particuliers.

5.7.5 Foncteurs dérivés

Définition. ***(Foncteur dérivé à gauche)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et S un anneau. Soit $F : \mathcal{C} \to S$-Mod un foncteur exact à droite. *Le foncteur dérivé (à gauche)* de F est donné par $\mathbb{L}F(M) = F(P_*(M))$ où P_* est une résolution projective quelconque de M, qui est bien défini par le théorème fondamental.

Définition. ***(Foncteur dérivé à droite)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et S un anneau. Soit $F : \mathcal{C} \to S$-Mod un foncteur exact à gauche. *Le foncteur dérivé (à droite)* de F est donné par $\mathbb{R}F(M) = F(I^*(M))$ où I^* est une résolution injective quelconque de M, qui est bien défini par le théorème fondamental.

Proposition

Soit F un foncteur exact à droite. Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ est une suite exacte, on peut choisir une résolution projective de B telle que $0 \longrightarrow \mathbb{L}F_*(A) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} \mathbb{L}F_*(B) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} \mathbb{L}F_*(C) \longrightarrow 0$ est une suite exacte de complexes de chaînes. En particulier, on a une suite exacte longue naturelle en homologie :

$$\begin{aligned}
\dots &\longrightarrow H_i(\mathbb{L}F(A)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_i(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_i(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(\mathbb{L}F(A)) \\
&\xrightarrow{\mathbb{L}F(f)} H_{i-1}(\mathbb{L}F(B)) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_1(\mathbb{L}F(B)) \xrightarrow{\mathbb{L}F(g)} H_1(\mathbb{L}F(C)) \xrightarrow{\delta} F(A) \\
&\xrightarrow{F(f)} B \xrightarrow[F(g)]{} C \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Le résultat est encore vrai pour les foncteurs dérivés $\mathbb{R}F$ d'un foncteur exact à gauche.

Reformulation pratique. ***(Foncteurs dérivés)***

Si F est exact à droite et $P_\bullet(M) \to M$ une résolution projective, alors $H_0(F(P_\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $\dots \longrightarrow H_1(F(B)) \longrightarrow H_1(F(C)) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(b) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$. On note $F(P_\bullet(M)) = LF(M)$ le foncteur dérivé à gauche de F de sorte que l'homologie au i-ième rang soit définie comme étant $L^iF(M)$. En particulier, $L^0F(M) = F(M)$. De plus, si M est projectif, $L^iF(X) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}$.
Si F est exact à gauche et $M \to I^\bullet(M)$ une résolution injective, alors $H^0(I^\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow H^1(F(A)) \longrightarrow H^1(F(B)) \longrightarrow \dots$. On note $F(I^\bullet(M)) = RF(M)$ le foncteur dérivé à droite de F de sorte que la cohomologie au i-ième rang soit définie comme étant $R^iF(M)$. En particulier, $R^0F(M) = F(MX)$. De plus, si M est injectif, $R^iF(X) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}$.

Corollaire

Un foncteur exact à gauche F est exact si et seulement si R^1F est trivial.
Un foncteur exact à droite F est exact si et seulement si L^1F est trivial.

Remarque. Prenons un peu d'avance pour définir : soit M un R-module, R un anneau.

(i) On note $M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_R -$ le foncteur dérivé de $M \otimes_R -$ et $\mathrm{Tor}_i^R(M,-) = H_i(P_*(M) \otimes_R -)$ ses foncteurs i-ièmes groupes d'homologie.

(ii) On note $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_R(-,M)$ le foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ et $\mathrm{Ext}^i_R(N,M) = H^i(\mathrm{Hom}_R(N,I^*(M))) \simeq H^i(\mathrm{Hom}_R(P_*(N),M))$ ses foncteurs i-ièmes groupes de cohomologie.

Lemme

Soient R un anneau, M,N deux modules et $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(R)}(M,N[n])$$

où $N[n]$ est un complexe concentré en degré $-n$.

5.7.6 Foncteurs dérivés totaux

Lemme

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif, mais pas nécessairement exact entre catégories abéliennes. Alors pour un complexe

$$X = (\ldots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \longrightarrow \ldots,$$

la suite

$$FX := (\ldots \longrightarrow FX^{-1} \xrightarrow{Fd^{-1}} FX^0 \xrightarrow{Fd^0} FX^1 \longrightarrow \ldots$$

est encore un complexe.

▷ En effet, $Fd^n \circ Fd^{n-1} = F(d^n \circ d^{n-1}) = F(0) = 0$ par additivité. ■

Remarque importante. Pour un morphisme de complexes $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : X \to Y$, $Ff = (Ff^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes $FX \longrightarrow FY$ et l'on obtient un foncteur additif $F : \mathcal{CA} \to \mathcal{CB}$, noté encore F. On peut vérifier grâce à l'additivité qu'il se factorise en $\mathcal{HA} \to \mathcal{HB}$, autrement dit qu'il envoie les morphismes homotopes à zéro de $\mathcal{CA}$ sur ceux homotopes à zéro de $\mathcal{CB}$. Il induit donc un foncteur noté encore F qui descend sur $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\mathrm{Qis}^{-1}] = (\mathcal{HB})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ si F est exact : il préserve alors les noyaux et les conoyaux et donc $H^n(FX) \simeq F(H^nX)$ pour tout $X \in \mathcal{HA}$ et F envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes et induit donc un foncteur $\mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$ dit *foncteur dérivé*.

