

MÉMOIRE DES TRAVAUX D'INITIATIVE PERSONNELLE ENCADRÉS

**MÉTHODES DE DÉTERMINATION DU
BARYCENTRE D'UNE FAMILLE DE
POINTS DU GLOBE TERRESTRE
REPÉRÉS À PARTIR DE LEURS
COORDONNÉES GÉODÉSIQUES**

LOUIS LASCAUD

Supervisé par M. Scotto, professeur de mathématiques spéciales
MP, lycée Gay-Lussac, Limoges (87)

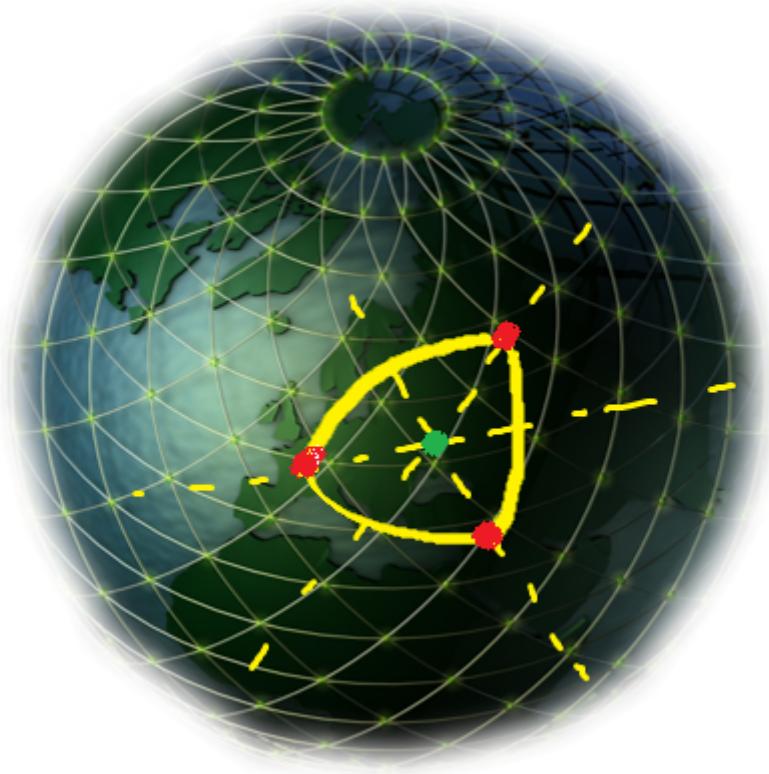


FIGURE 1. — *Illustration introductory de notre problème.* Trois villes données, Paris, Moscou, Bagdad, toutes dans un hémisphère, forment un triangle sur la sphère terrestre.

Nous nous demandons quel en pourrait être « le centre », comme on appelle, dans le plan, *barycentre* le centre d'un triangle. Immédiatement, pour répondre, nous voulons aplatisir cette sphère terrestre, comme on le ferait sur une carte pour trouver naïvement un point de rencontre commode à trois citadins de ces localités respectives, négligeant la courbure de la surface du globe ; mais le choix de la projection engendre des résultats

differents pour un même polygone. Assez naturellement, il nous vient d'estimer systématiquement les écarts entre ces différentes méthodes. Par surcroît, nous nous demandons s'il apparaît alors une méthode de référence parmi toutes, voire un calcul exact sans passer par aucune projection.

Résumé

Pour un ensemble fini de points de la Terre donnés (les capitales européennes, les ports français...), nous souhaitons en déterminer le centre en son acception intuitive. Le premier obstacle apparaissant est celui de la définition envisagée pour lui, c'est pourquoi nous voudrons d'abord projeter la sphère terrestre en une de ses représentations planes, à l'aide d'un algorithme de conversion à double sens des coordonnées, ce qui nous ramènera ensuite au simple calcul du barycentre d'un polygone. Une partie importante des travaux est consacrée à la comparaison des différentes méthodes de calcul en fonction de la projection cartographique choisie, précédée par une étude sommaire de la théorie des projections terrestres, cette comparaison étant d'abord statistique — on calcule des centres et on compare leurs écarts au centre d'une méthode de référence — puis mathématique. Dans une deuxième période, compte-rendu des difficultés liées à l'arbitraire des méthodes de projection plane, nous nous en affranchirons pour rechercher quel peut être un centre directement sur la surface du globe en géométrie sphérique.

Abstract

Given a finite set of points of the Earth (like the European capital towns, or the French ports...), we aim to identify their centre in its self-explanatory meaning. Its definition appears to be the first obstacle we encounter; that is why we might want to project the globe to one of its planar representations by means of a coordinates two-way conversion algorithm, which shall lead us to the only computation of the barycentre of a polygon. A major part of our task dwells in the comparison of the different calculus methods according to the projection chosen, preceded by a brief study of the theory of map projections. This comparison will either be statistic — one computes some centres and compares their deviations against a baseline method — or mathematic. Subsequently, facing the arbitrariness related to the choice of the planar projection method, we eventually set us free from these techniques in order to seek for a direct definition of a centre on the surface of the Earth in spherical geometry.

Table des matières

1 Méthode de calcul d'un centre par projection plane	11
1.1 Choix et définitions pour la suite de l'article	11
1.1.1 Sphère terrestre	11
1.1.2 Familles de villes	14
1.1.2.1 Remarques.	14
1.1.3 Repérage par coordonnées sphériques	16
1.1.3.1 Remarque importante	17
1.2 Barycentres en géométrie affine	18
1.2.1 Introduction	18
1.2.2 Propriétés du barycentre	19
1.2.3 Ce que devient le barycentre en géométrie sphérique	20
1.2.3.1 À quelle condition le pseudo-barycentre est-il défini ?	21
1.3 Projections planes	22
1.3.1 Étude théorique des projections cartographiques	23
1.3.2 Les principaux exemples de projections cartographiques. Ceux que nous utiliserons	23
1.3.2.1 Projection de Mercator	23
1.3.2.2 Projection de Gall-Peters	24
1.3.2.3 Projection plate carrée	26
1.4 Élaboration de l'algorithme de calcul pour une projection donnée \mathcal{P}	29
1.4.1 Outils pratiques	29
1.4.2 Algorithme de calcul de la \mathcal{P} -capitale	29
1.4.2.1 Algorithme implémenté en entier	29
1.5 Comparaison des capitales modulaires entre elles	38
2 Méthode de calcul d'un centre en géométrie sphérique	46
2.1 Motivations	46
2.2 Démarche de définition d'un barycentre en géométrie sphérique sans approcher rien d'autre	47
2.2.1 Expérience avec deux triangles sur un globe	49
2.2.1.1 Erreur liée à cette détermination empirique	52
2.2.2 Calcul algébrique	53
2.2.3 Un contre-exemple	53
2.2.3.1 De la multivaluation du premier algorithme	53
2.2.3.2 De la multivaluation du second algorithme	58
2.3 Estimation physique de l'aplatissement de la Terre	62

TABLE DES MATIÈRES

5

A Bibliographie **63**

B Iconographie **65**

Cahier des charges de la présentation

Matières : mathématiques, géodésie, informatique, un peu de physique.

Mathématiques	Informatique	Physique
Géométrie affine, géométrie sphérique, systèmes de coordonnées pour le repérage en trois dimensions, calcul barycentrique	Outil pour programmer un calculateur automatique, bases de données pour l'étude statistique	Géodésie, projections planisphériques, ellipticité dans le modèle physique de la Terre

Positionnements thématiques : géodésie, outil informatique, géométrie. Autres domaines : cartographie et projections planes, repérage en trois dimensions, systèmes de coordonnées, calcul barycentrique

Motivations : déterminer le « milieu » de certaines zones de la Terre ; en discrétilisant les frontières, déterminer aussi le centre de la France dont plusieurs revendiquent l'endroit. Estimer l'erreur lorsqu'on veut déterminer le milieu d'un polygone sur un planisphère au lieu de sur la sphère.

Mots clefs : géographie, barycentre, Terre, coordonnées, projection

Key words : geography, barycentre, Earth, coordinates, projection

Objectifs :

- ★ Étudier la pertinence des différentes méthodes de projection plane de la Terre pour calculer le barycentre d'un polygone sur une surface sphérique
- ★ Calcul du barycentre dans les cas simples à petits nombres de points
- ★ Implémenter un algorithme de conversion, calcul et conversion inverse modulo une projection donnée P (généralisation de l'objectif précédent)
- ★ Déterminer l'erreur statistique grâce à une base de données et un calcul automatisé en utilisant l'interaction SQL-Python
- ★ Déterminer l'erreur théorique modulo P par rapport au barycentre de référence dont on aura justifié la pertinence
- ★ Calculer le barycentre directement en géométrie sphérique et émancipation des approximations
- ★ Vérifier si le théorème d'associativité des barycentres est encore valable en géométrie sphérique, ce qui permettrait une définition récursive du barycentre et deviendrait la méthode de référence par suite

- ★ Prendre en compte l'ellipticité du globe terrestre

Préambule

En 1912, le choix du lieu du congrès de Bâle, où le discours de Jean Jaurès présage de la fin de la guerre des Balkans, n'est pas anodin ; la ville suisse constitue le centre géométrique des pays d'Europe, en prenant en compte leurs villes capitales ; décision quant à une réunion centralisée en relation directe avec le vœu œcuménique du député : « l'Internationale doit veiller à faire pénétrer partout sa parole de paix [...], nous devons nous rendre partout » (extrait du discours de Bâle, 24 novembre 1912). De même, historiquement, dans l'Antiquité, les cités-États les plus peuplées du Croissant fertile telles qu'Ur ou Babylone, berceaux des mathématiques, naissent aux centres des zones irriguées, des sources et des gués (*Histoire universelle*, R. Grousset, t. 1, encyclopédie de la Pléiade, NRF). Ainsi la détermination du centre géographique d'une région du monde est un enjeu géopolitique qui perdure, depuis du moins l'avènement de la diplomatie, et *a fortiori* la volonté de l'homme d'optimiser les trajets les plus courts au sein de distributions géographiques de points qu'il souhaite considérer, si tant est qu'il s'envisage spatialement ; la carte géographique la plus ancienne connue, conservée au musée sémitique de l'université de Harvard, nous vient de la Mésopotamie même et date du milieu du troisième millénaire avant notre ère.

Aujourd'hui, l'ère d'une mobilité toujours croissante appelle très régulièrement à un tel calcul barycentrique, afin de déterminer, ou du moins approximer, un point central d'un nuage de lieux relativement significatifs, l'intérêt résidant tour à tour près des enjeux économique, politique, environnemental : planification de routes en traçant à vol d'oiseau, constructions des voies ferrées et position de leurs centres d'aiguillage, des réseaux de transports en commun urbains et de leurs stations, optimisation des flux de marchandises par la terre ou par la mer à travers le monde, ou pour exemple, l'implantation d'une nouvelle gare, d'un centre de tourisme dans une région attractive, l'installation d'un centre commercial en un endroit nodal, la création d'un réseau électrique, la supputation de la zone d'attaques militaires futures par un missile à partir des données statistiques d'impacts passés, ou pour une entreprise de livraison ou des bureaux de poste afin de réduire les temps de trajet au maximum ; enfin, au quotidien, pour choisir un lieu où se retrouver de manière équitable, la situation d'une réunion d'affaires, de la balise terminale d'une épreuve de course d'orientation sportive, etc.

Cette manœuvre peut être menée naïvement, d'autant plus lorsque la sujexion de la détermination du centre de notre nuage de points à sa précision est limitée. C'est-à-dire, l'opérateur est enclin à tracer, sur un planisphère contenant les points qui l'intéressent, les côtés du polygone formé par eux, par exemple sur une carte des départements de l'IGN (Institut national de l'information géographique et forestière) lorsqu'il s'agit de localiser

le point de rencontre le meilleur, puis obtenir son barycentre géométriquement, que ce soit par le tracé de médianes, ou par un calcul analytique. Seulement, pour pouvoir justement tracer le polygone et faire appel aux méthodes connues de la géométrie affine, l'ennui majeur ressort de ce qu'il nous faut d'abord déformer la sphère en l'une de ses représentations planes, une *projection cartographique plane*, et celle-ci s'obtient par des licences arbitraires, qui, nous le verrons, ne peuvent préserver le globe exactement tout d'un coup. Par surcroît, de telles déformations semblent s'accroître lorsqu'on étend la zone possible pour le choix des points de la Terre en question.

En cherchant à déterminer précisément la notion intuitive de centre d'un « polygone » construit à l'aide de points en nombre finis, ses sommets, sur le globe terrestre, nous apercevons aisément les difficultés engendrées par la multiplicité et chacune des définitions envisageables. Certaines configurations, par exemple, sont problématiques : où placer à la surface de la sphère de la Terre, le centre d'une famille de villes toutes réparties uniformément le long de l'équateur ? Une fois défini même, le calcul du centre est fort asservi au choix de la projection cylindrique adoptée : il nous importe de savoir quelles de ses propriétés, conformité, équivalence, pour les plus pertinentes, nous donneront des résultats qui nous satisferont. Ces considérations nous mèneront à rejeter la projection de Mercator dans la réalisation de notre algorithme de calcul au profit de la projection de Gall-Peters, puis, nous examinerons, à renfort de nombreux calculs de centres à partir d'une banque de coordonnées géodésiques (*latitude*, *longitude*) de villes fixe, censée être assez représentative par sa diversité en les combinant toutes, les disparités constatées dans l'usage des projections les plus utilisées en géographie. L'étude statistique précédente est corroborée par un étude théorique qui calcule l'erreur de chaque projection quant à une méthode de référence donnant un « barycentre sphérique ».

Ceci soulève une question davantage théorique : quelle est la pertinence de cette dernière méthode, et par conséquence, est-il possible de définir systématiquement, comme le barycentre mathématique d'un système de points dans un espace affine, le « barycentre » d'un système de points à la surface d'une sphère, pourvu qu'ils soient « bien placés », de façon interne à la géométrie sphérique ? En effet, le barycentre affine d'un tel système de points est *a priori* hors de la sphère, à savoir à l'intérieur. Pour y répondre, nous voudrons construire récursivement l'isobarycentre d'une famille finie de points de notre espace sphérique, en postulant l'associativité des barycentres dont la propriété est vérifiée dans le cadre habituel : mais là encore, ce postulat se révélant invalidé, plusieurs définitions possibles de barycentres sont en compétition, et leurs pertinences mutuelles se chevauchent. Enfin, il nous viendra de s'émanciper peu à peu des approximations initiales, telles la projection plane ou la sphéricité de la Terre, ou d'élargir le problème à d'autres questions semblables : optimisation de trajets pour l'enjeu écologique, par

exemple.

► Nous cherchons à élaborer un algorithme de détermination du centre d'une famille de points du globe à partir de leurs coordonnées géodésiques. Ceci s'effectue modulo une projection cartographique plane, donc nous voulons comparer les résultats en faisant varier ce paramètre ; aussi nous nous demandons s'il existe une méthode théorique de détermination de ce centre qui soit pertinente en regard de l'exemple affine.

1 Méthode de calcul d'un centre par projection plane

1.1 Choix et définitions pour la suite de l'article

Les trois sections suivantes sont utiles à l'ensemble du document comme elles sont générales.

