

Étude différentielle de l'oscillation de Van der Pol en régime libre

Résumé

On s'attache à définir l'oscillateur libre de Van der Pol dans le cadre d'une motivation physique à partir de l'électronique, qui est le contexte historique initial de l'étude de cette dynamique par Balthasar van der Pol. Ensuite, nous donnerons des éléments d'étude théorique de l'équation de Van der Pol, pour commencer, élémentaires, puis, nous démontrerons la stabilité asymptotique de la solution nulle pour cette dynamique. Puis, nous donnerons une méthode de résolution numérique de cette équation du second ordre, ainsi qu'un tracé phénoménologique du portrait de phase. On verra enfin les conséquences physiques de l'étude à la fois théorique et pratique de l'équation ainsi que d'autres applications de cette dynamique et notamment son rôle au sein de la théorie du chaos.

1 Modélisation

1.1 Obtention de l'équation de Van der Pol via l'électro-cinétique

On considère le montage représenté page suivante en régime libre linéaire.

Détaillons en quelques mots les éléments caractéristiques du circuit proposé :

- ★ La cellule de base est composée, entre autres, d'un multiplieur délivrant une tension de sortie V_S proportionnelle au produit des tensions d'entrée par le facteur de proportionnalité k . On considère que la résistance interne de la bobine vérifie r significativement petit devant R .
- ★ L'amplificateur de gain amplifie simplement avec le facteur K la tension. *Remarque importante : à gauche, le k n'a pas été reproduit par la numérisation du document ; il faut lire kKU_C^2 au lieu de simplement KU_C^2 .*
- ★ Le multiplieur du bloc simple délivre une tension de sortie proportionnelle au produit des tensions d'entrée par le facteur de proportionnalité k . À noter que, dans notre montage, les deux tensions d'entrée sont identiques ce que l'on obtient par simple dédoublement du fil conducteur.
- ★ Le soustracteur change, comme indiqué sur le schéma, la tension U_C en son opposé. De même que l'amplificateur de gain et le montage en résistance négative, ce bloc nécessite l'utilisation d'une ALI (amplificateur linéaire intégré) dont nous rappelons les propriétés fondamentales du modèle parfait : $i_s = i_e = 0$ et $V_S = V_+ - V_-$. Remarquons que l'on pourrait se passer de ce bloc et limiter le nombre de composantes du montage.
- ★ Le montage de résistance négative délivre une tension totale résultant de $-Ri$ (voir ci-dessous). Nous prenons ici $R_0 = R$.

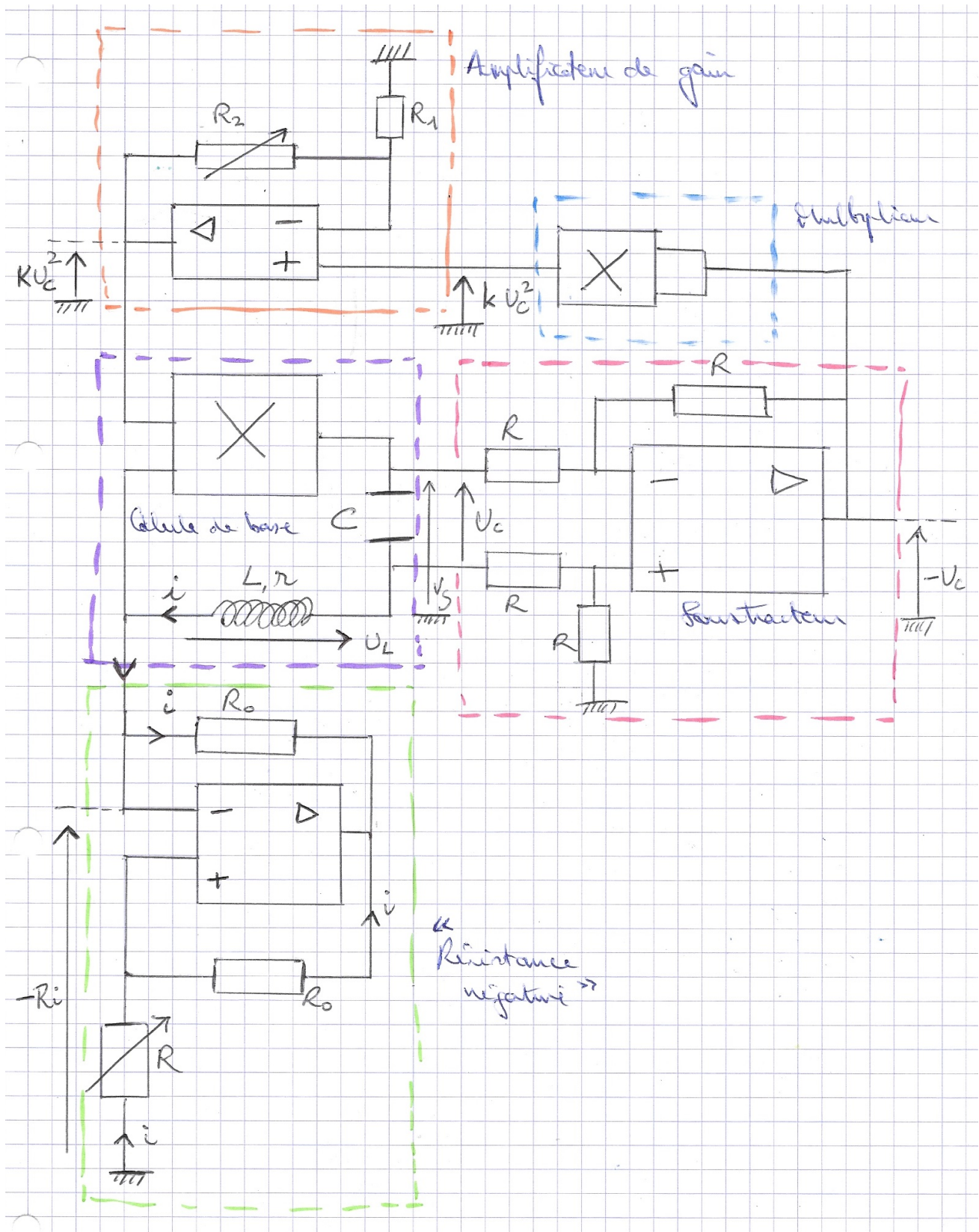


FIGURE 1. — Montage électronique régi par l'équation de Van der Pol. On distingue cinq cellules : une cellule de base constitué d'un multiplieur, et quatre cellules auxiliaires dont les noms sont indiqués sur la figure. Travail personnel.

