# MEMENTO GÉNÉRAL : NIVEAU C

Ce document a été initialement rédigé lors de la période de révision de deux semaines avant les écrits de concours : il veut donc être efficace en premier lieu, pragmatique et entièrement destiné à la réussite des épreuves. Il réunit ce qui est à la fois difficile et utile ; on y trouve : des astuces, les pièges, les résultats de cours subtils ou parfois oubliés, les compléments hors programme classiques.

Long et dur (that's what she said)

## LOGIQUE

- Dans une implication, le premier membre est appelé **protase** et le second **apodose**.
- Dans un **syllogisme**, les deux premiers membres sont les **prémisses**, la **majeure** et la **mineure**, et le troisième est la conclusion. Si la vérité implique la **validité**, la réciproque est fausse.
- D'après les lois de De Morgan, le **principe du tiers-exclu** équivaut au **principe de non-contradiction**.
- *(Loi de Pierce)* Pour toutes propositions $A, B$, $\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow A\big) \Rightarrow A$.
- Le **paradoxe du buveur**, d'après le principe d'explosion *ex falso quodlibet*, donne que dans toute pièce non vide, il existe une personne telle que, si elle boit, alors tout le monde boit.

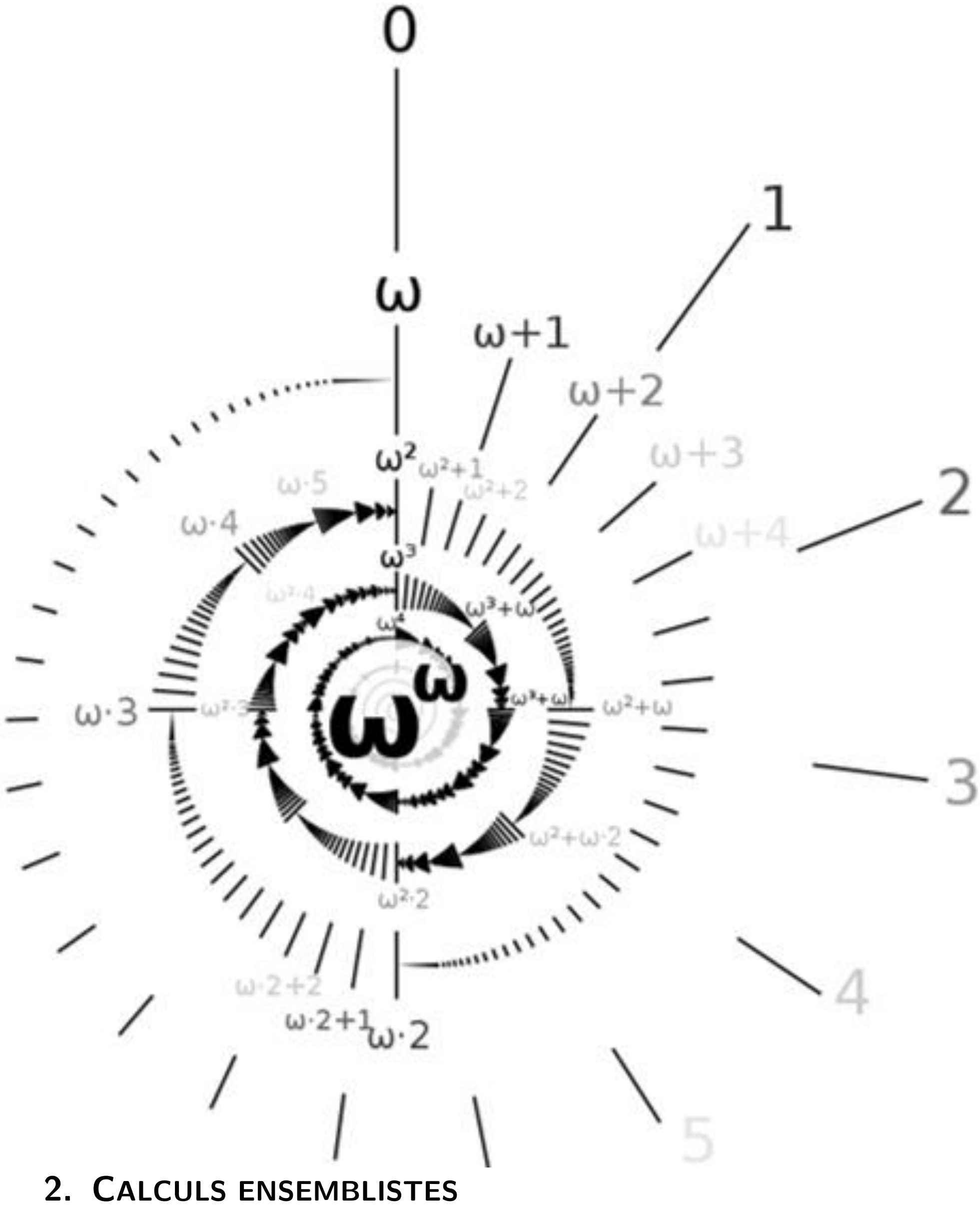
## ENSEMBLES

### 1. CARDINAUX

- *(Théorème de Cantor-Bernstein)* Deux injections en sens contraires établissent l'équipotence. La preuve est difficile.
- Le **théorème de Cantor** donne toujours, au sens du cardinal, $E < 2^E$. Conséquence : la classe de tous les ensembles est impropre (**paradoxe de Russell**).
- Les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables, d'après le cours. De plus, une partie de $\mathbb{N}$ est infinie si et seulement si elle est non majorée.
- Une réunion dénombrable de puissances du continu a la puissance du continu au plus ; pareillement, une réunion sur une puissance du continu d'ensembles dénombrables a, au plus, la puissance du continu. Plus généralement, si $I$ s'injecte dans $E$ et les $E_i$ s'injectent dans $E$, alors leur réunion s'injecte dans $E$.
- $\mathbb{R}$ est indénombrable : pour le montrer (et l'on se rend compte alors de la grossièreté de l'astuce), on utilise le **procédé diagonal**.
- La **fonction de couplage de Cantor**, qui lie $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$, a pour expression : $(x, y) \mapsto \frac{(x+y+1)(x+y)}{2} + y$. Sa bijection réciproque est $z \mapsto \left(\frac{w(w+3)}{2} - z, z - \frac{w(w+1)}{2}\right)$ où $w = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2} \right\rfloor$. Le théorème de Fueter-Pólya énonce que ce polynôme et son symétrique en sont les deux seules bijections quadratiques ; le résultat sans restriction de degré

n'est que conjecturé, et pour les dimensions supérieures, on utilise le polynôme : $P(X_1, \dots, X_n) = X_1 + \binom{X_1 + X_2 + 1}{2} + \dots + \binom{X_1 + \dots + X_n + n - 1}{n}$.

- ❖ Tout ensemble infini est équipotent à son carré cartésien.
- ❖ *(Théorème de comparabilité cardinale)* L'ordre cardinal est total sur Ens.
- ❖ Un **ordinal** est, par définition, un ensemble transitif bien ordonné. La classe des ordinaux notée $\mathrm{On}(\alpha)$ est impropre. Dans cette situation, les entiers de von Neumann sont les premiers ordinaux ; l'existence d'ordinaux infinis (on dit alors **ordinaux transfinis**) est assurée par l'axiome de l'infini. Le premier ordinal transfini est noté $\omega$, c'est tout simplement $\mathbb{N}$. Formellement, $\omega = \aleph_0$.
- ❖ L'**hypothèse du continu**, indécidable, stipule que $\aleph_1$, le plus petit cardinal supérieur strictement aux naturels, coïncide avec $2^{\aleph_0}$ le cardinal de $\mathbb{R}$, autrement dit que toute partie indénombrable de $\mathbb{R}^n$ a la puissance du continu. Comme on ne peut le démontrer, on manque de la dichotomie si pratique dans $\mathbb{N}$.




## 2. Calculs ensemblistes

- La **différence symétrique** $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ a $\emptyset$ pour neutre, est nilpotente, commutative, associative. Cette dernière propriété se retrouve grâce à l'indicatrice $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$. L'intersection est distributive par rapport à elle. Ainsi, $(\mathcal{P}(\Omega), \cap, \Delta)$ est un anneau de Boole, dite « algèbre de l'ensemble des parties ».
- Les **opérations usuelles** (réunion, intersection, privation, différence symétrique, complémentaire, inclusion) sont toutes stables par **image réciproque**. Pour l'**image directe**, la réunion est stable, mais pour le reste, on a seulement une inclusion, avec par exemple, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
- $f\left(f^{-1}(B)\right) = B \cap Im(f)$. $f$ est donc surjective ssi le membre de gauche égale $B$.
- $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$. On montre que $f$ est injective en seul cas d'égalité.
- Si $g \circ f$ est injective, $f$ est injective. Généralement, une fonction est **injective** si et seulement si elle est **inversible à gauche**. Cet inverse, surjectif, est une **rétraction**.
- Si $f \circ g$ est surjective, $f$ est surjective. Généralement, une fonction est **surjective** si et seulement si elle est **inversible à droite**. Cet inverse, injectif, est une **section**.
- Il existe une injection de $E$ dans $F$ si et seulement s'il existe une surjection de $F$ dans $E$, en prenant garde au cas où l'un est vide.
- *(Lemme de recouvrement croissant)* À partir d'un **recouvrement croissant** d'un ensemble, on peut former un partage en en prenant les « anneaux » successifs.
- *(Formule du crible de Poincaré)* Pour des ensembles finis,
$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$
Ceci se démontre en développant l'identiquement nulle $\left(1 - \mathbb{1}_{A_1}\right) \dots \left(1 - \mathbb{1}_{A_n}\right)$, ou, moins aisément, par récurrence.
- L'**axiome du choix** est un principe d'existence de fonction : si $I$ est un ensemble quelconque et pour tout $i$, $E_i$ est un ensemble non vide, alors $\prod_{i \in I} E_i$ est non vide.
- *(Axiome de fondation)* $\forall A \neq \emptyset, \exists B \in A \quad B \cap A = \emptyset$. Ainsi, aucun ensemble ne s'appartient lui-même, et $\in$ est asymétrique. De plus, il n'existe aucun cycle pour l'inclusion. Une formulation équivalente en présence de l'**axiome du choix dépendant** : la relation d'appartenance est bien fondée.

## 3. ORDRES

- Avec un ordre partiel, **élément maximal** et maximum sont deux notions disjointes (de même élément minimal et minimum) : tout maximum est maximal, et elles coïncident pour un ordre total. Le maximum d'une partie est unique, mais pas forcément les maximaux.
- *(Lemme de Zorn)* Dans un ensemble ordonné, une partie totalement ordonnée est appelée **chaîne**. Si toute chaîne est majorée, on parle d'**ensemble inductif**. Le lemme de Zorn annonce que tout ensemble inductif admet au moins un élément minimal. Il est équivalent à l'axiome du choix.
- *(Théorème de Zermelo)* Tout ensemble peut-être muni d'un bon ordre. Cet énoncé est équivalent à l'axiome du choix.
- Une relation sur un ensemble est dite **bien fondée** s'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'éléments de cet ensemble (elle est donc irréflexive). On dit qu'un

ordre est **bien fondé** si l'ordre strict associé est bien fondé. On dit aussi **ordre artinien**. De façon équivalente, toute suite infinie décroissante est stationnaire, ou encore toute partie non vide admet un élément minimal. Un ordre dont le dual est artinien est dit noethérien. En présence d'un ordre artinien $(E,\leq)$, on a un **principe d'induction** noethérienne : si $\mathcal{P}$ est un prédicat sur $E$ vérifiant la condition d'hérédité : $\forall x \in E\ \big(\forall y < x, \mathcal{P}(y)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(x)$, alors $\mathcal{P}$ est vrai sur $E$. Enfin, un **bon ordre** est un ordre total bien fondé.

❖ *(Treillis)* Un treillis est un ensemble partiellement ordonné dans lequel toute paire admet une borne supérieure et une borne inférieure. C'est le cas des ordres totaux, ou par exemple, $(\mathcal{P}(E),\subseteq)$, les subdivisions d'un segment pour la finesse, $(\mathbb{N},|)$, etc. Il revient au même de prendre deux lois $\vee$ et $\wedge$ associatives, commutatives et vérifiant une loi d'absorption ; dans ce cas, $a \leq b \ \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. Ces deux lois sont de plus idempotentes.

❖ Un treillis borné est dit **complémenté** si l'on peut toujours associer à un élément un autre tels que les opérations donnent le maximum et le minimum. Un treillis distributif complémenté est appelé **algèbre de Boole**. Cette structure est aussi définie comme un anneau d'idempotents multiplicatif qui soit une algèbre sur le corps à deux éléments.

## STRUCTURES QUOTIENTS

❖ *(Ensemble quotient)* Pour une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble $E$, $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes selon $\mathcal{R}$ et $\pi : E \to E/\mathcal{R}$, la projection canonique, est surjective. **Pour plus de renseignements, voir le papier correspondant.**

❖ Pour résumer :

| Catégorie | Quotient par… | Théorèmes de factorisation | Théorèmes d'isomorphisme |
|---|---|---|---|
| **Ensembles** | Relation d'équivalence $\mathcal{R}$ | $f$ est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists!\,\tilde{f} \quad f = \tilde{f} \circ \pi$ | Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} f$ (par $\tilde{f}$) |
| **Magmas** | Relation d'équivalence $\mathcal{R}$ avec laquelle la loi de magma est compatible | $\varphi$ morph. est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists!\,\tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ | Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} \varphi$ (par $\tilde{\varphi}$) |
| **Monoïdes, groupes (naïvement)** | Idem | Idem | Idem |
| **Groupes** | Sous-groupe distingué $H$ | $H \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists!\,\tilde{f}$ morph. $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$ | $G/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} f$ |
| **Anneaux** | Idéal $I$ | $I \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists!\,\tilde{f}$ morph. $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$ | $A/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} f$ |
| **Espaces vectoriels** | Sous-espace vectoriel $V$ | $V \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists!\,\tilde{f}$ lin. $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$ | $E/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} f$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Espaces topologiques** | Relation d'équivalence $\mathcal{R}$, quotient muni de la topologie quotient | $f$ $C^0$ est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists!\, \tilde{f}$ $C^0$ $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$ | Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $f$ continue et ouverte $(quotient\ map)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} f$ (par $\tilde{f}$) |

## TECHNIQUES DE CALCUL DIVERSES, RUSES DE FOUINE

- Par récurrence simple sur $n$, on obtient : $\forall k \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n < k^n$.
- La **racine d'un complexe** s'obtient, soit en forme algébrique grâce à un système de trois équations, soit en forme trigonométrique, par exemple $\pm e^{\frac{i\pi}{4}}$, racines de $i$.
- $\sum_{k=p}^{n} a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}$ (en haut, « premier terme moins premier terme négligé »). Il faut aussi avoir le réflexe de toujours disjoindre le cas de raison 1.
- $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^k b^{2n-k}$. Il n'y a pas de coefficients binomiaux dans la formule de factorisation dont elle provient non plus.
- Le **déterminant de Vandermonde** $\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ vaut $\prod_{0 \leq j < i \leq n}(x_i - x_j)$. On connaît aussi la version alternative : $\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1 \dots x_n \prod_{1 \leq j < i \leq n}(x_i - x_j)$.
- *(Sommes triangulaires)* On dispose en tout cas des formules de Fubini suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} u_{i,k} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n} u_{i,k} = \sum_{0 \leq i,k \leq n} u_{i,k}.$$
La première est sommation par piles, la seconde sommation par tranches.
- Toute famille sommable est à support dénombrable.
- Pour les sommations par paquets, les partitions classiques de $\mathbb{N}^2$ sont les piles $(\{(p,q) \mid q \in \mathbb{N}\})_{p \in \mathbb{N}}$, les tranches $(\{(p,q) \mid p \in \mathbb{N}\})_{q \in \mathbb{N}}$ et les diagonales $(\{(p,q) \mid p + q = c\})_{c \in \mathbb{N}}$.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- Si elles existent, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2$.
- Quelques analyses-synthèses peuvent être saccagées par le lemme des noyaux.
- Il est **inutile** de vérifier : la linéarité à droite pour un produit scalaire (la symétrie la garantit), la positivité pour une norme ou une distance (conséquence de l'inégalité triangulaire et de l'homogénéité) ainsi que la réciproque de la séparation (conséquence de l'homogénéité), qu'une tribu contient $\emptyset$ ou $\Omega$ (l'habitation suffit) qu'une probabilité est dans $[0,1]$ (il suffit qu'elle soit positive, normalisée et $\sigma$-additive).
- Pour $f$ à valeurs réelles, $\frac{|f|+f}{2}$ et $\frac{|f|-f}{2}$ sont ses **parties positive et négative** (elles sont uniques, positives et leur différence fait la fonction).
- À partir d'un certain rang, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

❖ *(Inégalités classiques)* L'analyse est la science des inégalités, d'après un rapport récent. Il faut y penser spontanément. On prend $n \in \mathbb{N}$ et $a < b$ réels. Sans autre précision, les nombres considérés sont réels.

| Nom | Hypothèses | Énoncé | Preuve |
|---|---|---|---|
| Inégalités triangulaires | $x, y$ complexes | $\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \rvert \leq \lvert x \pm y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ | On étudie $\frac{x}{y}$ et la seconde se déduit de la première |
| Inégalités algébriques | $x, y$ réels | $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ pour $x, y \geq 0$ | Identités remarquables |
| | | $2xy \leq x^2 + y^2$ | |
| | | $4xy \leq (x+y)^2$ | |
| | | $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ | |
| Racine d'une somme | $x, y$ positifs, $p \geq 1$ | $\sqrt[p]{x+y} \leq \sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}$ | Binôme de Newton |
| | $p \geq 1$ | $\left\lvert \sqrt[p]{\lvert x\rvert} - \sqrt[p]{\lvert y\rvert} \right\rvert \leq \sqrt[p]{\lvert x-y\rvert}$ | Elle s'en déduit |
| | $p \leq 1$ | $\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y} \leq \sqrt[p]{x+y}$ | De même |
| Bernoulli | $x > -1$ | $(1+x)^n \geq 1 + nx$ | Récurrence |
| Études de fonction courantes | $x \in [0,1]$ | $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ | Études de fonction |
| | $x > 0$ | $-\frac{1}{e} \leq x\ln(x)$ | |
| Majoration du sinus | $x \geq 1$ | $\sin(x) \leq x$ | Le sinus est borné par 1 |
| Minoration du sinus | $x$ positif | $1 - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$ | Taylor-Lagrange |
| | $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ | $\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x)$ (*inégalité de Jordan*) | Concavité (corde) |
| Minoration du cosinus | $x$ réel | $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ | Taylor-Lagrange |
| Minoration de la tangente | $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ | $x \leq \tan(x)$ | Déduite de la suivante |
| Majoration de l'arc tangente | $x$ réel | $\arctan(x) \leq x$ | Concavité (tangente en 0) |
| Minoration de l'exponentielle | Aucune | $x \leq 1 + x \leq \exp(x)$ | Convexité (tangente en 0) |
| Majoration du logarithme | $x > 0$ | $\ln(x) \leq x - 1 \leq x$ | Concavité (tangente en 1) |
| | $x > -1$ | $\ln(1+x) \leq x$ | Idem |
| Minoration du logarithme | $x \geq 0$ | $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ | Taylor-Lagrange |
| Minoration du sinh | $x$ positif | $x \leq \mathrm{sh}(x)$ | Convexité (tangente en 0) |
| Minoration du cosh | $x$ réel | $1 + \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{ch}(x)$ | Taylor-Lagrange |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Young | $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q\geq 1$ | $ab<\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ | Concavité de ln |
| Inégalité harmonico-géométrique | $a_1,\dots,a_n$ strictement positifs | $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\dots a_n}$ | Application de la suivante aux inverses |
| Inégalité arithmético-géométrique | $a_1,\dots,a_n$ positifs | $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\leq\frac{a_1+\dots+a_n}{n}$ | Concavité de ln |
| Inégalité arithmético-quadratique | $a_1,\dots,a_n$ réels | $\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$ | Convexité de la fonction carré |
| Inégalité arithmético-harmonique | $a_1,\dots,a_n$ strictement positifs | $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}\leq\frac{a_1+\dots+a_n}{n}$ | Conséquence des précédentes |
| Inégalité géométrico-quadratique | $a_1,\dots,a_n$ positifs | $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$ | Conséquence des précédentes |
| Inégalité des moyennes | $M$ une moyenne | $\min_i a_i\leq M\leq\max_i a_i$ | Facile |
| Jensen* | $\sum_{k=0}^{n}\lambda_k=1$, $f$ convexe | $f\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=0}^{n}f(\lambda_k x_k)$ | Récurrence |
| Cauchy-Schwartz* | $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$, réels | $\left\lvert\sum_{k=0}^{n}a_k b_k\right\rvert\leq\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}$ | Technique classique sur la norme euclidienne |
| Hölder* | $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$, positifs, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q\geq 1$ | $\sum_{i=0}^{n}a_i b_i\leq\sqrt[p]{\sum_{i=0}^{n}a_i^p}\sqrt[q]{\sum_{i=0}^{n}b_i^q}$ | Concavité de $x^\alpha$ en prenant $\alpha=p$, $\lambda_i=b_i^q$ et $x_i=a_i b_i^{-\frac{q}{p}}$ |
| Minkowski* | $p\geq 1$ | $\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n}\lvert a_k+b_k\rvert^p}\leq\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n}\lvert a_k\rvert^p}+\sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n}\lvert b_k\rvert^p}$ | Déduite de l'inégalité de Hölder |
| Inégalité de réordonnement | $x_1\leq\dots\leq x_n$, $y_1\leq\dots\leq y_n$ | $\sum_{k=0}^{n}x_k y_{\sigma(k)}\leq\sum_{k=0}^{n}x_k y_k$ | Par l'absurde |
| Tchebychev | $x_1\geq\dots\geq x_n$, $y_1\geq\dots\geq y_n$ | $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}x_k y_k\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}y_k\right)$ | Déduites des précédentes |
| | $x_1\geq\dots\geq x_n$, $y_1\leq\dots\leq y_n$ | $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}x_k y_k\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}y_k\right)$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Accroissements finis | $f$ de dérivée bornée | $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leq \sup \lvert f'\rvert \, \lvert x-y\rvert$ | L'inégalité vient du théorème |
| Taylor-Lagrange | $f$ $C^{n+1}$ | $\left\lvert f(x)-\sum_{i=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k\,!}\right\rvert \leq \frac{\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)\,!}\sup_{[a,x]}\lvert f^{(n+1)}\rvert$ | Majoration du reste intégral |
| Kolmogorov | $f$ $C^n$ | $\sup\lvert f^{(k)}\rvert \leq \sqrt{2}^{k(n-k)} \sup\lvert f\rvert^{1-\frac{k}{n}}.\sup\lvert f^{(n)}\rvert^{\frac{k}{n}}$ | Taylor-Lagrange puis récurrence |
| Théorème des séries alternées | $u_n$ positive, décroissante de limite 0 | $\left\lvert\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k\right\rvert \leq u_{k+1}$ | Inégalités pour des suites adjacentes |
| Inégalité de la moyenne | $f$ Cpm | $\inf(f)(b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup(f)(b-a)$ | Croissance de l'intégrale |
| Comparaison série-intégrale | $f$ Cpm, décroissante, positive, intégrable sur $[n,+\infty[$ | $\int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f$ | Croissance de l'intégrale |
| Hermite-Hadamard | $f$ convexe sur $[a,b]$ | $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ | Régularité des fonctions convexes |
| Wirtinger | $f$ $C^0$, $C^1$pm, d'intégrale nulle et $f(a)=f(b)$ | $\int_a^b \lvert f\rvert \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \lvert f'\rvert$ | Séries de Fourier |
| Jensen | $g$ continue de $[0,1]$ dans $]a,b[$, $f$ convexe sur $]a,b[$ | $f\left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right) \leq \int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x$ | Sommes de Riemann |
| Cauchy-Schwartz | $f,g$ réelles | $\left\lvert\int_a^b fg\right\rvert \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$ | Technique classique sur la norme euclidienne |
| Hölder | $f,g$ positives, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q \geq 1$ | $\int_a^b fg \leq \sqrt[p]{\int_a^b f^p}\sqrt[q]{\int_a^b g^q}$ | Young |
| Minkowski | $p \geq 1$ | $\sqrt[p]{\int_a^b \lvert f+g\rvert^p} \leq \sqrt[p]{\int_a^b \lvert f\rvert^p} + \sqrt[p]{\int_a^b \lvert g\rvert^p}$ | Déduite de l'inégalité de Hölder |
| Ptolémée | $A,B,C,D$ quatre points | $AC.BD \leq AB.CD + BC.AD$ | Inégalité triangulaire |

