Cours de mathématiques

TOME I

LOGIQUE & THÉORIE DES ENSEMBLES

Mathématiques générales

France ~ 2024

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Table des matières

Chapitre 1

Logique mathématique

Résumé

Les mathématiques sont formées sur les bases de la théorie des ensembles, construction étroitement intriquée avec la logique théorique. Pour appréhender la première de façon satisfaisante, il n'est pas nécessaire pourtant de comprendre les mécanismes très savants de la seconde ; c'est pourquoi nous fournissons aux débutants, comme tous les manuels de mathématique l'ont toujours proposé, un préambule de logique dite pratique, sans axiomatisation dure. Au cours de cette démarche, nous tirerons deux conclusions : d'une part, de la beauté et de la rigueur des fondations sur lesquelles s'étendent les règles de la logique « habituelle » ; d'autre part, de la difficulté de se convaincre de son bien-fondé... deux constats fort paradoxaux. En tout cas, nous ne pouvons qu'exhorter le lecteur a susciter toute son attention dès les premières lignes de ce cours, même si seulement les parties prochaines auront l'air de la praticité.

1.1 Calcul des propositions

La logique est la science qui permet d'établir la vérité, mais la vérité de quoi ? Celle des propositions. C'est la brique de base, partout reprise, de la logique.

« Définition ». *(Proposition, assertion)*

Une *proposition* est une phrase assertive ou parfois *assertion* constituée de mots (*métalangage*) ou de symboles mathématiques (*langage mathématique*) qui soit bien formée.
En pratique, on confond souvent les termes *proposition* et *assertion.*

Ce n'est pas une bonne définition, à cause du syntagme *bien formé* qui n'a jamais été défini. On précise dans la remarque suivante dans quelle mesure cette notion pourrait être axiomatisée (en légitimant ainsi notre construction[1]).

À cause de la mauvaise définition des propositions avec laquelle nous sommes forcés de composer, nous voyons qu'il n'est pas possible de déterminer définitivement du fait qu'une proposition donnée en soit une ou non. Nous comptons sur la liste d'exemples donnée ci-dessous pour forger dans l'esprit du lecteur une conception empirique de ce qu'est une proposition, qui peut suffire longtemps encore.

Exemples

1. « $2+2=4$ » est une proposition.
   Il se trouve qu'elle est vraie ; on l'apprend en classe de maternelle.
2. « $2+2=5$ » est une proposition.
   Puisque la précédente est vraie, on démontre avec les règles de l'arithmétique des entiers naturels que celle-ci est fausse.
3. « $2+=4$ » n'est pas une proposition.
   En effet, elle est *mal formée* au niveau du langage mathématique.
4. « $x+1=4$ » n'est pas une proposition.
   En effet, le symbole x n'est pas défini dans aucun des langages, courant ou mathématique. Cependant, « $\forall x \in \mathbb{N} \quad x+1=4$ » est une assertion bien formée, même si elle est bien évidemment fausse.
5. « César a franchi le Rubicon » est une proposition.
   Sa véracité revient en détermination à l'historien. Encore faut-il définir précisément tous les termes : César, le Rubicon, l'action de franchir...
6. « Tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » est une proposition.
   Les mathématiciens ignorent encore aujourd'hui si elle est vraie ou fausse, ce qui est, j'en conviens, un peu honteux.
7. « J'ai faim » est une proposition.
   Il est nécessaire de sous-entendre : que *je* est Louis Lascaud, que l'action se déroule à 16 h 24 le 17 janvier 2023, que la faim est une notion biologiquement déterminée sans ambiguïté.
8. « As-tu faim ? » n'est pas une proposition.
   En effet, ce n'est pas une phrase assertive, mais interrogative. Même problème pour une phrase du type : « Viens ! ».
9. « Par une demain » n'est pas une proposition.
   En effet, elle est mal formée au niveau du métalangage.

Si, normalement, cette définition est largement suffisante pour l'instant, ça n'est pas toujours évident, même pour des étudiants ayant poursuivi plusieurs années d'études supérieures de mathématiques. Nous citons cet exemple véridique. On demande à un élève de démontrer que tout groupe fini dont tout élément est d'ordre 2 a pour ordre une puissance de 2.
L'élève propose de raisonner par récurrence sur le cardinal du groupe, ce qui est très possible. Néanmoins, énoncer l'hypothèse de récurrence et la propriété à montrer en hérédité relève une vraie difficulté chez lui : on voit écrire pour ne citer qu'une absurdité : « on suppose que tout groupe d'ordre n dont tout élément est d'ordre 2 a pour cardinal une puissance de 2 ; montrons que le plus petit groupe de cardinal supérieur a pour cardinal une puissance de 2 supérieure ». Cette dernière phrase n'est pas une proposition valide et fausse la résolution du problème ! Ce qui semble grossier sorti du contexte, n'est pas si ridicule lorsque plongé dans l'exercice en question.

Remarque. Il est aisé de voir comment la formule *bien formé* peut être formalisée. Dans la définition précédente, nous nous sommes permis d'inclure des *mots* dans les propositions, ce qui fait partie du *métalangage* mathématique, en opposition au *langage* mathématique composé exclusivement de symboles. En effet, toute proposition mathématique peut être écrite seulement avec des symboles : par exemple, « $\forall x\ \forall y \quad (x = y) \iff ((\forall t \in x, t \in y) \wedge (\forall t \in y, t \in x))$ » n'est autre que le principe de double inclusion que connaissent bien les étudiants de première année lorsqu'il veulent montrer l'égalité de deux ensembles. À partir de là, on peut supposer que, dans la définition des propositions, nous nous restreignons aux propositions contenant un métalangage que l'on peut convertir en langage mathématique. Pour exemple, « x appartient à E » n'est autre qu'une phrase en français pour dire mathématiquement « $x \in E$ ». Ainsi, en toute rigueur, « César a franchi le Rubicon », comme on l'a indiqué déjà, n'est pas une proposition... À cause de César, du Rubicon et de l'action de franchir qui ne font pas partie de la théorie des ensembles, tout au moins sans définition préalable.

Puisque, comme toute autre science, les résultats mathématiques doivent pouvoir être formalisés au-delà de la multiplicité des langages, la précision de la science a mathématique a forcé à éliminer ainsi le risque de malentendu lié au langage oral ou courant en faisant le choix de traduire les propositions en un langage artificiel formel ne contenant que des termes logiques. Dès la deuxième section de ce cours, nous commencerons d'en donner les principes.

En mathématiques, une proposition bien formée du métalangage ne comporte pas forcément de point final.

Comme dans toutes les mathématiques, nous travaillons de surcroît dans le cadre d'un certain calcul *littéral*, c'est-à-dire avec des lettres, afin de pouvoir généraliser nos constructions, ici, sur les propositions. Habituellement, nous notons par les lettres P,Q,R,S, etc., des propositions quelconques, non déterminées par une phrase du même type que celles ci-dessous (constituée de métalangage ou de langage mathématique, ou des deux), mais qui, sans condition autre, le pourraient être à n'importe quel moment.

$\longrightarrow$ *Notation.* Pour donner un nom littéral à une proposition déterminée, par exemple, « César n'a jamais franchi le Rubicon », nous notons de la manière suivante :

$$P : \text{ « César n'a jamais franchi le Rubicon ».}$$

Les lecteurs avancés reconnaîtront à juste titre la rédaction propre à l'en-tête d'un raisonnement par récurrence (Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $n \leqslant 2^n$ » par exemple).

Astuce !

Pour les lecteurs n'ayant pas commencé la lecture de ce cours par le présent chapitre, nous déconseillons vivement de jamais quantifier P,Q... dans des formules impliquant de telles propositions. En effet, non seulement l'usage des quantificateurs $\forall, \exists$ est par définition réservé aux ensembles, mais en outre, la théorie dite *logique du premier ordre*, dont nous utilisons les outils, interdit formellement la quantification des prédicats (une proposition n'étant autre qu'un prédicat à aucun argument). Ainsi, en logique théorique, cet usage est incorrect ; dans la logique naïve que nous présentons, il est plutôt mal placé. Rien n'empêche, par contre, d'écrire : « Pour toute proposition P, [...] ».

1.1.1 Axiomatique primaire d'une logique naïve

En guise d'activité introductive, on propose au lecteur l'exercice suivant à résoudre avec plus de jugeotte que d'austérité d'esprit.

Exercice 1 *(Quelques valeurs de vérité à attribuer)*

Pour chacun des assertions suivantes, donner sa valeur de vérité, à savoir le vrai ou le faux.

1. « Le rosier est une plante »
2. « La baleine est un poisson »
3. « $15684 + 749412 = 795096$ »
4. « Le nombre 4 est un nombre premier »
5. « Il existe des fonctions continues non dérivables »
6. « 5 est un nombre premier ssi deux droites parallèles et disjointes n'ont aucun point commun »
7. « Si 5 est impair, alors la somme des angles d'un triangle plan vaut 180ř. »
8. « Tout quadrilatère avec deux côtés opposés égaux et deux angles opposés égaux est un parallélogramme »

Pour formaliser proprement les fondements du calcul propositionnel, par souci purement cosmogonique[1], nous introduisons une fonction multivaluée sur la classe des propositions lui attribuant une valeur de vérité. On rappelle qu'une fonction multivaluée f de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est une fonction définie sur une partie de $\mathcal{C}$ et qui à tout élément x de cette partie associe un ou plusieurs éléments de $\mathcal{D}$, par exemple y, et que dans ce cas, on note $f(x) \ni y$.

Axiome. *(Notion de booléen)*

Une proposition peut être vraie ou fausse. Plus précisément, on suppose qu'il existe une fonction définie partout sur la collection de toutes les propositions à valeurs dans $\{0,1\}$ (a priori multivaluée).

⟶ *Notation.* Notons valver cette fonction multivaluée. On a donc :

$$\text{valver} : \mathcal{P} \multimap \{0,1\}$$

avec le symbole des multifonctions, en notant $\mathcal{P}$ la classe de toutes les propositions.

On appelle *vrai* le nombre 1 et *faux* le nombre 0.

Avec ce premier axiome, nous y allons calmement. Nous énonçons qu'à toute proposition, c'est-à-dire à toute assertion bien formée, on peut faire correspondre au moins une *valeur de vérité*, ce qui, dans le langage courant, correspond au vrai et au faux. Cependant, sans les précisions suivantes, on ignore si une proposition peut être ni vraie ni fausse, ou s'il existe des propositions vraies et fausses simultanément. Les deux axiomes qui arrivent énoncent que ces deux cas de figure sont exclus.

[1] Et qui risque d'alourdir le discours gravement. On invite donc les lecteurs fragiles à se focaliser sur les points importants.

Axiome. ***(Principe du tiers exclu, principe de la double valeur)***

La fonction valver est définie partout.

Le plus important des deux axiomes précédents est le mot **partout**.

On constate que cet axiome énonce exactement qu'une proposition est soit vraie, soit fausse, mais au moins l'un des deux.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note simplement

$$P$$

pour $=\text{valver}(P) \ni 1$, mais parfois, ce qui est regrettable, on note « P est vraie » par souci de clarté, avec ou sans guillemets. On peut aussi d'ores et déjà noter Non P, ou encore $\neg P$ pour $\text{valver}(P) \ni 0$, ou, ce qui est encore plus regrettable, « P est fausse », toujours pour clarté.

Exercice 2

Que dire de la proposition « Tout entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ?

▷ **Éléments de réponse.**

Cette assertion (*conjecture de Goldbach*) est, d'après le principe précédent, soit vraie, soit fausse. Nous ignorons en fait si elle est vraie ou fausse, mais qu'importe : ce n'est pas parce que nous ne savons pas la valeur de vérité de cette proposition, qu'elle n'en a pas.

Axiome. ***(Principe de non-contradiction)***

L'application valver est en fait monovaluée.

On constate que cet axiome énonce exactement qu'une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse ; c'est-à-dire, conjoint à l'axiome précédent, qu'une proposition est soit vraie, soit fausse, l'un des deux, et un seul des deux.

Exercice 3

Se convaincre que l'on ne peut trouver de proposition vraie et fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Par exemple, en déduire que tout est vrai, et tout est faux. Montrer ensuite que la proposition « tout est vrai et tout est faux » est fausse, puis tourner en rond. On admet alors qu'un diallèle est un illogisme.

Des logiques non binaires

La propriété (ou, pour nous, axiome) précédente n'est autre que la **bivalence** de la logique classique, unique logique utilisée depuis Aristote jusqu'à son développement formel à la fin du XIX^{e} siècle. Son principe très ancien rend ainsi compte d'une intuition profonde : les choses sont vraies ou fausses ; elles doivent absolument être l'une des deux, et rien n'est vrai et faux à la fois, faute de paradoxe. Cette logique est celle sur laquelle devait se fonder tous les écrits des logiciens pendant deux millénaires. Elle n'est pas aussi définitive pour tout le monde.

Certains mathématiciens étudient des logiques *polyvalentes* (on dit aussi *multivalentes*) c'est-à-dire où les propositions peuvent prendre plus de deux valeurs de vérité. Les premières logiques polyvalentes sont développées dans les années 1920 à la suite des travaux du mathématicien polonais Jan ŁUKASIEWICZ. Par exemple, la *logique tertiaire* entend répondre aux besoins de la mécanique quantique en prenant en compte trois états de vérité, VRAI, FAUX et INCONNU (ou, comme il conviendrait mieux de dire, INDÉTERMINÉ). Il est important de voire que ce troisième état est complètement absent de notre modèle de logique théorique, comme on l'a déjà mentionné : une proposition, même de valeur de vérité inconnue (par quelqu'un), est soit vraie, soit fausse.

Il existe même des logiques dont le nombre de valeurs de vérité possible est infini, et même non dénombrable ! La *logique floue* inventée en 1965 par Lofti ZADEH permet de créer des propositions dont la valeur de vérité prend ses valeurs dans l'intervalle de réels [0,1], en fonction du degré de sûreté de la proposition : 0 si elle est résolument fausse, 1 si elle est résolument vraie.

Remarque. Les deux axiomes précédent permettent d'énoncer le fait suivant : valver est une multifonction monovaluée définie partout... Autrement dit, c'est une simple application de la classe de toutes les propositions dans $\{0,1\}$. Nous admettons qu'il n'y a eu qu'un intérêt pédagogique à amener successivement que, d'une part, valver est définie partout, ce qui en fait une multi-application, et d'autre part, qu'elle est monovaluée, ce qui en fait une simple fonction. On peut donc noter en toute rigueur, dans le formalisme des classes :

$$\mathrm{valver} \in \{0,1\}^{\mathcal{C}}.$$

Certains logiciens adoptent un point de vue très ensembliste de la logique naïve, en remarquant que, après ce qui a été vu précédemment, $\mathcal{C}$ s'écrit comme la réunion disjointe de la sous-classe des propositions vraies $\mathcal{V}$ et la sous-classe des propositions fausses qui est son complémentaire $\mathcal{F}$. On a même exactement $\mathcal{V} = \mathrm{valver}^{-1}(\{1\})$ et $\mathcal{F} = \mathrm{valver}^{-1}(\{1\})$. Pour eux, le calcul propositionnel s'effectue non plus sur $\mathcal{C}$ grâce à valver mais sur $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation définie sur $\mathcal{C}$ par $P\mathcal{R}Q$ ssi $\mathrm{valver}(P) = \mathrm{valver}(Q)$ et l'on travaille avec l'application quotient $\widetilde{\mathrm{valver}}$. Dans cette conception, il n'y a que deux propositions : une proposition vraie, appelée *le vrai*, notée $\top$, et une proposition fausse, appelée *le faux*, notée $\bot$. Comme les conceptions $\mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ de la logique naïve se chevauchent, on n'écrit jamais les propositions $\tilde{P}$, et même lorsque la première conception prévaut, on s'autorise à écrire, pour « P est vraie » successivement :

$$P = \top \text{ ou } P \iff \top \text{ ou } P : \top,$$

de même pour « P est fausse ».

Remarquons d'ores et déjà que $\mathcal{R}$ n'est autre que la relation d'équivalence définie plus bas dans ce document. La conception $\tilde{\mathcal{C}}$ a l'intérêt de ne considérer que le vrai et le faux indépendamment de la réalité pratique des propositions ; quant aux constructions de la section suivante, elle les légitime totalement *(voir à ce moment)*.

Cette identification des propositions à leurs valeurs de vérité n'aura plus vraiment de sens pour les prédicats qui, eux, *prennent* véritablement des valeurs de vérité de façon variante.

Reformulation. ***(Axiomes des propositions)***

On peut résumer les trois faits précédents par les points suivants :

(i) Une proposition, si elle existe, peut prendre la valeur de vérité vrai ou faux.

(ii) Il n'existe pas d'autres valeurs de vérité.

(iii) Toute proposition prend au moins l'une des deux valeurs de vérité vrai ou faux.

(iv) Une proposition ne prend pas simultanément les deux valeurs de vérité vrai et faux.

Motivation. Nous allons définir, pour développer dans le bon sens le calcul propositionnel, des opérations pour créer des formules, qui ne seront autres que des propositions compositions de propositions au moyen d'opérations : $f(P,Q,R)$. Selon la conception précédente, la création $f(P)$ n'a que peu d'intérêt logique : P ne peut toujours prendre que deux valeurs et bien sûr $f(P)$ en tant que proposition (si tant est que, bien sûr, elle est bien formée), mais une proposition de la forme $f(P_1,\dots,P_n)$ peut prendre toujours seulement deux valeurs de vérité en tant que proposition bien formée, mais cette valeur variera dans 2^n cas selon les valeurs de vérité prises par $P_1,\dots,P_n$!

Afin de *calculer* avec les propositions, on distinguera chacun de ses 2^n cas de figure. Afin de tous les représenter, on aura profit, dès que $n \geqslant 2$, de les écrire dans un tableau, appelé *table de vérité* comme représentée ci-dessous, ayant pour buts exhaustivité et clarté, et qui facilite beaucoup en pratique le calcul propositionnel comme on pourra l'éprouver très rapidement.

P
V
F

Table 1.1 : *Table de vérité triviale à une variable.* —
Lorsqu'on a qu'une proposition, elle ne peut prendre que la variable de vérité *vrai* ou *faux*. On sent déjà qu'il n'y aura donc que deux opérateurs unaires : l'identité et la négation, c'est-à-dire, conserver les deux valeurs de vérité ou les inverser.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

Table 1.2 : *Table de vérité à deux variables (sans proposition composée à calculer).* —
Voilà la forme générale d'une table de vérité à deux variables. **Important.** Pour ne pas s'y perdre, on commence toujours par la gauche où l'on inscrit les valeurs de vérité vraies et fausses à la suite (on divise par deux le tableau, le haut et le bas). Dans chacune de ces divisions, on divise le tableau en deux, le haut et le bas, qui seront les places respectivement du vrai et du faux de la deuxième proposition, et ainsi de suite, de sorte que la dernière colonne sera constituée par l'alternance une à une des valeurs vrai et faux de la n-ième proposition.

	P_1	P_2	$\cdots$	P_n	$f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$
	V	V	$\cdots$	V	V
	V	V	$\cdots$	F	F
$2^n/2$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
	V	F	$\cdots$	V	F
	V	F	$\cdots$	F	F
	F	V	$\cdots$	V	V
	F	V	$\cdots$	F	F
$2^n/2$	$\vdots$	V	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
	F	F	$\cdots$	V	F
	F	F	$\cdots$	F	V

TABLE 1.3 : *Table de vérité à n variables.* — Généralisation des faits précédents.

Ce qu'il faut retenir

→ La logique naïve travaille sur les *propositions*. On suppose qu'elles existent, elles ne sont pas définies très proprement mais on essaie d'identifier leur *bonne formation*.

→ Comme au fil de toute démarche axiomatique, ces propositions, quoique non définies, sont régies par des *axiomes*. Ceux-ci portent sur la notion de *valeur de vérité*, qu'une proposition peut prendre selon des règles précises.

→ Une certaine façon de voir les choses (conception quotient, point de vue ensembliste) alors est d'*identifier* les propositions à leurs valeurs de vérité, ce qui peut paraître cruel mais est très cohérent pour l'œil pratique. Plus couramment, on adopte une conception classique (*i.e.* sur les classes, point de vue prédicatif).

→ Pour écrire les calculs sur un ensemble fini de propositions, on utilisera le formalisme des *tableaux de vérité* permettant de représenter clairement tous les cas de figure selon que des propositions quelconques prennent l'une ou l'autre des deux valeurs de vérité possibles.

→ Ce qui est intéressant, en logique puis en mathématique, c'est de former des formules complexes qui soient vraies pour les 2^n valeurs de vérité considérées : une telle formule sera appelée *théorème du calcul propositionnel*. Plus généralement, mais peut-être aussi de façon plus biaisée, on peut considérer que toute l'activité mathématique consiste à établir de telles formules, appelées alors *théorèmes*.

1.1.2 Opérations sur les propositions

1.1.2.1 Négation d'une proposition

La définition suivante n'en est pas vraiment une dans la première conception de la logique naïve, mais elle en est une dans la deuxième. Ainsi, dans la première conception, il faudra remplacer le mot « Définition » par « Axiome » et commencer l'énoncé par *On admet qu'il existe une unique proposition telle que...*

La négation transforme une proposition en une autre proposition : ce sera un opérateur unaire (d'ailleurs, le seul, avec l'identité bien sûr qui ne change rien à la proposition, ce qui nous fera intéresser très vite aux opérateurs binaires entre propositions).

Définition. ***(Négation)***

Soit P une proposition. On appelle *négation* de P la proposition Q telle que Q est vraie si P est fausse et Q est fausse si P est vraie. On note : $\neg P$ ou $\textsc{Non}(P)$ ou $\textsc{Non}\ P$ ou $\text{Neg}(P)$.

Exercice 4

Se convaincre que l'on ne peut trouver de proposition ni vraie, ni fausse.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit une proposition ni vraie ni fausse. Que dire de sa négation ?

Remarque. L'opération de négation d'une proposition peut être entièrement définie par sa table de vérité, comme suit :

P	NON P
V	F
F	V

TABLE 1.4 : *Table de vérité de la négation.* —
Cette table a pour nous valeur de définition.

Intuitivement, la négation d'une proposition est celle qui dit le « contraire » de la proposition de départ. Comme on l'a déjà évoqué (encore ! qu'est-ce qu'on évoque dans ce cours), elle échange les valeurs de vérité selon celles de la proposition initiale, tandis que l'identité (que nous ne prenons pas la peine de définir, car ce n'est même pas un opérateur dans la conception quotient) les conserve.

On admet pour l'instant que deux propositions sont équivalentes ssi elles ont les mêmes valeurs de vérité, vraies ou fausses.

Propriété. ***(Involutivité de la négation)***

Pour toute proposition P, $\neg\neg P \iff P$. Autrement dit, l'opérateur de négation est involutif.

▷ La méthode incontournable pour montrer ce genre de formules, même ici très élémentaire, est la formalisation en tables de vérité. On rédigé de la manière suivante : ■

Logique intuitionniste : *first encounter*

La double négation, selon le théorème précédent, est traité directement dans notre logique. Ce n'est plus le cas en logique intuitionniste.

1.1.2.2 Conjonction

1.1.2.3 Disjonction

1.1.2.4 Implication

1.1.2.5 Équivalence

1.1.2.6 Opérateurs binaires (en général)

1.1.3 Conséquences du calcul propositionnel

Théorème. ***(Reformulation du principe de non-contradiction)***

Non P ou P.

1.2 Prédicats

1.2.1 Définition

1.2.2 Principe de la preuve

1.3 Théorèmes de la logique classique

1.3.1 Lois usuelles

1.3.2 Principes démonstratifs

Chapitre 2

Les raisonnements mathématiques

Résumé

On classifie les façons de démontrer les plus classiques en mathématiques, et qui sont les seules qui serviront chez nous.

2.1 Méthodes générales de démonstration

2.1.1 Méthodes de démonstration directes

2.1.2 Méthodes de démonstration indirectes

2.1.2.1 Contraposée versus absurde

2.1.3 Autres méthodes générales de démonstration

2.2 Pratique de la démonstration

2.2.1 Principes de démonstration

2.2.2 Paradigmes de preuve

2.2.2.1 Paradigmes analytiques

2.3 Quelques pièges dans les démonstrations mathématiques

Chapitre 3

Théorie naïve des ensembles

Résumé

On présente une théorie des ensembles munie de l'axiomative naïve de la fin du XIX^{e} siècle. Cet absence d'axiomatique n'empêche pas l'arithmétique cardinale et ordinale toutefois. Toute considération touchant aux modèles de théorie est hors de propos.

3.1 La démarche axiomatique en philosophie des sciences

NOUS avons déjà rencontré l'exemple trébuchant de la logique naïve. Essayons de généraliser ce processus.

3.2 Axiomes de la théorie des ensembles

3.2.1 L'axiome de choix

3.2.1.1 Théorème de Zorn

Définition. ***(Maximal)***

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Un élément a de E est dit *maximal* si pour tout $x \in E$, $a \leqslant x \implies a = x$. On définit de même la notion d'*élément minimal.*

Définition. ***(Chaîne)***

Une *chaîne* d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est une partie A de cet ensemble E sur laquelle la restriction $\leqslant_{|A\times A}$ de l'ordre est totale.

Définition. ***(Ensemble inductif)***

Un ensemble inductif E est un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée (par un élément a priori dans E).

Théorème. *(Lemme de Zorn)*

Tout ensemble inductif a un élément maximal.

$\triangleright$ Nous donnons une preuve plutôt laborieuse de ce résultat, dite « par au-dessus » (*top-down* en anglais). Celle-ci est beaucoup moins judicieuse qu'une preuve « par en dessous » (*bottom-up* en anglais), qui est l'autre preuve classique du lemme de Zorn, mais a l'avantage de ne pas recourir à la théorie des ordinaux.

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné inductif. Remarquons que l'ensemble vide n'est pas inductif. Soit σ une fonction de choix sur la famille de toutes les parties non vides de E. Pour $X \subseteq E$ et $a \in E$, on note $X \preccurlyeq a$ pour $\forall x \in X \quad x \leqslant a$ et de même pour une inégalité stricte. Pour toute chaîne C, on définit $C^+ = C \cup \{\sigma(\{a \mid C \prec a\})\}$ si $\{a \mid C \prec a\}$ est non vide, et $C^+ = C$ sinon.

Soit C une chaîne quelconque de E (il en existe toujours une, par exemple la partie vide). Parce que E est inductif, il existe a vérifiant $C \preccurlyeq a$ par définition. Si a est maximal dans E, il n'y a rien à faire. Sinon, par définition, il existe un certain b dans E vérifiant $a < b$, et donc par transitivité $C \prec b$. Par conséquent, si C est une chaîne telle que $\{a \mid C \prec a\}$ soit vide, c'est-à-dire vérifiant $C^+ = C$, alors il existe une élément maximal dans E. Nous allons construire une telle chaîne.

On appelle *close* toute famille K de chaînes de E telle que $C \in K$ entraîne $C^+ \in K$, et que, si J est une partie de K formées de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion, alors leur réunion appartienne encore à K. La famille de toutes les chaînes de A est évidemment close, et l'on vérifie que toute intersection de familles closes est close. Il existe donc une plus petite famille close K (l'intersection de toutes les familles closes, qui ne pose pas de problème de définition puisque l'ensemble des familles closes est non vide). Posons enfin $K' = \{C \in K \mid \forall D \in K \quad C \subseteq D \vee D \subseteq C\}$. On va montrer que $K' = K$, c'est-à-dire que K est composée de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Supposons cela démontré. On pose C la réunion des éléments de K. Par définition, on a $C \in K$ et donc $C^+ \in K$. Or, par construction, on a $D \subseteq \bigcup K = C$ pour toute chaîne D dans K. En particulier, on a donc $C^+ \subseteq C$, d'où $C^+ = C$, comme souhaité.

Revenons sur notre postulat. Puisque K est la plus petite famille close, et que l'on a $K' \subseteq K$, il suffit, pour montrer $K' = K$, de montrer que K' est close. Soit $C \in K'$. Posons $K_C = \{D \in K \mid D \subseteq C \vee C^+ \subseteq K'\}$. Supposons que $D \in K_C$. Si $C^+ \subseteq D$, on a *a fortiori* $C^+ \subseteq D^+$. Pour $C = D$, on a trivialement $C^+ = D^+$. Supposons alors $D \subsetneq C$. Par hypothèse, D^+ est dans K, et C est dans K', donc on a $D^+ \subseteq C$ ou $C \subsetneq D^+$. Le second cas est incompatible avec $D \subsetneq C$ puisque D^+ privé de D est un singleton. Dans tous les cas, $D \in K_C$ entraîne donc $D^+ \in K_C$. Supposons maintenant que J soit un sous-ensemble de K_C formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Ou bien on a $D \subseteq C$ pour tout D dans J, et l'on a alors $\bigcup J \subseteq C$, ou bien il existe D dans J vérifiant $C^+ \subseteq D$, et l'on a alors $C^+ \subseteq \bigcup J$: dans les deux cas, $\bigcup J$ est dans K_C. Ainsi, K_C est une famille close, donc $K_C = K$, ce qui montre que C^+ est dans K' dès que C s'y trouve.

Finalement, supposons que J est un sous-ensemble de K' formé de chaînes deux à deux comparables pour l'inclusion. Soit D une chaîne quelconque dans K. Ou bien on a $C \subseteq D$ pour toute chaîne C dans J, dont on déduit que $\bigcup J \subseteq D$, ou bien il existe C dans J vérifiant $D \subseteq C$, dont on déduit que $D \subseteq \bigcup J$. Donc, dans tous les cas, $\bigcup J \in K'$. Il en résulte que K' est close, et on a donc $K' = K$. ■

3.2.2 L'axiome de fondation

Un petit développement sur l'axiome de fondation, axiome supplémentaire de la théorie des ensembles classiques (au même titre que l'axiome du choix) et qui n'est pas du tout utile. C'est pourquoi les discussions à propos de son adoption ne sont pas véhémentes, et l'on peut considérer des théories tout à fait semblables en termes des mathématiques que nous connaissons munies soit d'un axiome de fondation, soit d'un axiome d'anti-fondation. Le principe général de l'axiome de fondation est d'interdire la construction d'ensembles qui s'appartiennent eux-mêmes.

3.2.2.1 Retour sur la relation d'appartenance

En théorie naïve des ensembles, on pose qu'il existe des objets, appelés *ensembles*, liés par une relation dite d'appartenance, et notée $\in$, et dont les règles de construction sont regroupées en une liste d'axiomes. Tout ce que nous appelons *élément* est ensemble, et réciproquement tout ensemble peut-être vu comme un élément[1]. Ce que sont les ensembles n'est pas précisé. Plus généralement, on regroupe le concept intuitif de collection d'objets sous le terme de *classe*, de sorte que tout ensemble soit une classe, mais ce n'est pas réciproque : par exemple, la classe regroupant tous les ensembles n'est pas un ensemble (paradoxe de Russell) ; elle est dite impropre.

La liste des axiomes choisis constitue les fondements de la théorie ; si quelques axiomes semblent essentiels à la construction d'une théorie des ensembles pertinente, pour d'autres, la communauté n'est pas décidée, tant qu'ils sont indépendants (aucun axiome n'est conséquence logique des autres), c'est en particulier le cas pour l'axiome du choix. Ceci mène à l'élaboration de différents *modèles* d'une théorie, à laquelle nous associons les noms de leur créateur, avec plus ou moins de précision : Z pour Zermelo, ZF pour Zermelo et Fraenkel, ZFC pour ce système d'axiomes additionné de l'axiome du choix.

Ainsi les axiomes, qui sont admis obtusément, ont pour but primaire de régir les règles de construction d'ensembles et relatives à la relation d'appartenance notée $\in$, en hommage au ϵ grec, pour le verbe « est » en latin. Le but de cette section est de donner de la relation d'appartenance quelques propriétés importances, avec pour conséquence notable la construction véritable des entiers naturels.

3.2.2.1.1 Notion intuitive d'appartenance

Axiome. *(Relation d'appartenance)*

Sur la classe des ensembles, il existe une relation notée $\in$, c'est-à-dire une partie (impropre) de Ens $\times$ Ens.

[1] En effet, si E : Ens, *i.e.* « E est un ensemble », alors d'après l'axiome de la paire, $E \in F$ en posant $F = \{E\}$.

Exemples

1. $1{,}2{,}3 \in \mathbb{N}$;
2. $-1 \notin \mathbb{N}$;
3. $-1{,}1 \in \mathbb{Z}$;
4. $(-1{,}1) \notin \mathbb{N}$;
5. $(-1{,}1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
6. $(-1{,}1) \in \{-1\} \times \{1\}, \{-1{,}1\}^2$;
7. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$;
8. $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}^2$;
9. $\mathbb{N} \notin \mathbb{R}$;
10. $\emptyset \in \{\emptyset\}$;
11. $\emptyset \notin \emptyset$;
12. $\{1{,}2{,}3\} \subseteq \{1{,}2{,}3{,}4\}$;
13. $\{1{,}2{,}3\} \notin \{1{,}2{,}3{,}4\}$;
14. $\{1{,}2{,}3\} \in \{\{1{,}2{,}3\}, 1{,}2{,}3{,}4\}$;
15. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \cup \{-1\}$;
16. $\{\emptyset\} \notin \emptyset$.

Quelques propriétés très intuitives.

Propriété. ***(Non-transitivité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance n'est pas transitive (mais pas intransitive).

$\triangleright$ Il suffit de prendre pour exemples : $1 \in \{1{,}2\} \in \{\{1{,}2\}, 2\}$, mais $1 \notin \{\{1{,}2\}, 2\}$. La construction et structure des ensembles entiers naturels sera justifiée plus tard. ■

Propriété. ***(Non-totalité de l'appartenance)***

La relation d'appartenance est partielle.

$\triangleright$ On a $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ et $\{\{\emptyset\}\} \notin \emptyset$ (le vérifier soi-même). ■

Remarques.

1. Par essence de la théorie des ensembles, tout objet est ensemble. Un problème émerge : il n'y a pas de distinction absolue entre les ensembles et leurs éléments. On comprend que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,..., $\mathbb{R}$, soient des ensembles, mais on conçoit mal que $1{,}2, \pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t, \int_1^{+\infty} e^t \mathrm{d}t$ le soient également. C'est pourtant le cas.
2. L'axiome de fondation, noté AF dans la suite, répond aux questions suivantes : $\in$ est-elle réflexive ? et $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique ? On propose au lecteur de se poser la question lui-même avant de trouver la réponse dans la suite.

Exercice 5

Expliciter les ensembles $1{,}2{,}\pi, x \longmapsto x^2, \mathbb{P}, \int_1^2 e^{it}\mathrm{d}t$.

3.2.2.1.2 Axiomes déjà connus quant à $\in$

Axiome. ***(Principe d'extensionnalité)***

Pour tous $A{,}B$: Ens, $(A = B) \iff (\forall x \quad (x \in A \iff x \in B))$.

Remarques.

1. C'est le premier axiome.
2. C'est en fait une définition, celle de « = ». Cette relation d'égalité est définie entre les ensembles, et l'on peut garder en mémoire que toutes les relations d'égalités utilisées quotidiennement sont des *restrictions* de cette relation définie sur une classe impropre.
3. Le syntagme « $\forall x$ » seul apparaissant dans la formulation de l'axiome n'est pas un abus, mais la notation la plus correcte pour : « pour tout ensemble x... ». Quand on note, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathfrak{Re}(x) = x$, on raccourcit la plus correcte : $(\forall x, x \in \mathbb{R} \implies \mathfrak{Re}(x) = x)$.

Un petit rappel qui ne fait pas de mal.

Définition. ***(Inclusion)***

Pour tous $A{,}B$: Ens, on dit que $A \subseteq B$ si $\forall x \quad x \in A \implies x \in B$.

Remarque. L'idée fondamentale de l'inclusion est son rapport avec l'appartenance : l'appartenance $\in$ est un notion locale, alors que l'inclusion $\subseteq$ est une notion globale.

On donne quelques applications du principe d'extensionnalité, sachant qu'un peu de raisonnement axiomatique n'est pas luxueux. Dans le théorème suivant, l'existence d'un ensemble des parties en conséquence de l'axiome d'existence d'ensemble des parties. Nous ne donnons pas tous les axiomes, au risque de faire inventaire. Le lecteur intéressé peut les trouver à l'adresse : http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/AnnexeA.pdf.

Théorème. ***(Identité d'ensembles par les ensembles des parties)***

Pour tous $A{,}B$: Ens, $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

$\triangleright$ Si $A = B$, $\forall x \quad x \in A \iff x \in B$. Or $\forall X \quad X \subseteq A \iff \forall x \in X \quad x \in A$, donc on vérifie : $\forall X \quad X \subseteq A \iff X \subseteq B$, soit par définition $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$: c'est l'extensionnalité, car $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Réciproquement, si $A \neq B$, il existe $x \in B$, $x \notin A$ (ou $x \in A, x \notin B$, cas qui se traite de la même manière). Dans le premier cas, $\{x\} \subseteq B$ mais $\{x\} \not\subseteq A$, car sinon $x \in A$. Ainsi $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ mais $\{x\} \notin \mathcal{P}(A)$, donc par extensionnalité $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$. Par contraposée, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$, d'où l'équivalence. ■

Remarque. Une chose remarquable du théorème, et que l'égalité des ensembles des parties n'est qu'une égalité d'ensembles, et pas une correspondance deux à deux des parties.

Théorème. ***(Singletons associés)***

$\forall A,B \quad A = B \iff \{A\} = \{B\}$.

▷ D'une part, on suppose $A = B$. Soit $x \in \{A\}$. Alors puisque c'est un singleton, $x = A$. Or $A = B$, donc $x = B$, et $B \in \{B\}$ donc $x \in \{B\}$. Ainsi $\{A\} \subseteq \{B\}$. Semblablement, $\{B\} \subseteq \{A\}$, donc par double inclusion $\{A\} = \{B\}$.

Réciproquement, supposons $\{A\} = \{B\}$. $A \in \{A\}$ et $\{A\} = \{B\} \iff (\forall x \in \{A\} \quad x \in \{B\} \wedge \forall x \in \{B\} \quad x \in \{A\})$. Le premier point de la conjonction, avec la première remarque faite donne $A \in \{B\}$, soit $A = B$, car $\{B\}$ est un singleton. ■

Remarques.

1. De même que pour le théorème précédement, l'existence du singleton contenant A est axiomatique. (Elle vient de l'axiome... de la paire. Il n'y pas d'axiome du singleton : pour l'en déduire, il suffit de prendre, dans la paire, les deux éléments identiques, et l'on se rend compte qu'un axiome de singleton serait superflu, car il est déjà constructible à partir de l'axiome de la paire.)
2. La contraposée du théorème donne : $A \neq B \iff \{A\} \neq \{B\}$.

Propriété. ***(Partition triviale par événements atomiques, partition discrète)***

Soit Ω un ensemble. Alors $(\{x\})_{x\in\Omega}$ partitionne Ω.

▷ Il suffit de reprendre point par point la définition de partition.

- ⋆ **Habitations.** Soit $x \in \Omega$, c'est-à-dire $\{x\}$ dans la partition. $\mathrm{card}(\{x\}) = 1 \neq 0$, donc les parties de la partition ne sont pas vides.
- ⋆ **Disjonction deux à deux.** C'est la contraposée du théorème des singletons associés.
- ⋆ **Réunion.** $\bigcup_{x\in\Omega} x = \Omega$. En effet : $X \in \bigcup_{x\in\Omega} x \iff \exists x \in \Omega \quad x = X$, soit $\bigcup_{x\in\Omega} x \iff x \in \Omega$. Ainsi, on a l'égalité par extensionnalité,

ce qui termine la preuve. ■

Remarque. On aurait pu le démontrer beaucoup plus rapidement : l'égalité sur E est une relation d'équivalence, dont les classes sont les $(\{x\})_{x\in\Omega}$ et d'après le théorème fondamental des relations d'équivalence, c'est une partition de Ω.

3.2.2.1.3 Clarification de l'ambivalence entre ensemble et élément

On a vu que tout élément est en fait un ensemble complétement, et que la distinction entre les deux n'est réellement qu'un agrément de langage. Dans l'assertion :

$$E \in F,$$

E,F sont des ensembles, mais on dit plutôt que E est un élément, à savoir un élément de F. D'autre part, tout ensemble peut être vu comme un élément, on l'a déjà remarqué, car $\forall x \quad x \in \{x\}$, ce qui justifie de confondre le concept d'élément avec celui d'ensembles. Nous voulons, dans ce qui suit, corriger les imprécisions mentales issues de l'ambivalence entre les deux termes.

Propriété. ***(Inclusions générales)***

(i) Tout ensemble inclut un ensemble ;
(ii) tout ensemble est inclus dans un ensemble ;
(iii) si $\operatorname{card}(E) \geqslant 1$, un ensemble E inclut un autre ensemble ;
(iv) dans le cas général, tout ensemble est inclus dans un autre ensemble.

▷ Successivement :

1. $E \subseteq E$;
2. $E \subseteq E$;
3. $\emptyset \subseteq E$, et $E \neq \emptyset$, car, par hypothèse, il est de cardinal non nul, et l'ensemble vide existe d'après un axiome ;
4. Soit F un ensemble, $F \notin E$. Il existe d'après le paradoxe de Cantor. Alors $E \subseteq E \cup \{F\} = G$, mais $G \neq E$, car $F \in G$ mais $F \notin E$. ■

En général, un élément d'un ensemble n'en est pas une partie. Par exemple $\{1\} \in \{\{1\}\}$, mais $1 \notin \{\{1\}\}$ donc $\{1\} \nsubseteq \{\{1\}\}$. Ceci n'est pas universel, c'est même faux dès que $E \ni \emptyset$ (pourquoi ?). Réciproquement, une partie d'un ensemble, en général, ne lui appartient pas : $\{1,2\} \notin \mathbb{N}$ alors que $\{1,2\} \subseteq \mathbb{N}$.

Propriété. ***(Remarques supplémentaires)***

(i) Un ensemble n'est pas nécessairement disjoint de l'ensemble de ses parties ;
(ii) on peut avoir $E \subseteq F$ et $E \in F$ même si $E \neq \emptyset$;
(iii) pour tout E, il existe F tel que $E \subseteq F$ et $E \in F$.

▷ (i) et (ii) ont déjà été traités ci-dessus. Pour (iii), il suffit de choisir $F = E \cup \{E\}$. ■

Remarquons que $E \cup \{E\} \neq E$: cette propriété universelle découle de l'axiome de fondation ; avant de l'introduire, on rend compte des implications d'une trop grande liberté dans les constructions relatives relation d'appartenance.

3.2.2.2 Bizarreries de la relation d'appartenance

Formalisons les conséquences des propriétés juste précédentes, pour en montrer les limites. Le premier objet bizarre engendré par de telles constructions est celui d'*ensemble transitif*.

3.2.2.2.1 Ensembles transitifs

On a vu que $\in$ n'était pas a priori transitive, mais également, qu'elle n'était pas pour autant intransitive. Les ensembles transitifs sont tels que la transitivité est toujours vraie, lorsqu'on ne regarde qu'eux, un par un.

Définition. ***(Ensemble transitif)***

Un ensemble est dit *transitif* si les éléments de ses éléments en sont tous des éléments, autrement dit, A est transitif ssi $\forall x \in A\ \forall a \in X \quad x \in A$.

Exemples

1. $\emptyset$ est transitif. En effet, $\forall x \in \emptyset\ \forall a \in x \quad x \in \emptyset$, car toute propriété commençant par $\forall x \in \emptyset$ est vraie par principe d'explosion ;
2. $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ est transitif (le vérifier) ; ainsi l'ensemble vide n'est pas le seul transitif.

La notion d'ensemble transitif n'est pas du tout intuitive : elle montre les pathologies de la relation d'appartenance. AF n'interdit pas les ensembles transitifs, mais il les limite[1], en pratique, à ceux que nous voyons maintenant, c'est-à-dire, l'ensemble vide et ses composés selon le théorème suivant.

L'ensemble des parties d'un ensemble A est noté indifféremment $\mathcal{P}(A)$ ou $\mathfrak{b}(A)$.

Propriété. ***(Caractérisation de la transitivité par l'ensemble des parties)***

Un ensemble A est transitif ssi $A \subseteq \mathfrak{b}(A)$.

▷ C'est une simple reformulation de la définition. Le lecteur un peu perdu aura intérêt à rédiger l'équivalence. ■

Théorème. ***(Construction des ensembles transitif)***

Soit A un ensemble transitif. Alors :

- $A \cup \{A\}$ est transitif ;
- $\mathcal{P}(A)$ est transitif.

▷ Successivement :

[1] En effet, si $E \in E$, alors E est automatiquement transitif.

1. On fait une disjonction des cas : si $x \in A \cup \{A\}$, soit $x \in A$, dans ce cas, on applique la transitivité de A, donc pour tout $a \in x$, $x \in A$ donc $x \in A \cup \{A\}$. Si d'autre part $x \in \{A\}$, alors $x = A$, donc si $a \in x = A$, $a \in A$ donc $a \in A \cup \{A\}$ de même.
2. Si $x \in a \in \mathcal{P}(A)$, $x \in a \subseteq A$, soit $x \in A$ par définition de l'inclusion, donc par définition $x \subseteq A$, soit $x \in \mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(A)$ est transitif. ■

On espère avoir assez brouillé les esprits croyant l'apparente commodité de la relation d'appartenance. Avant de passer à l'énoncé de AF, on rappelle le paradoxe suivant, beaucoup utile.

3.2.2.2.2 Paradoxe de Russell

Soit la collection des objets : $\{X \mid X \notin X\} = \mathcal{C}$.

Paradoxe. ***(Paradoxe de Russell)***

La construction de $\mathcal{C}$ est paradoxale.

▷ Par principe logique de tiers-exclu, on a, soit $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Supposons pour commencer $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Alors par définition de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}$ est un X tel que $X \in \mathcal{C}$. Inversement, supposons que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Par définition, $\mathcal{C}$ contient tous les X tels que $X \notin X$, et $\mathcal{C}$ vérifie ce prédicat logique, donc $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Ainsi, dans les deux cas logiques possibles, on a ($\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$), donc cette proposition est universellement vraie. Or elle est universellement fausse selon le principe de non-contradiction, donc la propriété « la propriété $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ET $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ est vraie » est la fois vraie et fausse, ce qui est contradictoire par non-contradiction. ■

Le constat du paradoxe de Russell a conduit à la création d'un des premiers axiomes de la théorie des ensembles, les schémas de séparation : on ne peut pas construire des ensembles à partir de rien, mais il y a une règle : si E existe, et $\mathcal{P}$ est un prédicat logiquement bien formé sur E, alors on peut considérer l'ensemble $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$, d'où le nom de définition par séparation et compréhension. C'est la raison pour laquelle il faut écrire toujours : $\forall x \in \mathbb{R}$..., $\forall f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$... (Notons qu'il faut également postuler l'existence d'au moins un ensemble, ce que l'on fait avec l'axiome de l'ensemble vide.)

La faute commise dans le paradoxe de Russell est d'avoir postulé l'existence de l'ensemble $\mathcal{C}$: il n'est pas défini par séparation, donc a priori, il n'existe pas. En effet, l'on sait que $\mathcal{C}$, d'après l'axiome de fondation, est Ens la classe de tous les ensembles, et d'après le théorème de Cantor, ce n'est pas un ensemble, autrement dit une classe impropre.

3.2.2.3 L'axiome de fondation proprement dit

⟶ *Notation.* On notera $ZF_\bullet$ l'ensemble des axiomes de Zermelo-Fraenkel sans l'axiome de fondation, et $ZF = ZF_\bullet + AF$.

On rappelle les quelques interrogations initiales de cette section :

- ⋆ $\in$ est-elle réflexive ?
- ⋆ $\in$ est-elle symétrique, antisymétrique, ou sous quelles conditions ?

c'est-à-dire, existe-t-il, et lesquels, des ensembles E,F tels que :

- ⋆ $E \in E$?
- ⋆ $E \in F$ et $F \in E$?

3.2.2.3.1 Énoncé et premières propriétés

Axiome. ***(Axiome de fondation)***

Pour tout ensemble A, $A \neq \emptyset \implies \exists B \in A\ B \cap A = \emptyset$.

Remarques.

1. C'est chelou.
2. On verra que ceci exprime que la relation $\in$ est *bien fondée* sur la classe des ensembles, c'est-à-dire, qu'il existe toujours sur tout ensemble et l'ensemble des éléments qu'il contient, et l'ensemble des éléments qu'ils contiennent, etc., un élément minimal pour l'appartenance, et donc qu'il n'existe pas de suite infinie du type $E \ni F \ni G \ni$... Nous verrons même que, modulo un axiome du choix spécial, cette assertion est équivalente à AF.

Théorème. ***(Irréflexivité de $\in$)***

Pour tout ensemble E, $E \notin E$.

▷ Si $E \in E$ pour un certain ensemble E, notons $A = \{E\}$. Dans ce cas, $A \neq \emptyset$, car A est un singleton donc de cardinal $1 \neq 0$. De plus, si $x \in A$, $x \in \{E\}$ soit $x = E$ et $x \cap A \neq \emptyset$, car $x \cap A = E \cap \{E\}$, et puisque $E \in \{E\}$ et $E \in E$ par hytpohèse, on aurait $E \in E \cap \{E\}$, ce qui contredirait AF. Par contraposition, $AF \implies \forall E,\ E \notin E$, c'est-à-dire $\nexists E,\ E \in E$. ■

Remarques.

1. Ce théorème d'irréflexivité se réécrit en : il n'existe pas d'ensemble E tel que $E = \{E\}$.
2. On en déduit immédiatement ce que l'on a évoqué tout à l'heure : pour tout ensemble E, $E \cup \{E\} \neq E$. En effet, cela voudrait dire que, comme $E \in E \cup \{E\}$, $E \in E$.
3. On constate que l'irréflexivité est encore vérifiée pour l'ensemble vide. En effet, $\emptyset$ ne peut contenir aucun élément, y compris $\emptyset$.

On arrive désormais aux équivalences centrales de cette partie, qui donnent tout son sens à la formulation initiale un peu obscure de l'axiome de fondation. Avant cela, on rappelle l'énoncé de l'axiome du choix dépendant qui servira ensuite pour établir une formulation équivalente de AF.

Axiome. ***(Axiome du choix dépendant)***

Pour tout $X \neq \emptyset$, pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur X, si le domaine de définition de $\mathcal{R}$ est bien X (autrement dit si tout élément $x \in X$ est bien tel qu'il existe un $y \in X$ tel que $(x,y) \in \mathcal{R}$), alors il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $x_n \mathcal{R} x_{n+1}$. On note cet axiome DC.

Propriété. ***(Formulations diverses de l'axiome de fondation)***

On considère les propriétés suivantes :

AF l'axiome de fondation ;

(I) l'irréflexivité de la relation d'appartenance ;

(II) « Il n'existe pas $x_1,\ldots,x_n$ n ensembles, $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_1 = x_n$ et $x_1 \in \ldots \in x_n$ » ;

(III) « $\in$ est bien fondée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles décroissante pour $\in$ ».

