Cours de mathématiques

TOME VI

TOPOLOGIE

Mathématiques générales

France ∼ 2024

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Résumé

Les espaces vectoriels normés sont un cadre agréable pour une introduction à la topologie, classiquement dispensée en mathématiques spéciales, mais on comprend rapidement qu'ils sont en grande partie sans nouveauté par rapport aux espaces métriques, eux-mêmes qui se reformulent presque entièrement dans un vocabulaire topologique pur. Cependant, deux pans de la théorie se dégagent nettement : l'intérêt de la dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Riesz, et d'autre part, la gratuité de certains comportements des boules qui permettent une géométrie intuitive.

1.1 Normes

Exemples. *(Normes classiques, normes usuelles)*

1.

1.2 Limites

1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition. *(Normes non équivalentes en dimension finie)*

Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur E sont équivalentes.

▷ En exercice. ■

Propriété. *(Compacité locale des evn de dimension finie)*

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.

Remarque. En dimension infinie, on peut quand même trouver des parties compactes non comprises dans un sous-espace de dimension finie. Elle sont données, par exemple, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, par le théorème d'Ascoli qui permet d'établir la compacité de familles libres de fonctions.

Propriété. ***(Théorème d'Heine-Borel)***

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

C'est en fait une équivalence !

Propriété. ***(Fermeture des sous-espaces vectoriels de dimension finie)***

Soit K un corps complet pour sa valuation. Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension quelconque et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé dans E.

C'est faux si K n'est pas complet ! En effet, on peut considérer K comme un K-ev de dimension 1. Il se plonge dans son complété qui est un ev et il est dense dedans donc non fermé.

1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Propriété. ***(Convergence des suites bornées par les valeurs d'adhérence)***

Dans un espace de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 1 *(Contre-exemples)*

Les hypothèses précédentes sont essentielles.

1. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de bornitude.
2. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de dimension.

▷ **Éléments de réponse.**

Pour le premier cas, la suite définie par $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$ doit convenir. Pour le second cas, on peut considérer $(1 - \sin(n\pi/2))X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite bornée qui ne converge pas mais admet 0 pour seule valeur d'adhérence.

1.3.2 Boules et hypercubes

Lemme. ***(Toute boule contient un hypercube)***

Soit n un entier naturel. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque. Alors toute boule ouverte non vide ni réduite à un point de $\mathbb{R}^n$ contient strictement un hypercube fermé ni vide ni réduit à un point et de même centre.

▷ Supposons d'abord que $\mathbb{R}^n$ soit muni de sa topologie usuelle. On utilise l'intuition donnée dans le plan de ce que dans un cercle de rayon 1, on peut inscrire un carré de côté $\sqrt{2}$. Soit donc $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On pose $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{n}]a_i - \frac{\sqrt{2}}{4}r, a_i + \frac{\sqrt{2}}{4}r[$. Alors $\mathcal{H}$ est un hypercube et convient.

Pour passer au cas général, on utilise l'équivalence des normes en dimension finie. ■

1.4 Applications continues

1.4.1 Formes linéaires

Propriété. ***(Caractérisation de la discontinuité des formes linéaires)***

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soit f une forme $\mathbb{K}$-linéaire non nulle de E. Alors f est discontinue si et seulement si son noyau est dense dans E.

▷ D'après le théorème précédent, une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. De plus, si elle n'est pas nulle, son noyau est un hyperplan de E. Or un hyperplan est fermé ou dense, ces deux conditions s'excluant mutuellement, car le seul fermé dense est l'espace lui-même, qui n'est pas un hyperplan. Ainsi, f est non continue, si et seulement si, $\mathrm{Ker}(f)$ est dense. ■

On peut caractériser la réalisation de la distance au noyau d'une forme linéaire linéaire continue de la manière suivante.

Proposition. ***(Réalisation de la distance à un hyperplan fermé)***

Soit E un espace vectoriel normé et $\phi \in E'$. Alors la distance de $u \in E \setminus \mathrm{Ker}\phi$ à $\mathrm{Ker}\phi$ est atteinte si et seulement si la norme de ϕ est atteinte (sur la sphère unité), c'est-à-dire s'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\phi(x)| = \|\phi\|$.

▷ Notons $H = \mathrm{Ker}\phi$. Soit $u \in E$. Remarquons d'abord que $d(u,H) = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|}$. On procède par double inégalité. D'une part, $|\phi(u)| = |\phi(u-h)| \leqslant \|\phi\|\,|u-h| \quad \forall h \in H$ d'où $\frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} \leqslant d(u,H)$. Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieur, il existe un vecteur unitaire s tel que $|\phi(s)| \geqslant \|\phi\| - \varepsilon > 0$. En prenant $h = u - \frac{\phi(u)}{\phi(s)}s$, on obtient $d(u,H) \leqslant \|u-h\| = \frac{|\phi(u)|}{|\phi(s)|} \leqslant \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|-\varepsilon}$ et l'on conclut par $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Concluons. Soit $u \in E \setminus H$. Si $d(u,H)$ est atteinte en un certain point $z \in E$, alors $z \neq u$, car $u \notin H$, et l'on a $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|\phi(u-z)|}{\|\phi\|}$. Ainsi, puisque $\|u-z\| \neq 0$, $\|\phi\| = \frac{|\phi(u-z)|}{\|u-z\|} = \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right|$ en posant $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut toujours avoir $\|\phi\| = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, avec bien $\|x\| = 1$. De plus, si la norme de ϕ est atteinte, il existe x de norme 1 tel que $|\phi(x)| = \|\phi\|$. On a en particulier, sauf cas trivial ϕ nulle, $E = \mathrm{Ker}\phi \oplus \mathbb{K}x$ donc $u = z + \lambda x$ où $z \in \mathrm{Ker}\phi$. Par égalité de normes, on a $\lambda = \|u-z\|$. Ainsi $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$ puis $\phi(\frac{u-z}{\|u-z\|}) = \phi\frac{u}{\|u-z\|} = \phi(x) = \|\phi\|$. Ainsi, il existe $z \in H$ tel que $\|u-z\| = \frac{|\phi(u)|}{\|phid\|} = d(u,H)$ par le lemme. ■

Remarque importante. Remarquons la dichotomie du résultat précédent : soit toutes les distances des points hors du noyau au noyau sont atteintes, soit aucune ne l'est.

1.4.2 Projections scalaires

Théorème. ***(Continuité des projections en dimension finie)***

Soit E un espace vectoriel normé et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $n \in \mathbb{N}$ une base de E. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. On note p la projection selon la composante sur e_{i_0}. Alors p est continue.

$\triangleright$ On sait que p est une forme linéaire. Or toute application linéaire partant d'un espace de dimension finie est continue, donc p est continue. $\blacksquare$

En dimension infinie, c'est facilement faux comme le montre le contre-exemple suivant.

Contre-exemple. ***(Projection discontinue en dimension infinie)***

Une projection n'est pas continue en général.

On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ d'une base algébrique, forcément indénombrable, car la famille $x \longmapsto e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est libre. De cette base on extrait une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0,1]$. Il est de dimension dénombrable ; soit donc e un vecteur de la base d'origine qui n'est pans cette extraction. Le noyau de la projection sur e contient l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est dense dans E, donc le noyau de cette projection est dense, en particulier il n'est pas fermé, donc elle n'est pas continue, et voilà.

Heuristiquement, ce n'est pas étonnant. Un tel résultat signifierait que toute application nilpotente d'ordre 2 serait continue, ce qui est curieux. $\square$

Exercice 2

Est-ce que, plus généralement, un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si toutes les projections scalaires contre une base donnée sont continues ?

1.4.3 Projections vectorielles

Corollaire. ***(Décomposition selon une projection continue)***

Soit p la projection sur la droite vectorielle engendrée par e_{i_0} dont on suppose qu'elle est continue. Alors il existe un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(p)$ fermé dans E, donc une décomposition de E en deux sous-espaces fermés.

$\triangleright$ On pose $q = 1 - p$. On sait que q est une projection, de plus, $pq = p(1-p) = p - p^2 = 0$ au sens de la composition. D'après le lemme des noyaux, puisque X et $X - 1$ sont premiers entre eux, $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q) = E$. Or $\mathrm{Ker}(p)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, car p est continue, et q est également continue par opérations usuelles donc $\mathrm{Ker}(q)$ est également fermé dans E, ce qui termine la preuve. ■

Remarque. Le supplémentaire obtenu est bien la projection sur $\mathrm{Vect}(e_i, i \in I \setminus \{i_0\})$, ce qui est commode dans la pratique la base ayant été fixée.

Exercice 3

Vérifier explicitement le fait précédent.

1.5 Suites et séries de fonctions

1.5.1 Convergence simple

Propriété. ***(Limite simple d'applications linéaires)***

Soient E un espace vectoriel et F un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L(E,F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors $f \in L(E,F)$.

▷ C'est conséquence directe de la linéarité de la limite en un point. ■

1.6 Convexité

Dans toute cette section, on se limite aux espaces vectoriels normés E **sur un sur-corps valué de** $\mathbb{R}$. En vérité, toutes les interprétations géométriques des résultats, qui sont la règle, se font sur la restriction des théorèmes aux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.6.1 Jauge d'un convexe

Voilà une notion dont la principale application est la preuve du théorème de Hahn-Banach géométrique.

Définition. ***(Jauge d'un convexe)***

Soit $C \subseteq E$ un convexe contenant 0_E. La *jauge* p de C est l'application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $p(x) = \inf\{t \geqslant 0, x \in tC\}$.

Remarque. Si $t \in I_x$, pour tout $s \geqslant t$, $s \in I_x$. En effet, si $t \neq 0$, $t \in I_x \iff x/t \in C \iff [0,x/t]_E \subseteq C \iff \forall s \geqslant t \quad x/s \in C \iff \forall s \geqslant t \quad s \in I_x$.

Propriété. ***(Définition de la jauge)***

p est bien définie.

▷ Soit $x \in E$ et $I_x = \{t \geqslant 0, x \in tC\}$. Si t est non nul, on l'écrit $x/t \in C$. Comme C est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E,r) \subseteq C$ puisque $0 \in C$. Donc si $x \in E$ est non nul, $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in C$ c'est-à-dire que $x \in \frac{2\|x\|}{r}C \qquad (\star)$. Donc $I_x \neq \emptyset$. Puisque $I_x \subseteq [0,+\infty)$, donc $p(x)$ est bien définie. ■

Propriété. ***(Jauge en zéro)***

$p(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

▷ Clair et clair. ■

Propriété. ***(Sous-additivité, homogénéité positive)***

p vérifie les hypothèses du théorème analytique de Hahn-Banach réel.

▷ p est positivement homogène. En effet, $p(x) = \inf\{t \geqslant 0, x \in tC\}$. Soit $\lambda > 0$. Alors pour tout $x \in E$, $\lambda x \in \lambda tC \iff x \in tC$. Donc $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. ■

▷ Montrons que la jauge d'un convexe vérifie l'inégalité triangulaire (exercice classique de L2). Soient $x{,}y \in E$ non nuls. Soient $\varepsilon > 0$, alors $p(x)+\varepsilon \in I_x$ et $p(y)+\varepsilon \in Iy$, c'est-à-dire $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Alors comme C est convexe,

$$\frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + \frac{p(y)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\frac{y}{p(y)+\varepsilon} = \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C,$$

donc $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$. Donc $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$. ■

Propriété. ***(Identification du convexe par la jauge)***

$C = \{x \in E, p(x) < 1\}$.

▷ Montrons que $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$. Si $x \in C$ non nul, comme C est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subseteq C$. Soit $\lambda = \frac{\|x\|+\frac{1}{2}}{\|x\|} > 1$. Alors $\lambda x = x + \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(x{,}l) \subseteq C$. Donc $\frac{1}{\lambda} \in Ix$ donc $p(x) = \inf(Ix) < 1$. On a montré que $C \subseteq \{x, p(x) < 1\}$. Réciproquement, si $p(x) < 1$, $I_x \supseteq [1,+\infty[$, donc $x \in C$. ■

Propriété. ***(Majoration de la jauge)***

Il existe M tel que $p \leqslant M\|\cdot\|$.

▷ La relation $(\star)$ donne $p(x) \leqslant M\|x\|$ pour $M = \frac{2}{r}$. ■

Propriété. ***(Continuité de la jauge)***

p est lipschitzienne.

▷ Conséquence de la majoration précédente. ■

Propriété. ***(Norme issue d'une jauge)***

La jauge d'un convexe compact symétrique par rapport à l'origine définit une norme dont la boule unité est ce convexe.

Théorème. ***(Homéomorphie des convexes)***

Tous les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes, pour $n \in \mathbb{N}$.

▷ On montre que C est homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$ en utilisant la fonction $x \longmapsto \frac{j(x)}{\|x\|}x$, bijection bicontinue de C sur la boule unité. ■

Corollaire. ***(Boules et point)***

Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à un point.

Heuristique

La jauge d'un convexe permet de le déterminer dans l'espace.

1.6.2 Convexes et applications

Exercice 4

L'image d'un convexe par une application continue est-elle nécessairement convexe.

▷ **Éléments de réponse.**

Clairement pas. Pourtant, d'après les valeurs intermédiaires, un exemple de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ne suffit pas. On peut considérer simplement l'image de $[-\pi, \pi]$ par l'exponentielle imaginaire, qui est la sphère du plan d'Argand-Cauchy, qui n'a rien de convexe, en cela que deux points distincts formeront toujours une corde sortant de la sphère.

Propriété. ***(Image d'un convexe par une application linéaire)***

Soient E,F deux espaces vectoriels réels. Soit C un convexe de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $f(C)$ est convexe.

1.6.3 Points extrémaux

Définition. ***(Point extrémal)***

Soit A une partie de E. On dit que $c \in A$ est *extrémal* (dans A), ou que c est un *point extrême* de A, si $A \setminus \{c\}$ est convexe.

Remarque. Cette définition n'a d'intérêt que si A est déjà connexe, mais elle n'est pas dépourvue de sens dans le cas général néanmoins.

Exercice 5

Trouver une partie non convexe du plan et exhiber l'un de ses points extrémaux.

▷ **Éléments de réponse.**

Prendre une boule et un point hors de la boule. Ce n'est pas une partie convexe du plan. Pourtant, le point hors de la boule est extrémal, car si on le retire, on obtient une boule, convexe.

Propriété. ***(Caractérisation des points extrémaux)***

Soit A un convexe. Un point $c \in A$ est extrémal, si et seulement si, pour tous $c_1, c_2 \in A$, $c = \frac{c_1+c_2}{2} \implies c_1 = c_2 = c$.

▷ Supposons que c soit le milieu de deux points distincts de A, distincts de c ; en effet, si $c_1 \neq c$, alors $c_2 \neq c$. Alors A privé de c ne peut être convexe, car alors on aurait un segment liant deux éléments de $A \setminus \{c\}$ dont le milieu n'est pas dans $A \setminus \{c\}$. Réciproquement, si A privé de c n'est pas convexe, alors il existe $a,b \in A$, $a,b \neq c$, tel qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $x \notin A \setminus \{c\}$. Remarquons que $a \neq b$. Puisque, A étant convexe, $x \in [a,b] \subseteq A$, on a $x = c$. Posons $\rho = \min(\|x-a\|, \|x-b\|)/2$ et $c_1 = \rho x + (1-\rho)a$, et $c_2 = \rho x + (1-\rho)b$. Puisque $x \neq a,b$, on a $\frac{c_1+c_2}{2} = x = c$ où ni c_1, ni c_2 n'égale c. ■

Exercice 6

Quels sont les points extrémaux d'un triangle ?

▷ **Éléments de réponse.**

Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets (et non sa frontière !).

Voilà un exemple géométrique précisant la conception géométrique du point extrémal :

La notion de point extrémal apparaît dans le théorème de Krein-Milman dont nous donnons une version élémentaire.

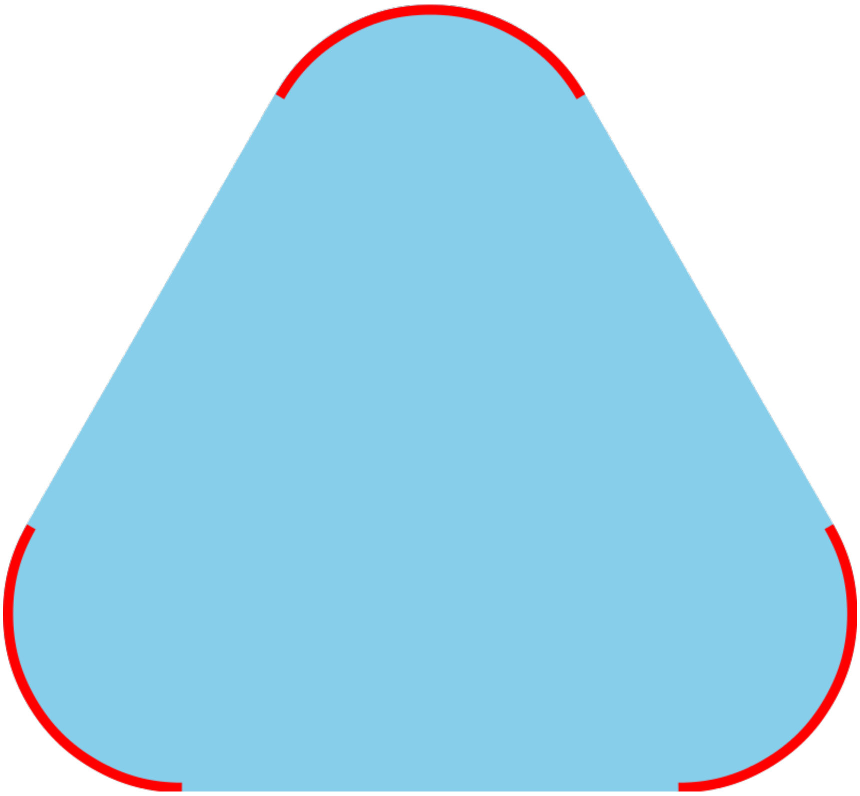


Figure 1.6.1 : *Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière.* — Les points extrémaux sont indiqués en surlignage rouge.

Théorème. ***(Théorème de Krein-Milman)***

Tout convexe compact en dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

▷ On procède par récurrence sur la dimension. En dimension nulle, il n'y a rien à faire : il n'y a que deux convexes, $\emptyset$ et $\{0\}$; c'est trivial dans les deux cas. Soit maintenant C un convexe compact dans un espace vectoriel normé réel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et supposons le théorème vrai pour tout convexe compact inclus dans un sous-espace de dimension $k < n$. Soit $m \in C$. Montrons que m s'exprime comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de A, et cela suffit, car l'enveloppe convexe des points extrémaux de A, est a fortiori incluse dans A, convexe. Soit D une droite quelconque passant par m, par exemple, $\mathbb{R}_-$. L'ensemble $C \cap D$ est alors un convexe inclus dans C. Puisque C et D sont fermés, $C \cap D$ est un compact en tant que fermé dans le compact C. C'est donc un convexe compact d'un espace de dimension 1. Il est donc de la forme $[a,b]$, où $a,b \in A$ et $m \in [a,b]$, naturellement. Or a,b sont sur la frontière du convexe C, car ils sont adhérents au complémentaire de C, autrement, on formerait une boule contenant un point de D dans C et non dans $[a,b]$, absurde. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc des hyperplans d'appuis H_a et H_b en ces points. Introduisons les convexes, par intersections de convexes, $C_a = C \cap H_a$ et $C_b = C \cap H_b$. On remarque alors que tout point extrémal de C_a est encore un point extrémal de C. En effet, étant donné un point extrémal c de C_a et $x,y \in C \setminus \{c\}$. Si l'un au moins des deux points x,y n'est pas dans H_a, vu le caractère séparant de cet hyperplan, tout le segment ouvert $]x,y[$ reste dans un seul demi-espace ouvert délimité par H_a et évite donc c. Si $x,y \in H_a$ maintenant, puisque $C_a \setminus \{c\}$ est convexe, $[x,y]$ évite c. Dans tous les cas,

$[x,y]$ est entièrement dans $C \setminus \{c\}$, d'où l'observation. Elle tient également pour le convexe C_b.

Les convexes C_a, C_b étant inclus dans des hyperplans de dimension $k-1$, on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi a est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de C_a, donc de C ; de même, b est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de C_b donc de C. Puisque m est barycentre à coefficients positifs de a et b, par associativité, le résultat est montré. ■

Exercice 7

Donner un exemple graphique où, dans le théorème précédent, C_a ou C_b ne sont pas réduits à des points.

On retrouve le résultat suivant :

Corollaire. ***(Krein-Milman pour les polygones)***

Tout polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

Chapitre 2

Espaces métriques

Résumé

On donne quelques propriétés propres aux espaces métriques : notion de distance atteinte, propriétés des boules, complétude et théorie de Baire dans le cadre complet.

2.1 Distances

2.1.1 Définition d'une distance

Définition. ***(Majoration d'une distance)***

Soit (E,d) un espace métrique. Alors $(E, \min(1,d))$ est une distance.

▷ Preuve facile. ■

Exercice 1

Ces deux espaces sont-ils homéomorphes ?

Définition. ***(Distance de Manhattan)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On pose pour tous $x,y \in E$:

$$d(x,y) = \|x-y\| \text{ si } x,y \text{ sont colinéaires}, d(x,y) = \|x\| + \|y\| \text{ sinon.}$$

▷ Il suffit de disjoindre les cas. ■

2.1.2 Distance issue d'une norme

Définition. ***(Distance homogène)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ un corps valué. On dit qu'une distance d sur E est homogène si :

$$\forall x,y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y).$$

Propriété. ***(Homogénéité des distances)***

Toute distance sur un espace normé issue d'une norme est homogène.

Exercice 2

La distance de Manhattan associée à la norme euclidienne est-elle issue d'une norme ?

Méthode. ***(Montrer qu'une distance n'est pas issue d'une norme)***

Si une distance sur un espace normé n'est pas homogène en les scalaires, elle ne peut être issue d'une norme.

2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties

2.1.3.1 Définition

On note que la distance à une partie est toujours définie en tant que borne inférieure d'une famille minorée non vide de réels.

2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie

Soit (E,d) un espace métrique. On introduit le problème d'optimisation suivant :

Définition. ***(Distance à une partie atteinte)***

Soit A une partie non vide de E et x un point de E. On dit que la distance de x à A est *atteinte*, ou que x *réalise* la distance de x à A, s'il existe $y \in A$ tel que

$$d(x,y) = d(x,A) = \inf_{z \in A} d(x,z).$$

On remarque que l'hypothèse $y \in A$ est tout le fond de cette définition.

Exercice 3

Soit A une partie non vide d'un espace métrique E et $x \in E$. Existe-t-il toujours $y \in E$ tel que $d(x,A) = d(x,y)$? Que dire dans le cas d'un espace vectoriel normé ?

Notons également que le problème de réalisation de la distance n'a de sens que dans un espace métrique (qui dit distance...)

Si le point considéré appartient à la partie, alors la distance est trivialement atteinte en ce point et la notion n'a aucun intérêt. Sans autre condition supplémentaire, la distance d'un point à une partie n'a aucune raison d'être atteinte. On a même le fait général suivant :

Fait. ***(Distance à un ouvert)***

Dans un espace normé, la distance à un ouvert d'un point n'appartenant pas à cet ouvert, n'est jamais atteinte.

Soit O un ouvert de E et $x \notin O$. Si O est vide, $d(x,O) = +\infty$ ne peut être atteinte par une distance (finie). Sinon, supposons que $d(x,O) = d(x,y)$ pour un certain $y \in O$. Par définition d'un ouvert il existe une boule $B(y,\rho)$, $\rho > 0$, incluse dans O. Alors le point $z = (1 - \frac{\rho/2}{d(x,y)})x + \frac{\rho/2}{d(x,y)}y$ est dans O et sa distance à x est strictement inférieure à $d(x,y)$, absurde.

Intuitivement, il faut des hypothèses de rigidité sur A pour que la distance soit atteinte : typiquement, fermeture, compacité, complétude. La distance à un compact est l'exemple le plus élémentaire de tous.

Propriété. ***(Distance à un compact)***

La distance d'un point à un compact non vide est atteinte.

$\triangleright$ Soit x un point de E et K un compact. Il s'agit de remarquer que l'application $x \longrightarrow d(x,y)$ est continue, ce qui découle de ce qu'elle est 1-lipschitzienne, par la seconde inégalité triangulaire. L'image continue d'un compact étant compacte, donc fermée, l'infimum $\inf\limits_{z \in K} d(x,z)$ est un minimum, c'est-à-dire atteint. (On peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes qui est sensiblement la même chose.) ■

Par contre, la distance à un fermé peut facilement ne pas être atteinte.

Contre-exemple. ***(Distance à un fermé non atteinte : l'hyperbole polynomiale)***

Les propriétés suivantes montrent que, dans un espace vectoriel normé, on doit se placer en dimension infinie pour trouver un tel contre exemple.

Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme infinie, la partie $A = \{(1 + \frac{1}{2^n})X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est fermée : elle est discrète et les points ne peuvent s'accumuler qu'au voisinage de l'infini. La distance au polynôme nul est clairement nulle, mais évidemment jamais atteinte. □

On dispose pourtant du résultat suivant.

Proposition. ***(Distance à un fermé dans un espace métrique sympathique)***

On suppose que toutes les boules fermées de E sont compactes. Soit F un fermé de E et $x \in E$. Alors la distance à E est atteinte.

▷ La preuve est grosso modo la même que dans les espaces vectoriels de dimension finie, qui, par le théorème de Riesz, écopent de la propriété précédente. On laisse le soin au lecteur d'adapter la preuve ci-dessous, faite dans ce cas beaucoup plus pratique, mais foncièrement inchangée. ■

On s'intéresse donc au cas des espaces vectoriels normés, où les choses se déroulent un peu mieux. Soit donc E un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. On note d la distance issue de la norme.

Propriété. ***(Distance à un fermé de dimension finie)***

Soit F un fermé de E inclus dans un sous-espace de dimension finie. Soit $x \in E$. Alors la distance de x à E est atteinte.

▷ Classique. ■

Corollaire. ***(Distance à un sev de dimension finie)***

La distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie, est toujours atteinte.

▷ Puisque tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé dans E. ■

En dimension infinie, rien ne va plus, même si le sous-espace en question est fermé.

Contre-exemple. ***(Distance à un sous-espace vectoriel fermé non atteinte)***

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles de limite nulle muni de la norme infinie. La forme $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x_n$ est clairement linéaire, continue et non nulle ; son noyau est donc un hyperplan fermé de E. Pourtant, pour tout point $x \notin H$, la quantité $d(x,H)$ n'est pas atteinte.

Vérifions-le. Soit x quelconque, hors de H. Remarquons que $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$. En effet, pour tout $h \in H$, $|f(u-h)| \leqslant \|f\|\,|u-h|$ d'où $\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leqslant d(x,H)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur unitaire s tel que $|f(s)| \geqslant \|f\| - \varepsilon > 0$. On a donc, en prenant $h = u - \frac{f(u)}{f(s)}s$, $d(u,H) \leqslant \|u-h\| \leqslant \frac{|f(u)|}{\|f\|-\varepsilon}$.
Par conséquence, si $d(x,H)$ est atteinte, alors f atteint sa norme sur la sphère. En effet, $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|f(u-z)|}{\|f\|}$. Or la norme de f est 2 en considérant les $(1,\ldots,1,0,\ldots)$. Seulement, f atteint sa norme seulement en $(1,\ldots) \notin E$. Par contraposée, $d(x,H)$ n'est pas atteinte. □

On rappelle en parallèle du cours sur les espaces de Hilbert que l'on dispose du théorème très fort suivant dans les espaces préhilbertiens et complets :

Théorème. *(Théorème de projection sur un convexe fermé)*

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte.

En particulier :

Corollaire. *(Distance à un sev fermé dans un Hilbert)*

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un sous-espace de Hilbert est toujours atteinte.

▷ En effet, un sous-espace de Hilbert est complet donc fermé ; de plus, un sous-espace vectoriel est convexe. ■

On voit d'abord que l'hypothèse de complétude était nécessaire. L'existence d'un produit scalaire est cruciale, de même que la convexité. Les trois contre-exemples suivants permettent de trancher dans les cas qui restent.

Contre-exemple. *(Si l'on n'est plus dans un complet)*

On considère l'espace pourtant préhilbertien $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme 2. Alors le noyau $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^{\frac{1}{2}} f = 0\}$ de la forme linéaire $f \longmapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f$ est un convexe fermé, car f est continue et un espace vectoriel est convexe. La distance de 1 à F n'est pourtant pas atteinte.

Exercice : s'inspirer du contre-exemple précédent.

On a en fait le fait général suivant : la distance au noyau d'une forme linéaire continue d'un point ne lui appartenant pas est atteinte si et seulement si la norme de cette forme est atteinte. Nous démontrons ce résultat dans la partie sur les espaces vectoriels normés déjà vu si tout est normal. □

Contre-exemple. *(Si l'on n'est plus dans un Hilbert)*

On reprend l'exemple développé des suites qui tendent vers zéro et du noyau de la forme linéaire qui à $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$.

Puisque c'est un Banach. □

Contre-exemple. *(Distance à un fermé dans un Hilbert)*

On cherche donc une partie non convexe.

On a en fait en toute généralité : soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie (tout Hilbert de dimension infinie convient alors). Alors la distance de l'origine à la sphère unité de E n'est pas atteinte. D'après le théorème de Riesz, la sphère unité de E n'est pas compacte, donc il existe une suite $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. Posons $x'_n = (1 + \frac{1}{n+1})x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cette partie est un fermé de E (clairement non convexe,

d'ailleurs). En effet, si u est une suite convergente à valeurs dans A, soit elle admet un nombre fini de termes, auquel cas elle est stationnaire donc de limite dans A, soit elle admet un nombre infini de termes, auquel cas on peut en extraire une sous-suite qui est également une sous-suite de (x'_n). Cependant, celle-ci tend vers l'infini, donc la sous-suite également, donc ne converge pas, ce qui est exclu.
De plus, et de façon immédiate, on observe que $d(0,A) = 0$ en observant $d(0,x'_n)$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini, mais que $d(0,x'_n) = 1 + \frac{1}{n+1} \neq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc la distance de 0 à A n'est pas atteinte. □

Grâce au contre-exemple général précédent, on peut énoncer sans autre justification la caractérisation suivante.

Propriété. ***(Caractérisation de la dimension par les distances à fermés)***

Un espace vectoriel normé est de dimension finie, si et seulement si, la distance de tout point à tout fermé est atteinte.

2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances

On se demande maintenant quelles conditions supplémentaires ajouter pour que, lorsque la distance d'un point à une partie est atteinte par un point dans cette partie, ce point d'atteinte soit unique.

Il n'y a aucune raison que ce soit le cas, en particulier on peut avoir une infinité de points en lequel la réalisation de la distance a lieu, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. ***(Distance atteinte une infinité de fois)***

Dans $\mathbb{R}^2$ le plan muni de la distance euclidienne, on considère la sphère unité $A = S(0,1)$ et l'origine $x = (0,0)$. Alors $d(A,x)$ est atteinte en un infinité de points.

Pour tout $y \in A$, $d(x,y) = 1$ par définition. Ainsi en passant à l'infimum, $d(x,A) = 1$. Or A est une partie infinie de $\mathbb{R}$ (par exemple, elle contient $\mathbb{U}_p$ pour tout nombre premier p). On a le résultat.

Notons que A et donc l'ensemble des points de réalisation de la distance est même indénombrable.

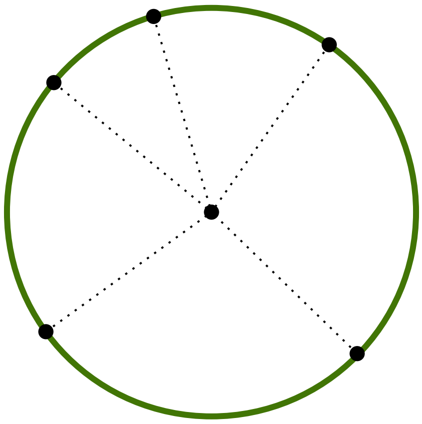


FIGURE 2.1.1 : *Distance de l'origine à la sphère unité.* —
La distance de la sphère à son centre est atteint en une infinité de points.

De façon plutôt intuitive, le problème vient de ce que la partie A, globalement éloignée du point x, peut « s'approcher de x » plusieurs fois. Un exemple très simple est donné par la figure 2.1.2.

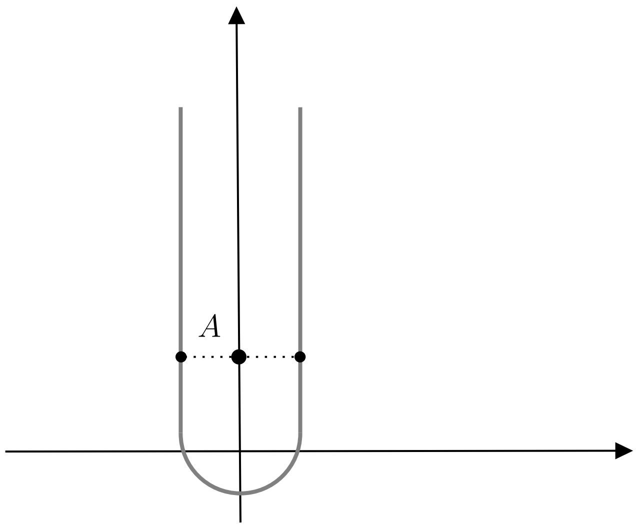


FIGURE 2.1.2 : *Distance de la fourche à un point de la bissectrice.* —
Sur la figure ci-dessus, quitte à prendre le point A suffisamment éloigné du cul de la courbe en U, si tant est qu'il soit sur une droite équidistante à ses deux asymptotes, sa distance à la courbe est atteinte en deux points distincts opposés par symétrie de la figure.

On comprend que si la figure est convexe, une telle disposition ne peut se concevoir. On a le résultat suivant :

Propriété. ***(Distance à un convexe dans un espace préhilbertien)***

On se place dans un espace **préhilbertien**. Si la distance d'un point à une partie convexe est atteinte, alors ce point est unique.

▷ Soient C un convexe d'un espace vectoriel normé E et $x \in E$. Supposons que la distance de x à C soient atteintes en deux points $y,y' \in C$, c'est-à-dire $d(x,C) = d(x,y) = d(x,y')$. Soit $z = \frac{y+y'}{2}$ le milieu de $[y,y']$. Alors $z \in C$ par convexité. Montrons que $d(x,z) \leqslant d(x,y) = d(x,C)$. On a : $2d(x,z) = 2\|x-z\| = \|2x-y-y'\| \leqslant \|x-y\| + \|x-y'\| = d(x,y) + d(x,y') = 2d(x,y')$ d'où le résultat. Si $y \neq y'$, on a même l'inégalité stricte, car le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire s'exprime, pour une norme issue d'un produit scalaire, $x-y = \lambda(x-y')$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Puisque $x-y$ et $x-y'$ on la même norme, on obtient, si $d(x,z) = d(x,y)$, $\lambda = \pm 1$ d'où $\lambda = 1$. De plus, par le cas d'égalité, $(1-\lambda)x = y - \lambda y'$ en ramenant tout du bon côté, d'où $y = y'$. Mais $d(x,z) < d(x,y)$ est exclu par définition de la distance à une partie. Par contraposée, $y = y'$. ■

Remarquons que la distance à un convexe n'est pas forcément atteinte : il suffit de considérer une boule ouverte et un point hors de cette boule.

Exercice 4

Fournir un contre-exemple dans le cas d'un convexe d'un espace non préhilbertien.

▷ **Éléments de réponse.**

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance associée à la norme $\|(x,y)\| = \max(|x|,|y|)$, on choisit le point $M = (1,0)$ et la partie $D = \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$. Alors pour tout $N = (0,y) \in D$, $MN = \|(1,-y)\| = \max(1,|y|)$. L'infimum de cet ensemble sur $y \in \mathbb{R}$ est 1, qui est atteint pour tout $N \in \{0\} \times [-1,1]$, soit une infinité de points.

Les deux énoncés suivant permettent également de garantir l'unicité du projeté.

Théorème. ***(Théorème de projection sur un convexe fermé)***

En fait, dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte *en un unique point.*

Au vu des considérations précédentes, on peut aussi énoncer sans problème le fait suivant, déjà connu des élèves familiers du cours d'optimisation :

Propriété. ***(Projection sur un compact convexe)***

Soit n un entier naturel quelconque. Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et x un point. La distance de x à K est atteinte en un unique point.

▷ La compacité assure l'existence, la convexité l'unicité. ■

2.1.4 Équivalence de distances

Définition. ***(Lipschitz-équivalence des distances)***

Deux distances sur E sont dites *Lipschitz-équivalentes*, s'il existe des constantes c et c' telles que $cd_1 \leqslant d_2 \leqslant c'd_1$.

Observation. ***(Caractérisation de la Lipschitz-équivalence par l'identité)***

Deux distances d_1, d_2 sur E sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si l'identité de E est un $(d_1{,}d_2)$-homéomorphisme.

Définition. ***(Lipschitz-équivalence des distances)***

Deux distances sur E sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent les mêmes ouverts.

On peut montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, si et seulement si toute boule de l'une et incluse dans une boule de l'autre de même centre, et réciproquement. On a également une caractérisation séquentielle : deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente au sens de l'une converge au sens de l'autre. Par ailleurs, le cas échéant, les limites coïncident.

Propriété. ***(Lipschitz-équivalence implique équivalence topologique)***

Deux normes Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

▷ Le vérifier. ■

Contrairement à ce qui se passe pour les normes, la réciproque est fausse en général pour des distances non issues de normes.

Contre-exemple. ***(Distances topologiquement équivalentes non-Lipschitz-équivalentes)***

Prenons $h :]0{,}1[\longrightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme quelconque. Prenons la distance d_1 associée à la valeur absolue sur $]0{,}1[$ et l'on définit : $d_2(x{,}y) = |h(x) - h(y)|$. Dans ce cas, d_1 et d_2 sont des distances sur $]0{,}1[$ qui définissent la même topologie, mais ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

En effet, l'une est bornée mais l'autre non. □

2.2 Boules

2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées

Exercice 5 *(Extrêmement formateur)*

Donner une exemple de boule fermée qui soit ouverte mais ne soit pas une boule ouverte. On pourra se placer sur un sous-espace métrique du plan muni de la norme euclidienne.

▷ **Éléments de réponse.**

On prend comme indiqué $E = [-1,-1] \times \{0\} \cup \{0\} \times]1,2]$ et la boule $B = B_f(0,1)$.

2.2.2 Premières propriétés

2.2.3 Propriétés géométriques

Propriété. ***(Inclusions réciproques des boules)***

Soit un espace métrique E et $a \in E$, $r < r'$ deux réels. Alors

$$B_0(a,r) \subseteq \overline{B_0(a,r)} \subseteq B_F(a,r) \subseteq B_0(a,r') \subseteq \overline{B_0(a,r')} \subseteq B_F(a,r').$$

Propriété. ***(Propriété fondamentale des sous-boules)***

Soit un espace métrique E. Soient a,b deux points de E et $r > 0$. On suppose que $b \in B(a,r)$. Alors $B(b, r - d(a,b)) \subseteq B(a,r)$. De plus, si $\rho = \frac{d(a,b)}{2}$, alors

$$B(b, r - \rho) \subsetneq B(a,r).$$

Propriété. ***(Intercalaison de sous-boules)***

Soit un espace métrique E. Soient $a,b \in X$ et $r,s > 0$. Soit $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$. Soit $\rho = \min\left(r - d(a,x), s - d(b,s)\right)$. Alors $\rho > 0$ et $B(x,\rho) \subseteq B(a,r) \cap B(b,s)$.

Propriété. ***(Homéomorphie des boules dans un evn)***

Dans un espace vectoriel métrique, les boules ouvertes forment une base de la topologie canonique.

Propriété. ***(Déplacement de boules)***

Soit un espace **vectoriel** E. Soient $a \in E$ et $r > 0$. Alors $z \in B(0,1) \iff rz + a \in B(a,r)$.

Corollaire. ***(Homéomorphie des boules dans un evn)***

Dans un espace vectoriel normé, toutes les boules sont homéomorphes.

2.3 Limites

2.3.1 Limites de suites

On dispose du résultat suivant, dont on s'étonne seulement qu'il ne soit pas plus généralement enseigné.

Propriété. ***(Invariance de la limite par permutation)***

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que u tende vers $l \in E$. Alors pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente de limite l.

▷ Reprenons les notations du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tout $n \geqslant N$, $u_{\varphi(n)} \in B(l,\varepsilon)$. Or par hypothèse, il existe N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \in B(l,\varepsilon)$. Comme φ est injective, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geqslant N_0$ dès que $n \geqslant N_1$. En effet, supposons le contraire. Cela signifierait que pour tout entier naturel N_1, on peut trouver un entier $n \geqslant N_1$ tel que $\varphi(n) < N_0$. Autrement dit, on peut construire un sous-ensemble infini X de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(X) \subseteq \{1,2,\ldots,N_0-1\}$. Mais l'image d'un ensemble infini par une application injective est infini, contradiction. Par conséquent, pour $n \geqslant N_1$, $u_{\varphi(n)} \in B(l,\varepsilon)$. ■

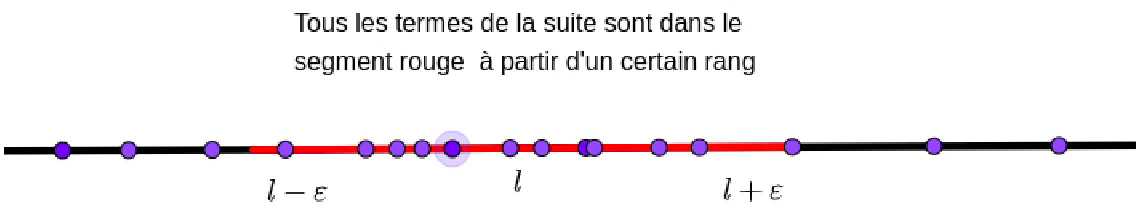


FIGURE 2.3.1 : *Invariance de la limite par permutation.* —
Par définition de la limite, tous les termes de la suite sont dans une boule centrée en la limite (ici, dans le cas de la droite réelle) à partir d'un certain rang. Ainsi, seulement un nombre fini de termes permutés seront hors de la boule également.

Remarque. En observant la preuve, on se rend compte que l'on a montré le résultat pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective. On retrouve en particulier le résultat sur les limites des suites extraites, puisque toute extractrice est strictement croissante, donc injective.