1.1.1 Sphère terrestre

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3 = \mathcal{E}_3$ et un point fixé O appartenant à \mathcal{E}_3 . C'est un espace topologique, étant canoniquement muni de la structure d'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \|\cdot\|)$. On pose définitivement $O = \vec{0} = (0, 0, 0)$, les coordonnées étant toujours prises, lorsque sous cette forme de triplet, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Approximation de sphéricité de la Terre

Dans un premier temps, nous considérons que la Terre est une sphère de rayon assimilé à son rayon réel moyen ; cependant, deux définitions concourent pour cette moyenne. Prenons la Terre pour un ellipsoïde, ce qui est le plus proche de la réalité, sans relief donc^a, de demi-axes a, b, c , et en particulier un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire que $b = c$. b est le rayon équatorial de la Terre, c'est-à-dire la distance (prise, dans notre approximation ellipsoïdale, constante) du centre O à tout point de l'équateur, et a est le rayon polaire, c'est-à-dire la distance du centre à l'un des pôles, la symétrie Nord/Sud, que les deux sont les mêmes. Le CNRS (Centre national de la recherche scientifique), dans le rapport de conjoncture 13 : « *Physique et chimie de la Terre* », 2004, fournit les valeurs : $a = 6356, 752$ km et $b = 6378, 137$ km. Ainsi, la distance du sol au centre de la Terre varie dans un intervalle de valeurs de longueur $b - a = 21, 385$ km. L'approximation, valable pour la première partie de notre composition, de sphéricité de la Terre veut fixer un rayon unique : ici, nous ferons donc l'approximation que l'ellipsoïde terrestre est dégénéré, avec $a = b = c = R$. Pour choisir ce R , naturellement, on peut faire appel au rayon moyen de l'ellipsoïde défini par $R_m = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2b+a}{3}$. Mais également, au lieu de la moyenne arithmétique, grâce à la moyenne géométrique, on définit le rayon volumétrique $R_v = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{ab^2} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$. Celui-ci est le rayon de la sphère de volume égal à celui de la Terre ellipsoïdale, $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$, ce qui s'obtient à partir de l'équation cartésienne qui la paramétrise, et il rend compte de ce que le modèle véritable de la Terre résulte de l'aplatissement de notre approximation. Ainsi, nous prendrons $R = R_v$, ce qui se calcule :

$$R = 6356, 752^{\frac{1}{3}} \cdot 6378, 137^{\frac{2}{3}} = 6371, 000685 \text{ km.}$$

^aCe que nous maintiendrons jusqu'à la fin de l'article : l'approximation de sphéricité est remise en question dans la dernière partie, mais l'approximation ellipsoïdale ne le sera pas, puisque cette relevant davantage de la géologie que de la géométrie.

Sur la deuxième figure, on introduit un vocabulaire fondamental pour les études ultérieures, en faisant apparaître les axes d'un repère cartésien orthonormé direct centré sur O . Sur la sphère terrestre, un certain point $N = (0, 0, R)$ de la sphère est appelé *pôle Nord* ; le point antipodal, *i. e.* trouvé par opposition $\vec{u} \mapsto -\vec{u}$ est appelé *pôle Sud* et noté S . Le *grand cercle* (un cercle inclus dans la sphère de rayon maximal R) inclus dans le plan (O, x, y) , appelé *plan équatorial* est l'*équateur* ; c'est donc le cercle formé de l'ensemble des points de la sphère équidistants aux deux pôles : $\text{équateur} = \bigoplus \cap \text{Vect}(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$; de même, le grand cercle inclus dans le plan (O, x, z) est appelé *méridien de Greenwich*, parce qu'il passe par le village de Greenwich, près de Londres en Angleterre : $\text{meridien de Greenwich} = \bigoplus \cap \text{Vect}(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$. Sous ces condi-

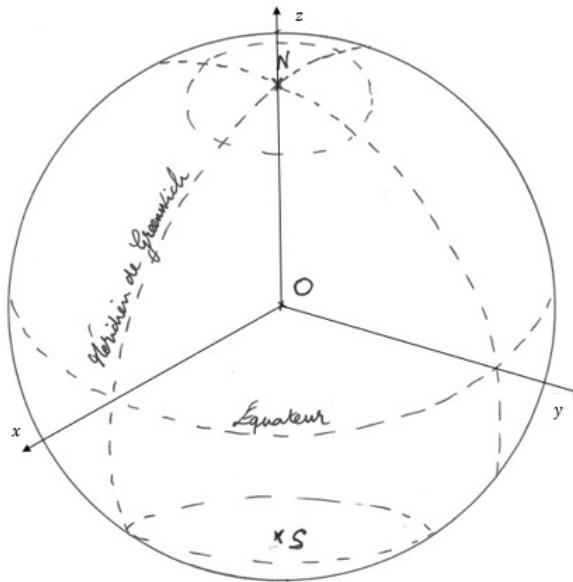


FIGURE 2. — Caractéristiques primaires de la Terre

tions, la France est située, sur la figure, environ deux centimètres en haut de l'intersection entre l'équateur et le méridien de Greenwich.

Par ailleurs, on appelle *parallèle* tout cercle sur la sphère inclus dans un plan parallèle au plan équatorial, et *méridien*, dans l'absolu, tout cercle sur la sphère inclus dans un plan contenant l'axe des pôles. L'*axe des pôles* est le nom de l'axe des cotes. Le demi-espace supérieur au plan équatorial intersecté par la boule dont la sphère est la frontière est l'*hémisphère nord* ; l'intersection du demi-espace qui lui est inférieur avec cette même boule est l'*hémisphère sud*.

Définition. (*Terre*)

On appelle *Terre* et on note \oplus , l'ensemble fermé

$$\oplus = S(O, R) = Fr(\mathcal{B}(O, R)),$$

dans $(\mathcal{E}_3, +, .)$ muni de la norme euclidienne ou norme 2.

Le statut de R n'est pas partie de cette définition, car même si, pour l'instant, nous l'avons fixé comme le rayon volumétrique moyen R_m de l'ellipsoïde terrestre, c'est-à-dire $[R = 6371,000685 \text{ km}]$, il pourra changer de définition lui-même pendant l'article. Par exemple, il semble que cela soit le choix le plus raisonnable lorsqu'il s'agit de déterminer le centre de Moscou, Le Cap, Jakarta et Canberra, étant donné qu'alors les villes considérées sont situées sur une large portion de l'hémisphère, et le rayon varie significativement entre deux de ces villes. Cependant, lorsque nous étudierons le centre de villes toutes situées en

Turquie, par exemple, le rayon moyen (moyenne arithmétique des demi-axes) s'impose, car la Turquie se situe à mi-chemin, environ, de l'équateur au pôle, et le rayon équatorial se change en le rayon polaire, sur l'ellipsoïde, en décroissant, d'où la prise en compte d'un rayon relativement médian des deux valeurs de a et b . Ces considérations seront reprises alors, lorsque nous utiliserons concrètement le rayon dans nos formules.

1.1.2 Familles de villes

Nous devons également définir, avant tout barycentre, l'autre terme suspect de notre problématique, celui d'une *famille de points terrestres*. Nous l'allons tout d'abord changer en l'abréviation *famille de villes*.

Définition. (*Famille de villes*)

Soit n un entier naturel. On appelle *famille de villes* d'ordre n , et on note $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, tout n -uplet **injectif** tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, V_i repère de manière univoque un point de la surface du globe terrestre. On note CV la classe des familles de villes : ce sont les n -listes sans répétition à valeurs dans \oplus pour n parcourant \mathbb{N} .

1.1.2.1 Remarques.

1. La notion de repérage d'un point du globe terrestre n'est pas encore définie dans notre composition. C'est l'objet des parties directement suivantes qui complètent la définition précédente. On verra que la façon la plus utile de définir les villes est de les identifier à la liste de leurs coordonnées géodésiques, un couple si l'on travaille en degrés décimaux, ou bien un sextuplet si l'on travaille en degrés, minutes, secondes (trois pour la latitude, trois pour la longitude), dans cet ordre.
2. Par commodité de langage, nous avons appelé CV une classe : *a priori*, cette classe est impropre puisque la sphère est une partie de \mathbb{R}^3 . Plus précisément, on peut calculer le cardinal de cet ensemble, en écrivant : $CV = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{(V_1, \dots, V_n) \mid V_1, \dots, V_n \in \oplus \wedge \forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad V_k \neq V_l\}$. Pour n fixé, l'ensemble de terme de rang n considéré a pour le cardinal le nombre d'injections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\oplus = S(O, R) \simeq \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}$ au sens de l'équipotence. Pour choisir le premier élément, on a $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ possibilités, puis pour le second, autant moins un élément. Comme la puissance du continu est stable par fluctuations de cardinal fini, jusqu'à n , on peut écrire que le terme de rang n de cette union disjointe est en bijection avec $\prod_{k=1}^n [\mathbb{R} \setminus \llbracket 1, k \rrbracket]$ lui-même en bijection avec \mathbb{R}^n . Ainsi $\text{card}(CV) = \text{card}(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{R}^n)$. C'est une réunion dénombrable de puissances du continu, elle a donc la puissance du continu, et $\boxed{\text{card}(CV) = 2^{\aleph_0}}$.

3. Lorsqu'une famille est d'ordre $n \geq 1$, on peut envisager intuitivement, du moins dans certains cas, une notion de polygone associé à cette famille. Le centre géographique d'une famille de villes serait alors le barycentre des points équipondérés formés par les sommets de ce polygone. Dans toute la suite, les familles seront donc d'ordre non nul.

La notion suivante nous sera utile lorsque nous devrons comparer les centres de familles de villes auxquelles nous aurions ajouté ou retiré des points.

Définition. (*Sous-famille, sur-famille de villes*)

Soient n, p deux entiers naturels non nuls, $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $(W_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ deux familles de villes terrestres. Si $n \leq p$ et que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $W_j = V_i$, on dit que V est une *sous-famille* de W et que W est une *sur-famille* de V .

Propriété. (*Relation généalogique*)

La relation définie sur la classe CV par :

$$\forall V, W : CV \quad V \models W \Leftrightarrow V \text{ est une sous-famille de } W$$

est une relation d'ordre partiel.

▷ La relation est réflexive, en prenant pour tout V_i son indice, et antisymétrique, car si $\{V_i \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket\} \subset \{W_j \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ et $\{W_j \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subset \{V_i \mid i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$, alors $V = W$ par extensionnalité. \models est transitive : si V, W, X sont trois familles de villes où V est une sous-famille de W et W une sous-famille de X , si V_i est une ville de V , alors il existe une ville égale W_j de W par hypothèse et là encore une ville X_k de X égale à W_j , donc égale à V_i , et l'on déduit que V est une sous-famille de X . Enfin, cette relation n'est pas totale ; pour le constater, il suffit de choisir deux familles formées d'une unique ville chacune distinctes (Londres et Pékin), ce dont on garantit l'existence par la non-trivialité de la sphère terrestre. ■

Ce qu'il faut retenir

- La Terre est prise comme une sphère de l'espace de rayon R , constant, de centre O . Ce rayon est sujet à changer avant la fin de l'article, mais pour le moment, on dit que c'est le rayon volumétrique moyen de l'ellipsoïde terrestre.
- Une famille de villes est un uplet de points distincts univoquement repérés sur la surface de la Terre. On note CV l'ensemble des familles de villes : c'est une partie

de $S(O, R) = \oplus$. (En théorie des mots, on a même : $CV = \oplus^*$ l'ensemble des mots finis sur \oplus .)

1.1.3 Repérage par coordonnées sphériques

Nous adoptons un système de repérage par les coordonnées sphériques. Cette méthode est valide, c'est-à-dire qu'on peut la bien définir, car nous nous bornons d'après l'approximation de la partie précédente à considérer des points situés sur \oplus , qui n'est pas trivial ($R \neq 0$). Autrement, nous ne saurions donner de direction au vecteur de base \vec{u}_r de la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$, et par conséquent, aux vecteurs \vec{u}_θ puis \vec{u}_φ (et plus accessoirement, pour une éventuelle étude cinématique, les angles auraient risqué de n'être pas continus quant au temps). On ne peut en effet définir correctement de repérage cylindrique ou sphérique pour un mouvement passant par le centre du repère.

Théorème et définitions. (*Coordonnées sphériques d'un point non central*)

Pour tout point $M \in \mathcal{E}_3 \setminus \{O\}$, il existe un unique triplet (r, φ, θ) appartenant à $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ et une application f indépendante de ce point (application coordonnées cartésiennes) de $\mathcal{E}_3 \setminus \{O\}$ dans $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ telle que $f(r, \varphi, \theta) = M$. r est appelé *rayon*, θ est appelé *co-latitude*, et φ est appelé *longitude*. Ce dernier représente les variations le long des parallèles.

▷ Il suffit d'exhiber une bijection f de $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi]$ dans $\mathcal{E}_3 \setminus \{O\}$, et pour cela on introduit la fonction $g : (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$. Pour démontrer le théorème, il suffit d'exhiber la bijection réciproque de g , pour l'instant notée h . On pose :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{E}_3 \setminus \{O\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] \\ (x, y, z) &\mapsto \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0. \end{cases} \right) \end{aligned}$$

et l'on vérifie que $g \circ h = \text{id}_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi]}$ et que $h \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$. Dans ce cas, g est bijective et $g^{-1} = h$. Ces fonctions, g et sa bijection réciproque $g^{-1} = f$, sont respectivement les application coordonnées sphériques et application coordonnées cartésiennes. Leurs expressions s'appellent **relations de passage**. ■

Là, nous pouvons définir, pour un point M fonction du temps qui ne passe pas en O , le trièdre direct $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$ tel que $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.

Corollaire. (*Coordonnées géodésiques sur \oplus*)

Pour tout point $M \in \oplus$, il existe un couple (θ, φ) appartenant à $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ et une application f (application coordonnées) indépendante de ce point de \oplus dans $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ telle que $f(\theta, \varphi) = M$.

▷ C'est une conséquence de ce qui précède, en fixant $r = R$. On ne s'intéresse plus à l'unicité, qui serait garantie si l'on excluait les pôles. ■

1.1.3.1 Remarque importante

Dans le langage courant, on évoque bien la longitude, mais on ne parle pas de colatitude pour repérer un point terrestre par ses coordonnées géodésiques. C'est pourquoi nous posons $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$, la **latitude** du point M , définie comme l'angle complémentaire de la colatitude. Les coordonnées géodésiques d'un point M sont donc le couple (λ, φ) dans cet ordre, latitude puis longitude. On se le rappelle en remarquant que les deux lettres sont bien rangées dans l'ordre de l'alphabet grec.

Aussi, on se demande à quoi correspondent ces angles selon la convention usuelle des géographes ; nous avons déjà partiellement répondu. En effet, la longitude indique la position sur la sphère terrestre, qui, lorsqu'elle varie, meut un point le long d'un parallèle ; inversement, la latitude indique une position qui, lorsqu'elle varie, le meut le long d'un méridien. Pour établir une analogie avec la géométrie euclidienne, la longitude est la correspondance des abscisses que nous connaissons et la latitude celle des ordonnées. En admettant que les méridiens correspondent aux droites parallèles de la géométrie euclidienne, pour obtenir la longitude d'un point, on trace l'unique méridien *parallèle* au méridien de Greenwich passant par ce point, et l'intersection I de cette « droite » avec l'équateur constitue la donnée de l'angle $\varphi = (\overrightarrow{0O}, \overrightarrow{OI})$ orienté dans le sens trigonométrique, vu du dessus du pôle Nord ; de même pour la latitude, les mesures positives étant prises là pour l'hémisphère nord.

Ce qu'il faut retenir

- On peut repérer les points de la sphère \oplus par un couple de coordonnées, dites géodésiques, de la forme (λ, φ) , le premier étant la latitude, le second membre la longitude. Ce couple n'est pas unique aux pôles seulement.
- La latitude indique sur quel parallèle un point se situe, la longitude indique sur quel méridien.

1.2 Barycentres en géométrie affine

Nous introduisons à présent la notion de barycentre dans un espace affine, cas général, que l'on transpose aisément en esprit à \mathbb{R}^3 .

1.2.1 Introduction

On choisit n points $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, $n \in \mathbb{N}$, contenus dans un \mathbb{K} -espace vectoriel quelconque $(E, +, \cdot)$. Ces points ne sont autres que ses vecteurs. Il est inutile d'introduire le formalisme des espaces affines, étant donné que les espaces considérés par la suite sont les \mathbb{R}^p , tous vectoriels ; ils sont affines, et agissant sur eux-mêmes par $(u, v) \mapsto v - u$, ils sont leurs propres directions.

Soient également $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n scalaires, dont on suppose que la somme est non nulle : $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$. Ce sont les *poids* des (A_i) , et la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est celle des points pondérés par les (λ_i) .

Théorème. (*Barycentre d'un système de points pondérés en géométrie affine*)

On appelle *barycentre* du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, l'unique point G de l'espace E vérifiant la propriété caractéristique :

$$\forall M \in E \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

▷ On raisonne par analyse pour montrer l'unicité, puis synthèse pour l'existence. ■

On dispose, par le raisonnement analytique précédent, d'une expression directe du barycentre.

Propriété. (*Formule explicite du barycentre d'un système*)

Le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est $G = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

On a également l'objet particulier suivant :

Définition. (*Isobarycentre*)

Le barycentre G du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ où λ est un scalaire non nul est l'*isobarycentre* de ces points ; il ne dépend pas de λ . On a de plus : $G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$. Sans autre précision, le barycentre de points non pondérés est leur isobarycentre.