Certaines inégalités (*) ont leurs équivalents intégraux.

- ❖ On peut intégrer, mais pas dériver les développements limités ! Cependant, la dérivation est valide dans le cas $C^n$.

❖ Les **formules de Taylor** sont les suivantes :

| Théorème | Hypothèses | Formule |
|---|---|---|
| Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace | $f$ $C^{n+1}$ sur $[a,b]$ | $f(b)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\mathrm{d}t$ <br> $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+\int_a^b\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$ |
| Formule de Taylor-Maclaurin | Idem | Cas $x_0=0$ |
| Développement en série entière (de Taylor) | $f$ DSE | Cas limite où $R_n(x)\to_{n\to+\infty}0$ |
| Inégalité de Taylor-Lagrange | $f$ $C^{n+1}$ sur $[a,b]$ | $\lvert f(x)-P_n(x)\rvert=\lvert R_n(x)\rvert\leq\frac{M\lvert x-a\rvert^{n+1}}{(n+1)!}$ <br> où $M=\sup_{t\in[a,b]}\lvert f^{(n+1)}(t)\rvert$ |
| Égalité de Taylor-Lagrange | $f$ $C^n$ sur $[a,b]$, $D^{n+1}$ sur $]a,b[$ | $\exists c\in]a,b[\ \ f(b)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ |
| Formule de Taylor-Young. Développement limité | $f$ $C^n$ sur $I\ni a$ | $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o_{x\to a}((x-a)^n)$ |
| Formule de Taylor-Cauchy | $f$ $D^{n+1}$ sur $I$, $x\in I\setminus\{a\}$ | $\exists\xi\ \ f(b)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)(x-\xi)^n$ |

## 1. Complexes

❖ $i$ et son opposé sont les seuls complexes qui aient pour inverse leur opposé. S'en servir pour augmenter sa vitesse de calcul !

❖ On peut définir $t^x$ pour $t>0$ et $x\in\mathbb{C}$. Dans ce cas, nous avons $\lvert t^x\rvert=t^{\mathfrak{R}(x)}$ et $\arg(t^x)=\mathfrak{I}(x)\ln(t)$.

❖ L'ensemble des **racines d'un complexe** est le produit de l'une d'elles par le groupe des racines de l'unité.

## 2. Trigonométrie

❖ On a : $ch(x)=\cos(ix)$ et $sh(x)=-i\sin(ix)$, ce qui rappelle les formules d'Euler en cas d'oubli bizarre ainsi que le formulaire de trigonométrie hyperbolique à partir de la trigonométrie circulaire.

❖ En posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x$ convenant, on a les **formules de l'arc moitié** :

$$\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\qquad\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad\tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}.$$

## 3. Intégration

❖ Pour intégrer l'inverse d'un polynôme réel de degré 2 irréductible, on peut chercher la forme de l'arc tangente d'une fonction affine.

- Les **règles de Bioche** permettent d'intégrer les fractions rationnelles en fonctions trigonométriques circulaires. Si l'expression de la forme différentielle (i. e. avec le $dt$) est invariante de $x$ en $-x$, on choisit cos ; invariante de $x$ en $\pi - x$, on choisit sin, et invariante de $x$ en $x + \pi$, tan.
- Astuce importante pour intégrer ensuite avec une règle de Bioche : si $f$ est continue et $f(a+b-t) = f(t)$, alors $\int_a^b tf(t)\mathrm{dt} = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$.

### 4. GROUPE SYMÉTRIQUE

- Le groupe alterné est l'unique sous-groupe d'indice 2 du groupe symétrique. Remarquer que, **conjuguer un cycle**, c'est prendre le cycle des images. Cette même remarque établit que la signature est l'**unique morphisme de $\mathfrak{S}_n$ dans** $\mathbb{C}^*$.
- *(Présentations du groupe symétrique)* Le groupe symétrique est généré par les transpositions, mais également par les $(i, i+1)$, ou encore par les $(i, n)$ ce qui légèrement mieux et optimal pour les transpositions, ou enfin par $\{(1,2), (1,2, \dots, n)\}$.

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

## ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Le terme général de la **suite de Fibonacci** s'écrit explicitement grâce à la **formule de Binet** $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$, où le premier est le **nombre d'or** et la seconde racine son conjugué (les $n+1$ descendent si l'on pose $F_0 = 1$). Remarquons que $\psi = -\frac{1}{\varphi}$. D'autre part, $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers $\varphi$. Sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette suite représente, dans la modélisation adéquate, la croissance d'une population de lapins.
- C'est un cas particulier de **suite de Lucas**, où $u_{n+1} = Pu_{n+1} - Qu_n$. On montre un tas de formules par récurrence, dont $U_{m+n} = U_n U_{m+1} - QU_{n-1}U_m = \frac{U_n V_m + U_m V_n}{2}$, dont on déduit la **divisibilité faible** : $U_n \mid U_{kn}$. La **divisibilité forte** $U_i \wedge U_j = \pm U_{i \wedge j}$ équivaut à $P \wedge Q = 1$.
- On rappelle que, si $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ et $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$, alors :
$$a \wedge b = p_1^{\min \alpha_1, \beta_1} \dots p_n^{\min \alpha_n, \beta_n} \text{ et } a \vee b = p_1^{\max \alpha_1, \beta_1} \dots p_n^{\max \alpha_n, \beta_n}.$$
- Le pgcd s'obtient par soustractions successives (**anthyphérèse**) ou par divisions successives (**algorithme d'Euclide**). Ces deux algorithmes sont en effet terminés, et corrects.
- Un entier naturel non premier admet un diviseur strict inférieur à sa racine carrée.
- Pour réduire des puissances imbriquées, on monte puis on redescend, avec la même technique qu'en Terminale. Par exemple : le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$ est 3.
- *(Formule de Legendre)* $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n - \sigma_p(n)}{p-1}$ où $\sigma_p$ est la somme des chiffres en base $p$.
- Pour tout entier naturel non nul $n$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$. Pour le montrer rapidement, on partitionne les formes irréductibles des $n$ rationnels inférieurs à 1 non nuls ayant $n$ pour dénominateur. En fait, ceci est l'expression de ce que l'indicatrice d'Euler est la transformée de Möbius de l'identité.

- *(Formule d'inversion de Möbius)* Pour toutes fonctions arithmétiques $f$ et $g$, la relation $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si $f$ est la transformée de Möbius de $g$, c'est-à-dire la convolution de $g$ avec $\mu$, la fonction de Möbius, définie par :
$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- Le **théorème chinois** à deux termes est une équivalence. Pour vérifier la réciproque, on utilise la **formule du complément**, qui n'est vraie qu'à deux termes, alors que le théorème chinois se généralise pour une famille finie d'entiers premiers entre eux deux à deux.
- Il existe une **infinité de nombres premiers**, mais également une infinité de nombres premiers de la forme $6k+1$, ou encore de la forme $6k+5$.
- Le **théorème fondamental de l'arithmétique** énonce que tout entier $\geq 2$ se décompose de manière unique comme produit de facteurs premiers.
- *(Théorème des deux carrés de Fermat)* Tout polynôme partout positif est **somme de deux carrés**. Cependant, un entier naturel est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k+3$ est de valuation paire ; de plus il y en a une infinité.

## POLYNÔMES

- Le **lemme des noyaux** se généralise à une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.
- $X^4+1$ est bien réductible dans $\mathbb{R}$. Cependant, il ne l'est pas dans $\mathbb{Q}$ !
- $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est libre ; plus élémentairement, $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{x\in\mathbb{C}}$ est libre, deux théorèmes qui se résolvent avec l'algèbre linéaire.
- Un polynôme est forcément **régulier** dans un espace de fonctions continues sur un intervalle quelconque.
- Les **polynômes divisibles par leur dérivé** dans $\mathbb{C}[X]$ sont de la forme $a(X-b)^n$.
- *(Interpolation de Lagrange)* Pour tous nombres $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n$ quelconques, il existe un unique polynôme de degré $n+1$ qui les interpole, donné par $\sum_{k=1}^n y_k L_k$, où $L_k$ est le $k$-ième polynôme élémentaire de Lagrange qui vaut $\prod_{i=1, i\neq k}^n \frac{X-x_i}{x_k-x_i}$.
- *(Interpolation d'Hermite)* Pour éviter le phénomène de Runge, l'interpolation d'Hermite donne un polynôme interpolateur et osculateur (c'est-à-dire que son dérivé interpole les nombres dérivés). Il y a existence et unicité au degré $2n+1$, en prenant les $\sum_{k=1}^n P_k L_k^2$ où $P_k = (f'(x_k) - (L_k^2)'(x_k) f(x_k))(X-x_k) + f(x_k)$.
- Étude des **suites de polynômes orthogonaux** ; le $n$-ième terme est toujours de degré $n$ par construction. Ils sont souvent solutions d'une équation différentielle formelle.

| Nom | Poids associé | Expression | Coeff. dominant | Relations |
|---|---|---|---|---|
| Tchebychev de 1re espèce | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$ | $T_n = \cos\left(n\arccos(X)\right)$ | $2^{n-1}$ | $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ avec $T_0 = 1$, $T_1 = X$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tchebychev de 2e espèce | $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$ | $U_n = \dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}$, $U_n = \dfrac{\sin(n\arccos(X))}{\sqrt{1-X^2}}$ | $2^n$ | Idem avec $U_0 = 1$, $T_1 = 2X$ |
| Legendre | $1$ sur $[-1,1]$ | $\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-X^2)^n$ (*formule de Rodrigues*) | $\dfrac{(2n)!}{2^n n!^2}$ | $(n+1)L_{n+1} = (2n+1)XL_n - nL_{n-1}$ (*récurrence de Bonnet*) |
| Hermite | $e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ | $(-1)^n e^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}$ | $2^n$ | $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$ |
| Laguerre | $e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$ | $\dfrac{e^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^n e^{-x}$ | $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ | $(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + L_{n-1} = 0$ |
| Jacobi | $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha,\beta > -1$ sur $]-1,1[$ | $\dfrac{(-1)^n}{2^n n!\,(1-X)^\alpha(1+X)^\beta}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-X)^\alpha(1+X)^\beta(1-X^2)^n$ | | |

- Le **théorème fondamental de l'algèbre** énonce que le corps des complexes est algébriquement clos. On n'en connaît que des démonstrations analytiques.

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

# ALGÈBRE GÉNÉRALE

## 1. GROUPES

- L'image d'une structure par un morphisme est toujours une sous-structure de l'arrivée.
- Dans tout magma associatif fini, il existe un idempotent.
- *(Axiomes faibles du groupe)* Tout magma associatif unifère à gauche dont tous les éléments ont un inverse à gauche est un groupe.
- L'**ordre** est minimal pour l'ordre dans $\mathbb{N}$, mais également pour la divisibilité. Il est donc caractérisé par : $p = ord(a) \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N} \quad a^k \Rightarrow p|k)$.
- Pour tout élément $a$ d'un groupe qui soit d'ordre $n$, l'ordre de $a^k$ est $\frac{n}{k \wedge n}$.
- *(Ordre d'un produit de deux éléments)* Pour tous éléments $x, y$ d'un groupe **qui commutent**, l'ordre $p$ de leur produit $xy$ divise le plus petit multiple commun $m$ de leurs ordres ; si ceux-ci sont premiers entre eux, alors $p = m$. De plus, pour $x, y$ quelconques, si $xy$ est d'ordre fini, $yx$ est de même ordre.
- On a $\bigcap_{i \in I} m_i\mathbb{Z} = (\vee_{i \in I})\mathbb{Z}$ et $\sum_{i \in I} m_i\mathbb{Z} = (\wedge_{i \in I})\mathbb{Z}$.
- Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.
- Les **sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$** sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $d$ divise $n$. Pour tout diviseur de $n$, il en existe un unique de cet ordre. Ces sous-groupes sont tous **cycliques**. On aurait aussi pu dire que les **sous-groupes d'un groupe monogène** sont monogènes.
- Soit $g$ un générateur d'un groupe fini d'ordre $n$. Alors $g^r$ est encore un générateur si et seulement si $r$ et $n$ sont premiers entre eux.
- *(Ordre d'un élément d'un produit cartésien)* L'ordre d'un élément d'un produit cartésien égale le **plus petit commun multiple** des ordres des composantes.

- Le produit de groupes cycliques est cyclique, si et seulement si, leurs ordres sont **premiers entre eux**. Dans ce cas, les générateurs du groupe produit sont exactement les produits de générateurs.
- *(Formule du produit)* Pour des sous-groupes $H, K$ de $G$, $|HK|.|H \cap K| = |H|.|K|$. De plus, $HK$ est un sous-groupe si et seulement si $HK = KH$ (c'est alors le sous-groupe généré par $H \cup K$. Il suffit par exemple que l'un d'eux soit normal dans $G$. De plus, si $H_1, \dots H_n$ sont normaux, $\mathrm{ord}(H_1 \dots H_n)$ divise $\mathrm{ord}(H_1) \dots \mathrm{ord}(H_n)$.
- *(Théorème de Lagrange)* L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce sous-groupe. C'est la traduction de ce que les classes à gauche modulo ce sous-groupe lui sont toutes équipotentes.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈOREMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- Pour tout morphisme $f$ partant de $G$, $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}\big(\mathrm{Ker}(f)\big)\mathrm{card}(\mathrm{Im}(f))$.
- *(Formule des indices)* Soient $K$ sous-groupe de $H$ lui-même sous-groupe de $G$. Alors $[G:K] = [G:H][H:K]$.
- *(Lemme de Schreier)* Si $X$ génère $G$, $H$ sous-groupe de $G$, $T$ une transversale à droite de $H$ dans $G$ contenant 1, si $h_{t,x}$ est l'unique élément $h$ de $H$ tel que $tx$ appartienne à $hT$, alors $\left(h_{t,x}\right)_{t\in T, x \in X}$ génère $H$. Par conséquence, $H$ admet une génératrice de cardinal $\leq [G:H]\mathrm{card}(X)$. En particulier, tout sous-groupe d'indice fini d'un groupe de type fini est de type fini.
- *(Théorème de Cayley)* Tout groupe est isomorphe à un (sous-groupe d'un) groupe de permutations. C'est une traduction de ce que les translations à gauche opèrent fidèlement.
- L'action par conjugaison, dont on note $T$ une transversale (famille d'éléments dont les orbites partitionnent $G$) donne la **formule des classes** pour un groupe fini :

$$\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}\big(Z(G)\big) + \sum_{x \in T,\ x \notin Z(G)} \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(Z_x)}.$$

## 2. ANNEAUX & CORPS

- Les sous-groupes, puis les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. C'est la même chose pour les polynômes. Plus généralement, tout anneau euclidien est principal.
- Tout **anneau intègre fini** est un corps. (De même si l'anneau intègre n'a qu'un nombre fini d'idéaux.) Toute algèbre intègre **de dimension finie** est un corps gauche.
- Un élément régulier à gauche dans une algèbre de dimension finie est inversible bilatère.
- Tout morphisme de corps est injectif.
- La **caractéristique** d'un anneau est l'ordre additif de 1. Le sous-anneau qu'il engendre est isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $k$ la caractéristique. Si l'anneau est intègre, la caractéristique est nulle ou un nombre premier et l'on parle de **corps premier** ; les anneaux de caractéristique nulle sont infinis. Par propriété, la caractéristique est l'unique entier $n$ tel que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un sous-anneau ; de plus, la caractéristique est invariante par sous-anneau. S'il existe un morphisme de $A$ dans $B$, alors la caractéristique de $B$ divise celle de $A$.

- L'**endomorphisme de Frobenius** d'un anneau $\mathbb{A}$ de caractéristique $p$ est défini par $x \mapsto x^p$ (c'est bien un morphisme d'anneau). Si $\mathbb{A}$ est intègre, l'endomorphisme est injectif, et si $\mathbb{A}$ est de plus fini, c'est un automorphisme. Tout élément du corps premier est invariant par l'endomorphisme de Frobenius, et dans le cas intègre, ce sont les seuls. Enfin, c'est un endomorphisme linéaire du $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$.
- Tout **corps fini** a pour cardinal la puissance d'un nombre premier, ce qui découle du passage au quotient de l'**unique homomorphisme partant de** $\mathbb{Z}$ ; s'il est de cardinal premier, il est isomorphe à l'anneau modulaire de même cardinal.
- Tout corps de caractéristique nulle contient une copie de $\mathbb{Q}$. De plus, $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous-corps des complexes.
- Tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif est **cyclique**.
- *(Théorème de Wedderburn)* Tout corps (gauche) fini est commutatif.

## Algèbre linéaire

- L'ensemble des endomorphismes stabilisant un sous-espace donné est une **sous-algèbre**.
- Si $p$ est un projecteur, $id - p$ également et $2p - id$ est une symétrie.
- Si $s$ est une symétrie, on en déduit que $\frac{1}{2}(id \pm s)$ sont deux projecteurs.
- La symétrie en dimension finie parallèlement à $G$ a pour déterminant $(-1)^{\dim(G)}$.
- Soient $f, g$ deux morphismes partant d'une dimension finie. On a l'**inégalité de Sylvester** $rg(f) + rg(g) - \dim(E) \leq rg(f \circ g)$. De plus, $rg(f \circ g)$ est inférieur aux rangs de $f$ et de $g$ toujours. Enfin, le rang vérifie des inégalités triangulaires.
- Si $F \cap G = \{0\}$ et leurs dimensions sont complémentaires, ils sont supplémentaires. Ainsi en dimension finie, le noyau et l'image sont supplémentaires si et seulement s'ils sont tangents en zéro.
- Le **théorème des noyaux itérés** énonce que, pour tout endomorphisme $f$ :
  - $u = \left(\mathrm{Ker}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion ;
  - si deux termes consécutifs sont égaux, elle est stationnaire à partir de ce rang, ce rang $r$ étant appelé l'**indice de l'endomorphisme** ;
  - $\left(\mathrm{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion ;
  - si deux termes consécutifs sont égaux, elle est stationnaire à partir de ce rang, et ce rang est l'indice ;
  - en dimension finie, il y a existence et unicité de l'indice, mais pas en dimension infinie ;
  - l'indice est toujours inférieur à la dimension ;
  - on a toujours la décomposition $\mathrm{Ker}(f^r) \oplus \mathrm{Im}(f^r) = E$ ;
  - si l'on note $d_k$ la suite des co-dimensions de $u$ dans le terme suivant, $(d_k)_k$ est décroissante ; pour l'image, elle est croissante.
- *(Formule de Burnside)* Si $G$ est un sous-groupe fini de $GL(E)$, $\dim(E) < \infty$,

$$\dim\left(\bigcap_{g\in G} \mathrm{Ker}\,(g - id)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{tr}(g).$$

Ceci n'utilise pas l'inclusion dans $GL(E)$ : c'est vrai pour tout groupe fini de matrices.