> On se rend compte, en fait, que l'hypothèse d'injectivité est équivalente à ce que la nouvelle suite construite comporte une infinité des termes de la suite d'origine. Le théorème précédent énonce précisément que cette condition suffit à ce que la propriété asymptotique de limite soit inchangée.

Ceci se généralise, dans le cas où $E = \mathbb{R}$, à des limites infinies.

Exercice 6

Montrer que, si une suite (u_n) diverge, alors pour toute permutation φ de $\mathbb{N}$, $(u_{\varphi(n)})$ diverge.

▷ **Éléments de réponse.**

Se ramener au théorème précédent.

2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence

Propriété. ***(Caractérisation de la limite par les sous-sous-suites)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'espace métrique (E,d). On suppose que de toute sous-suite de u, on peut extraire une sous-sous-suite qui converge. Alors (u_n) converge.

▷ Supposons que u ne converge pas. Alors pour tout $l \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{n_k},l) > \varepsilon$. En appliquant de façon itérée ceci à n_k, on extrait une sous-suite de u vérifiant $d(u_{n_k},l) > \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 0$. Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente de (u_{n_k}), notée $(u_{n_{k_l}})$, convergeant vers m. Absurde, car ■

Remarque. Il est clair qu'il ne suffit pas de pouvoir extraire une sous-suite convergente de u, pour qu'elle soit convergente : considérer $((-1)^n)$ bornée et la suite des termes pairs.

2.3.1.1.1 Théorèmes de convergence grossière des suites

Dans cette section, on énonce trois théorèmes qui ne le sont jamais proprement dans n'importe quel cours élémentaire de mathématiques, mais qui le devraient être, tant ils ont la nécessité d'exister par leur évidence, et qu'ils facilitent l'emploi de la notion de sous-suite dans des cas particuliers. En particulier, il est important de retenir ces résultats et l'aisance à les établir lorsqu'on travaillera en topologie générale dans un espace métrique.

Les théorèmes sont de trois natures. Ils portent sur :

1. les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ;
2. les suites passant une infinité de fois sur la même valeur ;
3. les suites à valeurs dans l'image d'une suite.

Dans les trois cas, et de façon principale pour les deux premiers, on s'intéresse aux suites convergentes vérifiant l'une de ces conditions.

On dispose donc des propositions suivantes, qui, quoique largement ignorée, permet de manipuler avec des outils topologiques les ensembles de la forme $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Les choses ne sont pas si simples, mais avec un peu de travail, on s'y ramène dans trop de peine.

On se servira du lemme suivant, qui découle des propriétés sur les ensembles discrets d'un espace métrique. On peut néanmoins le montrer par des moyens élémentaires.

Lemme. ***(Suites convergentes à support fini)***

Une suite convergente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est stationnaire.

▷ Soit u une suite d'un espace métrique E. On suppose que u converge et ne prend qu'un nombre fini n de valeurs. Montrons le résultat par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour un certain n. Soient $(a_1,...,a_{n+1})$ les valeurs prises par la suite. Si u ne prend qu'un nombre fini de fois la valeurs a_{n+1}, alors à partir d'un certain rang, elle ne prend plus que n valeurs : par hypothèse de récurrence, elle est donc stationnaire. Sinon, elle prend une infinité de fois la valeur a_{n+1}. On construit une sous-suite de u qui ne prend que la valeur a_{n+1} : on pose $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k = a_{n+1}\}$ et $\varphi(0),...,\varphi(p)$ étant construits, on pose $\varphi(p+1) = \min\{k \in [\![\varphi(p)+1, +\infty[\![, u_k = a_{n+1}\}$ qui existe, car si la partie considérée était finie, u prendrait au plus $\varphi(p)+2$ fois la valeur a_{n+1}. On a donc une sous-suite qui converge trivialement vers a_{n+1}, donc la limite de u, supposée convergente, est a_{n+1}. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons que u prenne une infinité de fois la valeur a_i. Alors de même que précédemment, on construit une sous-suite constante égale à $a_i \neq a_{n+1}$, ce qui est absurde, car une suite convergente n'a qu'une limite. Ainsi, à partir du rang $N_i < +\infty$, u ne prend plus la valeur a_i. Par conséquent, à partir du rang $\max i \in [\![1,n]\!] N_i < +\infty$, u ne prend plus que la valeur a_{n+1}, elle est donc stationnaire à a_{n+1}. ■

On peut donner une preuve plus topologique de ce résultat, qui montre bien qu'elle fonctionne grâce à l'axiome de séparation :

▷ Notons l la limite de la suite u qui ne prend que les valeurs deux à deux distinctes $x_1,...,x_n \in E$. On peut noter $A = \{x_1,...,x_n\}$ et $D = Diam(A)$. Notons $\rho = \frac{1}{2}\min_{i\neq j} d(x_i,x_j) = \frac{D}{2}$. Alors à partir d'un certain rang N, tous les termes de u sont dans $B(l,\rho)$ qui ne peut par définition contenir deux termes distincts de A. S'il n'en contient aucun, c'est contradiction, car $u_N \in B(l,\rho)$ et $u_N \in A$. C'est terminé. ■

Au regard de la première preuve du résultat précédent, on peut même énoncer le lemme précédent, qui a été démontré :

Lemme. ***(Suites convergentes repassant au même endroit à l'infini)***

Une suite convergente qui prend une infinité de fois la valeur l converge vers l.

On peut surtout dire :

Propriété. ***(Suite à valeurs dans l'image d'une suite)***

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On note $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Alors (a_n) est à support fini ou il existe une suite extraite de (a_n) qui est une sous-suite de (u_n).

$\triangleright$ Si (a_n) n'est pas à support fini, alors elle prend une infinité de termes d'indices distincts dans $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. De manière générale, par définition, il existe donc une correspondance quelconque (par forcément croissante) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_{f(n)}$. Par hypothèse, l'image de f est infinie. Construisons une sous-suite de $(a_{\varphi(n)})$ de (a_n) qui soit une sous-suite de (u_n). Posons $\varphi(0) = 0$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a_{\varphi(0)}$,...,$a_{\varphi(n)}$ étant construits, on pose $\varphi(n+1) = \min\{k \in [\![\varphi(n)+1, +\infty[\![, \ a_k \neq a_{\varphi(0)}, ..., a_k \neq a_{\varphi(n)}$ et $f(k) > f \circ \varphi(n)\}$. Ce minimum existe, car par hypothèse, $(a_k)_k$ n'est pas à support fini, donc n'est pas à support fini à partir du rang $\varphi(n)+1$, et si la partie considérée était vide, soit tous les termes à partir de ce rang seraient égaux à l'un de $a_{\varphi(i)}$, ce qui exclu, car ceux-ci sont en nombre fini, soit on aurait $f(k) \leqslant f \circ \varphi(n)$ fixe, ce qui est absurde, car on a vu que f ne peut envoyer le complémentaire d'une partie finie sur une partie finie, autrement son image serait finie. L'extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est bien strictement croissante par construction, donc $(a_{\varphi(n)})$ est bien une sous-suite de a. De plus, on a imposé $f \circ \varphi(n+1) > f \circ \varphi(n)$, ce qui implique que $f \circ \varphi$ est également une extractrice. Or pour tout entier naturel n, $a_{\varphi(n)} = u_{f\circ\varphi(n)}$, donc $(a_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de u. ■

On en déduit ce qui suit :

Conséquence. ***(Suites convergentes à valeurs dans l'image d'une suite)***

Soit E une espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On note $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de A. Alors (a_n) est stationnaire ou tend vers une valeur d'adhérence de u.

$\triangleright$ Supposons (a_n) convergente. On note l sa limite. Si (a_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est stationnaire. Sinon, d'après la proposition précédente, elle admet une sous-suite qui est une sous-suite de u, qui converge également vers l, car toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite. Ainsi, u admet une sous-suite convergeant vers l, soit l est une valeur d'adhérence de u. ■

2.4 Compacité

2.4.1 Suites à valeurs dans un compact

On dispose de la proposition suivante, souvent oubliée, mais qui peut se révéler très utile.

Propriété. ***(Suite compacte n'ayant qu'une valeur d'adhérence)***

Soit K un partie compacte de l'espace métrique E. Si (u_n) est une suite d'éléments de K n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.

▷ Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit l l'unique valeur d'adhérence de u. Par définition de la limite, on peut écrire $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant N \quad d(u_n,l) > \varepsilon$. On construit donc aisément une extractrice et une sous-suite de u qui ne peut avoir u comme valeur d'adhérence, puisqu'elle reste hors de $B(l,\varepsilon)$. Cependant, cette sous-suite v a valeurs dans un compact donc admet une sous-suite w qui a une unique valeur d'adhérence. Celle-ci vaut forcément l, var w est aussi une sous-suite de u. Contradiction. ■

Conjointe à la propriété sur les valeurs d'adhérence d'une sous-suite, on obtient le théorème de caractérisation suivante dans les compacts :

Théorème. ***(Caractérisation de la convergence dans les compacts)***

Soit u une suite à valeurs dans un compact. Alors u converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

▷ Le sens réciproque vient d'être traité. Pour le sens direct, on savait déjà qu'une suite convergente (à valeurs dans un ensemble quelconque) admet une unique valeur d'adhérence. ■

Théorème. ***(Caractérisation des Banach par Banach)***

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

▷ Seul le sens direct nous intéresse véritablement. Soit E un espace de Banach. Soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $\sum |x_n|$ converge. Alors les sommes $S_N = \sum\limits_{n \leqslant N}^{x_n}$ vérifient pour tout $M \geqslant N$:

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| \,.$$

Or, la série $\sum \|x_n\|$ étant convergente, les tranches de Cauchy du dernier membre tendent vers zéro lorsque M,N tendent vers $+\infty$. Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge, c'est-à-dire que la série est convergente.

On donne la réciproque par souci d'exhaustivité. Supposons que toute série absolument convergente converge dans E. Soit (x_n) une suite de Cauchy à valeurs dans E. On peut extraire une sous-suite

$(x_{\varphi(n)})$ telle que $\left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \frac{1}{2}^n$, en choisissant $\varphi(n) = N$ le module associé à $\varepsilon = \frac{1}{2}^n$. On pose alors $u_n = x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$ et la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Or $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(0)} = \sum_{k=0}^{n} u_k$, donc on déduit que la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge. Comme toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge, on en déduit la convergence de (x_n), et E est un espace de Banach. ■

2.5 Complétude

2.5.1 Suites de Cauchy

Propriété. ***(Condition suffisante de non-Cauchitude)***

Si pour tous $i,j \in \mathbb{N}$ $i \neq j$, $d(x_i,x_j) > \varepsilon > 0$, alors non seulement (x_n) n'est pas de Cauchy mais n'admet aucune sous-suite convergente.

2.5.2 Espaces complets

Exemples. ***(Espaces complets)***

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance dérivée de la valeur absolue est complet.
2. $]0,1]$ n'est pas complet.
3. $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est complet pour la norme infinie.
4. $\mathcal{C}_b^0((X_1,d_1),(X_2,d_2))$ est complet pour $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X_1} d_2(f(x),g(x))$ si (X_2,d_2) est complet.
5. Un ensemble borné en dimension finie est complet si et seulement s'il est compact.

Contre-exemple. ***(Un espace non complet)*** ⚡

On considère $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1,\infty[$. Prenons pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [\frac{1}{2},1] \\ n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \text{ si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Alors $f_n \to f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$ et par convergence dominée, $\|f_n - f\|_p \to 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{m,q>n} \|f_q - f_m\|_p = 0$.
La suite (f_n) et donc de Cauchy. Pourtant, elle ne converge pas dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, puisque la limite n'est pas continue et unique dans L^p. □

Remarque. On verra que ceci montre que cet espace n'est pas fermé dans L^p.

On voit là la difficulté de traiter avec l'espace des fonctions continues sur un compact. Cet espace peut être muni de beaucoup de normes, en particulier, toutes les normes p, et se plonge ainsi dans tous les espaces L^p (qui, eux, par définition, ne peuvent être muni que de la norme L^p, ou de normes inférieures...).

Propriété. ***(Sous-espace complet d'un espace quelconque)***

Tout sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

$\triangleright$ Soit F un sous-espace métrique complet d'un espace métrique E quelconque. Soit u une suite à valeurs dans F convergeant dans E vers l. Toute suite convergente est de Cauchy, dans n'importe quel espace, donc u est une suite de Cauchy de E à valeurs dans F. C'est extrinsèque : u est donc une suite de Cauchy de F. Puisque F est complet, u converge donc dans F vers l'. Par unicité de la limite, $l = l' \in F$, donc F est fermé. $\blacksquare$

Propriété. ***(Compact $\implies$ complet)***

Tout espace métrique compact est complet.

Plus généralement, toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

2.5.3 Théorie de Baire dans le cas complet

Pour s'échauffer, on énonce la propriété suivante :

Propriété. ***(Intersection finie d'ouverts denses)***

Dans un espace topologique quelconque, toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

$\triangleright$ Soit O_1,...,O_n, $n \in \mathbb{N}$, des ouverts denses de l'espace E. Soit Ω un ouvert quelconque. On veut montrer $(O_1 \cap ... \cap O_n) \cap \Omega \neq \emptyset$. On pourrait écrire :

$$(O_1 \cap ... \cap O_n) \cap \Omega = (O_1 \cap \Omega)...(O_n \cap \Omega),$$

et chaque $O_i \cap \Omega$ est non vide, mais cela ne suffit pas pour conclure. Par contre, on peut raisonner par récurrence : $O_1 \cap \Omega$ est non vide, et $O_{i+1} \cap [(O_i \cap ... \cap O_1) \cap \Omega]$ est non vide, car O_{i+1} est dense et $(O_i \cap ... \cap O_1) \cap \Omega$ est un ouvert non vide, par intersection finie d'ouverts et car $O_i \cap ... \cap O_1$ est dense dans E par hypothèse. $\blacksquare$

On se rappellera de ce butoir dans la preuve qui justifie que la preuve du théorème de Baire utilise le théorème des fermés emboîtés : *on a besoin d'une densité* jointe *et non d'une densité ouvert par ouvert* qui donne éventuellement des ouverts disjoints, donc d'intersection vide.

Puisque la propriété duale de la densité et le fait d'être d'intérieur vide, on peut l'énoncer également de la manière suivante :

Propriété. ***(Réunion finie de fermés d'intérieur vide)***

Dans un espace topologique quelconque, toute réunion finie de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Plus généralement, la théorie de Baire se demande ce qui se passe dans le cas d'une intersection finie.

Définition. ***(Espace de Baire)***

On dit qu'un espace topologique E est un *espace de Baire* s'il vérifie la *propriété de Baire* énoncée comme suit : toute intersection d'ouverts dense est dense.

On énonce un lemme célèbre et utile pour la preuve du théorème de Baire, qui donne que les espaces métriques complets, **en particulier les espaces de Banach**, sont tous des espaces de Baire.

Théorème. ***(Théorème des fermés emboîtés)***

Dans tout espace métrique complet, toute intersection décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers zéro est réduite à un singleton.

$\triangleright$ Soit (E,d) un espace métrique complet, et (F_n) une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que $\lim_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$ où $\delta(F_n)=\sup_{(x,y\in F_n^2}d(x,y)$. Montrons qu'il existe $x\in E$ tel que $\{x\}=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, F_n est non vide donc il contient un élément x_n d'après l'axiome du choix dénombrable. Soit $\varepsilon>0$. Les diamètres tendant vers zéro, on peut choisir $N\in\mathbb{N}$ tel que $\delta(F_N)<\varepsilon$, et alors pour tous $p,q>N$, $d(x_p,x_q)<\varepsilon$, car par décroissance de (F_n), $x_p,x_q\in F_N$. La suite des (x_n) est donc une suite de Cauchy. E étant complet, elle converge vers un élément x de E. Or pour tout $p\in\mathbb{N}$, F_p est fermé et $x_n\in F_p$ pour tout $n\geqslant\mathbb{N}$, donc x appartient à F_p. On en déduit que $x\in\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}}F_p$. Ainsi $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est non vide. Supposons enfin que $x,y\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x,y\in F_n$ donc $0\leqslant d(x,y)\leqslant\delta(F_n)$. En passant à la limite, $d(x,y)=0$ d'où par séparation $x=y$. On en déduit que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$ est le singleton $\{x\}$. ■

Remarque importante. On montre en fait un résultat plus fort. Sous les hypothèses du lemme, toute suite $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ *adaptée* à l'emboîtement des fermés, c'est-à-dire telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n\in F_n$, est convergente, de limite x telle que $\{x\}=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}F_n$.

Théorème. ***(Théorème de Baire)***

Dans tout espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense. Autrement dit, tout espace métrique complet est de Baire.

▷ Soit (E,d) un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E, c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide V de E, $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$. Soit donc V un ouvert de E. On construit par récurrence une suite (B_n) de boules fermées de E telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de rayon non nul inférieur à $\frac{1}{2}^n$, et d'autre part, $B_0 \subseteq O_0 \cap V$ et $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$. On notera que ces boules sont emboîtées.

L'ouvert O_0 est dense dans E donc $O_0 \cap V \neq \emptyset$. Or cet ensemble est ouvert par intersection de deux ouverts, donc il existe une boule ouverte $B(x_0, r) \subseteq O_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermé de centre x_0 et de rayon $r/2$ (ou 1 si $r/2 > 1$), on a donc $B_0 \subseteq O_0 \cap V$. Supposons les boules $B_0, ..., B_n$ construites et vérifiant les propriétés voulues. L'ouvert O_{n+1} étant dense dans E, $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $B(x,r)$ incluse dans $O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$, et si l'on prend pour B_{n+1} la boule fermé de centre x et de rayon $\min(r/2, \frac{1}{2}^{n+1})$, on a $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \mathring{B}_n$, et B_{n+1} vérifiant bien les propriétés voulues.

Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers 0. De plus, E est complet, donc d'après le théorème des fermés emboîtés, il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{x\}$. Comme $B_0 \subseteq V$, on a en particulier $x \in V$. D'autre part, par construction, $B_n \subseteq O_n$ pour tout n, donc $x \in O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ donc $x \in V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, ce qu'il fallait montrer. ■

Contre-exemple. ***(Théorème de Baire infirmé dans un pasbanach)***

En général, le théorème de Baire a besoin de la complétude.

On prend $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\Omega_n = \complement_E \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\mathbb{R}_[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, c'est un fermé d'intérieur vide, donc Ω_n est un ouvert dense de E. De plus, $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$ donc $\emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$. Ainsi $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n} = \emptyset \neq E$!

On voit en particulier que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace de Banach. □

Contre-exemple. ***(Théorème de Baire)***

Soit $E = [0,1]$ compact donc complet. Soit $O_x = [0,1] \setminus \{x\}$, ouvert dense de E. Alors $\bigcap_{x\in E} O_x = \emptyset$ est une intersection (indénombrable) d'ouverts dense, non dense. □

Exercice 7 *(Éclaircissements)*

1. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ grâce au théorème de Baire.

   INDICATION Utiliser la dénombrabilité que $\mathbb{Q}$.

2. En déduire qu'il n'y a aucune raison pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts dense soit dense.

Remarque importante. Tout espace homéomorphe à un espace métrique complet (on dit *complètement métrisable*) vérifie la propriété de Baire, sans qu'il doive être forcément complet.

Reformulation pratique. ***(Propriété de Baire pour les fermés d'intérieur vide)***

Toute réunion de fermés recouvrant un espace métrique complet non vide, contient au moins un fermé d'intérieur non vide.

▷ Il suffit de passer au complémentaire dans le théorème de Baire. ■

Définition. ***(Espace complètement de Baire)***

On dit qu'un espace topologique E est un *espace complètement de Baire* si tout sous-espace fermé de E est de Baire.

Propriété. ***(Complète Bairitude des espaces complètement métrisables)***

Tout espace complètement métrisable est complètement de Baire.

▷ Soit E un espace complètement métrisable en d. Soit F un sous-espace fermé de E. Alors, muni de la distance induite, c'est un sous-espace fermé de (E,d) qui est complet. Donc F est un espace métrique complet. Il vérifie donc la propriété de Baire d'après le théorème précédent. ■

Chapitre 3

Topologie générale

Résumé

La topologie permet de formaliser la notion de *proximité*, et donc, celle de convergence et de continuité. En analyse, on s'intéresse à une topologie extrêmement souple, dite *topologie métrique*, où l'on mesure numériquement la distance entre deux points. En topologie générale, on ne connaît pas forcément la distance entre tous les points de l'espace, mais on est capable de dire, avec une certaine précision (dépendant de la donnée d'une *topologie*), s'ils sont proches.

3.1 Définitions de base d'une topologie

Définitions

1. Un espace est dit *nul* ou *vide* s'il est vide. Il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.
2. Un espace est dit *trivial* s'il est vide ou réduit à un singleton. Dans le cas où il n'est pas vide, il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.

3.1.1 Ouverts et fermés

Cette définition est *minimale*, comme souvent en mathématiques. On verra d'autres définitions qui ne le sont plus, mais seront forcément plus intuitives.

Remarque. Le complémentaire induit une bijection involutive des ouverts d'un espace topologique sur l'ensemble de ses fermés.

A prori, il existe des parties de X qui ne sont ni ouvertes, ni fermées !

Exemples. ***(Topologies)***

1. *(Topologie grossière, topologie triviale)* Sur tout ensemble X on peut définir la topologie grossière $\{\emptyset, X\}$.
2. *(Topologie discrète, topologie maximale)* Sur tout ensemble X on peut définir la topologie discrète $\mathcal{P}(X)$.

Ainsi, curieusement, les ouverts et les fermés en topologie générale ne passent pas à la limite ensembliste !

Exercice 1

Que dire d'une topologie dont les axiomes permettraient la stabilité par intersection quelconque d'ouverts ?

▷ **Éléments de réponse.**

On aurait alors la stabilité par réunion quelconque de fermés... Dans le cas où les singletons sont fermés, cela donne une topologie nécessairement grossière. Mais ce n'est pas forcément le cas (exemple ?). Avec les lois de Morgan, on parvient à la même conclusion avec un peu plus de travail sur les ensembles.

Remarquons que les intersections croissantes et les réunions décroissantes sont tout à fait dépourvues d'intérêt (pourquoi ?).

Exercice 2

1. Donner un exemple d'une intersection décroissante d'ouverts qui n'est pas ouverte.
2. Donner un exemple d'une réunion croissante de fermés qui n'est pas fermée.

Propriété. ***(Somme d'ouverts)***

Dans un evn, la somme de deux ouverts est ouverte.

▷ Soient A,B deux ouverts. Alors $A + B = \bigcup_{a \in A} \tau_a(B)$ où la translation τ_b est un homéomorphisme. ■

3.1.2 Voisinages

Mnémonik : les ouverts sont exactement les ensembles qui sont voisinage d'eux-mêmes.

3.1.3 Comparaison de topologies

3.1.3.1 Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble

Définition. ***(Finesse, grossièreté)***

Soient E un ensemble et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur E, définies au moyen des ouverts.

- Si $\mathcal{T}_1 \subseteq T_2$, on dit que T_1 est *moins fine* ou *plus grossière* que T_2.
- Si $\mathcal{T}_2 \subseteq T_1$, on dit que T_1 est *plus fine* ou *moins grossière* que T_2.

Heuristique

On a vu qu'une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient beaucoup d'ouverts (ou beaucoup de fermés). Intuitivement, on peut penser les ouverts comme des patrons dont on connaît la grandeur et que l'on peut calculer sur l'espace, voir si des points leurs appartiennent, pour approximer la distance entre eux. Une topologie est plus fine qu'une autre si elle contient plus d'ouverts, autrement dit si le patronnage est plus détaillé.

Propriété. ***(Caractérisation de la finesse par la continuité)***

Soit X un ensemble et $\mathcal{O}_1$,$\mathcal{O}_2$ deux topologies sur X. Alors $\mathcal{O}_1$ est plus fine que $\mathcal{O}_2$ si et seulement si $id : (X, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ est continue.

3.1.3.2 Topologies minimales et maximales

Définition. ***(Minimalité d'une topologie)***

Soit X un ensemble et P un prédicat sur $\mathcal{P}(X)$. Alors la topologie minimale sur X vérifiant P, si elle existe, est la topologie la moins fine sur X vérifiant P.

Remarque. Si $P = \top$, la topologie $\top$-minimale sur X est la topologie grossière.

Dualement :

Définition. ***(Maximalité d'une topologie)***

Soit X un ensemble et P un prédicat sur $\mathcal{P}(X)$. Alors la topologie maximale sur X vérifiant P, si elle existe, est la topologie la plus fine sur X vérifiant P.

Remarque. Si $P =\perp$, la topologie $\perp$-maximale sur X est la topologie discrète.

3.1.4 Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité

3.1.4.1 Réseaux topologiques

3.1.4.2 Base d'ouverts

Remarque. Toute base est évidemment une prébase.

Fait. ***(Construire une base à partir d'une pré-base)***

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $E \subseteq \mathcal{T}$. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de E. Alors E est une prébase de $\mathcal{T}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Fait

Tout espace topologique admet des bases.

Propriété. ***(Caractérisation des bases topologiques)***

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Alors $\mathcal{B}$ est une prébase de $\mathcal{T}$ si et seulement si :

1. $\mathcal{B}$ est un recouvrement de X,
2. l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ s'écrit toujours comme réunion (quelconque) d'éléments de $\mathcal{B}$.

Méthode. ***(Montrer qu'un truc est la base d'une topologie)***

Soit P une partie d'un espace topologique X. Alors pour que l'ensemble des intersections finies d'éléments de P soit une base de la topologie de X, il suffit que P recouvre X.

Propriété. ***(Critère pour qu'une pré-base soit une base)***

Soit X un ensemble, $\mathcal{B}$ une partie de l'ensemble des parties de X telle que $\bigcup \mathcal{B} = X$. On suppose :

$$\forall U,V \in \mathcal{B}\ \forall x \in U \cap V\ \exists W \in \mathcal{B} \quad x \in W \subseteq U \cap V.$$

Alors l'ensemble des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. En particulier, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

La notion de base est utile, car elle permet de montrer une propriété à vérifier sur tous les ouverts au moyen d'une collection réduite de ceux-ci. Donnons une illustration.

Méthode. ***(Montrer une densité grâce à une base)***

Pour montrer que A est dense, il suffit de montrer que l'intersection de A avec tout ouvert d'une base est habitée. Ceci permet donc de montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En fait, dans un espace métrique, c'est désuet : tout ouvert contient déjà une boule ouverte.

On démontre le lemme suivant, très utile :

Théorème. ***(Lemme de Lindelöf)***

Tout espace à base dénombrable est de Lindelöf, c'est-à-dire : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement dénombrable.

▷ Soit $\mathcal{B} = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base dénombrable de l'espace X. Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $x \in X$, il existe $\omega \in \mathcal{O}$ tel que $x \in \omega$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \omega_i \subseteq \omega$. Intuitivement, nous n'avons pas besoin de tous les éléments de $\mathcal{O}$, mais de seulement ceux qui contiennent un élément de $\mathcal{B}$, et dans ce cas, un seul élément de $\mathcal{O}$ par élément de $\mathcal{B}$ est nécessairement, clairement. De façon constructive, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que ω_i soit inclus dans un élément de $\mathcal{O}$, choisissons $\Omega_i \in \mathcal{O}$ tel que $\omega_i \subseteq \Omega_i$. Pour conclure, l'ensemble $\{\Omega_i, i \in I\}$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathcal{O}$. C'est un recouvrement. ■

3.1.4.3 Base de voisinages

Définition. ***(Base de voisinages d'un point)***

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Une *base de voisinages* ou *système fondamental de voisinages* de x est un ensemble $\mathcal{B}_x$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $U \in \mathcal{B}_x$ tel que $U \subseteq V$.

On peut énoncer des propriétés similaires aux précédentes et créer un lien entre base d'ouverts et base de voisinages.

Exercice 3

Donner un exemple d'espace séparable qui n'est pas à bases dénombrables de voisinages.

▷ **Éléments de réponse.**

La topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ convient.

3.1.4.4 Axiomes de dénombrabilité

3.1.4.5 Séparabilité

La séparabilité est une notion un peu isolée mais tout à fait abordable dans les petites classes. Elle prend tout son sens dans le cadre des axiomes de dénombrabilité.

Ceci n'a rien à voir avec la notion de séparation !

Exercice 4 *(Un petit peu de clarté d'esprit)*

On vérifie l'assertion précédente.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparé non séparable.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable non séparé.

▷ **Éléments de réponse.**

ℓ^∞ n'est pas séparable (c'est bien connu), mais séparé, car métrique, puisque c'est un espace vectoriel normé ! Réciproquement, la topologie grossière sur $\mathbb{Q}$ n'est pas séparé, mais clairement séparable.

Exercice 5 *(Non-affaiblissement des hypothèses)*

On montre que la réciproque repose véritablement sur la forme des ouverts, à savoir des boules.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparable qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable, qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité mais pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

▷ **Éléments de réponse.**

Pour le deuxième exemple, qui transcende le premier, il faut creuser un peu. Le lecteur intéressé pourra se pencher sur la construction de la droite de Sorgenfrey ou encore l'espace de Helly.

Méthode. *(Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable)*

On veut montrer que E n'est pas séparable, autrement dit, qu'il n'admet aucune partie dénombrable dense. On cherche une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints indexée par un ensemble indénombrable I. Dans ce cas, une partie dense A doit rencontrer chacun d'eux, d'où une injection d'un indénombrable I dans A, qui n'est pas dénombrable. Ainsi, aucune partie dense de E n'est dénombrable (ou aucune partie dénombrable n'est dense ;)), donc E n'est pas séparable.

Propriété. ***(Produit d'espaces séparables)***

Tout produit d'espaces séparables est séparable.

▷ Pour chaque X_i, soit A_i dénombrable dense. Alors le produit des A_i est dense par propriété de l'adhérence d'un produit (même infini). ■

3.1.5 Adhérence, intérieur, frontière

Ainsi l'adhérence et l'intérieur sont des ensembles extrémaux. En particulier, ils définissent des opérateurs de clôture.

Lemme

Une application constante sur une partie d'un espace topologique X est constante sur son adhérence.

3.1.5.1 Frontière ou bord

Propriété. ***(Caractérisation de la frontière dans un espace métrique)***

Soit A une partie d'un espace métrique E. Alors $x \in \mathrm{Fr}(A) \iff \exists \rho > 0\ B(x,\rho) \cap A, B(x,\rho) \cap \complement_E A \neq 0$.

3.1.5.2 Points limites, points d'accumulation, isolation

3.1.5.3 Densité

3.1.5.4 Adhérence et intérieur dans le produit

Propriété. ***(Adhérence, intérieur d'un produit)***

Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques. Soient A_i une partie de X_i pour tout i. Soient X_1,...,X_n n autres espaces topologiques. Soient A_1,...,A_n des parties respectives de ces espaces.

1. $\overline{A_1 \times ... \times A_n} = \overline{A_1} \times ... \times \overline{A_n}$.
2. $\overset{\circ}{\overbrace{(A_1 \times ... \times A_n)}} = \mathring{A_1} \times ... \times \mathring{A_n}$.
3. $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.
4. On n'a pas de propriété similaire pour le produit.

3.1.5.5 Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence

Méthode. ***(Définition d'une topologie par les adhérences)***

Dans un ensemble E, toute application $\overline{\cdot}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même vérifiant pour toutes parties X,Y de E :

1. $X \subseteq \overline{X}$;
2. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$;
3. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;
4. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

permet de définir une topologie sur E dont les fermés sont les parties X telles que $X = \overline{X}$ et donc $\overline{\cdot}$ est l'adhérence.

▷ Seule la propriété d'intersection est à démontrer : elle vient de la croissance de l'opérateur $\overline{\cdot}$ qui se déduit des axiomes précédents comme tout opérateur de préclôture. Soient $(X_i)_{i\in I}$ des fermés. Soit $i \in I$. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \subseteq X_i$, d'où $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} X_i} \subseteq \overline{X_i} = X_i$, d'où $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} X_i} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} X_i$ en passant à l'intersection sur I d'où l'égalité. ■

Propriété. ***(Idempotence de*** $\mathrm{Adh} \circ \mathrm{Int}$***)***

Soit E un espace topologique. Pour toute partie A de E, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$.

▷ On a, puisque l'intérieur est plus petit que la partie, $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subseteq \overline{\mathring{A}}$. Par croissance de l'adhérence, $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subseteq \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$ par idempotence de l'adhérence. Réciproquement, puisque l'adhérence est plus grand que la partie, $\mathring{A} \subseteq \overline{\mathring{A}}$ puis par croissande de l'intérieur, $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}} \subseteq \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et enfin, par croissante de l'adhérence, $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. ■

Propriété. ***(Idempotence de*** $\mathrm{Int} \circ \mathrm{Adh}$***)***

Soit E un espace topologique. Pour toute partie A de E, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

▷ S'obtient grâce à la dualité adhérence-intérieur donnée par le passage au complémentaire. ■

Avec les mêmes arguments (et même moins élaborés), on obtient :

Propriété

Soit E un espace topologique et A une partie de E. Alors $\overline{\mathring{A}} \subseteq \mathring{\overline{A}}$.

Propriété

Soit E un espace topologique et A une partie de E. Alors $\mathring{A} \subseteq \mathring{\overline{A}}$.

Propriété

De plus, $\mathring{A} \subseteq \overline{\mathring{A}}$.

Propriété

De plus, $\overline{\mathring{A}} \subseteq \overline{A}$.

Contre-exemple. ***(L'inclusion peut être stricte.)***

Il suffit de considérer $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}^*$. □

3.1.6 Applications continues

3.1.6.1 Continuité globale

Remarquer que la continuité sur une partie dépend de la topologie induite (ce qui ne pose pas de problème, car elle est canonique).

Exemple. ***(Très classique)***

L'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ muni de leurs topologies métriques éventuellement induites, est un homéomorphisme, mais pas une isométrie (elle ne préserve pas toutes les distances).

Propriété

Soit X un espace discret et Y un espace topologique quelconque. Alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

Propriété

Soit X un espace topologique quelconque et Y un espace grossier. Alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

Exercice 6

L'image d'une pré-image d'un ouvert par une application continue est-elle ouverte ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non ! Mais c'est un ouvert de l'image, au vu de la formule pour l'image d'une préimage. Pour fournir un contre-exemple, considérer $\mathbb{R}^2$.

3.1.6.2 Continuité en un point

Définition. *(Continuité locale)*

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x_0 si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.
De façon équivalente, pour tout voisinage V de $f(x_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que $f(W) \subseteq V$.

Théorème

Soient X,Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X$. Une application de $X \longrightarrow Y$ est continue sur A si et seulement si elle est continue en tout point de A (ouf).

▷ Supposons A continue sur A. Soit $x \in A$. Soit V un voisinage de $f(x)$; il contient un ouvert U contenant $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de A. Clairement, il contient x. Or $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$ ensemblistement, donc $f^{-1}(V)$ contient un ouvert contenant x, donc c'est un voisinage de x.

Réciproquement, supposons f continue en tout point de A. Soit U un ouvert de Y. Posons $O = f^{-1}(U)$ et montrons que O est un ouvert de A, autrement dit, montrons que O est voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in O$, c'est-à-dire $f(x) \in U$. Alors U est ouvert, donc c'est un voisinage de $f(x)$. Ainsi $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x, donc O est un voisinage de x, et c'est terminé. ■

3.1.6.3 Homéomorphismes

Propriété. *(Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues)*

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme, si et seulement si, f est ouverte, si et seulement si, f est fermée.

▷ En effet, si f est bijective, alors $f^{-1}(f(O)) = O$ pour toute partie O de Y. ■

Propriété. *(Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues)*

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Alors f est un homéomorphisme, si et seulement si, f est ouverte, si et seulement si, f est fermée.

Exercice 7

Soit f une surjection ouverte. Existe-t-il toujours une section continue de f ? Soit f une injection ouverte. Existe-t-il toujours une rétraction continue de f ?

3.1.7 Irréductibilité d'un espace topologique

Voici une notion un peu étonnante qui sera principalement utile à l'heure des fondements de la géométrie algébrique.

Définition. ***(Espace topologique noethérien)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés de X est stationnaire.

Propriété. ***(Fermé d'un noethérien)***

Tout sous-espace fermé d'un espace noethérien est noethérien.

Propriété. ***(Caractérisation des espaces noethériens par les ouverts)***

Un espace topologique X est noethérien, si et seulement si, tout ouvert de X est quasi-compact.

▷ Soit X un espace nothérien, soit O un ouvert de X. Soit $(U_i)_{i\in I}$ ouverts de X qui recouvrent $O \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Si I est fini, il n'y a rien à faire. Sinon, I est infini. Il contient une copie de $\mathbb{N}$. Si U_1 recouvre O, c'est encore terminé. Sinon, il existe $x \notin U_1$, $x \in O$, et x dans un certain U_i, qui quitte à re-numéroter, est U_2. Si $U_1 \cup U_2$ recouvre O, c'est terminé. Sinon, on ré-itère le processus, de sorte que l'on obtient une suite strictement décroissante, grâce au point discriminé à chaque étape, de fermés $\complement_X(U_1 \cup \ldots \cup U_n)$, mais c'est impossible, car X est noethérien ; donc le processus s'arrête et $U_1,\ldots,U_N$ recouvrent O pour un certain N, d'où la quasi-compacité.

Réciproquement, soit (F_n) une suite décroissante de fermés de X. Alors $(O_n = \complement_X F_n)$ est une suite croissante d'ouverts de X. Sa réunion O est un ouvert de X. En particulier, il est quasi compact, donc il existe un N tel que $O_1,\ldots,O_N$ recouvre O. Par les propriétés basiques de la réunion, pour tout $i > N$, O_i est inclus dans l'un des O_i, et par monotonie de $(O_n)_n$, on a $O_i = O_N$. Donc (O_n) est stationnaire, donc (F_n) est stationnaire. ■

Heuristique

On a donc là affaire à des topologies dont nous n'avons pas l'habitude. En particulier, elles ont peu de chances d'être séparées (pourquoi ?).

Définition. ***(Espace topologique irréductible)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *irréductible* si X est vide ou si l'on ne peut pas écrire $X = F_1 \cup F_2$ où F_1,F_2 où F_1,F_2 sont deux fermés (non nécessairement disjoints !) distincts de X.

Propriété. ***(Caractérisation des espaces irréductibles)***

Un espace topologique X est irréductible, si et seulement si, pour tous ouverts non vides U,V, leur intersection $U \cap V$ est non vide ; autrement dit, si tout ouvert non vide est dense.

$\triangleright$ Provient directement de la définition en passant au complémentaire sur $X = F_1 \cup F_2$, $F_1, F_2 \subsetneq X$. ■

Exemples. ***(Espaces irréductibles)***

1. L'espace vide est irréductible.
2. Tout singleton est irréductible.
3. Un ensemble fini de points du plan muni de la topologie induite par la topologie usuelle n'est pas irréductible.
4. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$... ne sont pas irréductibles ; ils s'écrivent comme la réunion de deux demi-plans fermés respectivement réels et complexes.
5. Un ensemble algébrique déterminé par l'idéal engendré par un polynôme irréductible, muni de la topologie de Zariski, est un ensemble irréductible.
6. Munie de la topologie usuelle, une droite du plan $\mathbb{R}^2$ n'est pas irréductible, mais munie de la topologie de Zariski, si.

Proposition. ***(Décomposition en composantes irréductibles)***

Soit X un espace topologique noethérien. Alors on peut écrire X comme réunion finie de fermés irréductibles, décomposition unique à l'ordre près des facteurs si l'on impose qu'il n'y a aucune inclusion réciproque entre eux. De plus, ces composantes sont les fermés irréductibles de X maximaux pour l'inclusion.

$\triangleright$ On raisonne par récurrence noethérienne : soit Φ l'ensemble des fermés $F \subseteq X$ tel que $P(F)$ est fausse où $P(F)$: « F peut s'écrire comme réunion finie de fermés distincts irréductibles ». Supposons $\Phi \neq \emptyset$. Alors puisque X est noethérien, il existe $F \in \Phi$, minimal pour $\subseteq$. Comme $P(F)$ est fausse, F n'est pas irréductible, dont on peut écrire $F = F' \cup F''$ où F',$F'' \subsetneq F$ sont fermés. Par minimalité de F, $F' \notin \Phi$ et $F'' \notin \Phi$ donc $P(F')$ et $P(F'')$ sont vraies. Ainsi F' et F'' admettent des décompositions, donc F aussi en prenant la réunion de celles-ci, donc $P(F)$ est vraie. Absurde. Donc Φ est vide, en particulier $P(X)$ est vraie. La remarque finale vient alors tout naturellement d'après les définitions posées.

Pour l'unicité des composantes irréductibles : si l'on a deux décompositions, l'inclusion de l'une dans l'autre envoie chaque composante de la première dans une de la seconde ; en effet, une composante de la première qui serait envoyée à cheval sur plusieurs de l'autre ne serait pas irréductible, elle s'écrirait comme union d'un nombre fini de fermés (son intersection avec les composantes de la deuxième décomposition). Mais les composantes sont les irréductibles maximaux pour l'inclusion, d'où l'égalité. ■

Proposition

Soit X un espace topologique qui admette un recouvrement ouvert fini par des sous-espaces noethériens. Alors X est noethérien.

▷ Il suffit d'appliquer la caractérisation duale (par les ouverts) d'espace noethérien et la suite vient naturellement par *divide et impera*. ■

3.2 Constructions de topologies

Systématiquement, en construisant une nouvelle topologie à partir d'espaces topologiques donnés, nous cherchons :

- ⋆ à caractériser la topologie en fonction d'applications liant l'espace topologique de départ au nouveau, typiquement, projection ou inclusion,
- ⋆ à décrire explicitement les ouverts de la topologie,
- ⋆ à caractériser la continuité d'applications définies sur ou vers le nouvel espace considéré.

3.2.1 Topologie engendrée

Définition-propriété. ***(Topologie engendrée par une partie)***

Soit X un **ensemble** et $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Alors l'intersection de toutes les topologies sur X contenant Σ est appelée *topologie engendrée* par Σ sur X. C'est la topologie la moins fine sur X telle que toute partie de Σ soit un ouvert.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie engendrée)***

Soient X un ensemble et Σ une partie de X. Alors les ouverts de $\langle \Sigma \rangle$ sont exactement les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de Σ.