1.2 Détail du montage de la résistance négative

Propriété. (*Résistance équivalente du schéma de résistance négative*)

La tension aux confins de la cellule de base et du bloc de résistance négative vaut $v = -Ri$.

▷ Nous écrivons le théorème de Millman en la borne positive de l'ALI parfaite du bloc de résistance négative, en notant v_0 la tension en ce point : $v_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{v_1}{R}$ avec v_1 la tension à la sortie de l'ALI. D'autre part, la loi des nœuds en termes de potentiels en la borne négative de l'ALI s'écrit $i + \frac{v_1 - v}{R} = 0$. Enfin, les lois de l'ALI parfaite en régime linéaire donnent $v_0 - v = 0$ (ce qui est vérifié si v_1 est négligeable devant v_0 , c'est-à-dire en régime non saturé, ce que l'on supposera donc). On en déduit $v_2 = R \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) v = 2v$. Par conséquent, $v = -Ri$ en convention récepteur. ■

Remarque. Quant aux montages de l'amplificateur et du soustracteur, on pourra en trouver le détail dans tout bon ouvrage d'électronique. Nous en admettons ici le fonctionnement en bloc.

1.3 Calcul du circuit pour dégager l'équation de la tension

On peut maintenant calculer :

Théorème. (*Obtention de l'oscillation de Van der Pol*)

Le montage proposé impose en régime libre, aux bornes du condensateur, une tension régie par la dynamique de Van der Pol (*voir section suivante*).

▷ Nous écrivons la tension V_S à la sortie du multiplieur dont on a déjà détaillé en début d'article les caractéristiques, soit $V_S = k \cdot k U_C^2 \cdot (-Ri)$, puisque $-Ri = v$ est la tension à la sortie de la résistance négative et $k U_C^2$ celle du côté de l'amplificateur de gain. En effet, cet amplificateur multiplie par K la tension $k U_C^2$ à son entrée. Cette tension est celle à la sortie du bloc multiplieur simple : $k \cdot (-U_C) \cdot (-U_C)$, $-U_C$ étant la tension à la sortie du soustracteur comme indiqué précédemment.

D'autre, nous pouvons appliquer la loi des mailles dans la cellule de base. Ceci donne :

$$U_C + U_L + (-Ri) - V_S = 0.$$

En injectant l'expression de V_S dans cette équation, on obtient $-k^2 K U_C^2 Ri = U_C + U_L - Ri$.

Or on sait par une loi classique que $i = C \frac{dU_C}{dt}$ et $U_L = L \frac{di}{dt}$. En remplaçant dans ce qui précède, nous obtenons :

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} \frac{R}{L} \left(1 - \frac{r}{R} - k^2 K U_C^2 \right) \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0 ,$$

puisque la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur, vaut $U_L - ri$.

Or nous avons supposé que $r \ll R$, d'où :

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} \frac{R}{L} \left(1 - k^2 K U_C^2 \right) \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0 .$$

Nous posons $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $\varepsilon = \frac{-R}{\omega L}$ et $U_0^2 = \frac{1}{k^2 K}$. On observe que l'on peut ajuster la valeur des composantes du circuit de sorte que $\omega = 1$ et $U_0 = 1$. On obtient ainsi l'équation de Van der Pol en régime libre en U_C :

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \varepsilon(U_C^2 - 1)\frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

que l'on définira dans la suite. ■

1.4 Interprétation en tant qu'oscillateur non linéaire

1.4.1 Lien avec les oscillateurs linéaires amortis

On obtient en régime libre, dans un circuit RLC , une réponse oscillatoire, ce qui est attendu.

Rappels.

On rappelle qu'un oscillateur est, par définition, solution d'une dynamique de la forme suivante :

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0.$$

Dans le cas où $\lambda \leq \omega$, on notera $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ et on peut exprimer la solution comme *oscillateur libre faiblement amorti* :

$$x(t) = x(0)\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t).$$

On observe donc que le coefficient λ , dit **coefficient d'amortissement**, détermine l'évolution de l'amplitude des oscillations. En particulier, le signe de λ détermine si les oscillations seront amorties ou excitées. Le terme $\exp(-\lambda t)$ est appelée **enveloppe exponentielle** des oscillations.

On considère l'équation de Van der Pol sous la forme suivante :

$$x'' - \varepsilon\omega\left(1 - \frac{x^2}{x(0)^2}\right)x' + \omega^2 x = 0.$$

Dans cette configuration, nous identifions le coefficient d'amortissement de la manière suivante :

$$\boxed{\lambda(x) = \frac{1}{2}\varepsilon\omega\left(\frac{x^2}{x(0)^2} - 1\right)}.$$

1.4.2 Évolution du coefficient d'amortissement selon l'amplitude des oscillations

Nous voyons donc que $\lambda(x)$ est fonction du carré de l'amplitude des oscillations¹ (puisque fonction de x^2).

¹ D'ailleurs, on remarque que $\lambda(x)$ est indépendant du signe de $\cos(\Omega t)$.

On étudie le signe de $\lambda(x)$ selon les variations de x . Remarquons que :

Premier cas. Lorsque x tend vers 0, $2\lambda(x)$ tend vers $-\varepsilon\omega$ et l'on retrouve le cas précédent ; les oscillations croissent exponentiellement.

Deuxième cas. Dans le cas où $x = \pm x(0)$ constante, les oscillations sont strictement sinusoïdales de pulsation ω .

Troisième cas. Lorsque $x > x(0)$, on a $2\lambda(x) > 0$, donc les oscillations décroissent exponentiellement. Par conséquent, les oscillations seront d'autant plus circulaires, c'est-à-dire, « sinusoïdales », que $x(0)$ sera proche de 0. (Notons d'ores et déjà que ceci est vérifié lorsque ε tend vers 0.)