Les foncteurs qui nous intéressent comme $? \otimes_A X$, $\mathrm{Hom}_B(X,?)$, les sections globales $\Gamma(T,?) : \mathrm{Sh}(T) \to \mathrm{Ab}, F \mapsto \Gamma(T,F) = F(T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(T)}(\underline{\mathbb{Z}}_T,F)$ où $\underline{\mathbb{Z}}_T$ est le faisceau localement constant de valeur $\mathbb{Z}$, faisceautisé du préfaisceau constant de valeur $\mathbb{Z}$, ne sont pas exacts en général...

Définition. ***(Foncteur dérivé à droite total)***

Supposons que $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ admette un adjoint à droite $\underline{i} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$. Alors le *foncteur dérivé à droite total* $\underline{R}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$ est défini comme la composée $\mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{i}} \mathcal{HA} \xrightarrow{F} \mathcal{HB} \xrightarrow{Q} \mathcal{DB}$.
Plus généralement, le *i-ième foncteur dérivé à droite* $\underline{R}^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la composée $\mathcal{A} \to \mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{R}F} \mathcal{DB} \xrightarrow{H^i} \mathcal{B}$.

Définition. ***(Foncteur dérivé à gauche total)***

Supposons que $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ admette un adjoint à gauche $\underline{p} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$. Alors le *foncteur dérivé à gauche total* $\underline{L}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$ est défini comme la composée $\mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{p}} \mathcal{HA} \xrightarrow{F} \mathcal{HB} \xrightarrow{Q} \mathcal{DB}$.
Plus généralement, le *i-ième foncteur dérivé à gauche* **avec un indice en bas** $\underline{L}_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la composée $\mathcal{A} \to \mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{L}F} \mathcal{DB} \xrightarrow{H^{-i}} \mathcal{B}$.

$\longrightarrow$ **Notations.** *(Foncteurs* Ext *et* Tor*)* Si A,B sont deux anneaux, X un A-B-bimodule, on note

$$\boxed{\mathrm{Ext}^i_B(X,N) := (\underline{R}^i\mathrm{Hom}_B(X,?))(N)}$$

le foncteur d'*extension*[1] pour tout $N \in \mathrm{Mod}\ B$ et

$$\boxed{\mathrm{Tor}^A_i(M,X) = (\underline{L}_i(? \otimes_A X))(M)}$$

le foncteur de *torsion*[2] pour tout $M \in \mathrm{Mod}\ A$.

Les foncteurs Tor_* sont des foncteurs d'homologie tandis que les foncteur Ext^* sont des foncteurs de cohomologie.

VOC Si T est un espace topologique, $F \in \mathrm{Sh}(T)$, on appelle *i-ième foncteur cohomologique de* F, et l'on note

$$H^i(T,F) = (\underline{R}^i\Gamma(T,?))(F).$$

En particulier, on note $H^i(T,\mathbb{Z}) = H^i(T,\underline{\mathbb{Z}}_T)$ et on appelle ces groupes la *cohomologie de* T *à coefficients entiers.*

Exemples. ***(Foncteurs dérivés)***

1. Dans le cas particulier $A = \mathbb{Z}$, un A-B-bimodule est simplement un B-module et l'on trouve : $\mathrm{Ext}^n_B(M,N) = (\underline{R}^n\mathrm{Hom}_B(M,?))(N)$ dont on peut montrer qu'il est isomorphe à $\underline{R}^n(\mathrm{Hom}_B(?,N))(M)$.
2. On peut même montrer que pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ arbitraire et $L,M \in \mathcal{A}$,

[1] Car il mesure le nombre d'extensions de N par X.
[2] Car il n'apparaissent et ne mesurent que dans la torsion.

on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(L,\Sigma^n M) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,M) \text{ si } n = 0 \\ \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(L,M) \text{ si } n > 0 \end{cases}$ où le foncteur dérivée est défini grâce au calcul des fractions décrit dans la suite.

Cependant, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(L,M)$ peut être « large » même si $\mathcal{A}$ est localement petite.

Théorème

Pour $F : A \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ une paire de foncteurs adjoints entre catégories abéliennes, si $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ a un adjoint à droite $\underline{p}$ et $Q : \mathcal{HB} \to \mathcal{DB}$ un adjoint à droite $\underline{i}$. Alors les foncteurs dérivés $\underline{L}F : \mathcal{DA} \rightleftarrows \mathcal{DB} : \underline{R}G$ sont canoniquement adjoints.

▷ Il est aisé de voir en utilisant les morphismes d'adjonction que $F : \mathcal{HA} \rightleftarrows \mathcal{HB} : G$ sont canoniquement adjoints. Soit $X \in \mathcal{DA}$ et soit $Y \in \mathcal{DB}$. On a des bijections $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(\underline{L}F(X),Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(QFX,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(F\underline{p}X,\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(\underline{p}X,G\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,QG\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,\underline{R}GY)$. ■

5.7.7 Calcul des fractions

La théorie du calcul des fractions permet de calculer des morphismes dans $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ en utilisant des fractions *($s^{-1} \circ f, s \in \mathrm{Qis}$) de morphismes de $\mathcal{HA}$.

Définition. ***(Catégories*** $_X\mathrm{Qis}$ ***et*** Qis_X***)***

Soit $X \in \mathcal{HA}$. Soit $_X\mathrm{Qis}$ la catégorie dont les objets sont les quasi-isomorphismes $s : X \to X'$ de source X et les morphismes sont les diagrammes commutatifs
$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dd, "f"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "s'"'] & \\ & X'' \end{tikzcd}$$
de $\mathcal{HA}$.

Similairement, on définit Qis_X la catégorie des quasi-isomorphismes $X' \to X$ de but X.