▷ Par définition d'une topologie, une telle partie doit être ouverte. Réciproquement, par définition d'une topologie, une topologie doit toutes les contenir. La proposition est démontrée. ■

Remarque importante. Par les propriétés de distributivités généralisées *(exercice)*, il revient au même de dire que ce sont les intersections finies de réunions quelconques d'éléments de Σ.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie engendrée)***

Soient Y un espace topologique et Σ une partie de Y qui engendre la topologie de Y. Soit X un espace topologique. Alors si c'est définissable, une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si l'application $f : X \longrightarrow \Sigma$ est continue.

3.2.2 Topologie initiale

Définition-propriété. ***(Topologie initiale associée à une famille d'applications)***

Soit X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout $i \in I$, une application $f_i : X \longrightarrow \mathcal{O}_i$. On appelle *topologie initiale* associée aux (f_i), ou *topologie engendrée par les* f_i, la topologie la moins fine sur X qui rende toutes les applications f_i, $i \in I$, continues.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie initiale)***

La topologie initiale sur X engendrée par les $f_i : X \longrightarrow Y$ est la topologie engendrée (strictement) par les $f_i^{-1}(U)$ pour U ouvert de $\mathcal{O}_i$, pour i parcourant I.

▷ Il est clair qu'une topologie rendant toutes les f_i continues contient toutes ces parties. Par minimalité de la topologie engendrée, on a le résultat. ■

Propriété. ***(Continuité des applications sous la topologie initiale)***

On reprend les notations précédentes ; soit également Z un espace topologique et $g : Z \longrightarrow X$ une application. Alors g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ g \longrightarrow Y_i$ est continue.

▷ Le sens direct vient d'une simple composition d'applications continues. Pour le sens réciproque, soit U un ouvert de X, et il suffit de vérifier la condition dans le cas où U est dans une prébase de X. Puisque d'après la proposition précédente, une telle prébase est donnée par les $f_i^{-1}(\Omega)$, il existe $i \in I$ et $\Omega \in \mathcal{O}_i$ tel que $U = f_i^{-1}(\Omega)$. Alors $g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(\Omega)$ ensemblistement, ouvert de Z par hypothèse. ■

Signalons les propriétés secondaires suivantes :

- Si $\mathcal{B}_i$ est une base d'ouverts de Y_i pour tout $i \in I$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ est une prébase de X.
- Si $x \in X$ et $\mathcal{V}_i$ est une base de voisinages de $f_i(x)$ pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\bigcup\limits_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$ est un système fondamental de voisinages du point x.

Les topologies induite et produit sont des exemples fondamentaux de topologies initiales.

3.2.3 Topologie induite

Dans ce cas spécial, on retourne le procédé habituel.

Définition. ***(Topologie induite à un sous-espace topologique)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. Alors la *topologie induite* (de X) sur A est la topologie sur A donc les ouverts sont les $A \cap U$ où U décrit l'ensemble des ouverts de X.

▷ C'est simple à faire par le calcul par associativité simple des opérations ensemblistes, mais il est plus judicieux d'attendre la caractérisation suivante qui fait le job. ■

Propriété. ***(Caractérisation abstraite de la topologie induite)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. Alors la topologie induite sur A est la topologie la moins fine rendant l'inclusion canonique $\iota : A \hookrightarrow X$ continue ; autrement dit, c'est la topologie initiale associée à (ι, X).

▷ Par définition de la topologie induite, si U est un ouvert de X, alors $\iota^{-1}(U) = U \cap A$ est un ouvert de A. Réciproquement, vérifions que l'ensemble des parties de cette forme est déjà une topologie. Elle contient $\emptyset$ et A. Elle est stable par réunion quelconque par distributivité et par intersection finie (en fait, quelconque) de même. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie initiale)***

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors pour toute partie $A \subseteq X$, la restriction $f : A \longrightarrow Y$ est continue.

▷ Immédiat. ■

Il est clair que la réciproque est fausse en fixant A !

On énonce également :

Propriété. ***(Propriété universelle de la topologie induite)***

Soit X un espace topologique et A une partie de X. La topologie induite est la topologie minimale sur A qui rend l'inclusion canonique continue.

Un ouvert pour la topologie induite n'a aucune raison d'être un ouvert dans le grand espace.

La topologie induite est la topologie *sous un certain angle*, celui du sous-espace.

3.2.4 Topologie finale

Définition-propriété. ***(Topologie finale associée à une famille d'applications)***

Soit Y un ensemble et $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout $i \in I$, une application $f_i : X_i \longrightarrow Y$. On appelle *topologie finale* associée aux (f_i), la topologie sur X la plus fine qui rende toutes les applications f_i, $i \in I$, continues.

Remarque. Pour la topologie initiale, où l'on construisait une topologie sur la source, on demandait une topologie minimale ; dans le cas de la topologie finale, on demande une topologie la plus fine. En fait, c'est cohérent : pour rendre des applications données continues, il y a deux manières : soit l'on enlève des ouverts à l'arrivée, soit l'on en rajoute à la source.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts dans la topologie finale)***

Un ensemble $U \subseteq Y$ est ouvert si et seulement si $f_i^{-1}(U)$ est ouvert dans X_i pour tout $i \in I$.

▷ On note O_Y la topologie finale sur Y. Soit $U \subseteq Y$ tel que f_i^{-1} soit un ouvert des X_i. Alors $O_U = \{\emptyset, Y, U\}$ est une topologie sur Y telle que chacune des f_i est continue. Par définition, $U \in O_Y$. Ceci suffit. ■

Remarque. C'est bien plus restrictif qu'avec la topologie initiale. Ceci explique en partie que tout se passe bien pour les topologies produits, mais mal en général dans les topologies quotients.

Propriété. ***(Continuité des applications sous la topologie finale)***

On reprend les notations précédentes ; soit également Z un espace topologie et $g : Y \longrightarrow Z$ une application. Alors g est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $g \circ f_i \longrightarrow Y_i$ est continue.

▷ Réciproquement, si $g : Y \longrightarrow Z$ est telle que $g \circ f_i$ est continue, soit U un ouvert de Z. On a $f_i^{-1}(g^{-1}(U))$ ouvert des X_i. Ainsi $g^{-1}(U)$ est un ouvert dans Y, donc g est continue. ■

Les topologies somme et quotient sont des exemples fondamentaux de topologies finales.

3.2.5 Topologie faible

Définition-propriété. ***(Topologie faible)***

Soit X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose que chaque X_i est muni d'une topologie $\mathcal{O}_i$ et l'on note $f_i : X_i \longrightarrow X$ l'inclusion. La topologie finale sur X définie par les $(f_i)_{i\in I}$ est appelée *topologie faible* définie par $(X_i)_{i\in I}$.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie faible)***

On reprend les notations précédentes. Alors $F \subseteq X$ est fermé (resp. ouvert) dans X pour la topologie faible si et seulement pour tout $i \in I$, $F \cap X_i$ est fermé (resp. ouvert) dans $(X_i, \mathcal{O}_i)$.
Autrement dit, la topologie faible est la topologie la plus fine qui induise toutes les topologies des X_i.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie faible)***

Pour tout espace topologique Y, une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction $f_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$ est continue pour tout $i \in I$.

Exercice 8

Montrons que X est discret si et seulement si sa topologie est la topologie faible définie par les singletons. Montrer que cette condition est équivalente à ce que la projection canonique $\coprod\limits_{x\in X} \{x\} \longrightarrow X$ soit un homéomorphisme.

3.2.6 Topologie somme

On continue notre litanie de définitions.

Définition-propriété. ***(Somme topologique)***

Soit $(X_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. La somme $\bigoplus\limits_{i\in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ est la réunion disjointe $\bigsqcup\limits_{i\in I} X_i = \coprod\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{i\in I} X_i \times \{i\}$ munie de la topologie la plus fine qui rend chaque injection canonique continue, autrement dit, la topologie finale pour les inclusions canoniques.

Remarque. Dans ce cas, contrairement à la topologie produit, ce n'est plus la topologie engendrée par (...) mais littéralement la topologie dont les ouverts sont les sommes disjointes d'ouverts : même constat que pour la topologie induite.

Les conséquences sont grandes.

Propriété

Les inclusions canoniques dans la somme topologiques sont ouvertes et fermées.

Propriété. ***(Caractérisation des ouverts de la topologie somme)***

La topologie somme $\mathcal{T}$ est telle que $U \in \mathcal{T}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, il existe $U_i \in \mathcal{T}_i$ tel que $U \cap (X_i \times \{i\}) = U_i \times \{i\}$; autrement, une partie est ouverte si chacune de ses traces est ouverte.
Il est clair alors que $\mathcal{T}$ est l'ensemble des $\bigoplus\limits_{i \in I} U_i$ pour U_i ouverts respectifs de $\mathcal{T}_i$.

Propriété. ***(Applications continues sur la somme disjointe)***

Si X_i sont des espaces topologiques, on munit $\coprod X_i$ de la topologie finale. On a $\mathrm{Hom}(\coprod X_i, Z) = \prod \mathrm{Hom}(X_i, Z)$.

▷ Ouf ! ■

La topologie somme n'est jamais qu'un recollement d'espaces. La topologie est assez stable par somme, comme l'intuition le permet.

Proposition. ***(Identification des parties d'une somme)***

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espace topologique. Soit ι l'inclusion canonique de X_i dans $\bigsqcup X$ pour un $i \in I$. Alors ι est un homéomorphisme sur son image.

Proposition. ***(Clopens d'une somme topologique)***

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espace topologique. Alors $X_i \times \{i\}$ est un ouvert fermé de $\bigsqcup X$.

En particulier :

Fait. ***(Non-connexité d'une somme topologique)***

Une somme d'espaces topologiques est non connexe dès que deux au moins des termes sont non vides.

3.2.7 Topologie produit

Les propriétés viennent toutes de la topologie initiale ; on les redémontre quand-même dans ces cas particuliers.

3.2.7.1 Cas fini

Définition-propriété. ***(Topologie produit fini)***

Soit n un entier naturel et $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur $\prod\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i$ est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique $p_i : \prod\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i \longrightarrow X_i$, $i \in [\![1,n]\!]$, continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux $(p_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Propriété. ***(Description de la topologie produit fini)***

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *ouverts élémentaires* : $\Omega_1 \times ... \times \Omega_n$, où $\Omega_1 \subseteq X_1,..., \Omega_n \subseteq X_n$ sont des ouverts respectifs de ces espaces.
Une prébase est donnée par les $X_1 \times ...X_{i-1} \times \Omega_i \times X_{i+1} \times ... \times X_i$.

▷ Conséquence du cas infini. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie produit fini)***

Soient $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}, Z$ des espaces topologiques. Une application $f : Y \longrightarrow \prod\limits_{i\in[\![1,n]\!]} X_i$ est continue si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ est continue.

▷ Le sens direct est clair par composition. Réciproquement, soit U un ouvert du produit. Il suffit de vérifier la condition dans le cas où U est dans une pré-base de cet espace ; ici, un ouvert élémentaire à une composante convient. Ainsi il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $U = p_i^{-1}(\Omega)$ pour Ω ouvert de X_i. Ainsi, $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(\Omega)) = (p_i \circ f)^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de Y car ces applications sont continues par hypothèse. ■

On n'a pas de propriétés semblables pour les applications *partant* d'un espace produit ; le calcul différentiel nous le montre assez. En particulier, pour un produit infini non plus.

Propriété. ***(Ouverture des projections)***

Les projections sont ouvertes pour la topologie produit.

▷ On fait la preuve dans le cas général, puisqu'elle tient encore. Soit $\prod\limits_{i\in I} U_i$ un cylindre ouvert pour la topologie produit. Il est clair qu'à i fixé, $p_i(\prod\limits_{i\in I} U_i) = U_i$ est un ouvert de X_i. Puisque les cylindres forment une base, et que la réunion est stable par image réciproque, et qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, le résultat tient pour n'importe quel ouvert. ■

Cette propriété tient dans le cas général, mais on ne la ré-énoncera pas.

3.2.7.2 Cas général

Définition-propriété. ***(Topologie produit fini)***

Soient $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique $p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$, $i \in I$, continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux $(p_i)_{i \in I}$.

Propriété. ***(Description de la topologie produit)***

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *cylindres (ouverts)* :

$\prod_{i \in I} U_i$, où U_i est un ouvert de X_i pour tout i et il existe J fini tel que pour tout $i \in I \setminus J$,

$$U_i = X_i$$

qui coïncident avec les ouverts élémentaires seulement dans le cas fini
Ils forment d'ailleurs une *base* de la topologie produit

▷ Il est nécessaire qu'une topologie rendant continue les projections canoniques contiennent les ouverts $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i)$ pour U_i ouverts de X_i, J fini. Ces ensembles sont exactement les cylindres ouverts. Par minimalité de la topologie produit, on en déduit le résultat. ■

Théorème. ***(Produit d'ouverts d'un espace produit)***

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Alors si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts pour tout $i \in I$ U_i de X_i, alors $\prod_{i \in I} U_i$ est un ouvert du produit si et seulement si $U_i = X_i$ pour tous les $i \in I$ sauf éventuellement un nombre fini.

Fait

Tout ouvert du produit contient un produit d'ouverts élémentaires. Tout voisinage d'un point du produit contient un voisinage élémentaire de ce point.

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie produit)***

Soient $(X_i)_{i \in I}, Z$ des espaces topologiques. Une application $f : Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ est continue si et seulement si pour tout $i \in I$, $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$ est continue.

▷ Même preuve que dans le cas fini. ■

Mnémonik : tout se passe bien dans le produit, tout se passe mal dans le quotient.

Les propriétés vraies sur un produit d'espaces ne sont des équivalences que si l'on suppose le produit non vide, puisqu'un produit avec un terme vide est vide.

3.2.7.3 Convergences

Propriété. ***(Convergence dans l'espace produit)***

Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques compacts. Soit $(x_n = (x_{n,i})_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $X = \prod_{i\in I} X_i$. Soit $x = (x_i)_{i\in I} \in X$. Alors (x_n) tend vers x si et seulement si, pour tout $i \in I$, la suite $(x_{n,i})_n$ tend vers x_i.

▷ Le sens direct vient de la continuité des projections. Montrons le sens réciproque. Soit Ω un ouvert contenant x. Il contient donc un cylindre C contenant x. Soient U_1,...,U_n les membres de ce produit non vide. Alors par hypothèse, pour tout $i \geqslant n$, il existe un rang N_i à partir duquel $(x_{n,i})_i$ est dans U_i. Ainsi, à partir du rang $\max N_i$, la suite (x_n) est dans C, donc dans U. ■

3.2.8 Topologie quotient

Il n'y a rien de compliqué, une fois qu'on a défini la topologie quotient (voir sur Wikipédia). Une *quotient map*, le terme n'ayant pas d'équivalent en français, est une application continue et ouverte : une application est ouverte, si l'image de tout ouvert est ouverte.

C'est plutôt la régularité de la topologie quotient qui pose un réel problème en topologie.

3.2.8.1 Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient

Définition. ***(Topologie quotient)***

Soit $q : X \twoheadrightarrow Y$ une application surjective entre deux ensembles, où X est un espace topologique. On définit sur Y la *topologie quotient* comme étant la topologie finale associée à l'application q.

Fait

$U \subseteq Y$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ ouvert. $F \subseteq Y$ est fermé si et seulement si $q^{-1}(F)$ est fermé.

Remarques.

1. *(Cas particulier)* Si R est une relation d'équivalence sur X, la projection canonique induit une topologie sur le quotient X/R grâce à cette définition. C'est le cas que nous étudierons dès à présent.
2. *(Cas particulier du cas particulier : géométrie du caoutchouc)* Si $A \subseteq X$, on définit la relation d'équivalence xR_Ay si et seulement si $x = y$ ou x et $y \in A$. On peut alors

définir le quotient $X/A = X/R_A$. Cela revient heuristiquement à ramasser une partie sur un point. Cette partie est quelconque (pas forcément simplement connexe) !!!

On ne demande absolument aucune rien sur R, c'est pourquoi les quotients topologiques, qui existent donc toujours, écopent en général de propriétés minables (pour les groupes, les espaces vectoriels au contraire, la structure descend, mais on demandait des propriétés fortes avant de quotienter). C'est en exigeant des compatibilités de R quant à la topologie de X que l'on aura des propriétés acceptables pour nos topologies quotients.

Exemples. ***(Espaces topologiques quotients)***

1. Le tore est un quotient du plan par un réseau.
2. Les espaces projectifs sont des quotients d'espaces euclidiens par une relation d'équivalence.

La topologie quotient satisfait la propriété universelle suivante :

Propriété. ***(Propriété universelle des topologies quotients)***

On reprend les notations précédentes. L'application $q : X \longrightarrow X/R$ satisfait la propriété suivante : pour tout espace topologique Z, pour toute application $f : X \longrightarrow Z$ continue et constante sur les classes d'équivalence, *i.e.* $xRy \implies f(x) = f(y)$, alors elle descend en un unique application continue sur le quotient, autrement dit, $\exists! \tilde{f} : X/R \longrightarrow Z$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q"'] & Z \\ X/R \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

▷ Comme d'habitude, en oubliant la structure topologique, on a le passage au quotient ensembliste qui donne une unique application de $X/R \longrightarrow Z$ tel que le diagramme commute dans la catégorie des ensembles qui donne $\tilde{f}(\overline{x}) = f(x)$ de façon indépendante du choix de x. Si $U \subseteq Z$ est ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X, et $\tilde{f}^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$ ouvert. ■

Propriété. ***(Continuité des applications pour la topologie initiale)***

Soit X un espace topologique et R une relation d'équivalence. On note $Y = X/R$. Pour tout espace topologique Z, une application $f : Y \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si, l'application $f \circ \pi$ est continue, en notant π la projection canonique.

▷ Conséquence de la propriété pour la topologie finale.

Redémontrons-le pour le fun. Puisque la projection canonique est continue, le sens direct vient d'une composition d'applications continues. Réciproquement, soit U un ouvert de Z. Alors $V = f^{-1}(U) \subseteq Y = X/R$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ est ouvert, ce qui est le cas si $f \circ \pi$ est bien supposée continue. ■

Le problème principal auquel on va se heurter, est que le quotient d'une espace séparé (ou même très régulier) n'est pas nécessairement séparé (en particulier pas métrisable). Pour cela, voir la section suivante.

Définition. ***(Saturation d'un ouvert)***

Soit $E \subseteq X$, le *saturé* de E est :

$$RE = \{y \in X, \exists x \in E, xRy\} = \bigcup_{x \in E} \overline{x} = q^{-1}(q(E)).$$

On dit que E est *saturé* si $RE = E$. Autrement dit, il existe $A \subseteq X/R$ tel que $E = q^{-1}(A)$[a]. Ceci revient encore à dire que E contient tous les éléments équivalents à ses éléments.

[a] Le sens direct est donné par l'une des expressions ci-dessous. Réciproquement, toute partie de la forme $q^{-1}(A)$ est saturé, car si $\overline{x} \in A$ et $y \sim x$, $\overline{y} = \overline{x} \in A$ également.

Toutes les choses qu'on voudraient vraies ne sont pas vraies, mais elles le deviennent si l'on rajoute saturé derrière.

Propriété. ***(Images des ouverts dans le quotient)***

1. Si O est un ouvert saturé dans X, alors $q(O)$ est ouvert dans X/R.
2. Si F est fermé et saturé dans X, alors $q(F)$ est fermé dans X/R.

▷ On a que $RO = q^{-1}(q(O))$. Si O est saturé, $RO = O = q^{-1}(q(O))$. Ainsi O est ouvert si et seulement si $q(O)$ l'est. Le deuxième point est identique. ■

En général, l'hypothèse *saturé* ne peut être omise.

Contre-exemple. ***(Projection quotient non ouverte)***

On considère la relation sur le tore $\mathbb{T}^2$ définie par $x' \sim y'$ s'il existe une droite D de pente α joignant x à y et tels que $\pi(x) = x'$ et $\pi(y) = y'$. On peut vérifier que si α est rationnel ou infini, $\pi(D)$ est un cercle, et sinon, son image est dense dans le tore et π induit une bijection continue sur son image, qui n'est pas un homéomorphisme. L'espace quotient est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$; dans le cas contraire, la topologie quotient est grossière. Naturellement, cet exemple convient, puisqu'on peut exhiber des ouverts dont l'image sur le tore ne l'est plus. □

En général, il est trop fort de demander que tout ouvert soit saturé.

3.2.8.2 Séparation des quotients

Les propriétés topologiques se conservent pas produit, même si, dans le cas infini, les preuves ne sont pas toujours évidentes. Par contre, elles sont extrêmement instable pour ce qu'il s'agit du quotient. En particulier, le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un réflexe.

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On rappelle qu'un espace est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée dans son carré topologique.

Propriété. ***(Condition nécessaire de séparation du quotient)***

Si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$.

▷ En effet, $\Gamma_{\mathcal{R}} = q^{-1} \times q^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$. ■

Propriété. ***(Réciproque partielle à la propriété précédente)***

Si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé dans $X \times X$ **et si** q **est ouverte**, alors X/R est séparé.

▷ Si q est ouverte, $q \times q(X \times X \setminus \Gamma_{\mathcal{R}}) = (X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}) \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}}$ est ouvert. Ainsi, $\Delta_{X/\mathcal{R}}$ est fermée, donc X/R est séparé. ■

Remarque. En toute généralité, un espace non séparé peut se quotienter en un espace séparé : prendre une espace non séparé et l'écraser sur lui-même. Pourtant, en pratique, on énoncera des théorèmes permettant de *préserver* la séparation au passage au quotient.

La condition n'est pas minimale ; il peut arriver que q ne soit pas ouverte mais que, par miracle, l'espace quotient soit séparé.

Propriété. ***(Caractérisation de la séparation des quotients par saturation)***

L'espace $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si pour tous $x \neq y$, il existe des ouverts saturés qui séparent x et y : on dit que X est *saturé-séparé.*

▷ Soient $x,y \in X$ tels que $q(x) \neq q(y)$, soit $(x,y) \notin \mathcal{R}$. Si U_x,U_y sont des voisinages ouverts saturés qui séparent x et y, alors $q(U_x)$ et $q(U_y)$ sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ par saturation qui séparent $q(x)$ et $q(y)$: puisque U_x est saturé, $q(y) \notin q(U_x)$. Réciproquement, si U_x,U_y sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ qui séparent $q(x),q(y)$, alors on voit que $q^{-1}(U_x)$ et $q^{-1}(U_y)$ sont des ouverts saturés et disjoints qui séparent x et y. ■

Proposition. ***(Condition suffisante de séparation par compacts et fermés)***

Soit X séparé. Supposons que q satisfasse :

(a) $\forall x \in X \quad q^{-1}(q(x))$ est compacte,

(b) pour tout fermé de X, son saturé est fermé.
Alors X/R est séparé.

$\triangleright$ Soient $x,y \in X$, $q(x) \neq q(y)$. Posons $C_x = q^{-1}(q(x))$ et $C_y = q^{-1}(q(y))$ qui sont donc des compacts disjoints de X. Puisque X est séparé, il existe des ouverts U_x,U_y disjoints séparant ces compacts (propriété connue). On pose F_x,F_y les complémentaires de ces ouverts. Ce sont des fermés dont les saturés $\mathcal{R}F_x$ et $\mathcal{R}F_y$ sont donc également fermés, par hypothèse. On pose U'_x,U'_y les complémentaires respectifs de ces saturés, qui sont donc des ouverts. Ils sont disjoints, car contenus dans les premiers. Supposons que $x \notin U'_x$. Alors $x \in \mathcal{R}F_x$. Alors il existe $z \in F_x$ tel que $x\mathcal{R}z$ et $z \in C_x = q^{-1}(q(x)) \subseteq U_x$, contradiction. Ainsi $x \in U'_x$. De même $y \in U'_y$ et tout est fait. ■

Corollaire. ***(Quotient par un compact)***

Soit X un espace topologique séparé et A une partie compacte de X. Alors X/A est séparé.

$\triangleright$ Si $x \notin A$, alors $q^{-1}(q(x)) = \{x\}$ est compact. Si $x \in A$, $q^{-1}(q(x)) = A$ est compact par hypothèse. L'autre hypothèse se vérifie facilement. ■

Proposition. ***(Condition suffisante de séparation par compacts et fermés)***

Soit X un espace topologique et A un fermé ou un ouvert de X. Alors la restriction $\tilde{q} : X \setminus A \longrightarrow X/A$ est un homéomorphisme sur son image.

$\triangleright$ On sait déjà que $\tilde{q}$ est continue par restriction et elle est clairement bijective. Supposons A fermé. Alors un ouvert de $X \setminus A$ est un ouvert de X qui est inclus dans $X \setminus A$. Pour un tel ouvert U, $\tilde{q}(U) = U$ est ouvert donc $\tilde{q}^{-1}$ est continue. Le cas où A est ouvert est identique par caractérisation de la continuité par images réciproques de fermés. ■

Remarque. Soient $f : X \longrightarrow Y$ continue et Y séparé. On définit r sur X par $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Alors $\tilde{f} : X/r \longrightarrow Y$ est injective et X/r est séparé.

Exemple. ***(Recollement du segment en un cercle)***

Soit $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et $f : [0,1] \longrightarrow S^1$ qui à $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Alors $[0,1]/r = [0,1]/(0 \sim 1)$ et $\tilde{f}$ est un homéomorphisme de $[0,1]/(0 \sim 1) \longrightarrow S^1$.

Propriété. ***(Condition suffisante de séparation du quotient)***

Soit X un espace topologique et R une relation d'équivalence sur X. Si X' est un espace séparé et $f : X \longrightarrow X'$ une application continue vérifiant $x \sim y \iff \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$, alors

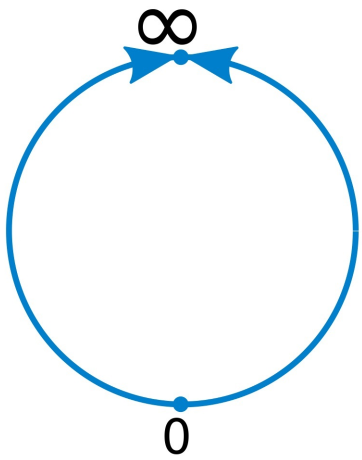


FIGURE 3.2.1 : *Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle.* —

X/R est séparé.

▷ En effet, f passe au quotient en $\tilde{f} : X/R \longrightarrow X'$ et cette application est injective par hypothèse. Ainsi X/R s'identifie à un sous-espace de X' séparé. Puisque tout sous-espace d'un séparé est séparé, X' est séparé. ■

Exemple. ***(Séparation du tore)***

Le tore $\mathbb{T}^2$ est séparé.

En vertu donc de l'exponentielle complexe produit, qui permet de le définir.

3.2.8.3 Autres propriétés des quotients

Les propriétés du type image continue se préservent par passage au quotient par continuité de la projection canonique. Ainsi :

- ⋆ tout quotient séparé de compact est compact ;
- ⋆ tout quotient d'espace connexe, connexe par arcs, est connexe par arcs.

3.2.9 Quotient d'une topologie par une action de groupes

Tout un pan de la recherche mathématique étudie ces quotients : c'est un exemple fondamental pour lequel le quotient hérite encore une fois, a priori, d'une structure minable.

On étudie cette notion plus en détail dans la section de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

3.3 Espaces topologiques classiques

3.3.1 Peignes

Définition. ***(Peigne)***

On appelle *peigne*, sans autre précision, un espace topologique de la forme suivante : le sous-espace topologique du plan euclidien :

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0,1].$$

Cet exemple se généralise à de nombreuses autres réalisations, y compris en dimensions supérieures. C'est la *philosophie du peigne* qui importe ici.

3.3.2 Boules, sphères

Définition. ***(Boule)***

On appelle *boule* de dimension n, la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, définie par $\mathbb{B}^n = B_n = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant 1\}$.

Définition. ***(Sphère)***

On appelle *sphère* de dimension n, ou *n-sphère*, la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, définie par $\mathbb{S}^{n-1} = S_{n-1} = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$.

$\longrightarrow$ *Convention.* On pose $S{-1} = \emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition. ***(Passer de la boule à la sphère)***

$\mathbb{S}^{n-1}$ est la frontière de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition. ***(Inclusions relatives des sphères)***

$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$.

$\triangleright$ En effet, $\{(x_0,...,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + ... + x_{n-1}^2 = 1\} \subseteq \{(x_0,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\} \cap \{(x_0,...,x_n) \mid x_n = 0\}$. ■

Proposition. ***(Inclusions relatives des boules)***

$\mathbb{B}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$.

Proposition. *(Quotient d'une boule par une sphère)*

$\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$.

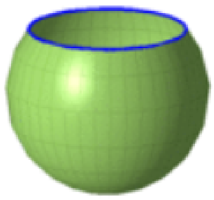


FIGURE 3.3.1 : *Quotient d'un disque par sa frontière sphérique.* —

Proposition. *(Écrasement d'une demi-sphère sur un disque)*

La demi-sphère large $\mathbb{S}^n_+ \simeq \mathbb{B}^2$.

Proposition. *(Recollement d'une sphère aplatie le long d'un bord)*

$\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1]/\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \simeq B^n$.

Proposition. *(Compacité de la boule)*

$\mathbb{B}^n$ est compact.

▷ Fermé borné en dimension finie. ■

Proposition. *(Connexité de la sphère)*

$\mathbb{S}^{n-1}$ est connexe par arcs pour $n \geqslant 2$.

▷ Première méthode : on le déduit de la convexité de $\mathbb{B}^n$. ■

▷ On peut raisonner par récurrence en montrant que tout point est reliable à l'équateur, en considérant un chemin donné par projection pour la première coordonnée et en ajustant avec la deuxième coordonnée : ceci est possible dès que $n \geqslant 2$. ■

▷ Le plus simple reste de considérer $\frac{(1-t)x+tx}{\|(1-t)x+ty\|}$. C'est possible seulement pour deux points non antipodaux. On en déduit le résultat en remarquant qu'un espace de dimension $n \geqslant 2$ connaît toujours au moins deux vecteurs colinéaires ou anticolinéaires. ■

Proposition. ***(Suspension de la sphère)***

$S(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{S}^n$.

Proposition. ***(Élasticité de la boule)***

$S(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq C(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq \mathbb{B}^n$.

3.3.3 Ruban de Möbius

Définition. ***(Ruban de Möbius)***

On appelle *ruban de Möbius* le quotient $M = [0,1] \times [0,1]/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(0,s) \sim (1,1-s)$ *(voir schéma)*.

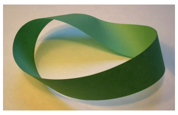


FIGURE 3.3.2 : *Un ruban de Möbius dans notre monde.* —

Remarque. Le ruban de Möbius est l'unique espace topologique parmi les quatre issu du recollement d'un carré qui forme une variété à bord.

Curiosité. ***(Réalisation coprojective du ruban de Möbius)***

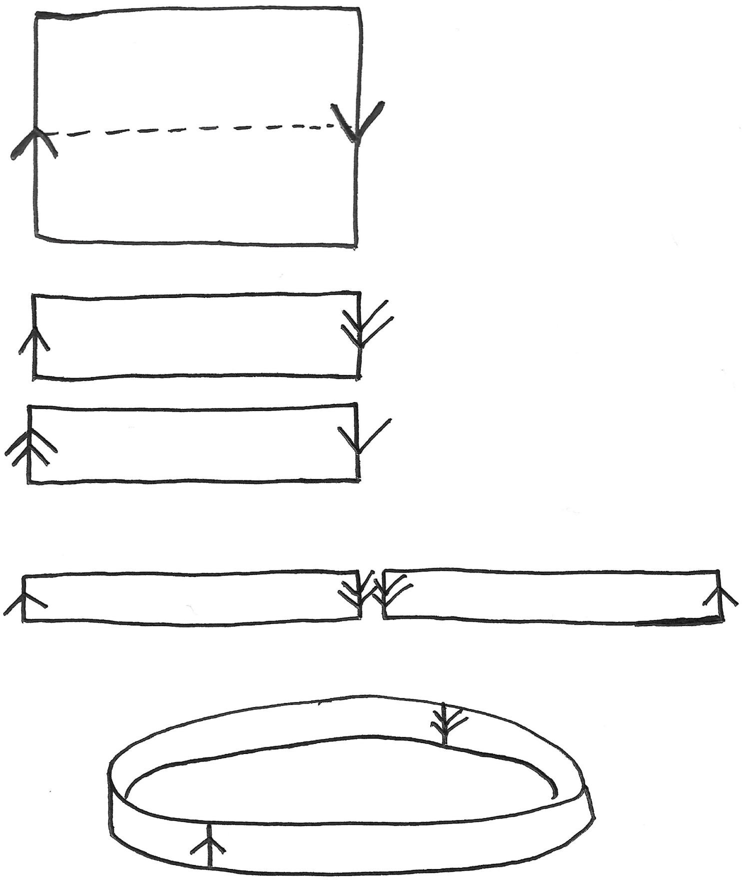
Le ruban de Möbius est le complémentaire d'un disque ouvert dans le plan projectif réel.

Exercice 9 *(Couper et recoller... le ruban de Möbius)*

1. Que se passe-t-il lorsqu'on coupe un ruban de Möbius en son milieu dans la longueur ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. On peut essayer chez soi et l'on se rend compte que l'on obtient un unique ruban cylindrique, de longueur double au Möbius initial.



Si on ne connaît pas la réponse, le plus simple est de raisonner grâce à un diagramme topologique, comme ci-dessus.

3.3.3.1 Variantes du ruban de Möbius

3.3.4 Tore

Définition. ***(Tore)***

On appelle *tore de dimension* n, le quotient d'espaces topologiques $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Proposition. ***(Séparation du tore)***

Tout tore est séparé.

▷ Le tore se décrit comme quotient de l'application $(t_1,\ldots,t_n) \mapsto (e^{2it_i\pi},\ldots,e^{2it_n\pi})$. ■

Proposition. ***(Description alternative du tore)***

$\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$. Ce n'est pas $\mathbb{S}^n$.

Propriété

Le tore de dimension 1 est la sphère.

Proposition. ***(Obtention du tore par le carré unité)***

Le tore $\mathbb{T}^2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $K = [0,1] \times [0,1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$ *(voir schéma)*.

Le tore qu'on connaît est le tore de première dimension.

Heuristique

Le tore est sans coutures et de frontière vide.

Usage du tore dans les jeux vidéos

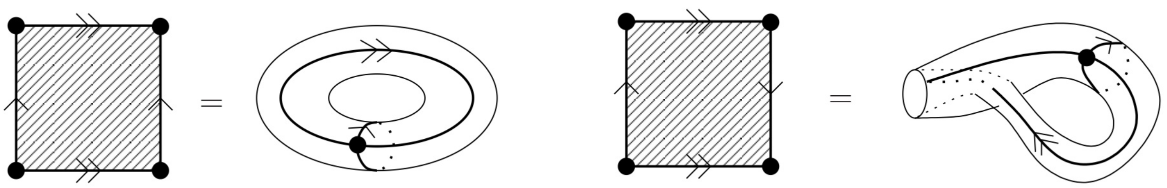
Dans le jeu vidéo Pacman,

3.3.5 Bouteille de Klein

Définition. ***(Bouteille de Klein)***

La bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$ est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,1-t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$ *(voir schéma)*.

Mnémonik : la bouteille de Klein est le tore de Möbius.



(a) *Le tore simple. —* (b) *La bouteille de Klein. —*

FIGURE 3.3.3 : *Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes. —*

3.3.6 Plans projectifs

3.3.6.1 Droite projective réelle

3.3.6.2 Plan projectif réel

3.3.6.3 Sphère de Riemann

3.3.6.4 $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

3.3.6.5 Espaces projectifs généraux

Définition. ***(Espace projectif réel)***

Soit n un entier naturel. L'*espace projectif réel de dimension* n est $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R})$ est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1}$ par la relation d'équivalence de colinéarité.
Puisque deux vecteur sont colinéaires s'ils dirigent la même droite, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ peut être vu comme l'ensemble des droites vectorielles, c'est-à-dire des *directions*, de l'espace euclidien de dimension $n+1$.

▷ En effet, si l'on supprime zéro, la relation de colinéarité est une équivalence. ■

Proposition. ***(L'espace projectif réel est un quotient)***

$P_n(\mathbb{R})$ est le quotient $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ où le groupe $\mathbb{R}^\times$ agit sur cet espace par homothétie $\lambda \cdot x \mapsto \lambda x$. C'est l'ensemble des orbites sous cette action.
On retrouve que $P_n(\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par zéro.

Dans les premières dimensions, on a :

Exemples. ***(Espaces projectifs de petites dimensions)***

1. L'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est l'ensemble des directions du plan. Grâce au demi-cercle unité supérieur (car deux points antipodaux du cercle définissent la même droite), cet espace s'y identifie, pour toute droite non horizontale. Par le même argument, les deux points d'ordonnée nulle s'identifient ; par conséquent, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{S}^1$ sous espace de $\mathbb{R}^2$. **C'est faux en dimension supérieure !**
Plus précisément *(voir la suite)*, l'homéomorphisme $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1(\pm 1)$ envoie une droite vectorielle sur la classe de ses intersections avec S^1. Identifions le demi cercle $B' = \{e^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ avec l'intervalle $[-1,1]$ par projection sur l'axe des abscisses. Alors l'homéomorphisme $B^1/x \sim -x \longrightarrow S^1/\pm 1$ est induit par l'inclusion $B' \longleftrightarrow S^1$. Finalement, P^1 est obtenu en attachant à $P^0 = \{\pm 1\}$ une cellule B' le long de $\partial B' = S^0$.
De façon calculatoire, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$, on définit la relation d'équivalence

engendrée par $(x,y) \sim (\frac{x}{y},1)$: c'est la *projection stéréographique*. Elle permet de définir des points à l'infini. Dans le cas de la dimension 2, mais celui-là seul encore, les deux points à l'infini coïncident.

2. Dans le cas $n = 2$, l'homéomorphisme $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2(/\{\pm I_3\}$ envoie une droite sur la classe d'équivalence de ses deux points d'intersection avec la sphère de dimension 3 S^2.
Identifions la demi-sphère supérieure $\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\}$ avec le disque $B'' \subseteq \mathbb{R}^2$ par $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Alors l'homéomorphisme $B''/(x \sim -x, x \in S' \subseteq B^2)$ est induit par l'inclusion $B'' \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$. Notons d'ailleurs qu'on a une inclusion $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$. Si on attache B'' à P^1 le long de la projection $S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, on obtient un espace homéomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
On peut enfin montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans le plan, dans un sens que l'on précisera pas ici. En effet, intuitivement, en prenant la demi-sphère supérieure, on ne peut pas recoller dans l'espace euclidien usuel la circonférence de sa base.

(a) *Une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^2$. — (b) *Identification de* $\mathbb{P}^1$. —

FIGURE 3.3.4 : *Espace projectif de dimension* 1. —

(a) *Une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}^3$. — (b) *Identification de* $\mathbb{P}^2$. —

FIGURE 3.3.5 : *Espace projectif de dimension* 2. —

On peut identifier les espaces projectifs de proche en proche de la manière suivante :

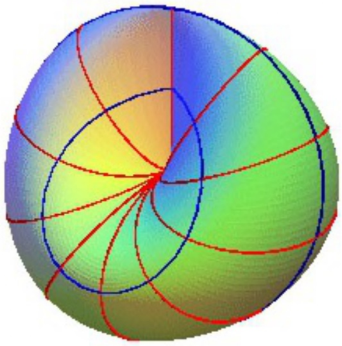


FIGURE 3.3.6 : *Vue de* $\mathbb{P}^2$. —
L'espace $\mathbb{P}^2$ ne se plonge pas dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (difficile). Puisque c'est une variété différentielle compacte, il reste simple de le plonger dans un espace euclidien, mais nécessairement plus grand.

Proposition. ***(Identification des espaces projectifs)***

On a les homéomorphismes suivants :

$$P_n(\mathbb{R}) \underset{1}{\overset{\sim}{\longleftarrow}} S^n/\{\pm 1_{n+1}\} \underset{2}{\overset{\sim}{\longleftarrow}} B^n/(x \sim -x, x \in S^{n-1}) \underset{3}{\overset{\sim}{\longleftarrow}} P_{n-1}(\mathbb{R}) \bigcup_{q^{n-1}} e_n,$$

où $q^{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$, qui donnent donc inductivement la structure de CW-complexes finis.

▷ L'injection canonique $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ induit $S_n/\{\pm id\} \twoheadrightarrow P_n(\mathbb{R})$ qui est clairement bijectif et continu, quotient possible à gauche, car deux points antipodaux définissent la même droite. On a une application continue $\alpha_n : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow S^n$, $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$ qui induit la bijection réciproque. Comme cette application qui l'induit est continue, on a le premier homéomorphisme.

On a l'application continue $f : B^n \longrightarrow S^n$ et $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$. Par suite, elle induit une application continue bijective $B^n/(\{x \sim -x\}) \longrightarrow S^n/\{\pm I_{n+1}\}$ qui est un homéomorphisme. En effet, on a $q \circ f(x) = q \circ f(y)$ si et seulement si $x = y$ ou ($y = -x$ et $\|x\| = \|y\|$). En outre, l'espace $B^n/(...)$ est quasi compact et $S^n/\{\pm I_{n+1}\}$ est séparé, le graphe de l'action de $\{\pm I_{n+1}\}$ étant fermé. D'où le résultat.

Soit $Y = B_n/(x \sim -x \text{ si } x \in S^{n-1})$, espace qui d'après le deuxième homéo égale $P_n(\mathbb{R})$. On a l'application composée $S^{n-1} \hookrightarrow B^n \longrightarrow Y$ continue qui en passant au quotient induit une application continue $j_2 : P_{n-1}(\mathbb{R}) \longrightarrow Y$. Soit $j_1 : B^n \longrightarrow Y$ l'application quotient canonique. On montre que Y

avec ces applications est universel pour le diagramme ci-dessous, d'où $Y = P_{n-1}(\mathbb{R}) \coprod_{q^{n-1}} B^n$.