2 Étude théorique

2.1 Définition

Définition. (*Dynamique de Van der Pol en régime libre*)

Soit $\varepsilon \in [-1, 1]$ le *paramètre* de l'équation de Van der Pol (E), donnée sur \mathbb{R}_+ par :

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0.$$

Le problème de Cauchy associé est classiquement muni d'une condition initiale (double, puisque l'équation est du second degré) en $(0, 0)$ donnée par (x_0, x_1) :

$$x(0) = x_0 \text{ et } x'(0) = x_1.$$

Propriété. (*Réduction de l'ordre de l'oscillation de Van der Pol*)

L'équation de Van der Pol équivaut à :

$$Y' = AY + B(Y)$$

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } B(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon x^2 y \end{pmatrix}.$$

▷ Il suffit de poser $y = x'$. Dans ce cas, $x'' = y' = -x + \varepsilon(1 - x^2)x' = -x + \varepsilon y - \varepsilon x^2 y$. La première ligne du système correspond alors à la première équation posée ; la seconde ligne correspond à l'équation transcrite obtenue. ■

2.2 Quelques propriétés élémentaires

2.2.1 Existence et unicité de solutions

Propriété. (*Existence de solutions maximales*)

Tout problème de Cauchy associé à la dynamique de Van der Pol admet une unique solution maximale.

▷ La fonction B de l'équation réduite étant de classe \mathcal{C}^1 , l'autre partie étant bien évidemment linéaire, nous sommes dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Étant donné $Y_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution maximale φ telle que $\varphi(0) = Y_0$. ■

Propriété. (*Existence de solutions globales*)

Tout problème de Cauchy associé à la dynamique de Van der Pol admet une unique solution maximale qui est globale.

▷ On reprend la solution maximale φ sur I obtenue précédemment, en notant $\varphi = (x, y)$. Nous définissons $z(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t))$. On observe que d'après l'équation de Van der Pol, $z'(t) = -\varepsilon(x^2(t) - 1)y^2(t)$.

Nous distinguons deux cas. Si $|x(t)| \leq 1$, alors par le lemme de Gronwall rappelé dans la suite, y est elle-même bornée. D'autre part, si $|x(t)| > 1$, alors $E' < 0$, donc E est décroissante, donc par continuité, la norme euclidienne de φ , c'est-à-dire E , est bornée.

Dans les deux cas, le critère d'explosion en temps fini conclut que $\sup(I) = +\infty$. ■

2.2.2 Expression implicite des solutions

En appliquant de force la méthode de la variation de la constante sur la partie linéaire du système de Van der Pol, on obtient une relation d'intégrale première caractérisant les solutions de la dynamique de Van der Pol.

Propriété

Une fonction φ est solution du système dynamique de Van der Pol sur $I \subseteq \mathbb{R}_+$, si et seulement si :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}B(\varphi(u))du.$$

▷ Étant donné $Y_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution maximale φ telle que $\varphi(0) = Y_0$. Elle est définie sur un intervalle ouvert dont l'intersection avec \mathbb{R}_+ est $I = [0, T[$, avec $T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Nous appliquons la méthode de variation de la constante en écrivant $\varphi(t) = e^{tA}C(t)$ où C est une fonction continûment dérivable de I dans \mathbb{R}^2 . Puisque $\varphi'(t) = Ae^{tA}C(t) + e^{tA}C'(t)$, φ est solution de l'équation de Van der Pol, par identification, si et seulement si $e^{tA}C'(t) = B(\varphi(t))$, soit $C'(t) = e^{-tA}B(\varphi(t))$. Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$C(t) = C(0) + \int_0^t e^{-uA} B(\varphi(u)) du = Y_0 + \int_0^t e^{-uA} B(\varphi(u)) du$$

puisque $e^{0.A} = I_2$, d'où $\varphi(t) = e^{tA} Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A} B(\varphi(u)) du$. L'implication réciproque se vérifie sans problème. ■

2.2.3 Points d'équilibre

On vérifie immédiatement :

Propriété

L'unique point d'équilibre de la dynamique de Van der Pol est 0.

▷ Soit λ une solution constante. Alors λ' et λ'' sont nulles, donc en injectant dans la dynamique de Van der Pol : $\lambda = 0$. Réciproquement, la solution nulle est bien sûr solution de la dynamique. ■

Corollaire

Toute solution non nulle de la dynamique de Van der Pol ne s'annule jamais.

▷ Il suffit de se rappeler que sous les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, en vertu du théorème sur la condition initiale, les courbes intégrales ne se croisent pas. ■

2.2.4 Solutions harmoniques de la dynamique de Van der Pol

On s'intéresse brièvement au cas pathologique $\varepsilon = 0$.

Propriété

Les fonctions sinusoïdales sont solutions d'un oscillateur de Van der Pol.

▷ Pour $\varepsilon = 0$, l'équation se réécrit $x'' + x = 0$, qui est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = 1$. Il a donc pour solutions $x(t) = A \cos(t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes, d'après le cours. Ainsi, la dynamique associée à $\varepsilon = 0$ convient. ■

2.3 Stabilité de la dynamique de Van der Pol en 0

Définition. (Stabilité d'une solution)

On considère l'équation différentielle normalisée du premier ordre $x' = f(t, x)$. Soit φ_0 une solution de l'équation définie sur un intervalle plus grand que $[0, +\infty[$.

On dit que φ est dite *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que toute solution maximale φ_0 vérifiant $\|\varphi(0) - \varphi_0(0)\| \leq \eta$, soit elle même définie au moins sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout $t \geq 0$, $\|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| \leq \varepsilon$.

Définition. (Stabilité asymptotique d'une solution)

On reprend les mêmes hypothèses que précédemment. La solution φ est dite *asymptotiquement stable* si elle est d'abord stable et, de plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) - \varphi_0(t) = 0$.

On commence par un lemme utile pour la démonstration du théorème suivant.