Lemme

(a) Pour tout $X \in \mathcal{HA}$, les catégories Qis_X et ${}_X\mathrm{Qis}^{\mathrm{op}}$ sont filtrantes.

(b) Tout diagramme solide comme ci-dessus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Qis}\ni s"'] & Y \arrow[d, dashed, "s'"] \\ X' \arrow[r, dashed, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Qis}\ni t'"'] & Y' \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

peut être complété en un carré commutatif :

▷ Montrons le premier point du a), les preuves pour ${}_X\mathrm{Qis}^{\mathrm{op}}$ et de b) étant similaires. Considérons donc Qis_X. Soient $s_1 : X \to X_1$ et $s_2 : X \to X_2$ des quasi-isomorhismes. Formons un triangle $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix}} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix}} X_3 \xrightarrow{\Sigma} X$. Alors on a $0 = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix} = t_1 s_1 - t_2 s_2$ de sorte que le carré

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & & X_3 \\ & X_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

commute dans $\mathcal{HA}$. Si l'on aplique H^n, on trouve que la suite $0 \longrightarrow H^n X \xrightarrow{\begin{pmatrix} H^n s_1 \\ -H^n s_2 \end{pmatrix}} H^n X_1 \oplus H^n X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} H^n t_1 & H^n t_2 \end{pmatrix}} H^n X_3 \longrightarrow 0$ est exacte scindée. Ceci implique que $H^n t_1$ et $H^n t_2$ sont inversibles en tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, t_1 et t_2 sont des quasi-isomorphismes et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "s_3" description] \arrow[dr, "s_2"'] & & X_3 \\ & X_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

avec $s_3 = t_1 s_1 = t_2 s_2$ dans Qis_X. Maintenant, supposons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[urr, bend right, "s_2"'] & & \end{tikzcd}$$

soit donné dans $\mathcal{HA}$ avec $fs_1 = s_2 = gs_1$. Ceci signifie que $h = f - g$ satisfait $hs_1 = 0$. Formons un triangle $X \xrightarrow{s_2} X_1 \xrightarrow{u} N \longrightarrow \Sigma X$. Puisque $hs_1 = 0$, on factorise $h = lu$ pour un certain $l : N \to X_2$. Formons un triangle $N \xrightarrow{l} X_2 \xrightarrow{t} X_3 \longrightarrow \Sigma N$. Puisque s_1 est un quasi-isomorphisme, le complexe N est acyclique et donc t est quasi-isomorphisme. On obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \arrow[r, "t"'] & X_3. \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[urr, bend right, "s_2"'] \arrow[urrr, bend right, "s_3"'] & & & \end{tikzcd}$$

On a $t(f - g) = th = tlu = 0$, don $tf = tg$ et $s_3 = ts_2$ est un quasi-isomorphisme, puisque t et s_3 le sont. ■

Remarque. Soient $X,Y \in \mathcal{DA}$ et considérons le foncteur ${}_Y\mathrm{Qis} \xrightarrow{H_X} \mathrm{Ab}, (Y \xrightarrow{s} Y') \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y')$. On a un morhisme de foncteurs de H_X vers le foncteur constant $y\mathrm{Qis} \to \mathrm{Ab}$ de valeur $\mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ qui envoie un diagramme $\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "f"'] & & Y \arrow[ul, "s"] \end{tikzcd}$ sur le morphisme $(Qs)^{-1} \circ Qf : X \to Y$ de $\mathcal{DA}$. En effet, on a un diagramme $\begin{tikzcd} & Y_2 & \\ & Y_1 \arrow[u, "t"'] & \\ X \arrow[uur, "f_2"] \arrow[ur, "f_1"'] & & Y \arrow[uul, "s_2"'] \arrow[ul, "s_1"] \end{tikzcd}$ commutatif, d'où $(Qs_2)^{-1}(Qf_2) = Q(ts_1)^{-1}Q(tf_1) = Q(s_1)^{-1}Q(t)^{-1}Q(t)Q(f) = Q(s_1)^{-1}Q(f_1)$.

Lemme

L'application $\operatorname*{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in {}_Y\mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ est une bijection et de même pour l'application $\operatorname*{colim}_{\substack{s:X'\to X \\ \in \mathrm{Qis}_X^{\mathrm{op}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X',Y) \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$.

⊛ *(Idée de la preuve.)* On définit une catégorie $(\mathcal{HA})_{\mathrm{Qis}}$ dont les obejts sont ceux de $\mathcal{HA}$ et les morphismes $X \to Y$ sont les éléments de $\operatorname*{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in {}_Y\mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$, respectivement $\operatorname*{colim}_{\substack{s:X'\to X \\ \in \mathrm{Qis}_X^{\mathrm{op}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X',Y) \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$. Pour définir la composition, on utilise le second point du lemme précédent. On a un foncteur naturel $\mathcal{HA} \to (\mathcal{HA})_{\mathrm{Qis}}$ et l'on peut vérifier qu'il a la propriété universelle d ela localisation $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA} = \mathcal{HA}[\mathrm{Qis}^{-1}]$. ■

Corollaire

La catégorie dérivée $\mathcal{DA}$ est additive et $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ est un foncteur additif.

▷ Pour $X,Y \in \mathcal{DA}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,Y) \simeq \operatorname*{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ est une colimite filtrante de groupes abéliens et donc a une structure naturelle de groupe abélien. On vérifie que la composition y est $\mathbb{Z}$-linéaire. Ainsi, $\mathcal{DA}$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie. Puisque les colimites filtrantes commutent avec les produits finis, le foncteur $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ envoie les produits finis sur des produtis finis. Il suit que $\mathcal{DA}$ a tous les produits finis et est donc additive. ■

Cette catégorie additive est également munie d'une structure triangulée.