Alors on a les implications relatives comme représentées sur la figure **??**. En particulier, elles sont toutes vraies dans un système ayant pour axiome AF. Les autres sont de simples conséquences logiques les unes des autres, mais $(III) \iff AF$ en présence de l'axiome du choix dépendant.

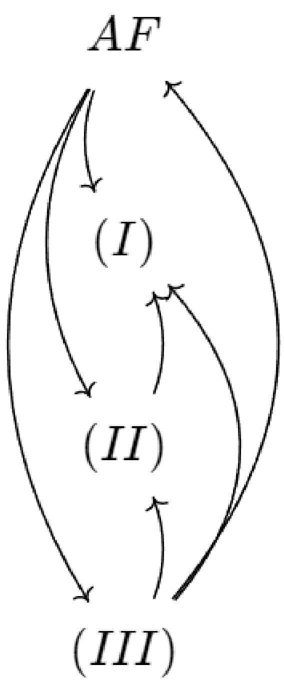


FIGURE 3.2.1 : *Formulations faibles de l'axiome de fondation.* — Illustration des implications réciproques.

▷ Montrons chacune des flèches précédentes, qui représentent des implications.

▶ $AF \implies (I)$. On l'a déjà montré, c'est l'objet de la propriété précédente.

- $AF \implies (II)$. De même, par contraposée. Supposons $x_1 \in ... \in x_n = x_1$. On pose $E = \{x_1,...,x_n\}$, qui n'est pas vide puisque $n \neq 0$. On construit ainsi un contre-exemple de l'axiome de fondation. En effet, soit $x \in E$. $x = x_i$ où $i \in [\![1,n]\!]$, car $x_1 = x_n$. $x \cap E = x_i \cap \{x_1,...,x_{n-1}\}$. Dans le premier cas, $i \neq 1$. On a $x_{i-1} \in x_i$ par hypothèse et $x_{i_1} \in \{x_1,...,x_{n-1}\}$, donc $x_{i-1} \in x \cap E$ qui est donc non vide. Dans le deuxième cas, $i = 1$. Alors $x_{n-1} \in x_i = x_n$ et $x_{n-1} \in \{x_1,...,x_{n-1}\}$ donc $x_{n-1} \in x \cap E$ qui n'est pas vide encore une fois. Ainsi $\neg AF$.
- $AF \implies (III)$. Remarquons en passant que c'est faux pour une suite qui serait croissante, il suffit de prendre $x_0 = \emptyset$ et $x_{i+1} = \{x_i\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soit donc une suite infinie décroissante $x_0 \ni ... \ni x_n \ni ...$; l'axiome de la réunion permet de former $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} = \mathrm{Im}(x)$: l'existence de la suite (x_n) est hypothétique donc certaine. $E \neq \emptyset$, car $E \ni x_{47}$. Soit $x \in E$. $x \cap E = x_i \cap \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$, $i \in \mathbb{N}$ fixé choisi. On a à la fois $x_{i+1} \in x_i$ par hypothèse de chaîne et $x_{i+1} \in \{x_0,...,x_n,...\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ donc $x_{i+1} \in x \cap E$ qui est non vide. Ainsi, on nie l'axiome de fondation et l'on conclut par contraposition.
- $(III) \implies (I)$. On raisonne encore par contraposée : si $A \in A$, alors la suite constante $(A)_{n \in \mathbb{N}}$ convient pour nier (III).
- $(III) \implies (II)$. On raisonne par contraposée, en concaténant : $x_n \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ... \ni x_1 \ni x_{n-1} \ni ....$ Plus précisément, on définit comme contre-exemple de (III) la suite infinie décroissante : $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x_n$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_i = x_{n-k-1}$ où k est le reste dans la division euclidienne de i par n.
- $(II) \implies (I)$. Il suffit de prendre $n = 1 \in \mathbb{N}^*$.
- $(III),DC \implies AF$. Toujours par contraposition. Le principe de démonstration est le suivant : nions AF. On suppose qu'il existe $A_0 \neq \emptyset$ tel que $\forall B \in A_0, B \cap A_0 \neq \emptyset$ (c'est exactement $negAF$). A_0 étant non vide, prenons $B_0 \in A_0$. $B_0 \cap A_0$ d'après ce qui précède, donc on peut prendre $A_1 \in B_0 \cap A_0$. Mais en particulier $A_1 \in A_0$, donc $A_1 \cap A_0 \neq \emptyset$ par hypothèse. Alors on peut prendre $A_2 \in A_1 \cap A_0$. Mais $A_2 \in A_0$, donc $A_2 \cap A_0 \neq \emptyset$ toujours par hypothèse, et l'on prend $A_3 \in A_2 \cap A_0$, etc. Cette intuition que l'on va pouvoir creuser à l'infini dans les éléments de B, d'où le terme de fondation, se formalise exactement avec DC. On prend, dans la définition de DC, $X = A_0 \neq \emptyset$ et pour relation $\ni$ la relation symétrique de $\in$. $\ni$ est bien définie partout sur X, en effet c'est l'hypothèse : $\forall B \in A_0 \quad B \cap A_0 \neq \emptyset$, c'est-à-dire, $\forall B \in A_0 \quad \exists x \in A_0\ x \in B$ soit $B \ni x$. Ainsi, DC s'applique et il existe une suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N} \quad x_i \ni x_{i+1}$, soit $\neg(III)$,

et tout est démontré. ■

Enfin, on règle le compte de la symétrie de la relation d'appartenance. On voit qu'elle n'est pas symétrique, et même asymétrique. De plus, elle n'est asymétrique que si l'un des deux ensembles est vide afin d'appliquer le principe d'explosion.

Corollaire. *(Asymétrie de la relation d'appartenance)*

Il n'existe pas d'ensembles E,F tels que $E \in F$ et $F \in E$.

▷ C'est une conséquence de (II) pour $n = 2$. ■

Remarque. Une autre façon de le dire, est qu'aucun ensemble n'est élément d'un de ses éléments.

Motivation. Il est naturel de se demander si l'on peut clore le diagramme ci-dessous, de sorte que les quatre propositions soient en fait équivalentes : (II), et a fortiori (I), impliquent-ils AF ? La question n'a peut-être pas de réponse, car trouver un exemple de théorie (on dit : un *modèle*) dans laquelle les axiomes de ZF sont vérifiés est en fait impossible, c'est le théorème d'incomplétude de Gödel, et il serait problématique de montrer alors que AF et (I) ne sont pas équivalentes, d'où la difficulté de traiter $\neg AF \implies \neg(I)$.

3.2.2.3.2 Conséquences pour la construction d'objets mathématiques

Exercice 6

Montrer que $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$.

Exercice 7

Montrer que, pour tout ensemble x, $\{\{x\}\} \neq x$.

Exercice 8

Montrer que, pour tout ensemble x, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{p \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p \text{ fois}} \neq x$.

Exercice 9

Montrer que, pour tout ensemble x, pour tous $n,p \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\{\{...\{}_{n \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{n \text{ fois}} \neq \underbrace{\{\{...\{}_{p \text{ fois}} x \underbrace{\}...\}\}}_{p \text{ fois}}$ ssi $n \neq p$.

On va, sommairement, construire de façon ensembliste quelques-uns des objets mathématiques les plus utilisés, notamment les entiers naturels de l'ensemble $\mathbb{N}$. L'axiome de fondation permet, non de créer les entiers naturels (c'est l'axiome de l'infini qui le permet), mais de montrer que les constructions obtenues sont deux à deux distinctes, autrement, de justifier que $1 \neq 2$. Il est important de comprendre que la « représentation » ci-dessous est bel et bien une construction, c'est-à-dire une façon tout au moins de justifier l'existence de tels objets, même si, l'on en convient, ce qu'ils sont n'a pratiquement aucun intérêt à côté de leurs propriétés ; elles sont l'objet de l'arithmétique.

Définition. ***(Représentation des entiers naturels de Von Neumann)***

Nous posons : $0 = \emptyset$, puis : $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, puis $2 = \{0{,}1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc., c'est-à-dire, à l'infini (ce qui est justifié par l'axiome de l'infini) $n+1 = n \cup \{n\}$. L'existence de $\emptyset$ est garantie par l'axiome de l'ensemble vide.

John Von Neumann

D'origine hongroise, fils d'un banquier réputé, János Lajos Neumann, dit Von Neumann commence à étudier à Budapest. Enfant surdoué, il lit et mémorise tout ce qui lui tombe sous la main, parle grec et latin à l'âge de six ans. Calculateur prodige, il stupéfie ses instituteurs et les amis de la famille, dont Lipót Fejér qui dirigera sa thèse, par sa mémoire prodigieuse et ses capacités en calcul mental.

Malgré une situation politique instable en Hongrie, Neumann entreprend des études supérieures de mathématiques à Budapest en 1919 qu'il complète par trois années d'études de chimie à Berlin et Zurich. Il rencontrera ainsi Erhard Schmidt, Herman Weyl et Polya. Il s'intéresse en fait plus aux ensembles et aux nombres transfinis de Cantor qu'à la chimie... C'est à Budapest qu'il soutiendra finalement sa thèse dirigée par Fejér portant sur les ensembles transfinis, fin 1926.

Professeur à Göttingen puis à l'université de Berlin, la réputation de Neumann s'instaure outre-Atlantique : il se rend aux États-Unis à Princeton à l'invitation de Veblen en 1930 à l'occasion de la mise en place du tout nouveau Institute for Advanced Study.

Juif, afin d'échapper à la répression du pouvoir hitlérien soutenu par le régime hongrois, von Neumann s'installe définitivement aux États-Unis en 1933 et fit toute sa carrière au célèbre institut. Il meurt prématurément, en 1954, à 54 ans, d'un cancer des os sans doute causé par ses nombreuses expositions aux radiations lors des expérimentations pour la mise au point de la première bombe atomique.

L'ensemble formé par cette infinité d'ensembles est noté $\mathbb{N}$; on peut lui définir une addition, une multiplication, et vérifier qu'elles vérifient toutes les propriétés habituelles qui lui sont associés ; également un ordre qui permet d'énoncer la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$: toute partie non vide a un minimum. C'est peu intéressant et sans révolution conceptuelle non plus ; le lecteur intéressé trouvera une construction plutôt complète dans *Épistémologie mathématique* de Henri Lombardi. De plus, on vérifie qu'il vérifie les cinq propriétés axiomatiques de l'arithmétique de Peano, que nous énonçons à titre informatif ci-dessous :

Définition. ***(Arithmétique de Peano)***

On appelle *entiers naturels de Peano*, un ensemble $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes, dits *axiomes de Peano* :

(i) il contient au moins un élément, notons le 0 ;

(ii) il existe une fonction σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée *successeur* ;

(iii) aucun entier naturel n'est suivi par 0 ($0 \notin \operatorname{Im}(\sigma)$) ;

(iv) deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux (σ est injective) ;

(v) un principe de récurrence : si un ensemble contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, cet ensemble est $\mathbb{N}$.

Habituellement, la fonction successeur est donnée par $\sigma(n) = n + 1$.

Concluons par l'intérêt principal de cette partie.

Théorème. ***(Distinction deux à deux des entiers naturels)***

En présence de l'axiome de fondation, les entiers naturels de Von Neumann sont deux à deux distincts.

$\triangleright$ On l'a déjà vu : n ne peut appartenir à n, pour tout n, donc $n + 1 \neq n = n \cup \{n\}$. Ceci montre que deux entiers successifs sont distincts. Pour montrer que les entiers naturels sont deux à deux distincts, il s'agit simplement le principe du quatrième exercice présenté ci-dessus, qui en découle. $\blacksquare$

Nous espérons que, par ces considérations, le lecteur sera convaincu que la totalité des objets mathématiques qu'il manipule est une construction ensembliste : un ordre, par exemple, est une relation sur, disons, $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une partie du produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: la notation $n \leqslant p$ traduit simplement $(n,p) \in \leqslant$. Une fonction f est un triplet $f = (E,F,\Gamma)$, où E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée et Γ une partie de $E \times F$ vérifiant la propriété fondamentale des fonctions : tout élément a au plus une image. Les nombres réels sont identifiés, par exemple, aux coupures de Dedekind : ce sont alors des couples (A,B) tels que $A,B \subseteq \mathbb{Q}$, $AcupB = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$ et $\forall a \in A \ \forall b \in B \quad a < b$. Et ainsi de suite.

3.2.2.3.3 Considérations logiques

On peut montrer que si $ZF_\bullet$ est consistant, *i. e.* s'il n'y a pas d'incohérence dans ses axiomes et qu'un modèle est envisageable, alors il ne prouve ni AF, ni sa négation : on dit que AF est indépendant des axiomes de $ZF_\bullet$. Cela s'exprime :

$$ZF_\bullet \text{ consistant} \implies ZF \text{ consistant} .$$

Méthode. ***(Étudier un ensemble)***

- S'il est partie ou sur-ensemble d'un autre ensemble ?
- Sous-parties remarquables
- Déterminer son cardinal
- Dénombrer certaines parties spéciales (c'est-à-dire déterminer leur cardinal)
- Est-il ensemble des parties d'un certain ensemble ? Se réalise-t-il naturellement comme tel ou partie ?

3.3 Opérations sur les ensembles

3.3.1 Limites d'ensembles

3.3.2 Limites de chaînes d'ensembles

Définition. ***(Convergence d'une suite d'ensembles)***

Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles. On dit que $(A_n)_n$ *converge*, si $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ la *limite* de la suite (A_n).

3.3.3 Limites inductives et projectives d'ensembles

Définition. ***(Ensemble ordonné filtrant)***

Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné, a priori partiellement. On dit que $(I, \leqslant)$ est un *ensemble (ordonné) filtrant (à droite)* si pour tous $i,j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$. On dira que $(I, \leqslant)$ est un *ensemble filtrant à gauche* si l'ordre opposé est filtrant (mais, dans la pratique, on emploiera la même dénomination pour les deux).

Exemples. ***(Ensembles filtrants)***

1. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est filtrant.
2. Les ensembles totalement ordonnés sont filtrants.
3. Un treillis est filtrant à gauche et à droite.
4. Typiquement, un ensemble de parties, une topologie, une tribu, etc., est filtrante.

Définition. ***(Système inductif d'ensembles)***

Soient $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné filtrant. On appelle *système inductif* $(E_i, f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ *d'ensembles*, une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles et une famille doublement indexée d'applications $f_i^j : E_i \to E_j$ dits *morphismes de transitions* pour chaque couple d'indices $(i,j) \in I^2$, de sorte que $f_i^i = id_{E_i}$ pour tout $i \in I$, et pour tous $i,j,k \in I$ avec $i \leqslant j \leqslant k$, $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$.

Définition. ***(Limite inductive d'ensembles)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système inductif d'ensembles. La *limite inductive* de ce système est l'ensemble quotient de la réunion disjointe $\displaystyle\bigsqcup_{i\in I} E_i$ par la relation d'équivalence $(i,x)\sim(j,y) \iff \exists k \geqslant i,j \quad f_i^k(x)=f_j^k(y)$. On note E_∞ l'ensemble quotient. Lorsque $I=\mathbb{N}$, on note $\displaystyle\varinjlim_{n\to+\infty} E_n$ cet ensemble.
On peut plonger $\varphi_i : E_i \to E_\infty$ en prenant $\varphi_i(x)=\overline{(i,x)}$.

Propriété. ***(Propriété universelle de la limite inductive)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système inductif d'ensembles. La limite inductive X, munie des flèches $(\varphi_i)_i$, si elle existe, vérifie les relations de compatibilité $\varphi_i=\varphi_j\circ f_i^j$ pour tous $i\leqslant j$ et pour tout autre ensemble $(Y,\psi_i)_i$ vérifiant les relations analogues, il existe une unique flèche $u : X\to Y$ telle que tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_i^j"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

commute.
La limite inductive est donc unique à isomorphisme près.

Remarque. On pourra vérifier en temps et en heure que cette construction existe également dans la catégorie des groupes, des anneaux, des modules, des corps, des espaces topologiques, et d'autres encore, au sens où le résultat conserve la structure des objets du système inductif.

Exemples. ***(Limites inductives)***

1. Si I possède un maximum ω, en particulier si I est fini non vide, alors la limite de tout système inductif sur I égale E_ω.
2. Dans le cas d'une suite d'ensembles (E_n) croissante, avec pour morphismes de transition les injections canoniques, la limite inductive s'identifie à la limite ensembliste qui est donc la réunion des E_n.
3. Si p est un nombre premier, on peut considérer le système d'ensembles $\mathbb{U}_{p^n}$ avec les injections canoniques, dont la limite inductive est le *groupe de Prüfer*, constitué de toutes les racines de l'unité dont l'ordre est une puissance de p.
4. De même, soit p un nombre premier. Alors la limite inductive des corps $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ est le corps $\overline{\mathbb{F}_p}$.

5. Si E est un espace topologique et $a \in E$, le *germe en a des fonctions de E dans $\mathbb{R}$* est la limite inductive des ensembles $\mathcal{C}(U,\mathbb{R})$ sur le système des voisinages U de a ordonnés par l'inclusion, qui est filtrant à gauche.

Définition. ***(Système projectif d'ensembles)***

Soient $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné quelconque. On appelle *système projectif* $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ *d'ensembles*, une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles et une famille doublement indexée d'applications $f_i^j : E_i \to E_j$ dits *morphismes de transitions* pour chaque couple d'indices $(i,j) \in I^2$, de sorte que $f_i^i = id_{E_i}$ pour tout $i \in I$, et pour tous $i,j,k \in I$ avec $i \leqslant j \leqslant k$, $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$.

Définition. ***(Limite projective d'ensembles)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système projectif d'ensembles. La *limite projective* de ce système est l'ensemble $\left\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \mid \forall i,j \in I \quad i \leqslant j \implies a_i = f_i^j(a_j)\right\}$. On note $\varprojlim E_i$ l'ensemble quotient. Lorsque $I = \mathbb{N}$, on note $\overleftarrow{\lim\limits_{n\to+\infty}} E_n$ cet ensemble.
On peut projeter $\pi_i : \varprojlim E_i \to E_i$ en considérant les projections canoniques d'un produit d'ensembles restreinte à $\varprojlim E_i$.

Propriété. ***(Propriété universelle de la limite projective)***

Soit $(E_i,f_i^j)_{(i,j)\in I^2}$ un système projective d'ensembles. La limite inductive X, munie des flèches $(\pi_i)_i$, si elle existe, vérifie les relations de compatibilité $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ pour tous $i \leqslant j$ et pour tout autre ensemble $(Y,\psi_i)_i$ vérifiant les relations analogues, il existe une unique flèche $u : X \to Y$ telle que tout diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
 & X \arrow[dl, "\pi_j"] \arrow[dr, "\pi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "f_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

commute.
La limite projective est donc unique à isomorphisme près.

Remarque. Même remarque que pour la limite inductive *(voir plus haut)*.

Exemples. ***(Limites projectives)***

1. Si l'ordre I est en fait l'égalité, en particulier si I n'est a priori pas ordonné, alors la limite de tout système projectif sur I égale son produit.
2. Dans le cas d'une suite d'ensembles (E_n) décroissante, avec pour morphismes de transition les surjections canoniques, la limite inductive est isomorphe à la limite ensembliste qui est donc l'intersection des E_n.

Fait. ***(Dualité inductif/projectif)***

La limite inductive est la limite projective de la catégorie duale.

3.4 Cardinalité

3.4.1 Théorème de Cantor-Bernstein

Théorème. ***(Théorème de Cantor-Bernstein)***

Soient A et B deux ensembles. S'il existe une injection de A dans B, et s'il existe une injection de B dans A, alors A et B sont en bijection. Autrement dit, la relation $\hookrightarrow$ est antisymétrique.

▷ Il existe un grand nombre de preuves du théorème de Cantor-Bernstein ; nous en donnons une constructive et qui ne fait pas recours à l'axiome du choix. Soient A et B deux ensembles, dont on suppose qu'il existe une application injective $f : A \longrightarrow B$, et d'autre part qu'il existe une application $g : B \longrightarrow A$ injective. Ce sont des applications, c'est-à-dire que tout élément de leur départ admet une image.

Remarquons que la corestriction $\tilde{g} : B \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \subseteq A$, qui à un élément de B fait correspondre son image par g, est toujours injective, et surjective par construction. C'est donc une bijection. Si l'on exhibe une bijection $h : A \longrightarrow \mathrm{Im}(g)$, c'est-à-dire un bijection de A sur son sous-ensemble $\mathrm{Im}(g)$ a priori strict, alors la fonction $h^{-1} \circ \tilde{g} : B \longrightarrow A$ est une bijection de B dans A et A et B sont en bijection.

Pour construire h, on introduit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de A en posant $A_0 = \complement_A \mathrm{Im}(g)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = g \circ f(A_n)$. De façon immédiate, on a, pour tout entier naturel n, $A_n = (g \circ f)^n(A_0)$. Démontrons d'abord que les A_n sont toutes deux à deux disjointes. Si i est un entier naturel non nul, alors $A_i = (g \circ f)^i(A_0) = g(f \circ (g \circ f)^{i-1})(A_0)$. Par suite, $A_i \subseteq \complement_A A_0$, ce qui signifie exactement que A_i et A_0 sont disjoints. Soit maintenant un entier naturel n. Par composition, $g \circ f$ est une injection, puis encore $(g \circ f)^n$ est injective. En composant l'intersection $A_0 \cap A_i = \emptyset$ par une injection, on obtient l'inclusion $(g \circ f)^n(A_0) \cap (g \circ f)^n(A_i) \subseteq g \circ f(\emptyset) = \emptyset$, l'image de l'ensemble vide par une application étant toujours vide. Ainsi $(g \circ f)^n(A_0) \cap (g \circ f)^n(A_i) = \emptyset$. Or $(g \circ f)^n(A_0) = A_n$ et $(g \circ f)^n(A_i) = A_{n+i}$, donc A_n est disjoint de A_{n+i} pour tous $n \geq 0, i > 0$. Par conséquent, les $A_n, n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints.

Cette construction permet d'écrire que : $g \circ f(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} g \circ f(A_n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. (Le caractère injectif n'intervient pas dans cette égalité.)

Définissons la fonction h par :

$$h \colon \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathrm{Im}(g) \\ a & \longmapsto & \begin{cases} g \circ f(a) \text{ si } a \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \\ a \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Vérifions que h est une application bijective.

⋆ Elle est bien définie partout sur son ensemble de définition.

⋆ Elle est aussi à valeurs dans $\mathrm{Im}(g)$, puisque par construction, $g \circ f$ envoie $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \mathrm{Im}(g)$, et que si $a \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, alors en particulier $a \notin A_0 = \complement_A \mathrm{Im}(g)$ donc $a = h(a) \in \mathrm{Im}(g)$.

⋆ L'injectivité provient de ce que d'abord $g \circ f$ est une injection. Par suite, $id_{|\complement_A \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n}$ et les $(g \circ f)_{|A_n}$ sont des injections, par restriction. De plus, ces injections sont à images disjointes d'après ce que nous avons montré précédemment, car les A_0,...,A_n,... sont deux à deux disjointes et toutes dans $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ qui est disjoint de $\complement_A \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

⋆ D'autre part, on a dit que $g \circ f$ envoie $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ sur $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, ce qui garantit la surjectivité. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(g)$, alors $y \notin A_0$, et l'on a :

1er cas. $y \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Alors la remarque précédente donne l'existence d'un antécédent dans $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \subseteq A$.

2nd cas. $y \notin \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n A_n$. Alors $y \notin \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$, donc $h(y) = y$ et l'antécédent y convient.

Ainsi h est une bijection, ce qui permet de conclure. ■

Exercice 10

1. Montrer que $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ est semi-convergente.
2. En admettant le théorème de Cantor-Bernstein, montrer que $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ a exactement la puissance du continu.

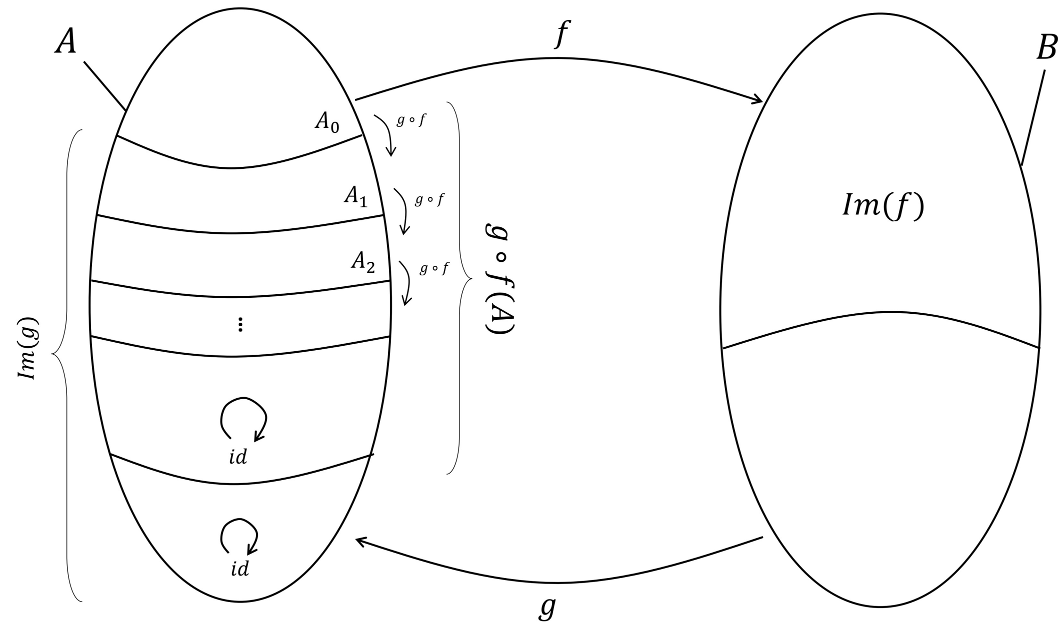


FIGURE 3.4.1 : *Illustration de la preuve du théorème de Cantor-Bernstein.* —

3.4.2 Arithmétique cardinale

Exercice 11

Montrer qu'un ensemble E non vide est infini ssi l'on a conjointement $E^E \simeq \mathcal{P}(E)$ et $\mathrm{card}(E) \neq 2$.

3.4.3 Dénombrabilité

On suppose connus les fondements sur les ensembles de la première année de classe préparatoire. Quelques références sûres pour ces notions sont données en bibliographie.

Exercice 12

1. Montrer que $\{0{,}1\}^{\mathbb{N}}$ est bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que tout intervalle non trivial est en bijection avec $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

Nous ne nous donnons pas en objet de former ici un cours complet sur les cardinaux dénombrables, mais seulement un complément de cours rudimentaire sur lequel les habitudes des classes préparatoires sont lacunaires : deux démonstrations non seulement au programme, mais dont les méthodes sont réutilisables. On rappelle d'abord une convention fluctuante.

Définition. ***(Dénombrabilité)***

Deux définitions coexistent pour la dénombrabilité :

- La convention faible : un ensemble est *dénombrable* par définition si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, ou, ce qui est équivalent, s'il s'injecte dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas, *infini dénombrable* signifie exactement « en bijection avec $\mathbb{N}$ ». Un ensemble dénombrable est donc soit fini (un ensemble est fini si et seulement s'il est en bijection avec un certain $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$) soit infini dénombrable.
- La convention forte : *dénombrable* signifie maintenant « en bijection avec $\mathbb{N}$ » et le terme *au plus dénombrable* couvre les ensembles finis ou dénombrables au sens fort. *Infini dénombrable* est alors un pléonasme. **C'est la convention du programme donc nous nous efforcerons de nous y soumettre.**

Dans les deux cas, on réserve le mot *indénombrable* pour les cardinaux plus grands que $\mathbb{N}$ (on dit qu'un cardinal A est plus grand que B si l'ensemble B s'injecte dans A).

Exercice 13

Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Remarque. Un ensemble est infini si et seulement s'il n'est pas fini. On dit qu'un ensemble est *infini au sens de Dedekind* s'il est équipotent à l'une de ses parties strictes, ou, ce qui est équivalent, s'il est plus grand que $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il contient une partie infinie dénombrable. Dans la théorie des ensembles classiques, tout ensemble infini au sens de Dedekind est infini. La réciproque n'est pas démontrable dans le système ZF où ne figure pas l'axiome du choix, mais dès lors qu'on l'y rajoute (ou du moins sa forme dite dénombrable), les deux notions sont équivalentes. Dans ce cas, un ensemble est infini si et seulement s'il en existe une suite d'éléments deux à deux distincts (c'est alors une injection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble), et $\mathbb{N}$ est le plus petit infini (*i.e.* $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini).

Exercice 14

Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini dans un ensemble infini est infini.

Exercice 15

1. *(Théorème de Cantor)* Soit E un ensemble. Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne peuvent être en bijection.
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini ?
3. Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble des parties d'aucun ensemble qui soit infini dénombrable.

Exercice 16

On admet le résultat de cours de la partie suivante.

1. Montrer qu'un ensemble E est infini au sens de Dedekind, ssi $\mathbb{N} \hookrightarrow E$ (que l'on formule : $\mathbb{N}$ s'injecte dans E, ou encore E contient une copie de $\mathbb{N}$).
2. Établir que cette condition est équivalente à ce qu'il existe une suite d'éléments de E deux à deux distincts.
3. Montrer que tout ensemble infini au sens de Dedekind est infini au sens classique.
4. L'axiome du choix dénombrable annonce que si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des ensembles non vides, il existe une suite x telle que pour tout n, $x_n \in E_n$. Montrer que modulo cet axiome, tout ensemble infini est infini au sens de Dedekind.
5. En déduire que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini.

3.4.3.1 Parties de $\mathbb{N}$

Le théorème suivant, explicitement au programme, permet de décrire le cardinal de toutes les parties de $\mathbb{N}$, dont on a vu qu'il était le premier infini : elles sont soient finies, soit automatiquement dénombrables dans la convention que nous avons fixé. On verra brièvement qu'une telle taxonomie n'est généralement plus possible entre les parties des cardinaux infinis.

Exercice 17

Montrer qu'une partie de $\mathbb{N}$ est infinie ssi elle est non majorée.

Propriété. ***(Axiome du bon ordre de $\mathbb{N}$)***

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un minimum.

▷ Tout dépend de ce que l'on pose comme axiome de $\mathbb{N}$. ■

Propriété. ***(Cardinal des parties de $\mathbb{N}$)***

Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable, autrement dit, toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie, soit infinie dénombrable, ou encore, tout partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

▷ On choisit cette dernière formulation. Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. On veut former une bijection de $\mathbb{N}$ sur A, c'est-à-dire une suite bijective. On la définit par récurrence de la manière suivante : on pose $u_0 = \min(A)$ et $u_0,\ldots,u_n$ étant déjà construits, on pose $u_{n+1} = \min\{x \in A \mid x > u_n\}$. Montrons que cette suite est bien définie, à valeurs dans A, injective et surjective.

⋆ La suite est bien définie, car u_n n'est pas un majorant de A : en effet, si c'était le cas, A serait majorée et une partie de $\mathbb{N}$ est finie ssi elle est majorée. Ainsi $\{x \in A \mid x > u_n\}$ est une partie non vide de A, partie de $\mathbb{N}$, donc par axiome, elle admet un plus petit élément. Remarquons que par construction $u_{n+1} > u_n \qquad (*)$.

- ⋆ Le minimum d'une partie lui appartient, donc u_n appartient à la partie de A définie ci-dessus donc à A. De même u_0 est dans A, donc la suite est bien définie en image également.
- ⋆ D'après la remarque $(*)$, u est strictement croissante donc en particulier injective.
- ⋆ Il reste à montrer que u est surjective. Soit $a \in A$. On considère $A_0 = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Par injectivité, cette partie de $\mathbb{N}$ est infinie donc non majorée, en particulier non majroée par a. L'ensemble A_1 des majorants de A_0 est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc par axiome un plus petit élément que nous noterons $a_n = \min(A_1)$. Alors par définition du minimum, $a_n > a$ et $a_{n-1} \leqslant a$. Supposons un instant que cette dernière inégalité soit stricte. Alors par construction, $a_n = \min\{x \in A \mid x > a_{n-1}\}$ et par cette dernière hypothèse, $a_n \leqslant a$ par définition du minimum et $a \in A$ appartenant à ce dernier ensemble. C'est absurde avec $a_n > a$, donc il y a égalité : $a = a_{n-1}$ ce qui donne un antécédent par la suite a : $n-1$.

Ceci conclut la démonstration. ■

Remarques.

1. Cette méthode est exactement la même que celle qui permet de montrer ce résultat souvent passé sous silence : étant donnés $x_1, ..., x_n$ n réels deux à deux distincts, il existe une unique permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}$ les ordonne dans l'ordre croissant.
2. Des arguments semblables permettent de montrer ce que nous appelons personnellement *lemme de recouvrement croissant*[1] : étant donné I un ensemble et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ($\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n \supseteq I$) de parties de I (il y a donc égalité dans le recouvrement) croissant ($J_n \subseteq J_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), la suite des couronnes définie par $I_0 = J_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = J_n \setminus J_{n-1}$ forme une partition à parties éventuellement vides (*i.e.* un partage) de I.

Exercice 18

1. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$?

Exemple fondamental. ***(Suite des nombres premiers)***

L'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P}$ est infini : en effet, si $p_1, ..., p_n$ sont les seuls nombres premiers, alors $n = p_1...p_n + 1$ est encore premier, mais distinct de tous les autres... Puisque $\mathcal{P}$ est une partie de $\mathbb{N}$, elle est infinie dénombrable et l'on peut, d'après la preuve précédente, former la suite croissante des nombres premiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut par exemple montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge, et que plus généralement $\sum \frac{1}{p_n^\alpha}$ a le même critère de convergence

[1] Ceci est utilisé dans le cadre du programme comme lemme des théorèmes de limite monotone en probabilités discrètes. Il sert aussi à démontrer un corollaire du théorème de sommation par paquets, que l'on utilise notamment dans une preuve par récurrence de l'identité d'Euler.

que celui de Riemann.

Exercice 19

Soit (u_n) une suite réelle et A une partie de $\mathbb{N}$. À quelle condition la quantité $\sum_{n\in A} u_n$ est-elle définie ?

Les cardinaux

Le cardinal est la notion intuitive de nombre d'éléments, et notamment dans le cas des ensembles finis où la notion est plus élémentaire. Cependant, dans le cas des ensembles finis, elle mène à de nombreux paradoxes et notamment à celui donnant que des ensembles peuvent avoir exactement le même nombre d'éléments (et donc, le même cardinal) que leurs parties strictes : par exemple, l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers naturels pairs, propriété qui vient d'après ce que l'on a dit précédemment caractériser justement les ensembles infinis.

On dit que deux ensembles ont le même cardinal s'ils sont en bijection. Ceci définit une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles (qui n'est pas un ensemble !) dont les classes ont pour représentants des ensembles typiques, qui sont habituellement : $\emptyset$, les $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, etc. Et encore, tous les cardinaux ne sont pas représentés par cette suite, strictement croissante pour l'ordre cardinal.

C'est Gottlob Frege et Georg Cantor qui définissent ces notions, posant les fondements de la théorie des ensembles à partir des années 1880, que ce dernier décrit comme l'étude de l'infini. Celle-ci est profondément liée à la logique théorique, deux branches mathématiques tout à fait co-dépendantes.

3.4.3.2 Réunion dénombrable de dénombrables

Lorsqu'on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable (voir ci-après), il est facile d'établir qu'une réunion finie d'ensembles finis est dénombrable. En effet, si les $A_1, ..., A_k$ sont des ensembles, leur réunion s'injecte trivialement dans $\prod_{i=1} kA_i$. La question se pose différemment dans le cas d'une réunion au plus dénombrable. Dans la suite, on utilisera le fait dû à l'axiome du choix qu'un ensemble *non vide* s'injecte dans un autre si et seulement s'il existe une surjection en sens inverse.

Exercice 20 *(Grille de Cantor)*

Montrer que $(p,q) \longmapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, sans nécessairement expliciter la bijection réciproque.

Théorème. ***(Dénombrabilité des réunions dénombrables de dénombrables)***

Si I est au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables, alors leur réunion est encore au plus dénombrable. Le théorème est encore vrai en remplaçant par *dénombrable* à chaque occurrence de *au plus dénombrable*.

$\triangleright$ On a vu le cas I fini ; ne considérons plus que I infini dénombrable. On peut donc prendre $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles tous au plus dénombrables. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une surjection $f_n : N \twoheadrightarrow A_n$. Considérons l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ qui à un couple (n,k) fait correspondre $f_n(k)$: l'existence d'une telle fonction est garantie par l'**axiome du choix**. Cette application est une surjection par définition de la réunion puis surjectivité des f_n : pour tout $x \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, il existe k tel que $x \in A_k$ puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = f_n(k)$. Or $\mathbb{N}^2$ est au plus dénombrable *(voir ci-après)*, donc $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ (son cardinal est plus petit que $\mathbb{N}$). Enfin, dans le cas de la dénombrabilité forte, il suffit de remarquer que A_0 s'injecte dans $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ pour avoir l'*infinie* dénombrabilité. $\blacksquare$

Remarque. La dernière phrase est inutile si l'on convient de la dénombrabilité faible, comme expliqué ci-haut, ce qui lui donne tout son intérêt. Mais en pratique, il est trivial de vérifier qu'une opération sur ensembles infinis est infinie.

Exercice 21

1. Un nombre réel est *algébrique*, s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. Partitionner intelligemment $\mathbb{Q}[X]$ pour trouver le cardinal de l'ensemble des nombres algébriques.
2. *(Théorème de Liouville)* En déduire qu'il existe au moins un réel transcendant, c'est-à-dire non algébrique.

Il ne faut pas confondre ce dernier résultat théorématique avec celui sur les produits cartésiens, qui présente une dissymétrie. En effet, un produit cartésien fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, mais c'est faux pour un produit cartésien infini, même dénombrable : on a vu que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ était indénombrable dans le premier exercice.

Justifions cette première affirmation. Soit k un entier naturel (non nul, le produit cartésien vide étant vide), et $p_1,\ldots,p_k$ k nombres premiers. Alors l'application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ qui à $(n_1,\ldots,n_k)$ fait correspondre $p_1^{n_1} \times \ldots \times p_k^{n_k}$ est injective d'après le théorème fondamental de d'Alembert, ce qui donne la dénombrabilité de $\mathbb{N}^k$, et à une bijection près celle d'un produit cartésien fini d'au plus dénombrables (une manière beaucoup plus rapide que celle de la grille de Cantor).

Exercice 22

Montrer que $\mathbb{R}^n$, en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, est de dimension infinie. *Une base de* $\mathbb{R}$ *vu comme un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel est appelée base de Hamel.*

Un ensemble a la puissance du continu, par définition, s'il est en bijection avec $\mathbb{R}$, qui est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. La fameuse *hypothèse du continu*, dont il a été démontré (Kurt Gödel en 1938 puis Paul Cohen en 1963 avec sa célèbre méthode du *forcing*) qu'elle était indécidable, à savoir démontrable et de négation démontrable, dans le cadre usuel de la théorie des ensembles, stipule qu'il n'existe pas de cardinal strictement compris entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, autrement dit, que toute partie de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable ou a la puissance du continu. Cette affirmation rompt la continuité du théorème sur les parties de $\mathbb{N}$ établi à la partie précédente à laquelle on pouvait s'attendre.

Propriété. ***(Réunions dénombrables de puissances du continu)*** **HP**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles ayant la puissance du continu, alors leur réunion est encore dénombrable.

▷ À faire en exercice, de façon tout à fait similaire à la démonstration précédente. ■

Si l'on s'aperçoit que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents[1] (*i.e.* en bijection), on peut démontrer qu'une réunion de puissances de continu sur un ensemble ayant la puissance de continu a la puissance du continu. Plus généralement, si l'on sait montrer que tout ensemble infini est équipotent à son carré, ce qui n'est pas évident, mais vrai, alors on peut démontrer pareillement que si $(A_i)_{i\in E}$ est une famille dont tous les éléments sont de cardinal E, leur réunion a pour cardinal E au plus.

[1] Montrons ce résultat à l'aide du théorème de Cantor-Bernstein, théorème dont la preuve, quoique difficile, permet d'établir que si deux ensembles s'injectent l'un dans l'autre réciproquement, ils sont en bijection. $\mathbb{R}$ s'injecte dans $\mathbb{R}^2$ par l'application canonique $x \longmapsto (x,0)$. Réciproquement, exhibons une injection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour ça, il suffit d'exhiber une bijection de $[0,1[^2$ dans $[0,1[$, puisque comme c'est un intervalle non trivial, $[0,1[$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. Posons l'application qui à deux éléments de $[0,1[$ associe l'entrelacement des décimales de leurs développements illimités propres, définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} [0,1[^2 & \longrightarrow & [0,1[\\ (0,a_1a_2a_3...;0,b_1b_2b_3...) & \longmapsto & 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3.... \end{array}$$

Cette fonction est bien définie d'après l'existence et l'unicité du développement illimité propre d'un réel, c'est-à-dire qu'on ne peut choisir qu'une unique suite de décimales non stationnaire à 9 qui représente un réel donné. Montrons son injectivité. Soient $(0,a_1a_2a_3...;0,b_1b_2b_3...)$, $(0,a'_1a'_2a'_3...;0,b'_1b'_2b'_3...) \in [0,1[$, les représentations ici étant des développements illimités propres. Supposons que $\varphi(0,a_1a_2a_3...;0,b_1b_2b_3...) = \varphi(0,a'_1a'_2a'_3...;0,b'_1b'_2b'_3...)$, c'est-à-dire $0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3... = 0,a'_1b'_1a'_2b'_2a'_3b'_3...$, alors ces écritures ne sont pas des développements impropres. En effet, si $a_1b_1a_2b_2a_3b_3$ est stationnaire à 9, alors à partir d'un certain rang N, $(a_n,b_n) = (9,9)$ pour tous $n \geqslant N$. En particulier, (a_n) est stationnaire à 9, ce qui est exclu. De même pour l'écriture de droite. Or il y a unicité du développement décimal propre, ce qui impose : $a_1 = a'_1$ sur la première décimale, puis $b_1 = b'_1$, puis $a_2 = a'_2$, etc., de sorte que $0,a_1a_2a_3... = 0,a'_1a'_2a'_3...$ d'une part et $0,b_1b_2b_3... = 0,b'_1b'_2b'_3...$ d'autre part, ce qui montre l'injectivité de φ.

Exercice 23

En informatique théorique, on considère des *alphabets* finis, c'est-à-dire ensembles finis, prenons-en un $\mathscr{A}$, dont les éléments sont appelés *lettres*. Un *mot fini* sur $\mathcal{A}$ est un n-uplet d'éléments de $\mathscr{A}$. L'ensemble des *langages* sur $\mathscr{A}$ est défini comme $\mathcal{P}(\mathscr{A}^*)$. On dit qu'un langage $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{A}^*$ est *reconnu par un algorithme* s'il existe un programme informatique ayant pour entrées les $u \in \mathscr{A}^*$ et qui calcule la fonction caractéristique de $\mathcal{L}$. Montrer qu'il existe des langages indécidables, c'est-à-dire qui ne sont pas reconnus par des algorithmes.

3.5 Quotients d'ensemble : ensembles sans structure donnée (préambule aux quotients de groupe)

Ces notions sont complètement hors programme. Toutefois, elles permettent de s'éclaircir grandement les idées sur certaines notions en théorie des groupes mais également en algèbre linéaire comme nous l'allons voir. De plus, elle permet de clore la théorie élémentaire des opérations ensemblistes : la somme (réunion), la différence (différence ensembliste, différence symétrique), le produit (cartésien ou intersection), sont complétés par le quotient, qu'il faut introduire au moyen d'un objet à première vue retors : la relation d'équivalence.

Ne nous leurrons pas pourtant : lorsqu'il s'agit d'ensembles simplement, il n'y a pas de notion de quotient de deux ensembles, mais seulement d'*ensemble quotient par une relation d'équivalence*. On ne pourra définir la notion de quotient d'ensembles par l'une de ses parties, et encore il les faudra structurées (sous-groupe pour un groupe, sous-espace vectoriel, etc., ce qui correspondra à la notion de diviseur) que dans de telles structures.
On rappelle un résultat de mathématiques supérieures dans sa totalité.

Théorème. ***(Théorème fondamental des relations d'équivalence)***

Soit E un ensemble. L'application $\mathcal{R} \longmapsto \{\overline{x}_{\mathcal{R}} \mid x \in E\}$ est une bijection de l'ensemble des relations d'équivalence sur E dans l'ensemble des partitions de E.

▷ Il s'agit démontrer d'abord que cette application est bien définie, c'est-à-dire que les classes d'une relation d'équivalence partitionnent l'ensemble sur lequel elle est définie, ce qui est un résultat de sup (le refaire !). On vérifie facilement qu'à toute partition de E, on peut faire correspondre une relation d'équivalence définie par l'appartenance de deux éléments à la même partie de la partition. Ces deux applications sont alors bijections réciproques. ■

Exercice 24

Le n-ième nombre de Bell, noté B_n, est le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments.

1. *(Relation d'Aitken)* Montrer que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.
2. *(Formule de Dobinski)* En déduire que $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ le n-ième moment de la Poisson de moyenne $\lambda = 1$.
3. *(Congruence de Touchard)* Montrer que si p est premier, alors $B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \ [p]$.

Exemple. ***(Relation « avoir le même signe »)***

Si l'on partitionne $\mathbb{R}^*$ en ses deux composantes connexes, on obtient la relation « avoir le même signe ». Remarquer que c'est la relation engendrée par la partition donnée par les fibres de la fonction signe σ, une fibre par une fonction f n'étant autre que l'image réciproque d'un point.

Propriété

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors pour tous $x,y \in E$, $x\mathcal{R}y \iff \overline{x} = \overline{y}$.

▷ En exercice. ■

Définition. ***(Ensemble quotient par une relation d'équivalence)***

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors on note $E/\mathcal{R}$ l'*ensemble quotient par* $\mathcal{R}$ défini par $E/\mathcal{R} = \{\overline{x}_{\mathcal{R}} \mid x \in E\}$.

⟶ *Convention.* On aurait aussi pu définir, de manière équivalente, l'ensemble quotient par un système de représentants de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un élément de la classe de x et un seul dans l'ensemble quotient pour tout x de E. Cependant, nous fixons la construction de la preuve précédente.

Fixons maintenant E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On se permet de la noter $\sim$. Pour rappel, on peut noter indifféremment $\overline{x}_{\mathcal{R}} = \overline{x}_{\sim} = \overline{x} = cl(x)$ quand il n'y a pas d'ambiguïté la classe d'équivalence de l'élément $x \in E$.

Définition-propriété. ***(Projection canonique)***

L'application $\pi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ qui à x fait correspondre la classe de x par $\mathcal{R}$, notée $\overline{x}_{\mathcal{R}}$, est une surjection appelée *projection canonique.*

▷ La surjectivité vient de la réflexivité de $\mathcal{R}$. ■

Propriété

Pour tout $a \in E/\mathcal{R}$, $\pi^{-1}(a) = cl(x)$ où x est un antécédent de a par π (il en existe au moins un d'après la proposition précédente).

▷ Évident. ■

A priori, bien sûr, l'ensemble et l'ensemble des classes d'équivalence par $\mathcal{R}$ n'ont pas le même cardinal.

Exercice 25

Montrer que la projection canonique est une bijection ssi $\mathcal{R}$ égale la relation d'égalité sur E, notée $=_E$.

▷ **Éléments de réponse.**

Elle est bijective si et seulement si elle est injective.

Heuristique

L'introduction de la notion d'ensemble quotient débrouille la perplexité initiale devant l'idée d'appeler quotient un ensemble formée des classes d'une relation : la surjectivité permet tout d'abord d'avoir que, dans tous les cas, même en milieu infini, $\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E/\mathcal{R})$, ce qui permet d'assimiler $\mathcal{R}$ à, par exemple, un nombre supérieur à 1, dans le cas E non vide, par l'artifice frauduleux ci-dessous :

$$\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E/\mathcal{R}) = \frac{\mathrm{card}(E)}{\mathrm{card}(\mathcal{R})} \text{ donc } \mathrm{card}(\mathcal{R})\mathrm{card}(E) \geqslant \mathrm{card}(E) \text{ donc } \mathrm{card}(\mathcal{R}) \geqslant 1,$$

nombre qui diviserait E en autant parties disjointes. L'important dans la suite sera double : d'une part que la structure quotientée soit préservée (ce qui sera à peu près toujours le cas, et constituera à chaque section la première partie sur la compatibilité de la structure avec la relation d'équivalence : sous-groupe distingué, linéarité de la projection, continuité en topologie...), d'autre part, l'établissement de théorèmes de factorisation et d'isomorphisme à propos des morphismes partant de structures quotientées dont on verra que, par cet effet, ils sont, sous certaines hypothèses, « simplifiables » en applications quotients.

Exercice 26

Une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ permet de définir l'argument principal d'un complexe : quel est le cardinal de l'ensemble quotient par elle ?

Les théorèmes sur les ensembles quotients sont très bien résumés par les diagrammes. Nous introduisons d'ores et déjà celui qui sert de base à tous les autres avec les propriétés précédentes.

On rappelle que parmi les applications qui sont des flèches $\longrightarrow$, les injections sont notées $\hookrightarrow$, les surjections sont notées $\twoheadrightarrow$, et les bijections sont notées $\simeq$ ou comme la conjonction d'une injection et d'une surjection.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, two heads, "\pi"'] \\ E/\mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Exercice 27

Pour se débarbouiller l'esprit sur le raisonnement par analyse-synthèse, montrer que :

1. Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Toute matrice à coefficients dans un corps de caractéristique différente de 2 ($2 \neq 0$) se décompose de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. Pour toute base $(e_1,\ldots,e_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie, il existe une unique base de son dual, base duale, notée $(e_i^*)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telle que pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$.

Théorème. ***(Théorème de factorisation pour les applications)***

Soit F un ensemble quelconque et f une application de E dans F. Alors f est compatible avec $\mathcal{R}$ (*i.e.* $\forall x,y \in E \quad x \sim y \implies f(x) = f(y)$) si et seulement s'il existe une unique application $\tilde{f}$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$ (se qui se réécrit $f(x) = \tilde{f}(\overline{x})$ pour tout $x \in E$). Dans ce cas de compatibilité, on dit qu'on *passe au quotient* dans l'application f.

▷ La preuve est très facile si l'on se focalise sur le choix des bons arguments.

▶ Dans le sens direct, on suppose que f est compatible avec la relation $\mathcal{R}$. On montre l'unicité et l'existence de $\tilde{f}$ par analyse-synthèse. Supposons que pour tout $x \in E$, puisque par définition $\pi(x) = \overline{x}$, $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$: ceci définit de manière explicite et donc unique l'application $\tilde{f}$, ce qui termine l'analyse. Le point crucial est que **cette écriture a un sens**, vu que $f(x)$ ne dépend pas du représentant choisi de $\overline{x}$ *ce qui est exactement ce que signifie la condition de compatibilité*. Pour la synthèse, c'est encore plus immédiat : pour tout $x \in E$, $\overline{x} = \pi(x)$ donc $\tilde{f}(\overline{x}) = \tilde{f} \circ \pi(x)$. Mais l'hypothèse de synthèse définit ce que l'analyse conclut, soit $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$, d'où $f(x) = \tilde{f} \circ \pi(x)$ ce qui signifie par définition de l'égalité des fonctions que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

▶ Réciproquement, si l'on suppose que f se factorise en $\tilde{f} \circ \pi$ (de façon unique, mais on ne s'en sert pas), soient $x \sim y$ deux éléments de E. Alors $\pi(x) = \pi(y)$ par définition de π. Ainsi $\tilde{f} \circ \pi(x) = \tilde{f} \circ \pi(y)$ puisque $\tilde{f}$ est une application, et par hypothèse ces deux quantités égalent $f(x) = f(y)$, et donc f est compatible avec $\mathcal{R}$.