Propriété. (*Expression du barycentre en dimension finie*)

Si E est de dimension finie, alors les coordonnées dans une base donnée du barycentre d'une famille de points pondérés sont les barycentres des coordonnées dans cette base de ces points, pondérées de la même façon.

Remarque.

En physique, le barycentre d'une famille finie de points matériels (M_i) affectés des masses (m_i) est appelé leur *centre de masse*.

1.2.2 Propriétés du barycentre

On peut commencer par énoncer les propriétés immédiates que l'on obtient quant aux barycentres de système de points.

Propriété. (*Commutativité du barycentre*)

Le barycentre est invariant par permutation des indices des (A_i, λ_i) .

Propriété. (*Homogénéité du barycentre*)

Si l'on multiplie tous les poids par un même scalaire $\mu \neq 0$, alors le nouveau barycentre égale le barycentre des points antérieurs.

Remarque.

Il est donc possible de ne considérer plus que les barycentres de points pondérés dont le poids total vaut 1, quitte à dilater dès le départ. Dans ce cas, son expression explicite est simplifiée.

Le barycentre de la géométrie affine est doté d'une propriété essentielle, présente en marge du programme de mathématiques supérieures, dont nous rappelons l'énoncé général ci-dessous.

Théorème. (*Associativité du barycentre*)

Soient n un entier naturel, et $(G_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des points d'un espace vectoriel tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, G_k soit le barycentre des points $(A_{k,i}, \lambda_{k,i})_{1 \leq i \leq p_k}$ pondérés, p_k étant un entier naturel dépendant donc de G_k . On note dans ce cas $\lambda_k = \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_{k,i}$. Alors le point G barycentre des $(A_{k,i}, \lambda_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p_k}}$ est le barycentre des $(G_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$.

▷ On se rappelle que le barycentre G des $(G_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ est caractérisé par :

$$\forall M \in E \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{G_k M} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GM},$$

E l'espace ambiant. Or pour un terme donné d'indice k , $\lambda_k \overrightarrow{G_k M} = \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_{k,i} \overrightarrow{A_{k,i} M}$, donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{G_k M} = \sum_{\substack{i,k \\ 1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p_k}} \lambda_{k,i} \overrightarrow{A_{k,i} M}$, pour tout M , ce qui caractérise le barycentre de $(A_{k,i}, \lambda_{k,i})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq p_k}$. ■

1.2.3 Ce que devient le barycentre en géométrie sphérique

Un problème majeur survient lorsqu'on tente de transposer ces raisonnement sur la sphère : *a priori*, le barycentre de points situées sur \oplus ne se situe plus dans \oplus . Ce constat signifie que **la sphère n'est pas un sous-espace affine de \mathcal{E}_3** .

Théorème. (*Point de départ de la géométrie sphérique*)

\oplus n'est pas un espace affine.

Toutefois, nous allons définir une notion de *pseudo-barycentre* de la géométrie sphérique. La pertinence de cette notion n'est pas évidente. Puisque nous voyons apparaître que nous serons réduits à approximer l'idée intuitive de centre sur la sphère, le pseudo-barycentre nous permettra simplement d'évaluer le fonctionnement de ces méthodes d'approximation, en calculant pour chacune d'elle l'écart du centre trouvé par rapport à cette méthode de référence, soit-elle relativement vide de sens.

Tout d'abord, introduisons la notion de *projection sphérique*.

Définition. (*Projection sphérique*)

On appellera *projection sphérique* l'application :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{E}_3 \setminus \{O\} &\longrightarrow \oplus \\ M &\longmapsto \frac{R}{\|M\|} M \end{aligned}$$

Remarque. La projection sphérique est bien définie par séparation de la norme.

Définition. (*Pseudo-barycentre*)

Soient $(A_i, \lambda_i)_{i \in [1, n]}$ des points de \oplus de poids total non nul. Le *pseudo-barycentre* de ce système est, si elle existe, la projection sphérique du barycentre de ce système de points pondérés dans \mathcal{E}_3 .

Remarque. De même que précédemment, le pseudo-barycentre de poids non pondérés est leur pseudobarycentre.

1.2.3.1 À quelle condition le pseudo-barycentre est-il défini ? Pour que le pseudo-barycentre d'un système de points pondérés de \oplus soit défini, il faut et il suffit que leur barycentre dans l'espace affine \mathcal{E}_3 ne soit pas exactement \bar{O} . On peut répondre d'ores et déjà à l'une des interrogations initiales de notre problème : le pseudo-barycentre de deux points antipodaux, c'est-à-dire leur milieu, n'est pas défini ; de même, si les points sont équirépartis tout autour de l'équateur, leur barycentre est nul donc ils ne possèdent pas de pseudo-barycentre.

1.3 Projections planes

Nous cherchons ici quelle méthode de projection de la Terre adopter. En effet, dans notre première approche, nous voulons déterminer le centre d'une famille de points initialement repérés par leurs coordonnées sphériques comme nous l'avons esquissé dans la partie supérieure, en calculant le barycentre des « projetés » de ces mêmes points sur un planisphère, puis en déterminant le point terrestre dont ce barycentre est le projeté. En somme, nous voulons aplatis la Terre le temps de calculer un barycentre en géométrie affine. Ce point n'a, *a priori*, aucune légitimité mathématique, car les projections planes sont arbitraires, mais peut-être que l'une des projections cartographiques fournit un résultat satisfaisant quant au pseudo-barycentre évoqué précédemment.

Une remarque importante sur le vocabulaire : d'aucuns¹ répudient le terme de *projection plane* de la sphère terrestre, arguant que l'opération considérée n'est pas celle de projection au sens proprement mathématique ; ce n'est, en effet, pas le cas. Cependant, le *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* de Stella Baruk définit : « une projection, d'une manière générale, est une façon d'associer à un point M un autre point M' [...] », comme si M avait été "jeté" sur une surface donnée ». Considérant que ce sens est très adapté à notre démarche, nous emploierons librement le terme *projection* dans la suite de notre composition.

 Il convient de remarquer que nous ne nous intéressons pas aux formules permettant de passer d'un repérage cartésien des points de \oplus dans l'espace \mathcal{E}_3 au repérage sphérique décrit dans la section précédente ; nous cherchons à associer à tout point de \oplus un unique point d'un rectangle du plan (la *projection* de \oplus), et c'est ensuite que le repérage cartésien dans le plan se montre, avec assez d'évidence, le plus adapté pour le calcul du barycentre dans le plan \mathcal{E}_2 .

Définition. (*Nom du centre d'une famille pour une projection donnée*)

Soient V une famille de ville et \mathcal{P} une méthode de projection donnée, telle que celles décrites précédemment. On appelle \mathcal{P} -capitale de V , s'il existe, le point de \oplus dont le correspondant selon \mathcal{P} est le barycentre équivalant des projetés selon \mathcal{P} des composantes de V .

¹Les projections et référentiels cartographiques, Patrick Sillard, notes de cours à l'École nationale des sciences géographiques, septembre 2000

1.3.1 Étude théorique des projections cartographiques

1.3.2 Les principaux exemples de projections cartographiques. Ceux que nous utiliserons

1.3.2.1 Projection de Mercator

La projection de Mercator est conforme, c'est-à-dire qu'elle préserve les angles.

Définition. (*Projection de Mercator*)

Soient λ, φ les latitude et longitude d'un point de la sphère terrestre en degrés. Alors leur projeté plan selon la projection de Mercator est

$$(x, y) = \left(\frac{180}{R\pi} \lambda, R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{90\varphi}{R\pi} \right) \right) \right).$$

```

1 #Projection de Mercator
2
3 R = 6371.000685*(10**3)
4
5 def Mercator(l,p):
6     """
7         Entrée : couple de coordonnées géodésiques (latitude,
8             longitude) en degrés décimaux
9             -----
10        Sortie : liste à deux éléments des coordonnées planes (
11            abscisse, ordonnée) selon la projection de Mercator
12        """
13        from math import pi,log,tan
14        x = 180*l/(R*pi)
15        y = R*log(tan(pi/4 + 90*p/(R*pi)))
16        return [x,y]
```

Propriété. (*Bijection réciproque de la projection de Mercator*)

La réciproque de la projection de Mercator est :

$$(x, y) \longmapsto (\lambda, \varphi) = \left(\frac{R\pi}{180} x, \frac{R\pi}{90} \arctan(e^{\frac{y}{R}}) - \frac{R\pi^2}{360} \right).$$

```

1 def Mercator_inverse(x,y):
2     """
3         Entrée : couple de coordonnées planes (abscisse, ordonnée
4             )
5             ---
6             Sortie : liste à deux éléments des coordonnées géodé
7             siques (latitude, longitude) en degrés décimaux dont le
8             point selon la projection de Mercator est le point du plan
9             en entrée
10            """
11
12     from math import pi,exp,atan
13     l = R*pi*x/180
14     p = (R*pi/(90))*atan(exp(y/R)) - (R*pi**2)/(360)
15     return [l,p]

```

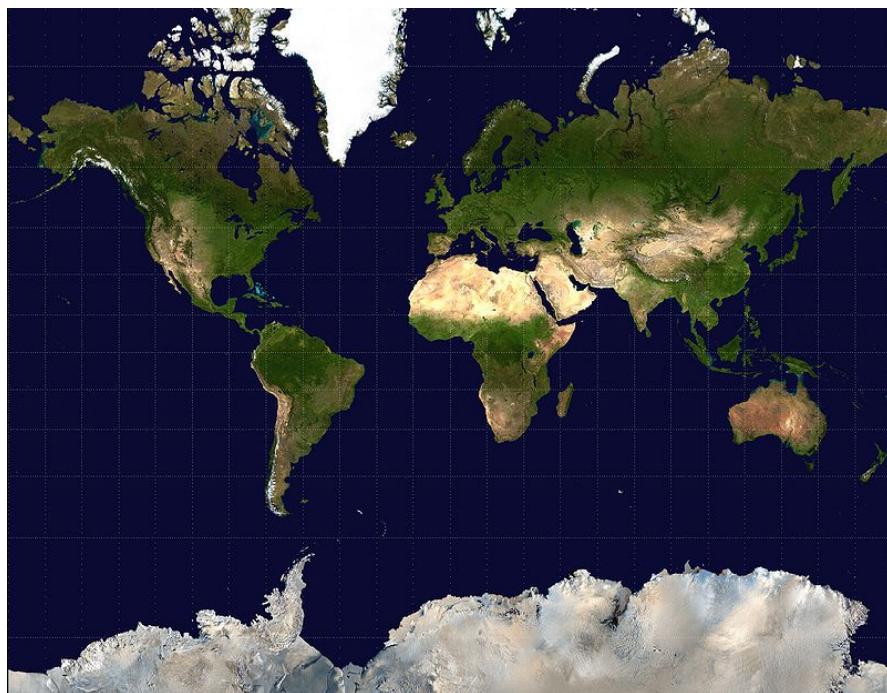


FIGURE 3. — Représentation planisphérique de la Terre par la projection de Mercator.
Les lignes grises en pointillés correspondent aux parallèles et aux méridiens.

1.3.2.2 Projection de Gall-Peters

La projection de Peters est équivalente, c'est-à-dire qu'elle préserve les distances.

Définition. (*Projection de Gall-Peters*)

Soient λ, φ les latitude et longitude d'un point de la sphère terrestre en degrés. Alors leur projeté plan selon la projection de Gall-Peters est

$$(x, y) = \left(\frac{180}{R\pi} \lambda, 2R \sin\left(\frac{180\varphi}{R\pi}\right) \right).$$

```

1 #Projection de Gall-Peters
2
3 R = 6371.000685*(10**3)
4
5 def Peters(l,p):
6     """
7         Entrée : couple de coordonnées géodésiques (latitude,
8             longitude) en degrés décimaux
9             -----
10        Sortie : liste à deux éléments des coordonnées planes (
11            abscisse, ordonnée) selon la projection de Peters
12        """
13        from math import pi,sin
14        x = 180*l/(R*pi)
15        y = 2*R*sin(180*p/(R*pi))
16        return [x,y]
```

Propriété. (*Bijection réciproque de la projection de Gall-Peters*)

La réciproque de la projection de Gall-Peters est :

$$(x, y) \longmapsto (\lambda, \varphi) = \left(\frac{R\pi}{180}x, \frac{R\pi}{180} \arcsin\left(\frac{y}{2R}\right) \right).$$

```

1 def Peters_inverse(x,y):
2     """
3         Entrée : couple de coordonnées planes (abscisse, ordonnée
4             )
5             ---
```

```

5     Sortie : liste à deux éléments des coordonnées géodé
       siques (latitude, longitude) en degrés décimaux dont le
       point selon la projection de Peters est le point du plan
       en entrée
6     ...
7     from math import pi,asin
8     l = R*pi*x/180
9     p = R*pi*asin(y/(2*R))/180
10    return [l,p]

```

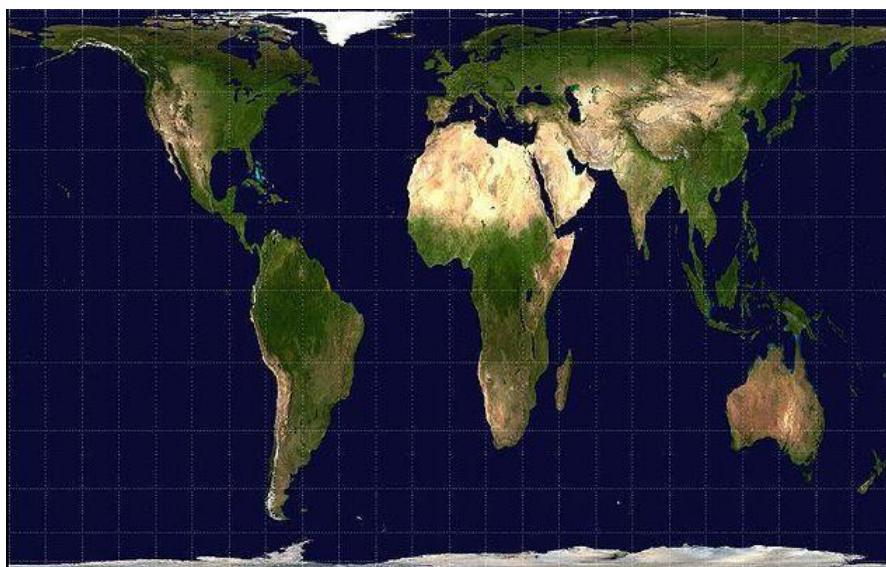


FIGURE 4. — Représentation planisphérique de la Terre par la projection de Gall-Peters. Les lignes grises en pointillés correspondent aux parallèles et aux méridiens.

1.3.2.3 Projection plate carrée

La projection de Peters est aphyllactique. Cependant, elle est équidistante : les images des parallèles sont à égales distances.