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "q_{n-1}"] \arrow[d, "i_n"'] & P^{n-1}(\mathbb{R}) \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, "\forall \alpha_2 \text{ cont.}"] & \\
B^n \arrow[r, "j_1"] \arrow[drr, "\forall \alpha_1 \text{ cont.}"'] & Y \arrow[dr, dotted, "\exists h \text{ cont.}"] & \\
& & Z
\end{tikzcd} \qquad t.q.\ \alpha_2 \circ q_{n-1} = \alpha_1 \circ i_n$$

Comme j_1 est surjectif, l'application h est unique si elle existe. Dans ce cas, on a $h \circ j_1 = \alpha_1$ qui est continue, donc h est continue. Si on se donne α_1, α_2 telle que demandées, alors pour $x \in S^{n-1}$, on a $\alpha_1(x) = \alpha_1 \circ i_n(x) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(-x) = \alpha_1 \circ i_n(-x) = \alpha_1(-x)$. Par la propriété universelle de $j_1 : B \longrightarrow Y$, on obtient $h : Y \longrightarrow Z$ telle que $h \circ j_1 = \alpha_1$ et pour $u = q_{n-1}(v) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, on a :

$$h \circ j_2(u) = h \circ j_2 \circ q_{n-1}(v) = h \circ j_1 \circ i_n(v) = \alpha_1 \circ i_n(v) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(v) = \alpha_2(u),$$

et c'est fini. ■

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Heuristique

Il faut penser aux tentes Décathlon, qui sont des ronds, et que l'on le replie en huit jusqu'à en faire un point.

3.3.6.6 Sphère de Riemann

3.3.7 Simplexes

Définition. ***(Simplexe)***

Soit $E = \mathbb{R}^N$ où $N \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *n-simplexe (géométrique)* l'enveloppe convexe σ d'un ensemble de $n+1$ points $\{V_0, \ldots, V_n\}$ de $\mathbb{R}^N$, appelés *sommets* de σ, affinement indépendants.

$\longrightarrow$ *Convention.* Soit k un entier naturel. On appelle donc *k-simplexe* tout k-gone régulier dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

A priori $n \neq N$.

Fait. ***(Fermeture des simplexes)***

Tout simplexe est fermé.

En effet, c'est une enveloppe convexe d'un fermé borné en dimension finie.

$\longrightarrow$ *Notation.* Comme seule la donnée combinatoire des $n+1$ points $V_0,\ldots,V_n$ nous intéresse, nous noterons souvent un simplexe géométrique par $\langle V_0,\ldots,V_n\rangle$.

Définition. ***(Face d'un simplexe)***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma = \langle V_0,\ldots,V_n\rangle$ un n-simplexe géométrique. La i-ième *face* de σ pour $i \in [\![0,n]\!]$ est le simplexe $[V_0,\ldots, \hat{V_i},\ldots,V_n]$ avec la notation habituelle d'ommission. Plus généralement, si $I \subseteq [\![0,n]\!]$, la I^e *face* du simplexe σ est le *sous-k-simplexe* de σ engendré par $(V_i)_{i\in I}$ où $k = \mathrm{card}(I)$. Le j^e *sommet* de σ est la $\{j\}^{\mathrm{e}}$ face $\langle V_j\rangle$ pour $j \in [\![0,n]\!]$.
Une *face propre* de σ est un simplexe engendré par un sous-ensemble strict de $\{V_0,\ldots, V_n\}$.

Proposition. ***(Bord d'un simplexe)***

Le bord d'un simplexe est la réunion de toutes ses faces propres.

$\triangleright$ Voici une propriété évidente pour n'importe quel topologue mais qu'il faut prendre avec des pincettes pour démontrer avec rigueur. Notons b la réunion des faces propres du simplexe σ. Soit $x \in \sigma \setminus b$. Notons $d = d(x,\sigma)$. Par convexité, $B(x,d) \subseteq \sigma$. Ainsi, $x \in \mathring{\sigma}$. Soit maintenant $x \in b$. On a que $x \in [V_0,\ldots,\hat{V_i},\ldots,V_n]$ pour un $i \in [\![1,n]\!]$. Supposons qu'une boule $B(x,r)$ soit incluse dans σ. En particulier, en notant u un vecteur directeur unitaire de la droite portant $[V_i,x]$, $y = x + \frac{r}{2}u$ est dans $B(x,r)$. Il est donc dans σ. Cependant, $Conv([V_i,x] \cup [V_0,\ldots,\hat{V_i},\ldots,V_n]) = \sigma$ ne contient pas y ; en effet, $y \in Conv([V_i,y] \cup [V_0,\ldots,\hat{V_i},\ldots,V_n]) \supsetneq sig$ puisque $[V_i,y] = [V_i,x] \sqcup]x,y]$. Absurde, donc il n'existe pas de telle boule, donc $x \in \partial\sigma$. ■

3.3.7.1 Simplexes standard

Définition. ***(Simplexe standard)***

Soit k un entier naturel. Le *k-simplexe (géométrique) standard* est

$$T^k := \{(x_0,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1} \mid x_0 + \ldots + x_k := \|x\|_1 = 1\}.$$

Autrement dit, c'est le k-simplexe associé à la base canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note aussi Δ_n, Δ^n, $|\Delta^n|$ le n-ième simplexe standard pour $n \in \mathbb{N}$. On note alors $\delta|\Delta^n|$ sa frontière, souvent appelée *bord* à cause de son application en homologie simpliciale.

Fait. ***(Bord du simplexe standard)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas du n-simplexe standard, son bord est $\bigcup_i \partial_i \Delta_n$ où $\partial_i \Delta_n$ est la i-ième face de Δ_n pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. L'intérieur du n-simplexe standard est alors $\Delta_n \smallsetminus \partial\Delta_n$.

Exemples. ***(Simplexes standard)***

1. Pour $k = 0$, le 0-simplexe standard est le point.
   Il est réalisé par le point (1) dans $\mathbb{R}^1$.
2. Pour $k = 1$, le 1-simplexe standard est le segment.
   Il est réalisé par $[(0,1),(1,0)]$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. Pour $k = 2$, le 2-simplexe standard est le triangle (plein).
   Il est réalisé par $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$ dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$.
4. Pour $k = 3$, le 3-simplexe standard est le tétraèdre (plein).
   Il est réalisé par $[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]$ dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$.

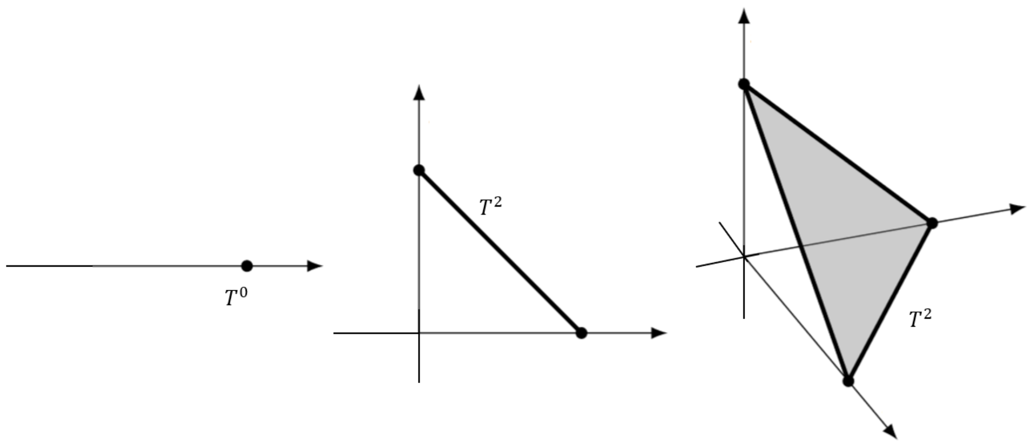


FIGURE 3.3.7 : *Les trois premiers simplexes standards.* —

Exercice 10 *(Volume du tétraèdre dans $\mathbb{R}^4$)*

Quelle est la mesure de Lebesgue de Δ_3 ?

Remarque. Les simplexes standards sont souvent orientés comme un graphe muni d'un unique cycle et leurs sommets sont alors caractéristiquement nommés.

3.3.7.2 Géométrie des simplexes

3.4 Constructions d'espaces topologiques

3.4.1 Cylindres

Définition. ***(Cylindre d'une espace)***

Soit X un espace topologique. Le *cylindre de/sur/de base* X est l'espace produit

$$\mathfrak{C}(X) = \mathrm{Cyl}(X) = X \times I$$

où $I = [0,1]$ est muni de la topologie usuelle issue de $\mathbb{R}$.

3.4.2 Cônes

Définition. ***(Cône d'une espace)***

Soit X un espace topologique. Le *cône* de X est l'espace quotient

$$C(X) = \mathrm{Cone}(X) = \mathfrak{C}(X)/(X \times \{1\}).$$

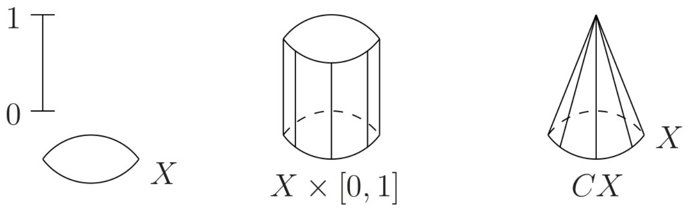


FIGURE 3.4.1 : *Construction pas à pas du cône d'un espace X.* —

Proposition. ***(Isotropie des cônes)***

Soit X un espace topologique. On a aussi $CX \simeq \mathfrak{C}/(X \times \{0\})$.

▷ Il suffit d'exhiber un automorphisme au sens topologique de [0,1] qui envoie 0 sur 1, par exemple $t \mapsto 1 - t$. ■

Proposition. ***(Plongement d'un espace dans son cône)***

Soit X un espace topologique. Alors l'application $X \longrightarrow CX$ qui à $x \mapsto \overline{(x,0)}$ est continue et un homéomorphisme sur son image.

▷ Cette application est continue par composition d'application continues. Elle est clairement injective. Or $X \hookrightarrow X \times I \longrightarrow CX$ est une application quotient par $X \times \{1\}$, qui est fermé dans $X \times I$: en notant i l'injection canonique, $i(X) \subseteq X \times I \setminus X \times \{1\}$. Ainsi X est un homéomorphisme sur son image. ■

Remarque. Pour tout $s \in [0,1[$ en fait, l'application $X \longrightarrow CX$ qui à $x \mapsto \overline{(x,s)}$ est un homéomorphisme sur son image.

Définition. ***(Sommet d'un cône)***

Le *sommet* d'un cône est le point $\overline{(x,1)}$ de CX pour n'importe quel $x \in X$. Il est bien défini par construction.

Proposition. ***(Fonctorialité du cône)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $CX \longrightarrow CY$, $Cid_X = id_{CX}$ et $C(f \circ g) = Cf \circ Cg$.

▷ On a $f(X \times \{1\}) \subseteq Y \times \{1\}$. On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d] & Y \times I \arrow[d] \\ CX \arrow[r, "Cf"] & CY \end{tikzcd}$$

par propriété universelle du quotient. ■

Proposition. ***(Séparation du cône)***

Le cône d'un espace séparé est séparé.

▷ Soit R la relation $R_{X \times \{1\}}$, c'est-à-dire, $xRy \iff x = y$ ou $xety \in X \times \{1\}$. Si $F \subseteq X \times I$, alors $RF = F$ si $F \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$ ou $= F \cup (X \times \{1\})$ sinon.Soient $a = (x,s)$ et $b(y,t)$ deux points de $X \times I$ tels que $\overline{(x,s)} \neq \overline{(y,t)}$. On disjoint les cas.

Si $s = 1$, alors $t \neq 1$. Soient U,V des ouverts disjoints de $[0,1]$ qui contiennent $s = 1$ et t (c'est possible !). Alors $X \times U$ et $X \times V$ sont des ouverts saturés disjoints qui séparent a et b, et c'est fait.

Si $t = 1$, c'est pareil.

Si $s,t \neq 1$ et $s \neq t$, soient U,V des ouverts disjoints de $[0,1]$ qui séparent s et t. Alors $X \times U$ et $X \times V$ conviennent encore.

Si $s,t \neq 1$ et $s = t$. Alors $x \neq y$. Soient V_x, V_y des ouverts de X qui séparent x et y, X étant séparé. Alors $V_x \times [0,1[$ et $V_y \times [0,1[$ sont des ouverts saturés qui séparent x et y. Tous les cas sont traités. ■

Exemple. ***(Cône d'une sphère)***

On a $CS^{n-1} = B^n$.

En effet, le cylindre d'une sphère est un cylindre, et son cône est homéomorphe à une boule.

3.4.3 Suspensions, doubles cônes

Définition. ***(Suspension d'une espace)***

Soit X un espace topologique. La *suspension* de X est l'espace quotient $S(X) = \Sigma(X) = X \times [-1,1]/R$ où :

$$(x,s)R(y,t) \iff (x,s) = (y,t), \quad s = t = 1, \quad s = t = -1.$$

Autrement dit : $S(X) = X \times [-1,1]/X \times \{-1,1\}$.

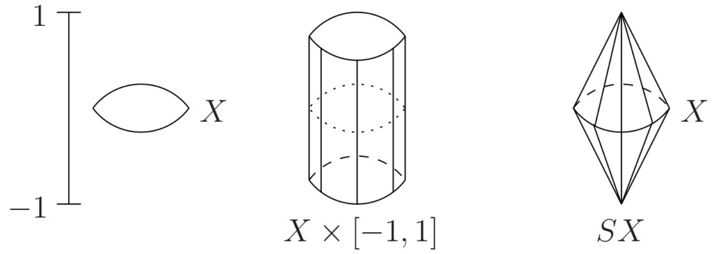


FIGURE 3.4.2 : *Construction pas à pas de la suspension d'un espace X. —*

Proposition. ***(Plongement d'un espace dans sa suspension)***

Soit X un espace topologique. Alors l'application de X dans SX qui à x fait correspondre $\overline{(x,0)}$ est un homéomorphisme sur son image.

Remarque. Même remarque que pour le cône avec $s \in$]-1,1[.

Proposition. ***(Fonctorialité de la suspension)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $SX \longrightarrow SY$, $Sid_X = id_{SX}$ et $S(f \circ g) = Sf \circ Sg$.

Proposition. ***(Séparation de la suspension)***

La suspension d'un espace séparé est séparée.

Proposition. ***(La suspension est un double cône)***

Soit X un espace topologique. Alors $S(X) \simeq CX/X \times \{0\}$.

Exemple. ***(Suspension de la sphère)***

On a $SS^{n-1} = S^n$.

Exercice 11 *(Homéomorphisme de renversement d'orientation)*

Montrer que $(x,t) \mapsto (x,1-t)$ est un automorphisme de toute suspension.

3.4.4 Écrasements

Exemple très simple déjà rencontré en exemple dans la topologie quotient, on revient sur cette construction extrêmement classique.

Définition. ***(Écrasement d'un espace sur une partie)***

Soit X un espace topologique est $A \subseteq X$. On appelle *écrasement de X sur A* l'espace topologique quotient $X/A := X/\langle A\rangle$ où X est quotient par la relation d'équivalence :

$$x \sim_A y \iff x = y \text{ ou } (x,y) \in A^2.$$

C'est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous $x,y \in A$.

FIGURE 3.4.3 : *Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule.* — En vérité, les deux espaces étaient déjà homéomorphes...

Proposition

Si A est ouverte ou fermé, la restriction de la projection canonique à $X \setminus A$ est un homéomorphisme sur son image.

Proposition. ***(Suspension par écrasement)***

Le cône, la suspension sont des écrasements.

3.4.5 Recollements, bouquets

Une généralisation (la dernière propriété va vous surprendre !).

Définition. ***(Recollement le long d'un espace)***

Soient X,Y et A des espaces topologiques. On prend des applications $f : A \longrightarrow X$ et $g : A \longrightarrow Y$ des applications continues. On note $X \coprod_A Y$ le *recollement le long de* A, par abus de notation (le recollement dépend d'une certaine application en fait, d'ailleurs non nécessairement injective), le quotient $X \coprod Y/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par les $\{f(a)\mathcal{R}g(a), a \in A\}$.

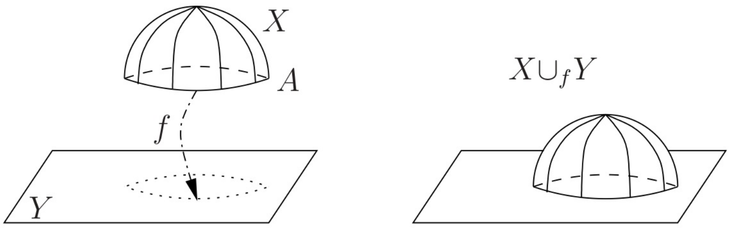


FIGURE 3.4.4 : *Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.* —

Une autre façon de voir les choses est la suivante :

Propriété. ***(Propriété universelle du recollement le long d'un espace)***

On reprend les notations précédentes. Alors $\iota_X : X \longrightarrow X \coprod_A Y$ est continue, de même pour ι_Y. On a $\iota_X \circ f = \iota_Y \circ g$. De plus, pour tout espace Z, pour toutes $j_X : X \longrightarrow Z$ et $j_Y : Y \longrightarrow Z$, $j_X \circ f = j_Y \circ g$ alors il existe une unique flèche continue $h : X \coprod_A Y \longrightarrow Z$ telle que le diagramme suivant commute, *i.e.* $h \circ \iota_Y = j_Y$ et $h \circ \iota_X = j_X$.

▷ Propriété universelle du quotient :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\iota_X"] \arrow[ddr, bend left, "j_X"] & \\
Y \arrow[r, "\iota_Y"'] \arrow[drr, bend right, "j_X"'] & X \coprod_A Y \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & Z.
\end{tikzcd}$$

■

Il y a donc au moins trois façons pratiques de recoller des espaces :

- exhiber un recollement (une application f)

- vérifier la propriété universelle
- reconnaître un recollement usuel.

Il faut bien que les deux ensembles d'images coïncident !

Heuristiquement, on va utiliser le recollement dans le cas où les ι sont injectives, où l'image de A est dans la frontière de l'espace et donc A pris comme sous-espace de X ou de Y. L'idée est de recoller des morceaux d'espaces le long de leurs bords.

Exemples. ***(Recollements)***

1. Soit $X = Y = [0{,}1]$ et $A = \{\star, \cdot\}$ muni de la topologie discrète. On prend $f(\star) = 0 = g(\cdot)$ et $f(\cdot) = 1 = g(\star)$. Alors $X \coprod_A Y \cong S^1$.
2. Un *espace topologique pointé*[a] est une paire (X, x_0) où $x_0 \in X$ est appelé *point base*. Soient (Y,y_0) un deuxième espace topologique pointé. Prenons le singleton $A = \{\star\}$. Pour $f : A \longrightarrow X$ constante x_0 et g de même, le *bouquet* de $(X,x_0), (Y,y_0)$ est l'espace $X \coprod_A Y$ dit *pointé par l'image de* $x_0 \neq y_0$. On le note $X \vee Y$ mais on dit souvent « X wedge Y » selon l'usage anglais, bien que ce ne soit pas un symbole de wedge en informatique. Intuitivement, on prend un point de chaque espace, on les identifie tous et on tient ce point au bout des doigts.
   Formellement, on l'appelle également *somme pointée* et l'on note $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) = \left(\coprod_{i\in I} X_i\right)/R$ où R est engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i,j.
3. *(Attachement cellulaire)* Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant. Soit S^n la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ et B^n la boule de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\partial B^n = S^{n-1}$ (pour se rappeler le décalage, écrire $\mathrm{Fr}(B^2) = S^1$).
   Puisque B^n est fermé, on a une inclusion canonique de la $(n-1)$-sphère dans la n-boule $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$. Si X est un espace topologique, et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est continue, on note $X \bigcup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$ au moyen de φ ; dans le recollement, les applications f,g n'étaient pas les plus importantes ; ici, c'est le contraire, l'espace A est toujours le même, c'est l'application φ qui est importante. On dit alors qu'on a *recollé une n-ellule à X* et qu'on obtient *$X \cup_\varphi e^n$ en attachant une n-cellule le long de φ*.

[a] Il existe une vraie dichotomie entre les espaces topologiques et les espaces topologiques pointés.

Remarque importante. On signale une définition alternative du recollement, ne faisant intervenir qu'une seule application.

Soient X,Y deux espaces topologiques. Si A est une partie de X et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. Le *recollement de X sur Y par f* est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ et la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.

Proposition

On vérifie que si A est ouvert ou fermé, la projection canonique $X \coprod Y \longrightarrow X \cup_f Y$ induit sur Y un homéomorphisme sur son image qui est de même nature.

Autrement, ce n'est pas clair.

Curiosité. ***(L'écrasement est un recollement)***

Si Y est réduit au point $\star$ (notation homotopique), alors f est l'application constante la seule qui existe et l'inclusion de X dans $X \coprod \star$ induit un homéomorphisme $X/\langle A\rangle \simeq X \cup_f \{\star\}$.

Proposition

Si A est non vide, le recollement de deux connexes ou connexe par arcs est de même nature.

On verra d'autres exemples de recollements dans la partie sur les espaces cellulaires, tels que l'attachement cellulaire.

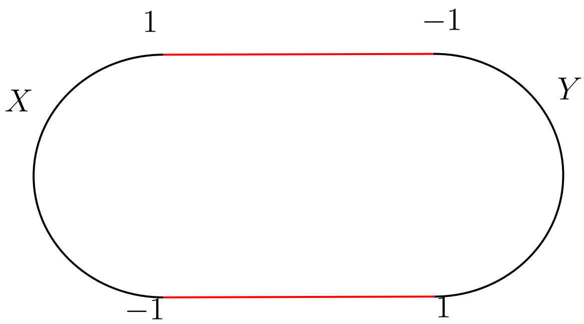


Figure 3.4.5 : *Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle.* —

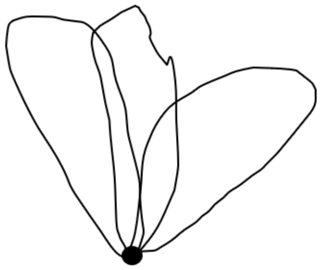


FIGURE 3.4.6 : *Bouquet à trois* fleurs. —
Toutes les formes sont à prévoir à homéomorphie près.

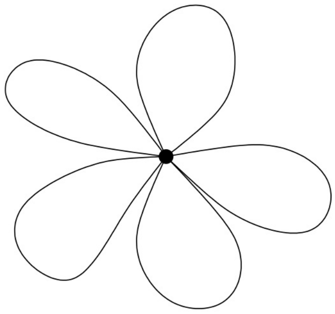


FIGURE 3.4.7 : *Bouquet à cinq cercles.* —
C'est la vision la plus proche de l'intuition.

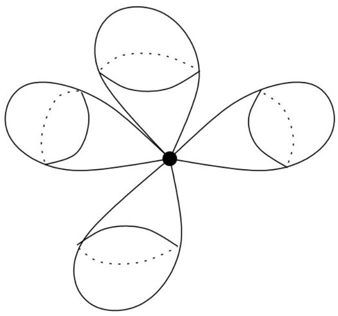


FIGURE 3.4.8 : *Bouquet à quatre sphères.* —
Noter qu'il est impossible de le représenter correctement en trois dimensions.

3.4.6 Joints

3.5 Propriétés topologiques classiques

3.5.1 Le caddie de contre-exemples

3.5.1.1 Droite de Sorgenfrey

3.5.1.2 Plan de Sorgenfrey

3.5.1.3 Droite de Michael

3.5.2 Séparation

Définition. ***(Espace séparé)***

Soit X un espace topologique. Alors X est séparé si pour tous $x \neq y$ dans X, il existe deux ouverts (ou, de façon équivalente, deux voisinages) disjoints qui contiennent x,y respectivement.

▷ Immédiat. ■

Remarques.

1. La topologie discrète est toujours séparée.
2. La topologie grossière n'est jamais séparée.

Exemple. ***(Dédoublement du segment unité)***

Soient 0_- et 0_+ deux ensembles distincts n'appartenant pas à $[0,1]$. On considère $X =]0,1] \cup \{0_+\} \cup \{0_-\}$. On note $\mathcal{B}(x) = \{]x-1/n, x+1/n[\cap[0,1], n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in]0,1]$, $\mathcal{B}(0_+) = \{\{0_+\}\cap]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathcal{B}(0_-) = \{\{0_-\}\cap]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors $\mathcal{B}(x)$ est une base d'ouverts d'une topologie sur X. Autrement dit, on considère $[0,1]$ muni de sa topologie induite auquel on adjoint une copie c du point 0 tel que $c\cup]0,1]$ ait la même topologie que $[0,1]$.
Alors X n'est pas séparé pour cette topologie.
En effet, 0_+ et 0_- n'admettent pas de voisinages disjoints.

Propriété. ***(Fermeture des singletons)***

Soit X un espace séparé. Alors les singletons sont fermés.

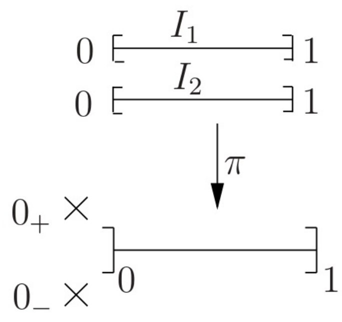


Figure 3.5.1 : *La suspension du segment unité, non séparée.* — On parle de *segment à deux origines*.

Contre-exemple. ***(Topologie non séparée donc les singletons sont fermés)***

Soit $X = \mathbb{C}$ que l'on munit de la topologie de Zariski $\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad U = \{x \in \mathbb{C}, P(x) \neq 0\}\}$. Alors les points du plan complexe sont Zariski-fermés mais la topologie de Zariski n'est pas séparée. □

Propriété. ***(Stabilité de la séparation par induction)***

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

On montre qu'un produit d'espaces séparés est séparé. La preuve dans le cas fini est extrêmement élémentaire ; dans le cas infini, c'est plus dur.

Propriété. ***(Produit fini d'espaces séparés)***

Le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

▷ Soient (x_1,y_1) et $(x_2,y_2) \in X \times Y$ distincts. On peut, sans perte de généralité, supposer $x_1 \neq x_2$. Puisque X est séparé, on peut trouver deux ouverts U_1,U_2 tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $x_i \in U_i$. Ainsi $U_1 \times Y$ et $U_2 \times Y$ sont des ouverts disjoints qui contiennent (x_1,y_1) et (x_2,y_2) respectivement. Ainsi $X \times Y$ est séparé. ■

Théorème. ***(Produit d'espaces séparés)***

Soit I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides munis de leurs topologies respectives. Alors $\prod_{i\in I} X_i$, muni de la topologie produit, est séparé, si et seulement si, chaque terme X_i est séparé.

▷ Nous montrons le sens direct. Supposons les X_i séparés. Soient $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$ tels que $x \neq y$. Par définition, il existe un certain $i \in I$ tel que $x_i \neq y_i$. Puisque X_i est séparé, il existe U,V deux ouverts disjoints de X_i qui séparent x et y. Alors $X \times X \times ... \times U \times ... \times X$ et $X \times X \times ...V \times ... \times X$

sont deux ouverts disjoints de $\prod_{i \in I} X_i$ contenant respectivement x et y.

Les injections canoniques forment des homéomorphismes sur leurs images. Ainsi les X_i s'identifient à des sous-espaces de $\prod_{i \in I} X_i$, qui sont donc sépraés comme sous-espaces d'espaces séparés. ■

3.5.2.1 Autres axiomes de séparation

Propriété. ***(Caractérisation pratique des T_0)***

Un espace topologique X est T_0 si et seulement si pour tous $x,y \in X$, si $x \in \overline{\{y\}}$ et si $y \in \overline{\{x\}}$, alors $x = y$.

▷ Notons $(\star)$ cette propriete.

$(\star) \implies T_0$: supposons $x \neq y$. Alors quitte à renommer, x n'est pas dans l'adhérence de $\{y\}$. Ainsi, $\{y\}^c$ est un voisinage ouvert de x qui ne contient pas y.

$T_0 \implies (\star)$: supposons $x \neq y$. Alors quitte à renommer, il existe un voisinage ouvert V de x qui ne contient pas y. Ainsi, $V^c \ni y$, donc $\{y\} \subseteq V^c$ qui est fermé, d'où $\overline{\{y\}} \subseteq V^c$ et donc $\overline{\{y\}} \not\ni x$. ■

3.5.2.1.1 Régularité complète

Lemme

Tout espace localement compact est complètement régulier, en particulier régulier.

▷ Tout espace localement compact X étant séparé par définition, vérifions que X vérifie $T_{3\frac{1}{2}}$. Soient $x \in X$ et F un fermé de x ne contenant pas x, de complémentaire U. Notons X^* le compactifié de X. Alors U est un ouvert de X^*, donc de $C = X^* \setminus U$ est un fermé de X^* qui contient F. D'autre part, X^* est normal, car compact. Puisque $\{x\}$ est fermé dans X^* par séparation de X^*, le lemme d'Urysohn donne une fonction continue $X^* \to [0,1]$ telle que $f(x) = 0$ et $f(C) = 1$. En considérant $f_{|X}$, le tour est joué. ■

3.5.3 Dénombrabilité

Voir la première section : Axiomes de dénombrabilité, Séparabilité.

3.5.4 Métrisabilité

Mnémonik : un espace est métrisable s'il est maîtrisable.

Lemme

Tout espace topologique plongé dans un espace métrique est métrisable.

Propriété

Tout espace métrisable est séparé.

Réciproquement :

Théorème. ***(Théorème de métrisation d'Urysohn)***

Tout espace topologique régulier à base dénombrable est métrisable.

3.5.4.1 Produits d'espaces métrisables

Tout produit fini d'espaces métrisables est métrisable grâce à la distance produit. Dans le cas dénombrable, c'est encore possible grâce à un procédé diagonal. Dans le cas infini quelconque, c'est encore possible, grâce à l'axiome du choix ! Mais la métrique obtenue est bien loin des métriques élémentaires.

3.5.5 Compacité

Remarque. Il suffit de vérifier, pour montrer qu'une partie est compacte, que de tout recouvrement *éventuellement dépassant*, on peut extraire un recouvrement fini.

Méthode. ***(Travailler un compact en topologie générale)***

Pour tout point $x \in$ truc, il existe un ouvert U_x et la collection des U_x recouvre X. Souvent, par séparation, on a en fait un ouvert $V_{f(x)}$ dual. Il en existe donc un nombre fini qui recouvre X. Alors l'intersection de leurs duaux est encore un ouvert vérifiant la propriété voulue.

Propriété. ***(Sous-espace compacts)***

Les sous-espaces (quasi-)compacts d'un espace séparé sont ses fermés.

▷ En effet, si X est compact et $A \subseteq X$ est fermé, alors A est compact. D'autre part, si X est séparé et $K \subseteq X$ est compact, alors K est fermé dans X. ■

Le fait que la notion de compacité soit extrinsèque, confirme que tous les sous-espaces d'un compact ne peuvent être compact.

Ceci d'autant plus que tout espace se plonge dans un espace compact, dans lequel il est n'est donc pas fermé...

On énonce maintenant une propriété qui rend compte du fait qu'un espace compact est en particulier localement compact.

Lemme

Tout point d'un espace compact admettant un voisinage ouvert U admet un voisinage fermé V contenu dans U.

$\triangleright$ Soit x un tel point et notons X l'espace compact dont il est question. On sait que $\mathrm{Fr}(U)$ est un fermé inclus dans X, donc il est compact. Par séparation, pour tout $t \in U$, il existe un voisinage ouvert V_t de t et un voisinage F_y de x dans U disjoints. Puisque $(V_y)_{y \in \mathrm{Fr}(U)}$ recouvre $\mathrm{Fr}(U)$, on peut en extraire un sous-recouvrement fini indexé par disons $t_1,\dots,t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_0 = F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_n}$ est un voisinage de x dans U ne rencontrant aucun des termes d'un recouvrement de $\mathrm{Fr}(U)$, donc $F := \overline{F_0} \subseteq U = \overline{U} \setminus \mathrm{Fr}(U)$. ■

Propriété. ***(Raffinement relativement compact d'un recouvrement)***

Soient X un espace compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X avec I un ensemble quelconque. Alors il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in J}$ de X avec $J \subseteq I$ fini, $V_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in J$ et $\overline{V_i} \subseteq U_i$ compact ; on dit que V_i est *relativement compact dans* U_i. En particulier, $(\overline{V_i})_{i \in J}$ est un recouvrement fini de X par des compacts qui est un raffinement de $(U_i)_{i \in I}$.

$\triangleright$ Une façon de raisonner est d'utiliser la compacité locale d'un espace compact. Soit $x \in X$. Il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$. D'après le lemme précédent, on peut trouver un voisinage F_{i_x} de x avec $F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$. Posons $V_x = \mathring{F}_{i_x}$ de sorte que $x \in V_x$ pour tout $x \in X$. Alors V_x est relativement compact, puisque son adhérence est un fermé inclus dans X qui est compact. La famille $(V_x)_{x \in X}$ est un recouvrement de X dont on peut extraire un sous-recouvrement fini qui est bien par construction un raffinement de $(U_i)_{i \in I}$, de plus $\overline{V_x} \subseteq \overline{F_{i_x}} = F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$ pour tout x, et toutes les conditions sont remplies. ■

3.5.5.1 Compacts, quasi-compacts et applications continues

Contre-exemple. ***(Un quasi-compact non séparé)***

Tout ensemble fini non séparé, par exemple, $\{a,b\}$ muni de la topologie grossière, est quasi-compact sans être séparé, donc ne peut être dit *compact*. □

Propriété. ***(Image d'un quasi-compact)***

L'image d'un quasi-compact par une application continue est quasi-compacte.

Propriété. ***(Image d'un compact)***

L'image d'un compact par une application continue **à valeurs dans un espace séparé** est compacte.

C'est propriété est très forte, car l'image d'un fermé par une application continue n'a aucune raison d'être fermée, même dans l'image. La compacité permet de rendre les choses bien plus fortes. On en déduit une propriété suivante.

Théorème. ***(Isomorphisme de compact)***

Soient X,Y deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective continue. Si X est quasi-compact et Y est séparé, alors f est un homéomorphisme.

▷ Montrons que f est fermée. Soit F un fermé de X, c'est un compact. Ainsi $f(F)$ est un compact, donc un fermé. ■

Heuristique

L'idée selon laquelle un compact est petit est trompeuse, tout simplement car la taille est une notion relative. Il est plus intéressant de remarquer qu'un espace n'est pas compact s'il lui manque quelque chose ; de là on déduit qu'un compact ne peut pas « s'étendre à l'infini ».
À méditer, les plongements suivants :

$$B_{\mathbb{C}}(0,1) \hookrightarrow \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}¶^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où les espaces compacts de cette suite sont $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$ et $\mathbb{C}¶^1$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$.

3.5.5.2 Applications propres

Fait

Toute application propre est fermée.

Propriété. ***(Caractérisation de la propreté par les fibres)***

Soit Y un espace séparé et localement compact. Soit X un espace quelconque. Une application continue $f : X \to Y$ est propre si et seulement si f est fermée et les fibres de f sont fermées au-dessus de chaque élément de Y.

3.5.5.3 Produit d'espaces compacts

On signale le lemme du tube, parfois utilisé.

Lemme. ***(Lemme du tube)***

Soient X,Y deux espaces topologiques, Y quasi-compact. Soit $x \in X$. Alors tout ouvert contenant $\{x\} \times Y$ contient un ouvert élémentaire $U \times Y$ contenant cette partie.

▷ Soit O un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x\} \times Y$. Par définition, pour tout $y \in Y$, $(x,y) \in O$. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert élémentaire $U_y \times V_y$ contenant (x,y) contenu dans O. En particulier, $(V_y)_y$ est un recouvrement ouvert du quasi-compact Y. On peut en extraire un sous-recouvrement fini, indexé par Z. Posons $U = \bigcap_{y \in Z} U_y$. Alors l'ouvert U contient x et la réunion des V_y, $y \in Z$ vaut Y donc $U \times Y \subseteq O$. ■

Remarques.

1. C'est faux dans le cas général ! L'hypographe avec l'axe des abscisses de la fonction inverse, contient la droite des ordonnées ; elle ne contient aucun tube contenant la droite des ordonnées.
2. On peut montrer que le lemme du tube équivaut à la quasi-compacité de Y : pour tout Y non quasi-compact, on peut trouver un x ne vérifiant pas la propriété du lemme.

Propriété. ***(Produit fini d'espaces compacts)***

Le produit de deux espaces quasi-compacts est quasi-compact.

▷ *(Preuve sans le lemme du tube (explicitement).)* Soient X,Y deux espaces quasi-compacts. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour tous $(x,y) \in X \times Y$, je choisis $i(x,y) \in I$ tel que $(x,y) \in O_{i(x,y)}$ et des ouverts $U_{(x,y)}$ et $V_{(x,y)}$ de X et Y contenant x et y tels que $U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subseteq O_{i(x,y)}$. Si on fixe x, les $V_{i(x,y)}$, $y \in Y$ recouvrement ouvert de Y. Puisque Y est quasi-compact, il existe un sous-ensemble fini $Y_x \subseteq Y$ tel que les $V_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$ recouvrent Y. Or, pour $U_x = \cap U_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$ forment un recouvrement de X par des ouverts, car Y_x est fini. Donc il existe $X_0 \subseteq X$ tel que $(U_x)_{x \in X_0}$ est un recouvrement fini de X. Ainsi, les $O_{i(x,y)}$, $y \in Y_x$, $x \in X_0$ forment un recouvrement ouvert fini de $X \times Y$. ■

Dans le cas général (assez surprenant par ailleurs !), on a besoin de l'axiome du choix.

On montre d'abord un lemme technique.

Théorème. ***(Théorème de compacité d'Alexander)***

On dit qu'un mauvais recouvrement d'un espace topologique X est un recouvrement dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini. Clairement, un espace séparé est compact si et seulement s'il n'admet aucun mauvais recouvrement ouvert.
Soit A une prébase d'ouverts de X. On prétend que si X admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de A.

▷ En effet : soit M l'ensemble des mauvais recouvrements ouverts de X ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit $(U_j)_{j \in J}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de M. Soit $U = \bigcap_{j \in J} U_j$. Alors U majore les U_j. C'est un mauvais recouvrement ouvert de X, sinon, il contiendrait un sous-recouvrement fini V_1,...,V_n. En prenant $V_i \in U_{j_i}$ et si $\beta \in J$ vérifie $U_{i_j} \subseteq U_\beta$ pour chacun, alors U_β aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction. Donc M est inductif. Par le théorème de Zorn, soit U^* un élément maximal de M. En particulier, pour tout ouvert $V \notin U^*$, le recouvrement $U * \cup V$ n'est pas mauvais, donc il existe U_1,...,U_n dans U^* tel que $\{V, U_1,...,U_n\}$ recouvre X.

Pour terminer la preuve du lemme, remarquons deux choses. D'abord, pour tous ouverts V,V' de X, si $V \notin U^*$ et $V' \notin U^*$, alors $V \cap V' \notin U^*$. En effet, soient U_1,...,U_n et U_1',...,U_n' comme dans la remarque précédente. Alors $V \cap V', U_1,...,U_n, U_1',...,U_n'$ recouvre X, et comme U^* est mauvais, $V \cap V' \notin U^*$. Remarquons également que pour tous ouverts V,V' de X, alors si $V \notin U*$ et $V \subseteq V'$, alors $V' \notin U^*$, puisque si V,U_1,...,U_n recouvre X, alors V',U_1,...,U_n recouvrirait X aussi. Montrons enfin que $A \cap U^*$ recouvre X. Soit $x_0 \in X$. Comme U^* recouvre X, il existe $T \in U^*$ tel que $x_0 \in T$. Comme A est une prébase, il existe V_1,...,V_n dans A tels que $x_0 \in V_1 \cap ... \cap V_n \subseteq T$. Par les remarques précédentes, il existe i tel que $V_i \in U^*$. Donc $x_0 \in V_i \in A \cap U^*$. Enfin, comme U^* est mauvais, $A \cap U^*$ l'est aussi. ■

Théorème. ***(Théorème de Tychonov)***

Un produit non vides d'espaces compacts est compact si et seulement si chaque facteur est compact.

▷ Encore une fois le sens direct se déduit de la continuité des projections et de l'image continue d'un compact. Montrons donc le sens réciproque.

Revenons à la preuve. Alors le produit des espaces compacts, donc séparés, X_i, $i \in I$, est séparé, par produit quelconque de séparés. S'il n'était pas compact, alors par le lemme technique, il existerait un mauvais recouvrement de ce produit X par des éléments de la prébase $A = \{p_j^{-1}(V), j \in I, V \text{ ouvert de } X_j\}$. Pour $j \in J$, soit $\mathcal{A}_j$ l'ensemble des ouverts V de X_j tels que $p_j^{-1}(V) \in U$. Si $\mathcal{A}_j$ recouvre X_j, par compacité de X_j, il existe V_1,...,V_n dans $\mathcal{A}_j$ recouvrant X_j. Mais alors $p_j^{-1}(V_1) \cup ... \cup p_j^{-1}(V_n) = p_j^{-1}(X_j) = X$, ce qui contredit le fait que U est mauvais. Soit donc $x_j \in X_j$ tel que $x_j \notin \mathcal{A}_j$. On pose $x = (x_j)_{j \in J} \in X$. Comme U recouvre X, il existe $j \in I$ et V ouvert de X_j tel que $x \in p_j^{-1}(V) \in U$. Ceci est une contradiction. Donc $\prod_{i \in I} E_i$ est un espace compact, ce qu'il fallait montrer. ■

3.5.5.4 Locale compacité

Définition. ***(Espace localement compact)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement compact* s'il est séparé et tout point admet un voisinage compact.

Théorème. ***(Riesz)***

Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.

▷ Le sens direct vient du théorème Bolzano-Weierstrass. Montrons en quoi le théorème de Riesz implique la réciproque. Supposons que 0 admette voisinage compact, alors soit une boule fermée non triviale inclus dans ce voisinage. C'est un fermé d'un compact donc compact. Il existe donc une boule fermé non triviale compacte. Par homéomorphisme, la boule unité fermée est compacte, donc E est de dimension finie. ■

Propriété. *(Système de voisinages compacts)*

Un espace séparé X est localement compact si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

▷ La réciproque est claire. Soit X localement compact. Soit $x \in X$ et F un voisinage compact de x. Pour tout ouvert U avec $x \subseteq U \subseteq F$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage W de x fermé, contenu dans U ; il est alors automatiquement compact.

Comme X est séparé, si $y \neq x$, soient V et V' des voisinages de x et y respectivement les séparant. Alors $y \notin \overline{V}$: en effet, sinon, pour tout voisinage de y, en particulier V', $V \cap V' \neq \emptyset$. Ainsi $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V}$. Par conséquent, $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Par compacité de F, il existe des voisinages $V_1, ..., V_n$ de x tels que $(X - U) \cap \overline{V_1} \cap ... \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Alors $\overline{V_1} \cap ... \cap \overline{V_n} \cap F$ convient. ■

Corollaire. *(Ouvert dans un localement compact)*

Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.