5.7.8 Structure triangulée de la catégorie dérivée

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On admet que :

Théorème. ***(Structure triangulée de la catégorie dérivée)***

La catégorie dérivée $\mathcal{DA}$ munie du foncteur de suspension $\Sigma : \mathcal{DA} \longrightarrow \mathcal{DA}$ induit par $\Sigma : \mathcal{HA} \to \mathcal{HA}$ et les Σ-suites $X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} Z' \xrightarrow{e'} \Sigma X'$ isomorphe dans $\mathcal{DA}$ aux images des triangles par le foncteur de projection Q est triangulée et $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ muni du morphisme identité $Q\Sigma = \Sigma Q$ est un foncteur triangle $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$.

Remarque importante. Soit $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ une suite exacte scindée de $\mathcal{CA}$. On rappelle par un ancien lemme que le morphisme de complexes $C(i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}} W$ est un quasi-isomorhisme. On peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_U"'] & V \arrow[r, "\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "id_V"'] & C(i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}"] & \Sigma U. \\
U \arrow[r, "i"'] & V \arrow[r, "p"'] & W &
\end{tikzcd}$$

Définition. ***(Triangle canonique)***

Le *triangle canonique* de $\mathcal{DA}$ associé à (i,p) est la Σ-suite

$$QU \xrightarrow{Qi} QV \xrightarrow{Qp} QW \xrightarrow{\varepsilon(i,p)} \Sigma QU$$

où $\varepsilon(i,p) = (Q\delta) \circ Q(\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix})^{-1}$.

Remarques.

1. Clairement le triangle canonique est un triangle.
2. Il suit que pour toute suite exacte scindée de $\mathcal{CA}$ et tout foncteur homologique $F : \mathcal{DA} \to \mathrm{Ab}$, on a une suite exacte longue canonique $F^{n-1}W \to F^nU \to F^nV \longrightarrow F\acute{I}nW \to F^{n+1}U \to \ldots$ où $F^n = F\Sigma^n$.
3. On peut montrer que les adjoints $\underline{p}$ et $\underline{i} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$, s'ils existent, sous-tendent des foncteurs triangles canoniques et similairement pour les foncteurs dérivés $\underline{L}F$ et $\underline{R}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$.

5.7.9 Foncteurs dérivées et calcul des fractions

Foncteurs dérivés et calcul des fractions

Les lignes qui suivent sont dues à Deligne.

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Soit $Y \in \mathcal{DA}$. On veut définir $(\underline{R}F)(Y)$ par une propriété universelle, *i.e.* comme un représentant du foncteur (cohomologique) $(\underline{r}F)(Y) : (\mathcal{DB})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$. Pour $X \in \mathcal{DB}$, on pose $(\underline{r}F)(Y) = \operatorname*{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(?,FY')$.

Alors $(\underline{r}F)(Y)$ est une colimite filtrante de foncteurs cohomologiques et donc est elle-même cohomologique. Ainsi, il a une chance d'être représentable. On dit que $\underline{R}F$ *est défini en* Y si le foncteur $(\underline{r}F)(Y)$ est représentable et dans ce cas, on définit $(\underline{R}F)(Y)$ comme un représentant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(?,(\underline{R}F)(Y)) \simeq (\underline{r}F)(Y)$. Les foncteurs dérivés définis de cette manière ont presque les mêmes propriétés que celles que l'on a lorsque le foncteur $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ a un adjoint convenable.

5.8 Catégories monoïdales

5.8.1 Définition et premières propriétés

La notion de catégorie monoïdale est la plus générale permettant de formaliser le produit entre éléments d'une catégorie.

Définition. *(Catégorie monoïdale)*

Une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie :

(i) d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, dit *produit tensoriel*,

(ii) d'un objet I appartenant à $\mathcal{C}$ dit *objet unité*,

(iii) d'un isomorphisme naturel α dit *associateur* du foncteur $(\,\cdot\,\otimes -)\otimes ?$ vers $\cdot\,\otimes(-\otimes ?)$, *i.e.* tel que pour tous objets A,B,C, $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ soit un isomorphisme,

(iv) de deux isomorphismes naturels λ et ρ induisant pour tout objet A, des isomorphismes $\lambda_A : I \otimes A \to A$ et $\rho_A : A \otimes I \to A$,

(v) *(identité du triangle)* avec pour tous objets A,B de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

(vi) *(identité du pentagone)* et pour tous objets A,B,C,D de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)).
\end{tikzcd}$$

Définition. *(Catégorie algébrique)*

Une *catégorie algébrique* est une catégorie k-linéaire et monoïdale avec des conditions de compatibilité des lois d'additivité et scalaire avec le produit tensoriel.

5.8.2 Enrichissement

L'exemple de foncteurs et de transfomations naturelles entre foncteurs explicité dans la suite laisse à penser que la structure de base de catégorie est « trop molle » sur les morphismes, car on peut indépendemment munir une classe de foncteurs de la notion de catégorie. On parlera donc de 2-*catégorie* lorsqu'on pourra définir des morphismes entre morphismes d'une catégorie. Généralisons ce processus.