Définition. (*Projection plate carrée*)

Soient λ, φ les latitude et longitude d'un point de la sphère terrestre en degrés. Alors leur projeté plan selon la projection de plate carrée est

$$(x, y) = \left(\frac{180}{R\pi} \lambda, \frac{180}{R\pi} \varphi \right).$$

```

1 #Projection plate carrée
2
3 R = 6371.000685*(10**3)
4
5 def platecarree(l,p):
6     """
7         Entrée : couple de coordonnées géodésiques (latitude,
8             longitude) en degrés décimaux
9         -----
10        Sortie : liste à deux éléments des coordonnées planes (
11            abscisse, ordonnée) selon la projection plate carrée
12        """
13
14     from math import pi
15     x = 180*l/(R*pi)
16     y = 180*p/(R*pi)
17     return [x,y]

```

Propriété. (*Bijection réciproque de la projection plate carrée*)

La réciproque de la projection plate carrée est :

$$(x, y) \longmapsto (\lambda, \varphi) = \left(\frac{R\pi}{180}x, \frac{R\pi}{180}y \right).$$

```

1 def platecarree_inverse(x,y):
2     """
3         Entrée : couple de coordonnées planes (abscisse, ordonnée
4             )
5         ---
6         Sortie : liste à deux éléments des coordonnées géodé
7             siques (latitude, longitude) en degrés décimaux dont le
8             point selon la projection plate carree est le point du
9             plan en entrée
10        """
11
12     from math import pi
13     l = R*pi*x/180
14     p = R*pi*y/180

```

```
10     return [l,p]
```

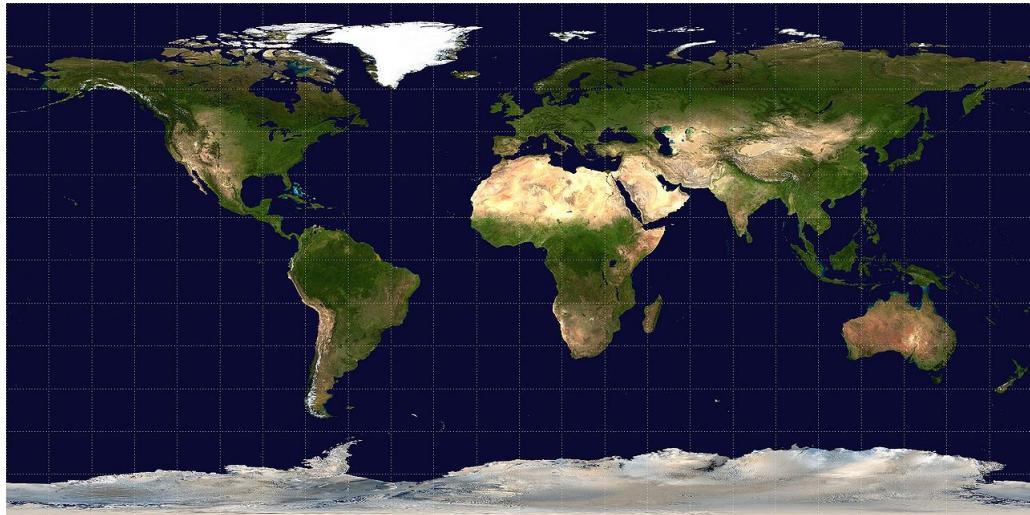


FIGURE 5. — *Représentation planisphérique de la Terre par la projection plate carrée.*
Les lignes grises en pointillés correspondent aux parallèles et aux méridiens.

1.4 Élaboration de l'algorithme de calcul pour une projection donnée \mathcal{P}

1.4.1 Outils pratiques

Pour essayer notre algorithme nous avons recours à plusieurs logiciels. D'abord, si nous voulons les coordonnées géodésiques en degrés, minutes, secondes d'un point particulier du globe, le plus simple est de l'aller localiser sur le logiciel Google Earth.

Ensuite, pour localiser sur la carte le point obtenu, nous utiliserons le site Internet : <https://www.cordonnees-gps.fr/>.

1.4.2 Algorithme de calcul de la \mathcal{P} -capitale

On rappelle que les formules définissant les projections cartographiques ont été définies et implémentées dans les parties précédentes.

Pour fixer les idées, nous avons choisi de travailler directement (mais ça n'apparaît pas dans le programme, qui traite le cas général) avec le cas particulier de la Gall-Peters-capitale, que nous abrégeons toujours en *Peters-capitale*. Pour le calcul, on peut travailler, car c'est bon, n est non nul.

1.4.2.1 Algorithme implémenté en entier Voici donc, d'une traite, le programme en Python pour calculer une \mathcal{P} -capitale :

```
1 #Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour
2 #une projection P (DMS-DMS)
3
4
5 def capitale(famille,projection,projection_inverse):
6     ''
7     Entrées : famille de villes (listes à six éléments de
8     degrés, minutes et secondes dans l'ordre : trois grandeurs
9     pour la latitude, puis trois grandeurs pour la longitude)
10    de longueur non nulle, projection cartographique
11    bijective de la sphère sur le rectangle, et sa bijection r
12    éciproque
13
14    Sortie : projection-capitale de famille sous la forme d'
15    une liste à six éléments donnant les coordonnées géodé
```

```
    siques latitude, longitude en degrés, minutes, secondes
    dans cet ordre
    ...
10
11
12     from math import floor
13
14     #1. Conversion des villes en degrés décimaux
15
16     famille_dec = []
17     for V in famille:
18         l = float(V[0])
19         l+= float(V[1])/60
20         l+= float(V[2])/3600
21         p = float(V[3])
22         p+= float(V[4])/60
23         p+= float(V[5])/3600
24         famille_dec+=[l,p]
25
26     #2. Calcul des projetés des villes de la Terre sur le
27     # plan
28
29     famille_plane = []
30     for V in famille_dec:
31         famille_plane+=[projection(V[0],V[1])]
32
33     #3. Calcul de l'isobarycentre des projetés dans le plan
34     # affine
35
36     x = 0
37     for point in famille_plane:
38         x+= point[0]
39     x = x/len(famille_plane)
40
41     y = 0
42     for point in famille_plane:
43         y+= point[1]
44     y = y/len(famille_plane)
```

```
44     G = [x,y]
45
46     #4. Calcul du point de la Terre dont le barycentre est le
47     #      projeté
48
49     M = projection_inverse(G[0],G[1])
50     lat = M[0]
51     long = M[1]
52
53     #5. Conversion des coordonnées de la capitale en degrés,
54     #      minutes, secondes
55
56     def signe(x):
57         if x>=0:
58             return 1
59         else:
60             return -1
61
62     signe_lat=signe(lat)
63     signe_long=signe(long)
64
65     lat=abs(lat)
66     long=abs(long)
67
68     a=floor(lat)
69     lat=(lat-a)/60
70     b=floor(lat)
71     c=(lat-b)/60
72
73     d=floor(long)
74     p=(long-d)/60
75     e=floor(long)
76     f=(long-e)/60
77
78     return [signe_lat * a,b,c,signe_long * d,e,f]
```

On peut réécrire ce programme de sorte qu'il ne fournis pas le résultat final en

degrés, minutes, secondes, mais en degrés décimaux, ce qui suffira parfois.

```
1 #Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour
2 #une projection P (DMS-DD)
3
4 R = 6371.000685*(10**3)
5
6 def capitale(famille,projection,projection_inverse):
7     """
8         Entrées : famille de villes (listes à six éléments de
9             degrés, minutes et secondes dans l'ordre : trois grandeurs
10            pour la latitude, puis trois grandeurs pour la longitude)
11            de longueur non nulle, projection cartographique
12            bijective de la sphère sur le rectangle, et sa bijection r
13            éciproque
14
15         Sortie : projection-capitale de famille sous la forme d'
16             une liste à deux éléments donnant les coordonnées géodé
17             siques latitude, longitude en degrés décimaux dans cet
18             ordre
19
20     """
21
22
23     #1. Conversion des villes en degrés décimaux
24
25     famille_dec = []
26     for V in famille:
27         l = float(V[0])
28         l+= float(V[1])/60
29         l+= float(V[2])/3600
30         p = float(V[3])
31         p+= float(V[4])/60
32         p+= float(V[5])/3600
33         famille_dec+=[[l,p]]
34
35     #2. Calcul des projetés des villes de la Terre sur le
36     #plan
```

```

26     famille_plane = []
27     for V in famille_dec:
28         famille_plane+= [projection(V[0] ,V[1])]
29
30     #3. Calcul de l'isobarycentre des projetés dans le plan
31     # affine
32
33     x = 0
34     for point in famille_plane:
35         x+= point[0]
36     x = x/len(famille_plane)
37
38     y = 0
39     for point in famille_plane:
40         y+= point[1]
41     y = y/len(famille_plane)
42
43     G = [x,y]
44
45     #4. Calcul du point de la Terre dont le barycentre est le
46     # projeté
47
48     M = projection_inverse(G[0] ,G[1])
49     lat = M[0]
50     long = M[1]
51
52     return [lat,long]

```

Voilà les deux mêmes algorithmes qui prennent en entrée des degrés décimaux.

```

1 #Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour
2 # une projection P (DD-DD)
3
4 R = 6371.000685*(10**3)
5
6 def capitale(famille,projection,projection_inverse):
7     '''

```

```
7     Entrées : famille de villes (liste à deux éléments de
8         degrés décimaux dans l'ordre : la latitude, la longitude)
9         de longueur non nulle, projection cartographique
10        bijective de la sphère sur le rectangle, et sa bijection r
11        éciproque
12        -----
13
14        Sortie : projection-capitale de famille sous la forme d'
15        une liste à deux éléments donnant les coordonnées géodé
16        siques latitude, longitude en degrés décimaux dans cet
17        ordre
18        ''
19
20
21        famille_dec = famille
22
23
24
25        #1. Calcul des projetés des villes de la Terre sur le
26        plan
27
28        famille_plane = []
29        for V in famille_dec:
30            famille_plane+= [projection(V[0],V[1])]
31
32
33
34        #2. Calcul de l'isobarycentre des projetés dans le plan
35        affine
36
37
38        x = 0
39        for point in famille_plane:
40            x+= point[0]
41        x = x/len(famille_plane)
42
43
44        y = 0
45        for point in famille_plane:
46            y+= point[1]
47        y = y/len(famille_plane)
48
49
50        G = [x,y]
51
52
53
54        #3. Calcul du point de la Terre dont le barycentre est le
55        projeté
```

```

35
36     M = projection_inverse(G[0], G[1])
37     lat = M[0]
38     long = M[1]
39
40     return [lat, long]

```

et :

```

1 #Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour
2 #une projection P (DD-DMS)
3
4 R = 6371.000685*(10**3)
5
6 def capitale(famille, projection, projection_inverse):
7     """
8         Entrées : famille de villes (listes à deux éléments de
9             degrés, décimaux dans l'ordre : la latitude, puis la
10            longitude) de longueur non nulle, projection
11            cartographique bijective de la sphère sur le rectangle,
12            et sa bijection réciproque
13            -----
14            Sortie : projection-capitale de famille sous la forme d'
15            une liste à six éléments donnant les coordonnées géodé-
16            siques latitude, longitude en degrés, minutes, secondes
17            dans cet ordre
18            """
19
20
21     from math import floor
22
23     famille_dec = famille
24
25
26     #1. Calcul des projetés des villes de la Terre sur le
27     #    plan
28
29     famille_plane = []
30     for V in famille_dec:

```

```
20         famille_plane+= [projection(V[0],V[1])]

21

22     #2. Calcul de l'isobarycentre des projetés dans le plan
23     # affine

24     x = 0
25     for point in famille_plane:
26         x+= point[0]
27     x = x/len(famille_plane)

28

29     y = 0
30     for point in famille_plane:
31         y+= point[1]
32     y = y/len(famille_plane)

33

34     G = [x,y]

35

36     #3. Calcul du point de la Terre dont le barycentre est le
37     # projeté

38     M = projection_inverse(G[0],G[1])
39     lat = M[0]
40     long = M[1]

41

42     #4. Conversion des coordonnées de la capitale en degrés,
43     # minutes, secondes

44     def signe(x):
45         if x>=0:
46             return 1
47         else:
48             return -1

49

50     signe_lat=signe(lat)
51     signe_long=signe(long)

52

53     lat=abs(lat)
54     long=abs(long)
```

```

55
56     a=floor(lat)
57     lat=(lat-a)/60
58     b=floor(lat)
59     c=(lat-b)/60
60
61     d=floor(long)
62     p=(long-d)/60
63     e=floor(long)
64     f=(long-e)/60
65
66     return [signe_lat*a,b,c,signe_long*d,e,f]

```

Nous allons essayer cet algorithme avec deux familles de villes d'ordre 3 chacune, que nous réutiliserons plus tard.

```

>>> Paris=[47,19,37.95,2,20,2.23]
>>> Abeba=[9,0,57.78,38,42,10.78]
>>> Colombo=[6,56,21.21,79,49,38.20]
>>> Portlouis=[20,8,1.65,57,30,5.57]
>>> Iakoutsk=[62,2,2.84,129,44,9.35]
>>> Rougon=[Paris,Abeba,Colombo]
>>> Macquart=[Paris,Portlouis,Iakoutsk]

```

FIGURE 6. — Renseignement des familles de villes dans la console.

On peut également essayer l'algorithme pour une famille de villes sur un terrain plus réduit, à l'échelle nationale.

Enfin, on peut essayer l'algorithme sur un autre hémisphère. Dans ce cas, il faut ajuster le signe des coordonnées à la main.

Enfin, nous n'avons essayé que des triangles. Déterminons le barycentre de toutes les préfectures des anciennes régions françaises.

>>> (executing lines 1 to 50 of "Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour une projection P (DMS-DD).py")

>>> capitale(Rougon,Peters,Peters_inverse)
[21.09416111111113, 40.28807333526535]

>>> capitale(Rougon,Mercator,Mercator_inverse)
[21.09416111111113, 40.28807666475768]

>>> capitale(Rougon,platecarree,platecarree_inverse)
[21.09416111111113, 40.288075]

FIGURE 7. — *Calculs par les trois projections majeures des capitales de la première famille.*

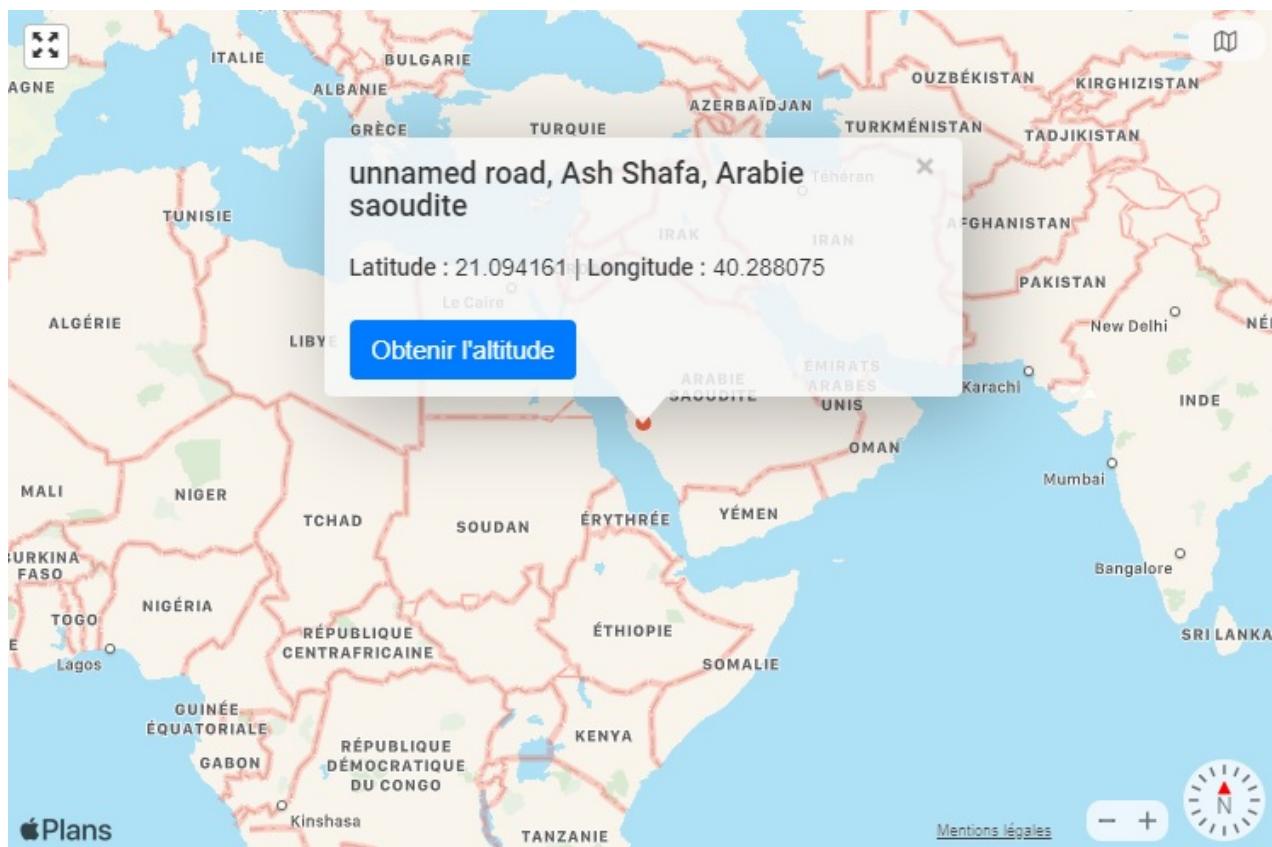


FIGURE 8. — *Situation de l'une d'elles sur la Terre.* La carte n'est pas assez précise pour différencier les trois résultats obtenus.