- Si $(e_i)$ est une base, on fait correspondre une unique **base duale**, base du dual, en imposant la condition pour tous $i,j$ que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Ainsi $\dim(E^*) = \dim(E)$. C'est aussi une conséquence du théorème de représentation de Riesz.
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est hyperplan, et réciproquement, tout **hyperplan** est noyau d'une **forme linéaire**. De plus, une forme est combinaison linéaire finie d'autres si et seulement si son noyau contient l'intersection des leurs ; en particulier, deux formes non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau. De plus, l'algèbre duale est intègre.
- *(Écriture en composante des formes n-linéaires)* Pour simplifier, le départ est une puissance cartésienne. Pour des $x_1, \dots, x_k$, si les coordonnées de $x_j$ sont les $x_{1j}, \dots, x_{nj}$, alors :
$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j j}\, f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$
On en déduit la formule de Leibniz pour le déterminant et la dimension de $\Lambda_k$.
- Une forme multilinéaire est alternée, si et seulement si, elle est antisymétrique.
- *(Existence et unicité du déterminant)* Étant donné une base d'un espace de dimension finie, il existe une unique forme $n$-linéaire alternée dont l'image de cette base est unitaire. De plus, toute autre lui est proportionnelle.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÉORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- *(Composition des déterminants)* $\det_{e'}(u_i) = \det_{e'}(e) \det_{e}(u_i)$.

## ALGÈBRE BILINÉAIRE

### 1. ESPACES PRÉHILBERTIENS

- *(Théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan)* Une norme est euclidienne, si et seulement si, elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- Les identités de **polarisation** permettent d'extraire un produit scalaire d'une norme si elle est euclidienne. Aussi, la norme infinie n'est pas euclidienne.
- L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** est vérifiée pour une forme bilinéaire symétrique positive ; seul le cas d'égalité utilise le caractère défini. Ainsi pour toutes variables aléatoires $L^2$, $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
- Si l'on a une base orthonormale, une autre base est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale.
- Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique. De même pour les symétries. Une projection $p$ est orthogonale, si et seulement si $||p(x)|| \leq ||x||$ pour tout $x$ dans l'espace. (Pour le montrer, faire appel à ses amis Cauchy et Schwarz.)
- L'**égalité de Parseval-Bessel** qui prolonge l'inégalité de Bessel du cas fini $\sum_{k=0}^{+\infty} (e_k|x)^2 = \|x\|^2$ est vérifiée si et seulement si $x$ est adhérent au sous-espace qu'engendre la suite orthonormale $(e_k)$. Ainsi, si elle est totale, il y a égalité.
- L'**adjoint** d'un endomorphisme $u$, noté $u^*$, s'il existe (et alors, il est unique), est défini par : $\forall x, y \in E \quad (u(x), y) = \big(x, u^*(y)\big)$. L'existence est toujours vraie en dimension finie. L'opérateur adjoint est contravariant pour la composition, semi-linéaire et involutif. De plus, $\|u \circ u^*\| = \|u\|^2$.

- La matrice de l'adjoint est appelée adjointe ou **transconjuguée** : $M^* = \overline{{}^tM} = {}^t\overline{M}$. Remarquons que $\det M^* = \overline{\det M}$.
- Un **endomorphisme normal** est tel qu'il commute avec son adjoint. La normalité se caractérise par les matrices normales.

### 2. Espaces de Hilbert

- Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire : par exemple, l'espace des suites $l^2$, l'espace de fonctions $L^2$… Autrement dit, c'est un espace préhilbertien de Banach.
- Si $E$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H$ espace de Hilbert, $(f_i)_{i\in I}$ une base de Hilbert de $E$ et $x \in H$, alors $\sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$, ce qui constitue une inégalité de Bessel, garantissant la sommabilité de la famille ainsi que la dénombrabilité de son support. Enfin, les coefficients de Fourier $\langle x, e_i\rangle$ sont l'unique famille de coefficients de $x$ dans $(e_i)$, mais également : $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$, ce qui constitue une égalité de Parseval.
- *(Dimension hilbertienne)* Dans un espace de Hilbert, une partie est orthonormale maximale si et seulement si c'est une base hilbertienne. Leur cardinal commun est la dimension hilbertienne de l'espace. Cependant, il existe des espaces de Hilbert dont la dimension hilbertienne n'est pas la même que celle d'un sous-espace dense.

### 3. Géometrie euclidienne

- La distance d'un vecteur $x$ à un hyperplan de normale $n$ se calcule tout simplement : c'est $\frac{x.n}{||n||}$ (comme dans le plan !).
- L'homographie $A \mapsto \frac{I_n - A}{I_n + A}$ est une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont $-1$ n'est pas valeur propre. Cette transformation de Möbius est, plus généralement, une involution de la **sphère de Riemann**.
- Une **réflexion** est une symétrie par rapport à un hyperplan. Aucune réflexion n'est dans le groupe spécial linéaire.

## Séries de Fourier

→ **Résout des exercices d'analyse et des problèmes de physique**

- La quantité $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- *(Théorème de Weierstrass trigonométrique)* La famille $(t \mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthogonale totale, autrement dit une **base de Hilbert** de cet espace.

## Topologie matricielle

- L'application qui à une matrice associe son **polynôme caractéristique** est continue ; celle qui associe le polynôme minimal ne l'est pas en général. Pour le premier point, on choisit la norme sur $\mathbb{K}_n$ : maximum des évaluations absolues en $n+1$ scalaires distincts déterminés. Dans ce cas, la convergence d'une suite de polynômes équivaut à la convergence simple en ces scalaires.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais $GL_n(\mathbb{R})$ a pour composantes connexes les images réciproques par le déterminant de celles de $\mathbb{R}$.

- Les **matrices diagonalisables** ont pour adhérence les **matrices trigonalisables**, et pour intérieur celles de polynôme caractéristique **scindé à racines simples**. On remarque que la distance d'une valeur propre d'une limite de suite de matrices au spectre d'un terme de la suite tend vers 0.
- On peut établir la densité des diagonalisables complexes en remarquant que, tout matrice étant trigonalisable, en ajoutant $\frac{i}{p}$ aux termes diagonaux, à partir d'un certain rang, ils sont deux à deux distincts.
- Il y a **croissance locale du rang**, et **constance locale du spectre**.
- Toute **classe de similitude** est d'intérieur vide, car elle est incluse dans un hyperplan affine de trace constante, celle-ci étant un invariant de similitude. Une classe de similitude n'est bornée que pour des matrices scalaires. Une matrice est nilpotente si et seulement si $0 \in \overline{\operatorname{Sim} A}$ ; elle est nilpotente si et seulement si $1 \in \overline{\operatorname{Sim} A}$. De plus, une matrice est diagonalisable si et seulement sa classe de similitude est fermée, et dans ce cas, elle est caractérisée par $(\chi_A, \mu_A)$.
- Seuls les polynômes $X - \lambda$, en dimension $n \geq 2$, ont l'ensemble de leurs zéros matriciels compact.
- Tous les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont sous-groupes d'un groupe orthogonal, qui est donc un sous-groupe maximal.
- Le **rayon spectral** $\rho(A) = \max \operatorname{Sp} A$ (en dimension finie ; sinon, c'est le rayon de la plus petite boule fermée centrée en 0 contenant toutes les valeurs spectrales), est inférieur à $|||A|||$, continu, non lipschitzien mais $\frac{1}{n}$-höldérien. L'égalité n'a pas forcément lieu, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais c'est le cas pour un endomorphisme normal sur un espace de Hilbert (en donc, en particulier, pour les auto-adjoints, les automorphismes orthogonaux...).
- *(Théorème de Gelfand)* $\rho(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

| | | Ouvert | Fermé | Dense | Borné | Compact | Discret | Convexe | Étoilé | CPA | Connexe | Intérieur | Adhérence | Frontière |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ | $\emptyset$ |
| | $GL_n(\mathbb{R})$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | $GL_n(\mathbb{R})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ | Non-inv. |
| | $GL_n(\mathbb{C})$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | $GL_n(\mathbb{C})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ | Non-inv. |
| | $SL_n(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $SL_n(\mathbb{K})$ | $SL_n(\mathbb{K})$ |
| | $D_n(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $D_n(\mathbb{K})$ | $D_n(\mathbb{K})$ |
| | $T_{n,k}^{\pm}(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $T_{n,k}^{\pm}(\mathbb{K})$ | $T_{n,k}^{\pm}(\mathbb{K})$ |
| | $T_n^+$ à sp. $> 0$ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $T_n^+$ à sp. $> 0$ | $T_n^+$ à sp. $> 0$ |
| | $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ | $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ |
| | $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ | $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ |
| | Projections | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | $\emptyset$ | Projections | Projections |
| | Symétries | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | $\emptyset$ | Symétries | Symétries |
| | $cl(J_r)$, $1 \leq r < n$ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | M. de rg $\leq n$ | M. de rg $\leq n$ |
| | Mat. d'ordre fini | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | $\emptyset$ | M. à sp unitaire | M. à sp unitaire |
| Réduction | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Trig}_n(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{SD}$ |
| | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ | Non-S. D. |
| | $\mathrm{SDiag}_n(\mathbb{C})$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_n(\mathbb{C})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ | Non-S. D. |
| | $\mathrm{Diag}_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Trig}_n(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{SD}$ |
| | $\mathrm{Diag}_{n,\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ | Non-S. D. |
| | $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{C})$ | ✗ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_n(\mathbb{C})$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ | Non-S. D. |
| | $\mathrm{Trig}_n(\mathbb{R})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\mathrm{SDiag}_{n,\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Trig}_n(\mathbb{R})$ | $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{SD}$ |
| | $Nilp_n(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $Nilp_n(\mathbb{K})$ | $Nilp_n(\mathbb{K})$ |
| | $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ | $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ |
| | $cl(\mathcal{C}(\mathbb{K}))$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | $cl(\mathcal{C}(\mathbb{K}))$ | $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ | $cl(\mathcal{C}(\mathbb{K}))$ |
| Euclidiens | $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | $\emptyset$ | $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ | $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ |
| | $SO_n(\mathbb{R})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $SO_n(\mathbb{R})$ | $SO_n(\mathbb{R})$ |
| | $\mathcal{O}^-(n)$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{O}^-(\mathrm{n})$ | $\mathcal{O}^-(\mathrm{n})$ |
| | $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{S}_n^+$ | $\mathcal{S}_n^+$ |
| | $\mathcal{S}_n^{++}$ dans $\mathcal{S}_n$ | ✓ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\mathcal{S}_n^{++}$ ($\emptyset$ abs.) | $\mathcal{S}_n^+$ | $\mathcal{S}_n^+$ |
| Probas | S | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| | $\mathcal{S}^+$ dans $\mathcal{S}$ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\mathcal{S}^+$ ($\emptyset$ abs.) | $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S}$ |
| | $\mathcal{B}$ | ✗ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | $\emptyset$ | $\mathcal{B}$ | $\mathcal{B}$ |

## MATRICES (PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES)

- L'ensemble des matrices diagonales forme une sous-algèbre.
- Le produit de matrices symétriques est symétrique en seul cas de commutation.
- *(Formule de multiplication des matrices élémentaires)* $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
- Le produit de matrices peut tout à fait se calculer par blocs : c'est un théorème admis du programme. Par contre, on ne calcule pas les déterminants quelconques par blocs *a priori* ! Ils se calculent par contre s'ils sont des **déterminants diagonaux par blocs**, et l'on a également $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$, si au moins deux commutent.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- *(Théorème d'Hadamard)* Toute matrice à diagonale dominante est inversible. On en déduit que toute valeur propre d'une matrice est incluse dans l'un des **disques de Gershgorin**.
- Les puissances d'une matrice s'obtiennent systématiquement par **division euclidienne** dès que l'on possède un polynôme quelconque de l'idéal annulateur.
- *(Matrices d'opérations élémentaires)* Une matrice de **permutation** est une orthogonale n'ayant que des 0 et des 1, et n'ayant qu'un seul 1 par ligne et par colonne ; une matrice de **transvection**, dont la famille engendre $SL_n$, s'écrit toujours de la forme $I_n + aE_{ij}$ ; une matrice de **dilatation** est comme l'identité dont un terme de la diagonale aurait été remplacé par une constante. Les multiplications à gauche par ces matrices correspondent aux opérations susdites sur les lignes.
- En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, une matrice est dite symplectique si ${}^tMJM = J$. Leur ensemble forme le **groupe symplectique**.
- Le groupe spécial orthogonal est engendré par les réflexions.
- Une matrice réelle $S$ est **(définie) positive** si et seulement si elle est symétrique et que pour tout vecteur colonne non nul, ${}^tXSX$ est (strictement) positive. Caractérisation : une matrice est (définie) positive si et seulement si elle est symétrique et que son spectre réel est (strictement) positif.

## RÉDUCTION

- *(Théorème général du changement de base)*
$$Mat_{e',f'}(u) = \left(P_f^{f'}\right)^{-1} \times Mat_{e,f}(u) \times P_e^{e'}.$$
  De plus, en notant $P$ la matrice de passage de $e$ dans $e'$, où les vecteurs de la nouvelle base sont écrits dans l'ancienne, alors si $X$ est un vecteur écrit dans $e$ et $X'$ ce vecteur écrit dans $e'$, on a $X = PX'$, et c'est bizarre.
- Des matrices réelles $\mathbb{C}$-semblables sont $\mathbb{R}$-semblables.
- Le spectre est homogène : $\mathrm{Sp}(\alpha M) = \alpha \mathrm{Sp}(M)$.
- Pour déterminer une **valeur propre de module maximal** : la trace d'une matrice est la somme des valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités. En passant à la puissance, $Tr(A^k) \sim m(\lambda)\lambda^k$ où $\lambda$ est la valeur de plus grand module. On a donc : $\lambda = \lim\limits_{n\infty} \frac{Tr(A^{k+1})}{Tr(A^k)}$.

- Ne pas démontrer Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = \det(AI_n - A) = 0$ ! En fait, ce déterminant est à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈOREMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- Pour toutes matrices, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- Une matrice à valeurs propres deux à deux distinctes est diagonalisable (on dira : « simplement diagonalisable » et on note leur ensemble SDiag). C'est automatiquement le cas pour les matrices d'ordre fini.
- Une famille d'endomorphismes est **simultanément diagonalisable** si et seulement s'ils commutent deux à deux.
- Un endomorphisme est **nilpotent** si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre zéro. Ceci vient du lemme de propagation des zéros.
- Un endomorphisme est **trigonalisable**, si et seulement s'il est annulé par un scindé.
- *(Réduction de Jordan)* Un endomorphisme de polynôme minimal scindé se réduit en matrices diagonales par blocs de Jordan, c'est-à-dire des matrices presque scalaires, la diagonale juste au-dessus étant composée toute de 1. Ce résultat est précédé par la décomposition de Dunford, plus faible. De la décomposition de Frobenius, on déduit la description des classes de similitude matricielle.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable, quoique symétrique, car non réelle.
- *(Matrices compagnons)* Un polynôme unitaire avec les notations habituelles est caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$.
- *(Décomposition QR)* Toute matrice inversible se décompose comme le produit d'une orthogonale par une triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $> 0$ : les inverses des normes d'un certain vecteur colonne dans la première. C'est simplement l'algorithme d'ortho-normalisation de **Gram-Schmidt** ; le théorème sans la dernière hypothèse est encore vrai pour une matrice quelconque par densité. C'est similaire dans ce qui suit.
- *(Lemme de la racine carrée, décomposition polaire)* Pour tout endomorphisme positif d'un espace euclidien, il existe un endomorphisme symétrique, unique si on lui impose un spectre positif, dont il est le carré. On en déduit que toute matrice inversible s'exprime comme le produit d'une orthogonale par une symétrique à spectre positif, et que cette décomposition est unique.
- *(Inégalité de Hoffman-Wielandt)* Pour toutes matrices symétriques $A, B$,
  $$\sum_{i=1}^{n} \big(\lambda_i(A) - \lambda_i(B)\big)^2 \leq \|A - B\|_F^2.$$

## NOMBRES RÉELS

- À propos des bornes supérieures et inférieures, on a :
  $$\sup(-A) = -\inf(A) \text{ et } \inf(A) = -\sup(A)$$
- *(Inégalité du minimax de von Neumann)* Soient $(x_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ des réels. Alors :

$$\min_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le p} x_{ij} \ge \max_{1\le j\le p}\min_{1\le i\le n} x_{ij}.$$

- ℝ est **archimédien** : pour tout réel $x$, pour tout réel $y > 0$, il existe un entier $n$ tel que $ny > x$. Si on suppose le contraire, l'ensemble des $nx$ pour $n$ entier a une borne supérieure.
- Le **théorème de Bolzano-Weierstrass** se montre aisément par dichotomie, avec l'axiome du choix. (Celui-ci n'est pas utile, si l'on utilise le **lemme des pics** établissant que toute suite réelle admet une sous-suite monotone.) On en déduit le théorème des bornes atteintes, par exemple.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- *(Développement décimal illimité)* Tout réel admet un unique développement décimal illimité propre. Les décimaux en admettent exactement un propre et un impropre, les non-décimaux seulement un propre. Ce développement est **périodique** si et seulement si le réel est **rationnel**.

  ► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- La suite de décimaux $\left(\frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}\right)$ tendant vers $x$ établit la **densité de** $\mathbb{D}$. A fortiori, $\mathbb{Q}$ est dense dans ℝ. On en déduit que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ est dense dans ℝ ; par suite, ces deux ensembles ne sont ni ouverts ni fermés.
- *(Approximation diophantienne)* Pour tout réel $x$, il existe un rationnel $(p,q)$ tels que $\left|x-\frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{q}$.
- Les sous-groupes additifs de ℝ sont monogènes ou denses dans ℝ, par exemples les sommes de deux sous-groupes engendrés par des incommensurables. De même, les sous-groupes du cercle unité sont monogènes ou denses. Un corollaire classique : si $\theta$ est commensurable à $\pi$, alors la suite $\left(e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, mais s'il lui est incommensurable, alors $e^{i\mathbb{N}\theta}$ est dense dans $\mathbb{U}$. Les suites $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ sont alors denses dans $[-1,1]$.
- L'**irrationnalité de *e*** s'obtient par adjacence des sommes partielles de la série exponentielle avec elle-même additionnée du terme $\frac{1}{nn!}$.
- La puissance d'un **nombre algébrique** est algébrique. En effet, un complexe est algébrique si et seulement s'il est valeur propre d'une matrice de $M(Q)$. D'ailleurs, tous les complexes sont ℝ-algébriques.
- L'**ensemble triadique de Cantor** (ou « poussière de Cantor »), noté $K_3$, est défini comme la limite (intersection infinie) de la suite de parties de [0,1] définie par l'itération de « enlever le tiers central » ; c'est-aussi l'ensemble des réels dont un des deux développements triadiques ne contient que des 0 et des 2. $K_3$ est négligeable, indénombrable, fermé (et compact), sans point isolé, d'intérieur vide, totalement discontinu et homéomorphe à l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. De plus, tout espace compact est l'image de $K_3$ par une application continue.

# ANALYSE RÉELLE

## 1. SUITES

- Pour deux suites $u, v$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, nous avons toujours $u_{i+r}v_{j+r} - u_{k+r}v_{l+r} = (-b)^r\left(u_iv_j - u_kv_l\right)$.