Pour énoncer proprement la définition suivante, on aura besoin de la notion de catégorie monoïdale, mais il suffit d'y penser comme une catégorie munie d'un produit : en effet, dans Ens, Top ou Cat, c'est ce produit qui est le produit dans la définition d'une catégorie monoïdale *(à étudier si besoin dans la section consacrée déjà étudiée).*

Définition. ***(Catégorie enrichie)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ *enrichie* sur une catégorie monoïdale $(\mathcal{M},\otimes)$ est la donnée :

- ⋆ d'une collection d'objets identifiée à $\mathcal{C}$;
- ⋆ pour tous $x,y \in \mathcal{C}$, un objet $\hom(x,y)$ de $\mathcal{M}$;
- ⋆ pour tous $x,y,z \in \mathcal{C}$, un morphisme dit *de composition* de $\hom(b,c) \otimes \hom(a,b) \to \hom(a,c)$ dans $\mathcal{M}$;
- ⋆ pour tout $x \in \mathcal{C}$, un morphisme dit *identité* de $1_\otimes \to \hom(a,a)$ dans $\mathcal{M}$;
- ⋆ trois diagrammes commutatifs que je n'ai pas le courage d'écrire et rendant compte de l'associativité de la composition, de la neutralité à gauche de l'identité associée à x notée id_X pour tout $x \in \mathcal{C}$ et de sa neutralité à droite.

Exemples. ***(Catégories enrichies)***

1. Une catégorie enrichie sur Ens est la donnée d'une catégorie localement petite.
2. Une catégorie enrichie sur Cat est une 2-*catégorie (stricte)*.
3. Une catégorie enrichie sur Top est une *catégorie topologique*.

5.8.3 Catégorie cartésienne, exponentiation

Dans cette section, on aura cette fois besoin de la notion de produit, qui est un cas particulier de limite.

Définition. ***(Catégorie cartésienne)***

Une *catégorie cartésienne* est une catégorie munie d'un objet terminal et admettant les produits binaires.
On parle aussi de *catégorie monoïdale cartésienne*.

Exemples

1. Toute catégorie admettant les produits finis et un objet terminal, est automatiquement une catégorie monoïdale cartésienne.
2. Ce n'est pas toujous le cas : la catégorie des matrices fournit un contre-exemple.

Définition. ***(Objet exponentiel)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les produits. Soient Y,Z des objets de $\mathcal{C}$. L'*objet exponentiel* Z^Y, s'il existe, est un morphisme universel du foncteur $- \times Y$ à Z.
Autrement dit, $?^Y$ est un adjoint à droite de $- \times Y$.

Soient Z,Y deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. L'*exponentielle* de (Y,Z) est l'objet Z^Y de $\mathcal{C}$ muni du morphisme *évaluation* $e : Z^Y \times Y \to Z$ tel que pour tout obejt X et morphisme $g : X \times Y \to Z$, il existe un unique morphisme $\lambda g : X \to Z^Y$, tous deux dits *adjoints exponentiels*, tel que $e(\lambda g \times id_Y) = g$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[d, dashed, "\lambda g \times id_Y"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "e"'] & Z \end{tikzcd}$$

Définition. ***(Catégorie cartésienne fermée)***

Une *catégorie cartésienne fermée* est une catégorie cartésienne stable par exponentiation.

Proposition

Toute catégorie cartésienne fermée est enrichie au-dessus d'elle-même.

Proposition. ***(Adjonction produit-exponentielle, curryfication)***

Pour tout ensemble Y, on a une adjonction $? \times Y : \mathrm{Ens} \rightleftarrows Ens : (-)^Y$ par les bijections naturelles

$$\mathcal{F}(X \times Y,Z) \simeq \mathcal{F}(X,Z^Y)$$

pour tous ensembles X,Z, où $Z^Y := \mathcal{F}(Y,Z)$.

▷ Il suffit en effet de considérer pour $f : X \times Y \to Z$ la fonction $\check{f} : X \to Z^Y$ qui à tout $x \in X$ fait correspondre $y \mapsto f(x,y)$. La réciproque est donnée par l'application qui à $x \mapsto f_x$ fait correspondre $(x,y) \mapsto f_x(y)$. Cette construction est visiblement bifonctorielle. ■

Corollaire

Ens est une catégorie monoïdale cartésienne fermée.
En particulier elle est enrichie au-dessus d'elle-même.

Théorème. ***(Loi d'exponentiation)***

Dans toute catégorie monoïdale fermée, les bijections naturelles de l'adjonction produit-exponentielle sont internes.

▷ Il suffit de copier au mot près la preuve dans le cas de Top. ■

5.9 Faisceaux

5.9.1 Préfaisceaux

Définition. ***(Préfaisceau sur une petite catégorie)***

Soit I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *préfaisceau* sur I à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

On rappelle que si X est un espace topologique, on note $\mathrm{Open}(X)$ l'ensemble partiellement ordonné des ouverts de X et on l'identifie avec la catégorie d'ensemble ordonnée correspondante.

Définition. ***(Préfaisceau)***

Si X est un espace topologique et $\mathcal{C}$ une catégorie, un *préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$* est un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$ sur $\mathrm{Open}(X)$. Pour tout ouvert U de X, si F est un préfaisceau sur X, si $\mathcal{C}$ est concrète, on appelle *section* de U un élément de FU.

Définition. ***(Préfaisceau abélien)***

Un *préfaisceau abélien* est un préfaisceau à valeurs dans la catégorie $\mathrm{Ab} \simeq_{\mathrm{isom}} \mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ des groupes abéliens.

Remarque importante. Donc, un préfaisceau F sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ est donné par :

- ⋆ un objet $FU \in \mathcal{C}$ pour chaque ouvert U de X,
- ⋆ un morphisme $FV \to FU$ pour chaque inclusion $U \subseteq V$.