1.5 Comparaison des capitales modulaires entre elles

Pour comparer les capitales modulaires entre elles, nous voulons comparer, statistiquement ou mathématiquement, l'écart du centre obtenu par projection avec le pseudo-

```
>>> capitale(Macquart,Peters,Peters_inverse)
[43.16504074074074, 63.19046958716904]

>>> capitale(Macquart,Mercator,Mercator_inverse)
[43.16504074074074, 63.1904841165524]

>>> capitale(Macquart,platecarree,platecarree_inverse)
[43.16504074074074, 63.190476851851855]
```

FIGURE 9. — Calculs par les trois projections majeures des capitales de la deuxième famille.

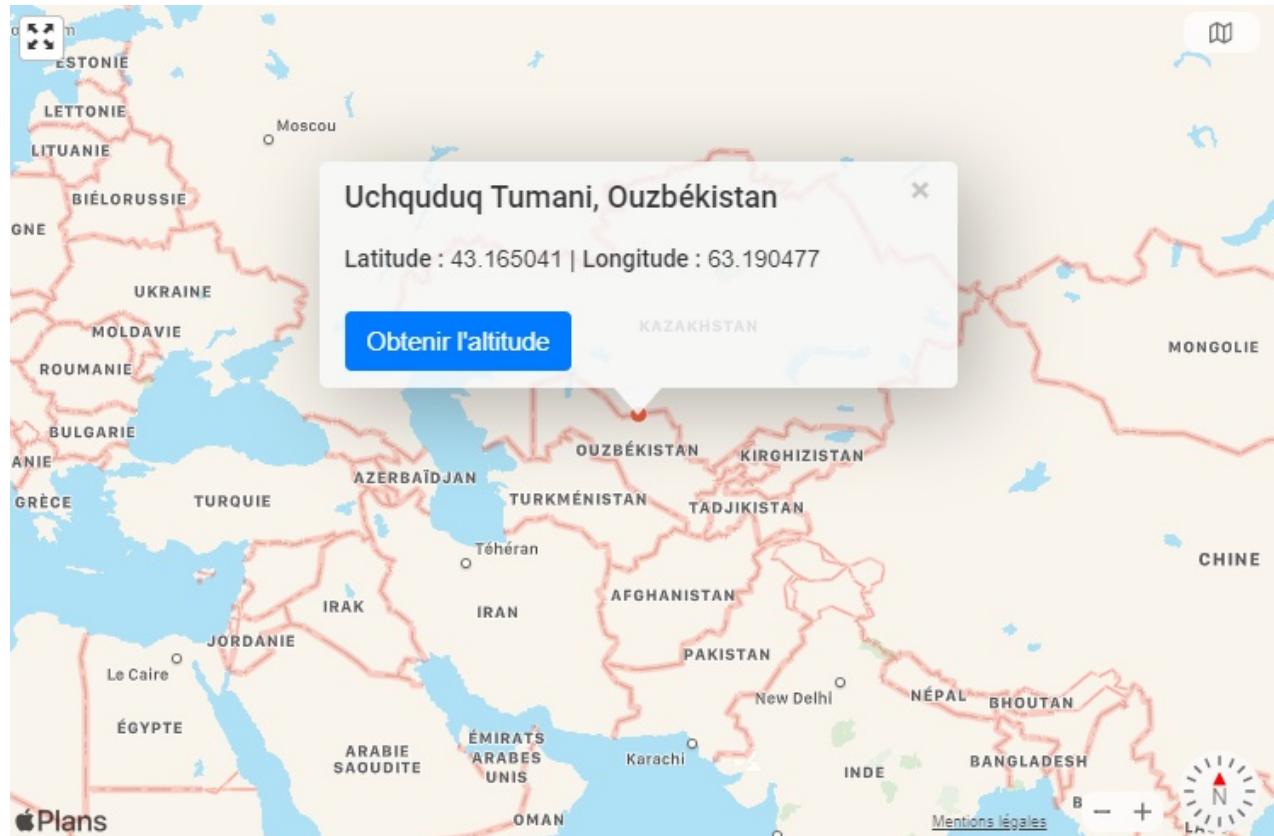


FIGURE 10. — Situation de l'une d'elles sur la Terre. La carte n'est pas assez précise pour différencier les trois résultats obtenus.

barycentre. D'abord, déterminons les coordonnées d'un pseudo-barycentre.

```
>>> (executing lines 1 to 40 of "Calcul de la P-capitale d'une famille de villes donnée pour une projection P (DD-DD).py")
>>> Limoges=[45.850000,1.250000]
>>> Tulle=[45.266667,1.766667]
>>> Gueret=[46.166667,1.866667]
>>> Limousin=[Limoges,Tulle,Gueret]
>>> capitale(Limousin,Mercator,Mercator_inverse)
[45.76111133333334, 1.6277780000236817]
>>> capitale(Limousin,Peters,Peters_inverse)
[45.76111133333334, 1.6277779999953623]
>>> capitale(Limousin,platecarree,platecarree_inverse)
[45.76111133333334, 1.6277780000000002]
```

FIGURE 11. — Renseignement dans la console des trois chefs-lieux du Limousin et calculs.

Théorème. (*Coordonnées du pseudo-barycentre*)

Soient M_1, \dots, M_n $n \in \mathbb{N}^*$ points de \mathbb{P} de coordonnées (x_i, y_i, z_i) pour un point M_i . Le pseudo-barycentre (iso) de cette famille est :

$$G = \frac{R}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2}} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n z_i \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$G = \begin{pmatrix} R \sum_{i=1}^n x_i \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2} \\ R \sum_{i=1}^n y_i \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2} \\ R \sum_{i=1}^n z_i \\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2} \end{pmatrix}.$$

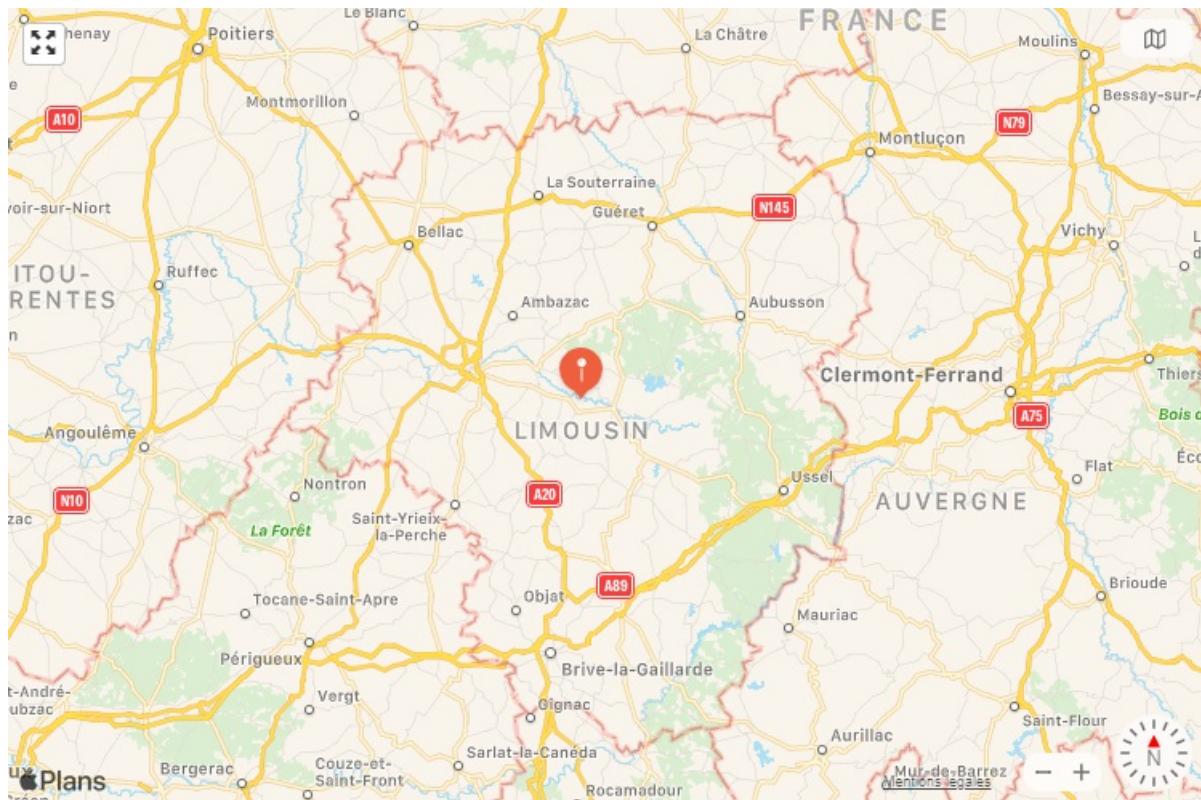


FIGURE 12. — Situation approximative de la capitale des trois chefs-lieux du Limousin sur la carte.

Soit maintenant $C = (\alpha, \beta, \gamma)$. On pourrait calculer aisément les erreurs quant à pseudo-barycentre, à l'aide de longueurs de segments dans l'espace. Mais il est plus significatif de calculer l'arc entre C et le pseudo-barycentre, puisque celui-ci correspond à une véritable distance sur la surface de la Terre qu'il faudrait parcourir si l'erreur ait été faite dans la pratique.

Nous montrerons dans la seconde partie de notre étude que c'est la seule erreur pertinente définissable.

Théorème. (*Erreur d'un centre planisphérique*)

Soit C un point de la sphère (pragmatiquement, le barycentre d'un polygone K aux sommets éventuellement pondérés). Alors l'erreur de ce centre est la longueur de l'arc \widehat{HC} minimale (il y en a deux sur le grand cercle passant par ces points) où H est le pseudo-barycentre de K , s'il existe.

Remarque. Si $C = H$, on définit l'erreur par la valeur zéro.

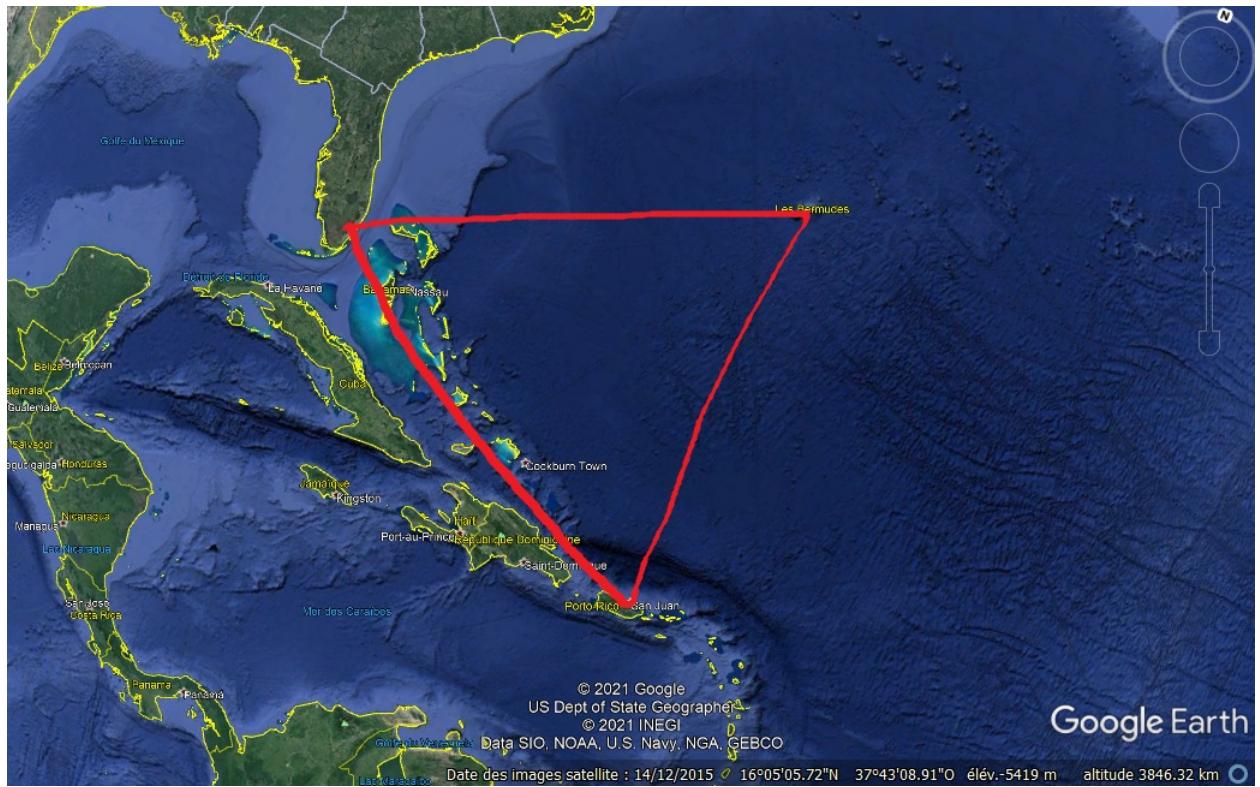


FIGURE 13. — Triangle des Bermudes sur Google Earth.

```

>>> Iles=[32,10,2.36,64,54,42,40]
>>> Floride=[26,19,15.05,79,56,13.89]
>>> Portorico=[18,34,49.29,66,6,43.26]
>>> Bermudes=[Iles,Floride,Portorico]
>>> capitale(Bermudes,platecarree,platecarree_inverse)
[25.68950925925926, 70.32029166666666]
>>> capitale(Bermudes,Peters,Peters_inverse)
[25.68950925925926, 70.32029153153469]
>>> capitale(Bermudes,Mercator,Mercator_inverse)
[25.68950925925926, 70.32029180182144]

```

FIGURE 14. — Renseignement dans la console des sommets du triangle des Bermudes.

Théorème. (*Formule de l'erreur en cas équipondéré*)

Soit $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ un centre obtenu pour un polygone $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ aux points équipondérés. L'erreur de C , si elle existe, est :

$$\varepsilon = R \arccos \left(1 - \frac{1}{2R^2} \left(\left(\alpha - \frac{R \sum_{i=1}^n x_i}{N_{(x,y,z)}} \right)^2 + \left(\beta - \frac{R \sum_{i=1}^n y_i}{N_{(x,y,z)}} \right)^2 + \left(\gamma - \frac{R \sum_{i=1}^n z_i}{N_{(x,y,z)}} \right)^2 \right) \right).$$

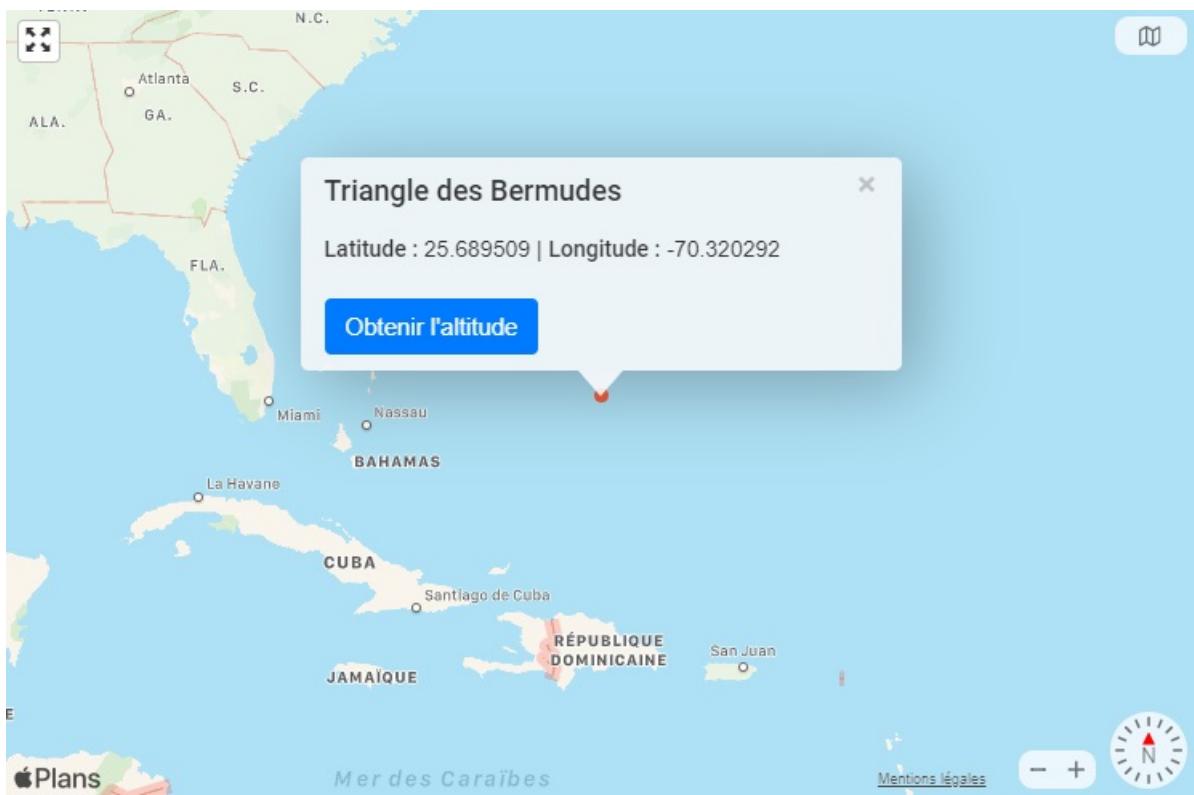


FIGURE 15. — Situation approximative du barycentre modulo les projections cartographiques du triangle des Bermudes.