Ainsi f est compatible si et seulement elle se factorise, ce qu'il fallait démontrer. ■

La situation se présente comme suit :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Le théorème de factorisation établit donc la commutation de ce diagramme.

Exemple fondamental. ***(Anneaux quotients)***

Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau et

$$f\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ k & \longmapsto & k.1_{\mathbb{A}} \end{array}$$

(l'unique) morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ est fini, $\mathrm{Ker}(f)$ étant un idéal de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $p\mathbb{Z}$ où p est pris minimal, $p \neq 0$ puisque f ne peut être injective par cardinalité. Dans ce cas, f est compatible avec la relation de congruence modulo p sur les entiers, et l'on peut définir

$$\tilde{f}\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ \overline{k} & \longmapsto & k.1_{A}. \end{array}$$

Il faut remarquer que c'est bien la compatibilité et elle seule (équivalence dans le théorème de factorisation) qui permet de définir ce nouveau morphisme, même il faut vérifier indépendamment que l'application est un morphisme : ce n'est pas dur mais ce sera systématique dans la partie suivante. Si $\mathbb{A}$ est intègre, et l'on peut montrer qu'un anneau fini est intègre ssi c'est un corps, alors on vérifie que p est premier. Dans ce cas, $\tilde{f}$ est injectif car c'est un morphisme de corps, ce qui nous donne notamment que tout corps fini de cardinal premier p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que tout corps fini a pour cardinal p^d où d est un certain entier : la dimension sur $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ de $\mathbb{K}$ vu comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

Exercice 28

Fournir un exemple où une application ne passe pas au quotient par une relation d'équivalence donnée.

Méthode. ***(Recette pour passer au quotient dans les applications)***

J'ai une application φ d'un ensemble quotient Q dans F un ensemble quelconque.

1. J'identifie la relation d'équivalence qui quotiente : $Q = E/\mathcal{R}$ et E l'ensemble initial.
2. Je vérifie que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence pour justifier mon propos.
3. Je pose une application f de E dans F définie sans aucun problème et qui devra, une fois passée au quotient, retomber sur φ.
4. Je montre que pour tous éléments x,y de E, si $x\mathcal{R}y$, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont égaux.
5. Je peux maintenant définir une application $\varphi = \tilde{f} : Q \longrightarrow F$ sans trouble, telle que pour tout $\overline{x} \in Q$, $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$, et j'insiste bien sur ce que cette construction n'est possible que grâce à la compatibilité vérifiée précédemment.

Si je veux une propriété d'injectivité, de surjectivité, voire de bijectivité pour mon application, je me réfère au résultat de l'exercice suivant.

Un corollaire d'intérêt principalement formel.

Théorème. ***(Théorème de factorisation carré pour les applications)***

Soit F un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{S}$ que l'on se permet de noter $\equiv$, ses classes $\hat{\ }$ et f une application de E dans F. Alors f est compatible avec $\mathcal{R}$ modulo $\mathcal{S}$ ($i.e.$ $\forall x,y \in E \quad x \sim y \implies f(x) \equiv f(y)$) si et seulement s'il existe une unique application $\tilde{f}$ telle que $\chi \circ f = \tilde{f} \circ \pi$ (se qui se réécrit $f\hat{(x)} = \tilde{f}(\overline{x})$ pour tout $x \in E$). Dans le cas de compatibilité, on dit encore qu'on passe au quotient dans f.

▷ On applique le théorème de factorisation à l'application $\chi \circ f$, l'ensemble F étant maintenant $F/\mathcal{S}$. Il suffit de vérifier alors que la compatibilité de $\chi \circ f$ avec $\mathcal{R}$ est équivalente à la compatibilité de f avec $\mathcal{R}$ modulo $\mathcal{S}$, ce qui est immédiat par définition de cette dernière notion. ■

Le diagramme correspondant est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[d, "\chi"] \\
E/\mathcal{R} \arrow[r, "\tilde{f}"'] & F/\mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

Exercice 29

Dans chacun des deux théorèmes précédents, montrer que :

1. $\tilde{f}$ est injective ssi $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$ (respectivement $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) \equiv f(y)$) ;
2. $\tilde{f}$ est surjective ssi f est surjective ;
3. $\tilde{f}$ est bijective ssi f est surjective et $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) = f(y)$ (respectivement f est surjective et $\forall x,y \in E \quad x \sim y \iff f(x) \equiv f(y)$).

Méthode. ***(Recette pour passer au quotient dans les applications entre deux espaces quotients)***

C'est exactement la même que précédemment : **la structure quotient de l'espace d'arrivée n'intervient pas**. Pour une illustration, voir dans la section suivante sur les magmas.

Méthode. ***(Recette pour passer au quotient dans un carré, amélioration)***

Parfois, on dispose de deux ensembles $E/\mathcal{R}$ et $F/\mathcal{S}$ quotients par des relations d'équivalence et l'application $f : E/\mathcal{R} \to F$ **ne peut être définie**. Il faut alors montrer :

$$x\mathcal{R}x' \implies f(x)\mathcal{S}f(x')$$

qui permet de définir une application directement entre $E/\mathcal{R}$ et $F/\mathcal{S}$.

Exercice 30 *(Difficile)*

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{P}^n$ le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ où ici $0 \in \mathbb{R}^n$ par la relation : pour $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \lambda y$. Montrer que pour naturels n,m, l'application : $\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+m-1} \\ (x_0,y_0),(x_1,y_1) & \longmapsto & (x_0y_0,x_1y_0,x_0y_1,x_1y_1) \end{array}$ (*plongement de Segre*) est bien définie. (En GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE, il permet de justifier que le produit de deux variétés projectives est encore une variété projective.)

On examine enfin un cas particulier important, celle de la relation $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ qui est définie sur tout ensemble étant donné une application f partant de cet ensemble, dont les classes sont parfois appelées *fibres*. Le théorème de factorisation appliqué à f donne un résultat intéressant.

Théorème. ***(Théorème d'isomorphisme ensembliste, théorème de bijection quotient)***

Soit f une application de E dans F deux ensembles quelconques. On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E définie par $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Dans ce cas, f est compatible avec $\mathcal{R}$ et l'application quotient de f par cette relation réalise une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(f)$.

$\triangleright$ Encore une fois, le théorème ne consiste qu'en des astuces de langage. Procédons par étapes claires et distinctes pour rasséréner les esprits malades. D'abord, on vérifie aisément que la relation des fibres $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence : la réflexivité est tautologique, la transitivité vient de ce que deux choses égales à un même sont égales, et la symétrie de celle de la relation d'égalité même. Dans ce cas, $E/\mathcal{R} = \{f^{-1}(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$.

Pour pouvoir avoir seulement l'audace de rêver du théorème de factorisation, il nous faut vérifier la compatibilité de f avec $\mathcal{R}$. Nous laissons aux cerveaux fatigués le soin de découvrir par eux-mêmes, pourquoi c'est évident. La relation d'équivalence des fibres est également la relation d'équivalence associée à l'application f, définissable sur tout ensemble dont elle part par « avoir la même image par f ». Cette compatibilité exprime que cette relation est moins fine que la relation définie dans le théorème.

La remarque du paragraphe surprécédent donne en particulier, ayant introduit l'application quotient $\tilde{f}$ par $\mathcal{R}$, que $\boxed{\tilde{f}[f^{-1}(y)] = y}$. En effet

Soient deux éléments de $E/\mathcal{R}$; d'après l'expression de l'ensemble quotient ci-dessus, il existe $y,y' \in \mathrm{Im}(f)$ tels que ces éléments s'écrivent $f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y')$. Si $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = \tilde{f}(f^{-1}(y'))$, alors d'après ce qui précède $y = y'$ (c'est tout simplement une réécriture des deux termes), d'où $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$, et donc $\tilde{f}$ est injective.

De surcroît, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\tilde{f})$. En effet, $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \{\tilde{f}(f^{-1}(y)) \mid f^{-1}(y) \in E/\mathcal{R}\} = \{\tilde{f}(f^{-1}(y)) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$ d'après l'égalité encadrée et encore d'après l'égalité encadrée ceci égale $\{y \mid y \in \mathrm{Im}(f)\} = \mathrm{Im}(f)$.

Ainsi $\tilde{f}$ est une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(\tilde{f}) = \mathrm{Im}(f)$, ce qui termine la démonstration. ■

Ceci constitue un résultat théorique : l'utilité de la relation d'équivalence associée à f est factice ; il permet seulement d'établir que l'image d'une application est isomorphe, au sens ensembliste (c'est-à-dire en bijection) avec l'espace des fibres par f, ce qui se récrit : $\mathrm{Im}(f) \simeq \{f^{-1}(y) \mid y \in \mathrm{Im}(f)\}$. Remarquons qu'on aurait pu l'établir plus élémentairement.

Exercice 31

1. Démontrer que, pour dénombrer son troupeau, un berger peut se « contenter » de compter les pattes puis diviser par quatre.
2. *(Lemme des bergers)* Soit f une surjection de A dans B deux ensembles finis, telle que pour tout y dans B, y ait exactement k antécédents par f. Montrer qu'alors $\mathrm{card}(E) = k.\mathrm{card}(F)$ et retrouver ce qui précède[a].
3. Que dire si f n'est plus surjective ?

[a] *O fortunatos nimium, sua si bona norint, agricolas...*

A picture is worth a thousand words.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathrm{Im}(f) \\ E/\mathcal{R} \arrow[ur, hook, two heads, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

À ce stade, nous recommandons très chaudement d'étudier la notion algébrique de quotient dans l'ordre suivant :

- sous-groupes distingués et groupes quotients,
- anneaux quotients,
- espaces vectoriels quotients et co-dimension,
- topologie quotient.

L'étude des structures quotients est un tout : il est très envisageable de ne s'intéresser à ce concept qu'à partir de la troisième année universitaire, mais dans ce cas, mieux vaut enchaîner les cinq chapitres cités ci-haut (y compris le préambule à propos des ensembles quotients).

On dispose d'une vue d'ensemble des structures quotients (ainsi que du parallélisme de construction) grâce au **tableau récapitulatif** de la figure 3.1.

Catégorie	Quotient par...	Théorème de factorisation	Théorème d'isomorphisme
Ensembles	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$	f est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists ! \tilde{f} \quad f = \tilde{f} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} f$ (par $\tilde{f}$)
Magmas	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$ avec laquelle la loi de magma est compatible	φ morph. est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists ! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} \varphi$ (par $\tilde{\varphi}$)
Monoïdes, groupes (naïvement)	Idem	Idem	Idem
Groupes	Sous-groupe distingué H	$H \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists ! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$G/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} \varphi$
Anneaux	Idéal I	$I \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists ! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$A/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} \varphi$
Espaces vectoriels	Sous-espace vectoriel V	$V \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ ssi $\exists ! \tilde{\varphi}$ morph. $\quad \varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$	$E/\operatorname{Ker}(f) \simeq \operatorname{Im} \varphi$
Espaces topologiques	Relation d'équivalence $\mathcal{R}$, quotient muni de la topologie quotient	f C^0 est compatible avec $\mathcal{R}$ ssi $\exists ! \tilde{f}$ C^0 $\quad f = \tilde{f} \circ \pi$	Pour $\mathcal{R} : x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, $E/\mathcal{R} \simeq \operatorname{Im} f$ (par $\tilde{f}$)

TABLE 3.1 : *Tableau récapitulatif des phénomènes de factorisation et d'isomorphisme dans les structures quotients selon les catégories. —*
Il est très beau.

Signalons avant de partir le fait suivant, qui se transpose aux autres catégories :

Fait. ***(Universalité des projections)***

Soient X,Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ surjective. Alors il existe une relation d'équivalence R sur X, compatible avec f, telle que $Y \simeq X/R$.

Conséquence essentielle du théorème d'isomorphisme. En fait, il suffit de prendre $xRy \iff f(x) = f(y)$.

Chapitre 4

Théorie de la logique

Résumé

On expose la théorie de la logique formalisée telle que présentée classiquement en maîtrise de mathématiques pures.

4.1 Logique du premier ordre

Chapitre 5

Théorie des catégories

Résumé

Les catégories sont à première vue la version plus-plus des ensembles. S'il est assez faux de dire que la théorie des catégories trivialise des résultats mathématiques, il est très vrai de constater qu'elle uniformise un certain nombre de concepts d'apparence transverses, et c'est par là d'ailleurs que sourdent les premiers résultats substantiels. En conséquence, on s'attache à décrire dans un premier temps le vocabulaire, avec force exemple, pour que le lecteur se familiarise avec ; il reste difficile de n'être pas rebuté par l'aridité des premiers théorèmes (caractérisation des équivalences, lemme de Yoneda)... Courage !

5.1 Exposé : premières définitions sur les catégories

5.1.1 Introduction

Objectifs et produits de la théorie des catégories

Le but de S. Eilenberg et S. MacLane, in *General theory of natural equivalences*, 1945, est de formaliser la notion vague de *naturalité* d'un morphisme.

Par exemple, si V est un espace vectoriel de dimension finie, on a un morphisme « naturel » $V \longrightarrow V^{**}$ donné par $x \mapsto (\mathrm{ev}_x : l \mapsto l(x))$, par opposition à des isomorphismes $V \simeq V^*$ qui dépendent d'un choix de base dans V.

De façon surprenante, le formalisme d'Eilenberg-MacLane s'est avéré efficace pour :

1) unifier des concepts mathématiques ;
2) établir de nouveaux liens entre sujets mathématiques différents ;
3) poser les bonnes questions.

Ce formalisme est maintenant utilisé en topologie, algèbre (commutative et non commutative), géométrie algébrique, théorie des représentations, informatique théorique, etc.

5.1.2 Définitions

La théorie des catégories prolonge celle des ensembles et doit se placer dans le cadre axiomatique (semblable) de la théorie des classes.

Définition. ***(Catégorie)***

La *catégorie* est l'élément de base de la théorie des catégories. On est en présence d'une catégorie $\mathcal{C}$, si l'on a :

- une collection d'*objets*, représentée par une classe, propre ou impropre, parfois identifiée[a] à $\mathcal{C}$;
- la collection des *flèches* ou *morphismes* entre ces objets, ou plus précisément, pour tous A,B objets de $\mathcal{C}$, une collection de morphismes de A vers B ;
- l'association, à toute flèche f de A dans B, de son *départ* ou *domaine* A et de son *arrivée* ou *co-domaine* B ;
- une loi de composition interne entre les flèches, appelée *composition*, définie dès que le co-domaine de celle de droite correspond au domaine de celle de gauche ;
- l'associativité de la composition, avec la définition habituelle ;
- un élément neutre pour la composition pour chaque objet A de la catégorie $\mathcal{C}$, noté id_A appelé *(morphisme/flèche) identité*.

[a] Formellement, dans les notations, mais jamais conceptuellement : les flèches ont un intérêt bien supérieur à celui des objets dans une catégorie, voir plus bas.

Remarques.

1. On note parfois $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ou $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ la classe des objets de $\mathcal{C}$ et l'on note $X \in \mathcal{C}$ au lieu de $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ pour « X est un objet de $\mathcal{C}$ ».
   On note parfois $\mathrm{mor}(\mathcal{C})$ la classe de tous les morphismes de $\mathcal{C}$.
2. Il est courant d'utiliser des lettres minuscules pour noter les objets d'une catégorie abstraite. Cependant, il est pratique d'utiliser les majuscules dans un cours introductif pour catalyser l'intuition.
3. Pour tous $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ la classe des morphismes entre X et Y de X à Y, ou, lorsque la catégorie en jeu est claire, simplement $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Pour insister sur la catégorie, on note aussi parfois $\mathcal{C}(X,Y)$, mais c'est dommage, car on pourrait confondre avec une notation pour les applications continues de X dans Y lorsque ça a un sens.
4. **Important :** on écrit simplement $f : X \longrightarrow Y$ pour $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Cette notation doit être employée savamment, car elle ne fait pas mention de la catégorie considérée (dans un espace de Banach par exemple, on s'y perd facilement).
5. Avec ces notations, la composition est définie $\circ : \mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$. Ainsi, à deux flèches f et g convenant, on associe une flèche notée $f \circ g$ ou plus concisément fg.

6. L'associativité s'écrit, en toutes lettres : pour $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T$, on a $(fg)h = f(gh)$).
7. Tout ceci se passe évidemment de la même manière qu'avec des applications, mais ne nous leurrons pas : en général, les flèches ne seront pas des applications. En outre, une catégorie est aveugle aux éventuels éléments de ses objets.
8. L'identité de A se note aussi $\mathbb{1}_A$. Pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a $id_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$. On a de plus : pour tous $g : Y \to X$ et $f : X \to Y$, $id_X g = g$ et $f id_X = f$.

Autres remarques.

1. On peut intérpréter une catégorie comme un contexte mathématique. La théorie des catégories a alors pour but de passer d'un contexte à un autre.
2. La théorie de catégorie a aussi pour motivation de démontrer les théorèmes observés de façon analogue dans diverses catégories, une fois pour toutes. Les premiers exemples que nous verrons de ce principe auront leu dans le cadre de l'algèbre linéaire, où l'étudiant a déjà l'habitude de « changer de point de vue » de façon technique.
3. Une catégorie est totalement encodée par ses morphismes : la connaissance d'un objet se confond avec celle de son identité. C'est pourquoi les objets, en théorie des catégories, ont une importance moindre face aux flèches.
4. *(Une catégorie est un monoïdoïde)* Un monoïde est exactement la donnée d'une catégorie dont la classe des objets est réduite à un point. En effet, si $\star$ est un point, alors cette catégorie est déterminée par $\mathrm{Hom}(X,X)$, qui, d'après les axiomes de catégorie, doit et doit seulement être un monoïde (non nécessairement commutatif).
5. La collection des objets de Ens *(voir premier exemple ci-dessous)* n'est pas un ensemble. Une façon de n'avoir affaire qu'à des ensembles est d'utiliser les *univers de Grothendieck* : on fixe un univers de Grothendieck $\mathcal{U}$, un « très gros ensemble » vérifiant au passage les propriétés de stabilité suivantes :
   - $\star$ $\mathcal{U}$ est transitif,
   - $\star$ toute paire d'éléments de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$,
   - $\star$ si $x \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$,
   - $\star$ si $I \in \mathcal{U}$ et $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, alors $\bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$,

   et au lieu de Ens on utilise $\mathrm{Ens}_{\mathcal{U}}$, la catégorie des ensembles $X \in \mathcal{U}$, dits *ensembles $\mathcal{U}$-petits*. Alors $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ens}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ est un ensemble !

Exemples. ***(Catégories)***

1. L'exemple le plus rudimentaire est celui où la catégorie est celle des ensembles, on la note Ens ou Set en anglais. Les morphismes $X \to Y$ sont toutes les applications de X vers Y et la composition est la composition des applications. Notons que la collection $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ est propre.

2. Les catégories suivantes : $\mathrm{Mag}, \mathrm{Mon}, \mathrm{Grp}$ ou Gp, Ann ou An, Krp ou Kr, sont respectivement les catégories des magmas, des monoïdes, des groupes, des anneaux unitaires, des corps commutatif, avec pour morphismes les (homo)morphismes respectifs. Là-aussi, on remarque que les collections d'objets sont propres.
On définit aussi pour plus de précisions la catégorie Ab des groupes abéliens ; aussi, la catégorie ACU de l'algèbre commutative dont les objets sont les anneaux commutatifs unitaires.

3. Si R est un anneau (associatif, unitaire), commutatif ou non, on note les catégories Mod_R ou $\mathrm{Mod}(R)$ des R-modules à droite et R-Mod des R-modules (à gauche). On peut voir un R-module à droite comme un R-module à gauche sur l'anneau opposé et réciproque. Si l'anneau R est commutatif, c'est donc la même notion. En particulier, si k est un corps (commutatif), alors on dispose de la catégorie $\mathrm{Mod}_k := \mathrm{Vect}_k$ ou k-Vect des k-espaces vectoriels. On définit de même les catégories mod où l'on impose les modules de type fini. La catégorie $\mathrm{Free}(R)$ est la catégorie des R-modules libres.

4. On définit de même la catégorie des k-algèbres notée k-Alg ou k-alg. ou $\mathrm{alg.}_k$. La catégorie des algèbres associatives (sous-entendu sur k) est notée Ass, souvent confondue à la première, et pour préciser que l'on parle d'algèbres associatives unitaires, on utilise la catégorie 1-Ass.

5. Citons la catégorie Top des espaces topologiques avec pour morphismes les applications continues, ou encore la catégorie Met des espaces métriques. On rencontre la catégorie $h\mathrm{Top}$ dite *catégorie d'homotopie* est la catégorie Top quotientée (au sens que l'on image) par toutes les relations d'équivalence d'homotopie entre applications continues.
La *catégorie des espaces topologiques pointés* est légèrement différente : les objets sont les espaces topologiques dont on a choisi un point (X,x) où $x \in X$ et un morphisme entre deux espaces topologiques pointés (X,x) et (Y,y) est une application continue φ telle que $\varphi(x) = y$.

6. La catégorie Ord est la catégorie des ensembles ordonnés dont les morphismes sont les applications croissantes. On définit de même la catégories Preord des ensembles préordonnés dont les morphismes sont encore les applications croissantes.

7. On définit la catégorie de toutes les catégories dont les morphismes sont les foncteurs que l'on définira plus tard. La collection des objets est non seulement propre, mais les objets ne sont plus des ensembles. On peut aussi définir la catégorie de tous les foncteurs, dont les morphismes seront toutes les transformations naturelles ;

Dans tous ces exemples (mis à part le dernier), les objets des catégories sont des ensembles munis de structures supplémentaires et les morphismes sont des appplications qui respectent les structures. On appellera *catégories concrètes* ce type de catégories. Il existe aussi beaucoup de catégories « abstraites » qui sont d'un autre type que ceux-là.

Exemples. *(Catégories dont les objets ne sont pas des ensembles structurés)*

1. La *catégorie vide* $\emptyset$ n'a aucun objet et aucun morphisme.
2. Une *catégorie nulle*, parfois notée 0 pour en fixer une, est une catégorie ayant un unique objet et pour unique morphisme l'identité de cet objet. Toute les catégories nulles seront isomorphes entre elles.
3. La catégorie Rel est la catégorie des relations dont les objets sont les ensembles (oui !) et les morphismes les relations binaires entre ces ensembles. La composition de deux relations $R \subseteq A \times B$ et $S \subseteq B \times C$ est donnée par $(a,c) \in S \circ R \iff \exists b \in B \quad (a,b) \in \mathbb{R}$ ET $(b,c) \in S$.
4. Soit k un corps. La *catégorie des matrices sur* k, notée $\mathrm{Mat}(k)$ ou parfois $\mathbb{V}_j$, a pour objets les entiers $n \in N$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}(k)}(n,m) = \mathrm{Mat}_{m,n}(k)$, la composition étant la multiplication des matrices (bien définie, voir la définition de la composition !).
5. Soit G un groupe. La *catégorie classifiante* BG a un seul objet $\cdot$ et $\mathrm{Hom}_{BG}(\cdot, \cdot) = G$ avec pour composition la loi de groupe.
   La même construction s'applique à un monoïde, et **toute catégorie avec un seul objet est obtenue ainsi, à « isomorphisme » près** *(voir plus haut)*.
6. La catégorie $\tilde{BG}$, quant à elle, a pour classe d'objets G, et est telle qu'il y ait un et un seul morphisme entre deux objets donnés de G, autrement dit, pour tous $x,y \in G$, $\mathrm{Hom}(x,y) = \{\emptyset\}$ où $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset$. Notons que cette construction n'utilise pas la structure de groupe sur G : elle vaut pour n'importe quelle classe d'objets.
7. La *catégorie discrète* sur une classe $\mathcal{C}$ est donnée par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \{id_X\}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \emptyset$ si $X \neq Y$. Elle est définie à isomorphisme de catégories près *(voir plus tard)* et est toujours localement petite. Toute sous-catégorie d'une catégorie discrète est encore discrète et toute catégorie contient une unique catégorie discrète ayant la même classe d'objets, qui n'est pas pleine dès que la catégorie de départ n'était pas elle-même discrète.
8. Si $(P, \leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonné, ou même seulement préordonné, la *catégorie d'incidence* $\mathrm{cat}(P)$ a pour objets les éléments de P et on a pour $x,y \in P$ un seul morphisme $j_{xy} : x \to y$ si $x \leqslant y$ et aucun morphisme de x vers y si $x \nleqslant y$. La composition est définie par : si $f \in \mathrm{Hom}(x,y)$ et $g \in \mathrm{Hom}(y,z)$, $g \circ f$ est l'unique morphisme de $\mathrm{Hom}(x,z)$, bien définie, car $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ si f et g existent, donc $x \leqslant z$ par transitivité.
   Par exemple, si X est un espace topologique, on peut prendre $P = \mathrm{Open}(X)$ l'ensemble des parties ouvertes de X. Souvent, par abus de notation, on écrira P au lieu de $\mathrm{cat}(P)$.
9. *(Catégories de chemins)* On définiera un autre type de catégorie abstraite à l'aide des carquois dans la section sur-sur-suivante.

Exercice 32

Définir la composition avec des matrices à 0 lignes ou 0 colonnes, ou les deux : $[] = id_0$.

▷ **Éléments de réponse.**

Par définition, une matrice à n lignes et à m colonnes est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ dans k. Si n ou m est nul, l'un des facteurs du produit fini $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ est nul, donc il est nul. On cherche donc les applications de $\emptyset$ dans k. Il n'y en a qu'une, notons-là Ω. Or pour composer une matrice A avec une telle matrice, il faut qu'elle ait 0 ligne ou 0 colonne, c'est selon ; il n'y a donc qu'une seule opération à définir : $\Omega \circ \Omega$. Le résultat doit avoir 0 lignes et 0 colonnes pour les mêmes raisons que précédemment. Il suffit donc de poser : $\Omega \circ \Omega = \Omega$.

Propriété. ***(Unicité des morphismes identités)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X \in \mathcal{C}$. Le morphisme id_X est unique.

▷ La preuve est la même que d'habitude. Soient id_X, id'_X deux morphismes vérifiant les propriétés de l'identité. On peut composer sans problème, puisque $X = X$, de sorte que $id_X id'_X = id_X$ mais également $id_X id'_X = id'_X$ en appliquant à id'_X la définition. D'où $id_X = id'_X$. ■

5.1.3 Diagrammes commutatifs

Définition. ***(Diagramme, diagramme commutatif)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *diagramme* dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'un nombre fini ou non d'objets de $\mathcal{C}$ et de flèches de $\mathcal{C}$. On le représente souvent en plaçant les objets sur des points du plan à deux dimensions ou de l'espace à trois dimensions et les flèches sont représentées par les arêtes orientées du polygone ou polyèdre formés par eux.
On dit qu'un diagramme *commute* si pour tout couple d'objet X,Y apparaissant dans le diagramme, pour deux chaînes finies de flèches entre X et Y, *i.e.* $X \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} Y$ et $X \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_m} Y$, on a : $f_n \circ \dots \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_1$.

Exemples. ***(Diagrammes commutatifs)***

1. Un *triangle* (dans ce contexte) est un diagramme à trois objets et trois flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

   ainsi donc un tel triangle commute si et seulement si $h \circ f = g$.

2. Un *carré* est un diagramme à quatre objets et quatre flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
Z \arrow[r, "u"'] & W
\end{tikzcd}$$

ainsi donc un tel carré commute si et seulement si $h \circ f = u \circ g$.

3. On rencontre également des pentagones, des hexagones, des octogones, définis de manière similaire.

4. Un *tétraèdre* est un diagramme à quatre objets et six flèches de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "w"] & \\
 & Y \arrow[u, "u"] \arrow[r, "v"] & Z \\
T \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

ainsi donc un tel tétraèdre, sous cette forme, commute si et seulement si $u \circ g = f$, $v \circ g = h$ et $w \circ f = h$.

Attention, il y a plusieurs formes non équivalentes entre elles de tétraèdres, qui dépendent du sens de la flèche w !

5. Voici un exemple de diagramme infini :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[d, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[drr, "f_3"] & & & \\
X_0 \arrow[r, "g_1"'] & X_1 \arrow[r, "g_2"'] & X_2 \arrow[r, "g_3"'] & X_3 & \cdots
\end{tikzcd}$$

qui commute si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $g_{i+1} \circ f_i = f_{i+1}$.

Principe

Si tous les sous-polygones ou sous-polyèdres d'un diagramme commutent, alors tout le diagramme commute.

$\longrightarrow$ *Convention.* Une flèche « à trouver », « à construire » ou « à définir » est parfois tracée en pointillés comme on l'illustrera abondamment dans la suite.

$\longrightarrow$ *Notation.* Pour préciser qu'un diagramme commute, ce qui est souvent superflu, ou qu'une certaine partie d'un diagramme commute, on peut inscrire un signe égal ou un petit cercle fléché au centre du polygone/polyèdre commutatif.

5.1.4 Catégories petites, localement petites

Dans la dernière remarque ci-dessus, on a relevé un problème quant à la « taille » d'une catégorie $\mathcal{C}$. Il est plus judicieux de s'intéresser à la taille des classes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$.

Définition. ***(Catégorie localement petite)***

Une catégorie est *localement petite* si pour tous objets A,B, la classe des morphismes de A dans B, notée $\mathrm{Hom}(A,B)$, est impropre (autrement dit, c'est un ensemble).

Exemples. ***(Catégories localement petites)***

1. Ens est localement petite. Grp, Ann, Krp, sont localement petites. Pour tout anneau R, pour tout corps k, Mod_R, R-Mod et Vect_k sont localement petites. Top est localement petite. Plus généralement, les catégories concrètes sont localement petites.
2. La catégorie de toutes les catégories n'est pas localement petite.

Définition. ***(Catégorie petite)***

Une catégorie est *petite* si de plus la classe de tous ses morphismes est impropre.

Exemples. ***(Catégories petites)***

1. La catégorie des matrices sur un corps k est petite.
2. Toute catégorie classifiante est petite, c'est évident.
3. *(Catégorie des petites catégories)* Les petites catégories et les foncteurs entre elles forment une catégorie localement petite, que l'on appelle Cat.

Remarque. Une catégorie petite est localement petite (car toute partie d'un ensemble est un ensemble), mais la réciproque est fausse.

De plus, la classe des objets d'une catégorie petite n'est pas forcément impropre, car on n'est pas forcé, pour définir une certaine catégorie de « prendre toutes les flèches possibles » *(voir ci-dessous)*. C'est le cas cependant pour les catégories concrètes et dont de plus le foncteur d'oubli vers Set est plein *(voir cela plus tard)*.

Contre-exemple. ***(Catégorie localement petite non petite)***

La catégorie Ens est localement petite mais n'est pas petite.
En effet, il y au moins autant d'ensembles E que de morphismes id_E. Comme on a vu, Ob(Ens) est une classe propre. □

Contre-exemple. ***(Une autre catégorie localement petite non petite)***

La catégorie Cat convient également. □

La collection des objets d'une petite catégorie n'est pas nécessairement impropre ! On peut considérer la catégorie $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Ens})$ et pour tous $x,y \in \mathrm{Ens}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \{\emptyset\}$. On définit la composition par $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset$. C'est une catégorie. Elle est trivialement petite... mais la classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ n'est pas un ensemble.

Heuristique

Tout ceci est cohérent avec l'assertion que l'on peut reconnaître une catégorie à partir de ses morphismes.

Principe. ***(Agrandissement de l'univers)***

En fait, la notion de localement petite pourrait être définie « par rapport à la catégorie Ens ». En fait, si l'on *agrandit l'univers*, autrement dit si l'on remplace Ens par une autre catégorie intuitivement plus grande, on dispose d'une notion tout à fait semblable à la petitesse locale et on peut espérer appliquer dans ce contexte les théorèmes sur les catégories localement petites !

Définition. ***(Catégorie finie)***

Une catégorie est *finie* si elle n'a qu'un nombre fini de morphismes, et donc d'objets.

5.1.5 Carquois, catégories de chemins

On définit dès maintenant cette notion qui précède celle des catégories.

Définition. ***(Carquois)***

Un *carquois* est un quadruplet $Q = (Q_0,Q_1,s,t)$ où Q_0 est un ensemble de *points* ou *sommets*, Q_1 est un ensemble de *flèches*, et s et t sont des applications $Q_1 \to Q_0$ qui envoient une flèche α sur sa *source* $s(\alpha)$, respectivement son *but* $t(\alpha)$. On note $s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$. Ainsi, un carquois n'est autre qu'un graphe orienté.
Un *carquois fini* est un carquois dont l'ensemble des sommets ainsi que des flèches est fini.

On développe dans des exemples la façon de représenter graphiquement un carquois

Exemples. ***(Carquois et notation)***

1. Exemple sur un carquois à trois éléments : on peut écrire $Q : 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 3$ où $Q_0 = \{1,2,3\}$, $Q_1 = \{\alpha,\beta\}$, $s(\alpha) = 2$, $t(\alpha) = 3$, $s(\beta) = 1$, $t(\beta) = 2$. Ce carquois serait distinct du suivant même si l'on enlevait l'élément 4 et ses deux flèches repliées sur lui-même.

2. Autre exemple :

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\gamma"] & & 4 \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[loop below, "\mu"] \\
1 \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, "\delta"'] & & 3 \arrow[ul, shift left, "\varepsilon"] \arrow[loop right] &
\end{tikzcd}$$

qui est bien distinct de

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\gamma"] & & 4 \arrow[loop above, "\lambda"] \arrow[loop below, "\mu"] \\
1 \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift left=2, "\delta_1"] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2, "{\delta_2,\delta_2}"'] & & 3 \arrow[ul, shift left, "\varepsilon"] \arrow[loop right] &
\end{tikzcd}$$

car $Q_1 \neq Q'_1$.

3. Si $\mathcal{C}$ est une (petite) catégorie alors son carquois sous-jacent est donné par $Q = \mathrm{car}(\mathcal{C})$ a $Q_0 = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $Q_1 = \coprod_{x,y\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)$ avec les applications évidentes[a] s et t. Heuristiquement, on oublie la composition dans $\mathcal{C}$. Ainsi, **une catégorie est une structure de carquois enrichie**.

[a] Un élément de Q_1 est formellement un triplet, s lui attribue sa première composante et t la deuxième.

On essaie d'aller dans l'autre sens.

Définition. ***(Chemin de carquois)***

Soit Q un carquois. Un *chemin* de Q est une suite

$$(y \mid \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_n \mid x)$$

telle que $t(\alpha_1) = y$, $t(\alpha_{i+1}) = s(\alpha_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $s(\alpha_n) = x$ pour $n \geqslant 0$, autrement dit, $x \xrightarrow{\alpha_n} x_1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} x_2 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_2} x_n \xrightarrow{\alpha_1} y$.

En particulier, pour $x \in Q_0$ on a le *chemin paresseux* ou *stationnaire* ou *trivial* $e_x = \varepsilon_x = (x \mid x)$ en prenant $n = 0$.

Attention, un chemin dans un carquois dépend du choix des flèches et pas seulement des éléments.

Remarque. Il n'y a pas forcément, pour un carquois donné, des chemins de toutes longueurs $n \in \mathbb{N}$. Un chemin paresseux est un chemin de longueur 0. Une flèche est un chemin de longueur 1.

Définition. ***(Catégorie des chemins)***

La *catégorie des chemins* $\mathrm{Ch}(Q) = \mathcal{P}Q$ d'un carquois Q a pour objets les sommets de Q et pour morphismes les chemins de Q avec pour composition la composition assez naturelle des chemins donnée par :

$$(z \mid \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n \mid y) \cdot (y \mid \beta_1 \mid \ldots \mid b_n \mid x) = (z \mid \alpha_1 \mid \ldots \mid \alpha_n \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_n \mid x).$$

Exemples. ***(Catégories de chemins)***

1. La catégorie des chemins de $Q : 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ a seulement trois morphismes : e_1, e_2 et $(2 \mid \alpha \mid 1)$. Elle est assez trivialement isomorphe (dans un sens à définir formellement plus tard) à la catégorie associée à l'ensemble $P = \{1 \leqslant 2\}$.
2. La catégorie des chemins de $1 \circlearrowleft \alpha$ a une infinité de morphismes : les α^n, pour $n \in \mathbb{N}$, avec $\alpha^0 = id_1 = (1 \mid 1) = e_1$. Plus généralement, un carquois possédant une flèche d'un élément sur lui-même contient donne lieu à une catégorie de chemins ayant une infinité de morphismes.
3. Réciproquement, la catégorie $\mathcal{P}Q$ des chemins d'un carquois Q est finie si et seulement si Q n'a pas de cycles orientés, *i.e.* des structures de la forme

$$\begin{tikzcd}
& x_1 \arrow[r] & x_2 \arrow[dr] & \\
x_0 \arrow[ur] & & & x_3 \arrow[d] \\
x_n \arrow[u] & & & \vdots \\
& \cdots \arrow[ul] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

ainsi donnée. Par exemple, les catégories de chemins de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 2 & \end{tikzcd}$, de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 1 \end{tikzcd}$

ou de $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2 \end{tikzcd}$ sont finies, mais pas les catégories de chemins de $\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above] \end{tikzcd}$

ou de $\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd}$.

À ne pas confondre avec un

Définition. ***(Morphisme de carquois)***

Soient (Q_0,Q_1,s,t) et (Q'_0,Q'_1,s',t') deux carquois. Un *morphisme de carquois* de Q vers Q' est la donnée de deux applications $f_0 : Q_0 \to Q'_0$ et $f_1 : Q_1 \to Q'_1$ telles que pour toute flèche $F \in Q_0$, $s'(f_0(F)) = f_1(s(F))$ et $t'(f_0(F)) = f_1(t(F))$. Autrement dit, c'est une application qui préserve source et but des flèches.

VOC On peut donc définir la *catégorie des carquois* dont les objets sont tous les carquois et les morphismes sont les morphismes de carquois. Remarque : cette catégorie contient la catégorie de toutes les catégories.

On utilisera plus tard la définition suivante :

Définition. ***(Carquois libre, carquois sur une catégorie)***

Un *carquois libre* ou *carquois de Kronecker* est une catégorie formée à partir d'un carquois $X = (E,V,s,t)$ constitué de deux objets qui sont E et V, de deux morphismes s et t en plus des deux morphismes identités.
Si C est une catégorie, un *carquois sur* C est un foncteur $X \to C$.

Définition. ***(Catégorie de carquois sur une catégorie)***

La *catégorie de carquois sur* C, notée $\mathrm{Quiv}(C)$, est la catégorie de foncteurs C^X dont les objets sont les carquois sur C $X \to C$, et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Remarques.

1. Si C est la catégorie des ensembles, ce qui est souvent le cas, alors la catégorie des carquois correspond à la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie duale X^{op}.
2. On a un foncteur d'oubli $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Quiv}$.

5.1.6 Construction de catégories à partir de catégories

5.1.6.1 Sous-catégorie, sous-catégorie pleine

Définition. ***(Sous-catégorie)***

Une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de certains objets de $\mathcal{C}$, mais pas forcément tous, et de certaines flèches de $\mathcal{C}$, mais pas forcément toutes, de sorte que $\mathcal{C}'$ soit une catégorie.
Il faut donc imposer toutefois :

(i) pour tout $X \in \mathcal{C}'$, $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,X)$:

(ii) pour tous $X,Y,Z \in \mathcal{C}'$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}j'}(Y,Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $fg \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Z)$.

Définition. ***(Sous-catégorie pleine)***

Une sous-catégorie est dite *pleine* si pour tous objets A,B de $\mathcal{C}'$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ (il reviendra au-même de dire que le foncteur d'oubli de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ est plein, et donc qu'on a un plongement).

Remarque importante. Donc, une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}'$ est déterminée seulement par le choix $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Exemples. ***(Sous-catégories et sous-catégories pleines)***

1. Ab est une sous-catégorie pleine de Grp.
2. Ab privé du morphisme $k \mapsto 2k$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, est une sous-catégorie non pleine de Grp.

Contre-exemple. ***(Pas des sous-catégories !)***

Grp n'est pas une sous-catégorie de Ens.
Cela vient de ce que l'ensemble $\{0,1,2,3\}$ peut être muni de plusieurs structures de groupe : typiquement, une isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, une autre à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
De même, Ann n'est pas une sous-catégorie de Ab. $\square$

Exercice 33 *(Sous-carquois, sous-carquois plein)*

Si Q est un carquois et $Q' \subseteq Q$ un *sous-carquois*[a], *i.e.* $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ et les restrictions de s et t coïncident avec s et t, montrer qu'alors $\mathrm{Ch}(Q') \subseteq \mathrm{Ch}(Q)$ est une sous-catégorie de $\mathrm{Ch}(Q)$. Montrer aussi que, si elle est pleine, alors $Q' \subseteq Q$ est *plein*, *i.e.* contient toutes les flèches de Q à source et but dans Q'. Que dire de la réciproque ?

[a] Il revient au même de dire que l'inclusion $Q' \hookrightarrow Q$ est un morphisme de carquois.

5.1.6.2 Quotient d'une catégorie par un objet

Définition. ***(Quotient d'une catégorie par un objet)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S un objet de $\mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/S$ la catégorie définie comme suit : ses objets sont les couples (X,f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et $f : X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{C}$; les morphismes de (X,f) vers (Y,g) sont les morphismes $\varphi : X \to Y$ tel que $f = g \circ \varphi$, autrement dit tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

On peut également construire le quotient dual $S\backslash\mathcal{C}$ du premier comme la catégorie dont les objets sont les couples (X,f) où X est un objet de $\mathcal{C}$ et où $f : S \to X$ est un morphisme, et dont les flèches sont définies comme on peut imaginer.

Exercice 34 *(Exemples de quotient d'une catégorie par un objet)*

On étudie quelques cas particuliers.

1. Si $\mathcal{C} = \mathrm{Ann}$ et $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ann})$, comment réaliser $\mathcal{C}/A$?
2. Même question si $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ et $S = \{\star\}$.

▷ **Éléments de réponse.**

1. En fait, il vaut mieux décrire $A\backslash\mathcal{C}$. On obtient la catégorie A-Alg des A-algèbres.
2. Là encore, il vaut mieux décrire $S\backslash\mathcal{C}$. On peut alors y reconnaître la catégorie des espaces topologiques pointés dont on rappelle que les morphismes sont les applications continues qui fixent les points pointés.

5.1.6.3 Quotient d'une catégorie par une congruence

Exercice 35 *(Congruence dans une catégorie)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Pour chaque paire d'objets X,Y de $\mathcal{C}$, soit $\sim_{X,Y}$ une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. On dit que la famille de relations $\sim_{X,Y}$ définit une *congruence*, simplement notée $\sim$, dans $\mathcal{C}$, si les $\sim_{X,Y}$ sont compatibles avec la composition, c'est-à-dire si les conditions suivantes sont vérifiées : si $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont tels que $f \sim_{X,Y} g$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,Z)$, alors $hf \sim_{X,Z} hg$; si $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sont tels que $f \sim_{X,Y} g$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $fh \sim_{W,Y} gh$. Montrer que si $\sim$ est une congruence sur $\mathcal{C}$, alors on définit une catégorie $C/\sim$, dite *catégorie quotient*, en prenant pour objets les mêmes objets que ceux de $\mathcal{C}$, et pour morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\sim_{X,Y}$ avec une composition à préciser.
Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et $\sim^0$ une famille de relations $\sim^0_{X,Y}$ sur les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, si $\sim$ est la plus petite congruence contenant $\sim^0$, on posera $\mathcal{C}/\sim^0 := \mathcal{C}/\sim$.

▷ **Éléments de réponse.**

Évidemment prenons pour $X \in \mathcal{C}$, *i.e.* $X \in \mathcal{C}/\sim$, $id_{X,\mathcal{C}/\sim} = \overline{id_X}$. Son caractère d'élément neutre, ainsi que l'associativité de la décomposition, découlent sans trop de problème du passage au quotient de ces propriétés sur un monoïde, phénomène général. Le gros de la preuve est de vérifier que la composition est elle-même bien définie. Il s'agit alors de montrer que, si $f \sim_{X,Y} g$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $X,Y \in \mathcal{C}$, et si $h \sim_{Y,Z} k$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $Z \in \mathcal{C}$, alors on a bien $hf = kg$ modulo $\sim_{X,Z}$, autrement dit $hf \sim_{X,Z} kg$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. C'est facile : On a $hf \sim_{X,Z} hg$ par la première propriété et $hg \sim_{X,Z} kg$ par le deuxième propriété, d'où par transitivité de $\sim_{X,Z}$, $hf \sim_{X,Z} kg$, et on peut aller se coucher.

Exemples. ***(Quotients de catégorie par congruence)***

1. *(Fondamental)* Étant donné un carquois, on définit la *catégorie des chemins commutative* du carquois Q, notée $\tilde{\mathrm{Ch}}(Q)$, obtenue en déclarant équivalents deux chemins quelconques sur le carquois Q ayant même source et même but.
   Ceci permet de reformuler les définitions relatives aux diagrammes commutatifs dans le langage des carquois. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, D_0 un ensemble d'objets de $\mathcal{C}$ et D_1 un ensemble de morphismes de $\mathcal{C}$ dont sources et buts sont dans D_0, on obtient un carquois D, dit diagramme dans $\mathcal{C}$. Il est commutatif, si et seulement si, $D = \tilde{\mathrm{Ch}}(D)$.
2. On a déjà rencontré la catégorie d'homotopie $h\mathrm{Top}$ qui n'est autre le quotient de Top par les homotopies. On remarque alors que $h\mathrm{Top}$ n'est en fait pas une catégorie concrète !

Exercice 36 *(Quotient d'une catégorie de chemins)*

1. Calculer le nombre de morphismes de la catégorie de chemins du carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"'] & 2 \arrow[d, "a"] \\ 3 \arrow[r, "c"'] & 4 \end{tikzcd}$$

   modulo $ab \sim cd$.
2. Même question pour le carquois

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

   modulo $a \sim b$.
3. Même question pour le carquois précédent, mais cette fois modulo $ca \sim cb$.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On trouve $4 + 4 + 2 = 10$ morphismes $=$ chemins dans la catégorie de chemins de ce carquois, puis 9 dans la catégorie du carquois quotienté.
2. On trouve $3 + 2 + 1 = 6$ chemins dans la catégorie quotientée.
3. Cette fois, on trouve $3 + 3 + 1 = 7$ chemins dans la catégorie quotientée.

5.1.6.4 Catégorie opposée

Définition. ***(Catégorie opposée)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a, par définition, les mêmes objets, ses collections de morphismes sont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ pour tous objets X,Y et la composition est donnée par $g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$. Autrement dit, si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f \circ_{\mathcal{C}} g"] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "g"'] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g"] \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
En particulier, les identités sont les mêmes dans les deux catégories.
La catégorie opposée est celle dont on garde les objets et inverse le sens des flèches.

Propriété. ***(Involutivité de l'opposition)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors $\mathcal{C}^{\mathrm{op}\,\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Exemples. ***(Catégories opposées)***

1. Si $(P,\leqslant)$ est un ensemble partiellement ordonnée, alors $\mathrm{cat}(P)^{\mathrm{op}} \simeq_{\text{isomorphisme}} \mathrm{cat}(P^{\mathrm{op}})$ (toujours en un sens dont la définition est à venir).
2. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, alors $\mathrm{car}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} = \mathrm{car}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ où le carquois opposé est lui-même défini en prenant les mêmes points et en inversant le sens de chaque flèche.
   Échanger s et t !
   Autrement dit, $(Q_0,Q_1,s,t)^{\mathrm{op}} = (Q_0,Q_1,t,s)$.
3. Si Q est un carquois, alors $\mathrm{Ch}(Q)^{\mathrm{op}} \simeq_{\text{isomorphisme}} \mathrm{Ch}(Q^{\mathrm{op}})$.
4. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, la catégorie $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ n'est pas isomorphe, ni même équivalente, à Ens.
   Ceci vient du fait que pour tout ensemble A, toute application de $A \to \emptyset$ est un isomorphisme (parce qu'il n'y en a aucune). Si $\mathrm{Ens}^{\mathrm{op}}$ était équivalente à Ens, on aurait l'existence d'un ensemble Z telle que toute application de Z dans A soit un isomorphisme, *i.e.* une bijection comme on le montrera plus tard. Si $Z = \emptyset$, c'est grossièrement faux. Sinon, soit $z_0 \in Z$. En particulier, $id_Z : Z \to Z$ est un isomorphisme. Rajoutons un élément à Z pour avoir $Z' = Z \cup \{Z\} \neq Z$, grâce à l'axiome de fondation, et prolongeant id_Z à Z' en posant $f(Z) = z_0$. Alors z_0 à deux antécédents par $\tilde{id_Z}$ dans Z', donc $\tilde{id_Z}$ ne peut être un isomorphisme, contradiction.
5. Si G est un groupe, alors $B(G^{\mathrm{op}}) = (BG)^{\mathrm{op}}$, et du fait que G et G^{op} sont isomorphes, BG et $(BG)^{\mathrm{op}}$ sont des catégories isomorphes, en particulier équivalentes.

Principe. ***(Principe de dualité)***

Pour toute propriété catégorique vérifiée sur une catégorie $\mathcal{C}$, la propriété duale, c'est-à-dire obtenu en inversant le sens des flèches, est vraie dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

5.1.6.5 Produit de catégories

Définition. ***(Produit de deux catégories)***

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Le *produit de catégories* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ des deux catégories, est défini par $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((x,x'),(y,y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(x',y')$ pour tous $x,x' \in \mathcal{C}$, pour tous $y,y' \in \mathcal{D}$. La composition est définie de manière évidente, terme à terme.

Définition. ***(Produit quelconque de catégories)***

Soit Λ une classe et $(\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de catégories indexée par Λ. La *catégorie produit* $\mathcal{C} = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_\lambda$ est celle dont les objets sont les familles $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ avec $X_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et les morphismes entre deux objets $f : (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont les familles de morphismes $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, la composition étant définie composante par composante par $gf = (g_\lambda f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $g = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : (Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to (Z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

$\longrightarrow$ *Convention.* Si $\Lambda = \emptyset$, on a que le produit de catégories vide est la catégorie vide $\emptyset$.

$\longrightarrow$ **Notations.**

1. Si $\Lambda = [\![1,n]\!]$, on note le produit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n$.
2. Si tous les $\mathcal{C}_\lambda$ sont égaux, disons à $\mathcal{D}$, on note $\mathcal{C} = \mathcal{D}^\Lambda$.