En images :

$$\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] \arrow[d, hook] & FU \\ V \arrow[r, mapsto] & FV. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On note $F_U^V : FV \to FU$ ce morphisme et on l'appelle parfois *morphisme de restriction.*

Remarquons que par hypothèse de fonctorialité $F_U^U = id_{FU}$ toujours et pour des ouverts $U \subseteq V \subseteq W$, on a

$$\begin{tikzcd} FW \arrow[r, "F_V^W"] \arrow[rr, bend right, "F_U^W"'] & FV \arrow[r, "F_U^V"] & FU \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$ d'où l'égalité $F_U^W = F_U^V \circ F_V^W$.

Exemple fondamental. ***(Préfaisceau de fonctions régulières)***

Soit X un espace topologique. Alors, si à $U \subseteq X$ ouvert, on associe $FU = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$, avec les applications de restriction naturelles, alors F est un préfaisceau sur X à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels réels.

Exemples. ***(Préfaisceaux particuliers)***

1. On appelle *préfaisceaux concrets* les foncteurs de $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})$.
2. On appelle *préfaisceaux abéliens* les foncteurs de $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ab}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$.

Reformulation pratique. ***(Morphisme de préfaisceaux)***

Si $F,G : \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ sont des préfaisceaux sur l'espace topologique X à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$, un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : F \to G$ est donné par des morphismes $\varphi U : FU \to GU$ pour chaque ouvert U de X tel que pour $U \subseteq V$, on ait un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} FV \arrow[r, "F_U^V"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & FU \arrow[d, "\varphi_U"] \\ GV \arrow[r, "G_U^V"] & GU. \end{tikzcd}$$

Deux préfaisceaux seront *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que foncteurs.

Curiosité. ***(Catégorie des préfaisceaux)***

Par extension du cas des simples foncteurs, on obtient également la *catégorie des préfaisceaux* $\mathrm{Pre}(X,\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$ sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$.

Exercice 58

Soit k un corps et $f\mathrm{Vect}_k \subseteq \mathrm{Mod}\, k$ la sous-catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie. Classifier, à isomorphisme près, les préfaisceaux à valeurs dans $f\mathrm{Vect}_k$ sur l'espace topologique ponctuel $X = \{\star\}$.

▷ **Éléments de réponse.**

Dans ce cas, $\mathrm{Open}(X) = \{\emptyset, X\}$ donc il existe un unique morphisme hors l'identité dans $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}}$ qui va de X dans $\emptyset$ (oui !). Il s'agit donc exactement, pour décrire un préfaisceau de X dans $f\mathrm{Vect}_k$, de trouver deux espaces vectoriels E et F respectivement associés à X et $\emptyset$ et d'une application linéaire $f : E \to F$. (Aux inclusions $\emptyset \subseteq \emptyset$ et $X \subseteq X$ on associe les applications linéaires id_F et id_E et on a là toutes les images des morphismes de $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}}$, et les compositions sont automatiquement respectées.) Soient deux tels préfaisceaux isomorphes par φ, données par (E,F,f) et (E',F',f'). On a donc $f' \circ \varphi_X = \varphi_\emptyset \circ f$ avec $\varphi_X : E \to E'$ et $\varphi_\emptyset : F \to F'$ des isomorphismes linéaires. En particulier, $E \simeq E'$ et $F \simeq F'$. De plus, f' et f sont conjugués sous l'action de $GL_{\dim(F)}(k) \times GL_{\dim(E)(k)}$. On peut vérifier facilement que cette condition est suffisante.

5.9.2 Fibres

Soit T un espace topologique.

Propriété. ***(Commutation des limites finies et colimites filtrantes)***

Sur Pre(T,Ens), respectivement Pre(T,Ab), les limites finies commutent avec les colimites filtrantes.

Définition. ***(Fibre)***

Soient T un espace topologique et $F : \mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, respectivement Ab, un préfaisceau sur T. Soit $x \in T$. La *fibre* ou *tige* de F en x est la colimite filtrante $F_x = \operatorname*{colim}_{U \in \mathrm{Ongd}(x)^{\mathrm{op}}} FU$.
Si $f : F \to G$ est un morphisme dans Pre(T, $\cdot$), il induit un morphisme dans $\cdot$: $f_x : F_x \to G_x$ canonique grâce à la propriété universelle de la colimite.

Exemples. ***(Fibres d'un préfaisceau)***

1. Soient T un espace topologique, $\mathbb{Z}_T$ le préfaisceau à valeurs dans Ab constant de valeur $\mathbb{Z}$ et $\underline{\mathbb{Z}}_T$ le préfaisceau *localement constant* sur T de valeur $\mathbb{Z}$: $\underline{\mathbb{Z}}_T(U) = \{f : U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ localement constante}\}$ où $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète.
   Remarquer : pour tout point $x \in T$, on a $(\mathbb{Z}_T)_x \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathbb{Z}}_T)_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, donc le monomorphisme évident $\mathbb{Z}_T \hookrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_T$ induit un isomorphisme dans chaque fibre mais ce n'est pas lui-même un isomorphisme.

Théorème. ***(Action du foncteur fibre sur les limites)***

Soient T un espace topologique et $x \in T$. Alors le foncteur Pre(T,Ens) $\to$ Ens, respectivement Pre(T,Ab) $\to$ Ab qui à $F \mapsto F_x$ préserve les limites finies et les colimites petites arbitraires.