Lemme. (Gronwall, 1919)

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur le segment $[a, b]$, positives et vérifiant pour tout $t \in [a, b]$, $y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. Alors pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds$$

▷ Nous posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$. On multiplie les deux membres de l'inégalité hypothétique par $\psi(t)$ positif, on obtient $y(t)\psi(t) \leq \varphi(t)\psi(t) + \psi(t) \int_a^t \varphi(s)y(s)ds$, et puisque $F'(t) = y(t)\psi(t)$, on a donc $F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$, soit, en posant cette fois $G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$, $G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$.

On observe que $G(a) = F(a) = 0$, d'où, en intégrant cette dernière inégalité,

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_a^s \psi(u)du\right)ds.$$

Or l'inégalité donnée en hypothèse se réécrit $y(t) \leq \varphi(t) + G(t)\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$. En injectant l'inégalité précédente sur G dans cette dernière, on obtient le résultat attendu. ■

On peut maintenant énoncer :

Théorème. (Stabilité asymptotique de la solution nulle de l'oscillateur)

La solution nulle de l'équation de Van der Pol est asymptotiquement stable, si et seulement si, $\varepsilon < 0$.

▷ Le problème se reformule donc de la manière suivante : existe-t-il un voisinage de $(0, 0)$ tel que pour toute condition initiale (x_0, x_1) dans ce voisinage, la solution de l'équation différentielle de Van der Pol converge vers 0 en $+\infty$?

Montrons que c'est le cas pour $\varepsilon < 0$. Étant donné $Y_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe donc une unique solution maximale φ telle que $\varphi(0) = Y_0$. Elle est définie sur un intervalle ouvert dont l'intersection avec \mathbb{R}_+ est $I = [0, T[$, avec $T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On sait d'après ce qui précède que $\varphi(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}B(\varphi(u))du$.

Montrons que pour $\|Y_0\|$ suffisamment petit, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, φ est bornée par une constante arbitrairement petite et que la fonction φ est définie sur $[0, +\infty[$ au moins. D'abord, majorons le premier terme de cette dernière quantité. La matrice A a pour polynôme caractéristique

$X^2 - \varepsilon X + 1$. Remarquons que son discriminant vaut $\Delta = \varepsilon^2 - 4$ qui est toujours strictement négatif, car $\varepsilon \in [-1, 1]$. En particulier, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable par la matrice de passage P avec pour valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ dans cet ordre. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P^{-1} \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-t\lambda} \end{pmatrix} P = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) & 0 \\ 0 & e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{pmatrix} P \\ &= e^{\alpha t} P^{-1} \begin{pmatrix} \cos\beta t + i\sin\beta t & 0 \\ 0 & \cos\beta t - i\sin\beta t \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

en posant $\lambda = \alpha + i\beta$ sa forme algébrique. En posant $U = P^{-1} \cdot \text{Diag}(1, 1) \cdot P$ et $V = P^{-1} \cdot \text{Diag}(1, -1) \cdot P$, on écrit donc $e^{tA} = e^{\alpha t}(\cos\beta t U + i\sin\beta t V)$. En prenant pour norme la norme subordonnée à la norme euclidienne, on majore $\|e^{tA}\| \leq K e^{\alpha t}$ en posant $K = \|U\| + \|V\|$. Observons que $\alpha = \frac{-\varepsilon}{2} < 0$, puisque $\varepsilon < 0$ par notre hypothèse et posons $\gamma = -\alpha > 0$. On écrit donc $\|e^{tA}\| \leq K e^{-\gamma t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par conséquence, on a la majoration (\star) sur I :

$$\|\varphi(t)\| \leq \|Y_0\| K e^{-\gamma t} + \int_0^t K e^{-\gamma(t-u)} \|B(\varphi(u))\| du.$$

Remarquons simplement que B est nulle en $(0, 0)$, de différentielle nulle en $(0, 0)$, ce qui nous permet d'écrire que $\|B(Y)\| = o(\|Y\|)$ au voisinage de 0. Soit $e > 0$. On peut donc choisir $\delta \in]0, e[$ tel que $\|Y\| \leq \delta \Rightarrow \|B(Y)\| \leq \frac{e}{K} \|Y\|$. Supposons donc $\|Y_0\| \leq \delta$ et notons $T' = \sup(t \in I, \|\varphi(t)\| \leq \delta) > 0$ par continuité de φ . Alors, pour tout $t \in [0, T']$, $\|\varphi(t)\| \leq \|Y_0\| K e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} e \|\varphi(u)\| du$, c'est-à-dire $e^{\gamma t} \|\varphi(t)\| \leq K \|Y_0\| + e \int_0^t e^{\gamma u} \|\varphi(u)\| du$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme de Gronwall avec deux des fonctions constantes, tout ici étant positif, ce qui donne directement $e^{\gamma t} \|\varphi(t)\| \leq K \|Y_0\| e^{et}$, d'où $\|\varphi(t)\| \leq K \|Y_0\| e^{-(\gamma+e)t}$. Supposons, ce qui ne pose aucun problème *a fortiori*, que $e < \gamma$, alors si l'on choisit Y_0 tel que $\|Y_0\| < \eta = \min(\delta, \frac{\delta}{2K})$, on a, pour tout $t \in [0, T']$, $\|\varphi(t)\| \leq \frac{\delta}{2}$.

Montrons que $T' = T$. Si $T' < T$, alors par continuité de φ et de la norme, l'inégalité précédente donne $\|\varphi(T)\| \leq \frac{\delta}{2}$. On peut donc trouver T'' tel que $T' < T'' < T$ et pour tout $t \in [T', T'']$, on ait $\|\varphi(t)\| \leq \delta$, ce qui contredit la définition de T' . Par contraposée, $T' = T$. Montrons à présent que pour ce choix de Y_0 , on a $T = +\infty$. Supposons encore que ce ne soit pas le cas. D'après ce qui précède, pour tout $t \in I$, $\|\varphi(t)\| \leq \delta$. Or la dynamique de l'équation de Van der Pol étant de classe \mathcal{C}^1 , elle est bornée sur la boule fermée de centre 0 et de rayon δ . Par suite, il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|\varphi'(t)\| \leq k$. Alors φ' est intégrable sur $[0, T[$ et φ se prolonge par continuité sur $[0, T]$, et le théorème de la limite de la dérivée donne que ce prolongement est dérivable sur le segment. Puisque ce prolongement constitue une solution définie sur $[0, T]$, on obtient une contradiction de ce que φ est maximale. Par conséquent, $T = +\infty$.