Exemples. ***(Produits de catégories)***

1. Si P et P' sont des ensembles partiellement ordonnés, alors $\mathrm{cat}(P \times P') \simeq_{\text{isomorphime}} \mathrm{cat}(P) \times \mathrm{cat}(P')$.
2. *(Exercice moins évident)* Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des chemins du carquois à une seule flèche $1 \xrightarrow{\alpha} 2$, alors $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ n'est pas isomorphe ni même équivalente à une catégorie de chemins.

5.1.7 Morphismes particuliers d'une catégorie

Heuristique

Dans une catégorie concrète, on peut parler de morphismes bijectifs, injectifs, surjectifs... car les objets ont des éléments, mais dans une catégorie générale, ils n'en ont pas. La philosophie à partir de là est (comme toujours) de remplacer les éléments « $x \in X$ » par des morphismes « $f : Y \to X$ ».

5.1.7.1 Endomorphismes

Définition. ***(Endomorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle *endomorphisme* de X un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$. On note : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$.

5.1.7.2 Sections, rétractions

Définition. ***(Section, rétraction)***

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X,Y deux objets de $\mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ avec

$$f \circ g = id_Y.$$

On dit que g est une *section* de f et que f est une *rétraction* de g.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "id_Y"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Autrement dit, une section est un *inverse à droite* et un *inversible à gauche* encore appelé *monomorphisme scindé* ou *rétractable*, une rétraction un *inverse à gauche* et un *inversible à droite* encore appelé *épimorphisme scindé* ou *sectionnable*.

Remarque. Bien évidemment, les notions de section et rétraction sont duales l'une de l'autre.

5.1.7.3 Monomorphismes

Définition. ***(Monomorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme, $X,Y \in \mathcal{C}$. On dit que f est un *monomorphisme* si pour tous $g,h : U \to X$, U parcourant $\mathcal{C}$, on a $fg = fh \implies g = h$.

Remarque. Il revient au même de dire que l'application $f_* : \mathrm{Hom}(Z,X) \to \mathrm{Hom}(Z,Y), g \mapsto f \circ g$ est injective pour tout objet $Z \in \mathcal{C}$.

Mnémonik : Le suffixe mono-, qui nous vient du grec, signifie *un seul*. Ceci rappelle la propriété d'injectivité. Si l'on n'aime pas l'étymologie, on peut calculer que cette propriété dans un anneau signifie l'inversibilité à gauche.

Reformulation pratique. ***(Monomorphie par diagramme)***

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme si et seulement si pour tous morphismes $g,h : W \to X$, la commutation de

$$W \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

implique que la double flèche n'est qu'une.

Fait. ***(Monomorphie et injectivité)***

Dans une catégorie concrète, un morphisme injectif est un monomorphisme, mais la réciproque est fausse en général même dans une catégorie concrète.

En effet, un morphisme injectif f admet une rétraction ensembliste f' telle que $f'f = id$. Supposons que $fg = fh$. Alors $f'fg = f'fh$ dans Ens dans laquelle se plonge notre catégorie, soit $g = h$. On verra des contre-exemples de la réciproque dans les exemples qui suivent.

Exemples. ***(Monomorphismes)***

1. Une identité est un monomorphisme.
2. Dans la catégories des ensembles Ens, les monomorphismes sont les injections.
   Ens étant concrète, montrons simplement qu'un monomorphisme $f : X \to Y$ est une application injective. Soient $x,y \in X$. Soient $g : \begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \longrightarrow & X \\ \emptyset & \longmapsto & x \end{array}$ et $h : \begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \longrightarrow & X. \\ \emptyset & \longmapsto & y \end{array}$ Alors si $f(x) = f(y)$, *i.e.* $fg(\emptyset) = fh(\emptyset)$, puisque $\{\emptyset\}$ n'a qu'un élément, $fg = fh$, d'où $g = h$. En particulier $g(\emptyset) = h(\emptyset)$ soit $x = y$.
3. De même, dans la catégorie des espaces topologiques Top, les monomorphismes sont les injections continues.
   On utilise le raisonnement précédent mot pour mot, en munissant $\{\emptyset\}$ de n'importe quelle topologie (d'ailleurs, il n'y en a qu'une), disons la topologie discrète. Les applications g et h étant constantes, elles seront nécessairement continues et la preuve fonctionne dans le contexte de Top.
4. Dans la catégorie des groupes Grp, les monomorphismes sont les morphismes injectifs.
   Le raisonnement précédent ne tient plus. À la place, soif $f : X \to Y$ un monomorphisme. Soient $G : \{e\}$ le groupe nul et $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soient $g : G \to X$ l'application constante égale au nul et $h : H \to X$ l'inclusion canonique. Alors $fg = fh$ sont toutes les deux nulles, d'où $h = g$. En particulier, $H = \mathrm{Ker}(f) = G = \{e\}$ donc f est injectif.
5. Dans la catégorie des anneaux Ann, les monomorphismes sont les morphismes injectifs.

Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux qui est un monomorphisme. La preuve précédente ne fonctionne plus, car $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas un anneau unitaire. Soient $x,y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$. Soient les morphismes donnés par propriétés universelles $g : \mathbb{Z}[X] \to A$, $X \mapsto x$ et $h : \mathbb{Z}[X] \to A$, $X \mapsto y$. Puisque f est un morphisme, $fg = fh$, d'où $g = h$, d'où $g(X) = x = y = h(X)$.

6. Si A est un anneau, les monomorphismes dans Mod A sont les morphismes de modules qui sont injectifs. On en déduit le même résultat dans Ab en prenant $A = \mathbb{Z}$ (ce qui ne se déduisait pas tout à fait immédiatement de la propriété dans Grp) et dans ¿-Vect en prenant $A = k$ où k est un corps. Le résultat tient encore dans une catégorie de type alg..

Encore une fois, il suffit de montrer qu'un monomorphisme $f : M \to N$ est injectif. La preuve utilisée pour les groupes fonctionne alors mot pour mot.

7. Dans la catégorie des groupes abéliens divisibles, il existe des monomorphismes qui ne sont pas injectifs, typiquement, la projection $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

On retrouve des propriétés semblables à celles des applications injectives dans Ens.

Propriété. ***(Composition de monomorphismes)***

Le composé de deux monomorphismes est un monomorphisme.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un monomorphisme, alors u est un monomorphisme.

Corollaire. ***(Sections et monomorphismes)***

Toute section (*i.e.* tout morphisme inversible à gauche) est un monomorphisme.

Exercice 37

Fournir un contre-exemple pour la réciproque : un monomorphisme non inversible à gauche.

▷ **Éléments de réponse.**

Comme on le verra plus en détail dans la section suivante, l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ en tant qu'anneaux est un monomorphisme, mais il n'y a aucun morphisme d'anneaux de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$, donc aucune chance de trouver une rétraction...

On introduit également la notion duale.

5.1.7.4 Épimorphismes

Définition. ***(Épimorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $f : X \to Y$ un morphisme, $X,Y \in \mathcal{C}$. On dit que f est un *épimorphisme* si pour tous $g,h : Y \to Z$, Z parcourant $\mathcal{C}$, on a $gf = hf \implies g = h$.

Mnémonik : Le suffixe épi-, qui nous vient du grec, signifie *sur*. Ceci rappelle la propriété de surjectivité. Si l'on n'aime pas l'étymologie, on peut calculer que cette propriété dans un anneau signifie l'inversibilité à droite.

Remarque. Il revient au même de dire que l'application $f^* : \mathrm{Hom}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}(X,Z), g \mapsto g \circ f$ est injective pour tout objet $Z \in \mathcal{C}$.

Reformulation pratique. ***(Épimorphie par diagramme)***

Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme si et seulement si pour tous morphismes $g,h : Y \to Z$, la commutation de

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$$

implique que la double flèche n'est qu'une.

Fait. ***(Lien monomorphie-épimorphie)***

Les épimorphismes sont les monomorphismes de la catégorie opposée et inversement.

Fait. ***(Épimorphie et surjectivité)***

Dans une catégorie concrète, un morphisme surjectif est un épimorphisme, mais la réciproque est fausse en général même dans une catégorie concrète.

En effet, un morphisme surjectif f admet une section ensembliste f' telle que $ff' = id$. Supposons que $gf = hf$. Alors $gff' = hff'$ dans Ens dans laquelle se plonge notre catégorie, soit $g = h$. On verra des contre-exemples de la réciproque dans les exemples qui suivent.

Exemples. ***(Épimorphismes)***

1. Une identité est un épimorphisme.
2. Dans la catégories des ensembles Ens, les épimorphismes sont les surjections.

   Ens étant concrète, montrons simplement qu'un épimorphisme $f : X \to Y$ est une application surjective. Soit $y \in Y$. Soit $Z = \{0,1\}$, ensemble à deux éléments. On pose $g : Y \to Z, t \mapsto 1$ et $h : Y \to Z, t \mapsto [t \in \mathrm{Im}(f)]$. Alors $gf = hf$, d'où $g = h$. En particulier, $g(y) = 1 = h(y)$, donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.
3. De même, dans la catégorie des espaces topologiques Top, les épimorphismes sont

les surjections continues.

On utilise le raisonnement précédent mot pour mot, en munissant $\{0,1\}$ de la topologie grossière. Les applications g et h seront alors continues automatiquement et la preuve fonctionne dans le contexte de Top.

4. Dans la catégorie des groupes Grp, les épimorphismes sont les morphismes surjectifs, mais c'est plus difficile à voir.

Soit $f : G \to H$ un épimorphisme de groupes. Alors $K = \mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de H, non nécessairement distingué. On fait agir H à gauche sur l'ensemble des classes à gauche de K, par $x.yK = (xy)H$, ce qui nous donne un morphisme de de groupes g de H dans $\mathfrak{S}(H/K)$. Pour tout $x \in H$, $g(x)$ envoie yK sur xyK. Ajoutons un élément à H/K et étendons g de H dans $\mathfrak{S}(H/K \cup \{\infty\})$ en posant $g(x)(\infty) = \infty$ pour tout $x \in H$. Soit $\tau = (K\infty)$ qui est une transposition de $\mathfrak{S}(H/K \cup \{\infty\}$. Posons $h = \tau \circ g \circ \tau$. Alors on peut montrer au cas par cas que $hf = gf$, dont on déduit que $h = g$, *i.e.*, si $x \in H$, $g(x) = h(x)$. En particulier, $g(x)(K) = xK = h(x)(K) = K$, soit $x \in K$, d'où $\mathrm{Im}(f) = H$, et f est surjectif.

5. Attention : l'inclusion $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ est un épimorphisme dans la catégorie des anneaux mais n'est pas surjective ! C'est aussi un monomorphisme dans la catégorie des anneaux, mais ce n'est pas un isomorphisme.

En effet, Ann est concrète et l'inclusion canonique $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ est injective, donc f est un monomorphisme. Supposons $gf = hf$ pour g,h morphismes d'anneaux convenant. Soit $q \in \mathbb{Q}$. $q = \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, $g(q) = g(\frac{k}{n}) = \frac{g(k)}{g(n)}$, car g est un morphisme d'anneaux unitaires, puis $g(q) = \frac{g(f(k))}{g(f(n))} = \frac{h(f(k))}{h(f(n))} = \frac{h(k)}{h(n)} = h(q)$, d'où $g = h$.

Cependant, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes. En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \emptyset$.

6. Si A est un anneau, les épimorphismes dans Mod A sont les morphismes de modules qui sont surjectifs. On en déduit le même résultat dans Ab en prenant $A = \mathbb{Z}$ (ce qui ne se déduisait pas tout à fait immédiatement de la propriété dans Grp) et dans ¿Vect en prenant $A = k$ où k est un corps. Le résultat tient encore dans une catégorie de type alg..

Encore une fois, il suffit de montrer qu'un épimorphisme $f : M \to N$ est surjectif. C'est plus simple que pour les groupes, car l'objet $N/\mathrm{Im}(f)$ existe. Considérons alors la projection $\pi : N \to N/\mathrm{Im}(f)$ et l'application nulle $g : N \to N/\mathrm{Im}(f)$. Alors $\pi f = gf$, d'où $\pi = g$. Or $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g) = N$, d'où $N = \mathrm{Im}(f)$ et f est surjective.

7. Dans la catégorie des espaces topologiques séparés, il existe des épimorphismes qui ne sont pas surjectifs, typiquement, le plongement $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, qui est d'image dense.

On retrouve des propriétés semblables à celles des applications surjectives dans Ens.

Propriété. ***(Composition d'épimorphismes)***

Le composé de deux épimorphismes est un épimorphisme.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un épimorphisme, alors v est un épimorphisme.

Corollaire. ***(Rétractions et épimorphismes)***

Toute rétraction (*i.e.* tout morphisme inversible à droite) est un épimorphisme.

Exercice 38

Fournir un contre-exemple pour la réciproque : un épimorphisme non inversible à droite.

▷ **Éléments de réponse.**

L'inclusion $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$, étudiée ci-dessus, convient.

5.1.7.5 Isomorphismes

Nous introduisons une notion capitale en mathématiques.

Définition. ***(Isomorphisme)***

Un isomorphisme entre deux objets X,Y d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un morphisme f de X dans Y tel qu'il existe un morphisme g de Y dans X tel que $g \circ f = f \circ g = id_X$. On note $\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur Y. On dit que g est le *morphisme inverse* ou *réciproque* de f.

A priori, avoir une seule des deux égalités ne suffit pas, comme largement illustré précédemment.

Il revient au même, dans une catégorie concrète, de se donner un morphisme bijectif donc l'inverse est encore un morphisme. Dans beaucoup de catégories, cette dernière condition est automatiquement vérifiée : groupes, espaces vectoriels, etc. Ce n'est pas général toutefois : par exemple, dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, l'inverse d'une bijection croissante n'est pas nécessairement croissante.

Lemme. ***(Unicité du morphisme réciproque)***

Si un morphisme est inversible dans sa catégorie, son morphisme inverse est strictement unique.

▷ Si g et g' sont deux inverses de f, $g \circ f = id_X$ d'où $g \circ f \circ g' = g' = g \circ id_Y = g$. ■

On a en fait mieux :

Théorème. ***(Caractérisation des isomorphismes)***

Un isomorphisme est exactement une section-rétraction.

▷ Il est clair qu'un isomorphisme est à la fois une section et une rétraction. Réciproquement, supposons que $f : X \to Y$ soit une section et une rétraction, de sorte que respectivement $fg = id_Y$ et $hf = id_X$. Alors $h = h(fg) = (hf)g = g$, donc f est un isomorphisme. ■

En particulier, on a :

Propriété. ***(Isomorphisme $\implies$ épimorphisme et monomorphisme)***

Tout isomorphisme est un monomorphisme et un épimorphisme.

Contre-exemple. ***(Épimorphisme et monomorphisme qui n'est pas un iso.)***

On a déjà vu un exemple dans la section précédente : l'inclusion canonique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ est un épimorphisme et plus étonnamment un monomorphisme de la catégorie Ann. Cependant, ce n'est pas un isomorphisme.
En effet, si $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ étaient isomorphes en tant qu'anneaux, il ne seraient en tant que groupe mais $\mathbb{Q}$ n'est pas monogène. □

Exemple. ***(Isomorphismes dans les catégories concrètes)***

Dans une catégorie concrète $\mathcal{C}$ où les monomorphismes sont les morphismes injectifs et les épimorphismes sont les morphismes surjectifs **et où tout morphisme bijectif a pour inverse un morphisme**, les isomorphismes de $\mathcal{C}$ sont les morphismes bijectifs.

Contre-exemple. ***(Morphisme bijectif qui n'est pas un iso.)***

Dans la catégorie Top, les isomorphismes sont les homéomorphismes, or il existe des bijections continues qui ne sont pas des homéomorphismes. □

On a des propriétés de calcul semblables à celles des ensembles.

Propriété. ***(Morphisme réciproque d'un isomorphisme)***

Le réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Propriété. ***(Composition d'isomorphismes)***

Le comoposé de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Corollaire. *(Relation d'isomorphie)*

Dans toute catégorie $\mathcal{C}$, la relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur la casse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Proposition

Soient u,v deux flèches d'une catégorie. Si vu est un isomorphisme, alors v est une rétraction et u est une section.

On a enfin :

Proposition. *(Mono + épi scindé $\implies$ iso)*

Tout monomorphisme sectionnable est un isomorphisme.

▷ Soit s une section d'un monomorphisme f, *i.e.* $fs = id$. Alors $f(sf) == (fs)f = f = f.id$, puis par monomorphie $sf = id$, autrement dit s est l'inverse de f. ■

Proposition. *(Épi + mono scindé $\implies$ iso)*

Tout épimorphisme rétractable est un isomorphisme.

▷ C'est la propriété duale de : mono + épi scindé $\implies$ iso. ■

5.1.7.5.1 Unicité et canonicité

Définition. *(Unique àip, essentiellement unique)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X \in \mathcal{C}$ vérifiant une propriété P est dit *unique à isomorphisme près (àip)* ou *essentiellement unique* si deux objets vérifiant P sont isomorphes dans $\mathcal{C}$.

Définition. *(Unique àipàuip, canonique)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X \in \mathcal{C}$ vérifiant une propriété P est dit *unique à isomorphisme près à unique isomorphisme près (àipàuip)* ou *canonique* si deux objets vérifiant P sont isomorphes dans $\mathcal{C}$ et qu'il n'existe qu'un seul isomorphisme entre eux.

Définition. *(Singleton standard)*

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie concrète. S'il existe, et s'il est unique à isomorphisme près, « l' » objet de cardinal 1 dans $\mathcal{C}$ est abusivement appelé *singleton standard*.

Exemples. *(Singletons standard)*

1. Dans la catégorie des ensembles, le singleton $\{\emptyset\}$ est standard.
2. Dans la catégorie des espaces topologiques, le singleton $\{\star\}$ est standard.

   Car toute application constante est continue.
3. Dans la catégorie des groupes, le groupe nul $\{0\}$ est standard.

   Car il n'y a qu'une loi de composition possible sur ce groupe.

Remarque. Rien n'oblige a priori qu'une application constante entre deux points soit un morphisme... (mais quand même, ce serait abuser).

5.1.7.5.2 Catégorie essentiellement petite

Définition. *(Catégorie essentiellement petite, svelte)*

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *localement petite* ou *svelte* si elle est localement petite et si la classe de ses classes d'isomorphismes forme un ensemble.

Exemple. *(Catégorie essentiellement petite)*

Si R est un anneau, la catégorie des R-modules à droite de type fini mod R est essentiellement petite.

Exercice 39

Montrer qu'en présence de l'axiome du choix, une catégorie $\mathcal{C}$ est essentiellement petite si et seulement si elle est équivalente à une petite catégorie.

▷ **Éléments de réponse.**

Ce n'est pas si évident. En particulier, distinguons le fait qu'il existe seulement un petit nombre de classes d'isomorphismes, *i.e.* la classe de toutes forme un ensemble, avec le fait que $\bigcup\limits_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ soit un ensemble, ce qui est plus fort, car cela impliquerait que $\mathcal{C}$ est petite, puisque $\{id_X, X\in\mathcal{C}\}\subseteq \bigcup\limits_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

D'une part, localement petite + petit nombre de classe d'isomorphismes + axiome du choix sur les classes $\Longrightarrow$ équivalente à une petite catégorie : soit $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, c'est-à-dire que pour tous $X,Y\in\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un ensemble et $\{\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y), X,Y\in\mathcal{C}\}$ est un ensemble, où $\mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est la classe des isomorphismes de X à Y. En admettant l'axiome du choix sur les classes, soit $\mathcal{T}$ un système de représentants de la relation d'isomorphisme sur la classe des objets de $\mathcal{C}$. Remarquer que $\mathcal{T}$ est un ensemble en vertu de notre seconde hypothèse. Soit $\mathcal{P}$ une catégorie dont la classe des objets est $\mathcal{T}$ et pour tous $X,Y\in\mathcal{T}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, since $\mathcal{T}\subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Soit $F:\mathcal{C}\to\mathcal{P}$ défini par : pour $X\in\mathcal{C}$, $F(X)$ est l'unique objet de $\mathcal{C}$ isomorphe à X (disons, par $g_X : F(X)\to X$ et l'on choisit arbitrairement $(g_X)_{X\in\mathcal{C}}$ avec l'axiome du choix encore) choisi dans $\mathcal{T}$, et pour $f: X\to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, $F(f) = g_Y^{-1}\circ f\circ g_X$, ce qui est compatible avec la composition. Alors F est essentiellement surjectif par construction. De plus, il est fidèle, puisque g_Y, g_X sont inversibles, et plein, écrire : $f = g_Y\circ F(X)\circ g_X^{-1}$. Enfin, $\mathcal{P}$ est une catégorie petite : en effet, $\mathcal{T}$ est un ensemble, donc $\bigcup_{X,Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$ est un ensemble, puisque les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$ sont des ensembles, car $\mathcal{C}$ est localement petite.

Réciproquement, équivalente à une petite catégorie $\implies$ localement petite + petit nombre de classe d'isomorphismes : si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ est une équivalence où $\mathcal{P}$ est petite, en particulier localement petite, pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un ensemble, puisqu'il est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(F(X),F(Y))$ par pleine fidélité. Donc $\mathcal{C}$ est localement petite. D'autre part, soit encore $\mathcal{T}$ un système de représentants de l'isomorphie dans $\mathcal{C}$. On voit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{T}$ est un ensemble, ce qui est équivalent à ce que $\{id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X), X \in \mathcal{T}\}$ soit un ensemble. Pour $X' \in \mathcal{P}$, il existe au plus un $X \in \mathcal{T}$ tel que $F(X) = X'$. Ainsi l'on a une injection de $\{id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X), X \in \mathcal{T}\}$ dans $\{id_{X'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X',X'), X' \in \mathcal{P}\}$, qui est un ensemble, donc inclus dans $\bigcup_{X,Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(X,Y)$. Remarquons qu'il suffit pour la réciproque que $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathcal{P}$.

Exercice 40 *(Caractérisations de la petitesse essentielle)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{C} \cong \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est petite ;

(ii) la catégorie des préfaisceaux $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})$ est localement petite ;

(iii) pour tout préfaisceau $q : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ et copréfaisceau $p : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, la cofin $\int_{y\in\mathcal{C}} py \times qy$ est petite ;

(iv) tout préfaisceau sur $\mathcal{C}$ est *petit*, *i.e.* c'est la colimite petite de foncteurs représentables ;

(v) pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ de codomaine localement petit, pour tout objet $b \in \mathcal{B}$, le préfaisceau $\mathcal{B}(F?,b) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est petit.

5.1.7.6 Automorphismes

Définition. ***(Automorphisme)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $X \in \mathcal{C}$. On appelle *automorphisme* de X un élément de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X,X)$ qui est un isomorphisme. On note $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ l'ensemble des automorphismes, ou isomorphismes de X.

Remarque. Étant donné un objet $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ n'est jamais vide : il contient toujours id_X.

Propriété. ***(Composition d'automorphismes)***

Le composé de deux automorphismes est un automorphisme.

▷ Puisque le composé de deux endomorphismes est toujours défini, et un endomorphisme lui-même. ■

Propriété. ***(Description des isomorphismes)***

Soit C une catégorie et X,Y deux objets de C. Si X et Y sont isomorphes (dans C), par disons $\varphi : X \simeq Y$, alors l'ensemble des isomorphismes de X dans Y est $\varphi \circ \alpha$ pour α parcourant $\mathrm{Aut}(X)$.
De même, l'ensemble des isomorphismes de X dans Y est $\alpha \circ \varphi$ pour α parcourant $\mathrm{Aut}(Y)$.

▷ Il est clair qu'un tel objet est un isomorphisme de X dans Y, d'inverse $\alpha^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Réciproquement, soit $f : X \longrightarrow Y$ un isomorphisme. Alors $f^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme (par composition) de X dans X, donc $\alpha = f^{-1} \circ \varphi \in \mathrm{Aut}(X)$. Ainsi $\varphi \circ \alpha^{-1} = f$. Puisque $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}(X)^{-1}$, le théorème est montré. La propriété duale se montre semblablement ■

Corollaire

Un objet est unique à isomorphisme près à unique isomorphisme près, si et seulement si, il est unique à isomorphisme près et son groupe d'automorphisme est trivial.

Exercice 41 *(Quelques objets uniques àipàuip)*

1. Quels sont les objets uniques àipàuip de Ens ?
2. Quels sont les objets uniques àipàuip de Grp ?
3. En déduire les objets uniques àipàuip de Ann.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Soit X un ensemble unique àipàuip, en particulier $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ens}}(X) = \mathfrak{S}(X) = \{id_X\}$. Alors $\mathrm{card}(X) < 2$. Réciproquement, $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$ sont uniques àipàuip.
2. Soit G un groupe unique àipàuip. Alors $\mathrm{Aut}(G) = \{id_G\}$. En particulier, $\mathrm{Int}(G) = \{id_G\}$, donc G est commutatif. De plus, $x \mapsto x^{-1}$ est l'identité, autrement dit, $x^{-1} = x$ pour tout $x \in G$, soit $x^2 = e_G$ pour tout x. Ainsi, G est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^I$. Si I a plus de deux éléments, l'échange des deux premières composantes fournit un automorphisme non trivial. Donc $I = \{\emptyset\}$ ou $I = \emptyset$. On trouve donc $G = \{0\}$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Réciproquement, $\mathrm{Aut}(\{0\}) = \{id\}$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{id_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\}$.
3. Ce sont les mêmes que dans Grp !

Principe. ***(Changement d'échelle en théorie des catégories)***

Nous avons vu que toutes les catégories forment une catégorie dont les morphismes sont les foncteurs. Ainsi, on peut appliquer tout ce vocabulaire aux foncteurs !
Nous allons voir aussi que les foncteurs entre deux catégories données forment une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles. Ainsi, on peut aussi appliquer tout ce vocabulaire aux transformations naturelles !
Par un effort d'abstraction supplémentaire, on comprend que ce processus peut continuer.

5.1.7.7 Groupoïde

Définition. ***(Groupoïde)***

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tout morphisme est inversible, autrement dit, telle que pour tous objets X de Y de cette catégorie, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ soit un groupe (au sens des classes).

Définition-propriété. ***(Cœur d'une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors il existe un plus grand groupoïde, qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$. On la note $H(\mathcal{C})$ et on l'appelle le *cœur* de $\mathcal{C}$.

▷ Par analyse-synthèse, $\mathrm{Ob}(H(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ et pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,Y) = \mathrm{Iso}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. ■

Remarque. Tout groupoïde $\mathcal{G}$ est son propre cœur et pour tout objet $X \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ est un groupe au sens des classes.

Exemple. ***(Cœur d'une catégorie d'incidence)***

Soit $(P,\leqslant)$ un préordre. Alors $H(\mathrm{cat}(P))$ a pour morphismes entre X et Y l'unique morphisme de $X \to Y$ si $X \leqslant Y \wedge Y \wedge X$ et aucun morphisme sinon. En particulier, si $\leqslant$ est un ordre, $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,Y) = \emptyset$ si et seulement si $X \neq Y$ et $\mathrm{Hom}_{H(\mathcal{C})}(X,X) = id_X$.

Lemme

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. Soient $X,Y \in \mathcal{G}$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ soit non vide, contenant f. Alors $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{G}}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(X)$ sont isomorphes par les pré- et post-compositions f^* et f_*.

▷ La preuve est semblable à celle donnée pour la description des isomorphismes entre deux objets via les groupes d'automorphismes. ■

Définition. ***(Groupoïde connexe)***

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde. On dit que $\mathcal{G}$ est *connexe* si pour tous $X,Y \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y) \neq \emptyset$.

Propriété. ***(Classification des groupoïdes connexes)***

Les groupoïdes connexes sont exactement les classes d'équivalence au sens des équivalences de catégories de catégories classifiantes de groupes.

▷ Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde connexe. Grâce à l'axiome du choix sur les classes, choisissons $y_{Y,Y'}$ pour tous $X,Y \in \mathcal{G}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(Y,Y')$, en imosant $y_{Y,Y} = id_Y$. On vérifie que l'on définit alors un groupe en posant $G = \bigcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y)$ muni de la loi de composition, pour $f : X \to Y$ et $g : Y' \to Z'$, $g \cdot f := g y_{Y,Y'} f$. Soit F un foncteur de $\mathcal{G}$ dans BG, forcément constante sur les éléments, et qui vaut l'identité sur les morphismes : c'est possible *(et si ce n'est pas clair, revoir la définition de catégorie classifiante)*. On a donc un foncteur pleinement fidèle de F dans $\mathcal{G}$. Il est évidemment essentiellement surjectif, puisque constant sur les objets.

Réciproquement si $\mathcal{G}$ est une catégorie équivalente à la catégorie classifiante d'un groupe par F, soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{G}$. Alors $F(f) : F(X) \to F(Y)$ est inversible, d'inverse $g' : F(Y) \to F(X)$. Puisque F est plein, soit $g : Y \to X$ tel que $F(g) = g'$, alors g est un inverse de f. Montrons enfin que $\mathcal{G}$ est connexe. Soient $X,Y \in \mathcal{G}$. Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{BG}(FX,FY) = G \neq \emptyset$. ■

Heuristique

Si M est un espace topologique, le groupoïde fondamental de M, noté $\pi(M)$, dont les objets sont les points de M et les morphismes entre deux points sont les classes d'homotopie de chemins joignant ces deux points. Alors $\pi(M)$ a une structure de groupoïde et $\pi(M)$ est connexe si et seulement si M est connexe.

Mnémonik : la théorie de l'homotopie en topologie algébrique et la théorie des catégories sont deux formulations d'une même idée.

5.1.8 Sous-objets et objets quotients

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, fixée.

5.1.8.1 Sous-objets

Définition-propriété. ***(Équivalence de monomorphismes à but fixé)***

Soit Y un objet de $\mathcal{C}$. On considère la classe $\mathcal{E}$ des morphismes (X,f) où $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$ en posant que (X,f) et (X',f') sont *équivalents* si et seulement si l'ont peut trouver $g : X \to X'$ tel que $f'g = f$ et $h : X' \to X$ tel que $fh = f'$, *i.e.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f'"'] & Y \end{tikzcd}$$

commutent.

Lemme

Si (X,f) et (X,f') sont deux paires de monomorphismes à but fixé équivalents, alors $X \simeq X'$ dans $\mathcal{C}$.

▷ On remarque que, dans la définition précédente, $h = g^{-1}$. ■

Ce n'est pas une condition suffisante !

Contre-exemple

Dans $\mathbb{R}$-Vect contenant l'objet $E = \mathbb{R}^3$ de base canonique (e_1,e_2,e_3), les deux sous-esapces F,G de bases respectives (e_1,e_2) et (e_2,e_3) sont isomorphes, mais les inclusions $F \longhookrightarrow E$ et $G \longhookrightarrow E$ ne sont pas équivalentes. Ainsi le sous-objet F ne sera pas le sous-objet G de E, ouf. □

Définition. ***(Sous-objet)***

Soit $f : X \to Y$ un monomorphisme entre deux objets X,Y de $\mathcal{C}$. Le *sous-objet* défini par f est la classe d'équivalence de (X,f).

Exercice 42 *(Sous-objets dans les catégories concrètes)*

Vérifier que dans Ens,Grp,Ann,Mod $R, R \in \mathrm{Ann}, \mathrm{Top}$, les sous-objets sont les sous-ensembles, les sous-groupes, les sous-anneaux, les sous-R-modules, les sous-espaces topologiques munis de la topologie relative.

5.1.8.2 Objets quotients

On peut dualiser.

Définition. ***(Objet quotient)***

Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme entre deux objets X,Y de $\mathcal{C}$. L'*objet quotient* défini par f est la classe d'équivalence de (Y,f) dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Exercice 43 *(Objets quotients dans les catégories concrètes)*

Vérifier que dans Ens,Grp,Ann,Mod $R, R \in \mathrm{Ann}, \mathrm{Top}$, les sous-objets sont les ensembles quotients par une relation d'équivalence, les groupes quotients, les anneaux quotients, les R-modules quotients, les espaces topologiques quotients munis de la topologie quotient.

▷ **Éléments de réponse.**

Là, pas moyen de simplement dire : « on dualise ».

5.2 Foncteurs et transformations naturelles

5.2.1 Fonteurs

5.2.1.1 Définition

Afin de représenter les liens entre les différentes catégories, on introduit la notion de foncteur, qui traduit celle de **morphismes entre catégories**.

Définition. *(Foncteur)*

Un *foncteur* ou *foncteur covariant* d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$, noté comme une application $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, est la donnée d'une fonction qui à tout objet X de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$ et d'une fonction qui à tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, associe un morphisme $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ de $\mathcal{D}$, vérifiant les deux propriétés supplémentaires : $F(id_X) = id_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et pour tous objets X,Y,Z et morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Remarques.

1. On note parfois, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, $F : X \mapsto FX$.
2. Un foncteur est la double donnée d'une correspondance entre objets et de correspondances entre flèches. On note ainsi parfois, $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ et pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, l'application $F = F_{X,Y} : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY). \\ f & \longmapsto & F_{X,Y} f \end{array}$

   On pourra retenir l'illustration suivante :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\quad F \quad} \mathcal{D}$$

$$\begin{array}{ccc} F_{\mathrm{obj}} : X & \longmapsto & F(X) \\ {\scriptstyle F_{\mathrm{mor}}:f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ F_{\mathrm{obj}} : Y & \longmapsto & F(Y). \end{array}$$

3. On a en particulier pour tout $(X,Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$. Plus encore, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(F(X))$ est un morphisme de groupes (vocabulaire à utiliser de préférence pour une catégorie localement petite).

VOC On note parfois $Id_{\mathcal{C}}$ le *foncteur identité* d'une catégorie, qui à $X \mapsto X$ et à $f \mapsto f$, mais pas systématiquement : on utilisera la même notation que pour les morphismes dans la plupart des cas.

Définition. ***(Foncteur contravariant)***

Un *foncteur* ou *foncteur contravariant* d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$, noté, de la même manière qu'un foncteur, comme une application $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, est la donnée d'une fonction qui à tout objet X de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$ et d'une fonction qui à tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, associe un morphisme $F(f) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ de $\mathcal{D}$, vérifiant les deux propriétés supplémentaires : $F(id_X) = id_{F(X)}$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et pour tous objets X,Y,Z et morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ de $\mathcal{C}$, $\boxed{F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)}$.

Reformulation pratique. ***(Foncteur contravariant)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ des catégories. Un *foncteur contravariant* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Remarques.

1. Ainsi, si l'on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$, alors on a

$$\begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "g"'] & Z \arrow[l, "f"'] \arrow[ll, bend left, "g \circ_{\mathrm{op}} f"] \end{tikzcd}$$

et donc

$$\begin{tikzcd} FX & FY \arrow[l, "Fg"'] & FZ \arrow[l, "Ff"'] \arrow[ll, bend left, "F(fg)."] \end{tikzcd}$$

2. L'illustration du foncteur covariant devient alors :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F_{\mathrm{obj}} : X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "F_{\mathrm{mor}}:f"'] & F(Y) \\ {} \arrow[r, mapsto] & {} \\ F_{\mathrm{obj}} : Y \arrow[r, mapsto] & F(X). \arrow[uu, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

Lemme

Les identités de catégories sont des foncteurs covariants et contravariants.

Définition. ***(Fonctoriel)***

Une construction entre deux catégories est dite *fonctorielle* si elle induit un foncteur. La *fonctorialité* de cette construction équivaut ce qu'elle transforme les objets d'une catégorie et les morphismes d'une catégorie respectivement en les objets et les morphismes d'une autre, de façon compatible, ce qui signifie exactement qu'elle préserve l'identité (à ne pas oublier !) et la composition des morphismes.

Exemples. ***(Foncteurs)***

1. L'application de Top dans Top qui à un espace topologique X associe son cône CX est fonctorielle. En effet, d'une application continue $f : X \to Y$ où Y est un autre espace topologique, on déduit une application également continue $Cf : CX \to CY$ qui prolonge f au sens suivant : pour tout $x \in X$, pour tout $t \in [0,1]$, $f(x,t) = (f(x),t) \in CY$. Cette construction envoie id_X sur id_{CX} et respecte sans problème la composition.
2. Le produit tensoriel est une construction *bifonctorielle* de la catégorie Mod A, A un anneau fixé, au sens suivant : soient M,N,M',N' sont des A-modules. Tout morphisme $f : M \to M'$ de A-modules et tout morphisme $g : N \to N'$ de A-modules induisent des morphismes de A-modules : $f \otimes id_N : M \otimes N \to M' \otimes N$ tel que $(f \otimes id_N)(m \otimes n) = f(m) \otimes n$ pour tous $m \in M, n \in N$ et $id_M \otimes g : M \otimes N \to M \otimes N'$ tel que $(id_M \otimes g)(m \otimes n) = m \otimes g(n)$. Ces applications $f \mapsto f \otimes id_N$ et $g \mapsto id_M \otimes g$ sont fonctorielles, puisqu'elles préservent les morphismes identités et la composition. De plus, on a un diagramme :
$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "f\otimes id_N"] \arrow[d, "id_M\otimes g"'] & M' \otimes N \arrow[d, "id_{M'}\otimes g"] \\ M \otimes N' \arrow[r, "f\otimes id_{N'}"'] & M' \otimes N' \end{tikzcd}$$
commutatif.
3. *(Foncteurs d'oubli)* On peut considérer le foncteur de Grp dans Ens qui à un groupe fait correspondre l'ensemble sous-jacent. C'est la même chose pour n'importe quelle structure algébrique (magma, monoïde, anneau, algèbre...) ; par exemple encore, nommément, si k est un corps, le foncteur d'oubli U : Mod $k \to$ Ens envoie un espace vectoriel V sur l'ensemble sous-jacent V. En topologie, on peut considérer le foncteur d'oubli Top $\longrightarrow$ Ens qui à un espace topologique associe l'ensemble sous-jacent.
4. *(Foncteur d'oubli partiel)* On n'est pas forcé d'enlever toute la structure en composant par le foncteur d'oubli. Ainsi, on dispose par exemple d'un foncteur « d'oubli partiel » ou *foncteur d'inclusion* de Ann dans Grp qui à un anneau fait correspondre le groupe sous-jacent. On peut alors également considérer le foncteur de Top dans Top$_h$ qui à $x \mapsto x$ et à $f \mapsto [f]$ (de Top vers Top$_h$ et non le contraire !). Semblablement, on dispose d'un foncteur de la catégorie des k-algèbres associatives unifères vers la

catégorie des algèbres de Lie sur k :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ass}_k &\longrightarrow \mathrm{Lie}_k \\ (A, +\,, \times\,, \,\cdot\,) &\longmapsto (A, +\,, \,\cdot\,, (a,b) \mapsto [a,b] = ab - ba). \end{aligned}$$

5. *(Foncteur de linéarisation)* On peut tenter d'inverser le foncteur d'oubli partant de Mod k vers Ens. Le foncteur de linéarisation L : Ens $\to$ Mod k envoie un ensemble X sur l'espace vectoriel $LX := kX$ de toutes les combinaisons linéaires formelles d'éléments de X. Par exemple, si X est fini, $X = \{x_1,...,x_n\}$, $LX = \{a_1x_1 + ...a_nx_n \mid a_i \in K \quad \forall i\}$, avec $x_i = 1x_i \in LX$ et un isomorphisme i : $LX \xrightarrow{\sim} k^n \ni e_i = i(x_i)$.
6. *(Foncteur coreprésenté)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Alors remarquons que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un foncteur.

   En exercice.

   À partir de là, il n'est pas difficile de voir que les restrictions aux composantes de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ seront encore des foncteurs.

   Si $\mathcal{C}$ est localement petite et $X \in \mathcal{C}$, le *foncteur coreprésenté par* X est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni g \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)=f_*"] \\ Y' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \ni f \circ g \end{tikzcd}$$

   (car l'on a bien $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Y' \end{tikzcd}$). Ce foncteur associe à un objet Y l'ensemble des applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et à un morphisme f, la *composition par* f : $f_* : \begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y') \\ g &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$. Pour revérifier que c'est bien un foncteur, *i.e.* qu'il respecte identité et composition de façon covariante, zéro difficulté, il suffit de l'écrire.
7. *(Foncteur représenté)* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $X \in \mathcal{C}$. Le *foncteur représenté par* X est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \ni g \circ f \\ Y' \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y',X) \ni g \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)=f^*"'] \end{tikzcd}$$

(car l'on a bien
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ Y' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$
). Ce foncteur associe à un objet X l'ensemble des applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et à un morphisme f, la *précomposition par f* ou *transposée* de f : $\begin{array}{rccl} f^*: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$. Là aussi, pour revérifier que c'est bien un foncteur contravariant, *i.e.* qu'il respecte identité et composition de façon contravariante, zéro difficulté, il suffit de l'écrire.

Exercice 44

Montrer que le premier axiome des foncteurs n'est pas superflu.

▷ **Éléments de réponse.**

Considérons le foncteur de la catégorie des groupes dans elle-même qui à un groupe, associe un groupe nul fixé (sans problème, puisqu'il est unique àipàuip), et à toute flèche associe l'identité du groupe nul qui est d'ailleurs une flèche nulle. Ce foncteur préserve bien la composition (il faut l'admettre toutefois, de façon bien étrange) mais $id_{\mathbb{Z}}$ est envoyé sur $id_{\{0\}}$.

Définition. ***(Composition ENTRE FONCTEURS)***

On peut égaler définir la composition entre foncteurs pour $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, on définit GF de façon évidente : si $X \in \mathcal{C}$, GF lui associe $G(F(X)) \in \mathcal{E}$ et pour $X,Y \in \mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, GF lui associe $G(F(f)) : GF(X) \to GF(Y)$ dans $\mathcal{E}$.

5.2.1.2 Isomorphismes (foncteurs)

Définition. ***(Isomorphisme (foncteur), foncteur isomorphique)***

Si $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ sont deux catégories et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, on dit que le foncteur F est un *isomorphisme (de catégories)* si $FG = Id_{\mathcal{D}}$ et $GF = Id_{\mathcal{C}}$.
Deux catégories seront dites *isomorphes (au sens fort* s'il existe un foncteur isomorphique entre les deux.

Il ne faut a priori pas confondre cette notion avec celle des isomorphismes à l'intérieur d'une catégorie.

Théorème. ***(Caractérisation des isomorphismes (foncteurs))***

Un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible.

▷ On applique le théorème de caractérisation des isomorphismes en tant que section-rétraction, à la catégorie de toutes les catégories. ■

Remarque. Notons que l'on ne définira **pas** l'équivalence de catégories avec l'existence d'un foncteur bi-inversible. Une notion plus intéressante que les isomorphismes foncteurs sont les équivalences de catégories, que nous verrons dans la section suivante.

5.2.1.3 Foncteur fidèle

L'injectivité intuitive d'un foncteur est traduite par la notion de fidélité, et la surjectivité intuitive d'un foncteur est traduite par la notion de plénitude.

Définition. ***(Foncteur fidèle)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *fidèle* si pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, pour tous morphismes $f,g : X \longrightarrow Y$, si $F(f) = F(g)$, alors $f = g$.
Autrement dit, F est fidèle si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY), f \mapsto Ff$ est injective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

Un foncteur fidèle n'a pas nécessairement besoin d'être injectif sur les objets ou les morphismes des catégories mises en jeu. Deux objets X et X' peuvent s'envoyer sur le même objet dans $\mathcal{D}$, et même deux morphismes $f : X \to Y$ et $f' : X' \to Y'$ peuvent s'envoyer sur le même morphisme dans $\mathcal{D}$, avec alors nécessairement $(X,Y) \neq (X',Y')$.

5.2.1.4 Foncteur plein

Définition. ***(Foncteur plein)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *plein* si pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, pour tout morphisme $g : F(X) \longrightarrow F(Y)$, il existe un morphisme $f : X \to Y$ tel que $g = F(f)$.
Autrement dit, F est plein si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ est surjective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

De la même manière, un foncteur plein n'est pas forcément surjectif sur les objets ou sur les morphismes. Il peut y avoir des objets de $\mathcal{D}$ qui ne sont pas de la forme FX avec X dans $\mathcal{C}$, et des morphismes entre ces objets ne peuvent alors pas être image d'un morphisme de $\mathcal{C}$.

5.2.1.5 Foncteur pleinement fidèle

Définition. ***(Foncteur pleinement fidèle)***

Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est *pleinement fidèle* s'il est plein et fidèle.
Autrement dit, F est pleinement fidèle si $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ est bijective pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

Proposition

Un foncteur pleinement fidèle est injectif à isomorphisme près sur les objets, *i.e.* si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est pleinement fidèle, $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories, alors pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, $F(X) \simeq \mathbb{F}(Y) \implies X \simeq Y$.

Exemples. ***(Foncteurs pleins, fidèles, pleinement fidèles)***

1. Le foncteur d'oubli $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ens}$ est fidèle, car tout morphisme entre deux groupes est une application entre leurs ensembles sous-jacents. Cependant, il n'est pas plein, car certaines applications entre groupes ne sont pas des morphismes.
2. Son adjoint canonique $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Grp}$ qui à un ensemble S fait correspondre le groupe abélien libre des $\mathbb{Z}$-combinaisons linéaires formelles d'éléments de S, est quant à lui plein.
3. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ est pleinement fidèle, car tout morphisme de groupes abéliens est un morphisme de groupes et tout morphisme de groupes entre deux groupes abéliens est un morphisme de groupes abéliens.

5.2.1.6 Foncteur essentiellement surjectif

Définition. ***(Foncteur essentiellement surjectif)***

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories. On dit que F est *dense* ou *essentiellement surjectif* si pour tout $Y \in \mathcal{D}$, il existe un objet $X \in \mathcal{C}$ tel que Y est isomorphe à FX dans $\mathcal{D}$.

Exemples. ***(Surjectivité essentielle)***

1. Le foncteur d'abélianisation $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Ab}$ qui à tout groupe associe son abélianisé est essentiellement surjectif.
   En effet, tout groupe abélien est isomorphe à l'abélianisé de son groupe sous-jacent par l'oubli $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$.
2. Un foncteur vers une catégorie dont tous les objets sont isomorphes (par exemple une catégorie classifiante, la catégorie des ensembles dénombrables...) est trivialement essentiellement surjectif.

3. Un peu moins débile, une sous-catégorie constituée d'une transversale pour l'isomorphie induit par définition un foncteur d'inclusion essentiellement surjectif.

5.2.2 Quelques définitions simples formalisées par les foncteurs

5.2.2.1 Catégories concrètes

Définition. ***(Catégorie concrète)***

Une catégorie est *concrète* s'il existe un foncteur fidèle, dit *foncteur d'oubli* de cette catégorie vers la catégorie des ensembles ; on peut donc la voir comme une sous-catégorie de Ens.

VOC *(Enrichissement de structure)* On dit en général qu'une structure, représentée par une catégorie $\mathcal{C}$, est *enrichie* par rapport à une autre $\mathcal{C}'$, *au-dessus* d'une certaine propriété qui la caractérise (loi algébrique, propriété topologique, que sais-je), s'il existe un foncteur d'inclusion $\mathcal{C} \longhookrightarrow \mathcal{C}'$.

Exercice 45 *(Propriétés des oublis partiels)*

1. Le foncteur qui oublie la structure multiplicative de la catégorie Ann des anneaux unitaires vers celle des groupes abéliens Ab est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?
2. Le foncteur qui envoie un anneau unitaire de Ann sur son groupe des unités dans Grp est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?
3. Le foncteur qui envoie un anneau unitaire de Ann sur l'anneau non nécessairement unitaire sous-jacent dans la catégorie PseudoAnn est-il plein ? fidèle ? pleinement fidèle ? essentiellement surjectif ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il n'est pas plein, car certains morphismes de groupes additifs sous-jacents à des anneaux n'envoient pas les 1 sur les 1. Il suffit de considérer l'anneau $\mathbb{Z}$ et $k \mapsto 2k$.
   Il est fidèle, car il vaut l'identité sur les morphismes.
   Il n'est pas essentiellement surjectif. En effet, considérer le groupe abélien $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors ce n'est pas le groupe sous-jacent d'un anneau. Soit k la caractéristique de cet anneau (unitaire) ; pour tout $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $ka := \underbrace{a + ... + a}_{k \text{ fois}} = (k.1)a = 0$, donc l'ordre des éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est borné par k, or $\exp(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$.
   Remarque. En partant de PseudoAnn, le foncteur est essentiellement surjectif. En effet, il suffit de définir, pour un groupe abélien G, la multiplication de la manière suivante : $a \cdot b = 0$ pour tous $a,b \in G$.

2. Il n'est pas plein, car certains morphismes de groupes multiplicatifs sous-jacents à des anneaux n'envoient pas les 1 sur les 1. Il suffit de considérer l'anneau $\mathbb{F}_5$ et le morphisme $1_{F_5} \mapsto \overline{5}$.
   La coïncidence sur le groupe des unités a peu de chances d'entraîner l'égalité des morphismes. Considérons l'anneau $\mathcal{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $\mathcal{K}^* = \{(1,1)\}$. Alors l'identité et le morphisme $(x,y) \mapsto (y,x)$ coïncident bien sur $\mathcal{K}^*$, mais pas sur $\mathcal{K}$.

La question se reformule ainsi : tout groupe est-il le groupe multiplicatif d'un certain anneau unitaire ? La réponse est non. Considérons le groupe $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Un anneau de caractéristique différente de 2 possède une unité différente de 1, à savoir -1, qui est un élément central d'ordre 2. Or il n'y a pas de tel élément dans G qui est d'ordre impair, donc si $G = A^*$, alors A est de caractéristique 2. Soit r un élément de A^* d'ordre premier $p \neq 2$. Il engendre un sous-anneau donné comme un quotient de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ dans laquelle $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se plonge. Or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un produit fini de corps finis $\mathbb{F}_{2^k}$, et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se plonge dans un certain $\mathbb{F}_{2^k}$ si et seulement si $p \mid 2^{k-1}$. Ainsi, A^* a un élément d'ordre $2^k - 1$ où k satisfait $p \mid 2^{k-1}$. Mais G a bien un élément d'ordre 5, mais n'a pas d'élément d'ordre $2^4 - 1 = 15$ ou plus.

Remarque. C'est le premier exemple possible, puisque $\{0\}$,$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,$\mathcal{K}$ sont les groupes d'unités respectivement de $\mathbb{Z}$,$\mathbb{F}_3$,$\mathbb{F}_4$,$\mathbb{F}_5$,$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

3. Il n'est pas plein, puisque le morphisme de pseudo-anneaux $1 \mapsto$ -1 n'est pas un morphisme d'anneaux.
Il est fidèle, car encore il vaut l'identité sur les morphismes.
Il n'est évidemment par essentiellement surjectif.

5.2.2.2 Plongement d'une catégorie dans une autre

Définition. ***(Plongement catégorique)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ se *plonge* dans une catégorie $\mathcal{D}$ s'il existe un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Exemples. ***(Plongements catégoriques)***

1. Ab se plonge dans Grp.
2. Grp ne se plonge pas dans Ens ! Remarquons par exemple que le foncteur d'oubli, fidèle, n'est pas plein.

Parfois, on appelle *plongement* un foncteur fidèle. Cette définition a l'intérêt de correspondre avec l'idée plus intuitive de plongement, car les foncteurs fidèles sont les monomorphismes de Cat.