▷ Le foncteur $F \mapsto F_x$ commutent avec les colimites arbitraires, car il est lui-même défini par une colimite, et les petites colimites commutent entre elles. D'autre part, comme cette colimite est filtrante, ce foncteur commute avec les limites, par un autre célèbre théorème de commutation. ■

Exemple

Si $f : F \to G$ est un morphisme dans $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab})$ et $x \in T$, alors

$$\underbrace{\mathrm{Coker}(F_x \xrightarrow{f_x} G_x)}_{\mathrm{colim}_I \lim_J} = \underbrace{(\mathrm{Coker}(f))_x}_{\mathrm{colim}_J \mathrm{colim}_I}$$

et

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(F_x \xrightarrow{f_x} G_x}_{\lim_I \mathrm{colim}_J} = \underbrace{(\mathrm{Ker}(f))_x}_{\mathrm{colim}_J \lim_I}.$$

On rappelle que les limites et colimites dans $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab})$ peuvent se calculer composante par composante : $(\mathrm{Ker}(f))(U) = \mathrm{Ker}(fU : FU \to GU)$ pour tout $U \subseteq T$ ouvert.

5.9.3 Faisceaux abéliens

$\longrightarrow$ *Notation.* On abrège dans cette partie $\mathrm{Pre}(X) = \mathrm{Pre}(X,\mathrm{Ab}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. De plus, pour un préfaisceau F sur X et une section $s \in FU$ pour un ouvert U de X, on note $s_{|V} \in FV$ l'image de s par l'application de restriction $F(V \subseteq U) : FU \to FV$ pour n'importe quel ouvert $V \subseteq U$.

Définition. ***(Faisceau)***

Un préfaisceau F sur X est un *faisceau* si, pour tout ouvert $U \subseteq X$ et tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U, la suite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & FU & \longrightarrow & \prod_{i\in I} FU_i & \longrightarrow & \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j) \\ & & s & \longmapsto & (s_{|U_i})_{i\in I} & & \\ & & & & (s_i)_{i\in I} & \longmapsto & (s_{i|U_i\cap U_j} - s_{j|U_i\cap U_j})_{(i,j)\in I^2} \end{array}$$

est exacte.

Remarques.

1. L'exactitude en FU signifie que si $s_1,s_2 \in FU$ sont tels que $s_{1|U_i} = s_{2|U_i}$ pour tout $i \in I$, alors $s_1 = s_2$ dans FU, *i.e.* « sur U » pour un préfaisceau de fonctions continues, exemple qu'il faut toujours garder en tête.
2. L'exactitude en $\prod_{i\in I} FU_i$ signifie que si l'on a des sections $s_i \in FU_i$ qui sont *compatibles*, au sens que $s_{i|U_i\cap U_j} = s_{j|U_i\cap U_j}$ pour tous $i,j \in I$, alors il existe une section $s \in FU$ telle que $s_i = s_{|U_i}$ pour tout $i \in I$.

3. Si F est un faisceau, alors $F(\emptyset) = 0$, car $\emptyset$ admet un recouvrement par la formule vide $(i)_{i\in\emptyset}$ et $\prod\limits_{i\in\emptyset} = 0$.

Exemples. ***(Faisceaux)***

1. *(Faisceaux de fonctions régulières)* Le préfaisceau classique $U \mapsto \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ est un faisceau.
2. Soit X un espace non connexe. Alors le préfaisceau constant $U \mapsto \mathbb{Z}$ pour tout ouvert $U \subseteq X$ n'est pas un faisceau. Par contre, le préfaisceau localement constant $U \mapsto \{f : U \mapsto \mathbb{Z} \mid f \text{ continue}\}$ est un faisceau.
3. Un préfaisceau F sur l'espace ponctuel $\{\star\}$ est un faisceau si et seulement si $F(\emptyset) = 0$.

Définition. ***(Morphisme de faisceaux)***

Un *morphisme de faisceaux* entre deux faisceaux est un morphisme sur les préfaisceaux sous-jacents.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathrm{Sh}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pre}(X)$ formée des faisceaux sur X.

Théorème. ***(Faisceautisation)***

Le foncteur inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ admet un adjoint à gauche $F \mapsto F^a$, où F^a est appelé le *faisceautisé* de F.
Autrement dit, pour tout préfaisceau F sur X, on a un morphisme universel $q : F \to F^a$ vers un faisceau F^a

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\forall g"] & \\ F^a \arrow[r, dashed, "\exists ! f"'] & G \text{ faisceau} \end{tikzcd}$$

avec une bijection
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(F^a,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(X)}(F,\mathrm{incl}(G)). \\ f & \longmapsto & f \circ q \end{array}$$

$\triangleright$ Rappelons que la fibre de F en $x \in X$ est donnée par $F_x = \operatorname{colim}\limits_{x\in V} FV$ où la colimite est formée sur la catégorie opposée de la catégorie des ouverts V contenant x. Rappelons également que cette catégorie est filtrante de façon que le foncteur $F \mapsto F_x$ commute avec les limites finies. Pour un ouvert V contenant x et $s \in FV$, on note s_x l'image de s dans F_x. On pose, pour tout ouvert U de X, $F^aU = \{t : U \to \coprod\limits_{x\in U} F_x \mid$ pour tout $x \in X$, on a $t(x) \in F_x$ et $\exists V \in \mathrm{Open}(X), \ni x$ et $s \in FV$ tel que $t(y) = s_y \quad \forall y \in V\}$.