Plus généralement :

Proposition. *(Sous-espace d'un espace localement compact)*

Un sous-espace topologique d'un espace topologique localement compact est localement compact si et seulement si on peut l'écrire comme différence de deux fermés.

3.5.5.5 Compactification d'Alexandrov

VOC On appelle *point à l'infini* d'un espace topologique, l'unique élément de $\tilde{X} \setminus X$ relatif à une construction d'un compactifié.

Propriété. *(Compactifié de l'espace)*

Le compactifié de l'espace $\mathbb{R}^n$ est la n-sphère.

Fait. *(Topologie de l'espace dans son compactifié)*

Les ouverts de X sont tous des ouverts de $\tilde{X}$.

Les fermés de X qui sont des fermés de $\tilde{X}$ sont les compacts inclus dans X.

Ces deux faits découlent directement de la construction de la topologie sur $\tilde{X}$.

Contre-exemple

$\mathbb{R}^2$ est un fermé du plan... mais pas son image dans son compactifié S^2, qui est justement la sphère privée d'un pôle ! □

3.5.5.6 Séquentielle compacité

3.5.5.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

On l'énonce.

Exercice 12

Un espace compact peut-il contenir un infini discret ?

▷ **Éléments de réponse.**

Oui : l'image de $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans [0,1].

3.5.5.6.2 Généralisations

On fait ce qu'on peut.

Exercice 13

Montrer qu'il existe un espace compact non séquentiellement compact.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit $I = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $X = \{0,1\}$. Pour $i \in I$, on note i_n sa n-ième composante. Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X définie par $f_n(i) = i_n$. Soit $(f_{n_k})_k$ une suite extraite de f qui converge dans X. Notons K l'image dans $\mathbb{N}$ de la suite $(n_k)_k$. Soit $j \in I$ tel que $j_m = 0$ si $m \in 2K$, et $j_m = 0$ sinon. On détermine l'image de $(f_{n_k})(j)$ et on montre qu'elle ne converge pas dans X.

3.5.5.7 Dénombrabilité à l'infini

Définition. ***(Espace dénombrable à l'infini, σ-compact)***

Un espace topologique X est *dénombrable à l'infini* ou *σ-compact* s'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts tels que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Exercice 14 *(Dénombrabilité à l'infini vs σ-compacité)*

Parfois, on réserve le terme de *dénombrabilité à l'infini* au cas où il existe une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i\in I}$ tels que $K_i \subseteq \overset{\circ}{K}_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que dans le cas où X est séparé, ces deux notions sont les mêmes. Contre-exemple sinon ?

Lemme

Un espace dénombrable à l'infini et localement compact admet un recouvrement dénombrable d'ouverts relativement compacts $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sorte que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\overline{U_i} \subseteq U_{i+1}$.

$\triangleright$ Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de X par des compacts. On construit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par récurrence. On pose $U_0 = \emptyset$. Supposons qu'on ait construit U_1,...,U_n comme demandé. En particulier, $Q_n = \overline{U_n} \cup K_{n-1} \subseteq X$ est compact. Pour tout $x \in Q_n$, soit U_x un voisinage ouvert de x. Par compacité locale, on peut le remplacer par V_x d'adhérence compacte $\overline{V_x} \subseteq U_x$ et l'on a encore un recouvrement de Q_n. Comme Q_n est compacte, il existe J fini tel que $(V_x)_{x\in J}$ recouvre encore Q_n, et la réunion $U_{n+1} = \bigcup_{x\in J} V_x$ est donc un voisinage ouvert de Q_n, en particulier de $\overline{U_n}$. De plus, $\overline{U_{n+1}}$ est bien compact, car $\overline{\bigcup_{x\in J} V_x} = \bigcup_{x\in J} \overline{V_x}$. Il reste à voir que $(U_i)_{i\in I}$ ainsi obtenue est un recouvrement de X. Or par construction, les U_{i+1} contiennent les Q_i et donc les K_i qui forment eux-mêmes un recouvrement, donc c'est bon. ■

Propriété. ***(σ-compact $\implies$ Lindelöf)***

Dans un espace dénombrable à l'infini, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

Curiosité

Un espace séparé à la fois de Baire et σ-compact est localement compact en au moins un point.

En particulier, dans le cas d'un groupe topologique, il est localement compact.

Propriété. ***(Produit d'espaces σ-compact)***

Tout produit fini d'espaces σ-compacts est σ-compacts.

Contre-exemple. ***(Produit de σ-compacts pas σ-compact)***

L'espace $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k,k+1]$ est σ-compact. Cependant, on montre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas σ-compact. □

3.5.5.8 Paracompacité

Définition. ***(Espace paracompact)***

Un espace topologique X est *paracompact* si et seulement si tout recouvrement ouvert admet un raffinement « localement fini », *i.e.* étant donné $(V_i)_{i\in I}$, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \ni x$ tel que $\{i \in I \mid V_i \cap U \neq \emptyset\}$ est fini.

Remarque. Un compact est paracompact.

Si $(V_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X, soit $\bigcup_{i\in I} V_i = X$, un *raffinement* est un recouvrement $(V_j)_{j\in J}$ tel que pour tout j, il existe $\varphi(j) \in I$ tel que $V'_j \subseteq V_{\varphi(j)}$. Un sous-recouvrement est un raffinement particulier.
Si l'on remplace *localement fini* par *fini* dans le définition, on retombe clairement sur la notion de compacité. Plus étonnant, si l'on remplace *raffinement* par *sous-recouvrement* dans la définition précédente, on retombe également sur la notion de compacité !

▷ Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $V \in \mathcal{U}$ non vide contenant x et posons $\mathcal{V} = \{G \cup V, G \in \mathcal{U}\}$. Alors $\mathcal{V}$ est clairement un recouvrement ouvert de X, mais puisque chacun de ses membres contient V, aucun sous-recouvrement ne peut être localement fini en x à moins qu'il soit lui-même fini. Par suite, $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement non seulement localement fini (par hypothèse) mais fini (par ce que l'on vient de dire). Ainsi, X est compact. ■

Fait. ***(Réunion disjointe de paracompacts)***

Toute réunion disjointe d'espaces paracompacts est paracompacte. Il suffit de l'écrire.

Lemme. ***(Localement compact + σ-compact $\implies$ paracompact)***

Un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact.

▷ Soit X un tel espace. Par un lemme sur la dénombrabilité à l'infini, on sait que X possède un recouvrement dénombrable $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ouverts relativement compacts avec $\overline{V_i} \subseteq V_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Remarquons en particulier que $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ est compact quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X quelconque. En tant que recouvrement de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$, ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ indexé par $J_n \subseteq I$. On considère $\mathcal{U}_n = \{U_i \cap (V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}})\}$, qui est bien un recouvrement ouvert de $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$. Posons $\mathcal{U}$ la famille des $\mathcal{U}_n$, pour n parcourant $\mathbb{N}$.

C'est un raffinement de $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. En effet, tout $\mathcal{U}_n$ est contenant dans l'un des U_i par construction. C'es encore un recouvrement, car elle recouvre $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par construction de $(V_i)_i$, $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ recouvre X. Enfin, elle est localement finie, car tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert de la forme $V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}}$ et puisque par construction ce recouvrement a une intersection triviale avec les points de $\mathcal{U}$ pour $i \geqslant n+3$ et comme tous les $\mathcal{U}_n$ sont finis, de sorte que $\bigcup_{k<n+3} U_k$ est fini. ■

Reformulation pratique. ***(Paracompacité dans le cas lclc)***

Soit X un espace topologique localement compact et localement connexe. Alors X est paracompact, si et seulement si, chaque composante connexe est dénombrable à l'infini.

▷ Il s'agit d'abord de remarquer qu'un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact. Oh, mais on vient de le faire. Le sens réciproque du théorème vient donc facilement. En effet, chaque composante connexe est fermée. Elle est donc localement compacte. Puisqu'elle est dénombrable à l'infini par hypothèse, elle est donc paracompacte. Par réunion disjointe de paracompacts, elle est paracompacte.

Le sens direct est plus complexe. On a besoin d'une propriété additionnelle : un espace est dit *fortement paracompact*, si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un raffinement $*$-fini, autrement dit tel que chaque membre n'intersecte qu'un nombre fini de membres de la collection. On peut vérifier en exercice qu'un espace paracompact et localement compact est fortement paracompact. Par suite, les composantes connexes de X sont fortement paracompactes pour les mêmes arguments que dans la preuve de la réciproque. De plus, C étant connexe, il a la propriété de Lindelöf, et donc par compacité local, C est σ-compact. ■

Exercice 15

Un espace paracompact est-il nécessairement à base dénombrable de voisinages ?

3.5.5.9 Théorème de la cornemuse

3.5.6 Complétude

3.5.7 Convexité

Propriété. ***(Produit de convexes)***

Tout produit de convexes est convexe.

▷ Car tout produit de segment fait l'affaire. ■

3.5.8 Connexité par arcs

Les notions de connexité s'énonce tout aussi bien dans un espace topologique que dans un espace métrique ou vectoriel normé. On impose directement le formalisme général.

La notion de connexité par arcs, contrairement à celle de connexité, s'introduit au moyen de celle de composante connexe (par arcs) : dans cette section, on parlera de composante connexe pour, en toute rigueur, *composante connexe par arcs*.

Définition-propriété. ***(Composantes connexes (par arcs), connexité par arcs)***

Soit X un espace topologique. Soit C une partie de X On définit la relation sur C : *être connecté par un chemin*, ou *il existe un chemin continu entre*, s'il existe $a < b \in \mathbb{R}$, et l'on peut sans perte de généralité fixer $[0{,}1]$ à cette étape, et un arc paramétré $\gamma : [a{,}b] \longrightarrow C$ (!) de classe continue tel que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$.
Cette relation est d'équivalence ; ses classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes (par arcs)* de C. On dit que C est *connexe par arcs*, ou connexe s'il n'y a pas d'ambiguïté, s'il y a une unique composante connexe : lui-même dans ce cas.
Ainsi, X est connexe par arcs si deux points quelconques de X sont toujours reliés par un chemin continu.
On montrera avec la propriété de réunion de connexe par arcs que les composantes connexes par arcs sont les parties connexes par arcs maximales pour l'inclusion.

▷ Trouver les bonnes transformations d'application pour montrer la transitivité. ■

Heuristique

La connexité par arcs est une notion extrinsèque.

Exemples. ***(Connexes par arcs)***

1. L'ensemble vide, les singletons sont connexes par arcs.
2. Tout espace vectoriel normé, tout espace affine est connexe par arcs.
3. Tout convexe, toute partie étoilée est connexe par arcs.

On a des propriétés analogues à celles générales sur les connexes. Elles se démontrent toutefois bien plus facilement.

Propriété. ***(Connexité par arcs des réunions)***

Soit X un espace topologique et $(C_i)_{i\in I}$ des connexes par arcs de X.

1. Si les C_i se rencontrent deux à deux, leur réunion est connexe par arcs.
2. Si l'intersection des C_i est non vide, même conclusion.
3. Si I est dénombrable et $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, même conclusion.

4. Si I est fini et même hypothèse, même conclusion.

▷ Dans le cas dénombrable ou fini, il s'agit d'appliquer un nombre fini de fois la transitivité de la relation d'équivalence définissant la connexité par arcs. Dans le premier cas, il suffit de l'appliquer... une seule fois. ■

Contre-exemple. *(Complémentaire d'un connexe)*

Le complémentaire d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs. Par exemple, le complémentaire de l'axe des abscisses, connexe par arcs puisqu'espace affine, dans le plan a exactement deux composantes connexes : les deux demi-plans supérieur et inférieur.

L'intersection de deux connexes par arcs, même non disjoints (hi hi), n'a aucune raison de l'être !

L'adhérence d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs : le sinus du topologue le démontre.

Propriété. *(Produit de connexes par arcs)*

Un produit non vide d'espaces topologiques non vides est connexe par arcs si et seulement chaque composante est connexe par arcs.

▷ C'est très rapide ! L'inclusion directe n'est pas dure par image continue d'un connexe par arcs par les projections ; la réciproque vient de la caractérisation de la continuité des applications à valeurs dans un produit, et il suffit alors de considérer l'application produit. ■

Propriété. *(Image d'un connexe par une application continue)*

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

▷ Découle directement de la définition. ■

Corollaire. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit X une espace topologique connexe par arcs et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image de f est un intervalle.

▷ Découle du TVI version connexe. ■

Corollaire. ***(Somme de deux connexes par arcs)***

Soient A,B deux connexes par arcs de $\mathbb{R}^n$. Alors $A+B$ est connexe par arcs.

▷ C'est l'image de $A \times B$ par la somme, continue. ■

Remarque. On a donc une propriété similaire pour les connexes.

Corollaire. ***(Connexité par arcs dans $\mathbb{R}$)***

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.

▷ Soit C un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Alors c'est un connexe, comme on le verra plus tard, donc un intervalle.

Réciproquement, montrons qu'un intervalle est connexe par arcs. Soit I cet intervalle et $a < b \in I$. Par définition, $[a,b] \subseteq I$. Alors le chemin affine $\gamma : [0,1] \longrightarrow [a,b] \subseteq I$, $t \mapsto (1-t)a + tb$ convient. ■

Corollaire

En dimension 1, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident (en dimension 2, non plus).

On énonce le théorème suivant, valable dans les espaces vectoriels normés.

Définition. ***(Connexité par lignes brisées)***

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est *connexe par lignes brisées* ou *polygonales* si pour tous $x,y \in A$, il existe $a_1,\ldots,a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $[x,a_1], [a_1,a_2],\ldots, [a_{n-1},a_n], [a_n,y]$ soient tous inclus dans A.

Propriété. ***(Connexité par lignes brisées des ouverts d'un evn)***

Soit Ω un ouvert d'une espace vectoriel normé X. Alors Ω est connexe si et seulement s'il est connexe par lignes brisées. Il est alors connexe par arcs affines par morceaux, donc C^1_{pm}.

▷ Il suffit d'observer la preuve du résultat suivant, donné dans la partie de la Connexité sur le lien entre connexité et connexité par arcs. Il est clair sinon que la connexité par lignes brisées implique la connexité par arcs et donc la connexité. ■

Dans un espace vectoriel normé, les boules sont convexes, donc connexes par lignes brisées et simplement connexes, donc connexes par arcs, et même connexes. En revanche, **une boule d'une espace métrique n'a aucune raison d'être connexe par arcs !**

Exercice 16 *(Co-connexité des hyperplans)*

Montrer que dans un evn E, pour tout hyperplan H, H est fermé si et seulement si $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit H un hyperplan fermé de E. C'est le noyau de ϕ, forme linéaire continue non nulle. Posons $U = \{x \in E, \phi(x) > 0\}$ et $V = \{x, \in E, \phi(x) < 0\}$. Alors U,V sont clairement des ouverts disjoints, non vides par non nullité. Ils sont connexes, car images réciproques de connexes par des applications continues : non, non et non ! Comment m'avez-vous cru ? Ils sont connexes puisque convexes donc connexes par arcs. Ainsi $E \setminus H$ a deux composantes connexes non triviales, donc n'est pas connexe, donc n'est pas connexe par arcs.

Réciproquement, soit H un hyperplan non fermé. Soient $x,y \in E$, $x,y \notin H$. On peut supposer $x \neq y$. Quitte à multiplier par un scalaire et invoquer un argument de convexité le long d'une droite, on peut supposer $|x - y| = 1$. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E \setminus H$ qui vérifie $x_0 = y$, $|x - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $x_{n+1} - x_n \in H$. L'initialisation est déjà faite. On suppose les k premiers termes construits. H est dense dans E, donc il existe $v \in H$ tel que $|(x - x_k) - v| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$. On pose alors $x_{k+1} = x_k + v$ qui n'est pas dans H, autrement, $x_k \in H$, et cela vérifie toutes les conditions. On définit enfin $f(0) = x$, $f(\frac{1}{2^n}) = x_n$ et f affine entre deux de ces points. Alors $f(1) = y$ et f relie x à y dans $\mathbb{E} \setminus H$.

3.5.9 Connexité

3.5.9.1 Définition

Définition. ***(Espace connexe)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *connexe* ou, si le contexte n'est pas clair, *connexe général*, si les seuls ouverts fermés de X sont $\emptyset$ et X.

Reformulation pas pratique. ***(Connexité par les frontières)***

Un espace topologique est connexe si et seulement si la frontière de toute partie non vide ou étendue à l'espace tout entier est non vide.

Propriété. ***(Caractérisations de la connexité)***

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. X est connexe,
2. il n'existe pas de partitions de X en ouverts disjoints non triviaux,
3. il n'existe pas de partitions de X en deux ouverts disjoints non triviaux,
4. il n'existe pas de partitions de X en deux fermés disjoints non triviaux,
5. toute application continue de $X \longrightarrow Y$ est constante où Y est un espace discret fixé,
6. toute application continue de $X \longrightarrow D$ est constante où D est un ensemble dénombrable, muni de la topologie discrète, fixé,

7. toute application continue de $X \longrightarrow \{0,1\}$ est constante.

▷ Supposons qu'il existe une partition de X en ouverts disjoints non triviaux. On en choisit un O_1 et on note O_2 la réunion de tous les autres ; on a alors une partition en deux ouverts disjoints non triviaux. Alors O_1 est un ouvert de X et un fermé de X, car son complémentaire est un ouvert (O_2) de X. Puisque ni O_1 ni O_1 ne sont vides, O_1 n'est pas égal à $\emptyset$ et X.

Une partition en deux ouverts disjoints non triviaux est une partition en deux fermés disjoints non triviaux, puisque que le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue non constante où Y est un espace discret donné. Soit x une valeur prise par f. Alors $f-1(x)$ est un fermé, car f est continue. Soit Y' le complémentaire de $\{x\}$ dans Y. Puisque Y est discret, Y' est fermé. Ainsi $f^{-1}(Y')$ est un fermé, et c'est le complémentaire de $f^{-1}(0)$. Donc $f^{-1}(0)$ est un ouvert fermé non trivial, car $f^{-1}(Y')$ contient au moins un point par non-constance, de X.

Les implications suivantes sont immédiates.

Soit A un ouvert fermé non trivial de X. Alors $f = \mathbb{1}_A$ est une application non constante de X dans $\{0,1\}$. En plus, elle est continue : en effet, $f^{-1}(1) = A$ est un ouvert et $f^{-1}(0) = \complement A$ est un ouvert en tant que complémentaire d'un fermé. ■

▷ **Éléments de réponse.**

On s'intéressera notamment aux parties d'un espace topologique connexe ; il n'y a aucune raison qu'elles soient connexes. **On dit que $A \subseteq X$ est connexe si elle l'est pour la topologie induite.** *En particulier, la connexité est une notion extrinsèque.*

Intuitivement, les connexes sont les parties d'un seul tenant (de même que les parties connexes par arcs, bien que les deux notions ne coïncident pas...). On se représente aisément les propriétés générales sur les connexes par des dessins de patatoïdes dans le plan.

Contre-exemple. *(Un ensemble non connexe pas trivial)*

$\mathbb{Q}$ est non connexe.

En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q} = (]\infty, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q})$ partition en deux ouverts disjoints non vides de $\mathbb{Q}$: ils contiennent respectivement 1 et 2. □

Méthode. *(Montrer qu'une partie n'est pas connexe)*

Cette technique est fondamentale, car il est plus simple d'exhiber des ouverts disjoints non vides d'un espace général plutôt que des ouverts relatifs.

Pour montrer que $A \subseteq X$ est non connexe, il faut et il suffit d'exhiber deux ouverts de X non vides, disjoints O_1, O_2 tels que $O_1 \cap A, O_2 \cap A \neq \emptyset$ et $A \subseteq O_1 \cup O_2$.

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. La preuve n'est absolument pas triviale.

Théorème. *(Connexes de $\mathbb{R}$)*

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

$\triangleright$ Soit C un connexe de $\mathbb{R}$. Alors C est un intervalle. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $a,b \in C$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $a < x < b$ et $x \notin C$. Ainsi $C \subseteq]-\infty,x[\cup]x,+\infty[$, donc C se partitionne en $C\cap]-\infty,x[$ et $C\cap]x,+\infty[$ qui sont deux ouverts de C, donc C ne serait pas connexe.

Réciproquement, montrons que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes : ce n'est pas évident. Si I intervalle est un singleton, c'est déjà fait. D'autre part, $I^\circ \subseteq I \subseteq \overline{I^\circ} = \overline{I}$, donc il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $]a,b[$, avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ est connexe. Soit $f :]a,b[\longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Si f n'était pas constante, il existerait $x,y \in I$ vérifiant $a < x < y < b$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Pour fixer les idées, prenons $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. On pose :

$$A = \{z \in I, z \geqslant x \text{ et } \forall t \in [x,z] \quad f(t) = 0\}.$$

L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, car elle contient x, majorée par y. Soit c sa borne supérieure. Par continuité de f, $f(c) = 0$. Mais f étant continue à droite en c, il existe η tel que pour tout $t \in [c, c+\eta[$, $|f(t) - f(c)| < \frac{1}{2}$. Par conséquent pour tout $t \in [c, c+\eta[$, $f(t) = 0$, d'où $f(c+\eta/2) = 0$, ce qui contredit la maximalité de c. Ainsi, f est constante, donc par caractérisation, I est connexe, ce qu'il fallait montrer. ■

Propriété. *(Connexité de $\emptyset$)*

L'ensemble vide est connexe.

Propriété. *(Connexité des singletons)*

Tout singleton est connexe.

3.5.9.2 Opérations sur les connexes

La connexité est stable par quelques opérations bien choisies.

Propriété. *(Réunion de connexes qui s'entendent bien)*

Toute réunion (quelconque) de connexes dont les intersections deux à deux sont non vides est connexe.

$\triangleright$ Soient X un espace topologique et $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes de I dont on suppose que $\forall i,j \in I \quad i \neq j \implies C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Soit Ω_1, Ω_2 deux ouverts disjoints non vides de X tels que $R = \bigcup_{i\in I} C_i \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$. Si I est vide, R est vide et R et connexe. Sinon, soit $i_0 \in I$. Alors $C_{i_0} \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$. Par connexité de C_{i_0}, et sans perte de généralité, on a $C_{i_0} \subseteq \Omega_1$. Soit $i \in I$. Puisque C_i est connexe, on a $C_i \subseteq \Omega_1$ ou $C_i \subseteq \Omega_2$. Or $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$, donc on ne peut avoir $C_i \subseteq \Omega_2$, puisque Ω_1 et Ω_2 sont disjoints ; ainsi $C_i \subseteq \Omega_1$. En passant à la réunion, $R \subseteq \Omega_1$. ■

Corollaire. ***(Réunion de connexes qui piquent-niquent)***

Toute réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

▷ Elle vérifie en particulier les hypothèses de la propriété précédente. ■

Dans le cas d'un ensemble dénombrable, on peut faire mieux.

Propriété. ***(Réunion dénombrable de connexes à la queue leu leu)***

Soit X un espace topologique et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est connexe.

▷ Pour tout $i \in I$, étant donnée une application constante $f : \bigcup\limits_{i\in I} C_i \longrightarrow \{0\}$, on a $f_{|C_i} = f_{|C_{i+1}}$ au sens de son unique valeur comme fonction continue sur un connexe. Par récurrence, pour tout $i \in I$, la valeur de f sur C_i est celle sur C_0. Donc f est constante. ■

Propriété. ***(Réunion finie de connexes non disjoints)***

Soit X un espace topologique et $C_1,\ldots,C_n$, n un entier naturel, des connexes de X tels que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ pour tout $i = 1,\ldots,n-1$. Alors $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ est connexe.

▷ Il suffit d'adapter un peu la preuve générale. ■

Attention ! L'intersection de deux connexes n'a aucune raison d'être connexe.

Propriété. ***(Connexité des parties intercalées entre la fermeture)***

Soit X un espace topologique et A une partie connexe de X. Alors toute partie B telle que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ est connexe.

▷ Soit $f : B \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Elle se restreint en une application continue sur A. Puisque A est connexe, f est constante sur A ; sans perte de généralité, supposons $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$. Par continuité, $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{A}$: en effet, $f^{-1}(\{0\})$ est un fermé contenant A, donc contient $\overline{A}$. En particulier, f est constante sur B, ce qu'il fallait montrer. ■

▷ On peut également donner une preuve calculatoire de ce fait. ■

Corollaire. ***(Connexité de l'adhérence d'un connexe)***

L'adhérence d'un connexe est connexe.

Attention, on verra qu'on n'a pas de propriétés semblables pour l'adhérence d'un simple connexe par arcs.

Contre-exemple. ***(Partie non connexe dont l'adhérence est connexe)***

Deux boules ouvertes tangentes conviennent. □

Propriété. ***(Produit d'espaces connexes)***

Un produit fini non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes sont connexes.

▷ On donne donc d'abord la preuve dans le cas fini, plus simple. Notons que le sens direct est direct par image continue d'un connexe par les projections.

On fixe $(x,y) \in X \times Y$, ce produit étant non vide par hypothèse. Alors $\{x \times Y\}$ est connexe. En effet, il est homéomorphe à X ! Ainsi, pour tous $b,b' \in Y$, (x,b) et (x,b') sont dans la même composante connexe. De même, puisque $X \times \{y\}$ est connexe, pour tous $a,a' \in X$, $(a,y),(a',y)$ sont dans la même composante connexe. Soient donc en général $(a,b),(a',b') \in X \times Y$. Alors $(a,b) \sim (a,b') \sim (a',b')$ pour la relation être dans la même composante connexe. Ainsi $X \times Y$ n'a qu'une composante connexe. ■

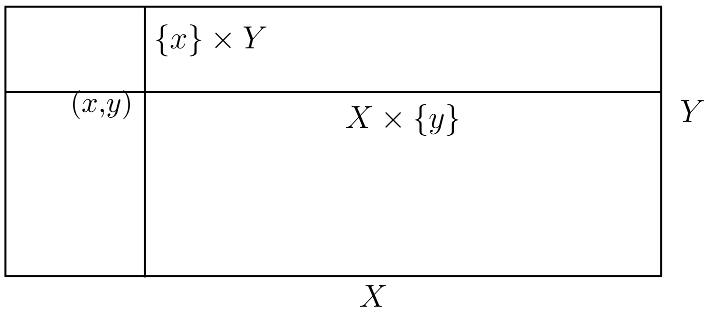


FIGURE 3.5.2 : *Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes.* — On considère l'espace produit $X \times Y$, un point (x,y) et les deux fibres convoquées par lui.

Théorème. ***(Produit d'espaces connexes)***

Un produit non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes le sont.

▷ De même, le sens direct est donné par la continuité des projections. Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, E_i soit un espace topologique connexe. Montrons que le produit est connexe. Soient $a,b \in \prod_{i \in I} E_i$ avec $J = \{j \in I, a_j \neq b_j\}$ fini. Alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \prod_{j \in J} E_j & \longrightarrow & \prod_{i \in I} E_i \\ x & \longmapsto & a_i \text{ si } i \in I \setminus J, x_i \text{ sinon} \end{array}$$

est un homéomorphisme sur son image. Son image est donc connexe. Comme elle contient a et b, on en déduit que la composante connexe de a contient l'ensemble $A = \{b, J \text{ est fini}\}$. Or par hypothèse le produit est non vide. Montrons simplement maintenant que $\overline{A} = \prod_{i \in I} E_i$, dont on déduira que $\prod_{i \in I} E_i$ est connexe. Soit x un élément du produit. Soit $R(U_{i_1},...,U_{i_k})$ un rectangle contenant x. Alors $R \cap A$ contient au moins x' qui vaut x_i si $i = i_1, ..., i_k$ et a_i sinon. ■

On termine par un résultat rigolo appelé *théorème du passage à la douane.*

Théorème. ***(Théorème du passage des douanes)***

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie A et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de A.

▷ Soit C un connexe de l'espace topologique X. On suppose que $C \cap A \neq \emptyset$ et que $C \cap \complement_X A \neq \emptyset$ pour une partie quelconque A de X. Alors $\emptyset \neq \overline{C \cap A} \subseteq \overline{C} \cap \overline{A}$ et de même $\emptyset \neq \overline{C} \cap \overline{\complement_X A} = \complement_X \mathring{A}$. On rappelle que $\overline{C}$ est connexe. Si $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}$ est tel que $C \cap Fr(A) = \emptyset$, alors encore $\overline{C} \cap Fr(A) \neq \emptyset$, car une frontière est fermé. Par suite, comme $\mathring{A}, Fr(A), \complement_X \mathring{A}$ est une partition de X, $\overline{C} \cap \mathring{A}, \overline{C} \cap \complement_X \mathring{A}$ est une partition de $\overline{C}$ en deux ouverts non vides disjoints, contradiction. ■

3.5.9.3 Connexes et applications

Propriété. ***(Image d'un connexe par une application continue, théorème de Bolzano)***

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

▷ Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X,Y. On suppose X connexe. Montrons $f(X)$ connexe. Soit $g : f(X) \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Alors $g \circ f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est bien définie, continue par composition et donc constante, car X est connexe. Alors g est constante : en effet, si $y \in f(X)$, $y = f(x)$ d'où $g(y) = g \circ f(x) = C$. C'est démontré. ■

Remarque. On retrouve les caractérisations 5 à 7 de la connexité. En effet, *les composantes connexes d'un espace discret sont les singletons.*

Corollaire. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***

Soit X une espace topologique connexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors l'image de f est un intervalle.

La notion de connexité, parmi d'autres, est l'une des notions fondamentales qui permet de passer du global au local. Un premier exemple.

Théorème. *(Applications localements constantes)*

Soit X un espace connexe. Soit f une application localement constante sur X, alors f est constante.

▷ On remarque d'abord qu'une telle application $f : X \longrightarrow Y$ est continue. Soit en effet $x \in X$. Soit W un voisinage de $f(x)$ dans Y. On choisit V un voisinage de x sur lequel f est constante. Alors $f(V) \subseteq W$ trivialement.

Par définition des applications non vides X est non vide. Sinon, soit x_0 un point de X et $c = f(x_0)$. On note $A = \{x \in X, f(x) = c\}$. Alors A est non vide et c'est un fermé par continuité de f. Montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$. Alors il existe un voisinage V de x tel que pour tout $t \in V$, $f(t) = c$, soit $V \subseteq A$. Ce qui termine la preuve. ■

3.5.9.4 Composantes connexes

Lemme. *(Composante connexe)*

Soit X un espace topologique et $x \in X$. Alors il existe une plus grande partie connexe C_x contenant x. C'est la réunion de tous les parties connexes de X contenant x. On dit parfois que C_x est *maximalement connexe.*

▷ Découle de la propriété sur les réunions de connexes ayant tous un point en commun. ■

Lemme

Toute partie non vide ouverte fermée et connexe d'un espace topologique en est une composante connexe.

▷ Par maximalité. ■

Ce lemme n'est pas utile.

Définition-propriété. *(Composantes connexes)*

Soit $x \in X$; l'ensemble C_x est appelé *composante connexe* de x. Les C_x sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x \in C_y$, aussi définissable par : il existe C connexe tel que $x,y \in C$. En particulier, les composantes connexes de X forment une partition de X.

▷ Rapide. ■

Ainsi, un espace se décompose toujours en réunion de connexes.

On peut se demander la structure topologique (ouverte, fermée) des composantes connexes dans l'espace.

Propriété. ***(Fermeture des composantes connexes)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Alors C est fermée dans X.

▷ Vient de ce que l'adhérence d'un connexe est connexe. ■

Propriété. ***(Ouverture des composantes connexes en nombre fini)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Si X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors C est ouverte dans X.

▷ Puisqu'une réunion finie de fermée est fermée. ■

Propriété. ***(Ouverture des composantes connexes si localement connexe)***

Soit X un espace topologique et C une composante connexe de X. Si X est localement connexe, alors C est ouverte dans X.

▷ C'est évident : soit $x \in C$. Alors X est trivialement voisinage de x ; soit un voisinage ouvert connexe de x. Par maximalité, ce voisinage est tout entier contenu dans C, donc C est voisinage de chacun de ces points. ■

En particulier, **dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées**.

On verra d'autres résultats sur les composantes connexes d'un ouvert dans le cas localement connexe.

Propriété. ***(Composantes connexes du produit)***

Dans un produit d'espaces topologiques $\prod\limits_{i\in I} E_i$ la composante connexe du point x est le produit des composantes connexes de x_i dans E_i.

▷ Par continuité des projections. ■

3.5.9.5 Totale discontinuité

On introduit une notion qui traduit un défaut puissant de connexité.

Définition. ***(Espace totalement discontinu)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons (ou « points », légèrement improprement).

Un espace totalement discontinu ayant au moins deux éléments n'est jamais connexe, ni connexe par arcs.

Tout espace discret est totalement discontinu. Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

Exemple fondamental. *($\mathbb{Q}$ est totalement discontinu)*

En effet, soient $x \leqslant y \in \mathbb{Q}$. On suppose que x et y sont dans la même composante connexe C. Alors tout connexe contenant x et y est inclus dans $C \subseteq \mathbb{Q}$. En particulier, $[x,y] \subseteq C \subseteq \mathbb{Q}$. Ceci n'est pas possible dès que si $x < y$.
Un autre exemple, un peu moins évident : $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est totalement discontinu.

Exercice 17

Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu.

Exercice 18 *(Un connexe dénombrable)*

On souhaite montrer qu'il existe un espace topologique connexe non discret, non grossier, séparé et dénombrable. Pour cela, soient $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$ et $Y = \mathbb{Q} \times \{0\}$. Pour $\varepsilon > 0$, $y = (q,0) \in Y$, posons $B(y,\varepsilon) = \{(p,0) \in Y, |p-q| < \varepsilon\}$. Pour $x = (p,q) \in X - Y$, notons T_x le triangle équilatéral du plan dont les trois sommets sont $x(p,q)$, $(d(x),0) = p+q/\sqrt{3},0)$, $(g(x),0) = (p-q/\sqrt{3},0)$. On pose alors $B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(s,0) \in Y, |s-d(x)| < \epsilon\} \cup \{(s,0) \in Y, |s-g(x)| < \varepsilon\}$. On munit donc X de la topologie engendrée par ces boules. Montrer que X est connexe.

3.5.9.6 Lien avec la connexité par arcs

Propriété. *(Connexe par arcs $\Longrightarrow$ connexe)*

Tout espace connexe par arcs est connexe.

▷ Soit X un espace topologique connexe par arcs. Si X est vide, c'est terminé. Sinon, soit $x \in X$. On écrit X comme la réunion $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0,1]$ où pour tout y, $\gamma_y \in C^0([0,1],X)$ est tel que $\gamma_y(0) = x$ et $\gamma_y(1) = y$, cette existence étant garantie par la connexité par arcs. Or les $\gamma_y[0,1]$ sont connexes comme images continues (démontré) d'intervalle donc connexe (démontré). De plus, ils ont tous le point x en commun. Ainsi, X est connexe. ■

La réciproque est fausse, mais, conformément à l'intuition, les exemples que l'on peut trouver sont gravement pathologiques.

Exemple fondamental. ***(Sinus du topologue)***

On considère le graphe Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$. On peut sans problème se restreindre au graphe sur $]0,1]$. On peut facilement vérifier que son adhérence est $\Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

En effet, pour un point $(0,y)$, on pose $t_n = \frac{1}{2\pi n+c}$; alors $(t_n, f(t_n)) = (t_n,y) \longrightarrow (0,y)$ est une suite d'éléments de A. Enfin, il est clair que pour tout autre point, il existe une boule centrée en ce point qui sort de A.

Soit donc $A = \Gamma \cup \{(0,0)\}$. On remarque que $\Gamma \subseteq A \subseteq \overline{\Gamma}$[a]. Alors A est connexe mais non connexe par arcs.

Γ est connexe par arcs, par image continue $x \longmapsto (x, f(x))$ du connexe par arcs $]0,1]$. Il est donc connexe. Ainsi, A est connexe puisque contenu entre lui et son adhérence.

Cependant, A n'est pas connexe par arcs. Soit x le point $(0,0)$ et $y = (1, \sin(1))$. Supposons qu'il existe un arc continu γ joignant x à y. Alors $\gamma(t) = (u(t), \sin(1/u(t))$ dès que $u(t) \neq 0$. On note $t_0 = \sup\{t \geqslant 0, u(t) = 0\}$ le dernier instant où le chemin passe en zéro. Alors par continuité de γ, $u(t_0) = 0$, d'où $v(t_0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$. Alors par le TVI, il existe $t_1,t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ avec $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ et $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Remarquons simplement qu'alors $v(t_1) = -1$ et $v(t_2) = 1$. Soit donc $b \in [-1,1]$ tel que $|b| > \frac{1}{2}$. Par le TVI encore, il existe $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ tel que $v(t) = b$ et donc $|v(t)| > \frac{1}{2}$. Ceci valant pour tout ε, il y a une grosse contradiction. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue par morceaux est connexe parcs si et seulement si elle est prolongeable par continuité.

On vérifie maintenant que A n'est pas localement connexe. En effet, le point $(0,0)$ n'a pas de voisinage ouvert connexe dans A contenu dans $B(0, \frac{1}{2})$. On voit très distinctement sur un dessin que l'intersection de toute boule de rayon < 1 avec Acontient une branche de A qui ne se relie à rien d'autre.

[a] L'ensemble $\overline{\Gamma}$ est parfois appelée *courbe fermée du topologue*, est compacte, mais elle vérifie des propriétés semblables à la nôtre.

Exemple. ***(Le cercle polonais)***

On ajoute à la courbe sinus fermée du topologue un arc continu joignant le point $(1, \sin(1))$ au point $(0, -1)$. Alors cet espace est connexe par arcs, donc connexe, mais pas localement connexe, ni donc localement connexe par arcs.

On a quand même une certaine régularité sur la topologie propre aux espaces normés :

Propriété. ***(Ouverts connexes)***

Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

$\triangleright$ On peut en fait montrer exactement de la même manière (en changeant l'expression de A) que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs par lignes brisées. On laisse le lecteur adapter la rédaction.

Soit X un espace vectoriel normé et C un ouvert connexe. Si C est vide, c'est terminé. Sinon, soit $x \in C$. On note $A = \{y \in C, x \sim y\}$ où $\sim$ est la relation « il existe un chemin continu... ». Montrons

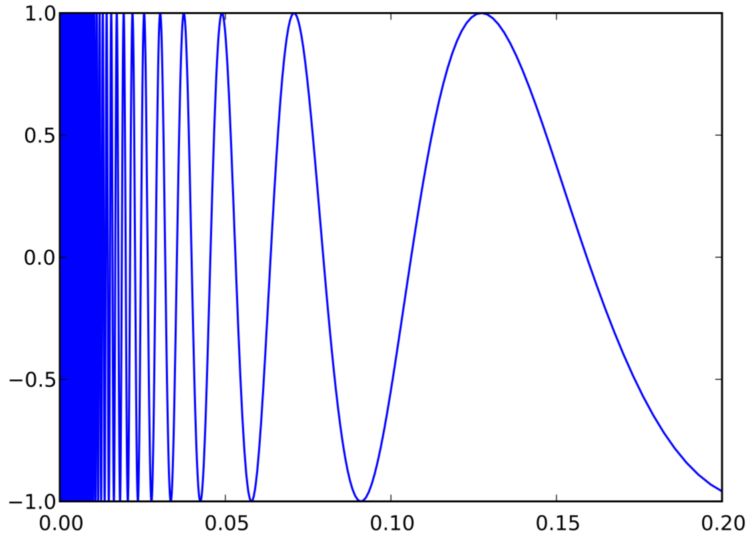


Figure 3.5.3 : *Le sinus fermé du topologue.* —
Un espace topologique connexe, mais ni localement connexe, ni connexe par arcs.

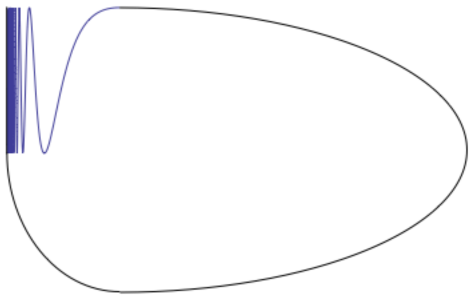


Figure 3.5.4 : *Le cercle polonais.* —
Un espace topologique connexe par arcs mais non localement connexe.

que A est un ouvert fermé de C : puisqu'il est non vide, cela suffira. Soit $y \in A$. Alors puisque C est ouvert, il existe une boule B centrée en y incluse dans C. Soit $t \in B$. Puisqu'une boule est connexe par arcs, $t \sim y$. Or $y \sim x$, donc $t \sim x$. Ainsi $t \in A$, donc B est incluse dans A. Ainsi A est ouverte. Montrons qu'elle est fermée. Soit $y \in C \setminus A$. Comme C est ouvert, il existe une boule B dans C centrée en y. S'il existait $t \in B$ tel que $t \in A$, soit $t \sim x$, alors puisque B est connexe, $t \sim y$, donc $y \sim x$, contradiction, donc B est dans $C \setminus A$. Donc $C \setminus A$ est ouverte, donc A est bien fermée. ■

▷ *(Autre méthode.)* On montre directement que si $x \in \overline{A}$ dans C, alors par définition de l'adhérence par des voisinages, $x \in A$. ■

Ce constat s'étend assez peu aux autres structures.

En fait :

Fait. *(Lien entre les composantes connexes et connexes par arcs)*

Les composantes connexes par arcs sont incluses dans les composantes connexes (sans déborder).

Exactement de même que dans le cas connexe, on peut démontrer :

Propriété. *(Ouverture des composantes connexes par arcs en milieu localement connexe par arcs)*

Soit X un espace topologique et C une composante connexe par arcs de X. Si X est localement connexe par arcs, alors C est ouverte dans X.

▷ Même que pour le cas connexe tout court. ■

Les composantes connexes par arcs n'ont aucune raison d'être fermées, la branche principale du sinus du topologue nous le montre.

3.5.9.7 Locale connexité et locale connexité par arcs

Définition. *(Espace localement connexe)*

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement connexe* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes.