Exercice 46 *(Théorème de Cantor-Bernstein dans* Cat*)*

(Pour résoudre cet exercice, il faut connaître la notion d'équivalence.) Supposons qu'une catégorie $\mathcal{C}$ se plonge dans une catégorie $\mathcal{D}$ et réciproquement. Les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont-elles équivalentes ?

▷ **Éléments de réponse.**

En général, non. On peut s'intéresser par exemple à des catégories d'incidence ou même à des catégories classifiantes de groupes.

5.2.3 Transformations naturelles

5.2.3.1 Naturalité

Définition. ***(Transformation naturelle)***

Soient F,G : $C \longrightarrow D$ deux foncteurs entre deux catégories C,D. Un *morphisme de foncteurs* ou *transformation naturelle* $\eta : F \longrightarrow G$ est la donnée pour tout $x \in C$ d'un morphisme de D, $\eta_x = \eta x : F(x) \longrightarrow G(x)$, tel que pour tout $f : x \longrightarrow y$ de $\mathrm{Hom}_C(x,y)$),

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"] & G(y) \end{tikzcd}$$

commute, soit : $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$.
On note parfois une transformation naturelle φ :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & D \end{tikzcd}$$

et on appelle ce diagramme 2-*cellule* et la propriété qu'il renferme *naturalité*.

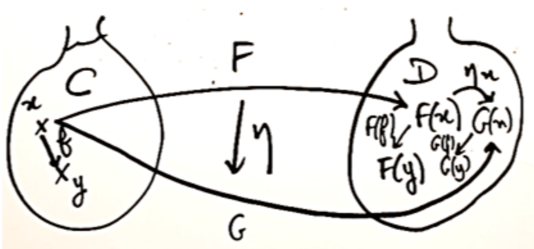


FIGURE 5.2.1 : *Transformation naturelle entre deux foncteurs entre deux mêmes catégories.* — La commutation se passe dans D, les objets x,y sont dans C.

Exemple fondamental. ***(Bidualité et transformation naturelle)***

Soient k un corps et $\mathbb{D}$: Mod $k \to$ Mod $k, V \mapsto V^{**}$. Pour $V \in$ Mod k, soit $\varphi V : V = Id_{\text{Mod } k}(V) \to V^{**} = \mathbb{D}(V), v \mapsto (\mathrm{ev}_v : l \mapsto l(v))$.
Alors φ est une transformation naturelle de $Id_{\text{Mod } k}(V)$ vers $\mathbb{D}$. En effet, pour $U \xrightarrow{f} V$

linéaire, on a

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi U"'] & V \arrow[d, "\varphi V"] \\ U^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

avec en formules :

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(u) \arrow[r, mapsto] & (m \mapsto m(f(u))) \\ (l \mapsto l(m)) \arrow[r, mapsto] & (m \mapsto (m \circ f)(v) \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

qui est bien un carré commutatif.

Heuristique

La naturalité se traduit par le fait suivant : si l'on enferme deux mathématiciens dans des pièces séparées et leur demande de construire un certain morphisme, il y a de grandes chances qu'ils construisent le même.

En pratique, les notions de fonctorialité et de naturalité sont souvent confondues par les écrivains !

Définition. ***(Composition de transformations naturelles)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Si l'on a des morphismes de foncteurs

$$F \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} H,$$

alors $\varphi\psi$ donné par $\varphi\psi(X) = (\varphi X) \circ_{\mathcal{D}} (\psi X)$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ est encore un morphisme de foncteurs.

▷ Il suffit de voir que le diagramme

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\psi X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "\varphi X"] \arrow[d, "Gf"] & HX \arrow[d, "Hf"] \\ FY \arrow[r, "\psi X"] & GY \arrow[r, "\varphi Y"] & HY \end{tikzcd}$$

commute. ■

Remarques.

1. Pour des morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] & \mathcal{D}, \end{tikzcd}$$

avec $\psi : F \Rightarrow G$ et $\varphi : G \Rightarrow H$,

la composition $\varphi\psi$ est parfois appelée *composition verticale*. Il existe aussi une *composition horizontale* : si l'on a

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "H"] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

alors la composition horizontale $\varphi \star \psi : FH \to GK$ est la composition diagonale dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} FH \arrow[r, "\varphi H"] \arrow[d, "F\psi"'] & GH \arrow[d, "G\psi"] \\ FK \arrow[r, "\varphi K"] & GK. \end{tikzcd}$$

2. Si on considère à la fois les catégories, les foncteurs et les morphismes de foncteurs, on obtient l'exemple paradigmatique d'une 2-*catégorie*, *i.e.* une catégorie « enrichie en catégories » où l'on suppose qu'il existe également des morphismes entre les morphismes. Quant au vocabulaire, les 1-morphismes (ici : les foncteurs) entre 2-objets (ici : les catégories) sont eux-mêmes les objets d'une catégorie dont les morphismes s'appellent 2-morphismes (ici : les morphismes de foncteurs). To be continued.

5.2.3.2 Centre d'une catégorie

Définition. ***(Centre d'une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le *centre* $Z(\mathcal{C})$ est la classe des endomorphismes du foncteur $Id_{\mathcal{C}}$.

Lemme. ***(Structure du centre)***

Le centre d'une catégorie muni de la composition des transformations naturelles est un monoïde commutatif.

▷ En déroulant les définitions, sur une transformation η de $Id_{\mathcal{C}}$ sur lui-même on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

pour tous objets $X,Y \in \mathcal{C}$, tout morphisme $f : X \to Y$. En particulier, pour $X = Y$ et $f = \varphi_X$ où φ est une autre transformation de $Id_{\mathcal{C}}$ sur lui-même, on a $\varphi_X \circ \eta_X = \eta_X \circ \varphi_X$, et c'est bien comme ça que l'on a défini la composition des transformations naturelles. ■

Exemples. ***(Centres de catégories)***

1. Le centre de la catégorie classifiante d'un groupe G est le centre du groupe G. Puisque la donnée d'une transformation naturelle de id_{BG} est déterminée par sa donnée sur l'unique objet de BG.
2. Le centre de la catégorie Ens est trivial. On verra que $Id_{\text{Ens}} \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}}(\{\emptyset\},?)$. Ainsi, $Z(\text{Ens}) \simeq End(\text{Hom}_{\text{Ens}}(\{\emptyset\},?)) \simeq \text{Hom}(\{\emptyset\},\{\emptyset\}$ par le lemme de Yoneda.

Exercice 47 *(Centre d'une catégorie de modules)*

Montrer que, lorsque A est un anneau, le centre de Mod A est isomorphe au centre de A.

▷ **Éléments de réponse.**

On pose $\Psi : \begin{array}{ll} Z(\text{Mod } A) & \longrightarrow Z(A) \\ \eta & \longmapsto \eta_A(1) \end{array}$ et $\Phi : \begin{array}{ll} Z(A) & \longrightarrow Z(\text{Mod } A). \\ z & \longmapsto (R_M^z : M \to M, a \mapsto az)_{M \in \text{Mod } A} \end{array}$ Ce sont deux applications bien définies, qui sont des morphismes de monoïdes et réciproques l'une de l'autre.

Heuristique

On retiendra : plus la catégorie est grande, plus le centre a des chances d'être petit (sauf si la structure de la catégorie a une certaine rigidité).

5.2.3.3 Catégories de foncteurs

On peut maintenant définir :

Curiosité. ***(Catégorie des foncteurs)***

Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, on a le morphisme identité noté par Id_F ou id_X donné par $(Id_F)(X) = id_{FX}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et l'on a vu que l'on pouvait définir la composée (verticale) deux morphismes de foncteurs. De cette façon, on obtient la *catégorie des foncteurs* $\text{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs et les morphismes les transformations naturelles.

De même qu'avec toute catégorie, il peut exister des foncteurs entre catégories de foncteurs, et des transformations naturelles entre eux, etc.

Exercice 48 *(Petitesse des catégories des foncteurs)*

Montrer que :

1. si $\mathcal{C}$ est petite et $\mathcal{D}$ est localement petite, alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est localement petite ;
2. si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont petites, alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est petite.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il s'agit de montrer que pour deux foncteurs $F,G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, la classe des transformations naturelles η de F à G forme un ensembles. Or une telle transformation se ramène à la donnée des η_X pour $X \in \mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{C}$ est petite, la classe de ses objets est un ensemble. Par l'axiome de la réunion, il suffit donc de montrer qu'à objet fixé la classe des choix de η_X est impropre. Or η_X doit être dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X))$. Puisque $\mathcal{D}$ est localement petite, ceci est un ensemble, d'où le résultat.
2. On a déjà que $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est localement petite par ce qui précède. On peut même écrire : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X))$ par une bijection de classes. Puisque $\bigcup_{X',Y' \in \mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X',Y')$ est un ensemble par hypothèse, notons le E, $\bigcup_{F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) \hookrightarrow \bigcup_{F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}} \bigsqcup_{X \in \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(X)) \hookrightarrow E$ est un ensemble, ce qu'il fallait montrer.

Principe. ***(Catégorie des « morphismes entre deux objets »)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit Q le carquois $1 \longrightarrow 2$. Alors une sous-catégorie $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Fun}(\mathrm{Ch}(Q),\mathcal{C})$ est la donnée d'un ensemble de morphismes $f_{X,Y} : X \to Y$, où $X,Y \in \mathcal{C}$, vérifiant une certaine propriété.
Les morphismes de $\mathcal{P}$ entre deux objets $f : X \to Y, g : X' \to Y'$ de $\mathcal{P}$ sont les couples de morphismes (h_1,h_2) avec $h_1 : X \to X'$ et $h_2 : Y \to Y'$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & Y \arrow[d, "h_2"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

▷ En effet, les objets de $\mathrm{Ch}(Q)$ ne sont jamais que 1 et 2. Il y a trois morphismes : l'image de 1 caractérise X puisque c'est id_X, celle de 2 caractérise Y puisque c'est id_Y, et celle de $1 \longrightarrow 2$ est un morphisme de X dans Y dans $\mathcal{C}$. Quant aux morphismes de $\mathcal{P}$, ce sont des morphismes de foncteurs, autrement dit des transformations naturelles, d'où la condition. ■

5.2.3.4 Isomorphismes naturels

Définition. ***(Isomorphisme naturel)***

Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ entre deux foncteurs $F,G : C \to D$, C,D deux catégories, est inversible si et seulement si pour tout $x \in C$, $\eta_x \in \mathrm{Hom}(F(x),G(x))$ est un isomorphisme. Dans ce cas, on parle d'*équivalence naturelle* ou d'*isomorphisme naturel*.

Propriété. ***(Caractérisation des isomorphismes naturels)***

Une transformation naturelle est un isomorphisme naturel si et seulement si c'est un isomorphisme dans la catégorie de foncteurs dont elle fait partie des morphismes.

$\triangleright$ Soit η un isomorphisme naturel de F à G. Par hypothèse, pour tout $x \in C$, on peut poser $\varphi_x = \eta_x^{-1} \in \mathrm{Hom}_D(G(x),F(x))$. De plus, à partir de $\eta_y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_x$, on calcule $\mathbb{F}(f) \circ \eta_x^{-1} = \eta_y^{-1} \circ F(f)$ ce qui signifie exactement que φ est une transformation naturelle. Par définition de la composition horizontale, on a clairement $\eta\varphi = Id_G$ et $\varphi\eta = Id_F$.

Réciproquement, supposons qu'il existe φ une transformation naturelle de G à F avec $\eta\varphi = Id_G$ et $\varphi\eta = Id_F$. Soit $x \in C$. Alors $Id_{Fx} = id_{F(x)} = \varphi_x \circ \eta_x \in \mathrm{Hom}_D(F(x),F(x))$ et $Id_{Gx} = id_{G(x)} = \eta_x \circ \varphi_x \in \mathrm{Hom}_D(G(x),G(x))$. Autrement dit, η_x est une section-rétraction de D, donc par théorème, un isomorphisme de D. $\blacksquare$

Exemples. ***(Isomorphismes naturels)***

1. $Id_{\mathrm{Ens}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},?)$.

   Notons F le foncteur représenté $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},?)$. Posons $\eta_x : Id_{\mathrm{Ens}}(X) = X \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},X)$ le morphisme de Ens, *i.e.* l'application, qui à $x \in X$ associe l'unique application constante de valeur x de $\{\star\}$ dans X. En posant φ_x qui à une application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\{\star\},X)$ associe $f(\star) \in X$, on obtient clairement un inverse de η_x dans Ens.

   Remarquons au passage que pour tout $X \in \mathrm{Ens}$, FX s'identifie à X.

5.2.4 Équivalences de catégories

On peut maintenant définir l'équivalence de catégories, qui est nettement moins forte que l'existence d'un foncteur inversible (l'isomorphie-foncteurs au sens fort défini plus haut), et en fait la bonne notion à considérer pour dire que deux catégories sont foncièrement les mêmes.

Définition. ***(Équivalence de catégories)***

Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories. Une *équivalence de catégorie* est un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tel qu'il existe un autre foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $FG \simeq Id_{\mathcal{D}}$ et $DG \simeq Id_{\mathcal{C}}$ par des isomorphismes naturels. On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont *équivalentes*. On dit que G est un *quasi-inverse* de F et réciproquement. On note : $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, ou s'il n'y a pas d'ambiguïté,

$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Remarques.

1. Le quasi-inverse est unique à équivalence naturelle près mais pas à unique équivalence naturelle près (il est donc essentiellement unique, mais pas canonique). Autrement, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; par contre, même le quasi-inverse fixé, l'équivalence naturelle de la composition à l'identité n'est pas unique. (Mais sont-elles naturellement isomorphes dans Fun ? Vous avez trois heures.)

Propriété. ***(Équivalence de catégories $\Longrightarrow$ isomorphie)***

Deux catégories équivalentes sont isomorphes.

▷ On retrouve le cas de l'isomorphie lorsque $\varepsilon : FG \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{D}}$ et $\eta : Id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ sont des égalités. ■

Méthode. ***(Montrer que deux catégories sont équivalentes)***

Souvent (comparer avec l'équivalence d'homotopie, si possible), les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasi-inverses l'un de l'autre à exhiber sont relativement simples et grossiers, et dans beaucoup de cas, l'une des compositions, disons FG, est égale à l'identité $Id_{\mathcal{D}}$. Il ne reste alors plus qu'à montrer que $GF \simeq Id_{\mathcal{C}}$. Pour cela, appliquer la définition des transformations naturelles : pour tout $X \in \mathcal{C}$, exhiber un <u>iso</u>morphisme dans $\mathcal{D}$ de $GF(X)$ à X (ou l'inverse, mais alors, ne pas changer d'âne au milieu du gué !) quoi soient compatibles avec les images des morphismes de $\mathcal{C}$.

Exemples. ***(Équivalences de catégories)***

1. Voici un exemple non trivial. Soient k un corps, n un entier naturel, Mod $\mathfrak{M}_n(k)$ la catégorie des $\mathfrak{M}_n(k)$-modules à gauche et le foncteur représenté

$$F : \mathrm{Mod}\ \mathfrak{M}_n(k) \longrightarrow \mathrm{Vect}_k,\ M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_n(k)}(k^n, M)$$

(il s'agit de voir k^n dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_n(k)}(k^n, M)$ comme espace des lignes sous l'action de $\mathfrak{M}_n(k)$).

On peut reformuler cela en termes de produits tensoriels. Notons V l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(k)$ des vecteurs colonnes considérés comme $\mathfrak{M}_n(k)$-k-bimodule et W l'espace $\mathfrak{M}_{1,n}(k)$ des vecteurs lignes considéré comme k-$\mathfrak{M}_n(k)$-bimodule. On pourra montrer que les foncteurs $V \otimes_k ?$ et $W \otimes_{\mathfrak{M}_n(k)} ?$ définissent des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre.

Alors on montre que F est une équivalence, de réciproque $G : \mathrm{Vect}_k \to$

Mod $\mathfrak{M}_n(k), E \mapsto \mathrm{Hom}_k(k^n,E)$, et qui envoie k^n sur k et réciproquement, donc toutes les propriétés et constructions intrinsèques, *i.e.* définies uniquement en termes de morphismes, d'une catégorie à l'autre sont préservées par F et son quasi-inverse. Par exemple, tout espace vectoriel V est isomorphe à une somme directe en général infinie de copies de k. Donc tout $\mathfrak{M}_n(k)$-module est isomorphe à une somme directe de copies de k^n.

Notons que cette équivalence induit une équivalence $\mathrm{mod}(\mathfrak{M}_n(k)) \to \mathrm{mod}\ k$, et l'on a donc un théorème de composition des $\mathfrak{M}_n(k)$-modules de type fini comme sommes directes finie de copies de k^n.

2. La catégorie des pérordres finis est équivalente à la catégorie des espaces topologiques finis.

Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique, on peut poser $x \leqslant y$ si et seulement si x est dans l'adhérence de $\{y\}$.

Théorème. ***(Caractérisation pratiques des équivalences de catégories)***

Un foncteur est une équivalence si et seulement s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

$\triangleright$ Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs.

$\Longrightarrow$: Soit (G,η,μ) un quasi-inverse de F, de sorte que $GF \underset{\eta}{\simeq} id_C$ et $FG \underset{\mu}{\simeq} id_D$. Alors pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$, la suite $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X),GF(Y)) \xrightarrow{\eta} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est inverse de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}((F(X),F(Y))$, ce qui signfie que F est pleinement fidèle. D'autre part, si $Y \in \mathcal{C}$, $Y \underset{\mu}{\simeq} F(G(Y)) \in F(\mathcal{C})$, donc il est essentiellement surjectif.

$\Longleftarrow$: si F est essentiellement surjectif, pour tout $Y \in \mathcal{D}$, on choisit (si l'on croît à l'axiome du choix sur la collection $\mathcal{D}$) un objet $X \in \mathcal{C}$ et tant qu'à faire un isomorphisme $\psi_Y : F(X) \simeq Y$. On pose $G(Y) = X$ ce qui définit G sur les objets. Remarquons que pour tout $X \in \mathcal{C}$, on a un isomorphisme $\psi_X : FG(Y) \simeq Y$. Définissons G sur les morphismes. Pour $g : Y_1 \longrightarrow Y_2$ dans $\mathcal{D}$, il nous suffit de vérifier que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} FGY_1 \arrow[r, "FG(g)"] \arrow[d, "\psi_{Y_1}"'] & FGY_2 \arrow[d, "\psi_{Y_2}"] \\ Y_1 \arrow[r, "g"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Or, par pleine fidélité de F, il existe un unique $G(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GY,GZ)$ qui fasse commuter ce diagramme. Ainsi $G(g) = \psi_{Y_2}^{-1} g \psi_{Y_1}$. Donc par construction, G est un foncteur et l'on a même un isomorphisme $\psi : FG \simeq Id_{\mathcal{D}}$ naturel. Si maintenant $X \in \mathcal{C}$, le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\psi_X)"] \arrow[dr, "Id_F"'] & FG(X) \arrow[d, "\varphi_{F(X)}"] \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

énonce qu'également φ est un isomorphisme naturel $GF \simeq Id_{\mathcal{C}}$, d'où le résultat. ■

Exercice 49 *(Pleinement fidèle $\neq$ inversible)*

Donner un exemple de foncteur pleinement fidèle qui n'est pas une équivalence de catégories.

▷ **Éléments de réponse.**

On a vu que le foncteur d'inclusion Ab → Grp est pleinement fidèle. Cependant, Ab et Grp ne peuvent être équivalentes, car le théorème de classification des groupes de type fini est vrai dans Ab, mais pas dans Grp.

Application. ***(Description de la catégorie des matrices par les modules de type fini)***

Soient k un corps et Mat_k la catégories des matrices sur k. Soit $F : \mathrm{Mat}_k \to \mathrm{mod}k$ le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur k^n (voir k^n comme espace des colonnes) et qui envoie une matrice $A : n \to m$ sur l'application linéaire $k^n \to k^m, x \mapsto Ax$. Alors F est une équivalence de catégories.

En effet, c'est bien un foncteur étant donné que la multiplication des matrices se répercute comme composition des applications linéaires. Il est dense, car tout espace vectoriel sur k de dimension finie est isomorphe à un certain k^n où n est sa dimension. Enfin, F est aussi pleinement fidèle, en effet : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mat}_k}(n,m) = \mathfrak{M}_{m,n}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(F(n),F(m)) = \mathrm{Hom}_k(k^n,k^m)$.

Remarquons qu'il n'était pas dûr d'exhiber un quasi-inverse : en effet, $G : E \mapsto \dim(E)$ et $f \mapsto \mathfrak{M}(f)$ dans les bases canoniques est tel que $GF = Id_{\mathrm{Mat}_k}$ et $FG \simeq Id_{\mathrm{mod}k}$, mais même avec un foncteur d'expression simple, il y a moins de vérifications à faire en utilisant le théorème (en plus qu'il n'y a pas à réfléchir).

Contre-exemple. ***(Équivalence qui n'est pas un isomorphisme)***

Mieux : nous allons exhiber deux catégories équivalentes mais non isomorphes.

L'exemple précédent convient. En effet, la catégorie Mat_k est petite, mais pas mod k !

Or il est clair qu'un isomorphisme de catégories induit une bijection entre les classes d'objets. □

5.2.5 Dualité

Commençons par quelques remarques sur les catégories opposées.

Remarques.

1. Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Puisque l'opposée de l'opposée est la catégorie, un foncteur covariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

2. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ contravariant, *i.e.* par définition un foncteur covariant de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, est sans abus de notation égal à un foncteur covariant de $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ (le vérifier sur un papier). Réciproquement, un foncteur covariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Cette remarque permet de boucler la dualité entre covariance et convariance, comme nous allons l'illustrer dans la preuve suivante.
3. Par conséquence, si $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est contravariant, alors il est contravariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Réciproquement, si un foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ est covariant, c'est un foncteur covariant de $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Définition-propriété. *(Dualité entre catégories)*

On dit que deux catégories $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ sont *duales*, et que l'on a une *dualité* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, si l'on a une équivalence de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{D}$.

▷ Il faut vérifier que la dualité est une notion symétrique. Supposons qu'on a une équivalence F de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{D}$, avec donc un quasi-inverse G de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Exhibons une équivalence de $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ à $\mathcal{C}$. On pose un *foncteur opposé* G^{op} qui à $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ associe $G^{\mathrm{op}}(X) := G(X)$ et qui à $f : X \to Y$ morphisme de G associe $G^{\mathrm{op}}(f) := G(f) : G(Y) \to G(X)$, bien défini car $G(f)$ vit dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et qui définit bien un foncteur covariant de $\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$, *i.e.* contravariant de $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$. On peut définir F^{op} de manière similaire. Il est facile de vérifier ensuite que $F^{\mathrm{op}}G^{\mathrm{op}} = Id_{\mathcal{D}^{\mathrm{op}}}$ et $G^{\mathrm{op}}F^{\mathrm{op}} = Id_{\mathcal{C}}$. ■

Définition. *(Anti-équivalence de catégories)*

On dit que deux catégories $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ sont *(anti-équivalentes)*, et que l'on a une *(anti-)équivalence* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, si l'on a une équivalence contravariante (avec quasi-inverse contravariant également) de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$.

On a là deux points de vue techniquement distincts, mais révélateurs d'une seule et même notion.

Fait. *(Anti-équivalence = dualité)*

Deux catégories sont duales l'une de l'autre si et seulement si elles sont anti-équivalentes. Cela découle des deux remarques initales de cette section.

Heuristique

Cela vient du fait qu'il n'existe pas d'« identité contravariante ».

L'équivalence et la dualité sont fondamentalement différent ! Deux catégories équivalentes sont foncièrement les mêmes, tandis que deux catégories duales ou anti-équivalentes sont foncièrement opposées.
Et pourtant, on dit parfois que deux catégories anti-équivalentes sont équivalentes, par abus de langage : ceci prévaut surtout dans des cas pratico-pratiques ou les objets priment sur les morphismes.

Définition. ***(Autodualité)***

Une catégorie est *autoduale* si elle est équivalente à sa duale.

Remarque. Ainsi, tous les théorèmes d'une catégorie autoduale sont vrais sous leur forme duale.

5.2.6 Préfaisceaux

Définition. ***(Préfaisceau sur une petite catégorie)***

Soit I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *préfaisceau* sur I à valeurs dans $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : I^{\text{op}} \to \mathcal{C}$.

On rappelle que si X est un espace topologique, on note $\text{Open}(X)$ l'ensemble partiellement ordonné des ouverts de X et on l'identifie avec la catégorie d'ensemble ordonnée correspondante.

Définition. ***(Préfaisceau)***

Si X est un espace topologique et $\mathcal{C}$ une catégorie, un *préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$* est un préfaisceau à valeurs dans $\mathcal{C}$ sur $\text{Open}(X)$. Pour tout ouvert U de X, si F est un préfaisceau sur X, si $\mathcal{C}$ est concrète, on appelle *section* les éléments de FU.

Définition. ***(Préfaisceau abélien)***

Un *préfaisceau abélien* est un préfaisceau à valeurs dans la catégorie $\text{Ab} \simeq_{\text{isom}} \text{Mod}\,\mathbb{Z}$ des groupes abéliens.

Remarque importante. Donc, un préfaisceau F sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ est donné par :

- ⋆ un objet $FU \in \mathcal{C}$ pour chaque ouvert U de X,
- ⋆ un morphisme $FV \to FU$ pour chaque inclusion $U \subseteq V$.

En images :

$$\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, mapsto] \arrow[d, hook] & FU \\ V \arrow[r, mapsto] & FV. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On note $F_U^V : FV \to FU$ ce morphisme et on l'appelle parfois *morphisme de restriction*.

Remarquons que par hypothèse de fonctorialité $F_U^U = id_{FU}$ toujours et pour des ouverts $U \subseteq V \subseteq W$, on a

$$\begin{tikzcd} FW \arrow[r, "F_V^W"] \arrow[rr, bend right, "F_U^W"'] & FV \arrow[r, "F_U^V"] & FU \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$ d'où l'égalité $F_U^W = F_U^V \circ F_V^W$.

Exemple fondamental. ***(Préfaisceau de fonctions régulières)***

Soit X un espace topologique. Alors, si à $U \subseteq X$ ouvert, on associe $FU = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$, avec les applications de restriction naturelles, alors F est un préfaisceau sur X à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels réels.

Reformulation pratique. ***(Morphisme de préfaisceaux)***

Si $F,G : \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ sont des préfaisceaux sur l'espace topologique X à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$, un *morphisme de préfaisceaux* $\varphi : F \to G$ est donné par des morphismes $\varphi U : FU \to GU$ pour chaque ouvert U de X tel que pour $U \subseteq V$, on ait un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} FV \arrow[r, "F_U^V"] \arrow[d, "\varphi V"'] & FU \arrow[d, "\varphi U"] \\ GV \arrow[r, "G_U^V"] & GU. \end{tikzcd}$$

Deux préfaisceaux seront *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que foncteurs.

Curiosité. ***(Catégorie des préfaisceaux)***

Par extension du cas des simples foncteurs, on obtient également la *catégorie des préfaisceaux* $\mathrm{Pre}(X,\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$ sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$.

Exercice 50

Soit k un corps et $f\mathrm{Vect}_k \subseteq \mathrm{Mod}\ k$ la sous-catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie. Classifier, à isomorphisme près, les préfaisceaux à valeurs dans $f\mathrm{Vect}_k$ sur l'espace topologique ponctuel $X = \{\star\}$.

▷ **Éléments de réponse.**

Dans ce cas, $\mathrm{Open}(X) = \{\emptyset,X\}$ donc il existe un unique morphisme hors l'identité dans $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}}$ qui va de X dans $\emptyset$ (oui !). Il s'agit donc exactement, pour décrire un préfaisceau de X dans $f\mathrm{Vect}_k$, de trouver deux espaces vectoriels E et F respectivement associés à X et $\emptyset$ et d'une application linéaire $f : E \to F$. (Aux inclusions $\emptyset \subseteq \emptyset$ et $X \subseteq X$ on associe les applications linéaires id_F et id_E et on a là toutes les images des morphismes de $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}}$, et les compositions sont automatiquement respectées.) Soient deux tels préfaisceaux isomorphes par φ, données par (E,F,f) et (E',F',f'). On a donc $f' \circ \varphi_X = \varphi_\emptyset \circ f$ avec $\varphi_X : E \to E'$ et $\varphi_\emptyset : F \to F'$ des isomorphismes linéaires. En particulier, $E \simeq E'$ et $F \simeq F'$. De plus, f' et f sont conjugués sous l'action de $GL_{\dim(F)}(k) \times GL_{\dim(E)(k)}$. On peut vérifier facilement que cette condition est suffisante.

5.2.7 Lemme de Yoneda

5.2.7.1 Foncteur de points

En théorie des catégories, le lemme de Yoneda est un théorème de plongement d'une catégorie localement petite dans une catégorie de foncteurs : les objets sont identifiés à certains types de foncteurs, dits représentables, et les morphismes aux transformations naturelles entre ces foncteurs, qui de plus sont là toutes décrites. On pourra faire là un parallèle avec la dernière proposition de la section AUTOMORPHISMES.

⟶ *Notation.* Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Alors on rappelle que l'on peut définir pour tout objet A de $\mathcal{C}$ un *foncteur* Hom covariant de $\mathcal{C}$ dans Ens défini par

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$$
$$f \mapsto (g \mapsto f \circ g)$$

(à partir du bifoncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} := \mathrm{Hom}$) qui, par un effort d'abstraction supplémentaire, fournit un foncteur <u>contravariant</u> h^- de $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

En remplaçant $\mathcal{C}$ par son opposée, il s'agit de considérer maintenant le foncteur covariant $h_- : A \mapsto h_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)$ qui donne un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

Le foncteur contravariant $h_A = \mathrm{Hom}(-,A)$ est appelé *foncteur des points* de A et le foncteur covariant $h^A = k_A = \mathrm{Hom}(A,-)$ *foncteur des copoints* de A. On remarque que ces deux concepts n'en font qu'un :

$$h_{X\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(T,X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,X) = k_{X\mathcal{C}}(T)$$

pour tous $X,T \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire que le foncteur k_X de $\mathcal{C}$ n'est autre que le foncteur h_X de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Fait

Tout morphisme de A vers B dans $\mathcal{C}$ induit une transformation naturelle de h^B dans h^A.

Le lemme de Yoneda affirme que toute transformation naturelle de h^B dans h^A est de cette forme ; mieux, il caractérise l'ensemble des transformations naturelles de h^A dans n'importe quel foncteur de $\mathcal{C}$ dans Ens.

5.2.7.2 Preuve du lemme de Yoneda

Lemme. ***(Lemme de Yoneda)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, toute transformation naturelle ψ de h^A sur un foncteur $T : \mathcal{C} \to$ Ens est uniquement déterminée par l'élément de $T(A)$ défini comme l'image de $id_A \in h^A(A)$ par $\psi(A)$. Plus précisément, on dispose d'une bijection de classes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(h^A,T) &\longrightarrow T(A) \\ \psi &\longmapsto \psi(A)(id_A). \end{aligned}$$

En particulier, pour tous objets A et B de $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Nat}(h^A,h^B) \simeq h^B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A).$$

▷ Montrons l'injectivité. Soit ψ une transformation naturelle de h^A sur T. Pour tout élément f dans $h^A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, on a $f = h^A(f)(id_A)$. En appliquant cette identité à l'application ensembliste $\psi(B) : h^A(B) \to T(B)$, on obtient $\psi(B)(f) = \psi(B)[h^A(f)(id_A)] = T(f)[\psi(A)(id_A)]$ également par définition d'une transformation naturelle. En faisant varier f, on voit que ψ est uniquement déterminé par $\psi(A)(id_A)$, d'où le résultat.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit v un élément de $T(A)$. La preuve de l'injectivité permet de deviner un antécédent de v : définissons, pour tout objet B de $\mathcal{C}$, $\psi_v(B) : \begin{aligned} h^A(B) &\longrightarrow T(B) \\ f &\longmapsto T(f)(v) \end{aligned}$ et vérifions que ψ_v est bien une transformation naturelle. Pour toute flèche $g : B \to C$ et pour tout élément f de $h^A(B)$, on peut donc écrire $T(g)[\psi_v(B)(f)] = T(g)[T(f)(v)] = T[gf](v) = \psi_v(C)(gf)$. Or, la composée gf peut-être regardée comme l'image de f par $h^A(g)$, ce qui se reformule en $T(g)[\psi_v(B)(f)] = \psi_v(C)[h^A(g)(f)]$. En faisant varier f, $T(g) \circ \psi_v(B) = \psi_v(C) \circ h^A(g)$, ce qui est vérifié pour toute flèche g, et donc ψ_v est bien une transformation naturelle de h^A sur T d'image v par construction. ■

Reformulation pratique

Soit $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ Ens un foncteur et $X \in \mathcal{C}$ localement petite. Alors on a une bijection

$$\varepsilon X : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X),F) \xrightarrow{\sim} FX, \varphi \mapsto (\varphi X)(id_X).$$

Essayons de le re-démontrer sous cette forme.

Preuve.

▷ À partir de rien, on vérifie que $\varphi \mapsto (\varphi X)(id_X)$ est bien un morphisme et qu'on obtient un inverse $\eta X : FX \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X),F)$ en envoyant $x \in FX$ sur $(\eta X)(x) : \mathrm{Hom}(?,X) \to F$

donné par $((\eta X)(x))(Y) : \mathrm{Hom}(Y,X) \to FY, f \mapsto (Ff)(x)$:

$$
\begin{tikzcd}
f : Y \arrow[r] & X \\
Ff : FY & FX \arrow[l] \\
(Ff)(x) & x \arrow[l, mapsto] \arrow[u, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

en toutes lettres. ■

Remarques.

1. Si l'on applique ceci à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ et un foncteur $F : \mathcal{C} = (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, on trouve la bijection
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?),F) \xrightarrow{\sim} FX, \varphi \mapsto (\varphi X)(id_X).$$
2. *(Avec le vocabulaire de la section suivante)* Une autre reformulation utile : pour tout $X \in \mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{ev}_X : \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \to \mathrm{Ens}$, $F \mapsto FX$ est représentable : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X)$ est un représentant et εX donne une représentation.
3. Cas particulier : soient T un espace topologique, $\mathcal{C} = \mathrm{Open}(T)$, U un ouvert de T. Alors le foncteurr $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ens}) \to \mathrm{Ens}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}U$ est représentation est un représentant est $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Open}(T)}(?,U) : \mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$. Explicitement, si $V \in \mathrm{Open}(T)$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,U) = \begin{cases} \{*\} \text{ si } V \subseteq U \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$

Exemples. ***(Lemme de Yoneda)***

1. $\mathrm{End}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,?)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,X)$.

Heuristique

Le lemme de Yoneda exprime le fait que deux objets X et Y sont isomorphes dans une catégorie si et seulement si toutes les relations dans lesquelles ils sont impliqués sont identiques, autrement dit s'ils ont les mêmes ensembles de morphismes avec tous les autres objets de la catégorie.

Application. ***(Le théorème de Cayley)***

Ces considérations sont une génération large du théorème du Cayley pour les groupes, qui énonce que tout groupe se plonge dans son groupe des permutations.
On sait que tout groupe peut-être vu comme une catégorie à un seul objet, qui est alors petite donc localement petite. Le lemme de Yoneda s'applique : la catégorie $G = BG$ se plonge dans $\mathrm{Fun}(G,\mathrm{Ens})$. Or un tel foncteur se ramène, puisqu'elle n'a qu'un objet, a sa

donnée sur les morphismes, *i.e.* les éléments de G.

5.2.7.3 Foncteur de Yoneda

Définition. ***(Foncteur de Yoneda)***

Avec les notations précédentes, le *foncteur de Yoneda* ou *plongement de Yoneda* est le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}) \\ X & \longmapsto & X^\wedge := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X). \end{array}$$

On définit semblablement le foncteur dual $X^\vee$.

Remarques.

1. On préfère les préfaisceaux $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ aux copréfaisceaux, car, d'abord, les préfaisceaux sont plus courants, et pour les préfaisceaux, le foncteur de Yoneda est covariant.
2. Le lemme de Yoneda nous dit donc que si $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un préfaisceau, alors on a la bijection naturelle $\{$morphismes de préfaisceaux $X^\wedge \xrightarrow{\varphi} F\} \xrightarrow{\sim} \{$éléments de $FX\}, \varphi \mapsto (\varphi X)(id_X)$.
   Il nous arrivera d'identifier les éléments de FX avec les morphismes $X^\wedge \to F$ via cette bijection.
3. Si, pour F, on choisit un autre foncteur représentable $F = Y^\wedge$ pour un $Y \in \mathcal{C}$, on obtient la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})}(X^\wedge,Y^\wedge) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), \varphi \mapsto (\varphi X)(id_X)$. D'où le corollaire suivant :

Corollaire. ***(Pleine fidélité du foncteur de Yoneda)***

Le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ est pleinement fidèle.
Autrement dit, $\mathcal{C}$ se plonge dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$.

5.3 Universalité

5.3.1 Propriétés universelles, foncteurs représentables

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite, petite à agrandissement de l'univers près.

Définition. ***(Foncteur représentable, co-représentable)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur. On dit que F est *représentable* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $q : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?; X_0) \xrightarrow{\sim} F$. Le couple (F,q) est une *représentation* de F.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est dit *co-représentable* s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0,?) \xrightarrow{\sim} F$. Le couple (F,q) est alors une *co-représentation* de F.

La représentation de foncteurs permet de construire des objets, même si ce n'est pas évident à première vue puisque l'on travaille sur des applications. Éprouvons-le sur des exemples.

Exemples. ***(Foncteurs représentables, co-représentables)***

1. Le foncteur $\mathcal{P} : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \mathcal{P}(X)$ est représentable par l'ensemble $\{0,1\}$.
2. *(Produit cartésien)* Prenons un peu d'avance sur la suite en décrivant le paradigme de représentation qui permet de construire le produit, par exeple le produit cartésien. Soient $X,Y \in \mathrm{Ens}$ fixés. On définit $F : \mathrm{Ens}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, T \mapsto \mathrm{Hom}(T,X) \times \mathrm{Hom}(T,Y)$, décrit sur les morphismes par des applications transposées. Alors F est représentable par $X \times Y$.
   La construction duale aurait donné le coproduit, qui n'est autre que la somme dans les catégories Mod R, k-Vect, Ab...
3. *(Quotient)* Soit A un anneau, soit I un idéal de A. Le foncteur $F : \mathrm{Ann} \to \mathrm{Ens}, B \mapsto \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}}(A,B) \mid I \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}$ est représentable par A/I. Même chose pour les autres catégories admettant un quotient « facilement ».
4. *(Noyau)* Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Le foncteur $F : \mathrm{Grp}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, H \mapsto \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(H,G) \mid f \circ g = e_{G'}\}$ est représenté par $\mathrm{Ker}(f)$.
5. *(Sous-corps parfait maximal, clôture parfaite)* Soit $p \in \mathcal{P}$. Soient p-Krp la catégorie des corps de caractéristique p et D sa sous-catégorie pleine des corps parfaits. Soit $K \in D$. Le foncteur $F : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, L \mapsto \mathrm{Hom}_{k\text{-Krp}}(L,K)$ est représentable par le plus grand sous-corps parfait de K, qui est l'intersecion des sous-corps de puissances p^n-ièmes de K, soit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K^{p^n}$.
   Dualement, le foncteur $F : \mathbb{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, L \mapsto \mathrm{Hom}_{p\text{-Krp}}(K,L)$ est représentable par la clôture parfait de K, qui est la réunion dans $\overline{K}$ des extensions engendrées par les racines p^n-ièmes d'éléments de K, soit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K^{p^{-n}}$.
6. *(Intérieur)* Si X est un espace topologique et A une partie de X, le foncteur de $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} = \mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ défini par $F(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(X)}(U,A)$, où $\mathcal{P}(X)$ est la catégorie d'incidence de $\mathcal{P}(X)$, est représentable par $\mathring{A}$.
7. *(Objet libre, polynômes (!))* Soit I un ensemble et A un anneau commutatif. Le foncteur de Mod A dans Ens, respectivement Grp, respectivement Ab, respectivement Mod, respectivement A-alg., qui à un A-module F associe F^I est représentable. On obtient alors respectivement : le A-module libre $A^{(I)}$, le groupe libre sur I, le groupe commutatif $A^{(I)}$, le monoïde libre des mots sur l'alphabet I, l'algèbre des polynômes à indéterminées dans I.
   Le lecteur se réjouira d'apprendre que la construction d'une algèbre de polynômes

et d'un groupe libre sur un alphabet est la manifestation d'une seule et même construction universelle.

8. *(Abélianisé)* Soit G un groupe. Définissons $F\colon \begin{array}{rcl} \mathrm{Ab} & \longrightarrow & \mathrm{Ens}. \\ A & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,A) \end{array}$ On sait que pour tout A abélien, tout morphisme $f : G \to A$ s'écrit $h\pi$ pour un unique $h : G^{ab} \to A$ où $\pi : G \to G^{ab}$ est la projection canonique. Autrement dit, on a une bijection $\eta A : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab},A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G,A)$ qui à $h \mapsto h\pi$. Clairement, les ηA, $A \in \mathrm{Ab}$, forment un morphisme de foncteurs $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(G^{ab},?) \to F$ est même un isomorphisme. Donc F est co-représentable et (G^{ab},η) est une co-représentation.

9. *(Complété)* Soit E un espace métrique. Le foncteur de la catégorie des espaces métriques complets dans Ens qui à un espace métrique complet X associe $\mathrm{Hom}(E,X)$ est représenté par le complété de E.

10. *(Topologie induite)* Soient $X \in \mathrm{Top}$ et Y une partie de X. La topologie induite par X sur Y muni de l'injection canonique représente le foncteur de Top dans Ens qui à A associe l'ensemble des applications continues de A dans X dont l'image est incluse dans Y.

En fait, on dit que $G \xrightarrow{\pi} G^{ab}$ est la solution du problème universel donné par les morphismes de G vers un groupe abélien, terminologie déjà rencontrée sans doute en pratique.

Principe. ***(Problème universel)***

Un *problème universel* dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ ou $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. On dit aussi que le problème est *posé par* le foncteur F. Ce problème admet une *solution* si ce foncteur F est représentable ou co-représentable et, dans ce cas, la solution est une représentation ou co-représentation η. Cette solution vérifie par construction la *propriété universelle* définie par F.

On souhaite maintenant décrire les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \to F$ de façon plus explicite et montrer que

Propriété

Si (X_0,q) et (X_0',q') sont deux représentations, il existe un unique isomorphisme $\varphi : X_0' \xrightarrow{\sim} X_0$ **dans $\mathcal{C}$** tel que $\eta \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,\varphi) = \eta'$.

$$\begin{tikzcd}
X_0 & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \arrow[dr, "\eta"] & \\
& & F. \\
X_0' \arrow[uu, "\varphi"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0') \arrow[uu, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,\varphi)"'] \arrow[ur, "\eta'"'] &
\end{tikzcd}$$

▷ Conséquence du lemme d'Yoneda. ■

Remarque. Supposons que $F \in \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ est représentable. Il s'ensuit que dans une représentation $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \xrightarrow{\sim} F$, η est donné par $(\eta X_0)(id_{X_0}) = x_0$.

VOC Un élément $x_0 \in FX_0$ *exhibe* X_0 comme représentant de F, si le morphisme $X_0^\wedge \to F$ correspondant à x_0 est un isomorphisme.

Fait

La pleine fidélité du foncteur de Yoneda nous donne donc l'unicité à isomorphisme unique dans $\mathcal{C}$ près, d'un représentant X_0 de $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$.

$$\begin{tikzcd}
 & F & \\
X_0^\wedge \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, dashed] & & X_0'^\wedge \arrow[ul, "\eta'"']
\end{tikzcd}$$

$$\exists!\ X_0 \xrightarrow[\exists!\varphi]{} X_0'.$$

5.3.2 Objets finaux, objets initiaux

Définition. ***(Objet initial)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *initial* si, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X_0 \to Y$.

Définition. ***(Objet final)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *final* si, pour tout objet $Y \in \mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $Y \to X_0$.

Exemples

1. L'ensemble vide $\emptyset$ est initial dans Ens et le singleton $\{*\}$ est final dans Ens.
2. Le groupe nul est initial et final dans Grp. L'anneau nul est initial et final dans Ann la catégorie des anneaux unitaires. L'espace nul $\{0\}$ est initial et final dans la catégorie k-Vect. De même dans $\mathrm{Mod}(R)$ et R-Mod si R est un anneau.
3. Le préfaisceau nul $U \mapsto \{0\}$ est initial et final dans la catégorie $\mathrm{Pre}(X,\mathrm{Ab})$ pour un espace topologique X.
4. La catégorie des corps n'a pas d'objet initial ! Mais la catégorie des corps de caractéristique fixée p a un objet initial, c'est le corps premier de caractéristique p. Ainsi, il existe un recouvrement de Krp par des sous-catégories admettant toutes des objets initiaux.

Fait. *(Dualité finalité-initialité)*

La finalité est l'initialité dans la catégorie opposée et vice versa.

Propriété. *(Unicité àipàui des objets initiaux)*

Si X_0 et X_0' sont deux objets initiaux d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphiseme.

▷ Il existe un unique $\varphi : X_0 \to X_0'$ et unique $\psi : X_0' \to X_0$ et il existe $\varphi : X_0 \xrightarrow{\sim} X_0'$ et on doit avoir $\varphi\psi = idX_0'$ et $\psi\varphi := id_{X_0}$, car il n'existe qu'un seul morphisme $X_0 \to X_0$ respectivement $X_0' \to X_0'$. ■

Proposition. *(Unicité àipàui des objets finaux)*

Si X_0 et X_0' sont deux objets finaux d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphiseme.

▷ On applique la preuve précédente dans la catégorie duale où les isomorphismes sont forcément en bijection avec ceux de la catégorie d'origine. ■

Propriété

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $* : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ le préfaisceau constant de valeur $\{*\}$ (il envoie tous les morphismes sur $id_{\{*\}}$). Notons que $\{*\}$ est l'unque préfasiceau à isomorphisme unique près $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ tel que $|FX| = 1$ pour tout $X \in \mathcal{C}$. Notons $*' : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, X \mapsto \{*\}$ le copréfaisceau constant de valeur $\{*\}$. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est final, respectivement initial, si et seulement si il représente $*$, respectivement $*'$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_0) \xrightarrow{\sim} *$, respectivement $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_0,?) \xrightarrow{\sim} *'$.

Heuristique

Donc les objets initiaux et finaux sont des solutions de problèmes universels au sens du paragraphe précédent. En particulier, on retrouve le fait (trivial) qu'ils sont unique à isomorphisme unique près[a]

[a] Ce qui confirme : « la théorie des catégories sert à montrer que certains énoncés triviaux sont trivialement triviaux ».

On peut faire le constat inverse, bien qu'il ne serve à rien : toute solution d'un problème universel est objet final d'une catégorie bien choisie. Cependant, on en retire une condition nécessaire et suffisante d'existe d'un objet final, et donc initial à dualité près.

Exercice 51

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ un foncteur. La *catégorie des éléments* $\int F$ de F a pour objets les couples $(X{,}x)$, $X \in \mathcal{C}$, $x \in FX$, et morphismes $(X{,}x) \to (X'{,}x')$ les morphismes $X \xrightarrow{f} X'$ tels que $(Ff)(x) = x'$, la composition provenant de celle de $\mathcal{C}$. Notons que tout objet $(X{,}x)$ correspond à un unique morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X{,}?) = X^\vee \xrightarrow{\varphi} F$ par Yoneda : $(\varphi X)(id_X) = x \in FX$.

Montrer que $\int F$ a un objet final $(X_0{,}x_0)$ si et seulement si F est représentable et que le cas échéant, x_0 exhibe X_0 comme solution du problème universel posé par F, *i.e.* $X_0^\vee \xrightarrow{\varphi} F$ tel que $(\varphi X_0)(id_{X_0}) = x_0$ est un isomorphisme.

▷ On pourrait résoudre cet exercice à la main, mais il est bien plus rapide d'utiliser le foncteur de Yoneda (contravariant, car on considère des co-préfaisceaux). Dans $\int F$:

$$\begin{tikzcd}
(X{,}x) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & X^\vee \arrow[r] & F \\
(X'{,}x') & X'^\vee \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

commute si et seulement si $(Ff)(x) = x'$. ■

5.3.3 Objets nuls

Définition. ***(Objet nul)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $X_0 \in \mathcal{C}$ est *nul* s'il est à la fois final et initial.

Exemples. ***(Objets nuls)***

1. La catégorie Ens n'a pas d'objet nul.
2. Par contre, la catégorie $\mathrm{Ens}_\star$ des ensembles pointés $(X{,}x_0)$ dont les morphismes sont également pointés, a un objet nul : $(\{\star\}{,}\star)$.
3. De même, Top n'a pas d'objet nul, mais la catégorie des espaces topologiques pointés $\mathrm{Top}_\star$, si.
4. Si R est un anneau, Mod R a un objet nul : le module nul $\{0\}$.
5. Si I est une petite catégorie, alors le préfaisceau constant de valeurs $\{0\}$ est l'objet nul de $\mathrm{Pre}(I{,}\mathrm{Ab})$.

Proposition. ***(Unicité àipàui des objets nuls)***

Si X_0 et X_0' sont deux objets nuls d'une catégorie $\mathcal{C}$, ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}$, par un unique isomorphiseme.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note parfois $X_0 = 0$ un objet nul.

5.3.4 Opérations dans les catégories définies par des propriétés universelles

5.3.4.1 Produits et coproduits

Définition. ***(Produit dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *produit* de $(X_i)_{i\in I}$ existe si le foncteur produit $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X_i) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, Y \mapsto \underbrace{\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_i)}_{\text{produit d'ensembles}}$ est représentable, et alors on note $\prod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ un représentant, unique à isomorphisme unique près.

Définition. ***(Co-produit dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$. Le *coproduit* de $(X_i)_{i\in I}$ existe si le foncteur produit $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, Y \mapsto \underbrace{\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i,Y)}_{\text{produit d'ensembles}}$ est co-représentable, et alors on note $\coprod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ un représentant, unique à isomorphisme unique près.

Remarques.

1. Donc si $(p_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{j\in I}^{\mathcal{C}}(X_j,X_i)$ exhibe $\prod_{j\in I}^{\mathcal{C}} X_j$ comme produit des $X_i, i\in I$, on a la bijection
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\prod_{j\in I}^{\mathcal{C}} X_j) &\longrightarrow \prod_{j\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X_j)\\ f &\longmapsto (p_j f)_{j\in I}.\end{aligned}$$
Supposons $I=\{1,2\}$. Alors cette bijection traduit la propriété universelle :
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ & X_1 \prod X_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ X_1 & & X_2. \end{tikzcd}$$
2. Supposons $I=\emptyset$. Par convention le produit de la familel vide d'ensembles est l'ensemble singleton. Alors $\prod_{\emptyset}^{\mathcal{C}}$ est l'objet initial de $\mathcal{C}$, s'il existe.
3. Si $\mathcal{C}=\mathrm{Ens}$, alors $\prod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ est le produit habituel des ensembles X_i et $\coprod_{i\in I}^{\mathcal{C}} X_i$ est la réunion disjointe des ensembles X_i.