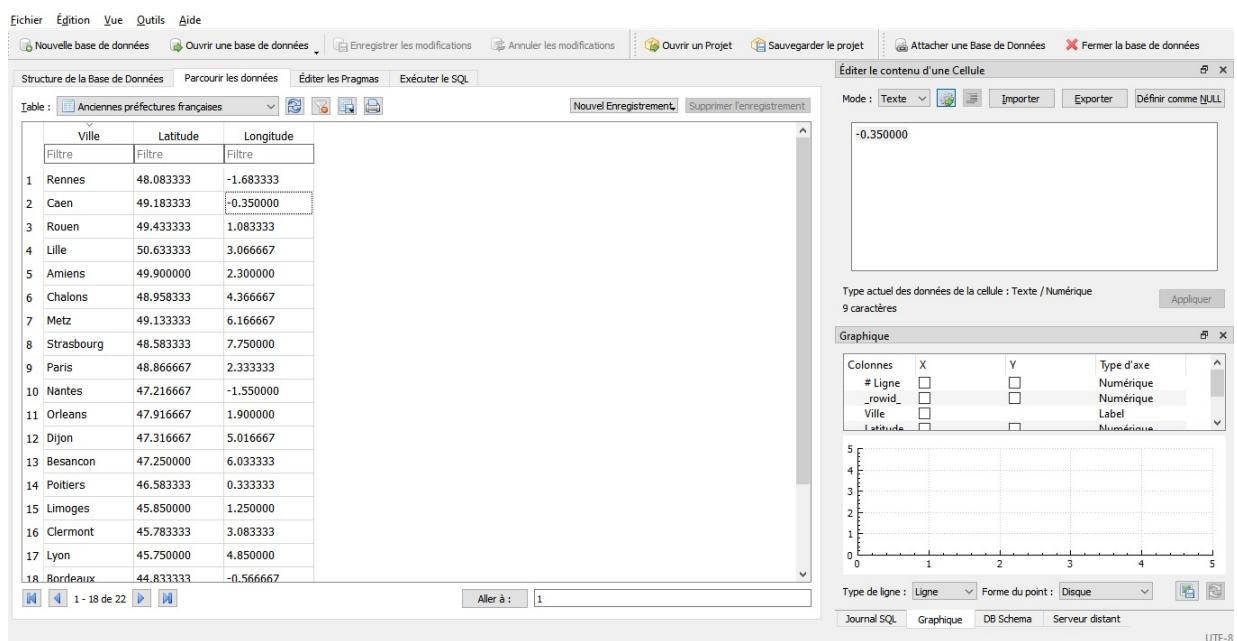


FIGURE 16. — Banque des anciennes préfectures françaises en SQL, base de données.

▷ Soit le triangle OHC , où H est le pseudo-barycentre du polygone et C le centre trouvé

```
>>> France=[[48.083333,-1.683333],[49.183333,-0.350000]
           ,[49.433333,1.083333],[50.633333,3.066667],[49.900000
           ,2.300000],[48.958333,4.366667],[49.133333,6.166667],[48.583333,7.750000],[48.866667,2.333333],[47.216667,-1
           .550000],[47.916667,1.900000],[47.316667,5.016667],[47
           .250000,6.033333],[46.583333,0.333333],[45.850000,1.25
           0000],[45.783333,3.083333],[45.750000,4.850000],[44.83
           333,-0.566667],[43.600000,1.433333],[43.600000,3.8833
           33],[41.916667,8.733333],[43.300000,5.400000]]

>>> capitale(France,Mercator,Mercator_inverse)
[46.98598477272727, 2.9469696373853367]

>>> capitale(France,Peters,Peters_inverse)
[46.98598477272727, 2.9469696353528745]

>>> capitale(France,platecarree,platecarree_inverse)
[46.98598477272727, 2.946969636363637]
```

FIGURE 17. — *Calcul dans la console des barycentres modulo les projections cartographiques.*



FIGURE 18. — *Situation géographique du barycentre obtenu en France.*

; ce triangle a pour angle au centre η , tel que $\widehat{HC} = R\eta$. De plus, ce triangle est isocèle en O , donc le théorème d'Al-Kashi nous donne : $HC^2 = 2R^2(1 - \cos(\eta))$. On en déduit que

$\cos(\eta) = 1 - \frac{\overrightarrow{HC}^2}{2R^2}$. Or $\eta \in [0, \pi]$, donc $\eta = \arccos(1 - \frac{\overrightarrow{HC}^2}{2R^2})$. Par ailleurs, $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} \alpha - a \\ \beta - b \\ \gamma - c \end{pmatrix}$, en notant (a, b, c) les coordonnées de H . De plus $\overrightarrow{HC}^2 = ||\overrightarrow{HC}||^2 = (\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 + (\gamma - c)^2$. On conclut grâce à l'expression des coordonnées du pseudo-barycentre. ■

On ne sait pas faire l'analogie, sans création, du milieu d'un polygone à la surface de la sphère. Néanmoins, on sait complètement définir le centre de deux points de la sphère non antipodaux : c'est le milieu de l'arc de cercle minimal les joignant.

2 Méthode de calcul d'un centre en géométrie sphérique

2.1 Motivations

On rappelle l'une des approximations de la première partie :

Approximation de sphéricité de la Terre

Dans une première approximation, nous considérons que la Terre est une sphère de rayon fixé à son rayon moyen d'environ $R = 6371$ km.

La pertinence de la prise en compte d'un relief géologique global (c'est-à-dire par exemple, pas seulement une montagne à contourner sur le trajet entre une ville de la famille et le centre, mais quant à l'adoption d'une projection modifiée qui prenne en compte désormais l'altitude), en plus de se montrer fort pénible, se heurte à l'approximation plus grossière engendrée par la projection plane de la Terre, quelle qu'en soit la nature. Par suite, nous effaçons tout d'un coup cette approximation pour étudier la Terre en tant qu'objet dans l'espace. Là nous reprenons l'hypothèse de sphéricité, mais il importe de comprendre que c'est une nouvelle démarche et que nous avons balayé déjà toutes les précédentes.

Il est à craindre que les projections planes, en effet, et notamment sur de longues distances (car, localement, l'expérience quotidienne confirme que la surface de la Terre est légitimement assimilable à une surface plate), ne déforment trop grossièrement les côtés des polygones considérés, de sorte que, s'ils ne sont pas assez symétriques, l'erreur engendrée par rapport au pseudo-barycentre soit très grande.

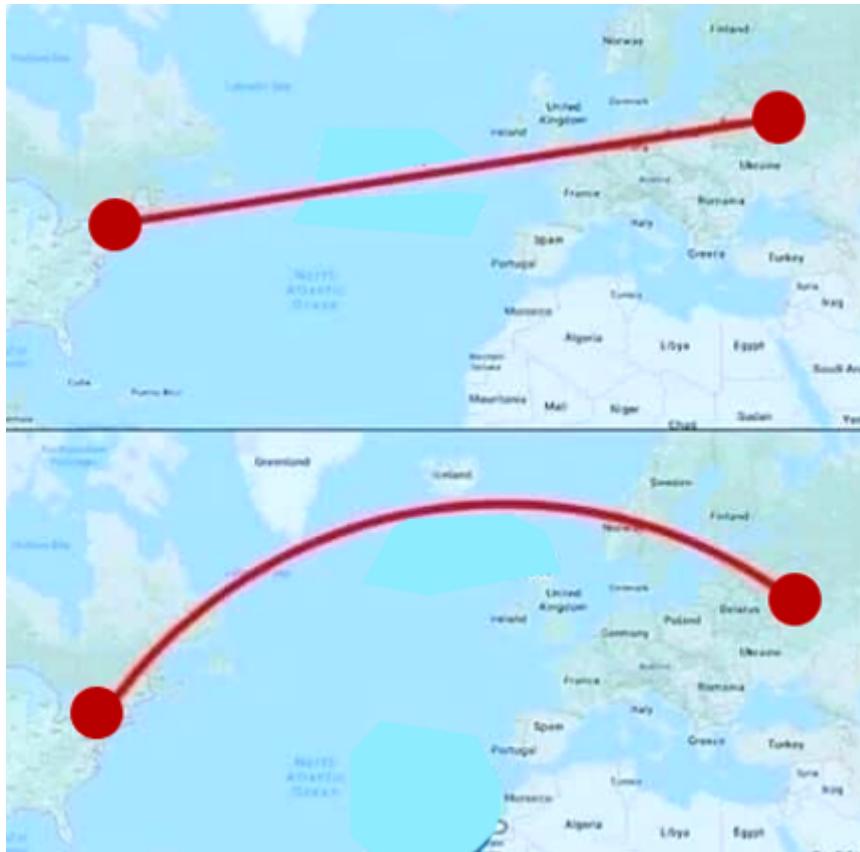


FIGURE 19. — *Déformation des lignes droites en géodésiques à la surface de la Terre.* L'image, à l'origine destinée à faire comprendre les trajets aériens des avions de ligne, représente avec assez de précision, d'une part (carte du haut) la ligne droite tracée entre les villes de New York (aux États-Unis) et Moscou (en Russie) sur la projection de Mercator, bidimensionnelle, ce qui correspond à une distance d'environ 8910 km. D'autre part (carte du bas), l'arc tracé correspond à la géodésique minimale tendue sur la surface de la Terre entre ces deux villes, dont la longueur est d'environ 7 500 km, soit une différence de 1410 kilomètres.

2.2 Démarche de définition d'un barycentre en géométrie sphérique sans approximer rien d'autre

On rappelle un résultat important de la géométrie affine, déjà démontré en amont.

Théorème. (*Associativité du barycentre*)

Soient n un entier naturel, et $(G_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des points d'un espace vectoriel tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, G_k soit le barycentre des points $(A_{k,i}, \lambda_{k,i})_{1 \leq i \leq p_k}$ pondérés, p_k étant un entier naturel dépendant donc de G_k . On note dans ce cas $\lambda_k = \sum_{i=1}^{p_k} \lambda_{k,i}$. Alors le point G barycentre des $(A_{k,i}, \lambda_{k,i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p_k}}$ est le barycentre des $(G_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Nous pouvons définir le barycentre équipondéré de N points du plan, par exemple, avec N un entier naturel non nul, par sa formule générale, que nous rappelons :

$$G = \frac{\sum_{n=1}^N A_k}{N}.$$

Cependant, la façon beaucoup plus pratique, et systématique, de construire l'isobarycentre des $(A_n)_{k \in [1, N]}$ découle du théorème d'associativité des barycentres. Il s'agit de choisir deux points quelconques du polygone, et en prendre le milieu. On choisit alors un troisième point, puis calcul le milieu de ce point avec le milieu déterminé précédemment que l'on aura affecté d'un poids double ; avec un quatrième point et le nouveau milieu triplement pondéré, etc., jusqu'à épuisement de tous les points. Il est même possible, une fois défini le barycentre d'un triangle, de pondérer directement triplement son barycentre en calculant le centre avec un quatrième point, c'est-à-dire, en pondérant comme il faut, d'associer, justement, les points du polygone à loisir.

Par analogie, nous souhaitons définir le barycentre (exact) d'un polygone du globe de cette manière. C'est-à-dire, pour un polygone sur la sphère donné, nous utilisons l'algorithme suivant :

```

G devient  $A_1$ 
Pour  $i$  variant de 2 à  $N$  :
  M devient  $A_i$ 
  G' devient  $\frac{(i-1)G+M}{i}$ 
  G devient  $\Pi(G')$ 
  Renvoyer G

```

ou bien le suivant :

```

G devient  $A_1$ 
Pour  $i$  variant de 2 à  $N$  :
  M devient  $A_i$ 
  G devient le point aux  $\frac{i-1}{i}$  de l'arc  $\widehat{GM}$  en partant de  $M$ 
  Renvoyer G.

```

Ce deuxième algorithme est le plus convaincant, et il correspond bien à ce qui se passe sur le plan. En effet, si pour un barycentre partiel G' de i points, et un $(i+1)$ -ième point C , alors puisque le barycentre total est $G = \frac{(i-1)G'+C}{i}$, on a, par définition des vecteurs et des points : $\frac{C}{i} + \frac{i-1}{i}G' = G$, d'où $C - G' = \frac{i-1}{i}C - \frac{i-1}{i}G'$ d'où $\overrightarrow{GC} = \frac{i-1}{i}\overrightarrow{G'C}$. Ainsi $GC = \frac{i-1}{i}G'C$.

Pour que ces définitions soient valides, nous nous demandons si, oui ou non, le résultat obtenu est le même quel que soit l'ordre des (A_n) . Ceci est infirmé si le barycentre n'est plus associatif en géométrie sphérique, ce que nous allons tenter d'établir.

2.2.1 Expérience avec deux triangles sur un globe

Pour se donner des idées quant à la conjecture à suivre, nous prenons des exemples sur le globe et essayons d'en obtenir les centres en commençant successivement par les trois côtés.

Le premier exemple est un triangle ABC formé par les villes A (Addis Abeba, capitale de l'Éthiopie), punaise bleue ; B (Paris), punaise verte ; C (Colombo), punaise rouge.



FIGURE 20, 21 et 22. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle obtusangle.* Le milieu de Paris et Colombo tombe près de Téhéran ; le milieu de Paris et Addis Abeba tombe à El Beïda en Libye ; le milieu d'Addis Abeba et Colombo tombe dans l'océan indien, à presque mille cinq cent kilomètres de la côte somalienne. Blanc translucide : Riyad (bleu-noir) ; rose : sud du Koweït (jaune-rouge) ; bleu translucide : nord désert d'Arabie (vert-blanc).

On obtient bien trois centres relativement espacés, ce qui laisse à penser que l'associativité des barycentres n'est pas vérifiée. Cependant, le triangle est obtusangle est plutôt aplati, ce qui augmente les possibilités d'erreurs. Nous nous penchons donc désormais sur un deuxième triangle, toujours un triangle, mais plus large, et acutangle. Cette fois, DEF est formé par D (Paris), punaise bleue ; E (Port-Louis), punaise rouge et F (Iakoutsk, en Sibérie), punaise verte.

Pour $J, K, L : J$	KL	$\frac{1}{2}KL$	M_{KLJ}	$\frac{1}{2}M_{KLJ}$
A	19,8 cm	9,9 cm	8,5 cm	5,67 cm
B	10,8 cm	5,4 cm	17 cm	11,34 cm
C	13,7 cm	6,85 cm	15,1 cm	10,067 cm

TABLE 1. — *Données numériques pour le cas du triangle obtusangle (en centimètres)*

FIGURE 23. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, vision d'ensemble.* Le milieu de Paris et Port-Louis tombe sur le Nil, trente kilomètres au nord de Khartoum ; le milieu de Port-Louis et Iakoutsk tombe deux cent kilomètres au sud-ouest de New Delhi dans le nord de l'Inde ; le milieu de Paris et Iakoutsk tombe dans l'océan glacial arctique, à cinq cent kilomètres au nord-ouest du cap Nord. Blanc translucide : nord de la mer Caspienne (blanc-rouge) ; rose : cinq cent kilomètres au sud de Yerevan (noir-vert) ; bleu translucide : trois cent kilomètres au sud de la mer d'Aral (bleu-jaune).