Ainsi, pour $\|Y_0\| < \eta$, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\|\varphi(t)\| \leq \delta < e$, c'est-à-dire que la solution nulle est stable.

Pour montrer la stabilité asymptotique, on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\|\varphi(t)\| \leq K \|Y_0\| e^{-(\gamma+e)t}$. Il suffit de faire tendre t vers $+\infty$, puisque $0 < e < \gamma$, pour avoir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$. Ainsi la solution nulle est asymptotiquement stable dès que $\varepsilon < 0$.

Voyons maintenant pour $\varepsilon = 0$. L'équation a pour solutions $x(t) = x_0 \cos(t) + x_1 \sin(t)$ qui, si

$(x_0, x_1) \neq (0, 0)$, autrement si x n'est pas la solution nulle, ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$; il suffit d'étudier le comportement de $x(n\pi)$ lorsque n tend vers $+\infty$, quitte à exhiber des valeurs d'adhérence distinctes. La solution nulle n'est donc pas asymptotiquement stable.

Enfin, supposons que $\varepsilon \in]0, 1]$. Posons, avec la notation $x' = y$, pour toute solution x , $z = x^2 + y^2$. On calcule :

$$z' = 2xx' + 2yy' = 2xy + 2y(-x + \varepsilon(1 - x^2)y) = 2\varepsilon(1 - x^2)y^2.$$

Or si x tend vers 0, constante, puisqu'elle est C^∞ , alors $y = x'$ également d'après l'inégalité des accroissements finis. Ainsi x tend vers 0 si et seulement si z tend vers 0. Or si z tendait vers 0, on aurait, d'après le calcul précédent, $x^2(t) \leq z(t) < 1$ pour t assez grand. Ainsi $1 - x^2$ est positif, donc z est croissante et tend vers 0 donc identiquement nulle. Ainsi $x = y = 0$ pour t assez grand. Or les courbes intégrales ne se croisent pas, ce qui donne que x est la solution nulle. Par suite, une solution non nulle de l'équation ne tend pas vers 0, autrement dit, la solution nulle n'est pas asymptotiquement stable. ■

3 Analyse numérique

On ne connaît pas de manière pour intégrer l'équation de Van der Pol, en particulier, nous n'avons pas accès à une écriture explicite des solutions de cet oscillateur. Nous devons donc recourir à des méthodes numériques pour appréhender la forme, et le comportement selon la variation des paramètres, de celles-ci.

3.1 Tracé des solutions oscillatoires (à une dimension, fonction du temps t)

3.1.1 Obtention de relations discrètes pour la méthode d'Euler explicite

On rappelle notre expression de la dynamique de Van der Pol :

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On note $h = dt$, un pas que l'on considère extrêmement petit. Nous allons opérer à l'approximation de la méthode d'Euler en discrétisant le temps infinitésimal : puisque $x'(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$, on pose $x'(t) = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$ ce qui donne en inversant la relation :

$$x(t + h) = x(t) + dt x'(t).$$

Nous prendrons $t = 0$ et notons $x_n = x(t + nh)$, ainsi que $x'_n = x'(t + nh)$ et $x''_n = x''(t + nh)$. Dans ce cas nous retiendrons :

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h x'_k}.$$

Cette relation ne nous suffit pas en soi, car nous ne possédons pas l'information sur la dérivée de x sur tout un intervalle. Il nous faut donc observer du côté de l'équation de Van der Pol.

Remarquons d'abord qu'en appliquant le raisonnement précédent à x' et non plus à x , on obtient la relation sur la dérivée : $x'_{k+1} = x'_k + hx''_k$. Or la dynamique nous permet d'exprimer $x''_k = \varepsilon(1 - x_k^2)x'_k - x_k$. En injectant dans la relation précédente, on obtient :

$$x'_{k+1} = x'_k + h[\varepsilon(1 - x_k^2)x'_k - x_k].$$

En connaissant $x_0 = x(0)$ et $x'_0 = x'(0)$, on peut donc obtenir sur un intervalle discret les valeurs de x et de x' , donc en particulier de x . Plus le pas h sera infime, plus la précision du tracé sera grande comme on le verra par la suite.

3.1.2 Programmation du graphe

On trace nos solutions de l'équation de Van der Pol sur l'intervalle $[a, b] = [0, 120]$.

On utilise Python 3 pour l'écriture des programmes et le module Matplotlib pour les tracés.

```

1  a=0
2  b=120
3
4  def euler(x0,x1,eps,N):
5      '''
6      Entrées :
7          x0 : condition initiale x(0)
8          x1 : condition initiale x'(0)
9          eps : paramètre de l'équation de Van der Pol
10         N : nombre de subdivisions de l'intervalle de
11         tracé donnant le pas
12         -----
13         Sortie :
14         Liste des valeurs discrètes de la solution de l'é
15         quation de Van der Pol (garantie par le théorème de
16         Cauchy-Lipschitz) pour les conditions initiales entré
17         es
18         '''
19         x=[]
20         dx=[]
21         h=(b-a)/N
22         x+= [x0]
23         dx+= [x1]
24         compteur=0
25         while compteur<N:
```

```

22         compteur+=1
23         newx=x[-1]+dx[-1]*h
24         newdx=dx[-1]+(eps*(1-x[-1]**2)*dx[-1]-x[-1])*h
25         x+=[newx]
26         dx+=[newdx]
27     return x
28
29 def discretisation(N):
30     l=[0]
31     h=(b-a)/N
32     compteur=0
33     while compteur<N:
34         compteur+=1
35         l+=[l[-1]+h]
36     return l
37
38 grille=discretisation(1500)
39 valeurs=euler(0,0.05,0.1,1500)
40
41 def graphe(a,b):
42     '''
43     Entrées :
44         f : fonction
45         a,b : réels tels que a soit inférieur à b
46     -----
47     Sortie :
48         Graphe de f sur l'intervalle [a,b]
49     '''
50     assert (isinstance(a,int) or isinstance(a,float)) and
51             (isinstance(b,int) or isinstance(b,float)) and a<=b,
52             "Les arguments sont invalides."
53     from matplotlib import pyplot as plt
54     plt.clf()
55     plt.grid(1)
56     plt.xlim(a,b)
57     plt.ylim(-5,5)
58     plt.plot(grille,valeurs,color='blue',label='Pendule
de Van der Pol')
59     plt.legend()
60     plt.show()