4. Si $\mathcal{C} = R$-Mod, le produit est le produit habituel des modules et le coproduit est la somme directe de modules.

5.3.4.2 Égalisateurs et coégalisateurs

Définition. ***(Égalisateur dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soient X,Y deux objets de $\mathcal{C}$. Soient $f,g : X \to Y$ des morphismes de $\mathcal{C}$. L'*égalisateur* de (f,g) existe si le foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, W \mapsto \{h : W \to X \mid fh = gh\} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$ est représentable et dans ce cas, on le définit comme un représentant. On le note $\mathrm{eq}(f,g)$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ E = \mathrm{eq}(f,g) \arrow[r, "h_0"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Remarque. Donc, si $h_0 : E \to X$ exhibe E comme égalisateur, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,E) &\longrightarrow \{h : W \to X \mid fh = gh\} \\ h &\longmapsto h \circ k \end{aligned}$$

est une bijection.

Exemple. ***(Égalisateurs)***

Si $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\ R$ pour un anneau R et $f : L \to M$ est une application R-linéaire entre deux R-modules L et M, alors $\mathrm{Ker}(f) \simeq \mathrm{eq}(L \xrightarrow{f} M, L \xrightarrow{0} M)$ et si $f,g : L \to M$ sont des applications R-linéaires, alors $\mathrm{eq}(f,g) \simeq \mathrm{Ker}(f - g : L \to M)$.
Il est important de remarquer que ceci est vrai parce que l'on peut définir la différence de deux morphismes, ce qui bien sûr, n'est pas le cas de toute catégorie.

Définition. ***(Co-égalisateur dans une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soient X,Y deux objets de $\mathcal{C}$. Soient $f,g : X \to Y$ des morphismes de $\mathcal{C}$. Le *coégalisateur* de (f,g) existe si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, W \mapsto \{h : Y \to W \mid hf = gf\}$ est coreprésentable et dans ce cas, on le définit comme un coreprésentant. On le note $\mathrm{coeq}(f,g)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[dr, "h"'] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

Exemple. ***(Co-égalisateurs)***

On reprend l'exemple précédent. Si $f : L \to M$ est R-linéaire, alors $\mathrm{Coker}(f) \simeq \mathrm{coeq}(L \xrightarrow{f} M, L \xrightarrow{0} M)$ et si $f,g : L \to M$ sont des morphismes alors $\mathrm{coeq}(f,g) \simeq \mathrm{Coker}(f-g : L \to M)$.

Exercice 52 *(Conoyau dans la catégorie des groupes)*

Montrer que pour $f : G \to H$ un morphisme de groupes entre deux gruopes G,H, en notant e l'application nulle, le conoyau de f noté $\mathrm{Coker}(f) := \mathrm{coeq}(f,e)$ est le quotient de H par le sous-groupe normale engendré par l'image de f.

5.3.5 Foncteurs adjoints

D'où viennent les adjoints

La notion de foncteur adjoint a été inventée par Danil KAN dans son article *Adjoint functors*, Trans. AMS 87, 1958, 294-329.

Définition. ***(Adjonction dans une catégorie)***

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories localement petites. Une *adjonction* est la donnée d'un couple de foncteurs $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ avec des bijections fonctorielles en X,Y : $\alpha(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY)$, $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, *i.e.* les $\alpha(X,Y)$ définissent un isomorphisme de foncteurs $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$. On note $L \dashv R$. On dit que L est *adjoint à gauche* de $\mathbb{R}$ et R est *adjoint à droite* de L.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note souvent $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$.

Exemple fondamental. ***(Adjonction*** **Ab-Ens*****)***

Soit $U : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur d'oubli. Soit $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ qui à un ensemble X associe le groupe abélien formé des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles des élements de X. Pour $X \in \mathrm{Ens}$ et $A \in \mathrm{Ab}$, on a la bijection fonctorielle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,UA) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(LX,A)$ qui à f associe l'unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $\tilde{f} : LX \to A$ telle que $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in X \hookrightarrow LX, x \mapsto 1.x$.

Remarques.

1. Supposons que nous avons une adjonction $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, avec isomorphisme $\alpha(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY)$. Si l'on prend $X = RY$, on obtient $\mathrm{Hom}\mathcal{D}(LRY,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(RY,RY)$ d'où $\varphi Y : LRY \to Y$ correspondant à id_{RY} et si l'on prend $Y = LX$, on obtient $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,LX) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}'_{\mathcal{C}}X,RL)$, d'où $\psi X : X \to RLX$ correspondant à id_{LX}.
   Clairement, φY et ψY sont fonctoriels en Y, respectivement X et donnent donc des morphismes de foncteurs $\varphi : LR \to Id_{\mathcal{D}}$ et $\psi : Id_{\mathcal{C}} \to RL$.
   Mnémonik : On voit que L est à gauche et que R est à droite. VOC On appelle ψ l'*unité* de l'adjonction et φ <u>la *coünité*</u> de l'adjonction.

Exemple fondamental. ***(Adjonction*** Ab-Ens ***: suite)***

Soit $A \in$ Ab. Alors

$$\begin{array}{llll} \varphi A\colon & L \cup A & \longrightarrow & A \\ & \underbrace{x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n}_{\text{combinaison linéaire formelle d'éléments de l'ensemble sous-jacent à } A} & \longmapsto & \underbrace{x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n}_{\text{élément de } A \text{ calculé à l'aide de l'addition de } (A,+)} \end{array}$$

On remarque que $\varphi A : LUA \to A$ contient l'information sur l'addition de A !
Soit $X \in$ Ens. Alors

$$\begin{array}{llll} \psi X\colon & X & \longrightarrow & ULX \\ & x & \longmapsto & 1.x. \end{array}$$

Exercice 53

Montrer que l'on peut reconstruire α à partir de φ et ψ comme suit : $LX \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} RLX \arrow[r, "Rf"] & X \\ X \arrow[u, "\psi X"] & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{array}{c} (Rf)\circ(\psi X) : X \\ =\uparrow \\ \alpha(X,Y)(f) \end{array} \to RY \text{ et } X \xrightarrow{g} RY \rightsquigarrow LX \xrightarrow{Lg} \begin{tikzcd} LRY \arrow[d, "\varphi Y"] \\ Y \end{tikzcd} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c} (\varphi Y)(Lg) \\ =\uparrow \\ \alpha(X,Y)^{-1}(g) \end{array} : LX \to Y.$$

Exercice 54

Montrer que φ et ψ rendent commmutatifs :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi R"] \arrow[rr, bend right, "id_R"'] & RLR \arrow[r, "R\varphi"] & R \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\psi"] \arrow[rr, bend right, "id_L"'] & LRL \arrow[r, "\varphi L"] & L. \end{tikzcd}$$

Proposition

Soient $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ des foncteurs. On a une bijection entre A l'ensemble des bijections bifonctorielles $\alpha(X,Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(LX,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,RY)$ et B l'ensemble des couples de morphismes $\varphi : LR \to id_{\mathcal{D}}$ et $\psi : id_{\mathcal{C}} \to RL$ faisant commuter les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi R"] \arrow[rr, bend right, "id_R"'] & RLR \arrow[r, "R\varphi"] & R \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "L\psi"] \arrow[rr, bend right, "id_L"'] & LRL \arrow[r, "\varphi L"] & L. \end{tikzcd}$$

⊛ *(Idée de la preuve.)* On a construit des applications $A \to B$ et $B \to A$. Il reste à vérifier qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. ■

Remarque. La définition de B n'utilise que les notions de foncteur (*i.e.* 1-morphisme) et de morphisme de foncteurs (*i.e.* 2-morphisme). Cette définition a donc un sens dans toute 2-catégorie.

Lemme

Soit $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Supposons que R_1 et $R_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ sont deux adjoints à droite (donnés avec leurs bijections α_1 et α_2). Alors on a un isomorphisme canonique $\mathbb{R}_1 \xrightarrow{\sim} R_2$.

▷ On a $\mathcal{C}(?,R_1X) \underset{\alpha_1(?,X)}{\to} \mathcal{D}(L?,X) \underset{\alpha_2}{\to} \mathcal{C}(?;R_2X)$ un isomorphisme avec $\mathcal{C}(?,R_1X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,R_1X)$, fonctoriel en X entre $(R_1X)^\wedge$ et $(R_2X)^\wedge$. Comme le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle, on obtient un isomorphisme $R_1X \xrightarrow{\sim} R_2X$ fonctoriel en X, *i.e.* un isomorphisme de foncteurs $R_1 \xrightarrow{\sim} R_2$. ■

Lemme

Analogue pour les adjoints à gauche.

On se pose la question suivante : à quelles conditions sur R existe-t-il un adjoint à gauche L ? Voici une condition nécessaire.

Lemme

Supposons qu'on a une adjonction $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, avec α. Supposons que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{D}$ tel que $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i$ existe. Alors $\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}}(RX_i)$ existe et est canoniquement isomorphe à $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i)$.

▷ Soit $Y \in \mathcal{C}$. On a les bijections $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{C}(Y,RX_i) \xrightarrow[\text{adj.}]{\sim} \prod\limits_{i\in I}\mathcal{D}(LY,X_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(Ly,\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i) \xrightarrow[\text{adj.}]{\sim} \mathcal{C}(Y,R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i))$ (par définition du produit) donc la composée est la focntorielle en Y. Donc le foncteur produit $\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,RX_i)$ est représenté par $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i)$ d'où un isomorphisme canonique $R(\prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{D}} X_i) \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{i\in I}^{\mathcal{C}}(RX_i)$. ■

Mnémonik : on peut retenir le slogan suivant, que les adjoints à droite préservent les produits, les adjoints à gauche préservent les co-produits.

Exercice 55

Montrer que le foncteur $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Ab}$ adjoint à gauche du foncteur d'oubli $U : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ens}$, n'admet pas d'adjoint à gauche.

Théorème. ***(Caractérisation un peu tautologique des adjonctions)***

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On a équivalence entre :

(i) F admet un adjoint à droite ;

(ii) pour tout $X \in \mathcal{D}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable.

▷ $(i) \implies (ii)$: soit $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un adjoint à droite (donné avec α). Alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X) \xrightarrow[\alpha]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$. Cela signifie que GX représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X)$.

$(ii) \implies (i)$: pour tout objet $X \in \mathcal{D}$, définissons $GX \in \mathcal{C}$ en choisissant une représentation. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX)$. Il reste à définir Gf pour un morphisme $f : X \to Y$. Considérons

$$\begin{tikzcd}
h \in \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F?,X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GX) \arrow[d, dotted, "\text{morphisme de foncteurs}"] & = (GX)^\wedge & GX \arrow[d, dashed, ":=Gf"] \\
fh \in & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F?,Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,GY) & = (GY)^\wedge & GY
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'il existe Gf rendant commutatif les carrés par la pleine fidélité du foncteur de Yoneda. On vérifie que G est bien un foncteur et qu'il est adjoint à droite de F. ∎

Exemples. ***(Foncteurs adjoints)***

1. Soient k un corps, $Alg := k$-Ass la catégorie des k-algèbres associatives unifères, et Lie la catégorie ds k-algèbres de Lie. On considère $F : Alg \to \text{Lie}$ qui à A fait correspondre l'algèbre de Lie munie du crochet canonique. Alors F admet un adjoint à gauche noté U qui envoie une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sur son algèbre enveloppant $U\mathcal{G}$.
2. Soit Cat la catégorie des petites catégories, dont les morphismes sont les foncteurs. Soit Quiv la catégorie des carquois. On a le foncteur d'oubli de la composition
$$\begin{array}{rccl} U: & \text{Cat} & \longrightarrow & \mathcal{CAR} \\ & \mathcal{C} & \longmapsto & Q_0 = \text{Ob}(\mathcal{C}), Q_1 = \coprod_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(X,Y), \text{applications source et but évidentes} \end{array}$$
et de l'autre côté, le foncteur $\mathcal{P} : \mathcal{CAR} \to \text{Cat}$ qui à Q associe la caétgorie des chemins $\mathcal{P}Q$. Le foncteur $\mathcal{P}$ est adjoint à gauche du foncteur U. Par exemple, si
$$Q : \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ \downarrow & & \\ 3 & & \end{array}$$
, alors la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{P}Q \to \mathcal{C}$ est équivalente à celle d'un morphisme de carquois $Q \to U\mathcal{C}$, *i.e.* un diagramme
$$\begin{array}{ccc} F1 & \longrightarrow & F2. \\ \downarrow & & \\ F3 & & \end{array}$$
3. L'inclusion Ab $\to$ Grp a un adjoint à gauche. Lequel ?

Exercice 56

Déduire de l'adjonction Cat/$\mathcal{CAR}$ que toute petite catégorie est isomorphe au quotient de la catégorie des chemins d'une carquois par une congruence.

5.3.6 Opérations dans les catégories définies par des foncteurs adjoints

5.3.6.1 Produits tensoriels

Définition. *()*

Soient A,B deux anneaux et X^A_B un A-B-bimodule. Rappelons que Mod A désigne la catégorie des A-modules à droite. Soit M un B-module à droite. Alors on munit le groupe abélien $\text{Hom}_B(X_B,M_B) = \{f : X \to M \mid f \text{ additif et } f(xb) = f(x)b \quad \forall x \in X, \forall b \in B\}$ d'une structure de A-module à droite en posant, pour tout $f \in \text{Hom}_B(X,M)$, $(fa)(x) := f(ax)$ pour tous $a \in A, x \in X$. On obtient ainsi un foncteur $R : \text{Mod } B \to \text{Mod } A, M \mapsto$

$\mathrm{Hom}_B(X,M)$.

Définition-propriété. *()*

Le foncteur $R = \mathrm{Hom}_B(X,?) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A$ admet un adjoint à gauche L noté $L = ? \otimes_A X_B : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ B$ de façon qu'on a des bijections bifonctorielles $\mathrm{Hom}_A(N,\mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A X,M)$, $N \in \mathrm{Mod}\ A$, $M \in \mathrm{Mod}\ B$.

▷ On construit $\mathrm{Hom}_A(N,\mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bil}_{A,B}(N \times X,M_B) = \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A X,M)$ l'ensemble des applications A-bilinéaires et B-linéaires. Plus de détail dans les notes. ■

Mnémonik : Dans les deux membres, les trois symboles N,X,M apparaissent dans le même ordre. C'est une formule d'associativité.

Exercice 57

Donner l'unité et la coünité de l'adjonction ci-dessus.

Remarques.

1. Par exemple, si $N = A^n$ est le module libre de rang $n \in \mathbb{N}$ sur A, alors on a $\mathrm{Hom}_B(A^n \otimes_A X_B,M_B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A^n,\mathrm{Hom}_B(X,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(X,M)^n = \mathrm{Hom}_B(X^n,M)$ fonctoriel en $M \in \mathrm{Mod}\ B$. Par le lemme de Yoneda, on obtient un isomorphisme canonique $A^n \otimes_A X \xrightarrow{\sim} X^n$.
2. De la même façon, si I est un ensemble, éventuellement infini, $\underbrace{A^{(I)}}_{\bigoplus_I A} \otimes_A X \xrightarrow{\sim} X^{(I)}$ par le même argument.

Exercice 58 *(Dimension infinie et adjonction tensorielle)*

Soit V un espace vectoriel. Montrer que le foncteur de la catégorie des espaces vectoriels dans elle-même donné par $W \mapsto W \otimes V$ a un adjoint à gauche et un adjoint à droite si et seulement si V est de dimension finie. Observer que ces adjoints sont canoniquement isomorphes dans ce cas.

Indication On pourra utiliser le fait qu'un adjoint à droite preserve les limites, et on pourra montrer que $V^* \otimes_k ? = \mathrm{Hom}(V,?)$ quand V est de dimension finie.

5.3.6.2 Limites et colimites

Définition. ***(I-diagramme)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Un foncteur $F : I \to \mathcal{C}$ s'appelle aussi un *I-diagramme* ou *diagramme de forme I* dans $\mathcal{C}$.

Exemples. ***(I-diagrammes)***

1. Si I est la catégorie des chemins du carquois carré

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & 2 \arrow[d, "c"] \\ 3 \arrow[r, "d"'] & 4 \end{tikzcd}$$

modulo la congruence engendrée par $ab \sim cd$, alors un I-diagramme dans $\mathcal{C}$ est un carré commutatif dans $\mathcal{C}$.

Définition. ***(Foncteur diagonal)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Le *foncteur diagonal* $\Delta = \Delta_{\cdot}\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ envoie $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ sur le foncteur constant $\Delta\mathfrak{c}$ de valeur C, qui envoie tous les morphismes de $\mathcal{C}$ sur $id_{\mathfrak{c}}$.

Définition. ***(Cône)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. Soit $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$. Un *cône* de sommet $\mathfrak{c}$ au-dessus d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ est un morphisme $\lambda : \Delta\mathfrak{c} \to F$ dans $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$.

Remarques.

1. Pour un morphisme $i \xrightarrow{f} j$ de I, on obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{c} \arrow[r, "id_{\mathfrak{c}}"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & \mathfrak{c} \arrow[d, "\lambda_j"] \\ F_i \arrow[r, "Ff"'] & F_j, \end{tikzcd}$$

respectivement

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{c} \arrow[dl, "\lambda_i"'] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\ F_i \arrow[rr, "Ff"'] & & F_j. \end{tikzcd}$$

Donc par exemple si $I = (\mathbb{N}, \leqslant)^{\mathrm{op}}$, alors un cône sur $F : I \to \mathcal{C}$ est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots & & & \mathfrak{c} \arrow[dll, "\lambda_3"'] \arrow[dl, "\lambda_2"] \arrow[d, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_0"] & \\
\cdots & F_3 & F_2 & F_1 & F_0
\end{tikzcd}$$

qui ressemble effectivement à un cône.

2. Un cône de sommet $\mathfrak{c}$ sous $F : I \to \mathcal{C}$ estun morphisme $F \xrightarrow{\mu} \Delta\mathfrak{c}$ dans $\mathrm{Fun}(I{,}\mathcal{C})$.

Définition. ***(Limite)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. La *limite*, ou *limite inverse*, ou *limite projective* (déconseillé) d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ existe si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta?{,}F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable et alors la limite $\lim \lim\limits_{I\to i} F$ est un représentant de façon que l'on ait $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \lim_I F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta\mathfrak{c}, F)$ fonctoriellement en $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_I F \arrow[ddr] \arrow[ddrr] \arrow[ddrrr] \arrow[ddrrrr] & & & & \\
 & \cdots & & & \mathfrak{c} \arrow[ullll, dotted] \arrow[dlll, "\lambda_3"'] \arrow[dll, "\lambda_2"] \arrow[dl, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_0"] \\
\cdots & F_3 & F_2 & F_1 & F_0
\end{tikzcd}$$

Remarque. Un cône $(\Delta \lim_I F) \to F$ exhibe $\lim_I F$ comme limite si et seulement s'il est final dans catégorie des cônes $\Delta\mathfrak{c} \xrightarrow{\lambda} F$, dont les morphismes sont les morphismes $f : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}'$ tel que $\lambda' \cdot Ff = \lambda$.

Exemples. ***(Limites)***

1. Supposons que I est discret, *i.e.* ses seuls morphismes sont les identités. Alors un I-diagramme X dans $\mathcal{C}$ est simplement une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, plus précisémenet $(X_i)_{i\in \mathrm{Ob}(I)}$ et alors $\lim_I F \simeq \prod\limits_{i\in I} X_i$ s"il existe.

2. Supposons que I est la catégorie des chemins de $1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$. Alors un I-diagramme X est la donnée de $X_1 \overset{X_\alpha}{\underset{X_\beta}{\rightrightarrows}} X_2$ et $\lim_I X \simeq \mathrm{eq}(X_\alpha{,}X_\beta)$ avec

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{c} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X_1 \arrow[r, shift left, "X_\alpha"] \arrow[r, shift right, "X_\beta"'] & X_2.
\end{tikzcd}$$

3. Supposons que I est la catégorie des chemins de $\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \arrow[r, "\alpha"'] & 3 \end{tikzcd}$. Alors la limite d'un I-diagramme $\begin{tikzcd} & X_2 \arrow[d, "X_\beta"] \\ X_1 \arrow[r, "X_\alpha"'] & X_3 \end{tikzcd}$ s'appelle le *produit fibré* de X_1 et X_2 au-dessus de X_3 :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{c} \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "m"] \arrow[ddr, bend right, "l"'] & & \\ & X_1 \times_{X_3} X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "X_\beta"] \\ & X_1 \arrow[r, "X_\alpha"'] & X_3 \end{tikzcd}$$

et vérifie la propriété universelle : pour tous l,m tels que $(X_\beta)_m = (X_\alpha)_l$, il existe un unique $f : \mathfrak{c} \to X_1 \times_{X_3} X_1$ tel que $p_2 f = m$ et $p_1 f = l$.

Définition. ***(Colimite)***

Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite. La *colimite* ou *limite directe* ou *limite inductive* d'un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ existe si le focnteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(F, \Delta ?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ est corepréséntable et alors $\operatorname*{colim}_I F$ est un coreprésentant.

Exemples. ***(Colimites)***

1. En analogie avec l'exemple ci-dessus, on retrouve les coproduits $\coprod_{i \in I} X_i$.
2. En anaogie avec l'exemple ci-dessus, on obtient les *co-produits amalgamés* :

$$\begin{tikzcd} X_3 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ X_1 \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & X_1 \coprod_{X_3} X_2 \arrow[dr, dotted] & \\ & & \mathfrak{c}. \end{tikzcd}$$

Remarque. Le foncteur diagonal $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ admet un adjoint à droite si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}}(\Delta ?,F) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable pour tout $F \in \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$, ce qui signifie que $\lim_I F$ existe pour tout $F \in \mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$. Alors l'adjoint envoie F sur $\lim_I F$, qui est donc fonctoriel en F.

Exercice 59

Si $F : I \to \mathrm{Ens}$ est un diagramme dans Ens, alors $\lim_I F \simeq \{(x_i) \in \prod_{i\in I} F_i \mid \forall f : i \to j$ dans $I, \quad (Ff)(x_i) = x_j\} \subseteq \prod_{i\in I} F_i$. Montrer que $\mathrm{colim}_I F = \coprod_{i\in I} F_i/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(Ff)(x_i) \sim x_j$ pour tout morphisme $f : i \to j$ de I.

Lemme

Si $F : I \to \mathcal{C}$ est un diagramme, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(\Delta\mathfrak{c},F) \simeq \lim_I^{\mathrm{Ens}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, F?) \text{ (limite dans la catégorie des ensembles)}$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})}(F,\Delta\mathfrak{c}) \simeq \lim_I^{\mathrm{Ens}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F?,\mathfrak{c}) \text{ (encore la limite (et non la colimite) dans la catégorie des ensem}$$

▷ En exercice. ■

Corollaire

1. Un diagramme $F : I \to \mathcal{C}$ admet une limite si et seulement si le foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$, $\mathfrak{c} \mapsto \lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i)$ est représentable et alors $\lim_I F$ est un représentant.
2. Il admet une colimite si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, $\mathfrak{c} \mapsto \lim_{i\in I^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_i,\mathfrak{c})$ est coreprésentable et alors $\mathrm{colim}_I F$ est un représentant.

Exemples. ***(Colimites, suite)***

1. Tout ensemble $X \in \mathrm{Ens}$ est la colimite de ses parties finies $X' \subseteq X$. Observe qu'alors la colimite s'identifie à la réunion.

   Où ici I est l'ensemble partiellement ordonné des parties finies $X' \subseteq X$ et $F : I \to \mathrm{Ens}$ envoie $X' \in I$ sur $X' \in \mathrm{Ens}$.
2. Tout espace vectoriel V est la colimite de ses sous-espaces vectoriels $V' \subseteq V$ de dimension finie. Par contre, en général, il n'est pas la limite de ses quotients $V' \twoheadrightarrow V''$ de dimension finie !
3. Même philosophie dans : toute extension algébrique est la réunion de ses sous-extensions finies.
4. Soient p un nombre premier, $F : \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ann}$, le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et une inégalité $n' \geqslant n$ sur le morphisme quotient $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Alors $\lim_{\mathbb{N}^{\mathrm{op}}} F = \varprojlim_n ZnZp^n \simeq \mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques.
5. Soient p un nombre premier, $F : \mathbb{N} \to \mathrm{Ab}$ le foncteur qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et une inégalité $n \leqslant n'$ sur l'injection $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, \overline{k} \mapsto \overline{p^{n'-n}k}$. Alors

$\mathrm{colim}_{\mathbb{N}} F = \mathbb{Z}/p^\infty\mathbb{Z}$ est le *groupe de p-Prüfer* qui est le groupe de p-torsion de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5.3.6.3 Limites et colimites dans les catégories de foncteurs

Exercice 60

Soit J une petite catégorie (on garde I et $\mathcal{C}$ comme ci-dessus). Montrer qu'on a un isomorphisme de catégories canonique $\mathrm{Fun}(I \times J, \mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}(I, \mathrm{Fun}(J, \mathcal{C}))$, $F \mapsto (i \mapsto (j \mapsto F(i,j)))$.

Lemme

Soient J une petite catégorie et $F : I \to \mathrm{Pre}(J, \mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(J^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$. Alors pour que $\lim_I F$ existe, il suffit que $\lim_{i \in I} F(i,j)$ existe pour tout $j \in J$ et alors $(\lim_I F)(j) = \lim_{i \in I} F(i,j)$. De même pour les colimites.

▷ En exercice facile. ■

Mnémonik : les limites et colimites dans les catégories de foncteurs peuvent se calculer composante par composante, si la limite ou colimite dans chaque composante existe.

Exemple

Toutes les limites et colimites dans $\mathrm{Pre}(J, \mathrm{Ens})$ et $\mathrm{Pre}(J, \mathrm{Ab})$ peuvent se calculer composante par composante.

La condition du lemme est suffisante mais pas nécessaire en général.

5.3.6.4 Préservation des limites et colimites

Définition. ***(Préservation d'une limite, d'une colimite)***

Soient I une petite catégorie, $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $D : I \to \mathcal{C}$ un foncteur tel que $\lim_I D$ existe et soient $p_i : \lim_I D \to D_i$ pour $i \in I$ les morphismes canoniques qui exhibent $\lim_i D$ comme limite. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, $\mathcal{D}$ une catégorie. Notons que l'on a les morphismes

$$\begin{tikzcd} F \lim_I D \arrow[r, "F p_i"] \arrow[dr, dotted] & F D_i \\ & \lim\limits_{i \in I} (FD)(i) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "D"] \arrow[dr, "FD"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

On dit que F *préserve* $\lim_I D$ si les $(Fp_i)_{i\in I}$ exhibent $F\lim_I D$ comme limite de FD, *i.e.* s'ils induisent un isomorphisme $F\lim_I D \simeq \lim_I FD$.
La même définition tient pour les colimites avec $\mathrm{colim}_I FD \simeq F(\mathrm{colim}_I D)$.

Exemples

1. Pour $X \in \mathcal{C}$, on considère le foncteur $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. L'une des reformulations de la propriété universelle de $\lim_I$ nous dit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?)$ préserve toutes les limites. De même, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ préserve toutes les colimites.

   Les limites dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont des colimites dans $\mathcal{C}$, *i.e.* $\mathrm{Hom}(?,X)$ transforme les colimites dans $\mathcal{C}$ en des limites dans Ens.

2. Le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(?,X)$ préserve toutes les limites qui veulent bien exister.

Théorème

Les adjoints à droite préservent les limites et les adjoints à gauche préservent les colimites.

▷ Soit $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ un couple de foncteurs adjoints. Soit $F : I \to \mathcal{C}$ un diagramme. On a des bijctions, pour $D \in \mathcal{D}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,R\lim_I F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\mathcal{D},\lim_I F) = \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L\mathcal{D},F(?)) = \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,RF(i))$ ce qui signifie que $R\lim_I F$ est bien un représentant. ■

Exemple

Si A,B sont deux anneaux et X un A-B-bimodule, alors $? \otimes_A X$: Mod $A \to$ Mod B préserve les colimites, en particulier les conoyaux et les coproduits qui sont les sommes directes et $\mathrm{Hom}_B(X,?)$: Mod BMod A préserve les limites, en particulier les noyaux et les produits.

Proposition. ***(Commutation des limites, Fubini pour les limites)***

Soient J une petite catégorie et $F : I \times J \to \mathcal{C}$ un diagramme. Alors on a des isomorphismes canoniques $\lim_I \lim_J F \simeq \lim_{I\times J} F = \lim_J \lim_I F$, si toutes ces limites existent.

Remarque. En général, le morphisme canonique $\mathrm{colim}_J \lim_I F \to \lim_I \mathrm{colim}_J F$ n'est pas inversible. Il l'est si I est fini et J est filtrant et $\mathcal{C} = \mathrm{Ens}$, comme on va le voir.

5.3.6.5 Colimites filtrantes et fibrés

Définition. ***(Catégorie filtrante)***

Une petite catégorie I est *filtrante* si

(i) pour tous $i,i' \in I$, il existe $j \in I$ et des morphismes $i \to j$, $i' \to j$,

(ii) pour tous couples de morphismes $f,g : i \to j$ de I, il existe un morphisme $h : j \to k$ tel que $hf = hg$, autrement dit, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & j \arrow[r, "h"] & k \end{tikzcd}$$

commute.

Exemples. ***(Catégories filtrantes)***

1. $(N, \leqslant)$ est filtrante.
2. Soient X un espace topologique et $x \in X$. Soit $\mathrm{Ongd}(x) \subseteq \mathrm{Open}(X)$ la catégorie des voisinages ouverts de x dans X (pour *open-neighbourhood*) qui est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Open}(X)$. Alors $\mathrm{Ongd}(x)^{\mathrm{op}}$ est filtrante.

Définition. ***(Colimite filtrante)***

Une colimite $\mathrm{colim}_I F$ est *filtrante* si I est filtrante.

Théorème

Dans Ens (respectivement dans Ab), les limites finies (*i.e.* les limites sur des catégories finies) commutent avec les colimites filtrantes.
Plus précisément, si I est fini et J filtrante et $F : I \times J \to \mathrm{Ens}$ (respectivement $F : I \times J \to \mathrm{Ab}$) est un foncteur, alors le morphisme canonique $\mathrm{colim}_J \lim_I F \to \lim_I \mathrm{colim}_J F$ est inversible.

▷ Lire MacLane, IX, 2. ■

Corollaire

Le théorème est valable aussi dans les catégories $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ et $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ab})$ où $\mathcal{C}$ est une petite catégorie.

▷ En effet, dans ces catégories, les limites et colimites peuvent se calculer componsante par composante. ■

Exemples

1. $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ens}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ens}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens})$.
2. $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab}) = \mathrm{Pre}(\mathrm{Open}(T),\mathrm{Ab}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$.

Définition. *(Fibre)*

Soient T un espace topologique et $F : \mathrm{Open}(T)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ (respectivement Ab) un préfaisceau sur T. Soit $x \in T$. La *fibre* ou *tige* de F en x est $F_x = \mathrm{colim}_{U \in \mathrm{Ongd}(x)^{\mathrm{op}}} FU$.

Exemples. *(Fibres)*

1. Soient T un espace topologique, $\mathbb{Z}_T$ le préfaisceau à valeurs dans Ab constant de valeur $\mathbb{Z}$ et $\underline{\mathbb{Z}}_T$ le préfaisceau *localement constant* sur T de valeur $\mathbb{Z}$: $\underline{\mathbb{Z}}_T(U) = \{f : U \to \mathbb{Z} \mid f \text{ localement constante}\}$ où $\mathbb{Z}$ est muni de la topologie discrète.
   Pour tout point $x \in T$, on a $(\mathbb{Z}_T)_x \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathbb{Z}}_T)_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$, donc le monomorphisme évident $\mathbb{Z}_T \hookrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_T$ induit un isomorphisme dans chaque fibre mais ce n'est pas lui-même un isomorphisme.

Théorème

Soient T un espace topologique et $x \in T$. Alors le foncteur $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ens}) \to \mathrm{Ens}$ (respectivement $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab}) \to \mathrm{Ab}$) qui à $F \mapsto F_x$ préserve les limites finies et les colimites arbitraires, *i.e.* sur toute catégorie petite.

▷ Le foncteur $F \mapsto F_x$ commutent avec les colimites arbitraires, car il est lui-même défini par une colimite, ce que l'on a démontré plus haut. Comme cette limite est filtrante, ce foncteur commute avec les limites. ■

Exemple

Si $f : F \to G$ est un morphisme dans $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab})$ et $x \in T$, alors

$$\underbrace{\mathrm{Coker}(F_x \xrightarrow{f_x} G_x)}_{\mathrm{colim}_I \lim_J} = \underbrace{(\mathrm{Coker}(f))_x}_{\mathrm{colim}_J \mathrm{colim}_I}$$

et

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(F_x \xrightarrow{f_x} G_x}_{\lim_I \mathrm{colim}_J} = \underbrace{(\mathrm{Ker}(f))_x}_{\mathrm{colim}_J \lim_I}.$$

On rappelle que les limites et colimites dans $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab})$ peuvent se calculer composante par composante : $(\mathrm{Ker}(f)(U) = \mathrm{Ker}(fU : FU \to GU)$ pour tout $U \subseteq T$ ouvert.

5.3.6.6 Catégories complètes et cocomplètes

Définition. ***(Catégorie complète, cocomplète)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ est *complète* si elle admet toutes les petites limites c'est-à-dire limites sur des petites catégories.
Elle est *cocomplète* si elle admet toutes les petites colimites.

Exemples

1. Les catégories Ens, Ab et Mod R pour tout anneau R sont complètes et cocomplètes.
2. La catégorie des espaces topologiques est complète et cocomplète.
3. Soit k un corps. La catégorie k-Vect de tous les espaces vectoriels est complète et cocomplète. Soit mod $k \subseteq$ Mod k la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie. Elle n'est ni complète ni cocomplète.
   Par exemple, si I est une ensemble infini, alors la famille constante $I \to f\mathrm{Mod}\ k, i \mapsto k$ n'admet pas de colimite ni de limite : dans Mod k, on a $\coprod_I k = \bigoplus_I k$, $\prod_I^{\mathrm{Mod}\ k} k = \prod_{i \in I} k$ le produit habituel.
4. La catégorie de tous les groupes est complète et cocomplète. Plus généralement, une catégorie concrète est généralement complète et cocomplète.
5. La catégorie des corps n'est ni complète, ni cocomplète, ni finiment complète, ni finiment cocomplète.
6. Si $\mathcal{C}$ est complète (respectivement cocomplète), alors pour toute petite catégorie I, la catégorie Fun(I,$\mathcal{C}$) est encore complète (respectivement cocomplète), car limites et colimites peuvent se calculer composante par composante.

Proposition

Si $\mathcal{C}$ est localement petite et J est petite, si $\mathcal{C}$ admet des J-limites, pour tout $X \in \mathcal{C}$, pour tout $F : J \to \mathcal{C}$, il y a un isomorphisme fonctoriel en X et en F : $\lim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim F)$.

Exercice 61

Montrer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie complète et $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont le foncteur inclusion admet un adjoint à droite, alors $\mathcal{D}$ est encore complète.

Contre-exemple. ***(Catégorie complète mais pas cocomplète)***

?
La catégorie duale donne un exemple de catégorie cocomplète mais pas complète. □

Vérifier qu'une catégorie admet toutes les petites limites peut sembler vertigineux ; en fait, il suffit d'en vérifier deux types particuliers.

Théorème

Une catégorie localement petite est complète si et seulement si elle admet tous les petites produits et les égalisateurs.

▷ Le sens direct est immédiat. Réciproquement, commençons par exprimer toute limite $\lim_I F$ dans Ens en termes de produits et d'égalisateurs. On a $\lim_I F = \{(x_i) \subseteq \prod_{i\in I} F_i \mid \forall j \xrightarrow{f} k$ dans $I \quad (Ff)(x_j) = x_k\}$. Cela montre que $\lim_I F \simeq \mathrm{eq}(\varphi,\psi : \prod_{i\in I} F_i \to \prod_{f:j\to k} F_k)$ où φ et ψ on pour composantes $\varphi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_j} F_j \xrightarrow{Ff} F_k$ et $\psi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_k} F_k$. Soit maintenant $F : I \to \mathcal{C}$ un diagramme dans $\mathcal{C}$. On veut représenter le foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}, \mathfrak{c} \mapsto \lim_{I\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \lim_I F)$. Pour $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$, on a $\lim_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) = \mathrm{eq}(\varphi,\psi : \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_i) \to \prod_{f:j\to k} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},F_k)) \simeq \mathrm{eq}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \prod_{i\in I} F_i \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c}, \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} Fk)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{c},\mathrm{eq}^{\mathcal{C}}(\Phi,\Psi : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \to \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} F))$ par propriété universelle de l'égalisateur, où Φ et Ψ ont les composantes $\Phi_f : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \xrightarrow{\pi_j} F_j \xrightarrow{Ff} F_k$ et $\Psi_f : \prod_{i\in I} F_i \xrightarrow{\pi_k} F_k$, donc $\lim_I F$ existe dans $\mathcal{C}$ et est représenté par $\mathrm{eq}^{\mathcal{C}}(\Phi,\Psi : \prod_{i\in I}{}^{\mathcal{C}} F_i \to \prod_{f:j\to k}{}^{\mathcal{C}} F)$. ■

5.4 Catégories additives

5.4.1 k-catégories

Soit k un anneau commutatif.

Définition. ***(k-catégorie)***

Une *k-catégorie* $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite ou chaque ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour $X,Y \in \mathcal{C}$ est muni d'une structure de k-module telles ques les compositions

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), (f,g) \mapsto fg \text{ pour } X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

soient k-bilinéaires, *i.e.* $\begin{cases} (f_1+f_2)g = f_1g + f_2g, f(g_1+g_2) = fg_1 + fg_2 \\ (xf)g = f(xg) = x(fg) \qquad \forall f_1,f_2,g_1,g_2,f,g \ \forall x \in k. \end{cases}$ En particulier la composition induit un morphisme k-linéaire $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$. On dit aussi que $\mathcal{C}$ est *enrichie sur* $(\mathrm{Mod}\ k, \otimes_k)$.

Définition. ***(Catégorie pré-additive)***

Une catégorie *pré-additive* est une catégorie $\mathbb{Z}$-additive au sens de cette définition, c'est-à-dire que l'on prend $k = \mathbb{Z}$.

Exemples. *(k-catégories, catégories préadditives)*

1. *(La catégorie classifiante d'une k-algèbre est une k-catégorie ponctuelle)* Soit A une k-algèbre, *i.e.* on a $A \in \mathrm{Mod}\ k$ muni d'une application linéaire $\mu : A \otimes_k A \to A$ associative avec unité $\eta\colon \begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & A. \\ 1 & \longmapsto & 1_A \end{array}$ Alors $\mathcal{C} = \{\star\}$ avec $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(x) = A$ est une k-catégorie. Réciproquement, toute k-catégorie a un seul objet définit une algèbre sur l'espace des endomorphismes de son unique objet.
   Heuristiquement, **une k-catégorie en général est « une k-algèbre à plusieurs objets »**.
2. Passons aux applications linéaires. Si A est une k-algèbre encore une fois (mais cette fois-ci ayons en tête le cas où k est un corps), alors $\mathrm{Mod}\ A$ porte une structure naturelle de k-catégorie puisque pour $f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ donne $\lambda f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ pour tout $\lambda \in k$.
3. L'opposée d'une k-catégorie est encore une k-catégorie.
4. Toute sous-catégorie pleine d'une k-catégorie est encore une k-catégorie.
5. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie localement petite, alors $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{C})$ acquiert une structure de k-catégorie.

Exercice 62 *(Monos scindés d'une k-catégorie)*

Rappeler quels sont les monomorphismes d'une catégorie de modules. Montrer que ce sont exactement les morphismes rétractables (en particulier, c'est vrai pour k-Vect et Ab). Que dire en général dans une k-catégorie ?

Définition. *(Foncteur linéaire)*

Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux k-catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un *foncteur k-linéaire* s'il induit des morphismes de k-modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ pour tous objets X,Y de $\mathcal{C}$, *i.e.* si toutes les applications $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ sont k-linéaires pour $X,Y \in \mathcal{C}$.

Exemples. *(Foncteurs linéaires)*

1. Si A et B sont des k-algèbres et X un A-B-bimodule, alors $? \otimes_A X : \mathrm{Mod}\ A \rightleftarrows \mathrm{Mod}\ B : \mathrm{Hom}_B(X,?)$ sont k-linéaires.

Contre-exemple. *(Foncteur quadratique)*

Soit k un corps ; Le foncteur $\mathrm{Mod}\ k \to \mathrm{Mod}\ k, V \mapsto V \otimes_k V$ n'est pas k-linéaire. $\square$

Remarques.

1. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie, alors le foncteur de Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ se factorise par $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[rr, dotted, "k\text{-Yoneda}"] \arrow[drr, "\text{Yoneda}"'] & & \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k) \arrow[d, "\text{oubli}_*"] \\ X \arrow[dr, mapsto] & & & \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \\ & X^\wedge = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,X). & & \end{tikzcd} \qquad \text{induit par } \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r] & \mathrm{Mod}\ k \arrow[d, "\text{oubli}"] \\ & \mathrm{Ens} \end{tikzcd}$$

2. Rappelons que pour $M_1,M_2 \in \mathrm{Mod}\ R$, le moprhisme canonique $M_1 \coprod M_2 \to M_1 \prod M_2$ dans $\mathrm{Mod}\ R$ est inversible, et toutes les deux sont isomorphes à $M_1 \oplus M_2$. Il en est de même dans $\mathrm{Fun}(I, \mathrm{Mod}\ R)$ pour toute petite catégorie R (car les limites et colimites se calculent composante par composante).

Généralisons :

Proposition

Soient $\mathcal{C}$ une k-catégorie et $X,Y \in \mathcal{C}$. Alors le produit $X \prod Y$ existe si et seulement si $X \coprod Y$ existe et dans ce cas, le morphisme canonique $X \coprod Y \to X \prod Y$ est inversible. Cette propriété se généralise sans problème à toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$.

▷ Notons $\mathfrak{c} \mapsto \mathfrak{c}^\wedge$ le foncteur k-Yoneda $\mathcal{C} \to \mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$. Supposons la catégorie $\mathcal{C}$ petite. On observe, pour la même raison que dans le cas de $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$, qu'il est pleinement fidèle. Supposons que $X \prod Y$ existe. Alors $(X \prod Y)^\wedge \simeq X^\wedge \prod Y^\wedge$ car le foncteur de Yoneda commute avec des produits arbitraires. Or on a remarqué que dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$ les produits finis sont canoniquement isomorphes aux coproduits finis. Donc $X^\wedge \coprod Y^\wedge \xrightarrow{\sim} X^\wedge \prod Y^\wedge$. Donc les morphismes

$$\begin{tikzcd} X^\wedge \arrow[dr] & & & \\ & X^\wedge \coprod Y^\wedge \arrow[r, "\sim"] & X^\wedge \prod Y^\wedge \arrow[r, "\sim"] & (X \prod Y)^\wedge \\ Y^\wedge \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

exhibent $(X \prod Y)^\wedge$ comme le coproduit de $X^\wedge$ et $Y^\wedge$ dans $\mathrm{Pre}(\mathcal{C},\mathrm{Mod}\ k)$. Comme le foncteur de Yoneda est pleinement fidèle, les morphismes $i_X : X \to X \prod Y$ et $i_Y : Y \to X \coprod Y$ exhibent $X \prod Y$ comme coproduit de X et Y dans $\mathcal{C}$. Donc $X \coprod Y$ existe et $X \coprod Y \xrightarrow{\sim} X \prod Y$. Si on applique cet argument à $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ qui est encore une k-catégorie, on obtient le reste de l'affirmation. Reste à se ramener au cas d'une catégorie petite. C'est laissé en exercice. ■

Exercice 63

Construire i_X et i_Y explicitement et vérifier directement qu'ils exhibent $X \prod Y$ comme coproduit de X et Y et conclure la démonstration de la propriété précédente.

Corollaire. *(Objet nul d'une k-catégorie)*

Une k-catégorie admet un objet nul si et seulement si elle admet un objet initial si et seulement si elle admet un objet final.

▷ On prend une famille vide dans la proposition précédente. ■

Fait. *(Morphisme canonique du coproduit dans le produit)*

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, étant donnée une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$, on définit un morphisme $\varphi : \coprod_{j \in I} X_j \to \prod_{i \in I} X_i$ caractérisé par $\pi_i \varphi \iota_j = \begin{cases} id_{X_i} \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Lemme

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une familel finie d'objets de $\mathcal{C}$. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\pi_i : X \to X_i$ et $\iota_j : X_j \to X$, les i,j parcourant I. On suppose que $\pi_i \iota_j = \delta_i^j id_{X_i}$. Alors on a équivalence entre :

(i) $(\pi_i)_{i \in I}$ exhibe X comme produit des X_i,

(ii) $(\iota_j)_{j \in I}$ exhibe X comme coproduit des X_j,

(iii) $id_X = \sum_{i \in I} \iota_i \pi_i$.

Astuce !

Pour vérifier (i) ou (ii), on a besoin de connaître toute la catégorie $\mathcal{C}$, tandis que la catégorie (iii) ne dépend que des X, X_i, ι_j, π_i pour $i,j \in I$. En particulier il n'y a qu'un nombre fini de variables.

Définition. *(Biproduit)*

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une familel finie d'objets de $\mathcal{C}$. Soit X un objet de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\pi_i : X \to X_i$ et $\iota_j : X_j \to X$, les i,j parcourant I. On suppose que $\pi_i \iota_j = \delta_i^j id_{X_i}$. Si l'une des conditions

(i) $(\pi_i)_{i \in I}$ exhibe X comme produit des X_i

(ii) $(\iota_j)_{j \in I}$ exhibe X comme coproduit des X_j

(iii) $id_X = \sum_{i \in I} \iota_i \pi_i$

est satisfaite, on appelle $(X,(\pi_i),(\iota_j))$ le *biproduit* des X_i, et l'on écrit $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$.

Remarque importante. Notons que si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur k-linéaire $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, alors F préserve automatiquement les biproduits finis, car les propriétés (i) et (ii) sont préservées par les foncteurs.

Remarque. Dans une k-catégorie $\mathcal{C}$, un morphisme $f : \bigoplus_{j=1}^{m} X_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$ entre biproduits finis est donné par la matrice $n \times m$: $(f_{ij})_{i,j}$ où $f_{ij} = \pi_i f \iota_j$. Par abus de notation, on écrit $f = (f_{ij})_{i,j}$.

Exercice 64

Dans une k-catégorie, une composition $h = fg : \bigoplus_{j=1}^{m} X_j \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{k=1}^{p} Z_k$ est donnée par la matrice produit $h_{kj} = \sum_{i=1}^{n} f_{ki} g_{ij}$.

5.4.2 Catégorie k-linéaire ou k-additive

Définition. ***(Catégorie k-linéaire, k-additive)***

Une catégorie *k-linéaire* ou *k-additive* est une k-catégorie qui admet tous les biproduits finis, ou, ce qui est donc équivalent, tous les produits finis, ou encore tous les coproduits finis.

Corollaire

Une catégorie k-linéaire a un objet nul.

Définition. ***(Catégorie additive)***

Une *catégorie additive* est une catégorie $\mathbb{Z}$-additive.

Définition. ***(Foncteur additif)***

Un foncteur *additif* est un foncteur $\mathbb{Z}$-linéaire entre catégories additives.

Exemples. ***(Catégories linéaires)***

1. Si A est une k-algèbre, alors Mod A est k-linéaire.
2. Si I est une petite catégorie et $\mathcal{A}$ est k-linéaire, alors $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{A})$ est k-linéaire.
3. Si A est une k-algèbre, la k-catégorie classifiante à un objet $\star$ avec $\mathrm{End}(\star) = A$ est une k-catégorie mais n'est pas une catégorie k-linéaire si $A \neq 0$.

Exercice 65

Construire un anneau non nul R tel que la catégorie $\{\star,0\}$ où $\mathrm{End}(\star) = R$ soit additive.

Remarque. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Soient $X,Y \in \mathcal{C}$. Alors la loi de groupe $+$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est déterminée par la catégorie ensembliste sous-jacente à $\mathcal{C}$, car pour $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on a

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix}} X \oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} Y \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}} Y$$

donc $f + g = \begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}$ et les morphismes $\begin{pmatrix} id_X \\ id_X \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} id_Y & id_Y \end{pmatrix}$ s'expriment facilement en termes de la catégorie sous-jacente à $\mathcal{C}$. Par conséquent, **être additive est en fait une propriété de la catégorie ensembliste sous-jacente à $\mathcal{C}$ et non une structure supplémentaire sur $\mathcal{C}$** .

Exercice 66 *(Comment reconnaître si une catégorie ensembliste est en fait additive)*

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui admette un objet nul et tous les produits et coproduits finis, de sorte que le morphisme canonique $\varphi : \coprod X_i \to \prod X_i$ (pour $i \neq j$, $\pi_i \varphi \iota_j$ est envoyé sur 0 l'unique morphisme se factorisant par l'objet nul) pour toute famille finie $(X_i)_i$ soit inversible, si enfin la loi $+$ définie comme dans la remarque précédente, qui est alors bien définie, associative et commutative, est une loi de groupe, alors $\mathcal{C}$ munie des lois $+$ sur tous les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est $\mathbb{Z}$-linéaire.

▷ **Éléments de réponse.**

Il n'y a plus qu'une chose à vérifier.

Proposition

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre catégories additives. Alors F est additif si $F0 \xrightarrow{\sim} 0$ et $F(X \oplus Y) = FX \oplus FY$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$.

▷ Clairement la condition est nécessaire. La suffisance résulte de la description de la loi d'addition sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour $X,Y \in \mathcal{C}$, en termes de la catégorie ensembliste sous-jacent à $\mathcal{C}$. ■

5.4.3 Suites exactes

On rappelle les définitions suivantes : complexe, suite exacte (triple), suite exacte générale (finie ou infinie), suite exacte courte.

Définition-propriété. *()*

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$$

une suite dans $\mathcal{A}$, notée $(*)$. On a équivalence entre :

(i) il existe un isomorphisme de suites
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\wr"] & N \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_L \\ 0 \end{pmatrix}"'] & L \oplus N \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & id_N \end{pmatrix}"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} ;$$

(ii) l'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?)$ de la suite $(*)$ est exacte pour tout $X \in \mathcal{C}$;

(iii) l'image par ${}_{H}om_{\mathbb{C}}(?,X)$ de la suite $(*)$ est exacte pour tout $X \in \mathcal{C}$.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que la suite $(*)$ est *scindée*, ou mieux *scindable*, un *scindage* ou *scission* étant déterminée par le choix d'un isomorphisme de suites.

Exercice 67

Déterminer toutes les classes d'équivalence de suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, où $(\alpha,\beta) \sim (\alpha',\beta')$ s'il existe un isomorphisme γ tel que $\alpha' = \gamma\alpha$ et $\beta = \beta'\gamma$. Montrer qu'il y en a deux dont l'une est formée de suites scindées et l'autre de suites non scindées.