Pour $J, K, L : J$	KL	$\frac{1}{2}KL$	M_{KLJ}	$\frac{1}{2}M_{KLJ}$
D	26,2 cm	13,1 cm	16,8 cm	11,2 cm
E	16 cm	8 cm	24,6 cm	16,4 cm
F	22,4 cm	11,2 cm	20,8 cm	13,87 cm

TABLE 2. — *Données numériques pour le cas du triangle acutangle (en centimètres)*

Là, les trois centres sont grossièrement espacés. On peut donc raisonnablement conjecturer que le barycentre « n'est plus associatif en géométrie sphérique ».

Avec la distance DE de la deuxième expérience, on peut estimer l'échelle du globe,



FIGURE 24. — Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, vue de près

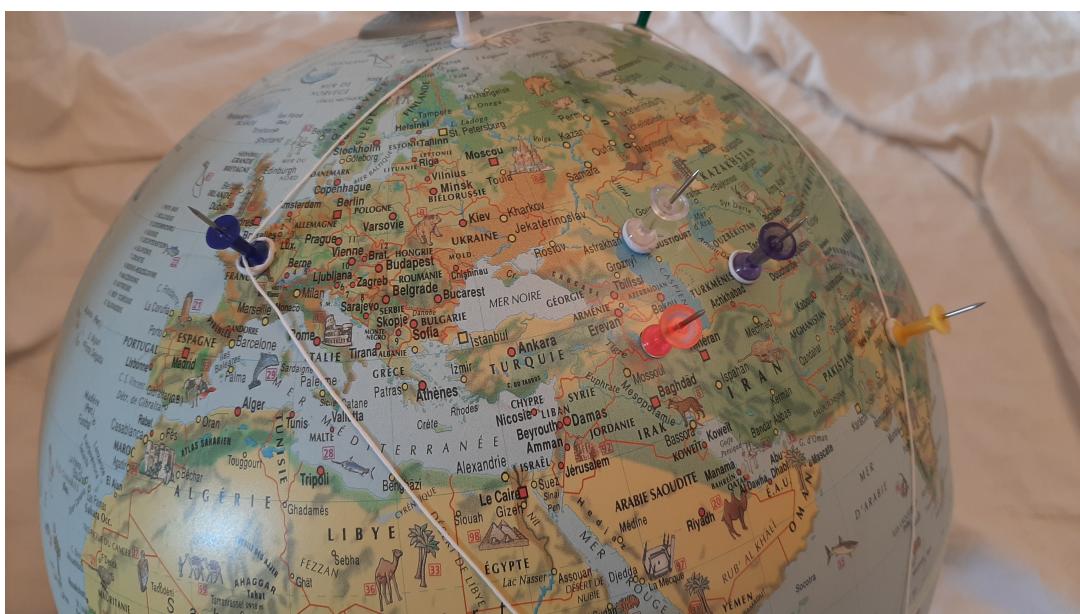


FIGURE 25. — Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, agrandissement sur les trois centres trouvés

car $22,4 \text{ cm} \triangleq 9411,69 \text{ km}$, alors $1 \text{ cm} \triangleq 420,64 \text{ km}$. On a donc les longueurs des côtés des petits triangles formés par les trois candidats au barycentre.

Sommet	Distance réelle (km)	Écart sur le globe (cm)
<i>A</i>	613,97	1,5
<i>B</i>	821,77	1,9
<i>C</i>	777,81	1,8

TABLE 3. — *Longueurs des côtés du triangle formé par les trois barycentres non associatifs de la première expérience.* Lorsqu'on donne un sommet du grand triangle, la longueur est fournie est celle du côté du petit triangle dont le sommet opposé est celui aux deux tiers de la médiane issue de ce sommet du grand triangle.

Sommet	Distance réelle (km)	Écart sur le globe (cm)
<i>D</i>	1095,50	2,6
<i>E</i>	1068,30	2,5
<i>F</i>	1077,16	2,6

TABLE 4. — *Longueurs des côtés du triangle formé par les trois barycentres non associatifs de la deuxième expérience.* Le principe est le même que précédemment.

2.2.1.1 Erreur liée à cette détermination empirique

Les principales erreurs viennent de ce que, d'une part, on est forcé d'user de ficelles pour mesurer les longueurs des arcs sur le globe, et d'autre part, de ce que la courbure de la ficelle, toujours un peu lâche, ne peut être ajustée qu'à l'œil, en regardant le globe deux faces, les deux punaises opposées au centre en perspective.



FIGURE 26. — *Fils pour le calcul de longueurs sur le globe*

2.2.2 Calcul algébrique

On commence par étudier le premier algorithme de détermination proposé. Soient M_1, M_2, M_3 trois points du globe, dont le barycentre dans l'espace affine \mathbb{R}^3 n'est pas le centre de la sphère terrestre. On note $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

On va déterminer le milieu de M_1 et M_2 sur la géodésique qui les joint. Pour cela, on calcule simplement le milieu du segment dans l'espace (on suppose qu'ils sont non antipodiques) puis on "projette" par l'application $\Pi : \mathbb{R}^3 \mapsto S(0, R); M \mapsto \frac{R}{\|M\|}M$. Ce point est donc :

$$G_{12} = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}} \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right)$$

Comme dans le triangle dans le plan, prenons pour premier candidat au barycentre définitif, en feignant l'associativité pour l'instant, le milieu de ce point, pondéré doublement, avec le troisième point de notre triangle. C'est :

$$G = \frac{R}{\left\| \frac{2G_{12}+M_3}{3} \right\|} \frac{2G_{12}+M_3}{3}.$$

Ceci se récrit :

une expression pas très jolie à voir

L'associativité se traduirait par la symétrie de cette expression en les indices 1, 2, 3. On va voir sur un exemple que ce n'est pas vérifié en général.

2.2.3 Un contre-exemple

2.2.3.1 De la multivaluation du premier algorithme

Soient A, B, C sur la sphère avec : $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ et $C = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. On travaille sur la sphère unité, le résultat sur la Terre s'en déduisant par simple dilatation de R . Dans toute la suite, on écrit toujours les centres affines avec un signe prime, que l'on supprime lorsqu'on normalise.

Calculons d'abord le pseudo-barycentre de A, B, C , noté G . On a : $G' = \frac{1}{3}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, soit $G' = (\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3})$. Pour le projeter sphériquement, on calcule sa norme

:

$$\begin{aligned}
 \|G'\| &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{36} + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{2}{36}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9}} \\
 &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{9}} \\
 \|G'\| &= \frac{\sqrt{3 + \sqrt{2}}}{3}.
 \end{aligned}$$

Par suite, $\boxed{G = \frac{3}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} G' = \frac{3}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{3} \right)}$ est le pseudo-barycentre du triangle sphérique ABC , qui existe.

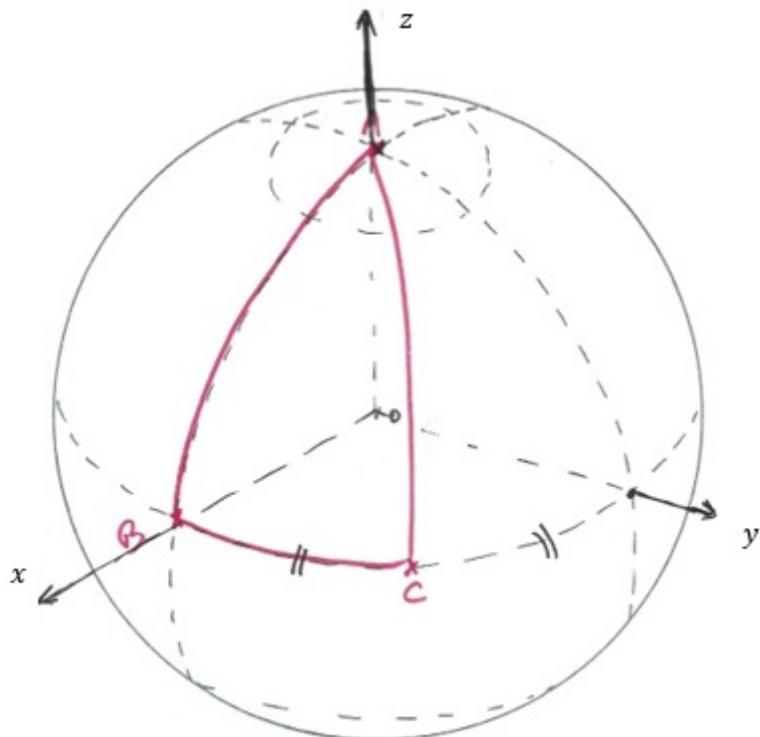


FIGURE 27. — Triangle ABC choisi sur la sphère de rayon 1

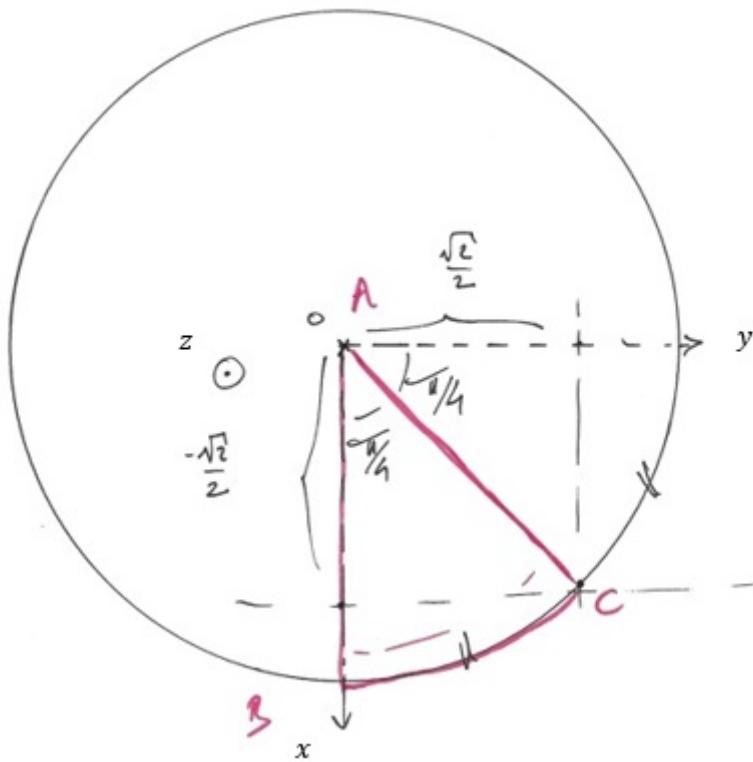


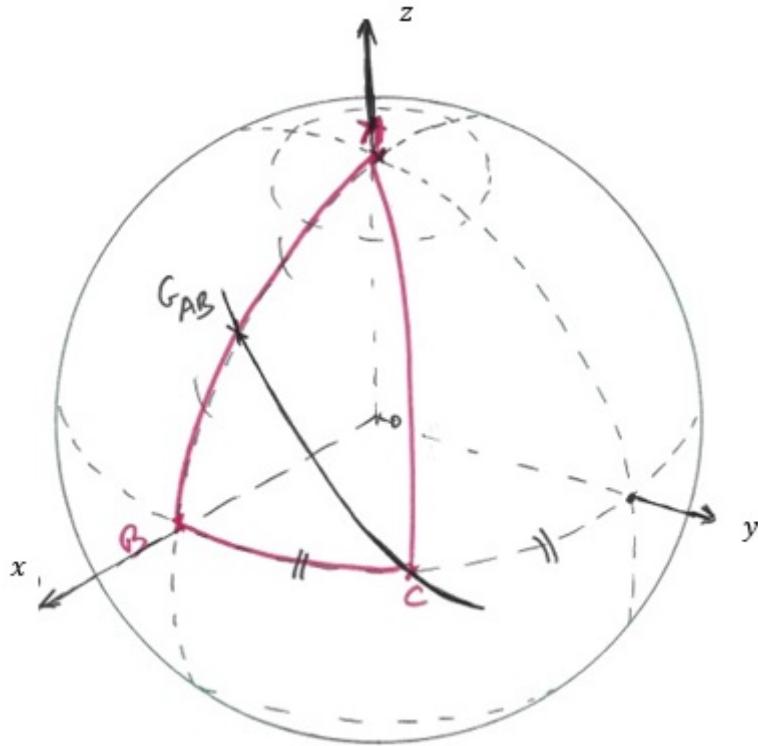
FIGURE 28. — Vue du dessus dans le sens trigonométrique pour le repère

Calculons maintenant le milieu de A et B . C'est $G'_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}(1, 0, 1) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Sa norme est $\|G'_{AB}\| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $\frac{1}{\|G'_{AB}\|} = \sqrt{2}$. Ainsi, en projetant sur la sphère, $G_{AB} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Le premier barycentre trouvé sera donc le projeté du barycentre de ce point doublement pondéré avec C . Ce barycentre, avant la projection, s'écrit : $B'_C = \frac{2G_{AB}+C}{3} = (\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Sa norme est $\|B'_C\| = \sqrt{\frac{2}{36} + \frac{2}{9} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Par suite $B_C = \frac{3}{\sqrt{7}}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ d'où $B_C = (\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7})$.

De même, calculons le milieu de B et C . Il s'écrit : $G'_{BC} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$. Sa norme est :

FIGURE 29. — Calcul du centre de A et B sur la sphère et tracé de la première médiane

$$\begin{aligned}
 \|G'_{BC}\| &= \sqrt{\frac{2}{16} + 0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{16}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} \\
 \|G'_{BC}\| &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $G_{BC} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}, 0 \right)$.

Le second barycentre trouvé sera donc le projeté du barycentre de ce point doublement pondéré avec A . Ce barycentre, avant la projection, s'écrit : $B'_A = \frac{2G_{BC}+A}{3} =$

$(\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{2}{3}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$. Sa norme est :

$$\begin{aligned}
 \|B'_A\| &= \sqrt{\frac{4}{9} \frac{4+2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})^2} + \frac{1}{9} + \frac{2+\sqrt{2}}{9}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{4+2\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})^2} + 1 + 2 + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4}{4+2\sqrt{2}} + 3 + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4 + (3 + \sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4 + 12 + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4}{4 + 2\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{20 + 10\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10 + 5\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \\
 \|B'_A\| &= \frac{\sqrt{5}}{3}.
 \end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{\|B'_A\|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Par conséquent, on a : $B_A = \frac{3}{\sqrt{5}}(\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{2}{3}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$, d'où

$$B_A = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4+2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right).$$

D'une part, $G \neq B_C$. En effet, sur la troisième coordonnée, si $\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$, alors successivement :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} &= \frac{\sqrt{14}}{7} \\
 7 &= \sqrt{14}\sqrt{3+\sqrt{2}} \\
 49 &= 14 \times (3 + \sqrt{2}) \\
 49 &= 42 + 14\sqrt{2},
 \end{aligned}$$

ce qui est impossible, car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, même si le barycentre est unique quant au premier algorithme, il ne correspond pas avec le pseudo-barycentre.

D'autre part, $B_C \neq B_A$. En effet, encore sur la troisième coordonnée, si $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$,

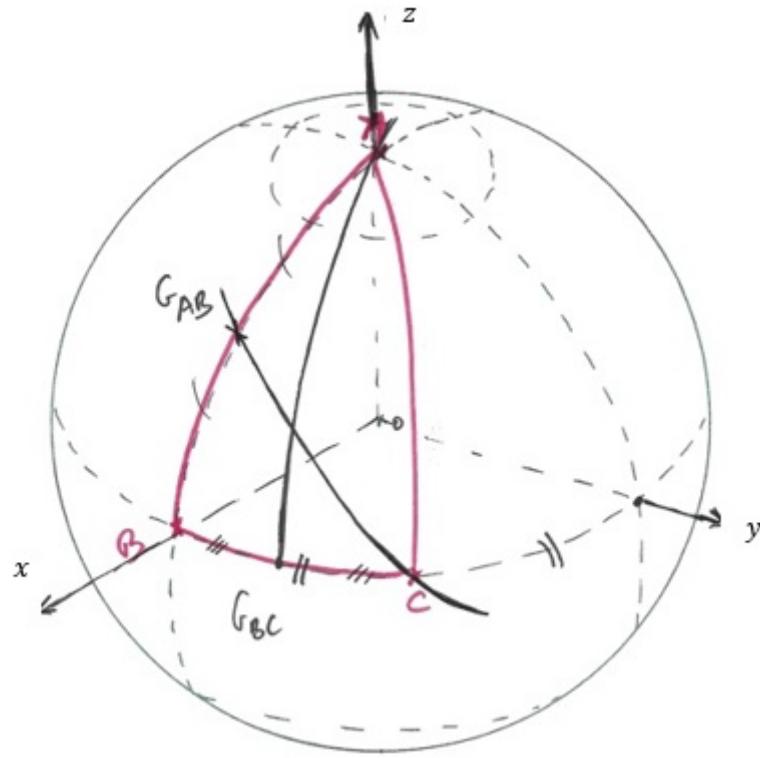


FIGURE 30. — Calcul du centre de B et C sur la sphère et tracé de la deuxième médiane

alors $7 = \sqrt{14}\sqrt{5} = \sqrt{70}$, ce qui est faux par unicité du carré de 7 qui égale 49. Ainsi, le barycentre défini par le premier algorithme n'est pas associatif.