Contre-exemple. *(Tout point admet un voisinage connexe)*

Dans un espace localement connexe, assez facilement, *tout point admet un voisinage ouvert connexe.*

La réciproque ne suffit pas à caractériser les espaces localement connexes. Prenons le peigne : $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$. Cet espace est connexe car connexe par arcs, mais pas localement connexe[a] : on citera également le sinus du topologue ci-dessous qui vérifie cette propriété cheloue. Pourtant, tout point de A possède un voisinage ouvert connexe, à savoir A lui-même. □

[a] En effet, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ n'admet pas de bases de voisinages connexes. Soit V un voisinage de ce point dans le peigne induit par une boule ne rencontrant par l'axe des ordonnées, par exemple, une boule de rayon $\frac{1}{4}$. Alors l'application $(x,y) \in V \longmapsto y$ est continue sur V à valeurs rationnelles, donc constante. Ainsi V est contenu dans une seule dent du peigne, ce qui est absurde, car V est induit par une boule qui contient une infinité de points d'ordonnées rationnelles de même abscisse que $\frac{1}{2}$.

Exemple

$\mathbb{Q}$ n'est pas localement connexe. En fait, ce n'est pas une conséquence d'autre chose comme on pourrait s'y attendre.

Même un espace métrique, même une partie d'un espace vectoriel normé peut n'être pas localement connexe.

Propriété. ***(Locale connexité des evn)***

Tout espace vectoriel normé est localement connexe (par arcs).

▷ Puisque les boules sont connexes (par arcs). ■

Les notions de connexité et de locale connexité n'ont rien à se dire. Bien évidemment, un espace localement connexe n'a aucune raison d'être connexe (exemple : le plan privé d'une droite). Réciproquement, le sinus du topologue est connexe mais pas localement connexe ! Ainsi, connexe n'implique pas localement connexe.

Propriété. ***(Composantes connexes d'un ouvert en milieu lc)***

Soit X un espace topologique. Alors X est localement connexe, si et seulement si, pour tout ouvert U de X, les composantes connexes de U sont ouvertes.

▷ Elles sont alors fermées (pourquoi ?). Cependant cette condition ne suffirait pas. ■

Preuve.

▷ Soit X un espace topologique localement connexe et U un ouvert de X. Soit C une composante connexe de U. Soit $x \in C$. Puisque U est ouverte, il existe un voisinage V de x dans U inclus dans U. Par locale connexité, il existe V' un voisinage connexe de x tel que $x \in V' \subseteq V$. Par maximalité de la composante connexe contenant x, $V' \subseteq C$, donc C est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert (on a déjà montré cela dans la partie précédente).

Réciproquement, soit $x \in X$. Soit V un voisinage de X que l'on peut prendre ouvert. Alors les composantes connexes de V sont ouvertes et partitionnent $V \ni x$. Soit C une composante connexe dans laquelle se trouve x. Alors C est un voisinage de x connexe et contenu dans V. ■

On se servira évidemment davantage du sens direct de ce théorème.

Théorème. ***(Connexion des fermés par une unique branche)***

Soit X un espace topologique connexe et localement connexe. Soient A,B deux fermés disjoints non vides de X. Alors il existe une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence intersecte à la fois A et B.

▷ On montre ce lemme : si Y est un espace localement connexe, F un fermé de Y, et U un ouvert connexe de Y disjoint de F. Alors pour toute composante connexe V de $U \setminus F$, $\emptyset \neq F \cap \partial_U V \subseteq F \cap \partial_Y V$. En effet, puisque Y est localement connexe, les composantes de $U \setminus F$ sont connexes. Puisque U est connexe, et $U \cap F \neq \emptyset$, une composante V de $U \setminus F$ ne peut être ouverte dans U, d'où $\partial_U V = (\partial V) \cap U \neq \emptyset$. Mais en tant que composante connexe, V est fermée dans $U \setminus F$, donc, puisque V est également ouverte, $\emptyset = \partial_{U \setminus V} V = (\partial V) \cap (U \setminus V)$. Ainsi, $\emptyset \neq \partial_U V = (\partial V) \cap U =$

$(\partial V \cap U \setminus F) \cup (\partial V \cap (U \cap F)) = (\partial V) \cap (U \cap F)$.

Appliquons le lemme à notre situation. Soit M l'union de A avec toutes les composantes connexes de $X \setminus (A \cup B)$ qui intersectent A. Alors M est ouverte. Il est clair que tout point de M qui appartienne à l'une des composantes connexes de $X \setminus (A \cup B)$ est un point intérieur de M, puisque ces composantes sont ouvertes. Il reste à voir que $A \subseteq \mathring{M}$. Soit $a \in A$, et soit U un voisinage ouvert connexe de a qui ne rencontre par B. Alors $U \subseteq M$. Si C est une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ rencontrant U, soit W une composante connexe de $U \cap C$, et V la composante connexe de $U \setminus A$ contenant W. Alors $C \cup V$ est connexe, et $(C \cup V) \cap (A \cup B) = \emptyset$, donc $V \subseteq C$. Par le lemme, $\emptyset \neq A \cap \partial V = A \cap \overline{V} \subseteq A \cap \overline{C}$, donc $C \subseteq M$. Avec le même argument, $N \cup B$ et toute composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence rencontre B est ouverte. Puisque $X = M \cup N$, et ni M ni N n'est vide, il suit que $M \cap N \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe une composante connexe de $X \setminus (A \cup B)$ dont l'adhérence rencontre à la fois, A et B. ■

Définition. ***(Espace localement connexe par arcs)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *localement connexe par arcs* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Exercice 19 *(Un contre-exemple type sinus du topologue pour la connexité par arcs)*

Montrer que l'ensemble $\{(x,rx), x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

La partie A considérée est étoilée en $(0,0)$ donc en particulier connexe par arcs. Montrons pourtant qu'il existe un voisinage de $(1,1) = (x,rx)$ où $x = r = 1$ qui ne contient aucun voisinage connexe par arcs. Prenons simplement un voisinage V ne contenant pas $(0,0)$, par exemple, induit par une boule centré en $(1,1)$ de rayon $\frac{1}{2}$. Alors l'application continue $(x,y) \longmapsto y/x$ est continue sur V, à valeurs rationnelles, donc constante. Le voisinage V est donc inclus dans la droite de pente r, absurde, car le voisinage choisi est induit par une boule non vide qui contient des points d'autres pentes.

Propriété. ***(Composantes CPA d'un ouvert en milieu lcpa)***

Soit X un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X est localement connexe par arcs,
2. pour tout ouvert U de X, les composantes connexes par arcs de U sont ouvertes.

Lemme

Toute partie ouverte d'un espace localement connexe est un espace localement connexe.

▷ Il suffit de prendre la trace d'une base de voisinages disjoints. ■

▷ Pour montrer l'équivalence entre les deux points, il suffit de copier la preuve précédente en remplaçant connexe par connexe par arcs, en remarquant que les composantes par arcs sont également les parties maximales connexes par arcs ■

Propriété. ***(Ouvert connexe en milieu lcpa)***

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Alors tout ouvert connexe de X est connexe par arcs.

▷ On reprend la preuve dans les evn. ■

Localement connexe ne suffit pas !

Théorème. ***(Connexe + lcpa $\implies$ connexe par arcs)***

Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

▷ Si X est connexe et localement connexe par arcs, prenons $x \in X$. Alors la composante connexe par arcs contenant x est ouverte, en milieu lcpa. Comme elles partitionnent l'espace, elles sont fermées. Comme X est connexe, il n'y en a qu'une, donc X est connexe par arcs. ■

Exercice 20

Donner un exemple d'espace connexe, localement connexe mais non connexe par arcs. Remarquer qu'un tel exemple fournit également un exemple d'espace localement connexe non localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Parce que moi je cherche encore.

Propriété. ***(Composantes connexes dans un espace lcpa)***

Soit X un espace topologique localement connexe par arcs. Alors les composantes connexes et connexes par arcs coïncident (on dit que l'espace est *à bonnes composantes connexes*).

▷ On applique : la deuxième caractérisation, le lemme, le théorème précédent. Ou, plus explicitement : pour tout $x \in X$, C_x^{cpa} est connexe par arcs donc connexe donc $C_x^{cpa} \subseteq C_x^c$. Réciproquement, C_x^c est connexe et ouvert, car composante connexe d'un espace localement connexe (car localement connexe par arcs). Or d'après le théorème un connexe lcpa est connexe par arcs, donc de même que précédemment, par maximalité, $C_x^c \subseteq C_x^{cpa}$. ■

Remarque. Cette propriété est très pratique. On en fait souvent l'hypothèse dans l'étude des groupes de Lie.

On termine avec une propriété à retenir dans le coin de sa tête :

Corollaire. ***(Quotient d'espace localement connexe)***

Tout quotient d'un espace localement connexe est localement connexe.

Ce qu'il faut retenir

→ **Tout espace** se décompose comme la réunion disjointe de ses composantes connexes.

3.5.10 Connexité simple

Définition. ***(Espace simplement connexe)***

Soit X un espace topologique. On dit que X est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet tracé sur X est homotope à un point. De façon équivalente, X est connexe par arcs et pour tous points $x,y \in X$, deux chemins de x à y sont toujours homotopes.

Intuitivement, un connexe par arcs est simplement connexes s'il est *sans trou, ni poignée.*

3.5.11 Discrétion

Propriété. ***(Caractérisation de la discrétion)***

Un espace est discret si et seulement si tous les singletons sont ouverts.

Il existe des espaces dénombrables qui ne sont pas discrets (l'adhérence de la suite harmonique, l'ensemble des rationnels).

Propriété. ***(Produit d'espaces discrets)***

Tout produit d'espaces discrets est discret.

▷ Définition. Plus précisément : tous les singletons + produit des espaces entiers sont ouverts. Par réunion dénombrable, n'importe quel singleton du produit est un ouvert. ■

3.6 Exemples classiques de topologie

3.6.1 Topologies cofinies

3.6.1.1 Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$

3.6.1.2 Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$

3.6.2 Topologie de Zariski

Définition. ***(Topologies de Zariski)***

Soit k un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}$. La *topologie de Zariski* sur $\mathbb{A}^n(k) := k^n$ est définie par l'ensemble de ses fermés, qui sont de la forme :

$$\{x \in \mathbb{A}^n(k) \mid \forall i \in I \quad P_i(x) = 0\}$$

pour une certaine famille $(P_i)_{i \in I}$, I quelconque, de polynômes de $k[X_1,\ldots,X_n]$.

▷ L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant égal à 1. La réunion de deux fermés de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes indexée par le produit des ensembles d'indexation valant le produit de deux polynômes en chaque couple. L'intersection est évidente. ■

Théorème. ***(Description simple de la topologie de Zariski)***

Tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'un polynôme de $k[X_1,\ldots,X_n]$.

▷ Le théorème du Nullstellensatz de Hilbert garantit que tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille finie de polynômes. Il suffit ensuite de considérer leur produit. ■

Propriété. ***(Topologie de Zariski en dimension 1)***

La topologie de Zariski sur $\mathbb{C}$ est la topologie cofinie.

▷ Soit E un ensemble fini d'éléments de k. Alors $\prod\limits_{x \in E}^{X-x}$ est un polynôme de $k[X]$ dont les zéros sont exactement les éléments de E. ■

On peut s'intéresser aux fermés et ouverts de Zariski de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle.

Propriété. ***(Comparaison des topologies réelle et de Zariski)***

La topologie de Zariski sur $\mathbb{R}^n$ est plus grossière que la topologie usuelle, au sens suivant : tout ouvert de Zariski est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour la topologie usuelle.

▷ Soit F un fermé de Zariski. Alors $F = P^{-1}(\{0,...,0\})$ où P est un polynôme, donc une application continue de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi F est un fermé de $\mathbb{R}^n$. ■

Propriété. ***(Densité des ouverts de Zariski)***

Tout ouvert de Zariski non vide est dense dans $\mathbb{R}^n$ pour sa topologie usuelle. En particulier, tout ouvert de Zariski non vide est dense dans $\mathbb{R}^n$ pour la topologie de Zariski même.

▷ On montre que tout fermé non trivial de Zariski est d'intérieur vide pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1,...,X_n]$ s'annule sur une boule ouverte. D'après le lemme d'annulation des polynômes à plusieurs variables, si P s'annule sur $A_1 \times ...A_n$ où chaque A_i est de cardinal $> \deg_i(P)$, alors P est nul. En particulier, si $A_1 \times ... \times A_n$ est un hypercube non trivial, alors P est nul. Or toute boule de $\mathbb{R}^n$ contient un hypercube. Donc P est nul, donc le fermé considéré est égal à $\mathbb{R}^n$. Pour montrer que notre ouvert non vide de Zariski est également dense pour la topologie de Zariski, on suppose que sa Zariski-adhérence ne soit pas $\mathbb{R}^n$. Par comparaison, c'est également un fermé de $\mathbb{R}^n$, ce qui contredit la minimalité de la $\mathbb{R}^n$ adhérence. ■

Corollaire

La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ n'est pas séparée pour $n > 0$.

▷ On montre plus fortement que deux ouverts disjoints non vides de Zariski s'interceptent toujours. Soient U,V tels. Montrons $U \cap V \neq \emptyset$, donc montrons $U^c \cup V^c \neq \mathbb{R}^n$. Supposons que ce soit le cas. $U^c \cup V^c$ n'est jamais que l'ensemble des zéros communs à un polynôme PQ où P a pour lieu d'annulation U^c et Q V^c. Ainsi PQ s'annule sur $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}$ est infini, le morphisme fonction polynomiale est injectif, donc on peut dire que $PQ = 0$, d'où $P = Q = 0$ par intégrité. Donc U^c et V^c sont égaux à $\mathbb{R}^n$, donc U et V sont vides, ce qui était pourtant exclu, d'où le résultat.

On aurait aussi pu utiliser le résultat précédent pour avoir immédiatement, car U dense et V ouvert, $U \cap V \neq \emptyset$. ■

3.6.3 Topologie compacte-ouverte

3.6.3.1 Définition et premières propriétés

Définition-propriété. ***(Topologie compacte-ouverte)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. La *topologie compacte-ouverte* sur $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y est définie comme suit : pour tout $K \subseteq X$ compact et $U \subseteq Y$ ouvert, on note $W(K,U) := \{f : X \to Y \mid f(K) \subseteq U\}$. Les $W(K,U)$ sont alors la prébase d'une topologie constituée des intersections finies de $W(K,U)$, K compact de X, U ouverts de U.

▷ D'après la caractérisation des bases, il suffit de montrer que les $W(K,U)$ recouvrent $\mathcal{C}(X,Y)$. C'est immédiat, car il contiennent $\mathcal{C}(X,Y) = W(\emptyset,Y)$. ■

Remarques.

1. On rapelle bien évidemment que, Y n'étant pas inclus a priori dans un espace plus grand, un *ouvert de* Y n'est autre qu'un élément de la topologie de Y et un *compact de* X n'est autre qu'un compact inclus dans X, car la compacité est une notion intrinsèque.
2. Le fait que la topologie compacte-ouverte soit définie par la donnée d'une base, permet de ne vérifier des propriétés relatives à cette topologique que sur une classe réduite d'ouverts.
3. La topologie compacte-ouverte est agréable : elle contrôle les images de ses points (qui sont des fonctions), car un point (de l'espace de départ) est un fini donc un compact.
4. Cette topologie qui paraît un peu bizarre vérifie une propriété universelle relative à la continuité de l'évaluation, que nous énoncerons plus tard.
5. En général, la topologie compacte-ouverte n'est pas si pure que ça. On supposera souvent que l'on travaille sur des espaces localement compacts, ce qui est très souvent le cas en topologie utile.

Proposition

Soient Y un espace topologique et $\{\star\}$ le singleton standard. Alors $\mathcal{C}(\{\star\},Y)$ muni de la topologie compacte-ouverte est $\simeq Y$.

▷ Considérons $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(\{*\},Y) & \longrightarrow & Y \\ f & \longmapsto & f(*) \end{array}$ et $\Psi : \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & \mathcal{C}(\{*\},Y) \\ y & \longmapsto & * \mapsto y \end{array}$. Clairement, Φ et Ψ sont bijections réciproques l'une de l'autres. Soit maintenant U un ouvert de Y. Alors $\Phi^{-1}(U)$ n'est autre que $W(\{*\},U)$ où $\{*\}$ est fini, donc compact, donc $\Phi^{-1}(U)$ est bien un ouvert de $\mathcal{C}(\{*\},Y)$, donc Φ est continue. Réciproquement, soit $W(K,U)$ un ouvert de $\mathcal{C}(\{*\},U)$, ce qui impose en particulier $K = \emptyset$ ou $\{*\}$. Dans le premier cas, $\Psi^{-1}(W(\emptyset,U) = Y$ et dans le second cas, $\Psi^{-1}(W(\{*\},U)) = U$, un ouvert dans tous les cas, donc Ψ est continue. ■

Propriété. ***(Continuité de la composition)***

Soient X,Y,Z trois espaces avec Y localement compact. L'application de composition

$$\circ : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

est continue.

▷ On munit donc $\mathcal{C}(Y,Z)$, $\mathcal{C}(X,Y)$ et $\mathcal{C}(X,Z)$ des topologies compactes-ouvertes et $\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y)$ de la topologie produit. Soient K un compact de X et W un ouvert de Z afin de considérer l'ouvert $W(K,W)$ de $\mathcal{C}(X,Z)$. Soit (f,g) dans l'image réciproque de cet ouvert, notée Ω. Notons que puisque f et g sont continues, $f^{-1}(W)$ est un ouvert de Y et $g(K)$ est compact. De plus, par hypothèse, $g(K) \subseteq f^{-1}(W)$. Notons que $f^{-1}(W)$ est localement compact en tant qu'ouvert de Y localement compact. Pour tout $x \in g(K)$, il existe un voisinage compact C_x de x dans $f^{-1}(W)$, donc compact tout court, avec donc ouvert $x \in U_x \subseteq C_x$ où U_x est ouvert de $f^{-1}(W)$, mais aussi donc de Y. Les U_x recouvrent $g(K)$, donc par compacité, il existe une famille finie F de $x \in g(K)$ avec :

$$g(K) \subseteq U_{f,g} = U := \bigcup_{x \in F} U_x \subseteq C_{f,g} = C := \bigcup_{x \in F} C_x \subseteq f^{-1}(W).$$

Conxidérons l'ouvert $W(C,W) \times W(K,U)$. Alors par construction, $(f,g) \in W(C,W) \times W(K,U)$. Réciproquement, si $(f',g') \in W(C,W) \times W(K,U)$, alors $g' \in W(K,U)$ d'où $g'(K) \subseteq U \subseteq C \subseteq f'^{-1}(W)$, car $f' \in W(C,W)$. Autrement dit, $\Omega = \bigcup_{(f,g)\in\Omega} W(C,W) \times W(K,U))$ qui est bien un ouvert de $\mathcal{C}(Y,Z) fois \mathcal{C}(X,Y)$. Donc $\circ$ est continue. ■

Exercice 21 *(Continuité du pullback et du pushout)*

Soit $f : X \to Y$ une application continue. On note, comme souvent en topologie, exponentiellement les espaces de fonctions <u>continues</u>.

1. Montrer que le pullback $f^* : Z^Y \to Z^X$ est continu pour les topologies compactes-ouvertes.

2. Montrer que le pushout $f_* : X^Z \to Y^Z$ est continu pour les topologies compactes-ouvertes.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On rappelle que $f^* : g \mapsto g \circ f$. Si K est un compact de X et U un ouvert de Z, ${f^*}^{-1}(W(K,U)) = \{g : Y \to Z \mid g \circ f(K) \subseteq U\} = W(f(K),U)$ et $f(K)$ est bien un compact de Y, car f est continue.

2. On rappelle que $f_* : g \mapsto f \circ g$. Si K est un compact de Z et U un ouvert de Y, $(f_*)^{-1}(W(K,U) = \{g : Z \to Y \mid f \circ g(K) \subseteq U\} = W(K,f^{-1}(U))$ et $f^{-1}(U)$ est bien un ouvert de X, car f est continue.

Propriété. ***(Continuité de l'évaluation)***

Soit X un espace localement compact. Soit Y un espace topologique. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev\colon \quad \mathcal{C}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue.

▷ L'œil aiguisé aura vu que c'est une conséquence des deux propriétés précédentes. Mais on peut le redémontrer indépendemment pour se la péter un peu.

On munit donc $\mathcal{C}(X,Y)$ de la topologie compacte-ouverte et $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ de la topologie produit. Soit U un ouvert de Y. Alors $ev^{-1}(U) = \{(f,x) \mid f(x) \in U\} = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times \{x\}$, où $f(x) \in U \iff f \in W(\{x\},U)$. Or X est localement compact, donc pour tout $x \in X$, pour toute $f \in W(\{x\},U)$, *i.e.* $f(x) \in U$, $x \in f^{-1}(U)$ qui est ouvert, car f est continue, donc il existe un compact K_x de X tel que $x \in \mathring{K}_x \subseteq K_x \subseteq f^{-1}(U)$. Alors $ev^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times K_x \subseteq ev^{-1}(U)$, car si $f(x) \in U$, pour tout $t \in K_x$, $f(t) \in U$ par construction. D'où $ev^{-1}(U) = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times \mathring{K}_x$ qui est un ouvert de $\mathcal{C}(X,Y) \times X$, car $\{x\}$ est un compact de X. ■

Propriété. ***(Propriété universelle de la topologie compacte-ouverte)***

Soient X,Y deux espaces topologiques avec Y localement compact. On note Y^X l'ensemble des applications continues de X dans Y. On note $\mathcal{C} - \mathcal{O}$ la topologie compacte-ouverte sur Y^X. Alors L'application d'évaluation $ev : (Y^X \mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X \to Y$ est continue et pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur Y^X telle que $ev' : Y^X \times X \to Y$ soit continue, $Y^X \times X$ étant munie de la topologie $\mathcal{T} \times \mathcal{O}_X$, il existe une unique application continue $\psi : (Y^X,\mathcal{T}) \to (Y^X,\mathcal{C} - \mathcal{O})$ telle que $ev \circ (\psi \circ id_X) = ev'$, autrement dit :

$$\begin{tikzcd}
(Y^X,\mathcal{T}) \times X \arrow[r, "ev"'] \arrow[d, "\psi \times id_X"'] & Y \\
(Y^X,\mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X \arrow[r, "ev"'] & Y
\end{tikzcd}$$

commute.

▷ Montrons-le par analyse-synthèse. Il est clair que si ψ existe, ce n'est autre que l'identité, car $ev = ev'$ ensemblistement. Il n'y a plus qu'à vérifier que l'identité $(Y^X,\mathcal{T}) \xrightarrow{id_{Y^X}} (Y^X,\mathcal{C} - \mathcal{O})$ est continue. ■

3.6.3.2 Enrichissement de Top

On essaie maintenant d'« enrichir » les espaces topologiques sur eux-mêmes. Cette notion catégorique signifie grosso modo que l'on peut rester dans la catégorie en considérant les espaces de morphismes. On rappelle que dans le cas des ensembles, on a, pour tout ensemble Y, une adjonction $? \times Y \dashv (-)^Y$ grâce à des bijections naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X \times Y,Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,Z^Y := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(Y,Z))$ qui correspondent ni plus ni moins à une opération de curryfication. Autrement dit, Ens est une catégorie monoïdale cartésienne fermée (et donc enrichie au-dessus d'elle-même). On souhaite remplacer Ens par Top dans cette identité, ce qui n'est pas immédiat, même si l'on peut la prendre pour base puisque Top est localement petite.

Fait. ***(Adjonction produit-fonctionnelle dans** Top**)***

Si Y est localement compact et les espaces fonctionnels sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction $? \times Y : \mathrm{Top} \rightleftarrows \mathrm{Top} : (-)^Y$ grâce à des bijections naturelle $\mathcal{C}(X \times Y,Z) \simeq \mathcal{C}(X,Z^Y := \mathcal{C}(Y,Z))$.

Les techniques sont classiques, alors on les explicite. On vérifie qu'une application $f : X \times Y \to Z$ est continue si et seulement si sa curryfiée $\check{f} : X \to Z^Y$ l'est, en munissant $Z^Y := \mathcal{C}(Y,Z)$ de la topologie compacte-ouverte. Cela suffira à montrer que l'adjonction de curryfication vaut dans Top, et c'est bien une adjonction à partir de ce que l'on en sait dans Ens. Soit f une telle application continue. Soit $W(K,U)$ un ouverte de la base de Z^Y, K compact de Y et U ouvert de Z. Alors $\check{f}^{-1}(W(K,U)) = \{x \in X \mid f(x,K) \subseteq U\}$, ce qui signifie que $\{x\} \times K \subseteq f^{-1}(U)$ qui est ouvert dans X, puisque f est continue. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert V contenant x tel que $V \times K \subseteq f^{-1}(U)$, d'où $V \subseteq \check{f}^{-1}(W(K,U))$, qui est donc ouvert, donc $\check{f}$ est continue. Réciproquement, soit $f : X \to Z^Y$ continue pour la topologie compacte-ouverte. Alors on peut décomposer

$$\tilde{f} : X \times Y \overset{f \times id_Y}{\longrightarrow} Z^Y \times Y \overset{ev}{\longrightarrow} Z$$

où ev est continue, car Y est localement compact, donc par composition, $\tilde{f}$ l'est également.

On en déduit le théorème suivant, qui précise le précédent : les bijections d'adjonction sont en fait bicontinues.

Théorème. ***(Loi d'exponentiation topologique)***

Soient X,Y deux espaces topologiques localement compacts. Alors pour tout espace topologique Z, en notant exponentiellement les espaces de fonctions continues,

$$Z^{X \times Y} \simeq (Z^Y)^X$$

pour les topologies compactes-ouvertes, ce qui signifie $\mathcal{C}(X \times Y,Z) \simeq \mathcal{C}(X,Z^Y)$. Plus précisément, dans l'adjonction produit-fonctionnelle dans Top, les bijections naturelles de curryfication sont des homéomorphismes, autrement dit, sont bicontinues.

▷ Montrons que la curryfication dans le sens $Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$ est continue. On sait que, puisque $X \times Y$ est localement compact, l'évaluation $Z^{X \times Y} \times (X \times Y) \to Z$ est continue. En la voyant sous la forme $(Z^{X \times Y} \times X) \times Y \to Z$, par adjonction produit-exponentielle dans Top, l'application adjointe induite $Z^{X \times Y} \times X \to Z^Y$ est continue. En recommençant pour X, on a $Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$ continue, et c'est bien l'application de curryfication en explicitant sur les éléments les étapes précédentes.

Montrons maintenant que la curryfication dans le sens $(Z^Y)^X \to Z^{X \times Y}$ est une application continue. Partons de l'évaluation $(Z^Y)^X \times X \to Z^Y$. En multipliant par l'application id_Y, $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \to Z^Y \times Y$ est continue et quitte à la composer par l'évaluation $Z^Y \times Y$, c'est une application $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \to Z$ continue, donc $(Z^Y)^X \to Z^{X \times Y}$ est continue. De même, en explicitant ce que sont ces fonctions, on trouve bien que c'est la curryfication inverse. Vérifions-le cette fois pour les sceptiques. La première application est $(f : X \to Z\hat{I}Y,x) \mapsto f(x) : Y \to Z$, qui devient $(f,x,y) \mapsto (f(x),y) \mapsto f(x)(y)$. Par curryfication directe, on obtient $f \mapsto [(x,y) \mapsto f(x)(y)$. ■

On avait prouvé que les curryfiées et les curryfiées inverses étaient continues ; là, on a prouvé que la curryfication et la curryfication inverse sont continues.

▷ *(Une autre preuve catégorique)* Illustrons comment le lemme de Yoneda permet aussi de conclure ; il n'est pas gênant en effet de fournir une preuve de nature catégorique, car il signifieue dans toute catégorie monoïdale fermée, les bijections naturelles sont internes.

En appliquant l'adjonction produit-fonctionnelle de Top pour tout espace topologique A, on obtient, toujours en ne considérant que des morphismes continus, $\mathcal{C}(A,Z^{X\times Y}) \simeq \mathcal{C}(A\times X\times Y,Z) \simeq \mathcal{C}(A\times X,Z^Y) \simeq \mathcal{C}(A,(Z^Y)^X)$. Or Top étant localement petite, le foncteur de $\mathrm{Top} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Top}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ens}), W \mapsto (A \mapsto \mathcal{C}(A,W))$ est pleinement fidèle, ainsi l'application continue $Z^{X\times Y} \to (Z^Y)^X$ est bien un homéomorphisme. ■

Chapitre 4

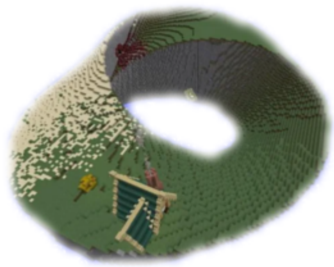
Topologie algébrique élémentaire

Résumé

Contrairement à la topologie analytique qui s'intéresse aux notions de convergence, la topologie algébrique prend un point de vue extérieur tout à fait distinct où l'on étudie les espaces topologiques pour eux-mêmes. Typiquement,

$$\text{ensembles} \subseteq \text{topologie} \subseteq \text{géométrie}$$

et l'on se situe au centre de cet emboîtement. Grâce à la notion d'homotopie, on peut définir le groupe fondamental qui associe des invariants algébriques à la catégorie Top. Dans un second temps, grâce à la notion d'homologie, on peut définir toute une suite d'invariants, beaucoup plus abstraits, mais extrêmement pratiques.

4.1 Groupes topologiques

La théorie des groupes topologiques permet notamment d'obtenir des résultats (propriétés, structures) sur des objets de base de façon simple.

4.1.1 Définition

Définition. ***(Groupe topologique)***

Un *groupe topologique* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une topologie, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continues.

Méthode. ***(Montrer qu'un groupe est un groupe topologique)***

Cela revient seulement à montrer la continuité d'opérations dans un certain espace topologique (voir l'exemple 3 ci-dessous).

Définition. ***(Groupe de Lie)***

Un *groupe de Lie* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une structure de variété différentiable réelle, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient différentiables.

Propriété. ***(Continuité des translations dans un groupe topologique)***

Dans un groupe topologique, les translations

$$x \longmapsto a \star x \text{ et } x \longmapsto x \star a$$

sont des homéomorphismes.

▷ Les applications partielles d'une application continue sont continues. Or ce sont des bijections qui ont la même forme que leurs réciproques. ■

On en déduit :

Fait

La topologie d'un groupe topologique est déterminée par la donnée des voisinages de l'élément neutre e.

Propriété. ***(Séparation d'un groupe topologique)***

Un groupe topologique G est séparé si et seulement si $\{e_G\}$ est fermé dans G.

▷ Si G est séparé, le singleton $\{e\}$ est fermé. Réciproquement, si $\{e\}$ est fermé, alors la diagonale de G est l'image réciproque de ce fermé par l'application continue $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$. Elle est donc fermée, donc G est séparé. ■

Exemples. ***(Groupes topologiques)***

1. **Tout groupe est un groupe topologique pour la topologie discrète.**
2. Heureusement, il y a d'autres exemples intéressants. Dans la section suivante, on étudiera l'action de la sphère unité du plan complexe sur la sphère de l'espace par rotation.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe topologique pour la topologie induite de $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$; c'en est d'ailleurs un ouvert, ses ouverts sont donc les ouverts de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $GL_n(\mathbb{R})$. Il a deux composantes connexes (par arcs) $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{R})$[a]. Il agit continûment **(on omettra cette précision régulièrement dans la suite)** sur $\mathbb{R}^n$, on note simplement $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowleft \mathbb{R}^n$, et transitivement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dans ce cas sur $\mathbb{R}^n$ il y a deux orbites : $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
4. Tout groupe de Lie est en particulier un groupe topologique.
   Le cinquième problème de Hilbert pose la question suivante : pour une variété topologique munie d'une structure de groupe topologique, existe-t-il une structure différentiable telle que ce groupe soit de Lie ? La réponse est oui, ce qui a été démontré au début des années 1950.
5. Si Y est compact, $(\mathrm{Aut}(Y),\circ)$ est un groupe topologique muni de la topologie compacte-ouverte.

[a] On peut redémontrer ce résultat grâce à la théorie des groupes topologiques.

Lemme

Soit G un groupe topologique et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes connexes par arcs. Alors $H = \langle H_i, i \in I\rangle$ est connexe par arcs.

▷ Soit $J \subseteq I$ fini. Alors $H_J = \langle H_i, i \in J\rangle = \mathrm{Im}(\prod_{i\in J} H_i \longrightarrow G)$ qui à $(h_1,...,h_j) \mapsto h_1...h_j$. Puisque $\prod_{i\in J} H_i$ est connexe par arcs et que la multiplication est continue par axiome, alors H_J est connexe par arcs. Or H est l'union des H_J qui ont tous le neutre en commun, donc H est connexe par arcs. ■

Clairement, il y a au moins deux composantes connexes par arcs, car $\mathbb{R}^*$ c'est pas connexe. Cela ne nous apporte rien. Montrons que $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. On remarque que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par $D = Diag(\mathbb{R}_+,1,...,1)$ et $T_{ij} = \{id + tE_{ij}, t \in \mathbb{R}\}$. Il est donc connexe par arcs, puisque $D \simeq \mathbb{R}_+$ et T_{ij} est clairement homéomorphe à $(\mathbb{R},+)$, donc ils sont tous deux connexes par arcs. De même, GL_n^- est connexe par arcs, puisqu'il est homéomorphe à GL_n^+ en tant qu'espace topologique, via la multiplication par $Diag(-1,1,...,1)$.

Contre-exemple. ***(Groupe topologique qui n'est pas de Lie)***

Au sens : naturellement pour les mêmes lois.

□

Mnémonik : Les groupes topologiques, c'est fait pour les grands groupes.

Heuristique

Foncièrement, pour un groupe fini, seule la topologie discrète peut être appliquée pour en faire un groupe topologique.

Définition. ***(Action continue sur un G-espace)***

Soit G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action continue de G sur X est une action de groupe de G sur X telle que l'application :

$$G \times X \longrightarrow X$$

soit continue.
Un G-*espace* est un espace topologique muni d'une action continue de G.

Exemple. ***(Action du cercle sur la sphère)***

On voit immédiatement que $U(1) := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (notation physicienne) est un groupe topologique pour la multiplication de $\mathbb{C}$. Il agit continûment sur la 2-sphère :

$$S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\}.$$

par rotation autour de l'axe Oy.
Cette action est fidèle, mais pas transitive.

Propriété. ***(Continuité de l'action discrète)***

Soit G un groupe muni de la topologie discrète agissant sur un ensemble X. Alors l'action considérée est continue si et seulement si pour tout $g \in G$, $x \mapsto g \cdot x$ est continue.

Définition. ***(Isomorphisme de groupes topologiques)***

Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que groupes par une application bicontinue.

4.1.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe

Définition. ***(Quotient par une action de groupe)***

Soit G un groupe topologique et X un espace topologique telle que G agisse sur X. On définit le *quotient de X par l'action de G*, et on note $X/G = X/R_G$, où :

$$xR_Gy \iff \exists g \in G \quad x = g \cdot y.$$

C'est l'ensemble des orbites de X sous l'action de G, dépendant de G, muni de la topologie quotient sur X, indépendante de G dans sa construction.

Propriété. ***(Quotient par une action transitive)***

Si l'action de G sur X est transitive, alors X/G est réduit à un point.

▷ Il n'y a rien à faire. ■

Exemple

$\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R}) = \{\{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ n'est pas séparé. Il est même grossier non trivial.

Propriété

Soit X un G-espace séparé et G un groupe quasi-compact où l'action de G est transitive. Alors pour tout $x \in X$ la bijection canonique $G/G_x \simeq X$ est un homéomorphisme.

▷ On a $G/G_x \longrightarrow X$ continue par propriété universelle. Puisque G/G_x est quasi-compact (on le verra plus tard) et X est séparé, la bijection est un homéomorphisme. ■

Corollaire

Soit X un G-espace séparé et G un groupe quasi-compact agissant sur X. Alors pour tout $x \in X$ la bijection canonique $G/G_x \simeq \Omega_x$ est un homéomorphisme.

Exemple fondamental. ***(La sphère est quotient de groupes spéciaux orthogonaux)***

On a $SO(n+1)$ le sous-groupe spécial orthogonal d'ordre $n+1$ agit sur S^n la sphère (unité) de $\mathbb{R}^n$; par exemple, $SO(2) \curvearrowleft S^1$ par rotation.

Cette action est transitive.

C'est clair, mais une autre façon de le voir est de dire que pour $e_1 = (1,0,...,0)$, $x = A \cdot e_1$ si x est la première colonne de A et A est prise dans $SO(n+1)$ en complétant les autres colonnes ; réciproquement, le stabilisateur de 1 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $B \in SO(n)$.

En appliquant le théorème précédent, on obtient l'homéomorphisme très important :

$$\boxed{S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)}.$$

4.1.3 Propriétés des groupes topologiques

4.1.3.1 Groupes compacts

Définition. ***(Groupe compact)***

Un *groupe compact* est un groupe topologique compact.

Exemples. ***(Groupes compacts)***

1. Les groupes finis discrets (ce sont les seuls parmi eux !).
2. $U(n)$ l'ensemble des matrices unitaires $n \times n$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $M\overline{M}^T = id$. On remarque que $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ce sont des groupes compacts.

Propriété

Soient G un groupe topologique, X un G-espace.

(a) Si X est quasi-compact, X/G aussi.

(b) La surjection canonique est ouverte.

(c) Si X,G sont compacts, X/G aussi.

▷ La première affirmation est vraie pour tous les quotients, puisque la projection canonique q est surjective et continue.

Soit $V \subseteq X$ un ouvert. Alors $q^{-1}(q(V)) = \sum_{g \in G} g \cdot V$ est ouvert par réunion d'ouverts : en effet, les translations sont des homéomorphismes.

Il suffit de montrer que X/G est séparé. Montrons que $\Gamma_G \subseteq X \times X$ est fermé. Puisque $X \times X$ est compact, en fait il est équivalent de dire que Γ_G est compact. Or ce graphe est l'image par $(g,x,y) \mapsto (x,gy)$ de $G \times \Delta_X$. Comme X est séparé, Δ_X est séparé donc compact donc $G \times \Delta_X$ est compact. D'où le résultat. ■

Propriété. ***(Compacité du groupe quotient)***

Soient G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe de G. Si G est compact et H est fermé, G/H est compact.

▷ Découle directement de la proposition précédente. ■

4.1.4 Groupes séparés

Propriété. ***(Séparation du groupe quotient)***

Soient G un groupe topologique et $H \subseteq G$ un sous-groupe de G. Alors G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

▷ Si G/H est séparé, alors pour tout $x \in G$, $q(x)$ est fermé dans G/H par ouverture, donc $q^{-1}(q(1_G)) = H$ est fermé. Si H est fermé maintenant, soit $\beta : (x,y) \longmapsto yx^{-1}$. Alors $\beta^{-1}(H) = \Gamma_H$! d'où le résultat. ■

Théorème. ***(Groupe topologique quotient)***

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe distingué de G. Alors G/H est un groupe topologique.

▷ L'inverse est continue, induite par le diagramme suivant où la flèche horizontale du bas est continue.

$$(\cdot)^{-1} : \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, "q"] \\ G/H \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

Pour la multiplication, c'est un peu moins trivial : on utilise les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d] & G \arrow[d, "q"] \\ (G \times G)/(H \times H) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f"] & G/H \\ G/H \times G/H \arrow[ur, dotted, "m_{G/H}"'] & \end{tikzcd}$$

puis :

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r] \arrow[d] & G/H \times G/H \\ (G \times G)/(H \times H) \arrow[ur, hook, two heads, "f"'] & \end{tikzcd}$$

et le théorème est démontré. ■

4.1.5 Groupes topologiques distingués

Proposition

Tout sous-groupe distingué d'un groupe connexe est commutatif.

Soient G un groupe topologique.
Soit X un G-espace.
On considère X/G l'espace topologique (ensemble des orbites).

Soit H un sous-groupe (topologique) de G.
On considère G/H l'espace topologique (ensemble des classes à gauche).

TROIS FAITS GÉNÉRAUX :

- La surjection canonique est toujours ouverte de $X \to X/G$.
- Si H est distingué, G/H est un groupe topologique.
- G est séparé ssi $\{e\}$ est fermé.

Hypothèse sur X	*Hypothèse sur G*	*Conséquence sur le quotient*
X séparé	G compact	?
X q-compact	G quelconque	X/G q-compact
X compact	G compact	X/G compact
Hypothèse sur G	*Hypothèse sur H*	*Conséquence sur le quotient*
G quelconque	H fermé	G/H séparé
G q-compact	H quelconque	G/H q-compact
G compact	H fermé	G/H compact

TABLE 4.1 : *Récapitulatif sur les groupes topologiques.* —
Liens entre compacité et séparation.

4.2 Espaces cellulaires

La philosophie des espaces cellulaires est d'obtenir des espaces topologiques grands par recollements de certaines de leurs parties.

On introduit en particulier une classe d'espaces topologiques comprenant la plupart des espaces topologiques rencontrés dans ce cours, à homéomorphisme près.

4.2.1 Attachements cellulaires

On conseille au lecteur de revoir la partie sur la topologie somme disjointe et sur les recollements le long d'un espace ou d'une partie. En particulier :

- ⋆ la somme disjointe de deux espaces topologiques X,Y a pour ouverts les sommes (= unions disjointes) d'ouverts ;

- ⋆ pour des applications continues $f,g : A \longrightarrow X$, le recollement $X \cup_{f,g} Y = X \coprod Y/R$ consiste à quotienter la somme disjointe par la relation d'équivalence vérifiant $f(a)R(a)g(a)$ pour tout $a \in A$. Intuitivement, A est une copie de parties de X,Y et l'on identifie ces copies entre elles. Formellement, on peut se passer d'une des deux applications est prendre la relation engendrée par $x \sim g(a)$: cela revient au même ;
- ⋆ si A est fermé dans X, l'application canonique $Y \longrightarrow X \cup_g Y$ est un homéomorphisme sur son image, fermée dans Y ;
- ⋆ si X est un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ un ensemble de parties topologiques, on définit la topologie faible par : $F \subseteq X$ est fermé dans X si et seulement si $F \cap X_i$ est fermé dans X_i pour tout i, de même pour les ouverts. Une application est continue ssi toutes les restrictions aux X_i sont continues.

Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant : l'attachement cellulaire, déjà rencontré dans le section Construction d'espaces topologiques, paragraphe Recollements. Soit $S^n = \mathbb{S}_n$ la sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $B^n = \mathbb{B}_n$ la boule de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\partial B^n = S^{n-1}$ (pour se rappeler du décalage, écrire $\mathrm{Fr}(B^2) = S^1$).

Puisque B^n est fermé, on a une inclusion canonique de la $(n-1)$-sphère dans la n-boule $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$.