```

Après exécution du programme et de la commande `graphe(a, b)` dans la console, on obtient le graphe suivant :

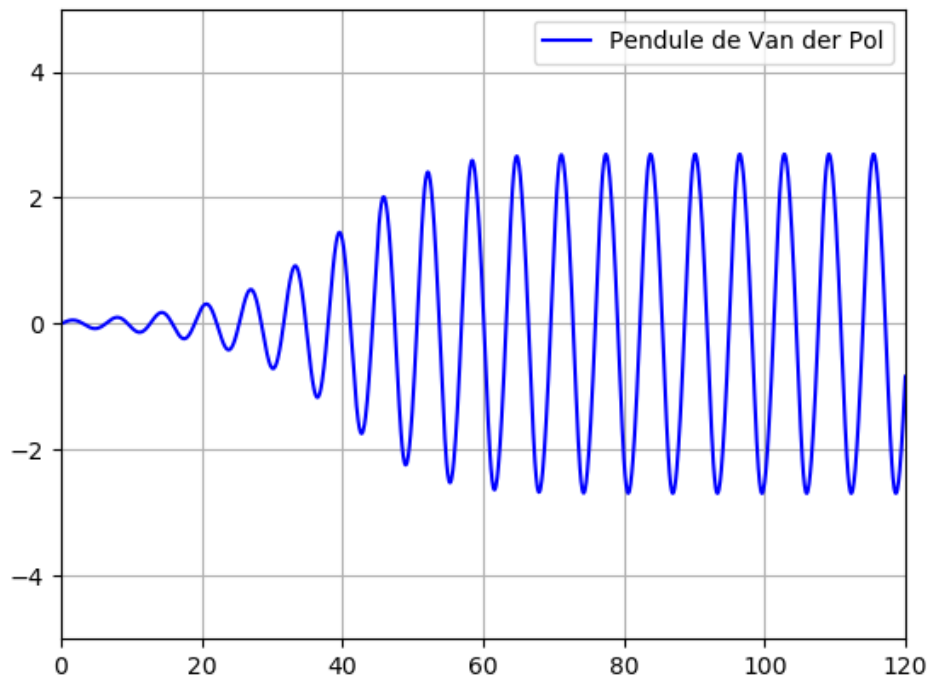


FIGURE 2. — Graphe d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = 0.1$. Le résultat est d'autant plus satisfaisant que nous avons choisi un pas petit (à $N = 1500$ itérations), soit, pour l'intervalle $[a, b] = [0, 120]$, $h = 0,08$. Nous prenons pour condition initiale $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0,05$. Le paramètre de Van der Pol choisi est $\varepsilon = 0.1$. Travail personnel.

3.1.3 Commentaire

L'observation de l'allure des courbes permet de tirer les conclusions suivantes :

- On observe une possibilité de régularisation des oscillations : pour toutes conditions initiales, le système tend, après un régime transitoire qui, dans nos graphiques, correspondrait environ à $[0, 20]$, vers un régime permanent d'amplitude constante.
- Le système oscillant est, au sein des deux régimes, d'amplitude limitée contrairement au modèle linéaire de l'oscillateur amorti dans le cas d'un coefficient d'amortissement négatif. L'évolution du régime permanent, que l'on pourrait qualifier de **quasi-sinusoïdal** pour $\varepsilon > 0$, **relaxatif** pour $\varepsilon < 0$, est visualisée via la variation d'un seul paramètre (c'est bien ε).
- L'observation à vue des graphes ne permet PAS de conclure de la périodicité du régime permanent, car il est non fiable de distinguer « à l'œil nu » une sinusoïde d'une autre courbe oscillante, d'où l'intérêt du tracé du portrait de phase.

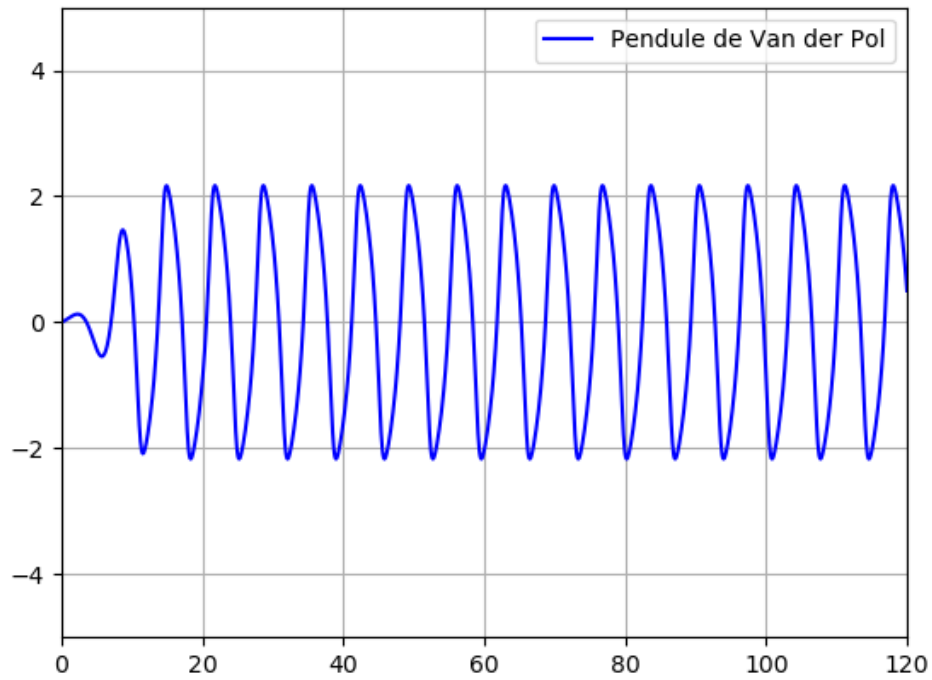


FIGURE 3. — *Graphes d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = 0.8$. Travail personnel.*