- Si $a_n \sim b_n$, alors on peut écrire $\frac{1}{2}|b_n| \leq |a_n| \leq \frac{3}{2}|b_n|$. (Ou, plus généralement, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon|b_n| \leq |a_n| \leq (\varepsilon + 1)|b_n|$ et symétriquement.) Ceci permet de démontrer les théorèmes de comparaison de séries, par exemple.
- La **limite supérieure** et la **limite inférieure** d'une suite bornée sont respectivement ses plus grande et plus petite valeur d'adhérence. On les définit correctement par :
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{u_p \mid p \geq n\} \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{u_p \mid p \geq n\}.$$
- $(n(1 + (-1)^n))$ est une suite pas convergente n'ayant qu'une valeur d'adhérence.
- La limite d'une suite est invariante par permutation : si $\sigma$ est une application injective et $(u_n)$ converge, $(u_{\sigma(n)})$ converge vers la même limite. Même si ce n'est pas très utile, c'est incroyable que ce ne soit pas au programme.
- Le **théorème des suites adjacentes** donne que des suites adjacentes convergent vers la même limite, et un encadrement utile valable pour tout rang.
- *(Théorème de point fixe)* Une suite itérée convergente d'itérée continue tend vers l'un de ses points fixes. On peut l'utiliser par contraposée.
- *(Théorème du point fixe de Banach-Picard)* Toute suite définie par une itératrice contractante d'un intervalle dans lui-même converge, s'il en est, vers son point fixe. En effet, il en existe au plus un et il en existe toujours si l'intervalle est fermé, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires généralisé (on rappelle qu'il faut que l'itératrice stabilise l'intervalle de définition pour définir une suite itérée). Enfin, la contractance écrite avec $u_n$ et le point fixe donne par récurrence immédiate une majoration par quelque chose qui tend vers 0.
- *(Lemme de Fekete)* Pour $(u_n)_{n\geq 1}$ sous-additive, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \inf \frac{u_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On a un résultat analogue pour les suites sur-additives.
- On dispose de l'**échelle de comparaison** suivante pour les **développements asymptotiques** élémentaires : $\frac{1}{n^a} \ll \ln(n) \ll n^a \ll n^b \ll q^n \ll r^n \ll n! \ll n^n$, et on peut l'inverser, où $0 < a < b$ et $1 < q < r$. L'exponentielle s'intercale.

## 2. Fonctions

- $x \mapsto x + \sin(2\pi x)$ est un exemple de fonction croissante sur $\mathbb{N}$ mais non monotone (de quoi se rattraper avec brio en cas de gros lapsus à l'oral).
- Une **fonction convexe** sur un intervalle est continue en tout point intérieur, car elle admet des dérivées latérales en tout point intérieur. De plus, sa fonction dérivée n'a qu'un nombre dénombrable de discontinuités. En effet, **une fonction monotone a un nombre au plus dénombrable de discontinuités** : on se ramène au cas borné croissant en posant $g = \pm \arctan \circ f$.
- La réciproque d'une bijection convexe croissante est concave ; celle d'une bijection convexe décroissante est convexe.
- *(Démonstration des résultats de **croissances comparées**)* Pour montrer que $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0, on majore $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Les puissances s'obtiennent en exhibant des constantes telles que $\frac{\ln(x)^b}{x^a} = k\left(\frac{\ln(x^c)}{x^c}\right)^d$. L'exponentielle s'en déduit aisément.

- Toute fonction injective continue sur un intervalle est strictement monotone, ce qui n'est pas une démonstration exigible. On en déduit le **théorème de la bijection**, pour établir des existences et unicités.

  ▶ Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- Si $f$ est uniformément continue, alors $f(x) \leq a|x| + b$ où $b = |f(0)| + 1$ et $a$ est l'inverse de la valeur maximale de $\eta$ associée à $\epsilon = 1$.
- *(Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)* Une fonction d'un espace vectoriel dans un autre est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites dont la différence tend vers 0, la différence des suites images tend vers 0.
- *(Théorème de Heine)* Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue. On rappelle que le caractère lipschitzien entraîne l'uniforme continuité, qui entraîne la continuité, sur n'importe quel intervalle.
- La dérivabilité entraîne la **pseudo-dérivabilité**, mais la réciproque est fausse, la fonction peut même n'être pas continue. Bizarrement, la pseudo-dérivation est plus précise informatiquement.
- *(Théorème des accroissements finis généralisé)* Si $f$ et $g$ vérifient les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[a,b]$, il existe un point intérieur $c$ tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.
- *(Règle de l'Hospital)* De plus, si $f(a) = g(a) = 0$ et $l = \lim\limits_{a} \frac{f'}{g'}$ existe, $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = l$.
- *(Théorème de Darboux)* Une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, autrement dit elle n'a pas de discontinuité de deuxième espèce. Pour le démontrer, on peut :
  - I. Faire appel à la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$, $c$ fixé entre...
  - II. Par injection continue,
  - III. Une preuve topologique directe.
- Si $f$ est continue par morceaux, elle admet un nombre dénombrable de discontinuités, mais la réciproque est fausse.
- Le **théorème de limite de la dérivée** énoncé que si $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b[$ et que $f'$ admet une limite $l$ en $b$, alors $f$ est dérivable en $b$ et $f'(b) = l$. Le **théorème de prolongement des applications $\boldsymbol{C^1}$** énonce que si $f$ est $C^1$ sur $[a,b[$ et que $f$ et $f'$ admettent des limites finies en $b$, alors $f$ se prolonge en une application $C^1$ sur $[a,b]$, etc.
- Une fonction est **$\boldsymbol{D^k}$, $\boldsymbol{C^k}$ par morceaux** s'il existe une subdivision telle que la restriction de la fonction à chaque étage ouvert soit prolongeable sur le fermé en une fonction de classe $D^k$, $C^k$.
- L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle est une forme définie.
- Le **théorème fondamental de l'analyse** énonce que pour toute fonction $f$ continue sur un intervalle $I$, pour tout $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de $f$ s'annulant en $a$.
- Les **intégrales de Wallis** de la puissance du sinus entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont reliées par récurrence : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. On en déduit : $I_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}p\,!^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}p\,!^2}{(2p+1)!}$. Puisque

cette suite d'intégrales décroit et que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, on peut encadrer son carré et obtenir pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- On en déduit la **formule de Stirling**, en posant $v_n = \frac{e^n}{n^n}n!$ et $w_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}}$. Il faut vérifier que $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire $\ln w_{n+1} - \ln w_n$.

    ▶ Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

- L'**intégrale de Dirichlet** vaut $\frac{\pi}{2}$. Le lemme de Lebesgue en partie imaginaire appliqué à $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, $C^1$, fait apparaître l'intégrale constante $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t$. Il faut bien sûr avoir déjà montré la convergence du sinus cardinal : pour la semi-convergente, non nécessaire, on étudie l'intégrale entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$.
- La valeur de l'**intégrale de Gauss** ($\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ sur la droite réelle) s'obtient en remarquant que les fonctions $x \mapsto -\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ ont des dérivées égales, en posant $u = tx$.
- *(Fonction bêta)* On la définit : $\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$. On montre que $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
- Toute fonction continue par morceaux sur un segment est réglée, c'est-à-dire limite uniforme de fonctions en escalier.

    ▶ Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

- Le **théorème d'approximation de Weierstrass** se démontre facilement à l'aide des **polynômes de Bernstein** qui s'expriment $B_k^n = \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$. Le polynôme associé à $f$ s'écrit $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_k^n$ et CVU vers $f$ pour $f$ continue sur $[0,1]$. On peut également en faire une démonstration probabiliste.

    ▶ Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

## SÉRIES NUMÉRIQUES

- Les **intégrales de Bertrand** de la forme $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}\ln^{\beta}(t)}$ qui convergent entre 2 et l'infini si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$), et entre 0 et ½ si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$). Les convergences sont alors absolues, de même pour les séries associées.
- Les **intégrales trigonométriques** (c'est-à-dire presque riemanniennes avec un sinus ou cosinus au numérateur), à partir de 1 : divergent pour $\alpha \leq 0$, convergent absolument pour $\alpha > 1$ et sont semi-convergentes sur $]0,1]$. Les séries associées sont dites « de Fresnel ».
- Si l'équivalence n'est pas toujours assurée par comparaison $\Sigma/\int$, les techniques sont les mêmes. Autrement, cette technique reste incontournable pour l'obtention d'équivalents.
- *(Théorème de Césàro)* Toute suite convergeant dans $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente en moyenne, de même limite (la réciproque est fausse, prendre la **série de Grandi**). De plus, si $u_n$ est Cesàro-convergente, alors $u_n = o(n)$. Le théorème est en fait vrai

pour $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\right)_n$, où $\sum a_n$ est divergente. On l'énonce aussi comme **lemme de l'escalier** : si $u_n - u_{n-1} \to \lambda$, alors $\frac{u_n}{n} \to \lambda$.

❖ Une conséquence très importante permet d'obtenir des équivalents aux suites récurrentes $u$ strictement positives qui tendent vers zéro, dont l'itératrice vérifie $f(x) = x - ax^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})$. Dans ce cas : $u_n \sim \left(\frac{1}{a\alpha n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

❖ La **transformation d'Abel** est l'analogue parfait de l'intégration par parties, d'où son nom de **sommation par parties**. On en déduit le **critère d'Abel**, qui généralise les séries alternées. En particulier, si $a_n$, positive, décroît vers 0, $\sum a_n\, e^{in\theta}$ converge absolument, car $\sum e^{in\theta}$ est bornée.

❖ *(Règle de Raabe-Duhamel)* Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(t.g.de\ CV)$, alors $u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$ où $A > 0$. Il s'agit d'étudier le logarithme de la suite.

❖ Le **théorème de Mertens** est le même énoncé que le théorème du produit de Cauchy, mais il n'y a besoin que de la convergence absolue d'une seule série ; l'autre, peut être seulement convergente.

❖ L'**identité d'Euler** stipule que $\zeta(\alpha) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^\alpha}}$. On en déduit par exemple que la série $\sum \frac{1}{p^\alpha}$ sur les nombres premiers converge si et seulement si $\alpha > 1$. Il y a au moins trois preuves utiles de l'identité d'Euler : la preuve classique, calculatoire, une preuve analogue par récurrence avec le lemme de recouvrement croissant, et une preuve probabiliste plus élémentaire.

## Calcul différentiel, analyse fonctionnelle et suites de fonctions

❖ Le **théorème de convergence dominée** pour une suite d'intégrales de fonctions continues par morceaux *dont la limite simple est elle-même continue par morceaux*[1] permet l'interversion des limites.

❖ On rappelle que pour des $(u_n)$ intégrables dont la série converge simplement vers une somme continue par morceaux, si $\sum \int |u_n|$ converge, alors la somme est intégrable et on peut inverser. Contre-exemples : les $u_n(t) = t^{2n+1}$ sur $]-1,1[$, ou, plus précieux, les $u_n(t) = 2(n+1)te^{-(n+1)t^2} - 2nte^{-nt^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

► Fiche : Vingt et un théorèmes admis par le programme

❖ Beaucoup de théorèmes permettent des interversions dans le calcul. Ce sont :

| Interversion | Hypothèses |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ | CVU au voisinage de $a$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ | CVU au voisinage de $a$ |

[1] En effet, la limite simple de fonctions continues par morceaux ne l'est pas nécessairement. Lorsque qu'on construit l'ensemble triadique de Cantor $K_3$, la suite des $\left(\mathbb{1}_{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, continue par morceaux, a pour limite simple $\mathbb{1}_{K_3}$ qui n'est pas continue par morceaux, car elle a un nombre non dénombrable de discontinuités.

| | |
|---|---|
| $\displaystyle\sum_{p\in A}\sum_{q\in B} a_{p,q} = \sum_{q\in B}\sum_{a\in A} a_{p,q}$ | Pour tout $p$, $\left(a_{p,q}\right)_q$ est sommable et la série des sommes est absolument convergente |
| $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$ | CVU de la suite (continuité des $f_n$) |
| $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$ | CVS et hypothèse de domination (Cpm des $f_n$ et limite Cpm) |
| $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ | CVU de la série (continuité des $f_n$) |
| $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ | Intégrabilités, CVS et convergence des normes 1 (Cpm des $f_n$ et limite de la somme Cpm) |
| $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n = \left(x \mapsto \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n\right)$ | $f_n$ CVU sur tout sous-segment, les $F_n$ notant leurs primitives s'annulant en $a$ |
| $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n = \left(x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$ | $\sum f_n$ CVU sur tout sous-segment, les $F_n$ notant leurs primitives s'annulant en $a$ |
| $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}^k f_n}{\mathrm{d}t^k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\lim_{n\to\infty} f_n$ | <u>Cas $k=1$</u> : $f_n$ $C^1$<br>CVS des $f_n$, CVU des $f_n'$ sur tout sous-segment<br><u>Cas général</u> : $f_n$ $C^k$<br>CVS des $f_n$, CVS des $f_n^{(i)}$ pour $1 \le i < k$ et CVU des $f_n^{(k)}$ sur tout sous-segment |
| $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k f_n}{\mathrm{d}t^k}$ | Idem pour les $\sum f_n$ (et $\sum f_n'$, etc.) sur tout sous-segment |
| $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)\mathrm{d}t$ | <u>Cas $k=1$</u> : Voir ci-dessous.<br><u>Cas général</u> :<br>• $f(\cdot,t)$ de classe $C^k$ ;<br>• pour tout $0 \le p < k$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,\cdot)$ intégrable ;<br>• $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,\cdot)$ est Cpm ;<br>• hypothèse de domination sur elle uniforme en $x$ |
| $\displaystyle\int_I \int_J f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_J \int_I f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ | Si $I \times J$ est un pavé, et $f$ est continue, cela suffit.<br>Sinon, voir ci-dessous. |
| $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ | $f$ de classe $C^2$ |

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

❖ Le **théorème de Leibniz**, aussi appelé théorème de dérivation sous le signe intégral, garantit l'échange entre la dérivée et l'intégration d'une fonction à deux variables. Il n'est pas admis. Ses hypothèses sont :

- $f(\cdot,t)$ de classe $C^1$ ;
- $f(x,\cdot)$ intégrable ;
- $\frac{\partial}{\partial x} f(x,\cdot)$ est Cpm ;
- hypothèse de domination sur elle uniforme en $x$.

En réalité, au lieu de supposer la première de classe $C^1$, on peut la prendre uniquement dérivable. L'échange se produit encore, mais la fonction définie par une intégrale n'est plus nécessairement $C^1$.

❖ Le **théorème de Fubini** pour les intégrales a deux facettes. Dans sa version continue sur un pavé (le plus utilisé en physique), il n'y a besoin d'aucune hypothèse supplémentaire. Pour les intégrales généralisées, il se rapporte aux théorèmes de convergence dominée avec les hypothèses suivantes :

- $\int_I \ |f(x,y)|\mathrm{d}x$ et $\int_J \ |f(x,y)|\mathrm{d}y$ existent toujours pour l'autre variable fixée ;
- $y \mapsto \int_I \ |f(x,y)|\mathrm{d}x$ et $x \mapsto \int_J \ |f(x,y)|\mathrm{d}y$ sont continues ;
- la première est intégrable sur $J$.

Dans les deux cas, le résultat n'est pas au programme, souvent admis.

❖ Les **théorèmes de Dini** affinent les théorèmes de convergence des suites de fonctions. Le **premier** établit qu'une suite croissante de fonctions continues définies sur un compact convergeant simplement vers une fonction continue converge uniformément. Le **second**, dit « faux Dini », établit le même résultat pour une suite de fonctions croissantes continues définies sur un segment. (Dans les deux cas, les fonctions doivent être à valeurs numérique.)

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

❖ Le **lemme de Riemann-Lebesgue** permet d'établir que, pour tout fonction continue sur un segment $f$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\mathrm{d}x = 0$. C'est une conséquence du théorème d'approximation uniforme, sachant que la cas $C^1$ est largement plus zézé.

❖ Le théorème de Liouville-Rosenlicht en algèbre différentielle a pour conséquence notable que la primitive de la fonction gaussienne $\exp -x^2$, qui est la **fonction d'erreur** erf à la constante $2/\sqrt{\pi}$ près, n'est pas exprimable à l'aide des fonctions usuelles. On rappelle que si $X$ suit $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(X \in [-z,z]) = \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$.

❖ Par fermeture, l'**exponentielle matricielle** est polynomiale, ce polynôme dépendant de la matrice. Cependant, le coefficient de $X^n$ n'est pas nécessairement identifiable au développement en série entière (et non !).

❖ Une conséquence du lemme des noyaux : si l'on a l'**équation différentielle linéaire d'ordre $n$ homogène à coefficients constants** :

$$\forall t\ \ y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y(t) = 0,$$

alors en posant $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1$, l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $t \mapsto$

$t^k e^{\lambda t}$ où $\lambda$ est racine complexe de $P$, $k$ est un entier quelconque strictement inférieur à la multiplicité de $\lambda$. En particulier, si $P$ est à racines simples, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la solution est $t \mapsto A_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t}$.

- Une équation différentielle **autonome** est telle que la variable n'apparaît pas dans l'équation fonctionnelle, c'est-à-dire : $f\left(y^{(n)}, \dots, y', y\right) = 0$.
- Le **théorème de Cauchy-Lipschitz** est, dans sa version linéaire ou non, l'expression mathématique du **déterminisme** décrié par Poincaré. La partie « unicité » a des conséquences très fortes : deux courbes intégrales distinctes ne se rencontrent jamais, une solution non nulle de l'équation homogène ne s'annule pas, une solution est réelle si et seulement si sa condition initiale est réelle, etc. On l'utilise en physique : par exemple, pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, avec une condition initiale, on peut trouver une solution évidente, et le tour est joué.
- *(Lemme des tresses)* Une application de trois variables antisymétrique par rapport aux deux premières et symétrique par rapport aux deux dernières est nulle.
- La différentielle du déterminant s'écrit : $d\det_A(H) = Tr(\mathrm{Com}(A)^T H)$. On utilise la densité du groupe linéaire.
- *(Règle de la chaîne)* De façon générale, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont définies sur des ouverts, alors avec les notations usuelles des composantes,

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!] \qquad \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

- *(Théorème de caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^k$)* Une fonction est de la $k$-ième classe de régularité (c'est-à-dire, $k$-différentiable est de différentielle $k$-ième continue) si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre $k$ existent et sont continues.

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

- *(Lemme de Poincaré)* Toute 1-forme différentielle fermée de classe $C^1$ sur un ouvert étoilé est exacte.
- *(Théorème des fonctions implicites)* Si $E$ est de dimension $p$, si $F, G$ sont de dimension $q$, et $f$ est définie sur un ouvert de $E \times F$ à valeurs dans $G$, si $f$ est $C^k$, s'annule en un couple et que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ est un isomorphisme de $F$ sur $G$, alors il existe des voisinages ouverts $V$ de $a$ et $W$ de $b$ tels que $\forall x \in V \quad \exists!\, y_x \in W \quad f(x, y_x) = 0$ et la fonction $y$ est $C^k$ sur $V$.

# TOPOLOGIE

## 1. TOPOLOGIE GÉNÉRALE

- En topologie générale, plusieurs propriétés, équivalentes dans les espaces métriques, définissent la **séparation**, qui se traduit notamment par l'unicité de la limite :
  - → $T_0$ (*espace de Kolmogorov*) : pour deux points distincts, l'un admet un voisinage qui ne contient pas l'autre ;
  - → $T_1$ (*espace accessible*) : les singletons sont fermés ;
  - → $T_2$ (*espace de Hausdorff*) : deux points distincts admettent des voisinages distincts ;

→ $T_{2\,3/4}$ (*espace d'Urysohn*) : pour tous points distincts $x, y$, il existe une fonction continue de $E$ dans $[0,1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ ;

→ $T_4$ (*espace normal*) : pour tout couple de fermés disjoints, il existe un couple d'ouverts disjoints dont l'un contient l'un des deux fermés et l'autre, l'autre.

Ces axiomes de séparation s'impliquent relativement, de $T_4 \Rightarrow \cdots \Rightarrow T_0$. Il en existe d'autres encore, intercalés dans ceux-ci.

❖ L'**adhérence** est la réunion des **points isolés** et des **points d'accumulation**. Un point isolé est son propre voisinage, il appartient à la partie ; les points adhérents qui n'appartiennent pas à la partie accumulent donc forcément. Un voisinage d'un point d'accumulation rencontre la partie toujours en une infinité de points (ou, ce qui n'est équivalent que dans les $T_1$, et donc dans les métrisables, en au moins deux points : cette propriété plus faible caractérise les **points limites**). On note $A'$ l'**ensemble dérivé** de $A$, c'est-à-dire l'ensemble de ses points limites.

❖ Plus généralement, un espace où tous les points sont isolés est dit **discret** (c'est le cas en topologie discrète). Au contraire, un espace sans point isolé est dit **parfait**. Un **discret** n'est pas forcément fermé, ni le contraire.

❖ L'adhérence d'une partie est l'ensemble des points qui lui sont à une distance nulle.

❖ La **frontière** d'une partie $A$ égale celle de $\complement_E A$ ; c'est même $\bar{A} \cap \overline{\complement_E A}$. Enfin, un espace est toujours partitionné par l'intérieur de cette partie, sa frontière, et le complémentaire de son adhérence $\complement_E \bar{A}$.

❖ L'intérieur d'un **produit** est le produit des intérieurs. L'adhérence d'un produit est le produit des adhérences. La frontière de $A \times B$ est $\left(\bar{A} \times \mathrm{Fr}(B)\right) \cup (\mathrm{Fr}(A) \times \bar{B})$.

❖ Le **théorème de compacts emboîtés** énonce que toute intersection décroissante de compacts non vide est non vide. Dans le cas réel des **segments emboîtés**, c'est une application des suites adjacentes. Enfin, dans un espace complet, il s'énonce plus généralement comme **théorème des fermés emboîtés**.

❖ *(Théorème de Baire)* Une conséquence de ce qui précède : en dimension finie, une intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.

❖ L'image d'une partie dense par une application continue est dense dans l'image de l'espace.

❖ *(Prolongement par continuité dense)* Une application continue en tout point d'une partie dense d'un espace et admettant en tout point de l'espace une limite finie admet un prolongement continu en tout point.