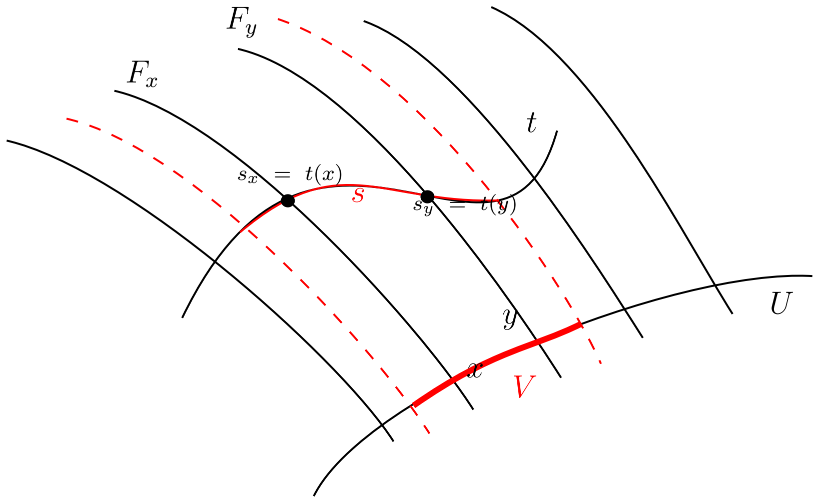


FIGURE 5.9.1 : *Illustration de la preuve précédente.* — Faisceautisé sur les fibres

L'association $U \mapsto F^a U$ s'enrichit naturellement en un préfaisceau, et ce préfaisceau est en fait un faisceau. De plus, les applications $\begin{array}{ccl} FU & \longrightarrow & F^a U \\ s & \longmapsto & x \mapsto s_x \end{array}$ forment un morphisme de préfaisceau qui est universel parmi les morphismes de F vers un faisceau. ■

Remarques.

1. La démonstration nous donne facilement que les applications $\eta_x : F_x \to (F^a)_x$ sont bijectives.
2. Un préfaisceau F est un faisceau si et seulement si la faisceautisation $\eta : F \to F^a$ est un isomorphisme.

Lemme. ***(Monomorphismes, isomorphismes de préfaisceaux et foncteur sections globales)***

Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux. Alors :

(a) f est un monomorphisme de faisceaux si et seulement si $f_x : F_x \to G_x$ est injective pour tout $x \in X$;

(b) f est un isomorphisme de faisceaux si et seulement si $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ est bijective pour tout $x \in X$.

C'est faux pour les épimorphismes ! C'est précisément de phénomène qui donne lieu à la cohomologie des faisceaux *(voir ci-après)*.

5.9.4 Applications des théorèmes sur l'abélianité aux faisceaux

Théorème

La catégorie Sh(X) des faisceaux est abélienne et une suite exacte courte $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ de faisceaux est exacte si et seulement si la suite $0 \longrightarrow F_x \longrightarrow G_x \longrightarrow H_x \longrightarrow 0$ est exacte pour tout $x \in X$.

▷ Le biproduit $F \oplus G$ dans la catégorie des préfaisceaux est un faisceau qui est biproduit dans Sh(X). Plus précsément, $(F \oplus G)(U) = FU \oplus GU$ pour tout $U \in \mathrm{Open}(X)$. ■

Remarque importante. Si $f : F \to G$ est un morphisme de faisceaux, alors son noyau calculé dans Pre(X) :

$$U \mapsto \mathrm{Ker}(fU : FU \to GU)$$

est encore un faisceau et ce faisceau est le noyau de f dans Sh(X).

Par contre, le préfaisceau conoyau

$$\mathrm{Coker}^{\mathrm{Pre}(X)}(f) : U \mapsto \mathrm{Coker}(fU : FU \to GU)$$

n'est pas, en général, un faisceau. **On obtient le conoyau de f dans Sh(X), comme le faisceautisé $(\mathrm{Coker}^{\mathrm{Pre}(X)}(f))^a = \mathrm{Coker}^{\mathrm{Sh}(X)}(f)$.**

Théorème. ***(Limites de faisceaux)***

(a) La catégorie Pre(X) est complète et cocomplète.

(b) La catégorie Sh(X) est complète et cocomplète.

(c) L'inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ préserve toutes les limites. En particulier, elle est exacte à gauche. Le foncteur de faisceautisation $F \mapsto F^a$ préserve toutes les colimites et les limites finies. En particulier, il est exact.

(d) Les colimites filtrantes dans Sh(X) sont exactes, *i.e.* si I est une catégorie filtrante, alors le foncteur $\mathrm{colim}_I : \mathrm{Fun}(I,\mathrm{Sh}(X)) \to \mathrm{Sh}(X)$ est exact.

▷ Successivement :

1. C'est un rappel : elles se calculent point par point.
2. Les limites calculées dans Pre(X) de foncteurs à valeurs dans Sh(X) sont des faisceaux qui sont les limites dans Sh(X). Pour construire les colimites dans Sh(X), on faisceautise les colimites calculées dans Pre(X).
3. L'inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ est un adjoint à droite donc préserve toutes les limites.
4. Le foncteur $F \mapsto F^a$ est un adjoint à gauche donc préserve toutes les colimites. Il préserve les limites finies, car les foncteurs fibres $F \mapsto F_x$ préservent les limites finies, puisqu'elles sont données par des colimites filtrantes. ■

Remarque. On peut détecter l'exactitude grâce aux foncteurs fibres $F \mapsto F_x$, qui commutent avec toutes les colimites. Plus de détails de ce fait dans les notes.

5.9.5 Cohomologie des faisceaux

5.10 Propriétés de relèvement des morphismes

5.10.1 Morphismes projectifs, morphismes injectifs

5.10.2 Fibrations, cofibrations

Appendice