2.2.3.2 De la multivaluation du second algorithme

Compte-rendu que la première méthode systématique de détermination d'un barycentre n'était pas univoque sur $\{(A_{\sigma(n)})_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \mid \sigma \in \mathfrak{S}(N)\}$, ce dont nous disons qu'elle est *non associative*, on se demande si le second algorithme n'est pas une candidature plus résistante à nos coups.

On se rend compte qu'il ne fonctionne pas non plus. Pour l'imaginer, on ne reprend pas l'exemple précédent, pour lequel les calculs dégénèrent, mais un triangle sphérique équilatéral et modélisons-le grâce à Geogebra en 3D. Cela nous permet de creuser dans cette direction, puisque $35, 26^\circ$ n'est ni un tiers, ni deux tiers de 90° .

On veut déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux médiennes tracées, I , et montrer qu'il n'est ni au tiers, ni aux deux tiers de l'une des médiennes. L'unicité de cette intersection permettra de conclure.

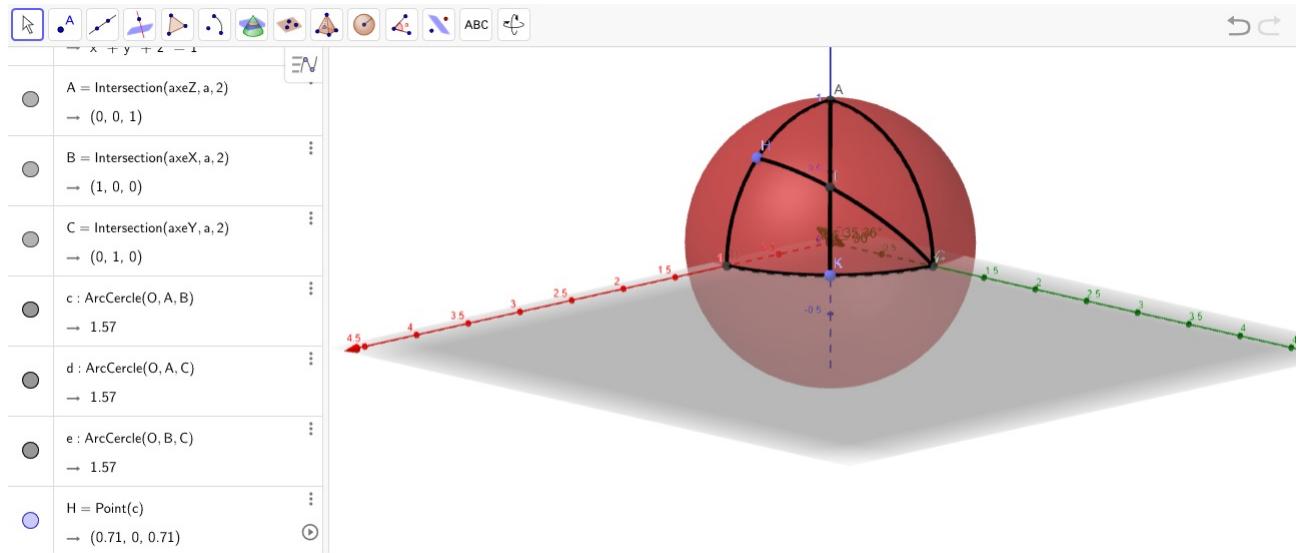


FIGURE 31. — Triangle ABC et le point d'intersection de deux médianes I . H est le milieu de l'arc \widehat{AB} et K celui de l'arc \widehat{BC} .

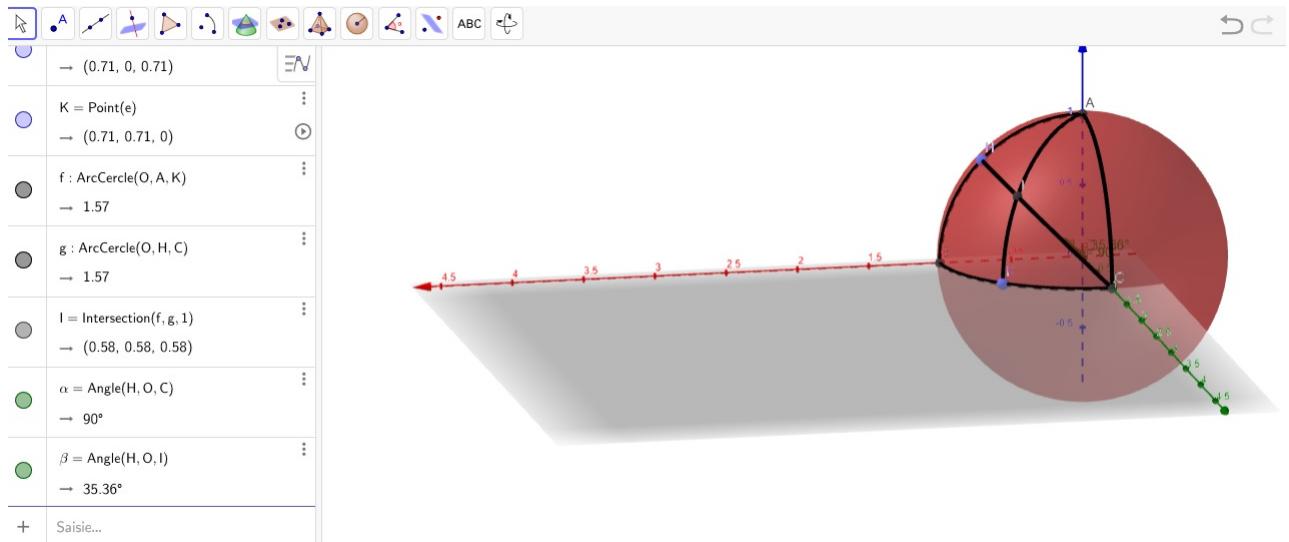


FIGURE 32. — Calcul logiciel des angles au centre de l'arc de la médiane et de la portion arrêtée au candidat barycentre

Le plan dirigé par $\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OC}$ a pour normale leur produit vectoriel $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ainsi, l'équation de ce plan est : $z = x$.

Le plan dirigé par $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}$ a pour normale leur produit vectoriel $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Ainsi, l'équation de ce plan est : $x = -y$.

On cherche les coordonnées du point I . Celui-ci et son antipode sont caractérisés par ce qu'ils appartiennent à la sphère, au plan dirigé par $\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OC}$, non colinéaires, et celui dirigé par $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}$. I est donc l'unique point de cote positive vérifiant le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = z \\ x = -y \end{cases}.$$

En supposant le première équation vérifiée, en substituant pour tout ramener à x , on a :

$$x^2 + x^2 + x^2 = 1.$$

Puisque l'abscisse est positive, on a :

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En cascade, on obtient les autres coordonnées de I , ce qui donne :

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Supposons d'une part que $\widehat{HOI} = \frac{1}{3}\widehat{HOC}$. Alors $\cos(\widehat{HOI}) = \cos(\frac{1}{3}\widehat{HOC})$. Puisque $\cos(x) = 4\cos^3(\frac{x}{3}) - 3\cos(\frac{x}{3})$, on a $\cos(\widehat{HOC}) = 4\cos^3(\widehat{HOI}) - 3\cos(\widehat{HOI})$. Tous les vecteurs étant de norme 1, on peut faire apparaître les produits scalaires, en se rappelant que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$:

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} = 4(\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI})^3 - 3\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}.$$

Or $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, car ils sont perpendiculaires, et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= 4\sqrt{\frac{2}{3}}^3 - 3\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 4\sqrt{\frac{2}{3}}^3 &= 3\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}^2 &= \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} &= \frac{3}{4} \\ 8 &= 9 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Supposons d'autre part que $\widehat{HOI} = \frac{2}{3}\widehat{HOC}$, c'est-à-dire $\frac{\widehat{HOI}}{2} = \frac{\widehat{HOC}}{3}$. Par suite, $\cos(\widehat{HOC}) = 4\cos^3(\frac{\widehat{HOI}}{2}) - 3\cos(\frac{\widehat{HOI}}{2})$. Or $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ et par positivité des angles x considérés $\cos(x) = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$. Par conséquent :

$$\cos(\widehat{HOC}) = 4\sqrt{\frac{1+\cos(\widehat{HOI})}{2}} \frac{1+\cos(\widehat{HOI})}{2} - 3\sqrt{\frac{1+\cos(\widehat{HOI})}{2}}.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} = 4\sqrt{\frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2}} \frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2} - 3\sqrt{\frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2}},$$

d'où, successivement, puisque $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI} = \sqrt{\frac{2}{3}} \neq -1$:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{\frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2}} \frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2} &= 3\sqrt{\frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2}} \\ 4 \frac{1+\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OI}}{2} &= 3 \\ 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{3}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{4} \\ 8 &= 3, \end{aligned}$$

qui est faux.

Théorème. (*Non-associativité des barycentres sur \oplus*)

Le théorème d'associativité des barycentres est invalidé en géométrie sphérique.

▷ Les deux exemples fournissent, par homothétie de rapport R , des contre-exemples non triviaux aux deux candidats pertinents à la définition de barycentre. Il ne reste donc plus que la notion de pseudo-barycentre, qui n'a pas de rapport avec la géométrie sphérique. ■

2.3 Estimation physique de l'aplatissement de la Terre

A Bibliographie

Références

- [1] *Les prodigieux théorèmes de Monsieur Nash*, conférence de Cédric Villani à la BNF, 2010, à propos des travaux en géométrie sphérique (théorèmes de plongement)
- [2] Applications suggérées par Christophe Grosjean, informaticien et développeur de logiciels
- [3] *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Stella Baruk, 1992, Seuil, « Géométries non euclidiennes », « Projeté »
- [4] *Les projections et référentiels cartographiques*, Patrick Sillard, notes de cours à l'École nationale des sciences géographiques, septembre 2000, notes de cours à École nationale des sciences géographiques — étude qualitative des déformations de la projection du géoïde
- [5] *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*, Jean Baudet, Vuibert, 2002 : historique des géométries non euclidiennes
- [6] *Atlas des mathématiques*, Fritz Reinhardt, Le Livre de poche, 1997 (une large section y est consacrée à la géométrie de la sphère)
- [7] *Géométrie sphérique : plus courts chemins, théorème de Girard, relations trigonométriques, isométries de la sphère*, Pierre Audibert, professeur à l'université Paris 8 — considérations sur la géométrie riemannienne et la notion de géodésique qui rentre dans l'optique d'optimisation de notre étude et pour déterminer l'écart au centre directement sur la surface du globe
- [8] geodesie.ign.fr, département de géodésie de l'Institut national de l'information géographique — comporte également des données de coordonnées géographiques
- [9] *Formules des projections*, Daniel Ramos, Imaginary — fichier présentant succinctement les différentes méthodes de projection et donnant les formules univoques de conversion, les formules inverses restant à calculer
- [10] *Les représentations planes de l'ellipsoïde*, 56 p., étude des déformations de la projection du géoïde
- [11] *Le référentiel terrestre*, article de la revue « geodesie » avec beaucoup de considérations mathématiques sur les déformations dues aux projections

- [12] *Notion de centre en géométrie riemannienne*, 2017, journal de mathématique des élèves
- [13] *Barycentres et coordonnées cartésiennes*, polycopié de cours de classe préparatoire
- [14] *Mathématiques tout-en-un MP/MP**, C. Deschamps, F. Moulin, A. Warusfel, Dunod, 2013
- [15] [https ://www.data.gouv.fr/fr/](https://www.data.gouv.fr/fr/), site du gouvernement pour les bases de données
- [16] [https ://www.distance.to/](https://www.distance.to/), site pour calculer la distance sur la Terre entre deux points

B Iconographie

Table des figures

FIGURE 1. — *Rendu en fil de fer d'une sphère dans un espace euclidien en C⁺⁺.*
Création de Geek3 sur le site d'images libres de droit Pixabay

FIGURE 2. — *Caractéristiques primaires de la Terre.* Travail personnel

FIGURE 3. — *Représentation planisphérique de la Terre par la projection de Mercator.*
NASA's Earth Observatory, série "Blue Marble", 8 mars 2008

FIGURE 4. — *Représentation planisphérique de la Terre par la projection de Gall-Peters.* NASA's Earth Observatory, série "Blue Marble", 8 mars 2008

FIGURE 5. — *Représentation planisphérique de la Terre par la projection plate carrée.*
NASA's Earth Observatory, série "Blue Marble", 8 mars 2008

FIGURE 6. — *Renseignement des familles de villes dans la console.*

FIGURE 7. — *Calculs par les trois projections majeures des capitales de la première famille.*

FIGURE 8. — *Situation de l'une d'elles sur la Terre.* La carte n'est pas assez précise pour différencier les trois résultats obtenus.

FIGURE 9. — *Calculs par les trois projections majeures des capitales de la deuxième famille.*

FIGURE 10. — *Situation de l'une d'elles sur la Terre.* La carte n'est pas assez précise pour différencier les trois résultats obtenus.

FIGURE 11. — *Renseignement dans la console des trois chefs-lieux du Limousin et calculs.*

FIGURE 12. — *Situation approximative de la capitale des trois chefs-lieux du Limousin sur la carte.*

FIGURE 13. — *Triangle des Bermudes sur Google Earth.*

FIGURE 14. — *Renseignement dans la console des sommets du triangle des Bermudes.*

FIGURE 15. — *Situation approximative du barycentre modulo les projections cartographiques du triangle des Bermudes.*

FIGURE 16. — *Banque des anciennes préfectures françaises en SQL, base de données.*

FIGURE 17. — *Calcul dans la console des barycentres modulo les projections cartographiques.*

FIGURE 18. — *Situation géographique du barycentre obtenu en France.*

FIGURE 19. — *Déformation des lignes droites en géodésiques à la surface de la Terre.*
Adaptation d'un dessin numérique de Kader Dali, 2020

FIGURE 20. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle obtusangle.* Travail personnel

FIGURE 21. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle obtusangle.* Travail personnel

FIGURE 22. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle obtusangle.* Travail personnel

FIGURE 23. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, vision d'ensemble.* Travail personnel

FIGURE 24. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, vue de près.* Travail personnel

FIGURE 25. — *Détermination empirique des éventuels centres d'un polygone par associativité sur le globe. Cas d'un triangle acutangle, agrandissement sur les trois centres trouvés.* Travail personnel

FIGURE 26. — *Fils pour le calcul de longueurs sur le globe.* Travail personnel

FIGURE 27. — *Triangle ABC choisi sur la sphère de rayon 1.* Travail personnel

FIGURE 28. — *Vue du dessus dans le sens trigonométrique pour le repère.* Travail personnel

FIGURE 29. — *Calcul du centre de A et B sur la sphère et tracé de la première médiane.* Travail personnel

FIGURE 30. — *Calcul du centre de B et C sur la sphère et tracé de la deuxième médiane.* Travail personnel

FIGURE 31. — *Triangle ABC et le point d'intersection de deux médiennes I.* Travail personnel

FIGURE 32. — *Calcul logiciel des angles au centre de l'arc de la médiane et de la portion arrêtée au candidat barycentre.* Travail personnel

Liste des tableaux

TABLE 1. — *Données numériques pour le cas du triangle obtusangle (en centimètres)*

TABLE 2. — *Données numériques pour le cas du triangle acutangle (en centimètres).*

TABLE 3. — *Longueurs des côtés du triangle formé par les trois barycentres non associatifs de la première expérience*

TABLE 4. — *Longueurs des côtés du triangle formé par les trois barycentres non associatifs de la deuxième expérience*