Définition. ***(n-cellule)***

Une *cellule de dimension n*, ou *n-cellule*, est un espace topologique homéomorphe à la boule unité fermée de dimension n de $\mathbb{R}^n$. On note souvent e_n une n-cellule.
Une *n-cellule ouverte* ou encore *cellule ouverte de dimension n* est un espace homéomorphe à $\mathbb{B}_n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$.

D'après le théorème d'invariance du domaine (admis), tout homéomorphisme de la boule préserve son bord. On peut définir ainsi :

Définition. ***(Bord d'une n-cellule)***

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Si e est une cellule, notons ∂e son *bord*, c'est-à-dire l'image de la frontière de $\mathbb{B}_n$, si e est une n-cellule, par n'importe quel homéomorphisme de e dans $\mathbb{B}_n$.
On note également $\mathring{e} = e - \partial e$.
Si $f : e \longrightarrow X$ est une application continue, on note ∂f la restriction $f_{|\partial e}$ de f au bord de e.

On définit maintenant la notion la plus importante de cette section.

Définition. *(Attachement cellulaire, recollement d'une n-cellule le long d'une application)*

Si X est un espace topologique, et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est continue, on note

$$X \bigcup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$$

le recollement au moyen de φ.

On dit alors qu'on a *recollé une n-cellule à X* et qu'on obtient $X \cup_\varphi e^n$ en *attachant une n-cellule le long de φ.*

On a en particulier $X \bigcup\limits_{\varphi} e^n = X \coprod B^n / R$, où R est la relation d'équivalence engendrée par les $\varphi(a) R i_n(a)$, $a \in S^{n-1}$.

▷ En effet, c'est la définition du recollement. ■

Dans le recollement général, les applications f,g n'étaient pas les plus importantes, car souvent des inclusions canoniques ; ici, c'est le contraire, l'espace A où l'on applique le recollement est toujours le même, c'est la sphère, et c'est l'application φ qui joue un rôle important.

Encore par définition du recollement :

Fait. *(Classes des points remarquables d'un recollement cellulaire)*

Ainsi,

1. pour $x \in X$, sa classe d'équivalence est $cl(x) = \{x\} \coprod i_n(\varphi^{-1}(x))$
2. et pour $b \in \mathring{B}^n$, on a $cl(b) = \{b\} \coprod \emptyset$ (on touche pas au dedans).

Plus précisément, on a la propriété de base suivante.

Proposition. *(Plongement de X et de la boule ouverte dans leur attachement cellulaire)*

Les applications $X \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$ et $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$ sont des homéomorphismes sur leurs images.

▷ On note $q : X \coprod B^n \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$ la projection canonique. Alors sa restriction $\mathring{B}^n \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$ est continue et injective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit $U \subseteq \mathring{B}^n$ un ouvert. Par ouverture de l'intérieur, cela revient à prendre un ouvert de B^n. Comme on a $\varphi = q \circ i_{B^n}$, on remarque que $i_{B^n}(U) = \emptyset \coprod U$ est un ouvert de $X \coprod B^n$, qui de plus est saturé. On a donc $\phi(U) = q(\emptyset \coprod U)$ ouvert car $\phi = q \circ \iota(B^n) : B^n \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$.

Maintenant, montrons que æ$_X : X \longrightarrow X \bigcup\limits_{\varphi} e_n$ est injective. Si $cl(x) = cl(y)$, alors $\{x\} \cup i_n(\varphi^{-1}(x)) = cl(x) = cl(y) = \{y\} \cup i_n(\varphi^{-1}(\{y\})\}$. Il suffit de montrer que $j_X : X \longrightarrow j_X(X)$ est fermée. Soit F un fermé de X. On a $j_X = q \circ i_X(F) = F \coprod \emptyset$. De plus, $q^{-1}(q(F \coprod \emptyset) = F \coprod \varphi^{-1}(F)$ est un fermé de $X \coprod B^n$. Donc $j_X(F) \subseteq j_X(X)$ est un fermé de $j_X(X)$. ■

Proposition

Si X est pointé par x_0 et $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$ est constante de valeurs x_0, alors on a un homéomorphisme $X \cup_\varphi e^n \simeq X \vee S^n$, où $S^n \simeq B^n/S^{n-1}$ est pointé par $q(S^{n-1})$.

On précise cette notion en généralisant et itérant le processus un nombre quelconque de fois.

Définition. ***(Espace topologique obtenu par recollement de cellules)***

On dit qu'un espace topologique est *obtenu par recollement de cellules* de dimension n sur un espace topologique Y s'il existe une famille $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de cellules de dimension n, munie d'une famille d'applications continues $g_\alpha : \partial e_\alpha \to Y$, telle qu'il existe un homéomorphisme :

$$X \simeq (\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y.$$

(Notons que les g_α ne sont pas supposés injectifs.)

Remarques.

1. La donnée de (e_α, g_α) est de l'homéomorphisme liant X et l'espace est appelée *décomposition cellulaire* de X relative à Y. Elle est le plus souvent sous-entendue.
2. Si $f_\alpha : e_\alpha \longrightarrow X$ est l'application induite, alors f_α est continue et on l'appelle *application caractéristique* de e_α. (De même, ce ne sont pas toujours des homéomorphismes sur leurs images.)
3. En revanche, sa restriction $f_{\alpha|\mathring{e}_\alpha}$ est un homéomorphisme sur son image qui est donc un ouvert de X.
4. Si Y est séparé, l'image de g_α est un compact de Y, donc un fermé de Y.
5. Si Y est séparé, la topologie de X est la topologie faible définie par la famille $\{Y\} \cup \{f_\alpha(e_\alpha)\}_\alpha$.
6. Les e_α, par abus avec $f_\alpha(e_\alpha)$, s'appellent les *cellules* de X relativement à Y. De même, en identifiant son intérieur avec son image dans X, on l'appelle *cellule ouverte* de X relative à Y. Les cellules ouvertes sont les composantes connexes de $X \setminus Y$.
7. L'application $\partial f_\alpha = g_\alpha : \partial e_\alpha \longrightarrow Y \subseteq X$ est appelée *application d'attachement* de la cellule e_α de X sur Y.

Si par exemple $n = 0$, alors X est homéomorphe à la somme disjointe de Y et de l'ensemble d'indices A muni de la topologie discrète.

On énonce un lemme de construction. On rappelle que dans un bouquet de sphères, la restriction de projection canonique à chaque sphère S_i est un homéomorphisme sur son image, et qu'à homéomorphisme près, le bouquet de sphères ne dépend pas des points bases choisis.

Lemme

Si un espace topologique X est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur un espace topologique Y, alors le quotient $X/\langle Y\rangle$ de X par la relation d'équivalence engendrée par $x\sim y$ pour tous $x,y\in Y$ est un espace topologique discret si Y est vide, et un bouquet de sphères de dimension n sinon.

$\triangleright$ C'est immédiat sur Y est vide, auquel cas $n=0$, X est discret et $X/\langle Y\rangle\simeq X$. Sinon, soit $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ une décomposition cellulaire de X relative à Y. Soit $\sim_\alpha$ la relation d'équivalence sur la α-ième cellule engendrée par $x\sim y$ si x et y sont tous deux dans le bord. Alors $S_\alpha := e_\alpha/\sim_\alpha$ est homéomorphe à une sphère, que nous munissons du point base image de ∂e_α. L'inclusion $\coprod_{\alpha\in A} e_\alpha \longrightarrow \left(\coprod_{\alpha\in A} e_\alpha\right)\cup\coprod Y$ induit clairement par passage au quotient un homéomorphisme ($\sim$ étant engendrée par l'identification des points bases) :

$$\bigvee_{\alpha\in A} S_\alpha := \left(\coprod_{\alpha\in A} S_\alpha\right)\diagup\sim\;\simeq (\coprod_{alf} e_\alpha)\cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y)/\langle Y\rangle\,.$$

Ceci conclut. ■

4.2.2 CW-complexe, espace cellulaire

4.2.2.1 Définition générale

Définition. ***(CW-complexe, espace cellulaire fini)***

Un *espace cellulaire*, *complexe cellulaire* ou *CW-complexe* (pour *closure-finite weak-topology*), est un espace topologique X muni d'une famille $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces, en utilisant la convention $X^{(-1)}=\emptyset$, si :

1. $X^{(n)}$ est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$,
2. $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}$ et la topologie de X coïncide avec la topologie faible définie par la famille $(X^{(n)})_n$.

Voici quelques définitions et propriétés générales des CW-complexes.

Remarques.

1. Le sous-espace $X^{(n)}$ s'appelle le n-squelette de X. Il est fermé dans X. Le 0-squelette $X^{(0)}$ est un espace discret.
2. Nous appellerons *partition* ou *décomposition cellulaire* ou encore *cellularisation* de X la donnée pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'une décomposition cellulaire de $X^{(n)}$ relative à $X^{(n-1)}$. Elle est le plus souvent sous-entendue, les propriétés qui suivent des CW-complexes n'en dépendent pas. Les cellules, cellules ouvertes, applications caractéristiques, applications d'attachement de (la décomposition cellulaire fixée de) X sont celles de $X^{(n)}$ relativement au précédent. L'ensemble X est donc réunion disjointe de ses

cellules ouvertes, qui sont les composantes connexes de $X^{(n)} - X^{(n-1)}$.
Attention, les (images par les applications caractéristiques des) cellules de X sont fermés de X, mais les cellules ouvertes n'en sont pas forcément des ouverts.

3. Une cellule de dimension 0 est appelé un *sommet* de X. Une cellule ou cellule ouverte de X de dimension 1 est appelée *arête* ou *arête ouverte* de X. La frontière d'une arête ouverte est fermée d'un ou deux sommets de X, appelés les *extrémités* de l'arête.

4. La topologie de X est la topologie faible définie par la famille de ses cellules.

5. La *dimension* de X est la borne supérieure des dimensions de ses cellules ouvertes, ce qui est bien définir par le théorème d'invariance du domaine. Un *graphe topologique* est un CW-complexe de dimension $\leqslant 1$.

Théorème. ***(CW-complexe, formulation simplifiée pour l'homologie cellulaire)***

Un CW-complexe séparé est exactement un espace topologique X séparé, non vide, muni d'une partition dont les éléments s'appellent *cellules (ouvertes)* vérifiant les conditions suivantes :

(i) pour toute cellule C, il existe un entier $n \geqslant 0$ appelé la *dimension* de C et une application $\varphi_C = \varphi : D^n \to X$ appelée *application caractéristique* de X tels que $\varphi_{|\mathring{D}^n}$ fournisse un homéomorphisme entre $\mathring{D}^n$ et C (n est alors nécessairement unique et $\varphi : D^n \to \overline{C}$, parfois appelée abusivement *cellule fermée*, ce que nous ferons librement, est bien définie) et que de plus l'image du bord S^{n-1} de D^n soit contenue dans une réunion finie de cellules de dimension $\leqslant n-1$; en outre $\varphi : D^n \to \overline{C}$ est alors automatiquement une surjection continue, autrement dit les cellules fermées sont les images des applications caractéristiques ; de plus $\varphi(S^{n-1}) \subseteq \partial C$;

(ii) $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si pour toute cellule C, l'intersection $A \cap \overline{C}$ est une fermé dans $\overline{C}$, autrement dit les fermés de la topologie de X sont les parties rencontrant toute cellule fermée en un fermé (de X), c'est donc la topologie faible relative à toutes les cellules fermées.

L'ensemble des cellules de X est alors la décomposition cellulaire X et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la réunion de toutes les cellules de dimension $\leqslant k$ est le k-squelette du CW-complexe X.

▷ L'unicité de n découle de l'invariance du domaine. Par continuité de φ, $\varphi(\overline{\mathring{D}^n} = D^n) \subseteq \overline{C}$ d'où la viabilité de cette corestriction.

Soit C un cellule. On sait que $C \subseteq \varphi_C(D^n)$ qui est compacte par image séparée d'un compact dans un séparé donc fermée donc $\overline{C} \subseteq \varphi_C(D^n)$. Par suite, $\varphi_C(D^n) = \varphi_C(\overline{\mathring{D}^n}) = \overline{\varphi_C(\mathring{D}^n)} = \overline{C}$. ■

Heuristique

Les CW-complexes sont des objets combinatoires et c'est comme ça qu'il faut les appréhender pour être utile.

Le théorème précédent énonce qu'on est pas obligé de recoller les cellules dans l'ordre des dimensions et que l'on obtient la même notion.

Exercice 1

Montrer que, dans un CW-complexe séparé, toute cellule fermée (*i.e.* toute adhérence de cellule) est compacte.

▷ **Éléments de réponse.**

La séparation du CW-complexe X est cruciale. En effet, toute cellule fermée C_0 est l'image d'une application caractéristique $\varphi : D^n \to X$. Puisque D^n est compacte et X est séparée, C_0 est compacte.

Exercice 2

Montrer que, dans un CW-complexe séparé, toute cellule C qui n'est pas un sommet est non fermée, en particulier $C \subsetneq \overline{C}$, mais les sommets le sont.

▷ **Éléments de réponse.**

$C \simeq \mathring{D}^n$ pour $n > 0$ n'est pas compact, mais si C était fermée, elle serait compacte, car dans le compact $\varphi_C(D^n)$. D'autre part, les 0-cellules sont des points, donc fermés en milieu séparé.

Fait. ***(Écrasement des applications caractéristiques)***

Soit X un CW-complexe. Soit $\varphi_i : D^k \to X$ l'application caractéristique d'une cellule c_i. On a un homéomorphisme

$$\tilde{\varphi}_i : D^k/S^{k-1} \to \overline{e_i}/(\overline{e_i} \setminus e_i).$$

En effet, les applications caractéristiques passent au quotient par hypothèse dans la définition des CW-complexes. L'application quotient est une bijection continue d'un quasi-compact sur un séparé, donc c'est un homéomorphisme.

Définition. ***(Sous-CW-complexe)***

Un sous-CW-complexe de X est un sous-espace topologique Y de X, tel que si $Y^{(n)} = X^{(n)} \cap Y$, alors $(Y^{(n)})_n$ est un CW-complexe.

Remarque. Il faut et il suffit pour cela que Y soit union de cellules ouvertes de X dont l'adhérence est contenue dans Y

Exemple fondamental. ***(Sous-CW-complexe squelettique)***

Par exemple, $X^{(k)}$ est un CW-complexe de dimension $\leqslant k$.

Exemple. ***(Toy model : surface de Boy)***

$\mathbb{P}^0\mathbb{R} = \{*\}$, puis $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = S^1$ et $\mathbb{P}^0\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R}$. Ensuite, $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, etc.

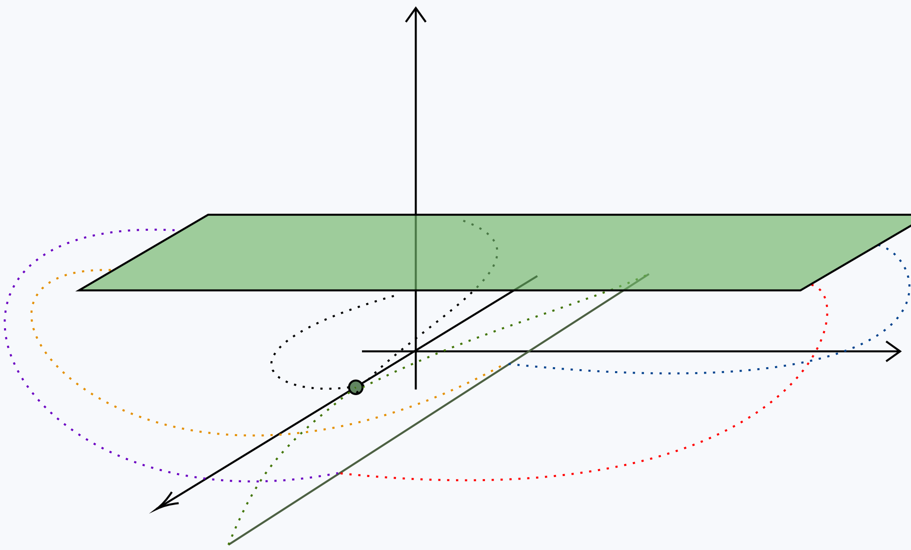


FIGURE 4.2.1 : *Structure cellulaire du plan projectif.* —
Structure cellulaire du plan projectif

Ainsi, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup ... \cup \mathbb{R}^1$, avec chacun des termes donnés deux à deux disjoints. Les applications caractéristiques ne sont pas explicitées, mais il est clair qu'on a là une décomposition cellulaire de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, puisque tout espace euclidien est homéomorphe à une boule ouverte.

Mnémonik : les espaces projectifs sont tordus.

On dit que le CW-complexe est fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Il est alors de dimension finie. La seconde condition des CW-complexes est automatiquement vérifiée si le CW-complexe est fini, comme ce sera le cas dans la plupart des exemples. Ceci permet d'énoncer la définition suivante :

4.2.2.2 CW-complexe fini, espace cellulaire fini

Définition. ***(Espace cellulaire fini, CW-complexe fini)***

Un *espace cellulaire fini*, ou *CW-complexe fini*, est un espace obtenu à partir d'un nombre fini de points, les 0-cellules, en recollant par ajout itératif un nombre fini de cellules. Autrement dit, un espace cellulaire est fini si et seulement s'il est de dimension finie et que chaque n-squelette résulte du recollement de seulement un nombre fini de n-cellules.

Exemples. ***(Espaces cellulaires finis)***

1. Tout graphe combinatoire est un espace cellulaire de dimension 1.
2. Toute sphère est un espace cellulaire. Pour $n \geqslant 1$, l'application d'attachement $\pi : S^{n-1} \longrightarrow pt$, $S^n = B^n \bigcup_{\pi} pt = \{N\}$ confère à S^n une structure de CW-complexe fini ayant un sommet N et une et une seule n-cellule ; si $n = 0$, on considère simplement l'application vide. Heuristiquement, il suffit de recoller le bord de la boule sur un point pour obtenir la sphère. C'est d'ailleurs un CW-complexe de dimension n.
3. Les bouquets de sphère sont donc des espaces cellulaires complexes. En effet, un bouquet de sphères pointées de dimension n, indexées par un ensemble S, admet une structure de CW-complexe, avec un seul sommet et $\mathrm{card}(S)$ cellules de dimension n, dont les applications d'attachements sont les applications constantes sur le sommet.
4. Par compacité (voir ci-dessous), $\mathbb{R}^n$ n'est pas CW-complexe fini.
5. Le tore $\mathbb{T}^2$ admet une structure de CW-complexe fini ayant une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule. Il est donc de dimension 2. En effet, le tore $\mathbb{T}^2$ est par définition homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $K = [0,1] \times [0,1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$. La 0-cellule est l'image de $(0,0)$, les deux 1-cellules sont les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{T}^2$ obtenues par passage au quotient des applications $t \mapsto (t,0)$ et $t \mapsto (0,t)$. La 2-cellule est la projection canonique de $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{T}^1$.
6. La bouteille de Klein $\mathbb{K}_2$ admet une structure de CW-complexe fini ayant aussi un sommet, deux arêtes et une cellule de dimension 2. En effet, par définition, elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par $(1,t) \sim (0,1-t)$ et $(t,1) \sim (t,0)$. Les cellules sont données par les mêmes opérations.
Les 1-squelettes de $\mathbb{K}_2$ et de $\mathbb{T}^2$ sont naturellement homéomorphes, mais l'application d'attachement de la 2-cellule de $\mathbb{K}_2$ n'est pas homotope à l'application d'attachement de la 2-cellule de $\mathbb{T}^2$.
7. Un autre exemple est l'espace projectif réel. On l'étudie en détail dans la section consacrée, dans la section Espaces projectifs généraux.

Corollaire

Tout espace cellulaire fini est séparé. En particulier, c'est un espace cellulaire.

Corollaire

Tout espace cellulaire fini est compact.

4.2.2.3 Applications cellulaires

Définition. ***(Application cellulaire)***

Soient X,Y deux CW-complexes. Une application continue de X dans Y est dite *cellulaire* si elle envoie le n-squelette de X dans le n-squelette de Y pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit aussi que c'est un *morphisme de CW-complexes*. On en déduit même la *catégorie des CW-complexe*.

4.2.2.4 Orientation de cellules, coefficient d'incidence de cellules (hors-programme)

Pour comprendre la construction suivante, on a besoin de connaître l'homologie (singulière) des sphères afin de définir le Degré d'une application continue $S^n \to S^n$, $n \in \mathbb{N}$. On pourra sans problème admettre qu'une telle quantité est définie au signe près dans $\mathbb{Z}$.

Définition-propriété. ***(Orientation d'une cellule)***

Soit X un CW-complexe. Pour $k \in \mathbb{N}$, pour chaque k-cellule de X, il y a deux classes d'équivalence d'application caractéristiques $\varphi,\psi : D^k \to X$ pour $\deg(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = 1$.

En effet, $\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k/S^{k-1} \to D^k/S^{k-1}$ est un homéomorphisme et $D^k/S^{k-1} \simeq S^k$ par un homéomorphisme fixé uniquement, donc son degré est ± 1 défini absolument.

Une *orientation* d'une k-cellule de X est un choix d'une des deux classes d'équivalence d'application caractéristiques de cette cellule. Sous couvert d'un choix d'orientation, on dit qu'une k-cellule est *orientée* ou *non orientée* si l'on ne précise pas d'orientation.

Définition. ***(Coefficient d'incidence de cellules)***

Soit X un CW-complexe. Soient σ une k-cellule et τ une $(k-1)$-cellule de X, $k \in \mathbb{N}^*$. Le *coefficient d'incidence* $[\sigma : \tau]$ est le degré de l'application

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi^{\sigma}_{|S^{k-1}}} X^{(k-1)} \xrightarrow{\pi} X^{(k-1)}/(X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau') \xrightarrow{\sim} \overline{\tau}/(\overline{\tau} \setminus \tau) \xrightarrow{\tilde{\varphi^{\tau}}^{-1}} D^{k-1}/S^{k-2} \simeq S^{k-1}$$

où $\varphi : D^k \to X$ est une application caractéristique de σ.

Heuristique

Prenons une 2-cellule, c'est-à-dire un disque D^2, et singularisons une arête. L'application de recollement envoie son bord le cercle S^1 sur le 1-squelette de X, c'est-à-dire ses arêtes. Écrasons ce dernier relativement à tout le squelette inférieur (ici seulement les points) ainsi que les autres arêtes que celle considérée. Après cet écrasement, il ne reste que l'arête aux extrémités écrasées (puisqu'on a écrasé les extrémités, qui sont des points). Ce truc n'est autre qu'un cercle, d'où une application de $S^1 \to S^1$ en composant tout cela. Le coefficient d'incidence de la 2-cellule par rapport à l'application est alors le degré de cette application autour du cercle.
Ainsi, l'information importante est contenue dans la façon comment φ envoie le bord de σ sur τ, *i.e.* $S^{k-1} \to X^{(k-1)}/(X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau')$.

Remarque. Il est défini donc a priori au signe près. Si l'on veut fixer son signe, on oriente σ et τ et l'on doit fixer une façon standard de choisir un générateur des groupes $\tilde{H}_k(S^k)$ où S^k est le bord de D^{k+1} et $\tilde{H}_k(S^k)$ où $S^k = D^k/S^{k-1}$, en particulier par le même espace S^k.

Ces définitions permettent de calculer l'homologie de CW-complexes simples, comme on le verra en temps venu.

4.2.2.5 Boucle d'oreille hawaïenne

4.3 Homotopie et groupe fondamental

Motivation. En topologie, contrairement à la géométrie, on s'intéresse peu à la taille des objets mais à leurs possibilités de déformation. Ainsi, deux espaces homéomorphes sont les mêmes, mais on voudrait maintenant décrire des applications donnant que deux espaces sont *presque* homéomorphes (c'est l'homotopie), mais les mêmes à déformation près. Par exemple, un plongement de la sphère dans le plan ne peut être homéomorphe, mais quitte à agrandir son image jusqu'à l'infini, on dira que le sphère et le plan sont les mêmes, à déformation près. On définit ainsi une relation plus faible que l'homéomorphie et bien utile au topologue.

4.3.1 Point de vue catégorique de la topologie

Définition. ***(Catégorie des espaces topologiques)***

On note $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$, la catégorie de tous les espaces topologiques. Dans ce cas, pour tous objets X,Y, $\mathrm{Hom}(X,Y)$ sont les applications continues $= C(X,Y)$.

4.3.2 Notion d'homotopie

4.3.2.1 Applications homotopes

$\longrightarrow$ *Notation.* S i X est un espace topologique, on note $\star_X$ *n'importe quel point* arbitrairement fixé de X. Si X est évident, en particulier si X est le seul espace mis en jeu, on note simplement l'étoile $\star$.

Définition. ***(Homotopie)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues (cela va de soi dans la catégories des espaces topologiques). Une *homotopie* entre f et g est une application continue :

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

où $I = [0,1]$, telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une homotopie entre f et g, et l'on écrit $f \cong g$, ou, si le contexte est clair (ce qui arrive souvent, puisqu'on parle d'applications maintenant), $f \simeq g$.
Le paramètre t peut, mais ce n'est pas fondamental, représenter le temps. On dit parfois *au premier instant* et *au dernier instant* pour parler des temps $t = 0$ et $t = 1$, conformément au formalisme de la Mécanique.

Intuitivement, H est une application continue qui « interpole » entre f et g. Aussi, f et g ne sont pas les mêmes, mais il existe une collection de chemins continus qui ramène continûment le chemin f au chemin g.

Remarque : avec la phrase précédente, on a traduit que les deux applications partielles doivent être continues. Mais, d'après la définition, cela ne suffit pas tout à fait.

L'homotopie entre deux applications n'est pas équivalente avec l'existence d'un chemin continu de f à g dans $C(X,Y)$, mais presque (mais quelle topologie donner à cet espace ?). C'est vrai si l'on suppose X localement compact (raisonnable) et si l'on munit $C(X,Y)$ de la topologie compacte-ouverte (raisonnable également).

Clairement :

Proposition. ***(Relation d'homotopie)***

L'homotopie est une relation d'équivalence.

$\triangleright$ Bah, pour la réflexivité, il suffit de prendre $H(x,t) = f(x)$ (là on voit qu'il faut f continue sinon ça déconne). Pour la symétrie, considérer $H'(x,t) = H(x,1-t)$ continue par composition. Pour la transitivité, faire appel à une ruse de fouine semblable à la connexité par arcs. $\blacksquare$

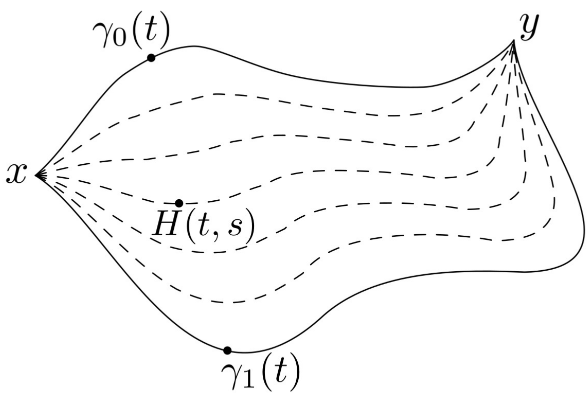


FIGURE 4.3.1 : *Deux applications homotopes.* —
On reprend les notations de l'énoncé. Ici, l'homotopie est prise relativement à deux points $\{x,y\}$. L'idée est de déformer continûment f en g. **Non seulement je peux le faire sur tous les points, j'ai peux le faire de manière simultanément cohérente pour tous les points** (H est continue).

Remarque. L'homotopie s'énonce également avec $[a,b]$ au lieu de I. Il y a bien sûr équivalence entre les deux définitions.

Exemples. ***(Homotopies)***

1. $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est homotope à l'application constante $0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Pour voir, la structure topologique de $\mathbb{R}^n$ est tellement basique que $\mathbb{R}^n$ est homotope à un point (pour l'équivalence d'homotopie, que nous définirons plus bas). On peut *réaliser l'homotopie* par $H : \mathbb{R}^n \times I : (x,t) \longmapsto xt$.
2. Deux segments d'un espace vectoriel normé sont toujours homotopes (le faire). On peut même imposer que les chemins interpolateurs soient également des segments.
3. On verra que dans des espaces gentils tels que $\mathbb{R}^n$ où l'application identité est homotope à une application constante, on parlera d'espace *contractile*, tout lacet est homotope à un lacet constant. C'est le cas du plan complexe, où l'on retrouve un théorème sur l'intégration des fonctions holomorphes.
   Ce n'est plus vrai dans certains autres espaces. Par exemple, dans le cercle S^1 réalisé dans le plan complexe, la situation n'est pas équivalente à la précédente. Si un fil parcourt une boucle autour d'un cercle, il n'est pas possible de modifier le nombre de tours compté algébriquement sans que le fil ne se brise ou quitte la surface de la sphère. Ce *nombre de tours* est formellement défini de la manière suivante : l'application de $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$ étant un homéomorphisme local, tout lacet $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ possède un unique relèvement continu $\overline{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\overline{\gamma}(0) = 0$. Le degré du lacet est alors $\overline{\gamma}(1)$. Si deux tels lacets sont homotopes, on démontre, en relevant de même cette homotopie, qu'ils ont le même degré.

Ainsi, deux applications homotopes ne sont pas égales, mais interchangeables, en un point à préciser.

Définition. ***(Homotopie relative)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \longrightarrow Y$. Soit $A \subseteq X$, telles que $f_{|A} = g_{|A}$. On dit que f *est homotope à* g *relativement à* A, et l'on note $f \cong_A g$ ou $f \simeq_A g$, si il existe une homotopie $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$, et $H(a,t) = f(a) = g(a)$ pour tous $a \in A$, $t \in [0,1]$.

Proposition. ***(Relation d'homotopie relative)***

Avec les notations précédentes, l'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence.

▷ La réflexion vient de ce qu'on peut prendre $H(x,t) = f(x)$. Pour la symétrie, si H est une homotopie (relativement à A) $f \simeq g$, alors $H(x,1-t)$ convient. On définit $H'(x,t) = H(x,2t)$ si $t \in [0,\frac{1}{2}[$, $H'(x,t) = H(x,2(t-\frac{1}{2}))$ sinon. C'est une homotopie de f à h. C'est déjà pas mal ! ■

Définition. ***(Candidats d'homotopie relative)***

Soit $\psi : A \longrightarrow X$. On note alors $C(X,Y)_\psi$ l'ensemble des applications continues de $f : X \longrightarrow Y$ telles que $f_{|A} = \psi$, c'est-à-dire l'ensemble des applications pour laquelle l'homotopie relative à A avec ψ fait sens.

Définition. ***(Quotient d'homotopie relative)***

On note $[X,Y]_\psi$ le quotient de $C(X,Y)_\psi$ par la relation d'homotopie relative à A.

Exemple. ***(Quotient d'homotopie trivial)***

Cherchons $[\star,X]$ dans le cas $C(\star,X) = X$. Une homotopie dans ce cas est un chemin comme on connaît : on note $\pi_0(X) = [\star, X]$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Et, héhé, on touche du doigt la suite des événements...

L'homotopie n'est pas une notion extrinsèque (on n'en doutait pas) ! Un cercle du plan est homotope à un point ; un cercle embrassant le tore, non.

Lemme. ***(Conservation de l'homotopie par compositions)***

Soient, T,X,Y,Z des espaces topologiques et

$$T \xrightarrow{k} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

Si $f \simeq g$, alors $h \circ f \circ k \simeq h \circ g \circ k$.

▷ Soit H une homotopie de f à g. Alors $h \circ H \circ (id \times h)$ est une homotopie de $h \circ f \circ k$ sur $h \circ g \circ h$. ■

On cite aussi.

Lemme. ***(Composition d'homotopies)***

Si $f \simeq g$ et $h \simeq k$, h est composable à f et k à g, alors $h \circ f \simeq k \circ g$.

▷ La preuve est sans malice : pour composer deux homotopies H et K, on considère $\Theta(t,x) = K(t,H(t,x))$. ■

Exercice 3 *(Homotopie et cylindre, cône et suspension)*

1. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues $X \to Y$ est équivalente à la donnée d'une application continue $\mathfrak{C}(X) \to Y$.
2. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues $X \to Y$ dont la première est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue $C(X) \to Y$.
3. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues $X \to Y$ dont la seconde est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue $\Sigma(X) \to Y$.

4.3.2.2 Équivalence d'homotopie

On peut maintenant, à la mode catégorique, transformer les notions que l'on connaît en notions vraies à homotopies près. Le lecteur se convaincra qu'en topologie, c'est la bonne manière de considérer les choses.

Définition. ***(Équivalence d'homotopie)***

On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie*, s'il existe une application continue $Y \longrightarrow X$ telle que $f \circ g \simeq id_Y$ et $g \simeq f \simeq id_X$.
Moins formellement, une équivalence d'homotopie est une application continue inversible à homotopie près.

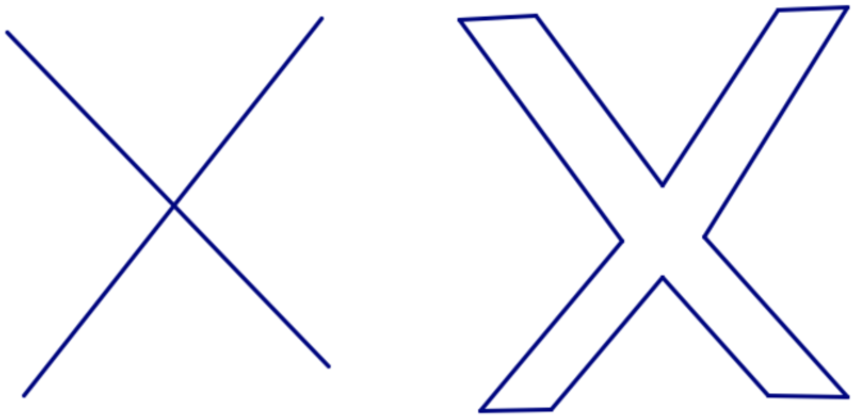


FIGURE 4.3.2 : *Deux espaces homotopiquement équivalents non homéomorphes.* — Si l'on enlève le point central de l'espace de gauche, on obtient quatre composantes connexes. Cependant, si l'on enlève un point quelconque à l'espace de droite, on garde un espace connexe par arcs.

Deux espaces topologiques A,B sont dits *homotopes* s'il existe une équivalence d'homotopie entre eux. C'est clairement une relation d'équivalence. On note $A \cong B$ et nous proscrivons l'usage $\simeq$ similaire à l'homéomorphie.

Fait. ***(Homotopie et homéomorphie)***

Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

Les notions de convergence, internes, ne sont pas conservées par l'équivalence d'homotopie. En revanche, les considérations extérieures (trous, composantes connexes, etc.), le sont : c'est un peu la « morale de l'équivalence d'homotopie ».

Exemples. ***(Équivalences d'homotopie)***

1. Comme on a vu, $\begin{array}{ccc} \star & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \star & \longmapsto & a \end{array}$ est une équivalence d'homotopie pour tout point $a \in \mathbb{R}^n$. L'homotopie représente donc bien cette idée topologique de géométrie du caoutchouc : peu importe la taille, des choses très petites, atomiques, sont homotopes à des choses très grandes, infinies.
2. *(Homotopiquement équivalent $\not\Longrightarrow$ homéomorphes $\lightning$)* $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie. On pose $g : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \longrightarrow S^1$, qui à x fait correspondre $\frac{x}{\|x\|}$. Alors $g \circ f = id$ et $f \circ g \neq id$. On pose $H : \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ qui à $(x,t) \longmapsto (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$. Alors $f \circ g$ est homotope à l'identité. Pourtant, il est clair que S^1 et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes ; en effet, le premier, privé de deux points, n'est plus connexe par arcs ; le second, si.

Définition. ***(Catégorie des espaces topologiques homotopique)***

On raffine la catégorie des espaces topologiques en la *catégorie d'homotopie* $C = \mathrm{Top}_H$ dont les objets sont encore les espaces topologiques et pour tous objets X,Y, $\mathrm{Hom}_C(X,Y) = [X,Y] := [X,Y]_\emptyset$: les morphismes sont les applications continues définies à homotopie près.
Les isomorphismes de la catégorie C sont les équivalences d'homotopie.

Heuristique

L'homotopie est une sorte de *morphisme entre les morphismes*, ce qui fait gagner un troisième cran d'abstraction dans les catégories.

On donne quelques propriétés pratiques pour établir des homotopies.

Propriété. ***(Cas trivial dans*** $\mathbb{R}^n$***)***

Toute application continue d'un convexe dans lui-même est homotope à l'identité.

▷ Soit X un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue $X \longrightarrow X$. Alors l'homotopie $(1-t)x + tf(x)$ convient. ■

Propriété. ***(Type d'homotopie par changement de point de vue)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $g : Y \longrightarrow X$. On ne parvient pas à construire $f : X \longrightarrow Y$ directement de façon continue. On choisit un isomorphisme $\varphi : X \longrightarrow X'$ et l'on pose $f : X' \longrightarrow Y$ On suppose $(f \circ \varphi) \circ g = id_Y$. Alors il suffit de montrer $g \circ f \simeq \varphi^{-1}$ pour en déduire que X,Y sont homotopiquement équivalents.

▷ En effet, il suffit de montrer $(g \circ f) \circ \varphi \simeq id_X$ et l'on conclut par relation d'équivalence. ■

4.3.2.3 Isotopie

Définition. ***(Isotopie)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. On dit que deux homéomorphismes f,g sont *isotopes* s'ils sont homotopes par H de façon que pour tout $t \in [0,1]$, $H(-,t)$ soit un homéomorphisme.

Définition. ***(Isotopie ambiante)***

Deux plongements α,β d'un espace Z dans un espace X sont *isotopes (de manière ambiante)* s'ils se prolongent en deux homéomorphismes f,g de X isotopes.

Proposition

Deux plongements α,β d'un espace Z dans un espace X sont *isotopes* si et seulement s'ils diffèrent d'un isotopiquement nul, *i.e.* s'il existe h un autohoméomorphisme de X isotope à id_X et tel que $h \circ \alpha = \beta$.

4.3.3 Espaces contractiles

Définition. ***(Espace contractile)***

On dit qu'un espace topologique X est *contractile* s'il est homotope (= homotiquement équivalent) à un point, c'est-à-dire si $X \simeq \star$ dans Top_H.

Heuristique

Le seul espace topologique homéomorphe à un point est le point, qui est d'ailleurs unique à homéomorphisme près : il est discret, grossier, compact, connexe, séparé, à base dénombrable.
On se rappelle donc que l'équivalence d'homotopie est bien plus faible que l'homéomorphie ; en particulier, elle ne restreint par le cardinal.

Exemples. ***(Contractiles)***

1. Il s'agit de montrer : $X \cong \{\emptyset\}$.
2. Tout cône d'une espace topologique est contractile (l'écrire. En fait, par définition, **le cône est le paradigme d'espace contractile**.
3. Tout espace affine est contractile.
4. Tout convexe de $\mathbb{R}^n$ est contractile.
5. Toute boule est donc contractile.
6. Toute sphère privée d'un point est contractile.

Propriété. ***(Caractérisation de la contractibilité)***

Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est contractile ;
(ii) $id_X \sim cst_{x_0}$ pour un $x_0 \in X$; on dit que id_X est *homotopiquement nulle* ;
(iii) $id_X \sim cst_{x_0}$ pour chaque $x_0 \in X$;
(iv) X se rétracte par déformation sur n'importe lequel de ses points.
(v) $C(X)$ se rétracte par déformation sur X ;
(vi) toute fonction continue dans X est homotopiquement nulle ;
(vii) toutes les fonctions continues dans X sont homotopes.

4.3.3.1 Rétractions

Définition. ***(Paire topologique)***

Soit X un espace topologique et $i : A \longhookrightarrow X$ continue, ce qui revient à prendre un sous-espace A de X avec $A \subseteq X$. Alors on dit que (X,A) est exactement une *paire topologique*. Une *application continue* entr deux paires topologiques (X,A) et (Y,B) est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subseteq B$.

Définition. ***(Rétract)***

Soit X un espace topologique et $i : A \longhookrightarrow X$ continue, ce qui revient à prendre un sous-espace A de X, on dit que A est un *rétract* de X, ou que A est *rétracte*, si l'inclusion a une *rétraction* topologique stricte, *i.e.* s'il existe $\tau : X \longrightarrow A$ continue telle que $\tau \circ i = id_A$.

Définition. ***(Rétracts par déformation (forte))***

Soit X un espace topologique et $i : A \longhookrightarrow X$ continue, ce qui revient à prendre un sous-espace A de X, on dit que A est un *rétract* de X, ou que A est un *rétract par déformation* si c'est une rétract et sa rétraction $\tau : X \longrightarrow A$ est une section telle que $i \circ \tau \simeq id_X$.
On dit encore que A est un *rétract par déformation fort* si de plus $i \circ \tau \simeq_A id_X$.

Fait

Ainsi rétract par déformation fort $\Longrightarrow$ rétract par déformation $\Longrightarrow$ rétract.

Remarque. Pour ne pas avoir l'homéomorphisme, on comprend bien que c'est la condition la plus forte que l'on peut demander.

Remarque importante. Dans le cas du rétract par déformation, i et τ sont des équivalences d'homotopie. Ainsi, **une rétraction par déformation est un cas particulier d'identité du type d'homotopie**, et même assez courant : il correspond grosso modo au cas où l'une des $f \circ g \sim id$ est une égalité.

Exercice 4

L'équateur de la sphère usuelle en est-il un rétract par déformation ? Un rétract ?

Exemples. ***(Rétracts)***

1. $S^1 \longhookrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ est un rétract par déformation.
2. S^1 est un rétract par déformation du ruban de Möbius.

3. Pour tout $x \in S^1$, $\{x\} \times S^1$ est un rétract de $\mathbb{T}^2$. De même, $S^1 \times \{x\}$ est un rétract de $\mathbb{T}^2$. Cependant, aucun des deux n'est un rétract par déformation.
4. *(Rétraction sur le cône)* Tout espace topologique X est un rétract par déformation forte de son cylindre $X \times I$.

   En effet, en considérant $i : X \hookrightarrow X \times I, x \mapsto (x,0)$, on a une rétraction $r : (x,t) \mapsto x$ telle donc que $ri = id_X$ et continue sur $X \times I$. C'est un rétract, car $ir : X \times I \to X \times I, (x,t) \mapsto (x,0)$ est $\sim id_X$ par $H\colon \begin{array}{ccc}(X \times I) \times I & \longrightarrow & X \times I \\ ((x,t),t') & \longmapsto & (x,tt')\end{array}$. La rétraction par déformation est même forte puisque pour $t = 0$ *i.e.* sur X, $H((x,t),t') = (x,0) = id_X(x,t) = ir(x,t)$ pour tout $t' \in [0,1]$.