❖ La convexité, le caractère étoilé, la discrétion et les suites de Cauchy ne sont pas des notions topologiques : elles ne sont pas stables par homéomorphismes ou ne peuvent être définies dans une topologie non métrisable.

❖ *(Propriété de Borel-Lebesgue)* Un espace topologique est **compact** s'il est séparé et, de tout **recouvrement ouvert**, on peut extraire un sous-recouvrement fini. On remarque qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et **précompact** (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon$, on le puisse recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$, ou encore, toute suite admet une sous-suite de Cauchy).

❖ Une **bijection continue sur un compact** est un **homéomorphisme**. Pour le montrer, on utilise la caractérisation par images réciproques de fermés.

- Une suite définie sur un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
- La **distance à un compact** ou entre deux compacts est toujours atteinte. De même, la **distance entre un compact et un fermé** est atteinte. C'est faux pour deux fermés : le contre-exemple classique est l'**hyperbole et son asymptote**.

## 2. CONNEXITÉ

- Un espace est dit **connexe**, si les seuls ouverts fermés sont triviaux. Il est équivalent de dire qu'on le peut partitionner en deux ouverts (ou deux fermés) disjoints non triviaux, ou que toute application continue de l'espace dans $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète est constante.
- Toute **réunion de connexes se rencontrant deux à deux** est connexe, ou encore toute réunion de connexes enchaînés est connexe.
- L'adhérence d'un connexe est connexe, mais c'est faux pour l'intérieur. Il n'y a pas de tels théorèmes pour la connexité par arcs.
- L'image continue d'un connexe est connexe. **Connexité par arcs** entraîne connexité, mais la réciproque est fausse. Le contre-exemple classique est le **sinus du topologue**.
- Un espace contenant un point isolé ne peut être connexe.

## 3. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

- Une norme composée à droite par une application linéaire injective est encore une norme.
- On définit la **norme subordonnée** (aussi appelée **norme d'opérateur**, ou encore **norme triple**) sur l'espace des applications linéaires continues entre deux espaces déjà normés : $|||x||| = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf_{\forall x \in E \ \|u(x)\| \leq k\|x\|} k$. On peut voir que $B_f(0,1)$ est remplaçable par la boule ouverte ou la sphère unité. Elle dépend donc à la fois de la norme de départ et de celle d'arrivée. On a aussi, d'une part, $\|u(x)\| \leq |||u||| \|x\|$ et d'autre part $|||u \circ v||| \leq |||u||| \, |||v|||$.
- Pour montrer l'**équivalence des normes en dimension finie sur** $\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$, on remarque que la norme admet un minimum sur la sphère unité de la norme infinie et l'on normalise. Des normes sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie ne sont pas nécessairement équivalentes !

► Fiche : VINGT ET UN THÈOREMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

- *(Théorème de Riesz)* Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte. Il s'agit de remarquer que la **distance à un fermé en dimension finie** est toujours atteinte : c'est en fait une distance à un compact. On a donc un vecteur unitaire dont la distance à $F$ est unitaire. Il suffit alors de construire une suite par récurrence sur le sous-espace vectoriel engendré par les premiers termes et qui n'est pas de Cauchy.
- Deux espaces de dimension finie sont de même dimension si et seulement s'ils sont homéomorphes, ce qui est garanti par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

- En dimension finie, la convergence est un invariant de norme puisqu'elles sont toutes équivalentes. Mieux, la limite est invariante par changement de norme.
- Beaucoup de propriétés à la fois topologiques et algébriques sont automatiquement infirmées en dimension infinie, parmi lesquelles :

| | |
|---|---|
| Endomorphisme injectif non surjectif | $P \mapsto XP$ de $\mathbb{R}[X]$ |
| Endomorphisme sans polynôme minimal | $P \mapsto P'$ de $\mathbb{R}[X]$ |
| Forme linéaire non représentable par un produit scalaire | $P \mapsto P(1)$ de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire usuel |
| Orthogonal non supplémentaire et pour lequel $\perp$ n'est pas involutif | $\{f \mid f(0) = 0\}$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel |
| Fermé borné non compact | $B_O(0,1)$ de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme infinie |
| Application linéaire non continue | $f \mapsto f(1)$ de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme 1 |
| Normes non équivalentes sur un $\mathbb{R}$-espace | Normes 1 et infinie sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ |
| Sous-espace vectoriel non fermé | Les suites presque nulles dans les suites bornées pour la norme infinie |

- L'enveloppe convexe d'un compact est compacte en dimension finie, conséquence du théorème de Carathéodory.
- *(Théorème de Markov-Kakutani)* Si $K$ est un convexe compact non vide et $G$ un ensemble d'opérateurs affines continus commutant deux à deux et stabilisant $K$. Alors il existe dans $K$ un point fixe par tous les éléments de $G$.
- Un **hyperplan** est fermé ou dense.
- Un sous-espace vectoriel n'est jamais discret : on pose le fameux. Un sous-espace vectoriel strict est d'intérieur vide. Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.
- *(Quelques évidences)* Un espace vectoriel privé d'un hyperplan n'est plus connexe par arcs. Pour tout sous espace vectoriel plus petit, il l'est encore. Si $E$ est de dimension au moins 2, pour tout $a$, $E \backslash \{a\}$ est connexe par arcs. Un espace admettant un borné dense est borné. Un sous-espace vectoriel strict n'est jamais ouvert. Tout espace vectoriel de dimension finie est localement compact.
- Une **application linéaire** est **continue** si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité (ou la boule unité fermée, ou la boule unité ouverte), ou encore si et seulement si l'image réciproque de la sphère unité (ou de la boule unité fermée) est fermée.
- Une **forme linéaire est continue** si et seulement si son noyau est fermé.

## GÉOMÉTRIE

- On peut fournir une démonstration du théorème de Pythagore avec la statique des fluides. Pour cela, considérer un aquarium prismatique à base triangle rectangle.
- Le **théorème d'Al-Kashi** établit que, dans tout triangle, on a à l'instar du triangle rectangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2abc\cos(\widehat{b,c})$.
- Parallèlement, la **loi des sinus** montre que, dans un triangle $ABC$, nécessairement $\frac{BC}{\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \frac{AC}{\sin(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})} = \frac{AB}{\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}$.
- *(Droites remarquables du triangle)* Dans un triangle, les médiatrices concourent au centre du cercle circonscrit $O$ ; les médianes concourent à l'isobarycentre $G$ ; les

hauteurs concourent en l'orthocentre $H$ ; les bissectrices au centre du cercle inscrit. Les points $O, G, H$ sont alignés sur ce qu'on appelle la **droite d'Euler**.

- *(Théorème de Ménélaüs, théorème de Ceva)* Soient, dans $ABC$, trois points $D, E, F$ des droites $(BC), (AC)$ et $(AB)$ différents des sommets. Ils sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1$. En outre, les droites $(AD)$, $(BE)$ et $(CF)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si ce produit égale $-1$.
- *(Théorème de Thalès allemand)* Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Réciproquement, un triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont l'hypoténuse est le diamètre.
- *(Théorème de l'angle au centre)* Dans un cercle, un angle au centre a pour mesure le double de tout angle inscrit interceptant le même arc.
- L'**angle entre deux tangentes** en des points d'un cercle égale l'ouverture entre ces deux points, ce qu'on utilise en physique dès qu'on introduit la tension d'un objet arrondi (cabestan, ressort circulaire, etc.)
- Les géodésiques de la sphère sont les grands arcs.
- *(Caractéristiques de l'ellipse)* Une ellipse vérifie l'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les constantes étant les **demi-axes**. La distance du centre de l'ellipse à l'un des **foyers** vaut $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et l'**excentricité** vaut $e = \frac{c}{a}$. Le paramétrage de l'ellipse consiste en deux fonctions affines de la variable cosinusoïdale et sinusoïdale, de pentes les demi-axes. Son équation polaire est $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$, $p$ étant la longueur de la corde parallèle à la directrice $\Delta$ passant par un foyer $F$, où $\forall M \ \frac{d(M,F)}{d(M,\Delta)} = e$.
- Les **solides de Platon** sont les seuls polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Utiliser la caractéristique d'Euler.
- *(Formule d'Olinde Rodrigues)* Si $r$ est la rotation d'angle $\theta$ autour de $\vec{n}$, alors :
$$r(\vec{x}) = \vec{x} + \sin\theta\,(\vec{n} \wedge \vec{x}) + (1 - \cos\theta)(\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x})).$$
- *(Théorème de Carathéodory)* L'enveloppe convexe d'une partie, c'est-à-dire le plus petit convexe la contenant, ou encore l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ses éléments, d'un espace de dimension $n$ est décrit comme l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de $A$, appelé **simplexes**.

# COMBINATOIRE

## 1. DÉNOMBREMENT

- *(Principe des tiroirs)* Si $n$ chaussettes occupent $m < n$ tiroirs, alors au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes. On en déduit que deux personnes en Australie ont le même nombre de cheveux ; de neuf points dans un triangle d'aire $A$, trois déterminent un triangle d'aire inférieure à $\frac{A}{4}$ ; aussi, on peut disposer au maximum 14 **fous sur un échiquier** qui ne soient pas en prise. Il existe des déclinaisons de l'énoncé du principe du tiroir, mais ce sont toutes foncièrement les mêmes.
- *(Lemme des bergers)* S'il existe une surjection $f : X \to Y$ telle que pour tout $y \in Y$, card $(f^{-1}(\{y\}) = k$, alors $\mathrm{card}(X) = k \times \mathrm{card}(Y)$.

- *(Principe de la valeur moyenne)* Dans une famille finie de nombres, au moins l'un d'eux est supérieur à leur moyenne ; de même au moins l'un d'eux lui est inférieur. Cela fonctionne encore, s'ils conviennent, avec les autres moyennes. Application : si l'on place les dix premiers entiers sur le cercle, trois consécutifs au moins ont une somme supérieure à 18.
- L'**identité de Vandermonde** résulte d'une preuve combinatoire immédiate : $\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.
- *(Formule d'inversion de Pascal)* La transformation binomiale est en quelque sorte inversible. Ceci s'écrit, pour des nombres $a_0, \dots, a_n$ :
$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left( \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \right).$$
- *(Dénombrement des applications)* Il y a $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et $\binom{n+p-1}{p}$ applications croissantes, et c'est aussi le nombre de combinaisons avec répétitions éventuelles. D'autre part, on y dénombre $(n)_p$ injections et $\sum_{k=0}^{p} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$ surjections.

<table>
<tr><th colspan="3">NOMBRE DE TIRAGES…</th></tr>
<tr><td>… de $p$ objets dans un sac de $n$ objets</td><td>Sans répétition</td><td>Avec répétition</td></tr>
<tr><td rowspan="2">En comptant l'ordre</td><td>$p$-listes sans répétition/arrangements<br>$A_n^p = (n)_p$<br>(tirages successifs sans remise)</td><td rowspan="2">$p$-listes<br>$n^p$<br>(tirages successifs avec remise)</td></tr>
<tr><td>permutations<br>$\#\mathfrak{S}_n = n!$<br>$(p = n)$</td></tr>
<tr><td>Sans ordre</td><td>$p$-combinaisons<br>(tirages simultanés)<br>$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$</td><td>$p$-combinaisons avec répétition (monômes unitaires de degré $p$ à $n$ indéterminées)<br>$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$</td></tr>
</table>

- Le **problème des ménages** consiste à placer $n$ couples hétérosexuels monogames autour d'une table sans placer personne à côté de son conjoint. Ce nombre est explicitement de $2(n!) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$.
- Le nombre de **dérangements** du groupe symétrique (permutations sans point fixe) vérifie $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$. Aussi : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
- *(Nombres de Catalan)* Les nombres de Catalan sont donnés par la relation de récurrence forte : $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ et l'on en déduit : $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (il est donc

pair). Ils dénombrent les **mots de Dyck**, les parenthésages en milieu non associatif, les triangulations du polygone, les chemins sous-diagonaux monotones dans le carré. Pour montrer leur expression, on utilise leur série génératrice.

### 2. THÉORIE DES GRAPHES

- On repère **cinq grandes catégories** de graphe : homogènes, hiérarchiques, cycliques, polaires ou quelconques, c'est-à-dire sans propriétés topologiques. Par exemple, un **arbre** est un graphe connexe acyclique ; en informatique, on le définit comme un ensemble muni d'une relation de paternité tel qu'il existe une racine, un chemin fini à la racine pour tout nœud, une feuille étant un nœud sans fils.
- Un **graphe** $(V, A)$ est **régulier** si tous ses sommets ont même degré. Il est dit **simple** si pour deux sommets, il ne peut y avoir qu'un seul type d'arête (majoritairement, c'est qu'il est non **orienté**). Un graphe est **planaire** s'il est représentable sur le plan sans que ses arêtes se croisent. Un **morphisme de graphes** est une application d'un graphe dans un autre qui respecte l'**adjacence**, c'est-à-dire la relation d'équivalence « être relié par une arête ».
- *(Identité des poignées de main)* La somme des degrés des sommets d'un graphe fini non orienté est le double du nombre de ses arêtes.
- Un **cycle** est une suite d'arêtes qui arrive à l'endroit de son départ. Un **chemin hamiltonien** est une suite d'arêtes qui passe par chaque sommet une fois une seule. Un graphe est hamiltonien s'il admet un cycle hamiltonien ; un graphe est **eulérien** s'il admet un **circuit** eulérien, c'est-à-dire un cycle passant par chaque arête une fois une seule. Ses deux notions n'ont aucun rapport, pour exemple, le graphe papillon.
- Un graphe est **complet** si deux sommets sont toujours reliés : à isomorphisme près, il n'y a que $K_n$, ayant $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes. Tout graphe complet est hamiltonien. Une **clique** d'un graphe est un sous-graphe complet ; la recherche d'une clique de taille maximale est un problème **NP-complet**.

## INFORMATIQUE

- Pour compter en **binaire**, il faut, à partir d'un nombre décimal, procéder à des **divisions entières successives**, en repérant, à chaque fois, la puissance de 2 la plus proche inférieurement au reste. Pour passer d'un nombre binaire à un nombre décimal, il suffit d'écrire le développement et de calculer.
- *(Structures de données abstraites)* Ce sont :

| Nom | Commentaires | Implémentation |
|---|---|---|
| Piles | Priorité LIFO<br>Dynamique<br>Non mutable | creer_pile(), est_vide($p$), empiler($p, x$), depiler($x$) |
| Files/queues | Priorité FIFO<br>Dynamique<br>Non mutable | creer_file(), est_vide($f$), enfiler($f, x$), defiler($x$)<br>(Il est très efficace de le coder avec deux piles.) |
| Files de priorité | Priorité par attribut<br>Dynamique<br>Mutable | creer_fdp(), est_vide($f$), inserer($x, c$), extraire() |

- *(Principe de descente infinie de Fermat)* Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels. Ceci est la clef permettant de montrer rigoureusement la terminaison des algorithmes, si l'on choisit un **invariant de boucle** congru.
- En informatique, on utilise aussi : $f = \Omega(g)$ pour noter $g = \mathcal{O}(f)$, $f = \omega(g)$ pour noter $g = o(f)$ et enfin $f = \Theta(g)$ pour noter $(g = \mathcal{O}(f) \wedge f = \mathcal{O}(g))$, mais cette dernière notation est plus faible que l'équivalence asymptotique.
- La **complexité en moyenne** est définie par $\sum_{d \text{ donnée de taille } n} \mathbb{P}(d) cout(d)$. Elle est donc toujours comprise entre les complexités dans les meilleur et pire des cas.
- *(Exponentiation rapide)* L'algorithme d'exponentiation rapide de $x$ par $n$ est récursif : si $n$ est pair, on calcule $p\left(x^2, \frac{n}{2}\right)$ ; si $n$ est impair, $x \times p\left(x^2, \frac{n-1}{2}\right)$ et le cas de base est $n = 1$. Cette méthode est en $\mathcal{O}(\log n)$.
- *(Algorithmes de tris)* Les tris sans hypothèses les plus connus, avec leurs complexités, sont :

| Nom | Principe | Meilleur cas | En moyenne | Pire cas | Stabilité |
|---|---|---|---|---|---|
| Tri stupide | On essaie aveuglément, au hasard, toutes les permutations des éléments. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n!)$ | $\infty$ | Non |
| Tri par sélection | On sélectionne le plus petit élément et le place en premier, puis le second plus petit et le place en second, etc. | $\mathcal{O}(n^2)$ | | | Presque |
| Tri par insertion | À chaque étape $k$, on remonte le $k$-ième élément jusqu'à sa place insérée dans la liste déjà triée des $k-1$ précédents, comme dans une main de cartes. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | | Oui |
| Tri à bulles/tri par propagation | On prend tous les éléments à partir de la fin, et on remonte en comparant les adjacents tant que le précédent est plus petit que le suivant. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | | Oui |
| Tri rapide/ quicksort | On choisit et place un élément arbitraire à son endroit final, il fait pivot. Chaque partie est ensuite triée de même récursivement (principe *divide ut imperes*). Le cas de base est celui d'une liste à un ou deux éléments. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | Non |
| Tri fusion (Neumann) | On sépare la liste en deux parties (principe *divide ut imperes*) et les trie récursivement. On fusionne ensuite les deux listes triées en une liste complète triée, ce qui est peu coûteux. | $\mathcal{O}(n \log n)$ | | | Oui |
| Tri par tas | On voit la liste comme un arbre binaire où le $n$-ième élément aurait pour nœuds fils les $2n$ et $2n+1$-ièmes. On cherche alors à obtenir un « tas », par « percolation », où notamment les pères sont supérieurs aux fils et les feuilles de profondeur maximale sont tassées sur le côté. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | | Non |
| Tri à peigne | Il résout les tortues du tri à bulles, c'est-à-dire les petites valeurs en fin de liste, en comparant non pas les adjacents mais des éléments séparés d'un certain intervalle. | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | Non |
| Tri cocktail | Il résout également les tortues du tri à bulles en parcourant la liste dans un sens et dans l'autre de façon alternée. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | | Oui |
| Tri de Shell | Le tri de Shell améliore le tri par insertion de la même façon que le tri à peigne améliore le tri à bulles. | $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | Non |
| Introsort | Amélioration du tri rapide, il consiste à mesurer la profondeur de récursion en cours, et quand elle dépasse | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | Non |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $K \log n$, on trie le sous-tableau restant un algorithme équivalent au tri fusion. | | | | |
| Smoothsort | Amélioration du tri par tas, il résout le défaut de ce dernier de n'être pas un tri stable. | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | Non |
| Timsort | Tri hybride dérivé du tri fusion et du tri par insertion | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | Oui |
| Tri rapide randomisé | C'est un algorithme de Las Vegas, où le pivot du tri rapide est choisi aléatoirement. | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n \log n)$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | Non |

Parmi eux, les tris **en place** modifient directement la liste de départ. Les tris **stables** préservent l'ordre initial des éléments que l'ordre considère comme égaux. Par exemple, le tri arborescent nécessite l'introduction de la structure de données correspondante ; il n'est donc pas en place.

❖ On démontre que les méthodes de tri optimales sont celles de complexité temporelle en moyenne $\mathcal{O}(n \log n)$ : il n'y a pas mieux.

❖ Pour tracer un graphe sur Matplotlib, on utilise systématiquement le script suivant :

```
def graphe(f,a,b):
    from matplotlib import pyplot as plt
    from numpy import linspace
    plt.clf()
    plt.grid(1)
    plt.xlim(a,b)
    plt.ylim(a,b)
    t=linspace(a,b,num=200)
    plt.plot(t,[f(k) for k in t],color='red',label='Fonction')
    plt.legend()
    plt.show()
```

❖ La **vitesse de convergence** d'une suite $(x_n)$ vers $\xi$ est d'ordre $q$ s'il existe $\mu$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left| \frac{x_{k+1}-\xi}{x_k-\xi} \right| = \mu$. Une convergence linéaire où $\mu = 0$ est dite **superlinéaire**. Si elle n'est vérifiée pour aucun $\mu < 1$, elle est **sous-linéaire**.

❖ *(Méthode de Richardson)* Pour accélérer la convergence d'une suite convergente $u_n = l - ak^n + \mathcal{O}(r^n)$, l'idée générale est de poser $v_n = u_n + ak^n$, mais c'est souvent intractable. Richardson pose : $v_n = \frac{u_{n+1}-ku_n}{1-k}$, et dans ce cas, $v_n$ tend vers $l$ en $\mathcal{O}(r^n)$. Aitken propose de poser : $v_n = \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}$.

❖ Les **recherches de zéros** en analyse numérique sont des méthodes d'approximation.

| Nom | Principe | Majoration de l'erreur | Vitesse de convergence |
|---|---|---|---|
| Balayage | On fixe un pas et l'on avance, à partir d'un point que l'on sait de valeur négative, jusqu'au premier point de valeur positive. | $\varepsilon$ | nulle |
| Dichotomie | À partir d'un segment, à chaque étape, on étudie le signe de la valeur en son milieu de sorte à sélectionner une moitié de segment où se trouve encore le zéro. | $\dfrac{b-a}{2^n}$ | linéaire |
| Méthode des tangentes (Newton) | À chaque étape, on sélectionne pour nouveau point de la courbe celui dont l'abscisse est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au point actuel. | Si $f$ $C^2$, $K\|x_0 - a\|^{2^n}$ où $K = \frac{\sup\|f''\|}{2\inf\|f'\|}$ | quadratique si $\|x_0 - a\| < \frac{1}{K}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Méthode de la sécante | Similairement, à chaque étape, on obtient une corde de la courbe en déterminant l'une des nouvelles extrémités comme le point dont l'abscisse est l'intersection de l'axe des abscisses avec la corde actuelle. | $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{\inf \lvert f'\rvert}$ | géométrique d'ordre $\phi$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ |

❖ *(Méthode de Héron)* Pour extraire la racine carrée de $a$, la suite de premier terme quelconque $> 0$ définie par $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ converge en décroissant de manière quadratique vers $\sqrt{a}$, avec $\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leq \frac{\left|x_n - \sqrt{a}\right|^2}{2\sqrt{a}}$ à chaque étape. On l'appelle aussi méthode babylonienne.