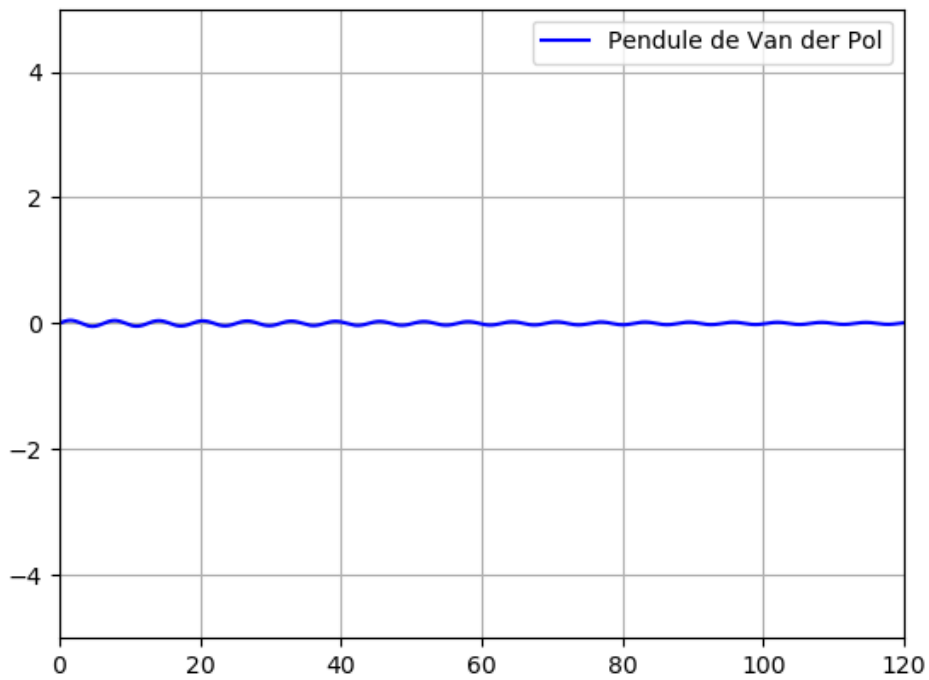


FIGURE 4. — *Graphes d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = -0.1$. Travail personnel.*

3.2 Observation du cycle limite sur le portrait de phase à deux dimensions

3.2.1 Méthode de champ de direction

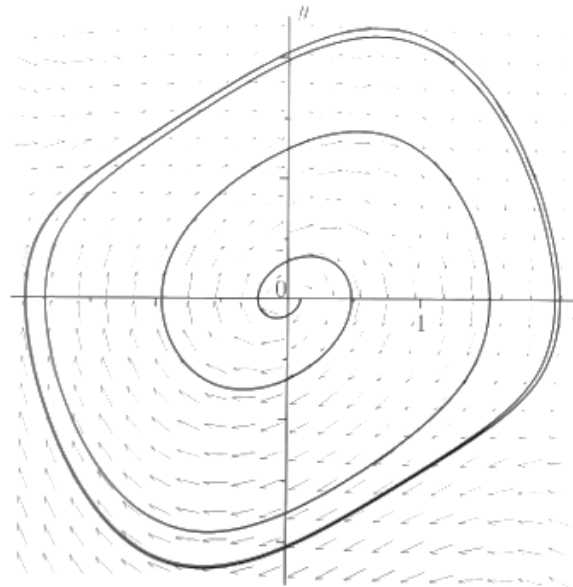


FIGURE 5. — *Tracé du portrait de phase du pendule de Van der Pol pour le paramètre $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On utilise ici la méthode de champ de direction qui consiste à tracer les tangentes en tout point à la dynamique.*

Le portrait de phase ainsi tracé met en évidence une courbe (simple) fermée, cycloïdale, vers laquelle la trajectoire converge². C'est cette courbe que l'on appelle **cycle limite**.

3.2.2 Tracé numérique des portraits de phase

3.2.3 Remarques

On vérifie cette fois avec grande précision l'existence du cycle limite ce qui atteste du caractère quasi-périodique du régime permanent. Pour un paramètre assez grand, on voit aisément que ce cycle n'est pas circulaire, ce qui permet d'affirmer, contrairement à l'intuition sur le premier graphe de la section précédente (FIGURE 3) que le régime permanent est non sinusoïdal, caractère accentué avec l'augmentation du paramètre ε comme le montre la FIGURE 4.

² Au sens topologique et de la période de la trajectoire.

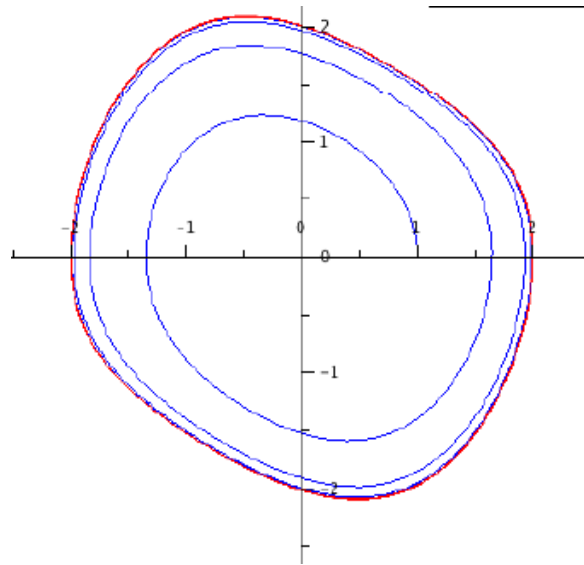


FIGURE 6. — *Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour un paramètre $\varepsilon > 0$ fixé.*
En bleu, le tracé du portrait de phase ; en rouge, on met en évidence la courbe fermée du cycle limite.

4 Conclusion

Le cas $\varepsilon > 0$ dans l'oscillateur de Van der Pol est un exemple fondamental dans la théorie du chaos déterministe, puisque, au voisinage de $\varepsilon = 0$, le système est très sensible aux conditions initiales : stable pour $\varepsilon > 0$, et pour $\varepsilon < 0$, s'éloignant définitivement de 0 pour converger vers un cycle limite. C'est pourquoi nous avons approfondi en détail notre preuve sur la condition nécessaire et suffisante donnant la stabilité (asymptotique) de la dynamique.

