Opérades

1 Notions introductives

1.1 Catégories monoïdales

Définition. *(Catégorie monoïdale symétrique)* Catégorie $\mathcal{M}$ munie d'un bifoncteur produit tensoriel $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, d'une unité $I \in \mathcal{M}$, d'un isomorphisme naturel α dit associateur de $(- \otimes -) \otimes -$ vers $- \otimes (- \otimes -)$ et de deux autres induisant en tout A : $\lambda_A : I \otimes A \to A$ et $\rho_A : A \otimes I \to A$ vérifiant tous kes conditions de cohérence*(identité du triangle)*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

(identité du pentagone)

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)).
\end{tikzcd}$$

Exemples. Ens munie du produit cartésien, Top munie du produit cartésien et de la topologie produit, R-Mod munie du produit tensoriel $\otimes_R$, *dg*-R-Mod de même, $Ch(R)$ munie du produit tensoriel de complexes de chaînes.

1.2 Opérades

Définition. *(Opérade)* Un opérade $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{M}$ est une collection d'objets $(\mathcal{P}(r))_{r\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ dont les éléments $p \in \mathcal{P}(r)$ représentent des opérations r-aires à une seule sortie. De plus, on a des produits ou compositions $\mathcal{P}(r) \times \mathcal{P}(l) \to \mathcal{P}(r+l-1)$. Les opérades se représentent plutôt bien avec des arbres, car ils émergent de questions d'associativité.

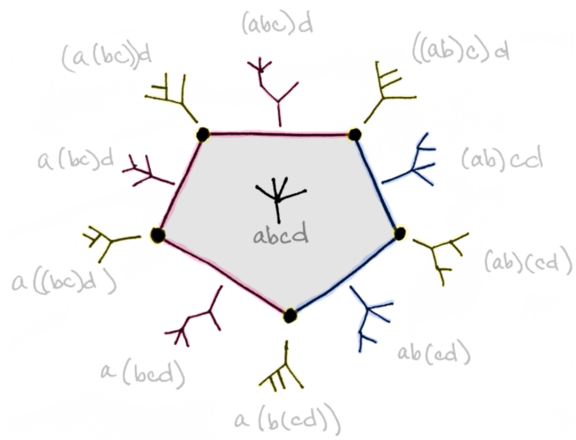


FIGURE 1.1 – *Associaèdre K_4.* —

Exemples. De nombreux exemples forment des opérades : les surfaces de Riemann pointées avec des bords, des ensembles simpliciaux, etc.

1.3 Définition des opérades par présentation

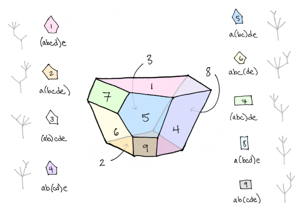
Fait. Un opérade se définit aussi par présentation par $\mathcal{P} = \mathcal{F}(M)/(R)$ où $\mathcal{F}$ est l'opérade libre qui collecte toutes les compositions formelles d'opérations génératrices, M la collection qui collecte les opérations génératrices et R l'idéal généré par les relations génératrices entre les composées de relations génératrices.
Exemples.

1. Ass $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\mu(x_1,x_2) \oplus \mathbb{K}\mu(x_2,x_1))/(\mu_1 \circ_1 \mu - \mu \circ_2 \mu)$ (*i.e.* $(\mu(\mu(x_1,x_2),x_3)) - \mu(x_1,\mu(x_2,x_3))$ où μ est le produit. Alors $\mathrm{Ass}(r) = \bigoplus_{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathfrak{S}_r} \mathbb{K}X_{i_1}...X_{i_r}$ (les variables ne commutant pas !).
2. Com $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\mu(x_1,x_2))/(\mu_1 \circ_1 \mu - \mu \circ_2 \mu)$. Alors $\mathrm{Com}(r) = \mathbb{K}X_1...X_r$.
3. Lie $= \mathcal{F}(\mathbb{K}\lambda(x_1,x_2))/(\lambda(\lambda(x_1,x_2),x_3) - \lambda(\lambda(x_1,x_3),x_2) - \lambda(x_1,\lambda(x_2,x_3)))$ (*i.e.* $\lambda \circ_1 \lambda - (23).\lambda \circ_1 \lambda - \lambda \circ_2 \lambda$) où λ est le crochet. Alors $\mathrm{Lie}(r) =$

$\bigoplus_{(i_1,\dots,i_r)\in\mathfrak{S}_r, i_1=1} \mathbb{K}[\dots[X_{i_1}X_{i_2}]X_{i_3}]\dots X_{i_r}]$ les polynôme de Lie à r variables de chaque degré relatif 1.

1.4 Exemples classiques

1.4.1 Associaèdre

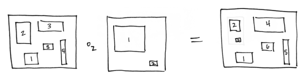


Associaèdre K_5

Définition. L'associaèdre est l'opérade formé par la suite de polytope qui encode les opérations associatives à homotopie près, comme représenté ci-contre. Ici, $(ab)c$ signifie : faire a sur le premier quart de l'intervalle, et faire c sur la seconde moitié, tandis que $a(bc)$ signifie : faire a sur la première moitié de l'intervalle et faire c sur le dernier quart. Ces deux boucles ne sont pas égales, donc cette « multiplication » n'est pas associative. Mais nous pouvons passer d'une boucle à l'autre simplement en ajustant la vitesse à laquelle nous parcourons a (et c) ! En d'autres termes, nous pouvons passer de $(ab)c$ à $a(bc)$ de manière continue en parcourant a un peu plus lentement et c un peu plus rapidement. Cela définit une homotopie entre les deux boucles, que nous pouvons représenter comme un segment de droite, appelé K_3, reliant deux points.
Définition. Une algèbre sur l'opérade de l'associaèdre est appelé un A_∞-espace.

1.4.2 Opérades en petites disques, E_n-opérades

Définition. L'*opérade des n-disques/cubes* est donné par $C_n(r) \in$ Top l'espace dont les éléments sont les r-tuples $(c_1,\dots,c_r)$ de plongements rectilignes qui ne se recoupent pas de petits n-cubes $c_i : I^n \longrightarrow I^n, (t_1,\dots,t_n) \mapsto (a_1,\dots,a_n) + (\lambda t_1,\dots,\lambda t_n)$. Le produit de composition est donné par $C_n(k) \times C_n(l) \to C_n(k+l)$ comme sur le dessin ci-contre. **Définition.** Un *E_n-opérade* dans Top est un opérade homotopiquement équivalent à C_n. L'idée est que $\underline{c} \in C_n(r)$ donne une oépration $\mu_{\underline{c}} : \Omega^n X \times \Omega^n X \to \Omega^n X$.



Opérades en petites cubes

Théorème. *(May-Boardman-Vogt)* Si $Y \in \mathrm{Top}_*$ est connexe et $C_n \circlearrowleft Y$, il existe $X \in \mathrm{Top}_*$ tel que $Y \sim \Omega^n X$.
Définition. *(Calcul des plongements de Goodwillie-Weiss)* $\overline{\mathrm{Plong}_c}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ est la fibre homotopique de $\mathrm{Plong}_c(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Imm}_c(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$.
Théorème. *(Boavida-Weiss)* $\overline{\mathrm{Plong}_c}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \sim \Omega^{m-1}\mathrm{Hom}(E_m,E_n)$ pour $n-m \geqslant 3$, d'où une description combinatoire de $\mathrm{Hom}(E_m,E_n)$.