❖ L'**approximation d'intégrale** se fait par des **méthodes de quadrature** :

| Nom | Formule | Majoration de l'erreur |
|---|---|---|
| Méthode des rectangles à gauche | $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ | $\frac{(b-a)^2}{2n}\max_{[a,b]}\lvert f'\rvert$ pour $f$ $C^1$ |
| Méthode des trapèzes | $\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)$ | $\frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a,b]}\lvert f''\rvert$ pour $f$ $C^2$ |
| Méthode du point milieu | $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)$ | $\frac{(b-a)^3}{24n^2}\max_{[a,b]}\lvert f''\rvert$ pour $f$ $C^2$ |
| Méthode de Simpson | $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right]$ | $\frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{[a,b]}\lvert f^{(4)}\rvert$ pour $f$ $C^4$ |
| Méthode de Romberg | Méthode d'accélération de Richardson appliquée à la méthode des trapèzes | |
| Méthode de Monte-Carlo | On fait apparaître des points au hasard dans un rectangle d'aire connue. En calculant le pourcentage de points en-dessous de la courbe, on obtient une approximation de l'aire sous la courbe. | $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ avec la probabilité $1-\alpha$ où $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de $\mathcal{N}(0,1)$ |
| Méthodes de quadrature de Gauß | | |

❖ Les méthodes de **résolution d'équations différentielles** sont peu nombreuses :

| Nom | Champ d'application | Méthode |
|---|---|---|
| Méthode d'Euler explicite | Ordre 1 avec une C. I. $u'(x) = f(x, u(x))$ | Schéma d'Euler explicite : $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ et $h = \frac{b-a}{n}$ <br> $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, car $x_{i+1} - x_i = h$ |
| Méthode d'Euler implicite | Idem | $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$ <br> On doit donc résoudre une équation, et pour cela, on se rapporte aux méthodes de recherche de zéro. |
| Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4) | Idem | $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ où <br> $k_1 = f(x_n, y_n)$ <br> $k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$ <br> $k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$ <br> $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$ |
| Méthode RK4 avec dérivée seconde | Ordre 2 avec deux C. I. $y'' = f(t, y, y')$ | $y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{6}(k_1 + k_2 + k_3)$ <br> $y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | où les constantes sont trop longues à écrire |
| Méthode de Verlet | Ordre 2 avec deux C. I. | Pour un pas $\Delta t$, on a : $\vec{x}(t+\Delta t) = 2\vec{x}(t) - \vec{x}(t-\Delta t) + \vec{a}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^4)$ |
| Méthode saute-mouton/ leapfrog | Ordre 2 avec deux C. I. $\frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x)$ | $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + v_i\Delta t + \frac{1}{2}a_i\Delta t^2 \\ v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})\Delta t \end{cases}$ où $a_i = F(x_i)$ |

- En particulier, les **méthodes de Runge-Kutta** qui résolvent les équations différentielles du premier ordre proposent d'introduire des points intermédiaires qui conduisent au calcul d'intégrales pour lequel on utilise des méthodes de quadrature. Pour chaque méthode, on résume les poids utilisés dans ce qu'on appelle un **tableau de Butcher**. Ainis, la méthode d'ordre $q$ a une erreur totale accumulée d'ordre $h^q$ bien qu'à chaque étape, l'erreur commise soit de l'ordre de $h^{q+1}$.
- *(Algorithme du simplexe)* Introduit par George Dantzig en 1947, il permet de maximiser $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ où il existe une matrice $p \times n$ telle que $BX \leq Y$. L'idée est d'introduire des variables d'écart $X'$, telles qu'on puisse écrire $BX + X' = Y$.
- En Python 3, le type **np.ndarray** est le plus utilisé lorsqu'il s'agit de matrices. Il vient du module numpy, noté np. Pour créer un vecteur colonne, on note : $u = \mathrm{np.array}([1{,}2{,}3])$. Pour créer une matrice carrée, disons $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, on note : $A = \mathrm{np.array}([1{,}2{,}3],[4{,}5{,}6],[7{,}8{,}9])$. Avec cette convention, $A_{ij} = A[j][i]$.
- *(Méthode de Gauss-Seidel)* Amélioriation de la méthode de Jacobi, elle consiste à résoudre $AX = Y$ en posant $A = \begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$ où $D$ est diagonale, $E, F$ triangulaires supérieure et inférieure (ses « parties »). Si $X_{k+1} = (D-E)^{-1}FX_k + (D-E)^{-1}B$, on a une suite de vecteurs qui converge vers l'unique solution cherchée, dans au moins deux cas : $A$ est $\mathcal{S}^{++}$ ou $A$ est à diagonale strictement dominante.
- Il faut aussi savoir rechercher en langage SQL : sélection $\sigma$ (SELECT… FROM), projection $\pi$ (WHERE), renommage $\rho$ (AS), union, intersection, produit cartésien, etc. L'opération la moins commode est celle de **jointure** sur un critère, notée $\bowtie$ (JOIN… ON) en **algèbre relationnelle**.
- On appelle **clé primaire** un attribut d'une relation (composé de domaines) dont les enregistrements sont univoques. Une clé étrangère est une clé primaire d'une autre relation tandis qu'une clé secondaire est une clé primaire potentielle n'ayant pas été sélectionnée en tant que telle.
- Enfin, DISTINCT supprime les doublons lors d'une sélection ; ORDER BY… ASC trie ; LIMIT… OFFSET tronque ; COUNT compte ; GROUP BY groupe en « agrégats » et HAVING les filtre. Une sous-requête est une requête imbriquée.

## THÉORIE DES PROBABILITÉS

- Toute tribu infinie est indénombrable. De toute façon, il n'y a pas d'ensemble des parties dénombrable d'aucun ensemble.
- Un $\pi$-système est une classe de parties stable par intersections finies. Une classe monotone est stable par différence et réunion croissante, telle l'ensemble des événements de même probabilités pour deux mesures données. Le **lemme de classe**

**monotone** donne que la plus petite classe monotone contenant un $\pi$-système est la tribu qu'il engendre. On en déduit le fameux lemme d'unicité des mesures de probabilité. Conséquence : deux variables ont la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

- *(Tribu borélienne)* La tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$ est appelée tribu borélienne, ses éléments les boréliens. Elle est aussi engendrée par les $]a,+\infty[$, ou même en restreignant pour les $a \in \mathbb{Q}$. Sur un espace euclidien, elle est engendrée par les $\pi$-systèmes des pavés, ou même pavés ouverts, ou pavés fermés, boules ouvertes, etc.
- Une **mesure** est une application $\mu$ d'un espace de mesurables dans $[0,+\infty]$ qui soit également $\sigma$-additive. Une partie d'un espace mesuré est **négligeable** si elle est incluse dans un mesurable de mesure nulle : les parties dénombrables réelles sont négligeables. Une mesure est **complète** si toute partie négligeable est mesurable.
- Il n'existe pas de mesure invariante par translation sur la tribu discrète de $\mathbb{R}^n$. C'est pour cela qu'on introduit la **mesure de Lebesgue**, $\sigma$-finie, comme plus petite mesure complète et qui coïncide sur les pavés avec leur volume.
- *(Théorème d'Ulam)* Il n'existe pas de probabilité diffuse, c'est-à-dire dont aucun événement n'est atome — soit qu'il ne soit pas quasi impossible, sur l'espace mesurable $\mathbb{R}$ discret : dans un tel espace, il y aura toujours un singleton de probabilité $> 0$. C'est un résultat de culture générale.
- Enfin, troisième limite : la donnée d'une probabilité sur un univers dénombrable équivaut à la donnée des probabilités de ses événements élémentaires. C'est bien évidemment faux sur un univers plus grand, on le sait.
- Par contre, il n'existe pas de probabilité uniforme sur un univers dénombrable.
- Les théorèmes de **limite monotone** sont vrais dès qu'il existe un arrangement croissant de la famille dénombrable d'événements.
- *(Lemmes de Borel-Cantelli)* Soit $(A_n)$ une suite d'événements. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$ est négligeable. Si elle diverge et que les événements sont mutuellement indépendants, alors cet événement est presque sûr.
- *(Loi du zéro-un de Kolmogorov)* Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ indépendantes. Alors pour tout événement $A$ de la tribu asymptotique $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\bigcup_{k\geq n} \mathcal{F}_k)$, $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.
- Pour des événements $A_, \dots, A_n$, et les $C_k$ : « appartenir à au moins $k$ de ces événements », $\prod_{k=1}^n P(C_k) \leq \prod_{k=1}^n P(A_k)$. Ceci se démontre laborieusement par récurrence forte.
- *(Formule des probabilités composées)* Si $A_1, \dots, A_n$ sont tels que les $n-1$ premiers soient non mutuellement incompatibles, alors :
$$\mathbb{P}(\textstyle\bigcap_{k=1}^n A_k) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} A_k).$$
- *(Paradoxe du faux positif)* Même si le taux de faux-négatif est très faible, et le taux de faux-positif est très faible, le pourcentage de gens ayant été testés positifs qui sont véritablement malades peut être extrêmement faible.
- *(Inégalité d'Édith Kosmanek)* $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $(\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\})$.

- Contrairement aux autres domaines des mathématiques, l'**indépendance mutuelle** implique l'indépendance deux à deux d'événements, mais la réciproque est fausse. Il suffit en effet de considérer, pendant le lancer de deux pièces : « on obtient pile au premier lancer », « on obtient pile au deuxième lancer », « on obtient la même chose aux deux lancers ».
- Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille mutuellement indépendante. Alors $\left(A_i^{\varepsilon_i}\right)_{i\in I}$ où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ l'est également. La preuve est tordue.
- *(Lemme des coalitions)* Si $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes. De même, $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi, si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, les $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$, voire les $(f_n(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ le sont ; si les $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes, les $(f_i(X_i))_{i\in I}$ également.

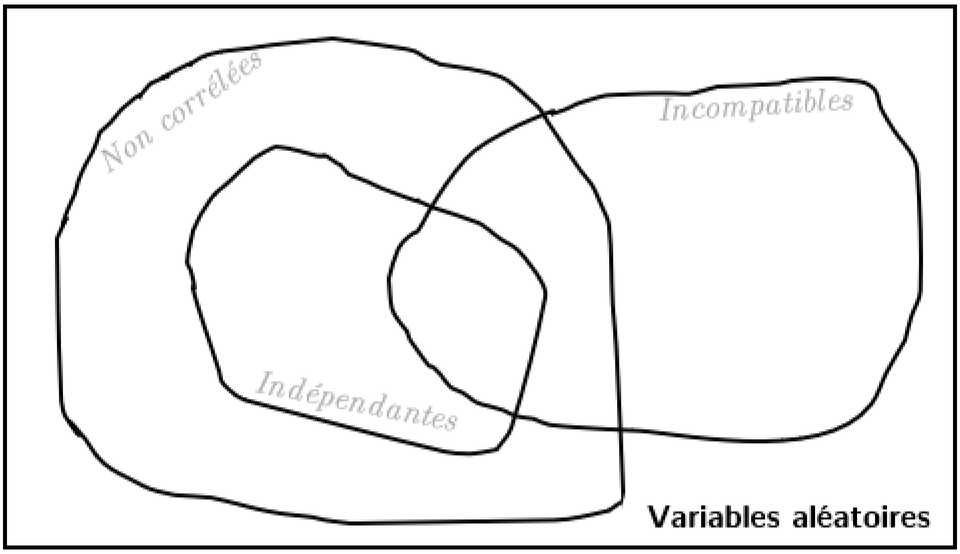
  ► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME
- Une variable aléatoire permet d'extraire de l'information. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est probabilisé, une variable aléatoire est une fonction $X$ de $\Omega$ dans $E$, probabilisable en $(X(\Omega), \mathcal{F})$, qui soit une **fonction mesurable** : pour tout $F \in \mathcal{F}$, $X^{-1}(F) \in \mathcal{T}$. Le caractère de cette variable est déterminé par le cardinal de son image : discrète si $X(\Omega)$ est dénombrable, réelle si $X(\Omega)$ est un infini non dénombrable de $\mathbb{R}^d$. Dans le cas discret, on veut simplement : $\forall x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$. La **loi de $X$** est une probabilité sur l'espace $(X(\Omega), \mathcal{F}, \mathbb{P}_X)$ définie simplement par $\mathbb{P}_X(F) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(F)\big)$. Naturellement, dans les notations, on identifie $X$ aux valeurs qu'elle prend.
- Une propriété à énoncer correctement : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour toutes parties $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in A_i\})$.
- Si $Y = f \circ X$ (il faut que $D_f \supseteq X(\Omega)$), alors dans le cas discret :
$$P(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel que } f(x) = y}} P\,(X = x).$$
- Sur **$L^2$ quotienté par l'égalité presque partout**, $(X|Y) = \mathbb{E}(XY)$ est un produit scalaire.
- Le moment d'ordre 0 est la **condition de normalisation** d'une variable aléatoire.
- Il n'y a de moment que si la convergence est absolue ! En effet, sans sommabilité, il n'y a pas univocité de la valeur de la somme…
- Si $X$ est **presque sûrement bornée**, elle admet un moment d'ordre quelconque. Si $X$ est **presque sûrement constante** égale à $c$, $\mathbb{E}(X) = c$.
- *(Inégalité de la valeur absolue)* $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.
- La **variance** est définie par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ d'après la **formule de König-Huygens**.
- Si $X$ est une variable aléatoire, $\frac{X-\mu}{\sigma}$ est automatiquement **centrée réduite**.
- L'**asymétrie** d'une variable aléatoire $X$, si elle existe, est $\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$ ; son **kurtosis** ou coefficient d'aplatissement est $\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$.

- La **loi uniforme discrète** de support $A$ est définie par $\mathbb{U}_A(x) = \frac{\mathbb{1}_A(x)}{\mathrm{card}(A)}$. La **loi uniforme continue** sur $[a,b]$ a pour loi la fonction rectangle $\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$.
- Les lois de probabilités (fonctions de masse ou densités) au programme sont :

| Nom | Paramètres | Support | Loi | $\mathbb{E}$ | $\mathbb{V}$ | $G_X(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Loi uniforme discrète | $\mathcal{U}(a,b)$ | $[\![a,b]\!]$ | $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{n}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ | $\frac{t^a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$ |
| Loi de Bernoulli | $\mathcal{B}(p)$ | $\{0,1\}$ | $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{P}(X=0)=1-p=q$ | $p$ | $pq$ | $q+pt$ |
| Loi binomiale | $\mathcal{B}(n,p)$ | $[\![0,n]\!]$ | $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ | $np$ | $npq$ | $(q+pt)^n$ |
| Loi hypergéométrique | $\mathcal{H}(n,p,N)$ | $[\![0,n]\!]$ ou moins | $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ | $np$ | $npq\frac{N-n}{N-1}$ | s'exprime avec ${}_2F_1$ |
| Loi géométrique | $\mathcal{G}(p)$ | $\mathbb{N}^*$ | $\mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{pt}{1-qt}$ |
| Loi de Poisson/loi des événements rares | $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $e^{\lambda(t-1)}$ |
| Loi zêta | $\mathcal{Z}(s)$ | $\mathbb{N}^*$ | $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{k^s}$ | $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ | $\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}$ | $\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k^s}$ |
| Loi logarithmique | $\mathrm{Log}(p)$ | $\mathbb{N}^*$ | $\mathbb{P}(X=k) = \frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k}$ | $-\frac{p}{q\ln q}$ | $-p\frac{p+\ln q}{q^2\ln^2 q}$ | $\frac{\ln 1 - pt}{\ln q}$ |
| Loi binomiale négative | $n,p$ | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+n-1}{n-1}p^n q^k$ | $\frac{nq}{p}$ | $\frac{nq}{p^2}$ | $\left(\frac{p}{1-qt}\right)^n$ |
| Loi uniforme continue | $\mathcal{U}(a,b)$ | $[a,b]$ | $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | |
| Loi exponentielle | $\mathcal{E}(\lambda)$ | $[0,+\infty[$ | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | |
| Loi normale centrée réduite (ou standard) | $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ | $\mathbb{R}$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | |
| Loi du $\chi^2$ | $\chi^2(k)$ | $\mathbb{R}^+$ | $f(x) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ | $k$ | $2k$ | |
| Loi du demi-cercle de Wigner | $\mathcal{C}(R)$ | $[-R,R]$ | $f(x) = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}$ | $E(X^n) = \begin{cases} 0 \text{ pour } n=2p+1 \\ \left(\frac{R}{2}\right)^{2n} C_n \text{ pour } n=2p \end{cases}$ | | |

- Quelques approximations de loi. La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,p,N)$ converge (en loi) vers une loi binomiale de mêmes paramètres lorsque la taille de l'urne devient infinie. Semblablement, si $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, alors $\mathcal{B}(n,p_n)$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

- La **loi de Poisson** modélise les événements rares : s'il y a 5000 accidents de la route par an, on utilise $\lambda = \frac{5000}{365}$.

- Les lois géométrique et exponentielle sont **sans mémoire/sans vieillissement**, à savoir que $\mathbb{P}(X > k + l \,|X > k) = \mathbb{P}(X > l)$ pour tout $l$ positif, si $X \rightsquigarrow \mathcal{G}$.
- *(Loi du $\chi^2$)* Si $X_1, \dots, X_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ sont indépendantes, alors $\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2(k)$.
- Il y a **stabilité additive** (les paramètres étant tout simplement sommés) des lois binomiales, des lois de Poisson, et des lois normales entre autres.
- La notion de **fonction génératrice des probabilités** n'a que de sens pour une loi à support entier.
- La fonction génératrice détermine complétement la loi d'une variable aléatoire. En effet : $P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$. Ceci est licite, car il y a caractère $C^\infty$ de la série sur un voisinage de 0, étant donné que la convergence normale est assurée dans le rayon de convergence qui est au moins 1.
- On a toujours : $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.
- Si $X, Y$ sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur $\mathcal{D}_f(0,1)$, si de plus elles sont $L^1$ alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et si elles sont $L^2$ alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Les réciproques sont fausses : sauf pour $G$, elles caractérisent la corrélation. Si les $X_1, \dots X_n$ sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, on a de plus $G_{X_1+\cdots+X_n} = \left(G_{X_1}\right)^n$.
- *(Loi forte des grands nombres)* Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, admettant un moment d'ordre 1 et identiquement distribuées. Alors $\mathbb{P}(\omega \in \Omega \,|\, \lim \frac{S_n(\omega)}{n} = \mathbb{E}(X_1)) = 1$. La loi faible ne garantit qu'une convergence en probabilité, alors que la loi forte donne une convergence presque sûre.
- 

- La **covariance** est définie par $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ d'après la formule de König-Huygens.

- Deux variables aléatoires non **corrélées**, c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, ne sont pas nécessairement indépendantes. Par exemple, si $Z$ suit une **loi de Rademacher** et $X$ est indépendante de $Z$, alors $X$ et $ZX$ conviennent. On peut déterminer le coefficient de corrélation par $\frac{\mathrm{Cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
- Étant donné un couple de variables $(X,Y) = Z$, on appelle $P_Z$ la **loi conjointe** du couple et $P_X, P_Y$ les **lois marginales**. Les lois marginales peuvent se déduire de la loi conjointe, mais la réciproque est fausse. Ceci se généralise aux **vecteurs aléatoires**. De plus, il y a existence et unicité de la **loi conditionnelle** de $Y$ sachant un événement élémentaire sur $X$ ; ces lois conditionnelles caractérisent la loi conjointe. Enfin, $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si la loi conjointe est un produit, ou si et seulement si toutes les lois conditionnelles sont caduques. Enfin, d'après le lemme de classe monotone, on peut remplacer dans la loi conjointe par des inégalités.
- *(Paradoxe de Monty Hall)* Trois portes cachent un gain et deux pertes, et un joueur désigne une porte. Le présentateur révèle une des deux autres portes qui ne cache pas le gain. Alors le joueur a intérêt à changer son choix de départ.
- Les moyennes classiques vérifient l'inégalité qui suit : $H \leq G \leq A \leq Q$. Voir le tableau des inégalités pour leur formules.
- On peut également définir la **moyenne arithmético-géométrique** de deux réels positifs $a, b$ comme la limite commune des suites définies par $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

## SYSTÉMIQUE

- Le tracé d'un **portrait de phase** est facilité par l'existence d'un certain nombre d'interdits : si les discontinuités selon les $y$ sont possibles (phénomène de **rebond**), les discontinuités selon les $x$ sont impossibles, car elles correspondent à une **téléportation**. Les **points de bifurcation** sont radiés en mécanique classique ; une spirale croissante ne peut, elle, correspondre qu'à un apport d'énergie. Enfin, et le plus important, le signe de la vitesse doit être cohérent avec le sens de parcours : par exemple, dans le premier quadrant, on ne peut pas aller de droite à gauche.