Remarquons par ailleurs que l'on peut démontrer que le cycle limite est, à paramètre ε fixé, indépendant des conditions initiales ce qui accentue le phénomène de chaos dans notre modèle. Plus précisément, le point d'équilibre $\varepsilon = 0$ est non seulement instable, car non stable à droite, mais a une *dépendance sensitive aux conditions initiales* ; par suite, le cycle limite du pendule de Van der Pol est un *attracteur* dépendant sensitivement des conditions initiales, c'est-à-dire, par définition, un *chaos*.

Notre étude pourrait se compléter de diverses manières : première, par la démonstration rigoureuse de l'existence d'un cycle limite de plus indépendant des conditions initiales, ce qui est faisable, mais loin d'être évident. À titre informatif, on peut mentionner l'utilisation dans la preuve de ce résultat dû à Poincaré de la notion du flux de l'oscillation de Van der Pol, ainsi que le recours au théorème de Poincaré-Bendixson, classique pour démontrer l'existence d'un cycle limite mais dont la démonstration dépasse le cadre de notre étude. D'autre part, le phénomène de remplacement du cycle limite pour $\varepsilon > 0$ par l'équilibre asymptotiquement stable pour $\varepsilon < 0$ est un phénomène étudié dans le cadre de la théorie du chaos appelé *bifurcation de Hopf*.

Travaux personnels :

Apports personnels en partie :

Preuve de la stabilité asymptotique pour $\varepsilon < 0$

Obtention de l'équation de Van der Pol à partir de l'électronique

Travaux personnels :

Étude théorique élémentaire : points d'équilibre, solutions harmoniques de la dynamique, intégrale première du mouvement

Programmation en Python de la méthode d'Euler explicite et tracé sous Matplotlib

Interprétation des graphes pratiques

Table des matières

1	Modélisation	1
1.1	Obtention de l'équation de Van der Pol via l'électro-cinétique	1
1.2	Détail du montage de la résistance négative	3
1.3	Calcul du circuit pour dégager l'équation de la tension	3
1.4	Interprétation en tant qu'oscillateur non linéaire	4
1.4.1	Lien avec les oscillateurs linéaires amortis	4
1.4.2	Évolution du coefficient d'amortissement selon l'amplitude des oscillations	4
2	Étude théorique	5
2.1	Définition	5
2.2	Quelques propriétés élémentaires	6
2.2.1	Existence et unicité de solutions	6
2.2.2	Expression implicite des solutions	6
2.2.3	Points d'équilibre	7
2.2.4	Solutions harmoniques de la dynamique de Van der Pol	7
2.3	Stabilité de la dynamique de Van der Pol en 0	7
3	Analyse numérique	10
3.1	Tracé des solutions oscillatoires (à une dimension, fonction du temps t	10
3.1.1	Obtention de relations discrètes pour la méthode d'Euler explicite	10
3.1.2	Programmation du graphe	11
3.1.3	Commentaire	13
3.2	Observation du cycle limite sur le portrait de phase à deux dimensions	15
3.2.1	Méthode de champ de direction	15
3.2.2	Tracé numérique des portraits de phase	15
3.2.3	Remarques	15
4	Conclusion	17
A	Bibliographie	19
B	Iconographie	20

A Bibliographie

Références

- [1] *Analyse. Les maths en tête*, vol. 2, Xavier Gourdon, 3e éd., Ellipses, 2020
- [2] *Oraux x-ens mathématiques*, Serge Nicolas, Serge Francinou, Hervé Gianella, Cassini, Analyse vol. 4, 2012
- [3] *Physique, exercices incontournables*, MP-PT, J.-N. Beury, collection J'intègre, Dunod, 2014
- [4] Bibmaths, page « Solution (asymptotiquement) stable d'une équation différentielle » , site Internet
- [5] *Un modèle expérimental de l'oscillateur de Van der Pol*, D. Meier, Lycée B. Pascal 68000 Colmar, Bulletin de l'union des physiciens, numéro 787
- [6] *Résolution de l'équation de Van der Pol*, Jacques Garcia, Lycée Jean Vigo 12100 Millau, Bulletin de l'union des physiciens, numéro 789
- [7] *Ordinary Differential Equations with Applications*, C. Chicone, 2e éd. cité par *Un exemple de perturbation d'un système linéaire : le pendule de Van der Pol*, Grégoire Clarté
- [8] *Systèmes dynamiques*, Francine Diener et Marc Diener, 3 septembre 2017
- [9] *TP no 9 : Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles*, J.-P. Becirspahic, A. Troesch, Lycée Louis-le-Grand, Paris, MPSI 4 - Informatique pour tous, 2013-2014

B Iconographie

FIGURE 1. — *Montage électronique régi par l'équation de Van der Pol.* On distingue cinq cellules : une cellule de base constitué d'un multiplieur, et quatre cellules auxiliaires dont les noms sont indiqués sur la figure. Travail personnel.

FIGURE 2. — *Graphe d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = 0.1$.* Le résultat est d'autant plus satisfaisant que nous avons choisi un pas petit (à $N = 1500$ itérations), soit, pour l'intervalle $[a, b] = [0, 120]$, $h = 0,08$. Nous prenons pour condition initiale $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0,05$. Le paramètre de Van der Pol choisi est $\varepsilon = 0.1$. Travail personnel.

FIGURE 3. — *Graphe d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = 0.8$.* Travail personnel.

FIGURE 4. — *Graphe d'un pendule de Van der Pol obtenu grâce à la méthode d'Euler explicite pour $\varepsilon = -0.1$.* Travail personnel.

FIGURE 5. — *Tracé du portrait de phase du pendule de Van der Pol pour le paramètre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.* On utilise ici la méthode de champ de direction qui consiste à tracer les tangentes en tout point à la dynamique.

FIGURE 6. — *Portrait de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour un paramètre $\varepsilon > 0$ fixé.* En bleu, le tracé du portrait de phase ; en rouge, on met en évidence la courbe fermée du cycle limite.