5.4.4 Quotients k-linéaires et k-catégories libres

Définition. ***(Idéal d'une k-catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Un *idéal* $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ est la donnée de sous-k-modules $\mathcal{I}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}$ tels que pour $f \in \mathbb{C}(Y,Z)$ et $g \in \mathcal{C}(X,Y)$, on a $fg \in \mathcal{I}(X,Z)$ dès que $f \in \mathcal{I}(Y,Z)$ ou $g \in \mathcal{I}(X,Y)$. On note $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{C}$.

Définition. ***(Quotient k-linéaire)***

Soient $\mathcal{C}$ une k-catégorie et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{C}$. Le *quotient k-linéaire de $\mathcal{C}$ par $\mathcal{I}$* est le quotient de $\mathcal{C}$ par la congruence donnée par $f \sim_{\mathcal{I}} g \iff f - g \in \mathcal{I}(X,Y)$ pour $f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $X,Y \in \mathcal{C}$. On note $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ ce quotient.

Remarques.

1. Explicitement, on a $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\mathcal{I}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}/\mathcal{I}$ et la composition dans $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est induite par celle de $\mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est k-linéaire et le foncteur de projection canonique $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ est k-linéaire.

Propriété. ***(Propriété universelle du quotient k-linéaire)***

On a la propriété universelle du foncteur canonique parmi les foncteurs k-linéaires $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

Exemples. ***(Quotients k-linéaires)***

1. Sit A est une algèbre et I un idéal bilatère de A, alors $\mathcal{A} = \{\star\}$ avec $\mathrm{End}(\star) = A$ admet I comme idéal, et la catégorie $\mathcal{A}/I$ est donnée par l'algèbre A/I.

Définition. ***(k-catégorie libre)***

Soit $\mathcal{S}$ une catégorie ensembliste. La k-catégorie libre sur $\mathcal{S}$, notée $k\mathcal{S}$, a les mêmes objets que $\mathcal{S}$, les k-modules de morphismes $\mathrm{Hom}_{k\mathcal{S}}(X,Y) = k\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(X,Y)$ qui sont les combinaisons k-linéaires formelles de morphismes $f : X \to Y$ de f et les compositions sont celles qui étendent bilinéairement celles de $\mathcal{S}$.

Exemples. ***(k-catégories libres)***

1. Si $\mathcal{S}$ est la catégorie classifiante d'un groupe G, alors $k\mathcal{S}$ est la catégorie à un objet associée à l'algèbre de groupe kG.
2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble ordonné $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ confondu à sa catégorie d'incidence. Soit $\mathcal{I} \subseteq k\mathcal{S}$ l'idéal engendré par tous les morphismes $n \to n+2$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $k\mathcal{S}/\mathcal{I}$ est

$$\ldots \longrightarrow -2 \longrightarrow -1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \ldots$$

où l'on indique l'annulation par des pointillées. Soit A une k-algèbre. Alors la donnée d'un foncteur $M : k\mathcal{S}/\mathcal{I} \to \mathrm{Mod}\ A$ est la donnée d'un diagramme

$$\ldots \longrightarrow M^{-1} \longrightarrow M^{0} \longrightarrow M^{1} \longrightarrow M^{2} \longrightarrow \ldots$$

où toutes les compositions $M^n \to M^{n+1} \to M^{n+2}$, $n \in \mathbb{Z}$, s'annulent.
Plus précisément, on a un isomorphisme de catégories $\mathrm{Fun}_k(k\mathcal{S}/\mathcal{I},\mathrm{Mod}\ A) \xrightarrow{\sim} \{\text{complexes de } A\text{-modules}\}$.

Fait

Notons k-Cat la catégorie des petites k-catégories. Le foncteur $\mathrm{Cat} \to k\text{-}\mathrm{Cat}, \mathcal{S} \to k\mathcal{S}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli $k\text{-}\mathrm{Cat} \to \mathrm{Cat}$ qui à une k-catégorie, associe sa catégorie ensembliste sous-jacente.

5.4.5 Complexes sur une catégorie additive

Définition. ***(Objet gradué)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Un *objet gradué (cohomologiquement)* sur $\mathcal{A}$ est une famille $X = (X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, un *morphisme* $f : X \to Y$ *(gradué) de degré* n entre objets gradués est une famille de morphismes $f^p : X^p \to Y^{p+1}$, $p \in \mathbb{Z}$. On considère souvent les *morphismes gradués de degré* -1 entre deux complexes.

Remarque. Si $f : Y \to Z$ est gradué de degré n et $g : X \to Y$ est gradué de degré m, leur composition fg de composantes $(fg)^p : X^p \xrightarrow{g^p} Y^{p+m} \xrightarrow{f^{p+m}} Z^{p+m+n}$ est graduée de degré $m+n$.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathcal{G}r(\mathcal{A})$ *la catégorie des objets gradués* ayant pour objets les objets gradués de $\mathcal{A}$ et pour morphismes les $\mathbb{Z}$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}r(\mathcal{A})}(X,Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\{\text{morphismes gradués } f : X \to Y \text{ de degré } n\}$.

Définition. ***(Complexe de cochaînes, différentielle)***

Soit $\mathcal{A}$ est une catégorie additive. Un *complexe de cochaînes* sur $\mathcal{A}$ est un couple (C,d_C) où C est un objet gradué et $d_C : C \to C$ un endomorphisme gradué de degré 1, dit *différentielle*, tel que $d_C^2 = 0$.

Définition. ***(Morphisme de complexes de cochaînes)***

Un *morphisme de complexes de cochaînes* d'une catégorie additive $\mathcal{A}$ est un mophisme gradué $f : (C,d_C) \to (D,d_D)$ de degré 0 entre deux complexes de cochaînes (C,d_C),(D,d_D) sur $\mathcal{A}$, réalisé par $f : C \to D$ tel que $f \circ d_C = d_D \circ f$.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ la *catégorie des complexes de cochaînes* sur $\mathcal{A}$.

Heuristique

Concrètement, un complexe de cochaînes (C,d_C) est un diagramme

$$\dots \xrightarrow{C} {}^{-1} \xrightarrow{d_C^{-1}} C^0 \xrightarrow{d_C^0} C^1 \xrightarrow{d_C^1} \dots$$

tel que $d_C^p d_C^{p-1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, et un morphisme $f : (C,d_C) \to (D,d_D)$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^0 \arrow[r] \arrow[d] & C^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & D^{-1} \arrow[r] & D^0 \arrow[r] & D^1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

commutatif, *i.e.* tel que $fd_X = d_Y f$, autrement dit, $d_Y^i \circ f^i = f^{i+1} d_Y^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Remarques.

1. On a le foncteur canonique $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ qui envoie $X \in \mathcal{A}$ sur le *complexe concentré en degré* 0 :
$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{X}_{\text{degré } 0} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$
qui est pleinement fidèle. Souvent, on identifie donc $\mathcal{A}$ avec une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ via le foncteur.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Le foncteur $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}, (X,d_X) \to X^n$ a un adjoint à gauche et un adjoint à droite, à expliciter.

Exemple fondamental. ***(Résolution barre, augmentation)***

Soient k un corps, A une k-algèbre et $M \in \text{Mod } A$. Considérons le diagramme, où $\otimes = \otimes_K$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \text{degré } -p & & & & \text{degré } 0 & & & \\ \ldots \xrightarrow{d} & M \otimes A^{\otimes p} \otimes A & \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} & M \otimes A \otimes A & \xrightarrow{d} & M \otimes A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \ldots \\ & & & m \otimes a \otimes b & \longmapsto & ma \otimes b - m \otimes ab & & & \end{array}$$

où $d(m \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_p \otimes a_{p+1}) = ma_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_p \otimes a_{p+1} + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i m \otimes a_i 1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{p+1}$. Alors ce complexe $B(M,A)$ est un complexe de A-modules, car $d^2 = 0$, libres (et oui).

De plus, on a un morphisme de complexes $B(M,A) \xrightarrow{\varepsilon} M$ donné par $m \otimes a \mapsto ma$. On appelle $B(M,A)$ la *résolution barre* de M et ε son *augmentation*.

Des résolutions comme la résolution barre vont nous permette de calculer des foncteurs dérivés (à gauche). Pour les caractériser par une propriété universelle, on introduit

5.4.6 La catégorie homotopique et sa structure triangulée

Définition. ***(Morphismes homotopes à 0)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. En abusant de la notation C pour (C,d_C), un morphisme $f : C \to D$ de $\mathcal{C}(A)$ est *homotope à* 0 ou 0-*homotope* s'il existe un morphisme d'objets gradués de degré -1 $h : C \to D$ tel que $f = d_D h + h d_C$.

⟶ *Notation.* On note htp_0 où $htp_0(X,Y) = \{d_Y \cdot h + h \cdot d_X \mid h : X \to Y \text{ gradué de degré } -1\}$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}(A)$, l'idéal (à vérifier) de $\mathcal{C}(A)$ formé des morphismes homotopes à 0 de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Définition. ***(Catégorie homotopique sur une catégorie additive)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. On définit alors la *catégorie homotopique de* $\mathcal{C}(A)$ ou *catégorie modulo homotopie de* $\mathcal{C}(A)$ par $\mathcal{H}(A) = \mathcal{K}(\mathcal{A}) := \mathcal{C}(\mathcal{A})/htp_0$.

Exemple fondamental. ***(Suite des représentations barres avec la catégorie homotopique)***

L'inclusion $\mathrm{Free}(A) \hookrightarrow \mathrm{Mod}\ A$ induit un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{H}(\mathrm{Free}(A)) \hookrightarrow \mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)$ Notons $\overline{\varepsilon}$ l'image de ε dans la catégorie $\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)$. Alors $\overline{\varepsilon} : B(A,M) \to M$ est définie
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A)) \ni F \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "\forall"'] & B(A,M) \arrow[d, "\overline{\varepsilon}."] \\ & M \end{tikzcd}$$
. Pour tout $F \in \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))$, $\overline{\varepsilon}$ induit une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))}(F,B(A,M)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)(F,M)$. Autrement dit, $B(A,M)$ représente le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)}(?,M) : \mathcal{H}(\mathrm{Free}(A))^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}\ k$, $F \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}\ A)}(F,M)$.

La structure triangulée de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, introduite ci-dessous, est utile pour démontrer de telles affirmations.

Définition. ***(Foncteur suspension)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Le *foncteur suspension* $\Sigma : \mathcal{G}r(\mathcal{A}) \to \mathcal{G}r(\mathcal{A})$ envoie $X = (X^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ su ΣX tel que $(\Sigma X)^p = X^{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et un morphisme f de degré n sur le morphisme Σf de degré n tel que $(\Sigma f)^p = f^{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, de visu : si

$$X = (\dots\ X^{-1}\ X^0\ X^1\ \dots)$$

alors

$$\Sigma X = (\dots\ X^0\ X^1\ X^2\ \dots).$$

Par extension, le *foncteur suspension* (toujours) $\Sigma : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A})$ envoie (X,d_X) sur $(\Sigma X, -d_{\Sigma X})$ et $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ sur $\Sigma f : (\Sigma X, -d_{\Sigma X}) \to (\Sigma Y, -d_{\Sigma Y})$.

⟶ *Notation.* On note parfois de façon postfixe : $\Sigma X = X[1]$.

Attention au signe pour le foncteur suspension sur $\mathcal{C}(A)$!

Remarque. Donc si $X = (\ldots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_x^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} \ldots)$, alors $X[1] = \Sigma X = (\ldots \longrightarrow X^0 \xrightarrow{-d_X^0} X_1 \xrightarrow{-d_X^1} X^2 \xrightarrow{-d_X^2} \ldots$.

Définition-propriété. ***(Cône d'un morphisme de complexes)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et soient $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Son *cône* est le complexe $C(f) = (Y \oplus \Sigma X, \begin{pmatrix} d_Y & f \\ 0 & d_{\Sigma X} \end{pmatrix})$ où $\oplus$ désigne le biproduit dans $\mathcal{G}r(\mathcal{A})$.

▷ On a bien $\begin{pmatrix} d & f \\ 0 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & f \\ 0 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 & df - fd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Exercice 68

Considérons

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h=\begin{pmatrix} 0 \\ id_X \end{pmatrix}"] \arrow[rd, bend right, "k"'] & Y \arrow[r, "i=\begin{pmatrix} id_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "j"] & C(f) \arrow[ld, dashed, "\exists! g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

où h est un morphisme gradué de degré -1. On a $i \circ f = d_{C(f)}h + hd_X$, propriété notée $(\star)$. Montrer que (i,h) est universel pour la propriété $(\star)$, *i.e.*, pour tout $Z \in \mathcal{C}(A)$, on a la bijection

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(C(f),Z) & \longrightarrow & \{(j,k) \mid j : Y \to Z \text{ morphisme de complexes}, k \text{ morphisme gradué de degré 1} \\ g & \longmapsto & (gi,gh) \end{array}$$

▷ Autrement dit, montrons que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rd, "h"'] & Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_Y \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\forall g"] & C(f) \arrow[ld, dashed, "\exists! \overline{g}"] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

pour tout h de degré -1, soit $h^n : X^{n+1} \to U^n$. Ainsi, $gf = dh + hd$ signifie : pour tout n, $g^n \circ g^n = d_X^{n-1} \circ h^{n-2} + h^n \circ d_X^n$. Montrons qu'il existe un unique $\overline{g} : C(f) \to U$ tel que $\overline{g} \circ i = g$ et $\overline{g} \circ h = h$. On aura en fait $\overline{g} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix}$ et l'on peut donc récrire $\overline{g} \circ i = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = g_1 = g$ et $\overline{g} \circ h = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_1 = h$. Ainsi, par analyse, $\overline{g}^n = \begin{pmatrix} g^n & h^n \end{pmatrix}$. Vérifions en synthèse que $\overline{g}$ est un morphisme, *i.e.* $\overline{g}^{n+1} \circ d^n_{C(f)} = d^n_U \circ g^n$. L'expression de gauche vaut $\begin{pmatrix} g^{n+1} & h^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^n_Y & f^{n+1} \\ 0 & -d^{n+1}_X \end{pmatrix}$ et celle de droite $d^n_X \circ \begin{pmatrix} g^n & h^n \end{pmatrix}$ et en faisant commuter g avec les différentielles, on obtient la même chose. ■

Heuristique

$C(f)$ est le « conoyau à homotopie près » de f.

Définition. ***(Σ-suite, triangle)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Une Σ-*suite* de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est un diagramme $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ et un *morphisme de Σ-suites* est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

qui permet de définir la *catégorie des Σ-suites*.

Définition. ***(Triangle dans une catégorie additive)***

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. Un *triangle* dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est une Σ-suite isomorphe à l'image dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ d'une suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} C(f) \xrightarrow{(0\ id)} \Sigma X$.
Un *morphisme de triangles* est un morphisme de Σ-suites, la catégorie des triangles de $\mathcal{A}$ triangles formant alors une sous-catégorie plein de la catégorie des Σ-suites.

VOC On utilise parfois la terminologie alternative où une Σ-suite est un *triangle (tout court)* et un triangle devient un *triangle distingué*.

Remarque. On note le morphisme t

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "|" marking] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}.$$

Théorème. ***(Axiomes des catégories triangulées)***

On a les propriétés suivantes :

$(TR0)$ Toute Σ-suite isomorphe à un triangle est un triangle.

$(TR1)$ Pour tout objet X, la suite $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle.

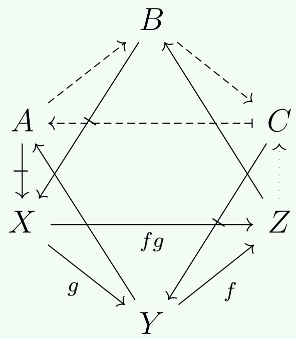
$(TR2)$ Pour tout morphisme $u : X \to Y$, il existe un triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$.

$(TR3)$ Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ est un triangle, alors $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma w} \Sigma Y$ aussi (attention au signe !), et réciproquement : on peut faire tourner les triangles à gauche et à droite.

($TR4$) Si l'on a des triangles (u,v,w) et (u',v',w') et un carré commutatif
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd}$$
, il existe un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "c"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma X'. \end{tikzcd}$$

($TR5$) Supposons donnés des triangles $X \xrightarrow{g} Y \longrightarrow A \longrightarrow \Sigma X$, $Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma Y$ et $X \xrightarrow{fg} Z \longrightarrow B \longrightarrow \Sigma X$. Alors il existe un triangle $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \Sigma A$ tel que dans l'octaèdre



les faces qui ne sont pas des triangles distingués sont commutatifs et les deux parallélogrammes contenant le centre $(BCYX)$,$(ABZY)$ le sont aussi.

▷ On pourra consulter la section I.1.4 de *Sheaves on manifols*, Koshinava,Schapira. ■

Remarques.

1. Le morphisme c dans ($TR4$) n'est pas unique en général. Cependant, on verra que l'objet Z dans ($TR1$) est unique à isomorphisme non unique près.
2. Les triangles sont des analogues de suites exactes courtes de modules $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$. L'énonce ($TR5$) est alors l'analogue du troisième théorème d'isomorphisme. Supposons que l'on ait une tour de sous-modules $X \subseteq Y \subseteq Z$ et des suites exactes courtes : $0 \longrightarrow X \overset{g}{\hookrightarrow} Y \longrightarrow Y/X = A \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow Y \overset{f}{\hookrightarrow} Z \longrightarrow Z/Y = C \longrightarrow 0$, $0 \longrightarrow X \overset{fg}{\hookrightarrow} Z \longrightarrow Z/X = B \longrightarrow 0$. On a alors une suite exacte $0 \longrightarrow A = Y/X \longrightarrow B = Z/X \longrightarrow C = Z/Y \longrightarrow 0$, car ${}^{Z/X}\!\big/_{Y/X} \xrightarrow{\sim} Z/Y$.

5.4.7 Catégories triangulées

Définition. ***(Catégorie triangulée)***

Une *catégorie triangulée* est une catégorie additive $\mathcal{C}$ munie d'une autoéquivalence $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ adppelée *foncteur suspension* ou *foncteur décalage* et une classe de Σ-suites $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ appelées *triangles* qui vérifient les axiomes $(TR0)$,...,$(TR5)$.

Définition. ***(Sous-catégorie triangulée)***

Si $\mathcal{C}$ est une *catégorie triangulée*, alors une *sous-catégorie triangulée* $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine telle que $\Sigma\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ et *stable par extensions*, *i.e.* si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle et $X,Z \in \mathcal{C}'$, alors $Y \in \mathcal{C}'$. On dit que Y est une *extension* de Z par X.

Remarques.

1. Si $\mathbb{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie triangulée et $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ un triangle, alors les trois termes X,Y,Z sont dans $\mathcal{C}'$ si et seulement si deux parmi les trois le sont. Il s'agit de tourner le triangle !
2. Si $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ est une sous-catégorie triangulée, alors $\mathcal{C}'$ muni du foncteur induit par $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et des triangles de $\mathcal{C}$ dont les trois termes sont dans $\mathcal{C}'$, est une catégorie triangulée.

Exemples. ***(Catégories triangulées)***

1. Si $\mathcal{A}$ est additive, alors $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ est triangulée par le théorème de la section précédente. $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ a les sous-catégories suivantes :
   - $\mathcal{H}^-(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \gg 0\}$;
   - $\mathcal{H}^+(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall p \ll 0\}$;
   - $\mathcal{H}^b(\mathcal{A})$ la clôture par isomorphismes de $\{X \in \mathcal{H}(\mathcal{A}) \mid X^p = 0 \quad \forall |p| \gg 0\}$.

   Une sous-catégorie triangulée $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ contient tous les objets nuls de $\mathcal{C}$. La catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ contient « beaucoup » d'objets nuls ; ce sont les *complexes contractiles* (X,d_X), *i.e.* tels qu'il existe $h : X \to X$ gradué de degré -1 tel que $d_X h + h d_X = id_X$. Par exemple, pour $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{tikzcd} & & & \deg p - 1 & \deg p & & \\ X = (\dots & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "id_A"] & A \arrow[l, dashed, bend left, "h^p = id_A"] \arrow[r] & 0 & \dots). \end{tikzcd}$$

2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Supposons pour simplifier que $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un automorphisme, c'est-à-dire un isomorphisme de catégories de $\mathcal{C}$ sur elle-même. Alors $\mathcal{C}^{\text{op}}$ munie de Σ^{-1} et des triangles $\Sigma^{-1}Z \xleftarrow{-\Sigma^{-1}w} X \xleftarrow{u} Y \xleftarrow{v} Z$ tels que

$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} \xrightarrow{w} \Sigma X$ est un triangle dans $\mathcal{C}$ est encore triangulée.

Définition. ***(Foncteur triangulé)***

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories triangulées de foncteues suspension $\Sigma_{\mathcal{C}}$ et $\Sigma_{\mathcal{D}}$. Un *foncteur triangulé* $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un couple (F,φ) où $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur additif et $\varphi : F\Sigma_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\mathcal{D}} F$ un isomorphisme de foncteurs tel que pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$ de $\mathcal{C}$, la Σ-suite

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Fu"] & FY \arrow[r, "Fv"] & FZ \arrow[r, "(\varphi X)(Fw)"] \arrow[dr, "Fw"'] & \Sigma_{\mathcal{D}} FX \\
 & & & F\Sigma_{\mathcal{C}X} \arrow[u, "\varphi X"']
\end{tikzcd}$$

est un triangle.

Exemples. ***(Foncteurs triangulés)***

1. L'inclusion $\mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$ d'une sous-catégorie triangulée est un foncteur triangulée où ici φ est trivial.

Exercice 69

Définir la composition des foncteurs triangulés, la notion de morphismes entre foncteurs triangulés de paire adjointe de foncteurs triangulés.

Définition. ***(Foncteur (co)homologique)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Un foncteur $\mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$, respectivement $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ est *homologique*, respectivement *cohomologique* s'il est additif et pour tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma X$, la suite $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ$, respectivement $FX \xleftarrow{Fu} FY \xleftarrow{Fv} FZ$ est exacte.
On parle aussi de foncteur *exact*.

Remarque. Si $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ est homologique, on pose $F^k = F \circ \Sigma^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors tout triangle $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$ induit une suite exacte longue $...F^{k-1}Z \longrightarrow F^kX \longrightarrow F^kY \longrightarrow F^kZ \longrightarrow F^{k+1}X \longrightarrow ...$ par l'axiome $(TR3)$.

Lemme

Si $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow \Sigma X$ est un triangle, alors $fg = 0$.

▷ Par l'axiome $(TR1)$, on a le triangle $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$. Par l'axiome $(TR4)$, on peut compléter le carré commutatif $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "id_x"'] & X \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$ en un morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_x"] \arrow[d, "id_x"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma X \arrow[d, "id_{\Sigma X}"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

dont on déduit $fg = 0$ par la commutativité du carré central. ■

Lemme

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie triangulée. Pour tout $U \in \mathcal{C}$, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?,U)$ sont (co)homologiques.

▷ Soit $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z \longrightarrow \Sigma X$ un triangle. ON sait déjà que $fg = 0$. Par suite, la suite $\mathrm{Hom}(U,X) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(U,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(U,Z)$ est un complexe. Soit $h : U \to Y$ un morphisme tel que $fh = 0$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "id_U"] \arrow[d, dashed, "k"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma U \arrow[r, "-id_{\Sigma U}"] \arrow[d, dashed] & \Sigma U \arrow[d, "\Sigma h"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "e"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma g"'] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

Par $(TR3)$, chaque ligne dont on retire l'élément extrémal à gauche sont des triangles. Par $(TR4)$, on peut trouver un morphisme $\Sigma U \to \Sigma X$ faisant commuter le diagramme de droite. Puisque Σ est une équivalence, ce morphisme est de la forme Σk pour un certain $k : U \to X$, tel que $gk = h$. ■

Lemme. ***(Lemme des cinq)***

Supposons que l'on ait un diagramme commutatif de la catégorie des groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \arrow[r, "k'"'] & E' \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Si α, β, δ et ε sont bijectifs, alors γ l'est également.
En fait, il suffit de supposer que α est surjectif, β et δ sont bijectifs et ε est injectif.

▷ Soit $c \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Alors $0 = h'\gamma(c) = \delta h(c)$ donc $h(c) = 0$ et $c = g(b)$ pour un certain $b \in B$. On a $g'\beta(b) = \gamma g(b) = 0$. Ainsi $\beta(b) = f'(a')$ pour un certain $a' \in A'$. Puisque α est surjective, on a $a' = \alpha(a)$ pour un certain $a \in A$. On a $f(a) = b$ puisque β est injective, et $\beta f(a) = f'\alpha(a) = \beta(b)$.

Mais alors nous avons $c = g(b) = gf(a) = 0$. Dans la même veine, on montre que γ est surjective. ■

Corollaire

Supposons que l'on ait un morphisme de triangles dans une catégorie triangulée :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma a"'] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & \Sigma X' \end{tikzcd}$$

de sorte que a et b soient des isomorphismes. Alors b est un isomorphisme.

▷ Par le lemme de Yoneda, il suffit de démontrer que $\mathrm{Hom}(U,b) : \mathrm{Hom}(U,Z) \to \mathrm{Hom}(U,Z')$ est bijective pour tout $U \in \mathcal{C}$. L'image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?)$ du diagramme étendu

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c"'] & \Sigma X \arrow[r, "-\Sigma u"] \arrow[d, "\Sigma a"] & \Sigma Y \arrow[r, "-\Sigma v"] \arrow[d, "\Sigma b"] & \Sigma Z \arrow[d, "\Sigma c"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X' \arrow[r, "-\Sigma u'"'] & \Sigma Y' \arrow[r, "-\Sigma v'"'] & \Sigma Z' \end{tikzcd}$$

est un diagramme de groupes abéliens dont les lignes sont exactes, de sorte que $\mathrm{Hom}(U,b)$ est bijectif par le lemme des cinq. ■

Corollaire

SI deux triangles (u,v,w) et (u,v',w') ont la même *base* u, alors ils sont isomorphes.

▷ Par l'axiome $(TR4)$, on obtient $c : Z \to Z'$ tel que (id_X,id_Y,c) est un morphisme de triangles.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "c"'] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Par le lemme des cinq, c'est un isomorphisme. ■

Définition. *(Cône)*

Le *cône* sur un morphisme $u : X \to Y$ est le troisième terme dans tout triangle $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma X$.

Remarque. Par le $(TR2)$, il existe toujours un tel triangle. Par le corollaire précédent, le cône sur sur u est unique à isomorphisme (non unique !) près.

Corollaire. *(Morphisme inversible)*

Un morphisme $u : X \to Y$ est inversible si et seulement si son cône est un objet nul.

$\triangleright$ On utilise le lemme de Yoneda et la suite exacte longue induite par le triangle dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,?)$. ■

$\triangleright$ *(Autre preuve)* Passons-nous de ces gros outils. On considère le morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & \Sigma X \arrow[d, "\Sigma id"] \\
X \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

qui se complète par φ par propriété précédente. Puisque φ est un isomorphisme, on a $C(f) = 0$.

Réciproquement, si $C(f) = 0$, on a un triangle $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$, d'où en faisant tourner $\Sigma X^{-1} \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$. D'autre part, on a un triangle trivial $X \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$, d'où $0 \longrightarrow XX \xrightarrow{id} X \longrightarrow 0$. On peut donc compléter par φ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Sigma X^{-1} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où 0 et id_X sont des isomorphismes, donc φ l'est aussi. Par commutation dans le deuxième carré, $\varphi \circ f = id_X$. Donc f est un isomorphisme en tant qu'isomorphisme réciproque. ■

Exemple fondamental

Si $\mathcal{A}$ est additive, un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ devient inversible dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ si et seulement si $C(f)$ est un objet nul de $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, *i.e.* $\overline{id_{C(f)}} = 0$, *i.e.* $id_{C(f)} \sim_{htp_0} 0$, *i.e.* $id_{C(f)} = d \cdot h + h \cdot d$ pour un morphisme gradué $h : C(f) \to C(f)$ de degré 1.

Théorème

Soient $X_i \xrightarrow{u_i} Y_i \xrightarrow{v_i} Z_i \xrightarrow{w_i} \Sigma X_i$ pour $i \in [\![1,2]\!]$ deux triangles. Alors la Σ-suite $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}} Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}} \Sigma(X_1 \oplus X_2)$ est encore un triangle.

$\triangleright$ On forme un triangle $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}} Y_1 \oplus Y_2 \longrightarrow Z \longrightarrow \Sigma(X_1 \oplus X_2)$ et l'on montre qu'il est isomorphe à la Σ-suite ci-dessus. ■

Corollaire. *(Les suites exactes scindées donnent des triangles)*

Si $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ est une suite exacte scindée dans $\mathcal{C}$, alors $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{O} \Sigma X$, où O est le morphisme nul, est un triangle.

▷ La suite donnée est isomorphe à $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & id \end{pmatrix}} Z \longrightarrow 0$ et donc la Σ-suite $(u,v,0)$ est isomorphe à la somme direct des Σ-suites $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma X$ et $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow \Sigma 0$. Ce sont deux triangles par $(TR1)$ et $(TR3)$. Donc leur somme directe est un triangle par le corollaire précédent. ■

Lemme

Soit $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{e} \Sigma X$ un triangle. Alors les propositions :

(i) p est un épimorphisme ;

(ii) i est un monomorphisme ;

(iii) $e = 0$;

(iv) la suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$ est exacte scindée.

▷ En exercice. ■

Corollaire

Dans une catégorie triangulée, en particulier dans $\mathcal{H}(\mathrm{Ab})$, les seuls monomorphismes sont les *monomorphismes scindés*, qui admettent une rétraction.

Remarque. Ceci est tout à fait faux dans la plupart des catégories de modules, par exemple $\mathbb{Z} \underset{k \mapsto 2k}{\longrightarrow} \mathbb{Z}$ n'est pas scindé dans Ab.

5.4.8 Noyaux et conoyaux

5.5 Catégories abéliennes

5.5.1 Catégories de modules

Fait. *(Lien modules-espaces vectoriels)*

Si k est un corps, un k-espace vectoriel est exactement un k-module.

Fait. *(Lien modules-groupes abéliens)*

La catégorie des $\mathbb{Z}$-modules est équivalente à Ab.

Le fait que les produits semi-directs, qui émergent naturellement des suites exactes courtes scindées, soient des produits directs dans la catégorie des groupes abéliens, se généralise naturellement aux modules. On pourra voir également le lien avec le fait que tout sous-espace vectoriel admette un supplémentaire, autrement dit que **toute suite exacte courte d'espaces vectoriels soit scindée**.

Propriété. ***(Caractérisation des suites scindées)***

Soit $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \qquad (\star)$ une suite exacte courte de A-modules. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i) f est rétractable, *i.e.* il existe $r : M \to L$ un morphisme de A-modules tel que $rf = id_L$;

(ii) g est sectionnable, *i.e.* il existe $s : N \to M$ un morphisme de modules tel que $gs = id_N$;

(iii) la suite $(\star)$ est scindée = scindable, *i.e.* il existe un isomorphisme $h : M \to L \oplus N$ qui rende le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_L"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i_L"'] & L \oplus N \arrow[r, "p_N"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commutatif.

On donne quelques théorèmes fondamentaux, qui sont, souvent dans le contexte des suites exactes de groupes abéliens, les premiers exemples académiques de ce sport olympique appelé *chasse aux diagrammes*, où il s'agit simplement d'obtenir des relations entre images et noyaux en faisant commuter des carrés dans un diagramme multiple.

Heuristique

Les diagrammes sont les cartes du monde homologique.

Lemme. ***(Lemme des cinq)***

Soit A un anneau. Soient $M_1,\ldots,M_5$ et $N_1,\ldots,N_5$ des A-modules, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$, des morphismes de A-modules $f_i : M_i \to N_i$ et pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, des morphismes de modules $\alpha_i : M_i \to M_{i+1}$ et $\beta_i : N_i \to N_{i+1}$, tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

commute et que ses lignes soient exactes. Alors :

(i) *(version forte du lemme des cinq)* si f_1 est surjective et f_2 et f_4 sont injectives, alors f_3 est injective ;

(ii) *(version forte duale du lemme des cinq)* si f_5 est injective et f_2 et f_4 sont surjectives, alors f_3 est surjective ;

(iii) *(version faible du lemme des cinq)* si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Remarquons que, dans Mod A, on peut remplacer la notion de morphisme injectif par celle de monomorphisme de modules et la notion de morphisme surjectif par celle d'épimorphisme de modules.

▷

■

Remarque. Le lemme des cinq permet donc d'établir des isomorphismes. Dans le cas des suites exactes courtes en lignes où $M_1 = N_1 = 0 = M_5 = N_5$, les flèches f_1 et f_5 sont automatiquement des isomorphismes et il n'y a que deux choses à vérifier : la commutation des deux carrés centraux et la bijectivité de f_2 et f_4.

Lemme. ***(Lemme du serpent)***

Soit A un anneau. Soient A,B,C et A',B',C' des A-modules, des morphismes de A-modules $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \longrightarrow C$ et $g_1 : A' \to B'$, $g_2 : B' \to C'$ et pour tout $M \in \{A,B,C\}$ dans cet ordre, des morphismes modules α,β,γ respectivement de $M \to M'$, tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] & B' \arrow[r, "g_2"'] & C' & \end{tikzcd}$$

commute et que ses lignes soient exactes. On rappelle que si f est un morphisme de modules à valeurs dans M, alors $\mathrm{Coker}(f) = M/\mathrm{Im}(f)$. Alors il existe un morphisme $\delta : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ qui rende la suite

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$$

exacte, où les applications dont les noms sont omis sont induites par f_1, f_2, g_1 ou g_2.
Si de plus f_1 est injective, alors $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ l'est aussi. De même, si g_2 est surjective, alors $\mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$ est surjective.

▷ Remarquons d'abord que tout carré commutatif de A-modules $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$ peut se compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \ker(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta) \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\beta) \arrow[d] \\ 0 & 0. \end{tikzcd}$$

■

Remarque. On cherchera pour comprendre le nom, le serpent dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\gamma) \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d] & C'. \arrow[d] & \\
 & \mathrm{coker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{coker}(\gamma) \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

très commutatif.

Exercice 70

Trouver les liens logiques entre : TFAH, lemme des 5, snake lemma.

5.5.2 Généralités

5.5.2.1 Motivation : images et coimages

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{A}$. On rappelle que le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ existe si le foncteur $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}, U \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U,Y))$ est représentable et alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un représentant. De même, le conoyau $\mathrm{Coker}(f)$ existe si le foncteur $\mathcal{A} \to \mathrm{Ab}, V \mapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,V))$ est représentable et $\mathrm{Coker}(f)$ est alors un représentant. Par définition, on a donc des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(?,\mathrm{Ker}(f)) \longrightarrow \mathcal{A}(?,X) \xrightarrow{f_*} \mathcal{A}(?,Y)$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(\mathrm{Coker}(f),?) \longrightarrow \mathcal{A}(Y,?) \xrightarrow{f^*} \mathcal{A}(X,?).$$

En particulier, $\mathrm{Ker}(f) \to X$ est un monomorphisme et $Y \to \mathrm{Coker}(f)$ est un épimorphisme.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[dr] & \\ U \arrow[u, dashed] \arrow[ur] & & & V \end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & & Y \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\ & & \mathrm{Coker}(i) \arrow[urr, dashed, "f_1"] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

et considérons que tous les noyaux et conoyaux existent. Posons : $\boxed{\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\pi)}$ et $\boxed{\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{Coker}(i)}$.

On a $fi = 0$ donc $f = f_i g$ pour un unique $f_i \mathrm{Coker}(i) \to Y$. On a $\pi f_1 = 0$, car $\pi f_1 g = \pi f = 0$ et q est un épimorphisme. Donc $f_1 = j\overline{f}$ pour un $\overline{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, canonique.

Notons que si $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ R$, R un anneau, alors $\overline{f}$ est un isomorphisme.

5.5.2.2 Définition

Définition. ***(Catégorie abélienne)***

Une catégorie $\mathcal{C}$ est *abélienne* si elle est additive, tout morphisme admet un noyau et un conoyau et pour tout morphisme $f : X \to Y$, le morphisme canonique $\overline{f} : \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme *(théorème d'isomorphisme)*.

Exemples

1. Si R est un anneau, Mod R est abélienne. Si $\mathbb{R}$ est noethérien à droite, alors mod R est abélienne.
2. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, alors $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ est abélienne.
3. SI $\mathcal{A}$ est abélienne et I est une petite catégorie, alors $\mathrm{Fun}(I,\mathcal{A})$ est abélienne.
4. En particulier, si T est un espace topologique, alors $\mathrm{Pre}(T,\mathrm{Ab})$ est encore abélienne.
5. SI $\mathcal{J}$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie, *i.e.* une catégorie préadditive, si $\mathcal{A}$ est abélienne, alors la catégorie $\mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ des foncteues $\mathbb{Z}$-linéaires $F : \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ est abélienne, car c'est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}(\mathcal{J},\mathcal{A})$ stable par formation de biproduits. Par exemple si $\mathcal{J}$ est la $\mathbb{Z}$-catégorie libre $\mathbb{Z}\mathcal{S}/\mathcal{J}$, alors on trouve que la catégorie $\mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{J},\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes sur $\mathcal{A}$ est encore abélienne.

Contre-exemple. ***(Catégorie non abélienne)***

On considère la catégorie $\mathcal{A}$ des groupes abéliens topologiques séparés. Elle est additive et tout morphisme admet un noyau et un conoyau. Considérons l'inclusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Coker}(f) = \{0\}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathbb{R} \to \mathrm{Coker}(f)) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{Coker}(0 \to \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, mais $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas isomorphes. □

Contre-exemple. ***(Encore un non-exemple)***

Soit k un corps. Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(1 \to 2), \mathrm{Mod}\ k)$ la sous-catégorie formée des morphismes *injectifs* $V_1 \to V_2$ entre k-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{A}$ est additive, admet tous les noyaux (on les calcule composante par composante) et tous les conoyaux (ils ne se calculent pas composante par composante en général !), mais n'est pas abélienne : considérer $(0 \to k) \xrightarrow{f} (k = k)$, $f_1 = 0$, $f_2 = id_k$. □

Exercice 71

Dans le contre-exemple précédent, remarquer que $\mathrm{Fun}(k\mathcal{P}, \mathrm{Mod}\ k)$ est équivalente à $\mathrm{Fun}(\mathcal{P}, \mathrm{Mod}\ k)$.

Remarques.

1. Une catégorie abélienne admet toutes les limites et colimites finies. : elles s'expriment en termes de biproduits, noyaux et conoyaux !
2. Un morphisme $f : X \to Y$ dans un catégorie abélienne est un monomorphisme, respectivement un épimorphisme, respectivement un isomorphisme, si et seulement si, son noyau, respectivement son conoyau, respectivement son noyau et son conoyau, sont nuls.
3. Dans une catégorie abélienne, tout monomorphisme est le noyau de son conoyau et tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.

Propriété

Dans une catégorie abélienne, un morphisme est un isomorphisme si et seulement si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

5.5.2.3 Exactitude dans les catégories abéliennes

Définition. ***(Complexe exact)***

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ un complexe, *i.e.* $fg = 0$. Alors f se factorise par $Y \longrightarrow \mathrm{Coker}(g)$ donc la composition $\mathrm{Im}(g) \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z$ et le morphisme $\mathrm{Im}(g) \longrightarrow Y$ induit un morphisme canonique $\mathrm{Im}(g) \longrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ qui est en fait un monomorphisme. Le complexe $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ est *exact* si ce morphisme est inversible. Un complexe $X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow ... \longrightarrow X^n$ est *exact* si tout complexe extrait à trois termes est exact. Une *suite exacte courte* est un complexe exact $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$.

Définition. ***(Complexe acyclique)***

Un complexe $... \longrightarrow X^p \longrightarrow X^{p+1} \longrightarrow ...$, $p \in \mathbb{Z}$, est *acyclique* ssi tout complexe extrait à trois termes est exact.

Définition. ***(Foncteur exact)***

Soient $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est

1. *exact à gauche* si F préserve toutes les limites finies ;
2. *exact à droite* si F préserve toutes les colimites finies ;
3. *exact* s'il préserve toutes les limites et colimites finies, autrement dit s'il est exact à gauche et à droite.

Exemples

1. Soient A,B deux anneaux non nécessairement commutatifs. Soit X un A-B-bimodule. Alors $? \otimes_A X : \mathrm{Mod}\ A \longrightarrow \mathrm{Mod}\ B$ est exact à droite, car c'est un adjoint à gauche, et $\mathrm{Hom}_B(X,?) : \mathrm{Mod}\ B \to \mathrm{Mod}\ A$ est exact à gauche.
   Le foncteur $? \otimes_A X$ est exact si et seulement si le A-module à gauche ${}_AX$ est *plat*, et $\mathrm{Hom}_B(X,?)$ est exact si et seulement si le B-module X_B est *projectif*.

On dispose, pour simplifier les choses, du métathéorème suivant :

Théorème. ***(Freyd-Mitchell)***

Toute catégorie abélienne svelte se plonge par un foncteur exact dans une catégorie de modules.

⊛ *(Idée de la preuve.)* On peut supposer $\mathcal{A}$ petite à équivalence près. Le foncteur de Yoneda $\mathcal{A} \to \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est pleinement fidèle et exact à gauche, mais pas à droite. Son image est formée des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,A)$, $A \in \mathcal{A}$ qui sont exacts à gauche. Donc il induit un foncteur $\mathcal{A} \to \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$, où $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \subseteq \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est la sous-catégorie pleine des foncteurs exacts à gauche. On montre que $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est abélienne (son inclusion est exacte à gauche mais pas à droite) et que le foncteur

$\mathcal{A} \to \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est exact. Bien sûr, il est aussi pleinement fidèle. Autrement dit, on considère

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathrm{Fun}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}), X \mapsto X^\wedge \\ & \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab}) \end{tikzcd}$$

où la ligne du haut n'est pas exacte mais la flèche du bas, si. On montre que $\mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ est une catégorie de Grothendieck, *i.e.* elle est cocomplète, les colimites filtrantes y sont exactes et elle admet un générateur, *i.e.* un objet tel que tout objet soit quotient d'une somme infinie de cet objet. Il s'ensuit qu'elle admet un cogénérateur injectif I. Alors le foncteur $\mathrm{Hom}(?,I) : \mathrm{Lex}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}\ R$ où $R = \mathrm{End}(I)^{\mathrm{op}}$ est exact et pleinement fidèle. Par composition, on obtient un foncteur exact et pleinement fidèle $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{Mod}\ R$. En appliquant cet argument à $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, on a terminé. ■

Définition. ***(Morphisme de suites exactes courtes)***

Un morphisme de suites exactes courtes dans $\mathcal{A}$ est un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Lemme

Dans le diagramme ci-dessus, ci α et γ sont des monomorphismes, respectivement épimorphismes, respectivement isomorphismes, alors β l'est aussi.

▷ Exercice facile si l'on suppose le théorème de plongement de Freyd-Mitchell, moins facile sinon. ■

Lemme. ***(Lemme du scindage)***

Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ une suite exacte dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. On a équivalence entre :

(i) $i : A \to B$ admet une rétraction, *i.e.* $r : B \to A$ tel que $ri = id_A$;

(ii) $p : B \to C$ admet une section, *i.e.* $p : C \to B$ tel que $ps = id_C$;

(iii) la suite exacte est scindée, *i.e.* il existe un isomorphisme $\beta : B \to A \oplus C$ tel qu'on ait un isomorphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\begin{pmatrix} id_A \\ 0 \end{pmatrix}"'] & A \oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & id_C \end{pmatrix}"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

▷ Rien de sorcier par rapport à ce que l'on connaît sur les modules. ■

Lemme. ***(Caractérisation des suites exactes par les noyaux)***

Dans une catégorie abélienne, une suite de la forme $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est exacte dans la catégorie si et seulement si f est un noyau pour g.

▷

■

Lemme. ***(Caractérisation de l'exactitude à gauche)***

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact à gauche ;

(ii) F préserve les noyaux ;

(iii) pour toute suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{A}$, la suite $0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

▷

■

Remarque. On a dualement une caractérisation analogue des foncteurs exacts à droite : soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact à droite ;

(ii) F préserve les conoyaux ;

(iii) pour toute suite exacte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, la suite $FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

Lemme. ***(Caractérisation de l'exactitude)***

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre deux catégories abéliennes. On a équivalence entre :

(i) F est exact ;

(ii) pour toute suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ de $\mathcal{A}$, la suite $0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow$ de $\mathcal{B}$ est exacte.

▷

■

5.5.3 Complexes sur une catégorie abélienne

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne fixée. On pourra penser à une catégorie de modules, ou à celle des groupes abéliens.

Définition. ***(Bords, cycles)***

Soit X un complexe dans $\mathcal{A}$:

$$\ldots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \longrightarrow \ldots$$

et pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $Z^nX = \mathrm{Ker}(d^n)$ l'objet ou espace des *cocyles*, $B^nX = \mathrm{Im}(d^{n-1})$ l'objet ou espace des *cobords* au rang n du complexe. On pose aussi $H^nX = \mathrm{Coker}(B^nX \to Z^nX) := Z^nX/B^nX$ la *cohomologie* au rang n.

Remarques.

1. Visuellement, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rrr] \arrow[dr, two heads] & & & X^n \arrow[dr, two heads] \arrow[rrr] & & & {} \\
Z^{n-1}X \arrow[ur] & & B^nX \arrow[r] & Z^nX \arrow[ur] \arrow[dr, two heads] & & B^{n+1}X \arrow[r] & Z^{n+1}X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & & H^nX & & & {}
\end{tikzcd}$$

   où les lignes rouges et bleues sont exactes à tout rang.

2. On peut le compléter

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rrr, "d^{n-1}"] \arrow[ddr, two heads] & & & X^n \arrow[drr, two heads] \arrow[rrrr] & & & & {} \\
& & & Z^n \arrow[ur] \arrow[drr, two heads] & & & X^n/B^n \arrow[dr] \arrow[rr, "\overline{d}^n"] & & {} \\
& & B^n \arrow[ur] & & & H^n = \ker(\overline{d}^n) \arrow[ur] & & B^{n+1} &
\end{tikzcd}$$

   avec les détails ci-dessus. Les flèches $H^n \to X^n/B^n$ sont données par le troisième théorème d'isomorphisme.

3. On voit que X est acyclique si et seulement si $B^nX \xrightarrow{\sim} Z^nX$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, *i.e.* $H^nX = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Tout morphisme de complexe $f : X \to Y$ engendre un double carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z^nX \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\
Z^nY \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d^n"] & Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

et donc des morphismes induits $Z^nX \to Z^nY$, $B^nX \to B^nY$ et $H^nX \to H^nY$ tels que Z^n, B^n et H^n deviennent des foncteurs additifs $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. De plus, Z^n est exact à gauche, B^n est exact à droite mais en général H^n n'est exact ni à gauche ni à droite.

On rappelle que si $f : X \to Y$ est un morphisme de complexes, alors $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}} C(f) = (X \oplus \Sigma Y, \begin{pmatrix} d_X & f \\ 0 & -d_Y \end{pmatrix})$ est le *conoyau d'homotopie* de f. En particulier, pour $f = id_X$, on trouve
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id_X"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & X \arrow[r, "\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "g"] & C(id_X) \\ & Y & \end{tikzcd}$$
et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(C(id_X), Y)) \simeq \{(g,h) \mid g : X \to Y, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}, h$ gradué de degré $1, g = d_Y.h + hd_X\}$. En particulier, un morphisme $g : X \to Y$ est homotopie à 0 si et seulement si g se factorise dans $C(id_X)$.

Lemme

Le complexe $C(id_X)$ est acyclique.

▷ Soit $C = C(id_X)$. Alors C est isomorphe à C' :

$$\begin{tikzcd} & \text{degré } n & \text{degré } n+1 & \\ C = (\ldots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots) \\ C' = (\ldots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+1} \oplus X^{n+2} \arrow[r] & \ldots) \end{tikzcd}$$

où les flèches de la première ligne sont de la forme $\begin{pmatrix} d & id \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, celles de la deuxième ligne de la forme $\begin{pmatrix} 0 & id \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et les flèches verticales de la forme $\begin{pmatrix} id & 0 \\ \alpha & id \end{pmatrix}$. et clairement $B^nC' \simeq X^n \simeq Z^nC'$ donc $H^nC \simeq H^nC' = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ■

Lemme

Si $f : X \to Y$ est homotope à 0, alors $H^nf = 0 : H^nX \to H^nY$.

▷ On a une factorisation $f = g$ canonique : $X \to C(id_X) \xrightarrow{g} Y$. Ainsi H^nf se factorise à travers $H^nC(f) = 0$. ■

Remarque. Ainsi, le foncteur $H^n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ se factorise dans $\mathcal{H}(\mathcal{A}) : \mathcal{C}(\mathcal{A})/htp_0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "H^n"] & \\
\mathcal{H}(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^n"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

et en particulier, toute équivalence d'homotopie, *i.e.* morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ inversible dans $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, est un quasi-isomorphisme.

Définition. ***(Complexe contractile)***

Un complexe X est dit *contractile* si c'est un objet nul dans $\mathcal{H}\mathcal{A}$, *i.e.* si $id_X \sim 0$.

Remarques.

1. Ainsi, tout complexe contractile est acyclique.
2. Un complexe à trois termes

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

   est acyclique si et seulement si la suite $0 \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow X' \longrightarrow 0$ est exacte.
3. De même, un complexe à trois termes de la forme ci-dessus est contractile si et seulement si cette suite est exacte scindée.

Lemme. ***(Lemme du serpent dans une catégorie abélienne)***

Considérons le diagramme commutatif dans $\mathcal{A}$ de lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"'] & B' \arrow[r, "p'"'] & C'. &
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un morphisme canonique $\mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha)$ fonctoriel en le diagramme tel que la suite

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\gamma)$$

soit exacte.

$\triangleright$ On considère, comme on le peut, que $\mathcal{A}$ est exactement plongée dans une catégorie de modules. Alors δ est construite comme dans le lemme du serpent pour les modules. ■

Théorème. ***(Théorème fondamental de l'homologie (TFAH))***

Toute suite exacte courte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{i} C \longrightarrow 0$ de complexes de cochaînes dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ engendre une suite exacte longue en homologie, par le procédé suivant : il existe des morphismes canoniques $\delta^n : H^nC \to H^{n+1}A$ fonctoriels en la suite, tels que la suite $... \longrightarrow H^nA \xrightarrow{H^ni} H^nB \xrightarrow{H^np} H^nC \longrightarrow d^nH^{n+1}A \longrightarrow ...$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit exacte.