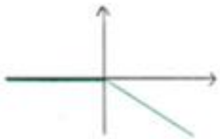
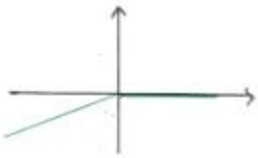
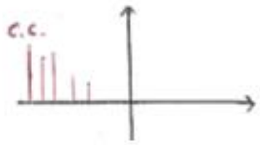
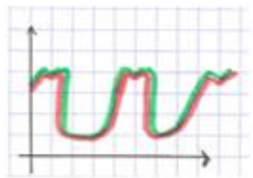
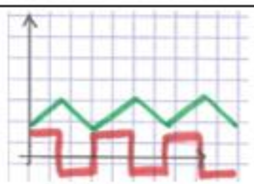
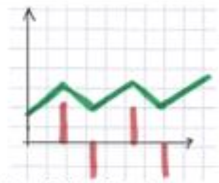
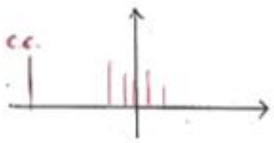
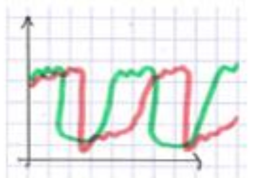
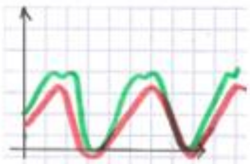
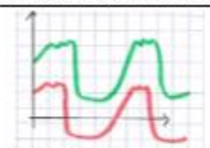
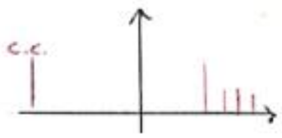
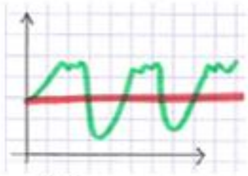
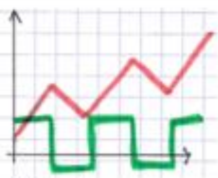
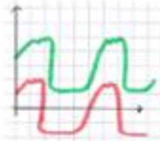
### 1. SIGNALÉTIQUE

- La **valeur moyenne** d'un signal périodique est défini par $< x(t) > = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t$. La **valeur efficace** de ce signal est $< x^2(t) >$ ; elle est parfois notée **RMS**, pour « Root Mean Square ».

### 2. AUTOMATIQUE

- Le **gain** en décibels d'une fonction de transfert est défini par $G_{dB} = 20\log|H|$. La phase est l'argument d'une fonction du transfert.
- Au premier ordre, **pulsations de coupure** et **de cassure** sont égales.
- La **bande passante** rassemble les pulsations dont le gain est au-dessus de **3 dB**, c'est-à-dire où la fonction de transfert est plus grande que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Un **diagramme de Bode** mesure en décibels par décade.

- ❖ *(Tableau sur le filtrage analogique)* On donne les comportements de différents filtres sur certains signaux. L'abréviation $C.C.$ vaut pour « composante continue ».

| Type de filtre / Décomposition de Fourier | PASSE-BAS | PASSE-BANDE | PASSE-HAUT |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| $f_1 \ll f_0$   |  Passeur |  Dérivateur |  Double dérivateur |
| $f_1 \approx f_0$   |  Déformateur |  Sélectionneur |  Élimination de la composante continue |
| $f_1 \gg f_0$   |  Moyenneur |  Intégrateur |  Passeur sauf de la composante continue |

- ❖ Un filtre **coupe-bande** ou **réjecteur de bande** est la composition d'un filtre passe-haut et d'un filtre passe-bas, ou, ce qui est équivalent, d'un filtre coupe-haut avec un filtre coupe-bas, de fréquences de coupure proches mais différentes.
- ❖ *(Filtre de Butterworth)* Ce filtre est fait pour que le gain, dans la bande passante, soit le plus constant possible.

## MÉCANIQUE

### 3. CINÉMATIQUE

- ❖ La vitesse en sphérique s'adjoint du terme $r\sin(\theta)\dot{\phi}\overrightarrow{u_\phi}$.
- ❖ D'après la première loi de Newton, ou **principe d'inertie**, un corps soumis à aucune force est en mouvement rectiligne uniforme.
- ❖ Le **mouvement uniformément accéléré** est tel que son accélération est constante.
- ❖ L'accélération d'un mouvement circulaire s'écrit simplement :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta},$$

où le terme de gauche et l'**accélération centripète** (ou radiale), et le terme de gauche l'**accélération orthoradiale**. Ainsi, dans un **mouvement circulaire uniforme**, il y a un terme d'accélération, d'intensité $\frac{v_0^2}{R}$.

### 4. DYNAMIQUE

- ❖ Toute force est en fait un champ de forces…

❖ Une force est **conservative** si l'on peut écrire $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{Ep}$. Dans ce cas, le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi. Si la force est constante, ce travail s'exprime : $W = ||\vec{f}||AB$.

❖ La **force d'inertie d'entraînement d'un mouvement circulaire non nécessairement uniforme** s'écrit : $-m\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM} - \frac{m\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{OM}$, ou encore : $m\vec{\Omega}^2\overrightarrow{HM} - \frac{m\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\overrightarrow{OM}$.

❖ Lors de tout choc, il y a conservation de la quantité de mouvement ; lors d'un **choc élastique**, il y a conservation de l'énergie cinétique également. La **pression cinétique** est la moyenne temporelle des forces de pression dues aux chocs élastiques des molécules sur une paroi. Sur une paroi fixe, celle-ci reçoit deux fois la quantité de mouvement normale initiale. Pour un gaz isotrope, par exemple, elle vaut $\frac{Nmv^2}{3V}$.

❖ *(Mouvement de précession)* Une quantité $\vec{u}$ est en précession si $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$ où $\vec{\Omega}$ est constante. Elle détermine le cône de précession, et la vitesse angulaire $\Omega$ du mouvement dans le sens de $\vec{\Omega}$. En effet, le projeté du vecteur position, lui-même de norme constante, sur l'axe dirigé par ce vecteur, est constant. C'est, par exemple, le cas pour une **toupie**. Sur la planète Terre, ce phénomène se réalise par le décalage de **précession des équinoxes**. Si en plus de la précession, le cône oscille autour de sa position moyenne, il y a nutation.

❖ L'**association de deux ressorts** en série fait $\left(\frac{kk'}{k+k'}; l + l'\right)$ ; leur association en parallèle fait $\left(k + k', \frac{kl+k'l'}{k+k'}\right)$.

❖ *(Modélisation de l'élastique)* Un **élastique** est modélisé par une chaîne de $N$ polymères indépendants d'orientation libre, de longueurs $l$, soumis à une force $F$. Une étude statistique donne la fonction de partition du système : $Z = \left(4\pi\frac{sh(\beta Fl)}{\beta Fl}\right)^N$ ; sa longueur moyenne est $Nl\mathcal{L}(\beta Fl)$, où $\mathcal{L}$ est la fonction de Langevin. On constate qu'une augmentation de la température entraîne la rétraction de l'élastique. Si l'on veut prendre en compte l'**hystérésis** mécanique, on écrit la **loi de Hooke** : $\frac{F}{S} = \sigma = E\frac{l-l_0}{l_0}$, où $E$ est le **module d'Young**.

❖ Le **moment dipolaire** d'un **dipôle électrostatique** est par définition $\vec{P} = q\overrightarrow{NP}$. L'approximation correspondante est celle des rayons significativement supérieurs à $NP$. Un champ extérieur dans lequel il est plongé induit un moment $\overrightarrow{M_O} = \vec{P} \wedge \overrightarrow{E_{ext}}$. La résultante des forces subies s'exprime $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}})$, d'où $\text{Ep} = -\vec{P}.\overrightarrow{E_{ext}}$. De façon tout à fait analogue, les résultats se transposent à la magnétostatique, en posant le moment dipolaire magnétique $\vec{M} = i\vec{S}$. D'autre part, le champ électrique créé par un dipôle électrique (et l'analogie du **dipôle magnétostatique** est vérifiée) s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{2Pq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ \dfrac{Pq\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ 0 \end{vmatrix} .$$

- Si l'on modélise la **marche aléatoire** d'une particule à une dimension sur un réseau à pas de $a$, sautant de chaque côté à probabilités égales à pas de temps égaux $\tau$, alors l'espérance de sa position est nulle, et sa variance au temps $n\tau$ s'écrit $na^2$. L'écart-type du déplacement est alors $\sqrt{Dt}$ en définissant un **coefficient de diffusion** $D = \frac{a^2}{\tau}$.

### 5. ÉNERGÉTIQUE

- On a toujours l'égalité différentielle $\mathrm{d}W = -\mathrm{d}Ep$.
- Le **théorème de la puissance cinétique** donne : $\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{f}} \mathcal{P}(\vec{f})$. Le **théorème de la puissance mécanique** donne : $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{f}\ n.c.} \mathcal{P}(\vec{f})$.
- *(Théorème du viriel)* Un système de moment d'inertie constant a pour énergie cinétique l'opposé de la moitié de son énergie potentielle. Une autre version, si la vitesse et la force subis par un système sont bornés, $< \vec{F}.\vec{r} > = -2\mathrm{Ec}$.

### 6. MÉCANIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

- Le **moment cinétique** est $J_\Delta \dot{\theta}$ où le **moment d'inertie** est $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$. Quelques moments d'inertie utiles (tous les solides sont considérés homogènes de masse $M$) :

| Géométrie | Calcul du moment |
|---|---|
| Anneau fin de rayon $R$ | $MR^2$ |
| Disque plein par rapport à un axe diamétral | $\frac{1}{4}MR^2$ |
| Disque plein par rapport à un axe normal au centre | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| Boule par rapport à un axe diamétral | $\frac{2}{5}MR^2$ |
| Sphère creuse par rapport à un axe diamétral | $\frac{2}{3}MR^2$ |
| Barre de longueur $L$ par rapport à un axe médiateur | $\frac{1}{12}ML^2$ |
| Barre de longueur $L$ par rapport à un axe dont elle est hauteur | $\frac{1}{3}ML^2$ |
| Carré plein de côté $a$ par rapport à un axe normal au centre | $\frac{1}{6}Ma^2$ |
| Rectangle plein de côtés $b, c$ de même | $\frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$ |
| Parallélépipède sur un rectangle $b, c$ de hauteur $h$ par rapport à un axe le long de sa hauteur | $\frac{1}{12}M(b^2 + c^2)$ |
| Cylindre plein par rapport à l'axe de révolution | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| Cylindre plein par rapport à un axe perpendiculaire | $\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$ |
| Cylindre vide par rapport à l'axe de révolution | $MR^2$ |
| Cylindre creusé par rapport à l'axe de révolution | $\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ |

| | |
|---|---|
| Cône plein de base de rayon $R$ par rapport à l'axe de révolution | $\frac{3}{10}MR^2$ |
| Cône creux de base de rayon $R$ par rapport à l'axe de révolution | $\frac{1}{2}MR^2$ |
| Tore de paramètres $R$ et $r$ par rapport à l'axe de révolution | $M\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$ |
| etc. | |

- *(Théorème de König-Huygens)* Soit un système de masse $M$, de centre de masse $G$ et $A$ un point à la distance $d$ de $G$. Alors les moments d'inertie se transportent :
$$J_A = J_G + Md^2.$$
- Les lieux des mécaniques du solide et du point se regardent presque univoquement, mis à part le principe fondamental de la dynamique qui est vain pour le solide.

| **Notion** | **Mécanique du point** | **Mécanique du solide (en rotation autour d'un axe fixe)** |
|---|---|---|
| Inertie | masse $m$<br>moment d'inertie $mh^2$ | moment d'inertie<br>par rapport à un axe $J_\Delta$ |
| Vitesse | $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ | $\dot{\theta} = \omega$ |
| Moment cinétique | $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$<br>$L_\Delta = \overrightarrow{L_O}.\overrightarrow{e_z}$ | $L_\Delta = \sum_i L_{\Delta_i} = J_\Delta\dot{\theta}$ |
| Moment d'une force | $\overrightarrow{M_O}(\vec{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}$<br>$M_\Delta(\vec{f}) = \overrightarrow{M_O}(\vec{f}).\overrightarrow{e_z}$ | $M_\Delta(\vec{f}) = \pm\|\vec{f}\|d$ le bras de levier |
| Puissance d'une force | $\vec{f}.\vec{v}$ | $M_\Delta(\vec{f})\omega$ |
| Loi du moment cinétique | $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{M_O}(\vec{f_i})$<br>$\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_\Delta(\vec{f_i})$<br>(loi de la résultante cinétique) | $\frac{\mathrm{d}L_\Delta}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_\Delta(\vec{f_i}) + \text{couples}$ |
| « Principe fondamental » | $m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i \vec{f_i}$<br>(PFD, loi de la quantité de mouvement) | $J_\Delta\ddot{\theta} = \sum_i M_\Delta(\vec{f_i}) + \text{couples}$<br>(théorème du moment cinétique pour un solide) |
| Théorèmes énergétiques | Semblables | |

- Texte modèle

## 7. Mécanique céleste

- Dans un mouvement à force centrale,
- On appelle **première vitesse cosmique** celle du satellite géostationnaire : elle vaut 7,9 $\mathrm{km.s^{-1}}$. La **deuxième vitesse cosmique** est celle de l'état de diffusion (énergie mécanique positive) pour l'attraction gravitationnelle : elle vaut 11,2 $\mathrm{km.s^{-1}}$. La **troisième vitesse cosmique**, de même, remplace l'attraction de la Terre par celle du soleil : elle vaut 42,1 $\mathrm{km.s^{-1}}$. On en déduit les **rayons de Schwarzschild**.

- *(Première loi de Kepler)* Les trajectoires planétaires sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. De plus, l'apogée (nom masculin), ou aphélie (prononcé : a-pé-li), ou encore abside, est le point où la vitesse est minimale, tandis que le périgée, ou périhélie, ou encore périapse, est le point où la vitesse est maximale. Leur trajectoire est comprise dans le **plan de l'écliptique**.
- *(Deuxième loi de Kepler)* La vitesse aréolaire $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ d'un mouvement à force centrale simple est $\frac{C}{2}$ où $C = \frac{L}{m}$, ce qui constitue la **loi des aires**. Avec ces notations, l'**énergie potentielle effective** s'écrit $\mathrm{Ep}_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + \mathrm{Ep} = \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathrm{Ep} \leq \mathrm{Em}$. Dans le cas d'une **force newtonienne**, il y a **état de diffusion** pour $\mathrm{Em} \geq 0$, **état lié** sinon.
- *(Troisième loi de Kepler)* La comparaison de l'expression de l'accélération en cylindrique du mouvement circulaire à la loi de la quantité de mouvement dans le Système solaire donne $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$, ainsi que la vitesse de l'astre tracté : $\sqrt{\frac{Gm_S}{r}}$. On en déduit les énergies : $Ec = \frac{Gm_S m}{2r}$, $Ep = -\frac{Gm_S m}{r}$ d'où $Em = -\frac{Gm_S m}{2r}$.
- La **satellisation** à partir du sol est impossible.
- *(Théorème de Bertrand)* Les seuls mouvements à force centrale produisant une trajectoire fermée quelles que soient les conditions initiales sont newtonien (en $1/r^2$) et de Hooke (en $r$).
- Le champ gravitationnel vérifie les équations locales : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{g} = 0$ et $\mathrm{div}\,\vec{g} = -4\pi G\rho$.

## 8. Mécanique des fluides

- L'**advection** est le phénomène de transport pour lequel les particules pertinentes sont déplacées du fait de la vitesse du milieu environnant. L'opérateur correspondant est $\vec{v}.\vec{\nabla}$. L'advection appliquée à la vitesse admet une **forme de Lamb** : $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{\vec{v}^2}{2} + (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}) \wedge \vec{v}$. Le terme $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ est appelé **vorticité**.
- *(Équations de Navier-Stokes)* Pour un fluide de vitesse $\vec{v}$, de masse volumique $\rho$ et de viscosité $\eta$, on écrit :
$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{f_{vol}} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v},$$
où l'opérateur $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$ est appelé « dérivée particulaire ».
- *(Théorème de Bernoulli)* Un fluide parfait incompressible en régime stationnaire, sans chaleurs ni travaux, s'écoule du point d'altitude $z_1$ au point d'altitude $z_2$. Alors on a la relation $P_1 + \mu\frac{V_1^2}{2} + \mu g z_1 = P_2 + \mu\frac{V_2^2}{2} + \mu g z_2$.

## 9. Relativité

- Le **principe de relativité** annonce que les lois de la physique sont identiques dans tous les référentiels inertiels, aussi appelés référentiels galiléens.
- *(Transformation de Galilée)* Étant donné deux référentiels galiléens, le changement de coordonnées classique entre les deux se traduit par : $\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$.

- *(Facteur de Lorentz relativiste)* Un mobile de vitesse relative donnée est associé au facteur de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Si $\tau$ est le temps propre et $t$ le temps coordonnée, on a $\Delta t = \gamma \Delta \tau$. Cette **dilatation du temps** a pour notion duale celle de **contraction des longueurs**.
- Plus avant, on peut maintenant énoncer la **transformation de Lorentz** qui est l'équivalent relativiste de la transformation galiléenne en prenant compte des effets relativistes : $\begin{cases} t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$.
- *(Paradoxe des jumeaux)* Si de deux jumeaux, l'un reste sur Terre et l'autre fait un voyage aller-retour à une vitesse proche de la lumière de sorte qu'aucune expérience locale ne permette de déterminer qu'il est en mouvement, alors chaque jumeau peut dire qu'il est plus jeune que l'autre. En réalité, seul le jumeau voyageur a raison, car pour revenir, celui-ci doit changer de référentiel galiléen.
- Le **cône de lumière** d'un événement $e_0$ est le (double) cône pointé sur l'hypersurface du présent dans l'espace-temps de Minkowski dont l'axe de révolution est le temps. Il est la distinction entre les événements causalement liés à $e_0$ et les événements inaccessibles. Il est caractérisé par l'équation $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 > 0$.
- *(Effet Lense-Thirring)* En relativité générale, quand un corps est en rotation sur lui-même, la géométrie de l'espace est non seulement modifiée par effet gravitationnel mais également par cette précession. C'est notamment le cas des **trous noirs de Kerr**, en rotation très rapide dans un champ extrêmement fort ; en général, l'effet Lense-Thirring est extrêmement faible.

## 10. ONDULATOIRE

- Une **onde** est caractérisé la propagation d'une perturbation selon l'espace et le temps. Il existe trois types d'ondes : les ondes mécaniques, qui se propagent nécessairement dans les milieux, les ondes électromagnétiques et les ondes gravitationnelles qui n'ont pas besoin de support et peuvent donc se propager dans le vide. Une onde est **longitudinale** si la perturbation est colinéaire à sa direction de propagation ; une onde est transversale si elle lui est **perpendiculaire**.
- Dans le cas d'une onde monochromatique unidimensionnelle, le plus courant, on a les relations suivantes :

| Quantités spatiales | Quantités temporelles | Relations entre les deux |
|---|---|---|
| Longueur d'onde,<br>période spatiale<br>$\lambda = cT$ | Fréquence (temporelle)<br>$f = \nu = c\sigma$ | $\lambda f = \lambda \nu = c$ |
| Nombre d'onde (spectroscopique),<br>fréquence spatiale<br>$\sigma = \frac{1}{\lambda}$ | Période (temporelle)<br>$T = \frac{1}{f}$ | $\sigma T = \frac{1}{c}$ |

| | | |
|---|---|---|
| Vecteur d'onde, pulsation spatiale, nombre d'onde angulaire/circulaire $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$ | Pulsation, fréquence angulaire $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ | $\omega = kc$ |

La quantité $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$ est la **célérité**, ou vitesse de phase, de l'onde.

- Le **son** est une onde mécanique caractérisée par l'alternance longitudinale de zones de surpression et de dépression dans l'air. Dans un fluide, le **nombre de Mach** Ma est le rapport de la vitesse du fluide avec la vitesse du son dans ce fluide. Dans l'air, celle-ci s'exprime : $a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.
- Une onde monochromatique est caractérisée par sa pulsation $\omega$ et son nombre d'onde $k$. Un milieu est dit **non dispersif** si $\omega = \pm kc$. On associe une **vitesse de phase** $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ qui est la pseudo-célérité de l'onde et une **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ qui est la vitesse de l'enveloppe. Pour un milieu non dispersif, $v_\varphi = v_g$. Leur produit est constamment égal au carré de la vitesse de la lumière dans le cas des ondes électromagnétiques.
- *(Effet Doppler)* $f_{reçue} = f_{\text{émise}} \frac{c - v_{récepteur}}{c - v_{émetteur}}$.

# Électromagnétisme

## 1. Électrocinétique

- L'intensité est initialement définie comme $i = \frac{d\rho}{dt}$.
- La **résistance** $R$ a pour inverse la **conductance** $G$. L'analogue complexe de la résistance est l'**impédance** $Z$ qui a pour inverse l'**admittance** $Y$.
- *(Théorème de Millman)* Le potentiel d'un nœud égale le barycentre des potentiels des nœuds voisins pondérés par les admittances qui les séparent.
- *(Théorème de Kennely)* Pour trois impédances, la relation de transformation la configuration en étoile vers la configuration en triangle est de la forme :

$$Z_A = \frac{Z_{AB} Z_{AC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{AC}}.$$

## 2. Analyse vectorielle

- Il existe des expressions extrinsèques de la différentielle, données par l'identité générale $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, ainsi qu'une **expression intrinsèque de la différentielle**, donnée par $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f).\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.
- On a : $\mathrm{d}(UV) = \mathrm{d}U.V + U.\mathrm{d}V$.
- Une **forme différentielle** $\mathrm{d}V = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ est dite **exacte** si c'est une différentielle, autrement dit s'il existe $U$ telle que $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ et $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.
- Un champ newtonien est toujours non divergent.
- Le **flux** infinitésimal de $\vec{A}$ à travers la surface $S$ est $\mathrm{d}\phi = \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{A}.\mathrm{d}S\vec{n}$. Le flux de $\vec{A}$ à travers $S$ s'écrit $\phi = \iint_S \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Si $S = \Sigma$ est fermée, on note $\oiint_\Sigma \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$.

- La **circulation** infinitésimale de $\vec{A}$ le long du contour $C$ est $\mathrm{d}W = \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. La circulation de $\vec{A}$ le long de $C$ s'écrit $W = \int_C \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. Si $C = L$ est fermé (c'est un lacet), on note $\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.
- Le **nabla** $\vec{\nabla}$ n'est qu'une notation mais elle permet de retenir l'expression du gradient, de la divergence et du rotationnel.
- On a toujours : $\overrightarrow{\mathrm{rot}} \circ \overrightarrow{\mathrm{grad}} = \vec{0}$ ainsi que $\mathrm{div} \circ \overrightarrow{\mathrm{rot}} = 0$.
- Si sa divergence est identiquement nulle, c'est-à-dire s'il est non divergent, un champ est à **flux conservatif**. Deux propriétés : si un champ est à flux conservatif dans une partie de l'espace, il l'est également à travers toute surface fermée incluse dans cette partie ; de plus, le flux entrant un tube de champ entièrement contenu dans cette partie égale le flux sortant.
- Si son rotationnel est identiquement nul, c'est-à-dire s'il est **irrotationnel**, un **champ dérive d'un potentiel**. Aussi, une force est-elle conservative si et seulement $\overrightarrow{\mathrm{rot}(f)} = \vec{0}$.
- Si son gradient est identiquement nul… le champ est uniforme. Si, enfin, la dérivée temporelle est identiquement nulle, par définition, le champ est stationnaire.
- On a une expression intrinsèque de la divergence : $\mathrm{d}\phi = \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$. De même, on a une expression intrinsèque du rotationnel : $\mathrm{d}W = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\,.\overrightarrow{\mathrm{d}S}$.
- Une quantité de densité $\phi$ entraînée à la vitesse $\vec{V}$ suit une **loi de conservation** si l'on peut écrire $\mathrm{div}(\phi\vec{V}) + \frac{\partial\phi}{\partial t} = S$ ($S$ terme de production volumique).

## 3. Électromagnétique fondamentale

### A. Maxwellisme

- En régime statique, l'**équation de Poisson** s'écrit : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.
- La **densité volumique de force électromagnétique** est $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{f_L}}{\mathrm{d}\tau} = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ et la **puissance volumique de force électromagnétique** est $\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}.\vec{E}$.
- Le **vecteur de Poynting** s'écrit $\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$. L'**équation locale de Poynting** exprime que les pertes d'énergie électro-magnétique sont dues à la fois à la dissipation par effet Joule et au rayonnement électromagnétique.

### B. Physique nucléaire

- Dans le **modèle de Drude**, ou modèle de l'électron amorti, la conductivité électrique est de $\frac{n_0 q^2 \tau}{m}$ où $\tau$ est le coefficient de frottement fluide linéaire. Cette **loi d'Ohm locale** est identique dans le modèle collisionnel qui fait appel aux probabilités continues.
- Le **magnéton de Bohr**, qui joue le rôle de quantum de moment magnétique pour l'électron, vaut $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m_e} = 9{,}27.10^{-24}$ A.m². Il s'agit de voir que l'électron possède l'énergie cinétique minimale $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

- *(Précession de Larmor)* Pour un électron autour d'un noyau, le champ magnétique exerce un couple sur le moment magnétique $\vec{\mu}$, donc[2] en introduisant le **rapport gyromagnétique** $\gamma$, $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\gamma\vec{B} \wedge \vec{L}$. La pulsation de précession est nommée **pulsation de Larmor**, et $\omega = \gamma B$. En physique classique, $\gamma = \frac{-e}{2m}$. Rappelons que, si un électron tourne à une période $T$, $i = \frac{-e}{T}$ parcoure cette spire.

## 4. Électrostatique

- *(Capacité d'un condensateur)* $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$, en Gaussifiant le résultat $E = \frac{U}{d}$. On rappelle que $q = Cu$.
- *(Résultats électrostatiques fondamentaux)* Un plan infini génère de part et d'autre un champ électrique $\frac{\pm\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$.

## 5. Magnétostatique

- *(Résultats magnétostatiques fondamentaux)* Le champ magnétique créé par un **fil rectiligne** est $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$ ; par un **fil épais**, $\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}\overrightarrow{u_\theta} \text{ pour r} > \text{R} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j R}{2}\overrightarrow{u_\theta} \text{ sinon} \end{cases}$, par un **solénoïde** $\vec{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{u_z}$.
- *(Effet Hall)* Un courant électrique traversant un matériau baignant dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à ce dernier, de valeur $\frac{iB}{n_0 e \varepsilon}$ où $\varepsilon$ désigne l'épaisseur du matériau.
- Les modèles discret et continu du paramagnétisme de Langevin infirment la **loi de Curie** à basses températures, mais la vérifient à hautes températures avec la constante $\frac{N\mu_0^2}{k_B}$.

## 6. Induction

- La **force de Laplace** en induction s'exprime $\overrightarrow{f_L} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$.
- L'**inductance propre d'une bobine**, vérifiant $\phi = L_P i$, s'écrit $L_P = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{d}$.

## 7. Rayonnement

- Le vecteur de Poynting d'une onde lumineuse plane progressive monochromatique polarisée rectilignement s'exprime en moyenne $< \vec{\Pi} > = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}\overrightarrow{u_x}$.
- Le **dipôle oscillant** n'a aucune hypothèse de milieu.
- Le ciel est bleu.

## 8. Milieux

- Le **plasma** est un milieu composé d'électrons et d'ions positifs, localement neutre, sans frottements et à chocs rares, non relativiste et peu dense. La **conductivité complexe** du plasma est $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2}{j\omega m_e}$. La **relation de dispersion** s'écrit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P{}^2}{c_0{}^2}$ en posant $\omega_P^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ le carré de la pulsation de coupure.

[2] En effet, dans cette situation, le moment cinétique est proportionnel au moment magnétique par $\gamma$ !

- Dans un métal conducteur ohmique, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\gamma\vec{E}$. L'équation de dispersion s'écrit alors $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\omega$. Le conducteur ohmique en est un, de conductivité infinie. Les **relations de passage** s'y écrivent alors $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ et $\vec{B}(M) = \mu_0\vec{J_S} \wedge \vec{n}$, $M$ proche.
- Le **modèle de l'électron élastiquement lié** est valable en milieu diélectrique.
- Les milieux **isolants**, comme la plupart des diélectriques, sont très souvent transparents aux ondes hertziennes, alors que les milieux conducteurs tels que l'eau de mer ou les métaux les réflechissent et les absorbent.

| CONTEXTE ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE | Régime stationnaire/ permanent | Bons conducteurs, milieu ohmique | Région vide de charge | ARQS/ ARQP | Vide de charge et de courant | Plasma | Métaux conducteurs ohmiques réels en régime lentement variable | Milieu diélectrique |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hypothèse constitutive | $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ | $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ | $\rho = 0$ | $\tau \ll T$ | $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ | $\rho = 0, \underline{\vec{j}} = \gamma \underline{\vec{E}}$ | $\rho \approx 0, \vec{j} = \gamma \vec{E}$, $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ | $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi} \underline{\vec{E}}$ |
| Réécriture de Maxwell | $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ | $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$ | $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ | Idem | $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | $\mathrm{div}\,\underline{\vec{E}} = 0, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}, \mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0 \gamma \underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}$ | $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$ | $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| Champs d'application | Électro-statique et magnéto-statique, potentiel, calculs de $\vec{E}$, $\vec{j}$, $\vec{B}$, $C$, $L$, dipôles | Loi d'Ohm, effet Joule, modèle de Drude | Équation de Laplace $\Delta V = 0$, calculs de $R$, puissance Joule | Électro-cinétique de première année (lois de Kirchhoff), induction | Équation de d'Alembert, OPPH/OPPM, polarisation, relation de structure, moyenne du vecteur de Poynting | Pseudo-OPPH/OPPH*, évanescence et dispersion, paquets d'ondes, laser, supra-conducteurs | OPPH*, effet de peau, réflexion sous incidence normale d'une OPPMPR sur un conducteur plan parfait, onde stationnaire dans une cavité | Susceptibilité électrique, milieu linéaire ($\underline{\chi}$ ne dépend pas du champ) homogène isotrope/LHI, modèle de l'électron élastiquement lié |

- L'**ionosphère** est un plasma tel que $\omega \ll \omega_P = \frac{qB_O}{m}$ où l'on prend en compte $B_O$ le champ magnétique de la Terre. Dans ce cas, le principe dynamique se simplifie $e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B_O}) = 0$ si l'on néglige en plus les frottements. On en déduit une relation de dispersion particulière sur la densité de courant : $n_0 e\vec{E} = \vec{j} \wedge \overrightarrow{B_O}$.
- *(Effet Faraday)* Par conséquent, un rayon lumineux partant du soleil colinéaire à une ligne de champ du champ magnétique terrestre est polarisé circulairement. En effet, dans l'ionosphère, si l'on pose $\vec{E} = E_1\overrightarrow{u_x} + E_2\overrightarrow{u_z}$, alors $\frac{E_1}{E_2} = \pm i$, mais seul $-i$ correspond à une onde progressive.

## Physique quantique

- En physique quantique, l'**équation de Schrödinger** s'écrit : $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V.\psi$.

## Optiques

### 1. Optique géometrique

- *(Loi de la déviation dans le prisme)* L'angle de déviation est $D = i + i' - A$, car $A = r + r'$. En recherchant un minimum de déviation, on obtient l'indice optique en sa fonction, les signes prime notant les angles à la sortie du prisme comme si le rayon entrait, $A$ étant l'angle au sommet du prisme.

### 2. Optique physique

- En mathématiques spéciales, le **modèle scalaire des ondes lumineuses** en fait une onde sphérique non polarisée. Cette grandeur est notée $\underline{a}(M,t) = \underline{E}(M,t)$ un champ électrique dans le vide de charge et de courant qui est donc **extrapolé** du cours d'électromagnétisme. En notant $K = \frac{\varepsilon_0 c}{2}S$ la surface du récepteur, on définit, en candelas, l'**intensité lumineuse** $I = K|\underline{a}|^2$. De cette manière, $I$ est la puissance électromagnétique moyenne, ou encore $|| < \vec{\Pi} > ||S$.
- L'**éclairement** d'une surface $S$ faisant l'angle $\theta$ à la direction de la source dont l'intensité est $I$ est $E = \frac{I}{S}\cos\theta$. Pour définir l'éclairement par la lumière du jour, il faut prévoir l'éclairement dû à la source ponctuelle du soleil et à la source diffuse du ciel.
- *(Prise en compte du retard)* On a $\underline{a}(P,t) = \underline{a}(M,t)e^{-j\frac{2\pi[MP]}{\lambda}}$.
- La **formule de Fresnel** $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$ s'appliquent si les deux ondes proviennent de la même source, sont de même pulsation et si elles sont quasi synchrones, c'est-à-dire que le retard entre elles est inférieur au temps de cohérence, longueur temporelle du train d'ondes. Si, par contre, deux ondes n'interfèrent pas, leurs intensités s'ajoutent.
- Le **contraste** entre deux sources s'exprime $\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \leq 1$. Dans le cas des trous d'Young, c'est $\frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}$ et l'on retrouve l'inégalité.
- L'idée générale d'un dispositif optique présentant plusieurs sources est d'étudier les **figures d'interférences** qu'elles engendrent, c'est-à-dire la manière dont elles interagissent, de façon supplémentaire à l'optique géométrique, avec le phénomène

lumineux : dans une même zone éclairée, les rayons, au départ sans décalage formel aucun, présentent une **différence de marche**. Sa dépendance aux paramètres géométriques quantifie de telles figures.

- Des figures d'interférence sont **non localisées** si l'on peut les observer quelles que soit la position de l'écran.
- La différence de marche sur l'écran après les **trous d'Young** vaut $\delta = \frac{ya}{D}$.
- La compensatrice de l'**interféromètre de Michelson** permet l'absence de différence de marche supplémentaire induite par la séparatrice.
- 1) Le Michelson en lame d'air pour une source ponctuelle donne des franges circulaires concentriques non localisées.
- 2) Le Michelson en lame d'air pour une source étendue donne des franges circulaires concentriques localisées à l'infini. On dit franges d'égale inclinaison.
- Au contact optique $e = 0$, c'est la teinte plate : le disque central envahit l'écran.
- 3) Le Michelson en coin d'air pour une source ponctuelle donne des franges parallèles équidistants, localisées sur les miroirs. On dit franges d'égale épaisseur.
- Dans la lame d'air, $\delta = 2e\cos i$. L'interfrange n'est pas constante et on trouve le rayon avec un développement limité d'ordre 2 sur cosinus et d'ordre 1 de la tangente.
- *(Formule fondamentale des réseaux)* Un réseau par transmission éclairé sous incidence $i$ fait apparaître des pics aux angles tels que $a(\sin i - \sin\theta) = k\lambda$. La **fonction de réseau** s'écrit $I(M) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ où $\phi$ est le déphasage consécutif.
- La **loi de Malus** à travers un polariseur d'angle $\alpha$ s'écrit $I' = I\cos^2(\alpha)$.

# THERMODYNAMIQUE

## 1. PHYSIQUE STATISTIQUE

- La statistique de Maxwell-Boltzmann, à particules indépendantes, est l'équivalent asymptotique de la **statistique de Fermi-Dirac** $n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)+1}$, à particules deux à deux hostiles (où les niveaux de plus basse énergie contiennent chacun au plus $g_i$ fermions) et de la **statistique de Bose-Einstein** $n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_BT}\right)-1}$, à particules grégaires (où le niveau de plus basse énergie contient tous les bosons).
- On peut exprimer selon la **fonction de partition** l'énergie moyenne $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$ et l'écart quadratique énergétique moyenne $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$.
- Le **théorème d'équirépartition de l'énergie** annonce que l'énergie moyenne d'un système à l'équilibre vaut $\frac{1}{2}k_BT$ pour chacun de ses termes quadratiques indépendants.

► Fiche : VINGT ET UN THÈORÈMES ADMIS PAR LE PROGRAMME

## 2. THERMODYNAMIQUE QUANTITATIVE

- Des identités thermodynamiques, on tire les expressions différentielles des grandeurs thermodynamiques : $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ et $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$. On définit aussi le **coefficient de compressibilité isotherme** $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ et le **coefficient de dilatation isobare**

$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Ainsi $\mathrm{d}V = \beta V \mathrm{d}T - \chi_T V \mathrm{d}P$. Ces coefficients sont dits coefficients thermoélastiques ; il y en a d'autres.

- Si toute **adiabatique réversible** est **isentropique**, la réciproque est fausse ; une transformation isobare pour un système à paroi mobile est forcément **monobare** ; une transformation isotherme pour un système non calorifugé est **monotherme**.
- La variation d'énergie d'une isochore est $\Delta U = Q$, la variation d'enthalpie d'une isobare ou monobare est $\Delta H = Q$.
- Le **second principe de la thermodynamique** s'exprime, selon Clausius, de la manière suivante : « il n'existe pas de moteur monotherme ».
- La **variation d'entropie d'une transformation d'un gaz parfait** s'obtient en créant un chemin réversible pour les fonctions d'état : $\mathrm{d}S = C_\mathrm{V}\frac{\mathrm{d}T}{T} + nR\frac{\mathrm{d}V}{V}$.
- Penser aux **lois de Joule** en présence d'un gaz parfait.
- Le **volume molaire** d'un gaz parfait dans les **conditions normales de température et de pression (CNTP)** est de $22{,}414\ \mathrm{l.mol^{-1}}$.
- *(Entropie d'une phase condensée idéale)* $\mathrm{S} = C\ln(\mathrm{T}) + \mathrm{cste}$, où $C$ est la capacité thermique unique du système.
- *(Loi de Dulong et Petit)* La capacité thermique molaire d'un métal vaut $3R$.

### 3. Changements d'état

- *(Théorème des moments)* $x_{vap} = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} = \frac{h - h_l}{\Delta_{vap}h} = \frac{s - s_l}{s_g - s_l} = T\frac{s - s_l}{\Delta_{vap}h}$.
- *(Relation de Clapeyron)* Lors d'une vaporisation,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_{\mathrm{vap}}h}{T(v_g - v_l)}.$$

### 4. Thermique

- La résistance thermique d'un cylindre vaut $\frac{L}{\lambda S}$, de même que la résistance électrique d'un cylindre vaut $\frac{L}{\gamma S}$.
- La **loi de Stefan** donne que la puissance surfacique totale, c'est-à-dire intégrée sur toutes les valeurs possibles de pulsation, rayonnée par un corps noir est $\sigma T^4$ où $\sigma$ est la constante de Stefan-Boltzmann et qui vaut approximativement $5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$. Il faut utiliser la **loi statistique de Planck** : à l'équilibre thermique, la densité spectrale d'un corps noir $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$. On donne : $\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$.
- *(Loi de Newton pour la convection)* $\phi = hS(T_p - T_\infty)$. Pour s'en rappeler le signe, il faut penser qu'elle fait partie des lois phénoménologiques découvertes anciennement et qu'elles ont toujours cette convention de positivité pour le reçu, de négativité pour le donné.

## Chimie

- Le terme **corps pur** est utilisé en opposition à mélange, solution : c'est une matière qui ne comporte qu'une espèce chimique. Parmi eux, on trouve les **corps simples**, où l'espèce chimique est constituée d'un seul type d'atome, et les autres, dits **corps**

**composés**. Parmi les corps simples, on trouve les **corps élémentaires** où les atomes ne forment pas des molécules, tel le fer, et les autres, dits **corps moléculaires**, comme le dihydrogène.

- Un **précipité** est le résultat d'une réaction de solubilité où l'équilibre est supérieur au **produit de solubilité** ; dans le cas contraire, le soluté est dissous dans le solvant.
- L'**ammoniac** est le composé $NH_3$.
- La **nomenclature** de la chimie organique est très utile :

| Nom | Groupe caractéristique | Exemples | Formule générale |
|---|---|---|---|
| | *HYDROCARBURES* | | |
| Alcane | Aucun. Tous les carbones sont tétragonaux | Méthane, éthane, propane, butane, pentane, etc. | $C_nH_{2n+2}$ |
| Alkyle | Groupe étant une ramification d'alcane. Les indices sont toujours pris les plus petits possibles | 2-méthylbutane, 2-méthyl-3-éthyl-butane, 2,3-diméthylpentane | $R = C_nH_{2n+1}$ |
| Alcène | Alcane sauf deux carbones étant trigonaux, réalisant une liaison double | Éthylène, but-2-ène, 3,4-diméthylpent-1-ène | $C_nH_{2n}$ |
| | *MOLÉCULES À FONCTIONS SIMPLES* | | |
| Alcool | Composé où un carbone est lié à un groupe hydroxyle $-\mathrm{OH}$ | Éthanol, butan-2-ol | $R-OH$ |
| Aldéhyde | Composé où un carbone est lié à un groupe carbonyle $=\mathrm{O}$ et à un hydrogène | Éthanal, butanal | $R-CH=O$ |
| Cétone | Composé où un carbone est lié à un groupe carbonyle $=\mathrm{O}$ et à aucun hydrogène | Propanone, propan-2-one | $\begin{array}{c} R-C=O \\ \vert \\ R' \end{array}$ |
| Acide carboxylique | Composé possédant un groupe carboxyle COOH | Acide propanoïque | $\begin{array}{c} R-C=O \\ \vert \\ OH \end{array}$ |
| Ester | Composé où un carbone trigonal est lié à un groupe carbonyle et à un oxygène lui-même lié simplement à un carbone | Éthanoate de méthyle, propanoate d'éthyle (le second étant toujours la chaîne R′) | $\begin{array}{c} R-C=O \\ \vert \\ O-R' \end{array}$ |
| | *COMPOSÉS AZOTÉS* | | |
| Amine | Composé possédant un azote en liaison simple avec au moins un carbone | Amines primaires (1 carbone lié), secondaires, tertiaires… | $\begin{array}{c} R-N-R'' \\ \vert \\ R' \end{array}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Amide | Composé où un carbone lié à un groupe carbonyle réalise une liaison simple avec un atome d'azote | Propanamide | $\begin{array}{c} \mathrm{R-C=O} \\ \vert \\ \mathrm{R'-N}-R'' \end{array}$ |