▷ On se rappelle que pour tout complexe (X,d_X), on a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & X^{n-1} \arrow[rrr, "d^{n-1}"] \arrow[dr] & & & X^n \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & Z^{n-2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^{n-1}X \arrow[r] & Z^{n-1}X \arrow[ur] \arrow[dr] & & B^nX \arrow[r] & Z^nX \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& & H^{n-2}X \arrow[ur] & & & H^{n-1}X \arrow[ur] & & & H^nX &
\end{tikzcd}$$

où les suites colorées sont indépendemment exactes. Ainsi, la séquence donnée en énoncé donne des diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& H^{n-1}A \arrow[r] & H^{n-1}B \arrow[r] & H^{n-1}C \arrow[d] \arrow[ddll, "\delta^{n-1}"] & \\
& B^nA \arrow[r] \arrow[d] & B^nB \arrow[r] \arrow[d] & B^nC \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^nA \arrow[r] \arrow[d] & Z^nB \arrow[r] \arrow[d] & Z^nC \arrow[d] & \\
& H^nA \arrow[r] \arrow[d] & H^nB \arrow[r] \arrow[d] & H^nC \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

aux lignes et colonnes exactes. Le lemme du serpent engendre donc les morphismes requis δ^{n-1}. ■

Corollaire

Un morphisme de complexes $f : X \to Y$ est un quasi-isomoprhisme si et seulement si son cône $C(f)$ est acyclique.

▷ On a une suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} \Sigma X \longrightarrow 0$ où $C(f) = Y \oplus \Sigma X$ est un objet gradué, $i = \begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}$ et $p = \begin{pmatrix} 0 & id \end{pmatrix}$. Il engendre une suite exacte longue en homologie $... \longrightarrow H^nY \xrightarrow{H^ni} H^nC(f) \xrightarrow{H^np} H^n\Sigma X \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}Y \xrightarrow{H^{n+1}i} H^{n+1}C(f) \xrightarrow{H^{n+1}p}$ .... On peut vérifier que, grâce à l'isomorphisme $H^n\Sigma X \xrightarrow{\sim} H^{n+1}X$, le morphisme δ^n peut être identifié à $H^{n+1}f$. Clairement, on a $H^nC(f) = 0$ pour tout entier n, si et seulement si δ^n est inversible pour tout entier. ■

Lemme

Soit $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes. Alors le morphisme $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} : C(i) \to W$ est un quasi-isomorphisme.

▷ On a un morphisme de suites exactes de complexes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "id_U"] \arrow[d, "id_U"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i"'] & U \arrow[r, "p"'] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui, en formant les cônes sur les morphismes verticaux, nous donne une suite exacte courte de complexes $0 \longrightarrow C(id_U) \longrightarrow C(i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}} W \longrightarrow 0$. Puisque $C(id_U)$ est contractile, donc acyclique, il suit que $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ est un quasi-isomorphisme. ■

Remarque. En d'autres mots, si $i : U \to V$ est un monomorphisme, alors son *conoyau d'homotopie* $C(i)$ est canoniquemen quasi-isomorphe à son conoyau (strict) $\mathrm{Coker}(i)$.

5.6 Faisceaux

Soit X un espace topologique.

$\longrightarrow$ *Notation.* On abrège dans cette partie $\mathrm{Pre}(X) = \mathrm{Pre}(X,\mathrm{Ab}) = \mathrm{Fun}(\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$. De plus, pour un préfaisceau F sur X et une section $s \in FU$ pour un ouvert U de X, on note $s_{|V} \in FV$ l'image de s par l'application de restriction $F(V \subseteq U) : FU \to FV$ pour tout ouvert $V \subseteq U$.

Définition. *(Faisceau)*

Un préfaisceau F sur X est une *faisceau* si, pour tout ouvert $U \subseteq X$ et tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de U, la suite

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & FU \arrow[r] & \prod_{i\in I} FU_i \arrow[r] & \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j) \\ & s \arrow[r, mapsto] & s_{|U_i} & \\ & & s_i \arrow[r, mapsto] & (s_{i|U_i\cap U_j} - s_{j|U_i\cap U_j}) \end{tikzcd}$$

est exacte.

Remarques.

1. L'exactitude en FU signifie que si $s_1,s_2 \in FU$ sont tels que $s_{i|U_i} = s_{2|U_i}$ pour tout $i \in I$, alors $s_1 = s_2$ dans FU.
2. L'exactitude en $\prod_{i\in I} FU_i$ signifie que si l'on a des sections $s_i \in FU_i$ qui sont *compatibles*, au sens que $s_{i|U_i\cap U_j} = s_{j|U_i\cap U_j}$ pour tous $i,j \in I$, alors il existe une section $s \in FU$ telle que $s_i = s_{|U_i}$ pour tout $i \in I$.
3. Si F est un faisceau, alors $F(\emptyset) = 0$, car $\emptyset$ admet un recouvrement par la formule vide $(i)_{i\in\emptyset}$ et $\prod_{i\in\emptyset} = 0$.

Exemples. ***(Faisceaux)***

1. Le préfaisceau classique $U \mapsto \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ est un faisceau.
2. Soit X un espace non connexe. Alors le préfaisceau constant $U \mapsto \mathbb{Z}$ pour tout ouvert $U \subseteq X$ n'est pas un faisceau. Par contre, le préfaisceau localement constant $U \mapsto \{f : U \mapsto \mathbb{Z} \mid f \text{ continue}\}$ est un faisceau.
3. Un préfaisceau F sur l'espace ponctuel $\{\star\}$ est un faisceau si et seulement si $F(\emptyset) = 0$.

Définition. ***(Morphisme de faisceaux)***

Un *morphisme de faisceaux* entre deux faisceaux est un morphisme sur les préfaisceaux sous-jacents.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathrm{Sh}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pre}(X)$ formée des faisceaux sur X.

Théorème

Le foncteur inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ admet un adjoint à gauche $F :\mapsto F^a$, où F^a est appelé le *faisceautisé* de F.
Autrement dit, pour tout préfaisceau F sur X, on a un morphisme universel $q : F \to F^a$ vers un faisceau F^a

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\forall g"] & \\ F^a \arrow[r, dashed, "\exists! f"'] & G \text{ faisceau} \end{tikzcd}$$

avec une bijection $\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(F^a,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pre}(X)}(F,\mathrm{incl}(G)). \\ f & \longmapsto & f \circ q \end{array}$

$\triangleright$ Rappelons que la *fibre* de F en $x \in X$ est donnée par $F_x = \mathrm{colim}_{x\in V} FV$ où la colimite est formée sur la catégorie opposée de la catégorie des ouverts V contenant x. Rappelons également que cette catégorie est filtrante de façon que le foncteur $F \mapsto F_x$ commute avec les limites finies. Pour un ouvert V contenant x et $s \in FV$, on note s_x l'image de s dans F_x. On pose, pour tout ouvert U de X, $F^aU = \{t : U \to$

$\coprod_{x\in U} F_x \mid$ pour tout $x \in X$, on a $t(x) \in F_x$ et il existe un ouvert V contenant x et $s \in FV$ tel que $t(y) = s_y$ pour t

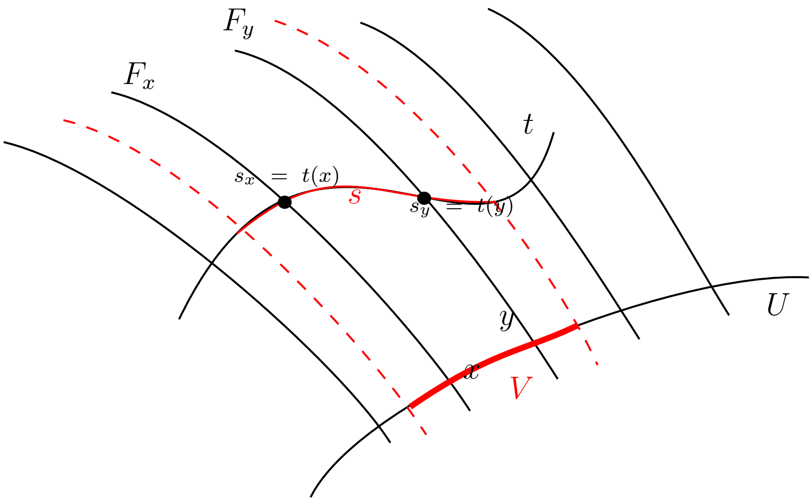


FIGURE 5.6.1 : *Illustration de la preuve précédente.* — Faisceautisé sur les fibres

L'association $U \mapsto F^aU$ s'enrichit naturellement en un préfaisceau, et ce préfaisceau est en fait un faisceau. De plus, les applications $\begin{array}{ccc} FU & \longrightarrow & F^aU \\ s & \longmapsto & x \mapsto s_x \end{array}$ forment un morphisme de préfaisceau qui est universel parmi les morphismes de F vers un faisceau. ■

Remarques.

1. La démonstration nous donne facilement que les aplications $\eta_x : F_x \to (F^a)_x$ sont bijectives.
2. Un préfaisceau F est un faisceau si et seulement si $\eta : F \to F^a$ est un isomorphisme.

Lemme. ***(Monos, isomorphismes de préfaisceaux)***

Soit $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux. Alors :

(a) f est un monomorphisme de préfaisceaux (ou de faisceaux) si et seulement si $f_x : F_x \to G_x$ est injective pour tout $x \in X$;

(b) f est un isomorphisme si et seulement si $f_x : F_x \longrightarrow G_x$ est bijective pour tout $x \in X$.

▷

■

C'est faux pour les épimorphismes ! C'est précisément de phénomène qui donne lieu à la cohomologie des faisceaux.

Théorème

La catégorie $\mathrm{Sh}(X)$ des faisceaux est abélienne et une suite exacte courte $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ de faisceaux est exacte si et seulement si la suite $0 \longrightarrow F_x \longrightarrow G_x \longrightarrow H_x \longrightarrow 0$ est exacte pour tout $x \in X$.

▷ Le biproduit $F \oplus G$ dans la catégorie des préfaisceaux est un faisceau qui est biproduit dans $\mathrm{Sh}(X)$. Plus précsément, $(F \oplus G)(U) = FU \oplus GU$ pour tout $U \in \mathrm{Open}(X)$. Plus de détails dans les notes. ■

Remarque importante. Si $f : F \to G$ est un morphisme de faisceaux, alors son noyau calculé dans $\mathrm{Pre}(X)$:

$$U \mapsto \mathrm{Ker}(fU : FU \to GU)$$

est encore un faisceau et ce faisceau est le noyau de f dans $\mathrm{Sh}(X)$.

Par contre, le préfaisceau conoyau

$$\mathrm{Coker}^{\mathrm{Pre}(X)}(f) : U \mapsto \mathrm{Coker}(fU : FU \to GU)$$

n'est pas, en général, un faisceau. On obtient le conoyau de f dans $\mathrm{Sh}(X)$, comme le faisceautisé $(\mathrm{Coker}^{\mathrm{Pre}(X)}(f))^a = \mathrm{Coker}^{\mathrm{Sh}(X)}(f)$.

Théorème

(a) La catégorie $\mathrm{Sh}(X)$ est complète et cocomplète.

(b) L'inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ préserve toutes les limites. En particulier, elle est exacte à gauche. Le foncteur de faisceautisation $F \mapsto F^a$ préserve toutes les colimites et les limites finies. En particulier, il est exact.

(c) Les colimites filtrantes dans $\mathrm{Sh}(X)$ sont exactes, *i.e.* si I est une catégorie filtrante, alors le foncteur $\mathrm{colim}_I : \mathrm{Fun}(I, \mathrm{Sh}(X)) \to \mathrm{Sh}(X)$ est exact.

▷

■

Remarques.

1. *(a)* Les limites calculées dans $\mathrm{Pre}(X)$ de foncteurs à valeurs dans $\mathrm{Sh}(X)$ sont des faisceaux qui sont les limites dans $\mathrm{Sh}(X)$. Pour construire les colimites daitemns $\mathrm{Sh}(X)$, on faisceautise les colimites calculées dans $\mathrm{Pre}(X)$.

   (b) L'inclusion $\mathrm{Sh}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pre}(X)$ est un adjoint à droite donc préserve toutes les limites.

   (c) Le foncteur $F \mapsto F^a$ est un adjoint à gauche donc préserve toutes les colimites. Il préserve les limites finies, car les foncteurs fibres $F \mapsto F_x$ préservent les limites finies, puisqu'elles sont données par des colimites filtrantes.

(d) On peut détecter l'exactitude grâce aux foncteurs fibres $F \mapsto F_x$, qui commutent avec toutes les colimites. Plus de détails de ce fait dans les notes.

5.7 Catégories dérivées

5.7.1 Localisation de catégoris

Définition. ***(Foncteur rendant un morphisme inversible)***

Soient $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ deux catégories. Soit s un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que F *rend s inversible* si Fs est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$.

$\longrightarrow$ *Notation.* Si S est une collection de morphismes de $\mathcal{C}$, on note $\mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine, *i.e.* contenant toutes les transformations naturelles possibles, de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ ayant pour objets les foncteurs rendant chacun tous les morphismes de S inversibles. On dit aussi que $F \in \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{D})$ *rend S inversible.*

Définition. ***(Localisation d'une catégorie)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S une collection de morphismes de $\mathcal{C}$. Une *localisation* de $\mathcal{C}$ par rapport à S est une catégorie $\mathcal{L}$ munie d'un foncteur $P : \mathcal{C} \to \mathcal{L}$ rendant S inversible et vérifiant la propriété universelle suivante : un pour toute catégorie $\mathcal{J}$, le foncteur $\mathrm{Fun}(\mathcal{L},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{J}), G \mapsto GP$ est une équivalence, *i.e.* le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, "P"'] \arrow[dr, "\forall F \text{ rendant } S \text{ inversible}"] & \\
\mathcal{L} \arrow[r, dashed, "\exists G"'] & \mathcal{J}
\end{tikzcd}$$

commute à équivalence près.
Un foncteur $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une *localisation* si c'est une localisation par rapport à $S_L = \{s \in \mathrm{mor}(\mathcal{C}) \mid Ls \text{ est inversible}\}$.

Proposition. ***(Unicité de la localisation)***

Si elle existe, une catégorie localisation est unique à équivalence canonique près.

Exemples. ***(Catégories localisées)***

1. Si $\mathcal{A}$ est additive, alors le foncteur canonique $\mathcal{C}\mathcal{A} \to \mathcal{H}\mathcal{A}$ est la locailsation de $\mathcal{C}\mathcal{A}$ par rapport à l'équivalence d'homotopie.

Exercice 72

Soient $S_1 \subseteq S_2$ des collections de morphismes tels que les localisations $P_i : \mathcal{C} \to \mathcal{D}_i$ par rapport à S_i existe pour $i = 1$ et 2. Soit $R : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ induit par Q_2. Alors R est la localisation de $\mathcal{D}_1$ par rapport à $Q_1(S_2)$, *i.e.* :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "P_1"'] \arrow[dr, "P_2"] & \\ \mathcal{D}_1 \arrow[r, dashed, "R"'] & \mathcal{D}_2. \end{tikzcd}$$

Proposition. ***(Identification de la localisation)***

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Soit $S \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{C})$. Il existe une catégorie $\mathcal{C}[S^{-1}]$ et un foncteur $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ induisant un isomorphisme $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{J} \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{J}), F \mapsto FP$ pour toute catégorie $\mathcal{J}$. En particulier, le localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S existe et est donnée par $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

$\triangleright$ Soit $Q_\mathcal{C}$ le carquois sous-jacent à $\mathcal{C}$, et $\mathcal{P}Q_\mathcal{C}$ la catégorie de chemins de $Q_\mathcal{C}$. Soit $C : \mathcal{P}Q_\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ le foncteur canonique et $\sim_\mathcal{C}$ la congruence sur $\mathcal{P}Q_\mathcal{C}$ telle que $p \sim_\mathcal{C} q$ si et seulement si $Cp = Cq$. Alors le foncteur C induit un isomorphisme $\mathcal{P}Q_\mathcal{C}/\sim_\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$. Soit $Q_\mathcal{C}[S^{-1}]$ le carquois obtenu à partir de $Q_\mathcal{C}$ en ajoutant des flèches $s' : Y \to X$ pour toute flèche $s : X \to Y$ donnée par un moprhisme dans S. Soit $\sim$ la congruence sur $\mathcal{P}(Q_\mathcal{C}[S^{-1}])$ engendrée par $\sim_\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}\mathcal{C}_Q \subseteq \mathcal{P}(Q_\mathcal{C}[S^{-1}])$ et par $ss' \sim id_Y$ et $s's = id_X$ pour tous $s : X \to Y$ dans S. POsons $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{P}(Q_\mathbb{C}[S^{-1}])/\sim$. Puisque $\sim$ contient $\sim_\mathcal{C}$, on a un foncteur bien défini $\mathcal{C} \xrightarrow{L} C[S^{-1}]$ induit par l'inclusion $Q_\mathcal{C} \to Q_\mathcal{C}[S^{-1}]$. Il est facile de vérifier que L induit un isomorphisme $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{J} \to \mathrm{Fun}^S(\mathcal{C},\mathcal{J}), F \mapsto FP$ pour toute catégorie $\mathcal{J}$. ■

$\longrightarrow$ *Notation.* On note : $\mathcal{C}[S^{-1}] = \mathcal{P}(Q_\mathbb{C}[S^{-1}])/\sim$ la catégorie localisée rapport à $S \subseteq \mathrm{mor}(\mathcal{C})$.

Théorème. ***(Adjonction et localisations)***

Soient $L : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$ une paire de foncteurs adjoints avec les morphismes d'adjonction $\varepsilon : LR \to Id_\mathcal{D}$ et $\eta : Id_\mathcal{C} \longrightarrow RL$. Soit S la classe des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que Ls soit inversible. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) R est pleinement fidèle ;

(ii) $\varepsilon : LR \to Id_\mathcal{D}$ est inversible ;

(iii) L est une localisation, *i.e.* le foncteur $H : \mathcal{C}[S^{-1}] \to Đ$ tel que $HP = L$ est une équivalence ;

(iv) pour toute catégorie Jj, le foncteur $L^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J})$ est pleinement fidèle.

Schématiquement :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, shift right, "L"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{D} \arrow[u, shift right, "R"'] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{J}.
\end{tikzcd}$$

▷ $(i) \iff (ii)$: pour $X \ni \mathcal{C}$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,?) \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "(\varepsilon X)^*"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(RX,R?) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(LRX,?) \arrow[ur, dash, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

commutatif. Par le lemme de Yoneda, εX est inversible pour tout $X \in \mathcal{C}$ si et seulement si R est pleinement fidèle.

$(ii) \implies (iii)$ Montrons que PR est un quasi-inverse de H. On a $HP = L$ d'où $HPR = LR$ isomorphe à $Id_{\mathcal{D}}$ par ε, par hypothèse. Visuellement,

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dl, "P"'] \arrow[d, shift right, "L"'] \\
\mathcal{C}[S^{-1}] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{D}. \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que PRH est isomorphe à $Id_{\mathcal{C}[S^{-1}]}$. Puisque P induit un foncteur pleinement fidèle $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{C}[S^{-1}]) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C}[S^{-1}]), F \mapsto FP$, il suffit de montrer que $PRHP$ est isomorphe à P. Or $HP = L$, donc il faut montrer que PRL est isomorphe à P. On a un morphisme $P\eta : P \to PRL$ obtenu par $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to RL$. Il est inversible, puisque ηX appartient à S pour tout $X \in \mathcal{C}$. En effet, on a $(\varepsilon L)(L\eta) = Id_L$, et ε est inversible par hypothèse. Visuellement,

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "L\eta"] \arrow[rr, bend right, "Id_L"'] & LRL \arrow[r, "\varepsilon L"] & L.
\end{tikzcd}$$

$(iii) \implies (iv)$ Par hypothèse, H est une équivalence donc l'implication suit du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J}) \arrow[r, "H^*"'] \arrow[dr, "L^*"'] & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}[S^{-1}],\mathcal{J}) \arrow[d, hook, "P^*"] \\
& \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J}).
\end{tikzcd}$$

$(iv) \implies (ii)$ Le foncteur $L^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J})$ est adjoint à droite de $R^* : \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{J}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{J})$ avec les morphismes d'adjonction donéns par $(R^*L^*)(F) = FLR \xrightarrow{F\varepsilon} F = (Id)^*F$ et $(Id) * G = G \xrightarrow{G\eta} GRL = (L^*R^*)(G)$. Ainsi, il est pleinement fidèle, et donc le morphisme $R^*L* \to Id$ doit être inversible par l'équivalence $(i) \iff (ii)$. Ceci implique que ε est inversible, car l'on peut prendre $F = Id_{\mathcal{D}}$. ■

Exemple. ***(Localisation d'une catégorie de modules)***

Soit A un anneau commutatif. Soit S_0 une partie multiplicative de A, et l'on note A_{S_0} la localisation de A en S_0. Le morphisme canonique $A \to A_{S_0}$ induit un foncteur pleinement fidèle $R : \mathrm{Mod}\ A_{S_0} \to \mathrm{Mod}\ A$. Son adjoint à droite $L : \mathrm{Mod}\ A \to \mathrm{Mod}\ A_{S_0}$ envoie M sur la localisée $M_{S_0} = M_R \otimes R_{S_0}$. On voit que $\mathrm{Mod}\ A_{S_0}$ est alors la localisation de la catégorie $\mathrm{Mod}\mathbb{A}$ par rapport aux morphismes $f : M \to M'$ tels que $f_{S_0} : M_{S_0} \to M'_{S_0}$ soit inversible.

5.7.2 Catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, que l'on pourra supposer petite.

La notion suivante est due à Grothendieck au début des années 1960.

Définition. ***(Catégorie dérivée)***

La *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$ est la localisation $\mathcal{DA}$ de la catégorie de complexes de $\mathcal{A}$ par rapport à la collection Qis des quasi-isomorphismes, soit $\mathcal{DA} := (\mathcal{CA})[\mathrm{Qis}^{-1}]$.

Remarques.

1. Par définition, les foncteurs cohomologiques $H^n : \mathcal{CA} \to \mathcal{A}$ rendent tous les quasi-isomorphismes inversibles. Ainsi, ils induisent des foncteurs $H^n : \mathcal{DA} \to \mathcal{A}$. Il suit qu'un morphisme de $\mathcal{CA}$ est inversible dans $\mathcal{DA}$ si et seulement s'il est un quasi-isomorphisme.
2. Toute équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme et le foncteur $\mathcal{CA} \to \mathcal{HA}$ est la localisation de $\mathcal{CA}$ par rapport aux équivalence d'homotopie. Il suit que $\mathcal{DA}$ est aussi la localisation de $\mathcal{HA}$ par rapport aux classes d'homotopie des quasi-isomorphisme, soit avec un léger abus $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\mathrm{Qis}^{-1}]$.
   Le grand avantage de cette définition est qu'elle permet souvent de décrire les morphismes dans $\mathcal{DA}$ relativement explicitement, comme on le voit dans le théorème suivant. Cette description est quant à elle due à Verdier en 1962.
   Autres avantages techniques : souvent, le foncteur canonique $Q : \mathcal{HA} \xrightarrow{Q} \mathcal{DA}$ a un adjoint à gauche ou à droite (qui est alors automatiquement pleinement fidèle !). D'autre part, on a toujours un « calcul de fractions » pour les qis dans $\mathcal{HA}$ pour calculer les morphismes de $\mathcal{DA}$.

Théorème. ***(Adjoints des foncteurs de projection)***

(a) Soit R un anneau. Le foncteur de projection $Q : \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R$ admet un adjoint à gauche $X \mapsto \underline{p}X$ et un adjoint à droite $X \mapsto \underline{i}X$.

(b) Soit T un espace topologique. Alors le foncteur de projection $\mathcal{H}(\mathrm{Sh}(T)) \to \mathcal{D}(\mathrm{Sh}(T))$ admet un adjoint à droite $X \mapsto \underline{i}X$.

Remarques.

1. Dans les deux cas, le foncteur canonique $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ est un adjoint à gauche donc commute avec les coproduits.
2. Par le théorème sur les adjoints des localisations, les foncteurs $\underline{p}$ et $\underline{i}$ sont pleinement fidèles, de sorte que $\mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R, X \mapsto \underline{p}X$ est une équivalence sur une sous-catégorie pleine, de même pour $\mathcal{D}\mathrm{Mod}\ R \to \mathcal{H}\mathrm{Mod}\ R, X \mapsto \underline{i}X$.

Remarque. Soit $X = (... \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow ...)$ un complexe contré en degré nul. Alors $\underline{i}X$ est homotopiquement équivalent à $(...0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow ...)$ la *résolution injective de M* et $\underline{p}X$ est homotopiquement équivalent à $(...0 \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow ...)$ la *résolution projective de M*.

5.7.3 Projectifs et injectifs

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, typiquement $\mathrm{Mod}\ R$ où R est un anneau ou $\mathrm{Sh}(T)$ où T est un espace topologique.

Définition. ***(Objet projectif)***

Un objet $P \in \mathcal{A}$ est *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,?) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ est exact, ou ce qui est équivalent, s'il est exact à droite.

Proposition. ***(Caractérisation de la projectivité)***

Un objet $P \in \mathcal{A}$ est projectif si et seulement si P a la proriété de relèvement par rapport aux épimorphismes $p : B \to C$, *i.e.* pour tout $f : P \to C$, il existe $\tilde{f} : P \to B$ tel que $p\tilde{f} = f$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ld, dashed, "\exists \tilde{f}"'] \arrow[d, "\forall f"] & \\ B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

exact

Définition. ***(Objet injectif)***

Un objet $I \in \mathcal{A}$ est *injectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(?,I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ est exact, ou ce qui est équivalent, s'il est exact à droite.

Proposition. ***(Caractérisation de la projectivité)***

Un objet $I \in \mathcal{A}$ est injectif si et seulement si P a la proriété de relèvement par rapport aux monomorphismes $i : A \to B$, *i.e.* pour tout $g : A \to I$, il existe $\tilde{g} : B \to I$ tel que $\tilde{g}i = g$:

exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\forall g"] & B. \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{g}"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Exemples

1. Dans $\mathcal{A} = \text{Mod } R$, $P = R_R$ est projectif car $\text{Hom}_R(R_R,M) \xrightarrow{\sim} M_{|\mathbb{Z}}$, $f \mapsto f(1)$ est un foncteur exact en $M \in \text{Mod } R$.
2. $I = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_RR,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un R-module à droite injectif, car $\text{Hom}_R(M,\text{Hom}_Z({}_RR,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_Z M \otimes_R R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_Z(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Visuellement,
$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r, two heads] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$
$$l = \tilde{f}(1) \dashrightarrow f(1)$$
Donc $\text{Hom}_R(?,I) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(?_{|\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce foncteur est exact, car $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif dans la catégorie des groupes abéliens $\text{Ab} = \text{Mod } \mathbb{Z}$.
3. Si $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'objets projectifs, alors $\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ est encore projectif s'il existe. En effet, on a $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda,?) \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_\lambda,?)$ est un roduit de foncteurs exacts, donc exact, car un produit de suites exactes de groupes abéliens est exact. Si $(I_\lambda)_{\lambda \in I}$ est une famille d'objets injectifs, alors $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est encore injectif s'il existe, car $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(? \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \simeq \prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(?,I_\lambda)$.
Attention ! Les propositions (semi-)duales sont fausses (contre-exemple : $R^{\mathbb{N}}$).
4. En particulier, on voit que tout module libre $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R = R^{(\Lambda)}$ est projectif et tout module $\prod_{\lambda \in \Lambda} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\Lambda}$ est injectif.
5. Si $P = P_1 \oplus P_2$ dans $\mathcal{A}$ est projectif, alors P_1 et P_2 sont projectifs, car si le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P,?) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_2,?)$ est exact alors chacun des deux est exact. En effet, si $A_i \xrightarrow{j_i} B_i \xrightarrow{p_i} C_i$ pour $i = 1,2$ sont des complexes de groupes abéliens telle que $0 \longrightarrow A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{j_1 \oplus j_2} B_1 \oplus B_2 \xrightarrow{p_1 \oplus p_2} C_1 \oplus C_2 \longrightarrow 0$ est exacte, alors chaque suite $0 \longrightarrow A_i \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$ est exacte !

Par xemple, si $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, alors $R \simeq P_1 \oplus P_2$ où $P_1 = \mathbb{Z} \times \{0\}$ et $P_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Alors P_1 et P_2 sont projectifs sans être libres.

Définition. ***(Catégorie ayant assez de projectifs)***

La catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a *assez de projectifs* si tout objet X est quotient d'un objet projectif, *i.e.* il existe un épimorphisme $p : P \to X$ où P est projectif.

Définition. ***(Catégorie ayant assez d'injectifs)***

La catégorie abélienne $\mathcal{A}$ a *assez d'injectifs* si tout objet X est sous-objet d'un objet injectif, *i.e.* il existe un monomorphisme $i : X \to I$ où I est injectif.

Exemples. ***(Assez de projectifs, assez d'injectifs)***

1. $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\ R$ a assez de projectifs, car tout module est quotient d'un module libre, donc projectif : $R^{(\Lambda)}$, où Λ est un certain ensemble. Mod R a aussi assez d'injectifs. n fait, si on pose $E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors tout module admet un monomorphisme vers $E^{\Lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} E$.
2. Si T est un espace topologique, alors $\mathrm{Sh}(T)$ a assez d'injectifs.

Exercice 73 *(S)*

upposons que P_0 est projectif dans $\mathcal{A}$ et que tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un corproduit $P_0^{(\Lambda)}$ de copies de $\mathcal{A}$, en particulier $\mathcal{A}$ a assez de projectifs. Montrer que tout projectif P de $\mathcal{A}$ est facteur direct d'un objet $P^{(\Lambda)}$, Λ un ensemble. En particulier, un module est projectif si et seulement si il est facteur direct d'un module libre et il est injectif si et seulement si il est facteur direct d'un module de la forme $E^{(\Lambda)}$, Λ un ensemble.

5.7.4 Résolutions projectives et résolutions injectives

Soit toujours $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition. ***(Résolution projective)***

Soit $X \in \mathcal{A}$. Une *résolution projective* de X est un quasi-isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
X = \arrow[from=d, "\mathrm{qis}"] & (\ldots & \ldots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots) \\
P = & (\ldots & \ldots \arrow[r] & P^{-2} \arrow[r] & P^{-1} \arrow[r] & P^{0} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \ldots)
\end{tikzcd}$$

où les P^i sont projectifs pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Définition. ***(Résolution injective)***

Soit $X \in \mathcal{A}$. Une *résolution injective* de X est un quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{cccccccccccc}
X = & (\ldots & \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \ldots) \\
\uparrow{\scriptstyle \text{qis}} & & & & & & & & & & & \\
P = & (\ldots & \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow \ldots)
\end{array}$$

où les I^i sont injectifs pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Remarque. La condition d'être un quasi-isomorphisme, revient à dire que les suite $\ldots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$, respectivement $0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \ldots$ sont exactes.

Lemme

(a) Si $\mathcal{A}$ admet assez de projectifs, alors tout objet X admet une résolution projective.

(b) Si $\mathcal{A}$ admet assez d'injectifs, alors tout objet X admet une résolution injective.

▷ Successivement :

1. On procède par récurrence : il existe un épimorphisme $P^0 \overset{\varepsilon}{X}$, car $\mathcal{A}$ a assez de projectifs. On a la suite exacte
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow P^0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$
et $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est quotient d'un projectif P^{-1}, d'où une suite exacte
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varepsilon_) \longrightarrow P^{-1} \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathrm{Ker}(\varepsilon) \longrightarrow 0.$$
On obtient
$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & P^{-3} \arrow[rr] \arrow[d] & & P^{-2} \arrow[rr] \arrow[d] & & P^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\
 & \ker(d^{-2}) \arrow[urr] & & \ker(d^{-1}) = \ker(\varepsilon_{-2}) \arrow[urr] & & \ker(\varepsilon_{-1}) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$
On continue à choisir des épimorhismes $P^{-i-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(d^{-1})$, $i \leqslant -2$, pour obtenir un complexe acyclique de composantes projectifs en les degrés négatifs.
2. Se montre de la même façon.

Les résolutions projectives ne sont pas uniques. Par exemple, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in \operatorname{Mod} Z$, $n \in \mathbb{Z}$, admet la résolution projective

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} = P^{-1} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} = P^0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

mais aussi

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \pi \end{pmatrix}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Théorème

(a) Supposons que $\mathcal{A}$ a assez de projectifs. Alors pour tout complexe X borné à droite, *i.e.* $X^p = 0$ à partir d'un certain rang positif, le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,Q?) : \mathcal{HA} \to \mathrm{Ab}$ est coreprésenté : il existe un qis $\underline{p}X \xrightarrow{s} X$ tel que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{HA}}(\underline{p}X,Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,QY)$, $f \mapsto Qf \circ (Qs)^{-1}$.

(b) Si X est concentré en degré, alors pour le qis $\underline{p}X \to X$, on peut choisir une quelconque résolution projective $P \to X$.

Remarque. Par dualité, on a un théorème analogue pour les catégories abéliennes avec assez d'injectifs et le résolutions injectives.

De plus :

Remarques.

1. Si on a un mophisme $X \to X_2$ où X,X_2 sont bornés à droite, dans $\mathcal{DA}$, provenant par exemple d'un morphisme de foncteurs $\operatorname{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,Q?) \longleftarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{DA}}(X_2,Q?)$, d'où un morphisme de $\mathcal{HA}$ donné par $\underline{p}X \to \underline{p}X_2$. De cette façon, $X \mapsto \underline{p}X$ devient un foncteur $\mathcal{D}^-\mathcal{A} \to \mathcal{HA}$ où $\mathcal{D}^-\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine des complexes bornés à droite. En particulier, on obtient un foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{D} \to \mathcal{HA}$, $M \mapsto (0 \longrightarrow M \longrightarrow M) \mapsto \underline{p}M$.
   Notons que si $X \to X_i$ est un qis, alors $\underline{p}X \to \underline{p}X$ est une équivalence d'homotopie.
2. Attention, le théorème précédent sur le cas des modules $\operatorname{Mod} R$ et des préfaisceaux $\operatorname{Sh}(T)$ n'est pas un cas particulier de ce théorème mais un énoncé plus fort dans deux cas particuliers.

5.7.5 Foncteurs dérivés

Définition-propriété. ***(Foncteur dérivé)***

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif, mais pas nécessairement exact entre catégories abéliennes. Alors pour un complexe

$$X = (... \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \longrightarrow ...,$$

la suite

$$FX := (... \longrightarrow FX^{-1} Fd^{-1} FX^0 \xrightarrow{Fd^0} FX^1 \longrightarrow ...$$

est encore un complexe.

Remarque importante. Pour un morphisme de complexes $f = (f^p)_{p\in\mathbb{Z}} : X \to Y$, $Ff = (Ff^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes $FX \longrightarrow FY$ et l'on obtient un foncteur additif $F : \mathcal{CA} \to \mathcal{CB}$, noté encore F. On peut vérifier grâce à l'additivité qu'il se factorise $\mathcal{HA} \to \mathcal{HB}$, autrement dit qu'il envoie les morphismes homotopes à zéro de $\mathcal{CA}$ sur ceux homotopes à zéro de $\mathcal{CB}$ Il induit donc un foncteur noté encore F qui descend sur $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\mathrm{Qis}^{-1}] = (\mathcal{HB})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ sSi F est exact : il préserve alors les noyaux et les conoyaux et donc $H^n(FX) \simeq F(H^nX)$ pour tout $X \in \mathcal{HA}$ et F envoie les quasi-isomorphismes sur des quasi-isomorphismes et induit donc unfoncteur $\mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$.

Les foncteurs qui nous intéressent comme $? \otimes_A X$, $\mathrm{Hom}_B(X,?)$, les sections globales $\Gamma(T,?) : \mathrm{Sh}(T) \to \mathrm{Ab}, F \mapsto \Gamma(T,F) = F(T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(T)}(\underline{Z}_T,F)$ où $\underline{Z}_T$ est le faisceau localement constant de valeur $\mathbb{Z}$, faisceautisé du préfasiceau constant de valeur $\mathbb{Z}$, ne sont pas exacts en général...

Définition. ***(Foncteur dérivé à droite total)***

Supposons que $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ admette un adjoint à droite $\underline{i} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$. Alors le *foncteur dérivé à droite total* $\underline{R}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$ est défini comme la composée $\mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{i}} \mathcal{HA} \xrightarrow{F} \mathcal{HB} \xrightarrow{Q} \mathcal{DB}$.
Plus généralement, le *i-ième foncteur dérivé à droite* $\underline{R}^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la composée $\mathcal{A} \to \mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{R}F} \mathcal{DB} \xrightarrow{H^i} \mathcal{B}$.

Définition. ***(Foncteur dérivé à gauche total)***

Supposons que $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ admette un adjoint à gauche $\underline{p} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$. Alors le *foncteur dérivé à gauche total* $\underline{L}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$ est défini comme la composée $\mathcal{DA} \xrightarrow{R} \mathcal{HA} \xrightarrow{F} \mathcal{HB} \xrightarrow{Q} \mathcal{DB}$.
Plus généralement, le *i-ième foncteur dérivé à gauche* **avec un indice en bas** $\underline{L}_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est la composée $\mathcal{A} \to \mathcal{DA} \xrightarrow{\underline{L}F} \mathcal{DB} \xrightarrow{H^{-i}} \mathcal{B}$.

$\longrightarrow$ **Notations.** Si A,B sont deux anneaux, X un A-B-bimodule, on note $\mathrm{Ext}^i_B(X,N) := (\underline{R}^i\mathrm{Hom}_B(X,?))(N)$ pour tout $N \in \mathrm{Mod}\ B$ et $\mathrm{Tor}^A_i(M,X) = (\underline{L}_i(? \otimes_A X))(M)$ pour tout $M \in \mathrm{Mod}\ A$.

Si T est un espace topologique, $F \in \mathrm{Sh}(T)$, on appelle *i-ième foncteur cohomologique de* F, et l'on note $H^i(T,F) = (\underline{R}^i\Gamma(T,?))(F)$. En particulier, on note $H^i(T,\mathbb{Z}) = H^i(T,\underline{\mathbb{Z}}_T)$ et on appelleces groupes la *cohomologie de T à coefficients entiers.*

Remarque. Dans le cas particulier $A = \mathbb{Z}$, un A-B-bimodule est simplement un B-module et l'on trouve : $\mathrm{Ext}^n_B(M,N) = (\underline{R}^n\mathrm{Hom}_B(M,?))(N)$ dont on peut montrer qu'il est isomorphe à $\underline{R}^n(\mathrm{Hom}_B(?,N))(M)$.

On peut même montrer que pour une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ arbitraire et $L,M \in \mathcal{A}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(L,\Sigma^n M) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,M) \text{ si } n = 0 \\ \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(L,M) \text{ si } n > 0 \end{cases}$ où le foncteur dérivée est défini grâce au calcul des fractions décrit dans la suite.

Cependant, pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(L,M)$ peut être « large » même si $\mathcal{A}$ est localement petite.

Théorème

Pour $F : \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : G$ une pare de foncteurs adjoints entre catégories abéliennes, si $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ a un adjoint à droite $\underline{p}$ et $Q : \mathcal{HB} \to \mathcal{DB}$ un adjoint à droite $\underline{i}$. Alors les foncteurs dérivés $\underline{L}F : \mathcal{DA} \rightleftarrows \mathcal{DB} : \underline{R}G$ sont canoniquement adjoints.

$\triangleright$ Il est aisé de voir en utilisant les morphismes d'adjonction que $F : \mathcal{HA} \rightleftarrows \mathcal{HB} : G$ sont canoniquement adjoints. Soit $X \in \mathcal{DA}$ et soit $Y \in \mathcal{DB}$. On a des bijections $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(\underline{L}F(X),Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(QFX,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(F\underline{p}X,\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(\underline{p}X,G\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,QG\underline{i}Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,\underline{R}GY)$. $\blacksquare$

5.7.6 Calcul des fractions

La théorie du calcul des fractions permet de calculer des morphismes dans $\mathcal{DA} = (\mathcal{HA})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ en utilisant des fractions *($s^{-1} \circ f, s \in \mathrm{Qis}$) de morphismes de $\mathcal{HA}$.

Définition. ***(Catégories $_X\mathrm{Qis}$ et Qis_X)***

Soit $X \in \mathcal{HA}$. Soit $_X\mathrm{Qis}$ la catégorie dont les objets sont les quasi-isomorphismes $s : X \to X'$ de source X et les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "s'"'] & X'' \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{HA}$.

Similairement, on définit Qis_X la catégorie des quasi-isomorphismes $X' \to X$ de but X.

Lemme

(a) Pour tout $X \in \mathcal{HA}$, les catégories Qis_X et ${}_X\mathrm{Qis}^{\mathrm{op}}$ sont filtrantes.

(b) Tout diagramme solide comme ci-dessus

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Qis}\ni s"'] & Y \arrow[d, dashed, "s'"] \\ X' \arrow[r, dashed, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "g'"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Qis}\ni t'"'] & Y' \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y. \end{tikzcd}$$

peut être complété en un carré commutatif :

▷ Montrons le premier point du a), les preuves pour ${}_X\mathrm{Qis}^{\mathrm{op}}$ et de b) étant similaires. Considérons donc Qis_X. Soient $s_1 : X \to X_1$ et $s_2 : X \to X_2$ des quasi-isomorhismes. Formons un triangle $X \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix}} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix}} X_3 \xrightarrow{\Sigma} X$. Alors on a $0 = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix} = t_1 s_1 - t_2 s_2$ de sorte que le carré

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & & X_3 \\ & X_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

commute dans $\mathcal{HA}$. Si l'on aplique H^n, on trouve que la suite $0 \longrightarrow H^n X \xrightarrow{\begin{pmatrix} H^n s_1 \\ -H^n s_2 \end{pmatrix}} H^n X_1 \oplus H^n X_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} H^n t_1 & H^n t_2 \end{pmatrix}} H^n X_3 \longrightarrow 0$ est exacte scindée. Ceci implique que $H^n t_1$ et $H^n t_2$ sont inversibles en tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, t_1 et t_2 sont des quasi-isomorphismes et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "t_1"] & \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "s_3" description] \arrow[dr, "s_2"'] & & X_3 \\ & X_2 \arrow[ur, "t_2"'] & \end{tikzcd}$$

avec $s_3 = t_1 s_1 = t_2 s_2$ dans Qis_X. Maintenant, supposons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[urr, bend right, "s_2"'] & & \end{tikzcd}$$

soit donné dans $\mathcal{HA}$ avec $fs_1 = s_2 = gs_1$. Ceci signifie que $h = f - g$ satisfait $hs_1 = 0$. Formons un triangle $X \xrightarrow{s_2} X_1 \xrightarrow{u} N \longrightarrow \Sigma X$. Puisque $hs_1 = 0$, on factorise $h = lu$ pour un certain $l : N \to X_2$. Formons un triangle $N \xrightarrow{l} X_2 \xrightarrow{t} X_3 \longrightarrow \Sigma N$. Puisque s_1 est un quasi-isomorphisme, le complexe N est acyclique et donc t est quasi-isomorphisme. On obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \arrow[r, "t"'] & X_3. \\ X \arrow[ur, "s_1"] \arrow[urr, bend right, "s_2"'] \arrow[urrr, bend right, "s_3"'] & & & \end{tikzcd}$$

On a $t(f-g) = th = tlu = 0$, don $tf = tg$ et $s_3 = ts_2$ est un quasi-isomorphisme, puisque t et s_3 le sont. ■

Remarque. Soient $X,Y \in \mathcal{DA}$ et considérons le foncteur ${}_Y\mathrm{Qis} \xrightarrow{H_X} \mathrm{Ab}, (Y \xrightarrow{s} Y') \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y')$. On a un morhisme de foncteurs de H_X vers le foncteur constant $y\mathrm{Qis} \to \mathrm{Ab}$ de valeur $\mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ qui envoie un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y' & \\ X \arrow[ur, "f"'] & & Y \arrow[ul, "s"] \end{tikzcd}$$

sur le morphisme $(Qs)^{-1} \circ Qf : X \to Y$ de $\mathcal{DA}$. En effet, on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y_2 & \\ & Y_1 \arrow[u, "t"'] & \\ X \arrow[uur, "f_2"] \arrow[ur, "f_1"'] & & Y \arrow[uul, "s_2"'] \arrow[ul, "s_1"] \end{tikzcd}$$

commutatif, d'où $Qs_2)^{-1}(Qf_2) = Q(ts_1)^{-1}Q(tf_1) = Q(s_1)^{-1}Q(t)^{-1}Q(t)Q(f) = Q(s_1)^{-1}Q(f_1)$.

Lemme

L'application $\mathrm{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ est une bijection et de même pour l'application $\mathrm{colim}_{\substack{s:X'\to X \\ \in \mathrm{Qis}_X^{\mathrm{op}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X',Y) \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$.

⊛ *(Idée de la preuve.)* On définit une catégorie $(\mathcal{HA})_{\mathrm{Qis}}$ dont les obejts sont ceux de $\mathcal{HA}$ et les morphisms $X \to Y$ sont les éléments de $\mathrm{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$, respectivement $\mathrm{colim}_{\substack{s:X'\to X \\ \in \mathrm{Qis}_X^{\mathrm{op}}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X',Y) \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$. Pour définir la composition, on utilise le second point du lemme précédent. On a un foncteur naturel $\mathcal{HA} \to (\mathcal{HA})_{\mathrm{Qis}}$ et l'on peut vérifier qu'il a la propriété universelle d ela localisation $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA} = \mathcal{HA}[\mathrm{Qis}^{-1}]$. ■

Corollaire

La catégorie dérivée $\mathcal{DA}$ est additive et $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ est un foncteur additif.

▷ Pour $X,Y \in \mathcal{DA}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DA}}(X,Y) \simeq \mathrm{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{HA}}(X,Y') \to \mathrm{Hom}\mathcal{DA}(X,Y)$ est une colimite filtrante de groupes abéliens et donc a une structure naturelle de groupe abélien. On vérifie que la composition y est $\mathbb{Z}$-linéaire. Ainsi, $\mathcal{DA}$ est une $\mathbb{Z}$-catégorie. Puisque les colimites filtrantes commutent avec les produits finis, le foncteur $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ envoie les produits finis sur des produtis finis. Il suit que $\mathcal{DA}$ a tous les produits finis et est donc additive. ■

Cette catégorie additive est également munie d'une structure triangulée.

5.7.7 Structure triangulée de la catégorie dérivée

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On admet que :

Théorème. ***(Structure triangulée de la catégorie dérivée)***

La catégorie dérivée $\mathcal{DA}$ munie du foncteur de suspension $\Sigma : \mathcal{DA} \longrightarrow \mathcal{DA}$ induit par $\Sigma : \mathcal{HA} \to \mathcal{HA}$ et les Σ-suites $X' \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} Z' \xrightarrow{e'} \Sigma X'$ isomorphe dans $\mathcal{DA}$ aux images des triangles par le foncteur de projection Q est triangulée et $Q : \mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ muni du morphisme identité $Q\Sigma = \Sigma Q$ est un foncteur triangle $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$.

Remarque importante. Soit $0 \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} W \longrightarrow 0$ une suite exacte scindée de $\mathcal{CA}$. On rappelle par un ancien lemme que le morphisme de complexes $C(i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}} W$ est un quasi-isomorhisme. On peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_U"'] & V \arrow[r, "\begin{pmatrix} id \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "id_V"'] & C(i) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}"] & \Sigma U. \\
U \arrow[r, "i"'] & V \arrow[r, "p"'] & W &
\end{tikzcd}$$

Définition. ***(Triangle canonique)***

Le *triangle canonique* de $\mathcal{DA}$ associé à (i,p) est la Σ-suite

$$QU \xrightarrow{Qi} QV \xrightarrow{Qp} QW \xrightarrow{\varepsilon(i,p)} \Sigma QU$$

où $\varepsilon(i,p) = (Q\delta) \circ Q(\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix})^{-1}$.

Remarques.

1. Clairement le triangle canonique est un triangle.
2. Il suit que pour toute suite exacte scindée de $\mathcal{CA}$ et tout foncteur homologique $F : \mathcal{DA} \to \mathrm{Ab}$, on a une suite exacte longue canonique $F^{n-1}W \to F^nU \to F^nV \longrightarrow F\hat{I}nW \to F^{n+1}U \to ...$ où $F^n = F\Sigma^n$.
3. On peut montrer que les adjoints $\underline{p}$ et $\underline{i} : \mathcal{DA} \to \mathcal{HA}$, s'ils existent, sous-tendent des foncteurs triangles canoniques et similairement pour les foncteurs dérivés $\underline{L}F$ et $\underline{R}F : \mathcal{DA} \to \mathcal{DB}$.

5.7.8 Foncteurs dérivées et calcul des fractions

Foncteurs dérivés et calcul des fractions

Les lignes qui suivent sont dues à Deligne.

Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Soit $Y \in \mathcal{DA}$. On veut définir $(\underline{R}F)(Y)$ par une propriété universelle, *i.e.* comme un représentant du foncteur (cohomologique) $(\underline{r}F)(Y) : (\mathcal{DB})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$. Pour $X \in \mathcal{DB}$, on pose $(\underline{r}F)(Y) = \mathrm{colim}_{\substack{s:Y\to Y' \\ \in_Y \mathrm{Qis}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{DB}}(?,FY')$.

Alors $(\underline{r}F)(Y)$ est une colimite filtrante de foncteurs cohomologiques et donc est elle-même cohomologique. Ainsi, il a une chance d'être représentable. On dit que $\underline{R}F$ *est défini en* Y si le foncteur $(\underline{r}F)(Y)$ est représentable et dans ce cas, on définit $(\underline{R}F)(Y)$ comme un représentant $\mathrm{Hom}\mathcal{DB}(?,(\underline{R}F)(Y)) \simeq (\underline{r}F)(Y)$. Les foncteurs dérivés définis de cette manière ont presque les mêmes propriétés que celles que l'on a lorsque le foncteur $\mathcal{HA} \to \mathcal{DA}$ a un adjoint convenable.

5.8 Catégories monoïdales

La notion de catégorie monoïdale

Définition. ***(Catégorie monoïdale)***

Une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie :

(i) d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, dit *produit tensoriel*,

(ii) d'un objet I appartenant à $\mathcal{C}$ dit *objet unité*,

(iii) d'un isomorphisme naturel α dit *associateur* du foncteur $(\,\cdot\, \otimes -)\otimes ?$ vers $\,\cdot\, \otimes (-\otimes ?)$,

i.e. tel que pour tous objets A,B,C, $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ soit un isomorphisme,

(iv) de deux isomorphismes naturels λ et ρ induisant pour tout objet A, des isomorphismes $\lambda_A : I \otimes A \to A$ et $\rho_A : A \otimes I \to A$,

(v) *(identité du triangle)* avec pour tous objets A,B de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

(vi) *(identité du pentagone)* et pour tous objets A,B,C,D de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[dr, "\alpha_{A,B \otimes C,D}"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C} \otimes id_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B,C,D}"'] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "id_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)).
\end{tikzcd}$$

Définition. ***(Catégorie algébrique)***

Une *catégorie algébrique* est une catégorie k-linéaire et monoïdale avec des conditions de compatibilité de la loi d'additivité avec le produit tensoriel.

Chapitre 6

Exercices

Difficulté des exercices :

- ● ○ ○ ○ ○ Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- ● ● ○ ○ ○ Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- ● ● ● ○ ○ Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- ● ● ● ● ○ Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- ● ● ● ● ● La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.

Appendice

Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition

Table des figures

Liste des tableaux