   Il n'est pas difficile de constater que X est également un rétract par déformation de son cône $C(X)$ écrasé au temps $t = 1$. Toutes les applications mises en jeu passent au quotient sur $X \times \{1\}$ y compris l'homotopie, qui reste relative. Semblablement, X est un rétract par déformation de sa suspension $\Sigma(X)$.
5. $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}$ est un rétract par déformation de $S^3 \setminus \{(x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$.

   On note $B = \{(x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$. Considérons $r : (x_1,\ldots,x_4) \mapsto (0,0,\frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^3}},\frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^3}})$. Elle est bien définie par hypothèse d'exclusion sur B et bien à valeurs dans $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}$. On a presque par construction $ri = 0$ en notant $i : (0,0,x_3,x_4) \longhookrightarrow (0,0,x_3,x_4)$. D'autre part, $ir(x) = (0,0,\frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^3}},\frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^3}})$. Considérons $H(x,t) = \frac{(tx_1,tx_2,x_3,x_4)}{\|(tx_1,tx_2,x_3,x_4)\|}$ qui est une homotopie de $id_{S^3 \setminus B}$ à ri. La rétraction par déformation est forte, car sur S^1, cette homotopie vaut bien id.

Proposition

Soit $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ continue, X un espace topologique. Alors f se prolonge en une application continue $g : \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow X$ si et seulement si $f \simeq \star$ l'application constante.

▷ Si un tel g existe, on pose :

$$H\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{B}^{n+1} \times I & \longrightarrow & X \\ (x,t) & \longmapsto & g(tx)\end{array}$$

qui est une homotopie entre g et l'application constante $x \longmapsto g(0)$. Par restriction, on en déduit une homotopie entre f et $g(0)$.

Réciproquement, si $f \simeq x_0$, soit $H : \mathbb{S}^n \times I \longrightarrow X$ cette homotopie. On pose :

$$g\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{B}^{n+1} & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} H(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|) \text{ si } \|x\| \geqslant \frac{1}{2} \\ x_0 \text{ sinon}\end{cases}\end{array}$$

et voilà. ■

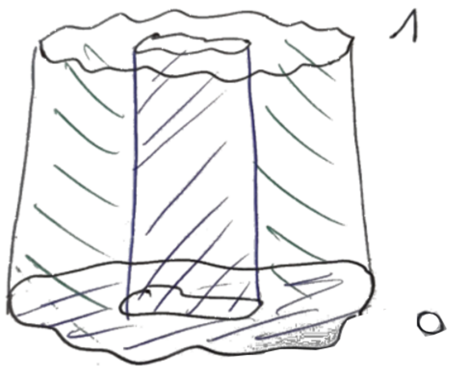


FIGURE 4.3.3 : *Illustration de la notion de rétraction.* —

4.3.4 Propriété d'extension des homotopies

Définition. ***(Propriété d'extension des homotopies, peh)***

Soient Y un espace topologique et $X \subseteq Y$ un sous-espace. On dit que (Y,X) a la *propriété d'extension des homotopies* ou de *prolongement des homotopies* si pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ (continue) et pour toute application continue $H : X \times I \longrightarrow Z$ telle que $H(-,0) = g_{|X}$, alors il existe une homotopie $\tilde{H} : Y \times I \longrightarrow Z$ vérifiant : $\tilde{H}_{|X\times I} = H$ et $\tilde{H}(-,0) = g$. On dit alors que $\tilde{H}$ *étend* h *avec conditions initiales.*
Si Z est fixé, on dit que (Y,X) a la PEH *relativement à* Z. Une paire topologique a donc la PEH si et seulement si elle a la PEH relativement à tout espace.
On dit parfois que (X,A) est une *cofibration*. Elle est *stricte* si A est fermée dans A. On parle aussi de *paire de Borsuk* et de *bonne paire topologique*.

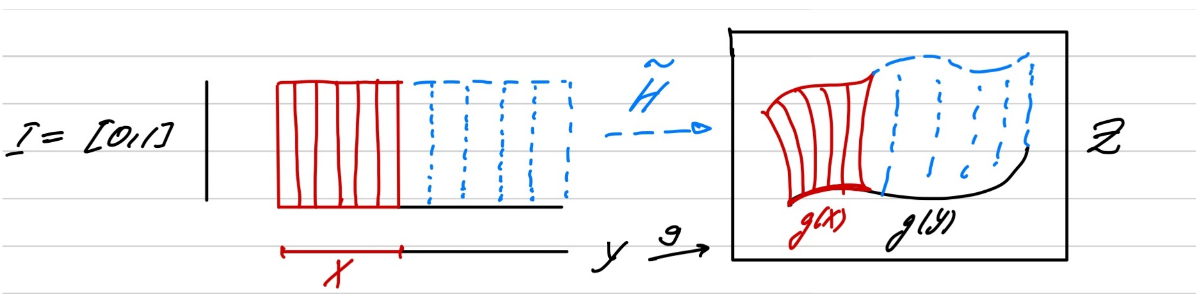


FIGURE 4.3.4 : *Propriété d'extension des homotopies.* —

Remarques.

1. Si X est fermé dans Y, par recollement de continues sur un recouvrement de deux fermés, g et H donnent une application continue
$$(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z.$$
Autrement, ce n'est pas clair (contre-exemple : prendre $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R}$)).
2. Si (Y,X) a cette propriété, alors l'inclusion canonique i de $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \hookrightarrow Y \times I$ s'étend (en effet, on a une application continue $g = i_{|Y \times \{0\}}$ et une homotopie $H = i_{|X \times I}$ qui vérifient les hypothèses) en une application continue qui est par construction une rétraction de i donc par définition $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$ est un rétract de $Y \times I$. Réciproquement, s'il existe une rétraction $\tau : Y \times I \longrightarrow (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$, en composant avec τ, toute application continue f :
$$\begin{tikzcd} (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \arrow[r] & Z \\ Y \times I \arrow[u, hook] \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$
s'étend en une application continue sur $Y \times I$ donnée par $f \circ \tau$. Or d'après la remarque précédente la donnée d'une application continue g et d'une homotopie H vérifiant les hypothèses de la définition est équivalente à la donnée d'une application continue f de $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$ dans le cas A fermé. On peut donner une preuve dans le cas général, mais c'est nettement plus laborieux. On le fait dans le chapitre Homotopies. Ainsi,
$$\boxed{(Y,X) \text{ a la PEH si et seulement si } (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \text{ est un rétract de } Y \times I.}$$
Le cas échéant, c'est même un rétract par déformation.
3. Schématiquement,
$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "\tilde{f}_0"'] \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ Y^I \arrow[u, twoheadrightarrow, "p_0"] & A. \arrow[l, "f"] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$
4. *(Passage au produit dans la PEH)* En exercice : si (Y,X) a la propriété d'extension des homotopies, alors $(Y \times Z, X \times Z)$ aussi.

Proposition

Si Y est séparé et (Y,X) a la peh, alors X est fermé dans Y.

▷ Y est séparé si et seulement si Δ_Y est fermée dans $Y \times Y$. On a une rétraction donné par la figure ci-dessous. Soit $F : Y \times I \longrightarrow (Y \times I) \times (Y \times I)$ qui $x \longmapsto (x, \tau(x))$. On a $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) =$

$F^{-1}(\Delta_{Y\times I})$ fermé.

$$\begin{tikzcd} Y\times I \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "p"'] & (X\times I)\cup(Y\times\{0\}) \arrow[r] & Y\times I \end{tikzcd}$$

En prenant l'intersection avec le fermé $Y\times\{1\}$, on obtient que X est fermé. ■

Remarque. Dans ce cas, une application $f:(X\times I)\cup(Y\times\{0\})\longrightarrow Z$ est continue ssi $f_{|X\times I}$ et $f_{|Y\times\{0\}}$ le sont.

Proposition

(B^n,S^{n-1}) a la P.E.H.

▷ On a une rétraction par déformation $\tau:\underbrace{B^n\times I}_{\text{gobelet plein}}\longrightarrow\underbrace{(S^{n-1}\times I)\cup(B^n\times\{0\})}_{\text{gobelet}}$ en utilisant la projection radiale. ■

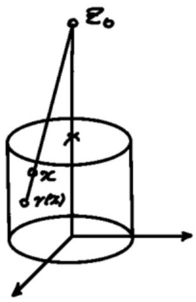


FIGURE 4.3.5 : *La* projection radiale *du gobelet plein sur le gobelet.* —

En faisant le quotient d'un espace par une partie, on identifie cette dernière à un point. Intuitivement, si cette partie est contractile, on obtiendrait un espace homotopiquement équivalent au précédent. C'est faux ! On a besoin de la propriété d'extension pour énoncer proprement cette propriété.

Propriété

Si (Y,X) a la PEH et X est contractile, alors Y et Y/X sont homotopiquement équivalents.

▷ On montre que $q:Y\longrightarrow Y/X$ est une équivalence d'homotopie. Soit $i:X\longrightarrow Y$ et puisque X est contractile, $H:X\times I\longrightarrow X$ entre id_X et l'application constante c_{x_0}. On a donc $\tilde{H}:X\times I\longrightarrow Y$ une homotopie entre i et c_{x_0}. Par extension, il existe $K:Y\times I\longrightarrow Y$ qui satisfait en particulier $K(x,1)=x_0$ pour tout $x\in X$. On pose $g:y\longmapsto K(y,1)$ de Y dans Y. g est constante sur X donc elle passe au quotient en $\tilde{g}:Y/X\longrightarrow Y$ et $\tilde{g}\circ q=g$. Donc $\tilde{g}\circ q$ est homotope via K et id_Y. De plus, pour tous $(x,t)\in X\times I$, on a $q\circ K(x,t)=q(x_0)\in Y/X$. Ainsi par extension, $Y\times I\longrightarrow (Y/X\times I)$ et $Y\times Y\longrightarrow Y/X$ permet la factorisation $g\mathbin{\tilde{\circ}}K$ qui est une homotopie entre $id_{Y/X}$ et $q\circ\tilde{g}$. ■

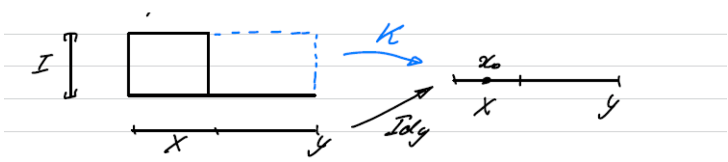


FIGURE 4.3.6 : *Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne.* —

Propriété. ***(Transitivité de la PEH)***

Si (Y,X) et (Z,Y) ont la PEH alors (Z,X) aussi.

Lemme. ***(PEH d'un recollement)***

Supposons que (B,A) a la PEH et $f : A \longrightarrow X$. On pose $Y = X \coprod_A B$. Alors (Y,X) a la PEH.

▷ La donnée de $H : B \times I \longrightarrow Z$ donne $H^\# : B \longrightarrow C(I,Z)$ qui à $b \mapsto (t \mapsto H(b,t))$. Par la PEH,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\forall H^\#"] \arrow[d] & C(I,Z) \arrow[d, "ev_0"] \\
B \arrow[ur, dotted, "K^\#"] \arrow[r, "\forall g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

tel que $\forall H^\#\ \forall g : ev_0 \circ H^\# = g \circ i\ \exists K^\# \quad ev_0 K^\# = g$ et $K^\# \circ i = H^\#$. Alors :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r, "H^\#"] \arrow[d, "j_X"] & C(I,Z) \arrow[d] \\
B \arrow[r, "j_B"'] \arrow[urr, dotted, "K^\#"] & B \coprod_A X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "L^\#"'] & Z
\end{tikzcd}$$

car K a la PEH par (B,A), et $L^\#$ est obtenue par propriété universelle du quotient. Donc $(B \coprod_A X, X)$ a la PEH. ■

Conséquence. ***(Propriété d'écrasement des CW-complexes)***

Si Y est obtenu à partir de X en attachant des cellules, et si X est contractile, alors $Y/X \cong Y$.

Propriété. ***(Homotopie des recollements par des homotopes)***

Soient $A \subseteq B$ des espaces topologiques ; on suppose que (B,A) a la propriété d'extension des homotopies et que $f,g : A \longrightarrow X$ sont homotopes. Alors il existe une équivalence

d'homotopie
$$X\coprod_f B \cong X\coprod_g B.$$

▷ Soit H une homotopie de f vers g. Avec $Z=(B\times I)\coprod_H X$, on a

$$\begin{tikzcd} X\coprod_f B \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \\ X\coprod_g B \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

On a une rétraction par déformation $\tau : B\times I \longrightarrow B\times\{0\}\cup(A\times I)$ qui induit une rétraction par déformation, $(B\times I)\coprod_H X \longrightarrow (B\times\{0\})\cup(A\times I)\coprod_H X = B\coprod_f X$. On a donc $B\coprod_f X \cong Z \simeq B\coprod_g X$. La propriété est démontrée. ■

4.3.5 Le groupe fondamental

4.3.5.1 Homotopie entre chemins, lacets et boucles

Définition. ***(Homotopie entre chemins)***

Soit X une espace topologiques. Deux chemins (continus) $\gamma,\gamma' : [0,1] \longrightarrow X$ sont dit *homotopes* si
$$\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma',$$
autrement dit, s'il existe une homotopie de γ vers γ' qui fixe leurs extrémités.
En particulier, l'homotopie entre deux chemins n'a de sens que s'ils ont (déjà) les mêmes extrémités.
On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie d'un chemin.

Le premier dessin illustrant l'homotopie dans ce polycopié illustre en fait déjà ce cas.

Définition. ***(Lacet, boucle)***

Soit X une espace topologiques et γ un chemin de X. On dit que γ est un *lacet* ou une *boucle* si $\gamma(0)=\gamma(1)$.

Attention ! On peut imaginer une homotopie entre deux lacets fixant les extrémités de ces deux là, mais ne fixant par celles des lacets intermédiaires. Cette notion ne nous intéressera pas.

Exercice 5 *(Les lacets sont les applications continues $S^1 \to X$)*

Montrer qu'un lacet en x_0 sur un espace topologique X est la donnée d'une application continue pointée de $S^1 \to (X,x_0)$.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit $f : [0,1] \to X$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Par propriété universelle de la somme topologique écrasée, on en déduit une application continue $f : [0,1]/\{0,1\} \simeq S^1 \to X$ où $\simeq$ est l'homéomorphie. En pointant S^1 par $\overline{1} = \overline{0}$, f est pointée de $(S^1,\overline{0}) \to (X,x_0)$. Réciproquement, si $f : (S^1,t_0) \to (X,x_0)$ est pointée, en composant par une paramétrisation exponentielle de S^1 autour de t_0 bien choisie, disons $t \mapsto t_0 e^{2\pi i t}$, on obtient une application continue de $[0,1]$ dans X telle que $f(0) = f(1) = x_0$.

4.3.5.2 Bagage théorique pour la construction du GF

Faire des dessins !

Définition. ***(Inverse d'un chemin, opposé d'un chemin)***

Soit X une espace topologiques et α un chemin dans X. On note $\overline{\alpha} : t \mapsto \alpha(-t)$ qui est un chemin de $\alpha(1) \to \alpha(0)$.

Définition. ***(Chemin constant)***

Soit X une espace topologique. On note $c_\star : t \mapsto \star$ un chemin constant en $\star \in X$.

Définition. ***(Composition des chemins)***

Si β est une chemin avec $\beta(0) = \alpha(1)$, on note $(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \text{ si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2(t-\frac{1}{2})) \text{ sinon.} \end{cases}$ On pose $[\alpha] \star [\beta] = [\alpha \star \beta]$ s'il existe bien défini, où $[\ \cdot\ ]$ est la classe d'homotopie d'un chemin (qui est clairement une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins continus dans X).

Cette formule n'est pas canonique, mais c'est la plus simple que l'on puisse trouver dans le commerce.

Le lemme suivant assure en particulier la bonne définition de la composition. Elle montre que les classes d'homotopie de chemins ne dépendent pas de leur paramétrage, ce qui est très puissant.

Lemme

Soit $\varphi : I \longrightarrow I$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$, alors φ est homotope à id_I relativement à $\{0,1\}$.

▷ Prenons $H : I \times I \longrightarrow X$ qui à $(t,s) \longmapsto st + (1-s)\varphi(t)$. ■

Remarque. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ est un chemin $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$, on dit que $\gamma \circ \varphi$ est un *reparamétrage de γ par précomposition.*

La composition des chemins n'est pas associative par raison de reparamétrisation ; intuitivement, on a bien le même dessin, mais on ne parcourt pas les mêmes sections à la même vitesse, ce qui fait que, rigoureusement, les fonctions ne sont pas les mêmes.

Lemme

Avec les notations précédentes, $([\alpha] \star [\beta]) \star [\gamma] = [\alpha] \star ([\beta] \star [\gamma])$.

▷ On obtient $(\alpha \star \beta) \star \gamma$ à partir de $\alpha \star (\beta \star \gamma)$ par reparamétrage. ■

Lemme

$[\alpha] \circ [\overline{\alpha}] = [c_{x_0}]$ avec $x_0 = \alpha(0)$ et c_{x_0} l'application constante en x_0.

4.3.5.3 Définition du groupe fondamental et du groupoïde fondamental

Définition. ***(Groupoïde)***

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

Définition. ***(Automorphismes)***

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $x \in \mathcal{C}$. On note $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$ l'ensemble des isomorphismes de $x \to x$. Alors en particulier, dans un groupoïde, $\mathrm{Hom}(x,x) = \mathrm{Aut}(x,x)$ pour tout $x \in X$ (condition non suffisante bien sûr pour avoir un groupoïde).

Exemple fondamental. ***(Groupoïde d'un groupe)***

Si G est un groupe, on définit une catégorie C_G telle que $\mathrm{Ob}(C_G) = \{\star\}$ et $\mathrm{Hom}(\star, \star) = G$ est un groupoïde.

Définition. ***(Groupoïde fondamental)***

Soit X un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* d'un espace X, est un groupoïde $\Pi(X)$ dont les objets sont les éléments de X $\mathrm{Ob}(\Pi(X)) = X$, les morphismes entre deux points $\mathrm{Hom}(x,y)$ sont les classes d'homotopie des chemins de x vers y basés aux extrémités, la composition est $\star$ comme définie dans la section précédente et l'identité d'un point x est $id_x = [c_x]$.

Définition. ***(Groupe fondamental)***

Soit X un espace topologique. Le *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie* basé en $x_0 \in X$ dit *point base* de X, noté $\pi_1(X,x_0)$, est $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0) =$

$\mathrm{Aut}_{\Pi(X)}(x_0)$ (puisque c'est un groupoïde).
Autrement dit, c'est l'ensemble, qui forme un groupe, des classes d'homotopie (de chemins) de lacets autour de x_0.

Ainsi on définit le groupe fondamental à travers les classes d'homotopie basées aux extrémités. On parle alors d'*homotopie libre* pour ce que nous appelons homotopie simplement. Certains auteurs peu scrupuleux oublient de fixer les lacets intermédiaires $H(x,1) = x_0 = H(x,1) \qquad \forall x$, mais c'est mal : dans ce cas, tout espace connexe par arcs aurait un groupe fondamental trivial.

Remarque. Si $x,y \in C$, f un isomorphisme de $x \to y$, alors il existe un isomorphisme de groupe $\mathrm{Aut}(x) \simeq \mathrm{Aut}(y)$, $g \longmapsto f \circ g \circ f^{-1}$. Dans $\mathcal{C} = \Pi(X)$, un isomorphisme de x vers y n'est autre un chemin de x vers y puisqu'il est clair que tout chemin est inversible pour la loi de composition définie dans la section précédente. On en déduit le fait suivant.

Fait. *(Groupe fondamental et composantes connexes par arcs)*

x et y sont isomorphes dans $\Pi(X)$ si et seulement si x et y sont dans la même composante par arcs.
Dans ce cas,

$$\boxed{\begin{array}{rl} \Pi_1(X,x) & \simeq \Pi_1(X,y) \\ [\alpha] & \longmapsto [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}], \end{array}}$$

ceci n'étant pas canonique (car dépend de la conjugaison, c'est-à-dire du chemin $\gamma : x \longrightarrow y$).

$\longrightarrow$ *Notation.* Si X est connexe par arcs et non vide, si $x_0 \in X$, on peut donc noter $\pi_1(X) = \pi_1(X,x_0)$.

Parfois, les cours introduisent seulement le groupe fondamental et montre qu'il ne dépend pas du point base sur une même composante par arcs, à isomorphisme près. C'est dommage, car le groupoïde fondamental est plus canonique, ne dépendant que de l'espace X absolument, et a toutes les informations puisque cette catégorie contient toutes les informations des catégories des groupes de Poincaré dans ses morphismes.

Par exemple, on ne devrait pas dire que le groupe fondamental du cercle (voir ci-dessous) est $\mathbb{Z}$. On devrait dire que le groupe fonda du cercle, basé en 0, est $\mathbb{Z}$, mais c'est un peu redondant, car ils sont tous isomorphes (et encore plus canoniquement puisque dans le cas de $\mathbb{Z}$, la conjugaison n'agit pas par abélianité).

Exemples. ***(Groupes fondamentaux)***

1. On pose $X = \mathbb{S}^1$. On prend la base $x_0 = 0$. On montrera plus tard l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \Pi_1(S^1,0). \\ k & \longmapsto & [t \mapsto e^{2ik\pi t}] \end{array}$$

Intuitivement, le groupe fondamental détecte (en ce qu'il est non trivial) la non-trivialité des topologies : ici, la non-contractilité : on peut tourner avec un lacet autour du trou.

4.3.5.4 Comportement du GF vis-à-vis des applications continues

Définition-propriété. ***(Application induite sur les groupes fondamentaux)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue. Si $x_0 \in X$ et $\varphi(x_0) = y_0$, on définit une *application induite (par postcomposition)* sur les groupes fondamentaux par

$$\begin{array}{rccl} \varphi_*(f) : & \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y,y_0). \\ & [\gamma] & \longmapsto & [\varphi \circ \gamma] \end{array}$$

On note parfois $\varphi_*(f) = \pi_1(f)$.

On en déduit également une application induite sur les groupoïdes fondamentaux.

▷ Il est clair que l'opération de postcomposition transforme un lacet en un lacet. Pour montrer qu'elle envoie deux lacets homotopes sur deux lacets homotopes, rien de bien compliqué non plus. ■

Fait. ***(Fonctorialité du groupe fondamental)***

$\pi_1(id_X) = id_{\pi_1(x)}$ et $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

Si f est injective, respectivement surjective, respectivement bijective, l'application induite n'est pas nécessairement injective, respectivement surjective, respectivement bijective.

Cependant, on verra que si A est un rétract de X et $a \in A$ l'application induite $\pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ est injective.

$\longrightarrow$ *Notation.* Si X est connexe par arcs, on s'autorise à noter $\pi(X) = \pi(X,x)$ pour tout $x \in X$.

Lemme

Soient $\varphi,\psi : X \to Y$ deux applications homotopes entre deux espaces topologiques. Pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme de groupes $\chi : \pi_1(Y,\varphi(x)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y,\psi(x))$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,\varphi(x)) \arrow[rr, "\chi"] & & \pi_1(Y,\psi(x)) \\ & \pi_1(X,x). \arrow[ul, "\varphi_*"] \arrow[ur, "\psi_*"'] & \end{tikzcd}$$

En particulier, si $\varphi \equiv_{\{x\}}$, alors $\varphi_* = \psi_*$.

Propriété. ***(Groupes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents)***

Si f est une équivalence d'homotopie entre deux espaces topologiques, f_* est un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux basés respectivement en n'importe quel point et son image par f.

▷ Plus tard. ■

Corollaire. ***(Groupe fondamental d'un espace contractile)***

Un espace topologique est contractile si et seulement s'il est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial.

Exemples. ***(Groupes fondamentaux)***

1. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$.
2. $\mathbb{R}^n \setminus \{star\} \cong S^{n-1}$. En particulier $§^n \setminus \{\star,*\} \cong S^{n-1}$, car $§^n \setminus \{*\} \simeq \mathbb{R}^n$ (homéomorphisme fort !).

4.3.5.5 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique

Dans une optique toute moderne, les catégories peuvent être vue en toute généralité comme des espaces topologiques dont les objets sont des points. Ainsi, les morphismes sont les classes des chemins. Nous voulons généraliser cette analogie en définissant dans la théorie des catégories, la notion d'application continue et d'homotopie.

Définition. ***(Foncteur)***

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une chose qui à tout objet x de $\mathcal{C}$, associe un objet $F(x) \in \mathcal{D}$, et à tout morphisme $f : x \to y$, associe un morphisme $F(f) : F(x) \to F(y)$. On impose également que pour tous morphismes f,g, $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

et $\forall x \in \mathcal{C}$, $F(id_X) = id_{F(x)}$. Rappelons que dans notre cas des petites catégories, toutes ces choses sont des applications.
On peut égaler définir la composition entre foncteurs pour $F : C \to D$ et $G : D \to E$, on définit GF de façon évidente. De plus pour toute catégorie C, il existe un foncteur identité id_C qui ne touche à rien. Ainsi, un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible[a].
Les foncteurs sont l'analogue des applications continues dans l'analogie ci-haut.

[a] Ainsi dans le cas petit deux catégories isomorphes induisent par oubli une bijection $\mathrm{Ob}(C) \simeq \mathrm{Ob}(D)$. De même que l'homéomorphie ce n'est pas une bonne définition...

On a pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$, une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x),F(y))$. En particulier, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{D}}(F(x))$ est un morphisme de groupes.

Remarques.

1. On considérera particulièrement le foncteur d'oubli Top $\longrightarrow$ Ens. On considérera également le foncteur de Top dans Top_h qui à $x \mapsto x$ et à $f \mapsto [f]$.
2. Le groupe fondamental est un foncteur partant de la catégorie des espace topologiques pointés : $\mathrm{Top}^* \longrightarrow \mathrm{Grp}$.
3. *(Hors-programme)* Le groupoïde fondamental $\Pi(\ \cdot\ ) : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Groupoid}$ (où, attention, les objets sont des catégories). Ainsi si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ est un foncteur défini par $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$ définie par $(x \to y) \longmapsto f(x) \xrightarrow{[f\circ\gamma]} f(y)$. En particulier, $\Pi_1(X,x_0) = \mathrm{Aut}_{\Pi(X)}(x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\Pi(Y)}(f(x)) = \Pi_1(Y,f(x_0))$.

Définition. ***(Produit de catégories)***

Le produit $C \times D$ de deux catégories, est défini par $\mathrm{Ob}(C \times D) = \mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$ et $\mathrm{Hom}((x,x'),(y,y')) = \mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(x',y')$.

Lemme. ***(Groupoïde fondamental du produit)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors :

$$\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y).$$

Comme dans beaucoup d'autres cas, l'isomorphisme proposé est tellement tautologique qu'en pratique, on écrit souvent l'égalité.

Lemme. ***(Groupoïde fondamental de deux espaces homéomorphes)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. On suppose que X et Y sont homéomorphes par f. Alors $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ est un isomorphisme de groupes.

Définition. ***(Transformation naturelle)***

Soient F,$G : C \longrightarrow D$ deux foncteurs. Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ est telle que pour tout $x \in C$, on ait un morphisme dans D, $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$ tel que $\forall f : x \longrightarrow y (\in \mathrm{Hom}_C(x,y))$,

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"] & G(y) \end{tikzcd}$$

Si C,D sont petites, alors il existe une catégorie $\mathrm{Fun}(C,D)$ dont les objets sont les foncteurs $C \longrightarrow D$, et les morphismes sont les transformations. De même qu'avec les foncteurs, on peut parler d'isomorphismes naturels, etc.
Les transformations naturelles sont l'analogue des homotopies continues dans l'analogie ci-haut.

Propriété

Une transformation naturelle $\eta : F \longrightarrow G$ est inversible si et seulement si pour tout $x \in C$, $\eta_x \in \mathrm{Hom}(F(x),G(x))$ est un isomorphisme.

Heuristique

En introduisant la théories des catégories, Eilenberg et MacLane poursuivaient des questions de topologie algébrique. On se rappelle d'ailleurs qu'ils leur tenait à cœur de définir la notion de naturalité. Voyons comment elle apparaît naturellement en théorie de l'homotopie.
En topologie algébrique, on associe à un espace topologique un invariant algébrique. On dispose donc d'un foncteur (ici on a rencontré π_0, π_1, Π_1, et il y en a d'autres : les π_n et Π_n, les groupes d'homologie H_n, de cohomologie de de Rham H^n, etc.). Ce qui nous intéresse est en fait de comparer les invariants. On a donc des transformations naturelles entre foncteurs, par exemple

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "F(f)"] & \pi_1(Y) \\ H_1(X) \arrow[r, "G(f)"'] \arrow[u, "\eta_X"] & H_1(Y) \arrow[u, "\eta_Y"'] \end{tikzcd}$$

compare le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie. (On verra plus tard que η est ici l'abélianisation !)

Théorème

Soit $f,g : X \longrightarrow Y$ continues et soit $H : X \times I \longrightarrow Y$ une homotopie entre f et g. Pour tout $x \in X$, on note ηx le chemin de $f(x)$ vers $g(x)$, défini par $t \longmapsto H(x,t)$. Alors η est un isomorphisme naturel de $\Pi(f)$ vers $\Pi(g)$.

▷ Soit γ un chemin de x vers y dans X. On veut montrer que[1]

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "f(\gamma)"] \arrow[d, "\eta_x"] & f(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ g(x) \arrow[r, "g(\gamma)"] & g(y) \end{tikzcd}$$

commute (homotopie d'applications et non relative/de chemins, qui ne préservent pas les extrémités). Voir le dessin. Les chemins $f(\gamma)\times\eta_y$ et $\eta_x\times g(\gamma)$ sont homotopes par $I\times I \longrightarrow Y$ qui à $(s,t) \longrightarrow H(\gamma(s),t))$ (puisque l'isomorphie naturelle est donnée par les coordonnées). Remarque : on a dit, grâce à η qui recolle les bouts, que $f(\gamma)$ et $g(\gamma)$ sont homotopes en partant de ce que f et g sont homotopes. ■

Cette équivalence entre diagrammes et schémas d'homotopie est fondamentale.

Définition. ***(Équivalence de catégories)***

Soient C,D de catégories. Une équivalence de catégorie est un foncteur $F : C \longrightarrow D$ s'il existe $G : D \longrightarrow C$ tel que $FG \simeq id_D$ et $DG \simeq id_C$ par des isomorphismes naturels.
On dit que G est un quasi-inverse. Le quasi-inverse, de même que l'homotopie est unique à homotopie près mais pas à unique homotopie près (il est donc essentiellement unique, mais pas canonique). Plus précisément, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; et même le quasi-inverse fixé, l'homotopie de la composition à l'identité n'est pas unique.

La proposition suivante est une conséquence de la propriété rappelée en dessous dont on incite les étudiants à refaire la preuve catégorique.

Corollaire. ***(Fonctorialité du groupe fondamental)***

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si f est une équivalence d'homotopie, alors $\Pi(f)$ est une équivalence $\Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$; autrement dit, le groupoïde fondamental est aussi fonctoriel.

[1] Ce diagramme est en fait tout à fait viseul ! On peut le voir comme pris dans un l'espace Y, « l'image par la transformation naturelle (globale) » du chemin γ entre x et y vu dans l'espace X. Dans le carré qu'il forme, parallèlement aux lignes verticales, on dispose d'une infinité de chemins continus.

Car : si $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, $\Pi_1(X,x_0) \longrightarrow \Pi_2(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme.

▷ Par le théorème, si H est une homotopie entre $f \circ g$ et id_Y, $g : Y \longrightarrow Y$, par le théorème, $H : \mathrm{Fun}(\Pi(Y),\Pi(Y)) \ni \Pi(f \circ g) \simeq \Pi(id_Y) \in \mathrm{Fun}(\Pi(Y),\Pi(Y))$ par H, donc $\Pi(f) \circ \Pi(g) \simeq id_{\Pi(y)}$. Donc $\Pi(f)$ est une équivalence, car elle est pleinement fidèle et $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x_0,x_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\Pi(Y)}(f(x_0),f(x_0))$. ■

Théorème

Un foncteur $F : C \longrightarrow D$ est une équivalence ssi F est pleinement fidèle : $\forall x,y \in C \quad \mathrm{Hom}_C(x,y) \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_D(F(x), F(y))$ est bijectif ; et essentiellement surjectif : $\forall y \in D\ \exists c \in C \quad F(x) \simeq y$.

Tout ce dictionnaire entre catégories et topologie permet de coder des relations plus riches entre espace, l'équivalence (d'homotopie), et notamment le groupe fondamental capture ces notions sur le type d'homotopie, et d'après le corollaire, il suffit que des groupes fondamentaux soient équivalents pour qu'ils soient isomorphes, au sens suivant : **si deux espaces connexes par arcs sont homotopiquement équivalents, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.** En particulier, on a déjà un critère : si deux groupes fondamentaux d'espaces ne sont pas isomorphes, alors les espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Définition. ***(Sous-catégorie pleine)***

Soit C une (petite) catégorie, et $S \subseteq \mathrm{Ob}(C)$. La *sous-catégorie pleine* C_S de X est telle que $\mathrm{Ob}(C_S) = S$ et pour tous $x,y \in S$, $\mathrm{Hom}(x,y) = \mathrm{Hom}_C(x,y)$.

Remarque. Il y a une foncteur évident $C_S \longrightarrow C$ qui est pleinement fidèle.

Par exemple, si $A \subseteq X$ un espace topologique, on pose $\Pi(X,A)$ la sous-catégorie pleine $\Pi(X)_A$. En particulier, si l'on prend A un point, on retombe sur le groupe fondamental, et c'est cool.

Propriété

Si A est un rétract de X, alors $\Pi_1(A,a_0) \longrightarrow \Pi_1(X,a_0)$ est injectif.
Si A est un rétract par déformation, il est de plus un isomorphisme.

Exemple

$\pi_1(S^3 \setminus S^1) = \mathbb{Z}$.

Exemple. ***(Tore vide et tore plein)***

$\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$, mais le groupe fondamental du tore plein est $\mathbb{Z}$, car $S^1 \cong$ à cet espace !

Cette propriété n'a rien de vrai si A n'est pas un rétract mais si l'on a seulement une injection (même canonique). En effet, S^1 se plonge dans $\mathbb{Z}$ mais le groupe fondamental du cercle ne se plonge pas dans celui de $\mathbb{C}$, qui est trivial !

▷ Si $\tau : X \longrightarrow A$ est un retract de $i : A \longrightarrow X$, alors $\tau \circ i = id_A$. Donc $\Pi(\tau \circ i) = id_{\Pi_A}$. Dans le cas du retract par déformation, on a une équivalence d'homotopie par la propriété précédente. ■

Le fait que deux espaces aient groupe d'homotopie isomorphes, ne garantit pas l'équivalence d'homotopie. Il faut d'abord trouver une application entre les deux qui induit ces isomorphismes, et alors, c'est automatiquement une équivalence.

Corollaire. ***(Groupoïdes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents)***

Soient X,Y du même type d'homotopie. Alors $\Pi(X)$, $\Pi(Y)$ sont des catégories équivalentes.

4.3.5.6 Lien avec la connexité simple

Reformulation pratique. ***(Connexité simple)***

On dit qu'un espace topologique X est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si $\Pi_1(X,x_0)$ est trivial pour tout $x_0 \in I$.

Une remarque pas très intéressante :

Propriété. ***(Contractile $\implies$ simplement connexe)***

Si X est contractile, alors X est simplement connexe.

Contre-exemple. ***(Espace simplement connexe non contractile)***

La sphère S^2 convient. □

Contractilité et groupe fondamental

On peut définir Π_2 comme le groupe des classes d'homotopie d'un chemin dans lui-même. De proche en proche, on peut définir les groupes d'homotopie supérieurs (qui, d'ailleurs, sont abéliens). Alors si X est contractile, tous les Π_n sont triviaux. La réciproque est vraie pour les CW-complexes selon un théorème de Whitehead mais fausse en général, ce que montre par exemple le cercle polonais.

Être contractile, en topologie algébrique, revient à être trivial, alors qu'il y a toute une littérature sur les espaces simplement connexes, qui peuvent être très intéressants. Ces deux notions n'ont donc pas grand-chose à voir.

En général, les groupes fondamentaux non triviaux, même d'espaces simplement connexes, ne se calculent pas comme ça. On va devoir introduire le concept suivant pour espérer décrire des groupes fondamentaux simples.

4.3.5.6.1 Espace localement simplement connexe

4.3.5.7 Théorème du cône

Tout cône est simplement connexe, car contractile. Affinons.

Définition. ***(Conifié d'une paire topologique)***

Soit (X,A) une paire topologique. On note

$$X \cup CA = (X \coprod C(A))/\sim$$

où $C(A)$ est le cône de A, $\sim$ est l'équivalence identifiant tout point $a \in A \subseteq X$ avec le point $(a,0) \in C(A)$. Ce n'est autre que le cône de l'application $A \hookrightarrow X$ défini en théorie de l'homotopie.

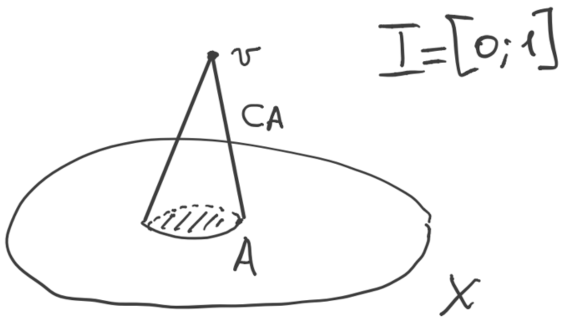


Figure 4.3.7 : *Conification d'une partie d'un espace..* —

Théorème. ***(Théorème du cône)***

Soit X un espace topologique. Soit A une partie de X connexe par arcs, non nécessairement une composante connexe par arcs. On note $i : A \hookrightarrow X$ canonique et i_* le morphisme $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ induit. Alors $\pi_1(X \coprod CA) = \pi_1(X)/\langle\langle i_* \rangle\rangle$.

4.3.6 Groupes d'homotopie supérieurs

Définition. ***(Équivalence faible d'homotopie)***

Soit $f : X \to Y$ deux espaces topologiques et une application pointée $f(x) = y$. On dit que f est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les morphismes induits $f_n : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,y)$ sont des isomorphismes.

Fait. ***(Équivalence d'homotopie $\implies$ équivalence faible d'homotopie)***

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

4.4 Revêtements

4.4.1 Notion générale issue de la géométrie différentielle : fibrations, fibrés vectoriel

À mi-chemin du faisceau (topologie ensembliste) et du revêtement (topologie algébrique), la géométrie différentielle a la fibration.

Définition. ***(Fibration, base d'une fibration, espace total et fibre type)***

Soient E,B,F des variétés différentielles de classe C^p. Une *fibration (localement triviale)* ou *fibré* ou *espace fibré* de *base* B, *espace total* E et *fibre de type* F est la donnée d'un morphisme surjectif $p : E \longrightarrow B$ de classe C^p tel que pour tout $b \in B$, il existe un ouvert $U = U_b \ni b$, parfois dit *trivialisant*, tel qu'il y a un C^p-difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tel que :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F, \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

soit $pr_1 \circ \phi = p$, autrement dit, p coïncide avec la première coordonnée de ϕ. On dit donc aussi que p est une application *localement triviale*, au sens que F est localement un produit. On note $p : E \xrightarrow{F} B$ ou encore $F \to E \twoheadrightarrow B$. Remarquons que p est une application ouverte.

Exemple. ***(Toy-model des fibrés)***

Le ruban de Möbius $E = \frac{I\times[-1,1]}{(0,x)\sim(1,-x)} \xrightarrow{p} S^1$.

Remarques.

1. Pour tout $b \in B$, la *fibre* $F_b := p^{-1}(b)$ (qui parfois partage son nom, avec malheur, avec la fibre type) est difféomorphe à F. En effet, immédiatement, $\phi_{|p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \simeq \{b\} \times F \simeq F$ (par un difféomorphisme).

2. Autrement dit, pour tout $e \in E$, $p(e) = pr_1(\phi(e))$ et $e \in p^{-1}(b) \iff \phi(e) \in pr_1^{-1}(b) \simeq F$.

3. Remarquons que l'on peut parfois définir la fibration avec une fibre type variant selon l'ouvert trivialisant. Dans ce cas, la remarque précédente vaut (avec $F = F(b)$), et l'on a : $F(b) \simeq F(b')$ au sens des difféomorphismes,(**et, en topologie, au sens de l'équivalence d'homotopie**) dès que b et b' sont dans la même composante connexe de B. En effet, le type d'homéomorphisme, et en particulier le cardinal, des fibres est localement constant sur la base.

4. L'application p est toujours une submersion. En effet, le fait d'être une submersion est une propriété locale, disons en x ; restreignons p au-dessus d'un ouvert trivialisant contenant $b = p(x)$. Or, en notant $\psi(x) = (b,u)$, le foncteur tangent transforme le diagramme définitionnel en :

$$\begin{tikzcd} T_x p^{-1}(U) \arrow[r, hook, two heads, "T_x\psi"] \arrow[d, "T_x p"'] & T_b U \times T_u F \arrow[dl, two heads, "T_{(b,u)} pr_1"] \\ T_b U & \end{tikzcd}$$

dont $T_x p$ est surjective.

5. *(Les revêtements sont les fibrations à fibres discrètes.)* En effet, soit $\pi : E \longrightarrow B$ un revêtement. Pour tout $b \in B$, $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \pi^{-1}(b)} V_\alpha$ tel que $\pi_{|V_\alpha} : V_\alpha \simeq U_b$ et donc $\pi^{-1}(b) = F$ a la topologie discrète. Ainsi $\phi : \pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$ par $x \in V_a \mapsto (\pi_{|V_\alpha}, \alpha)$. Réciproquement, si l'on a $E \longrightarrow B \supseteq U_b \ni b$ et $\pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ via ϕ, F discret, on peut supposer U_b connexe par la connexité locale des variétés topologiques. Ainsi $\pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$ par ϕ de sorte que $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{f \in F} \pi^{-1}(U_b \times \{f\})$ et $\pi_{|\pi^{-1}(U_b \times \{f\})} : \pi^{-1}(U_b \times \{f\}) \simeq U_b$.

Autrement dit, un revêtement (avec fibre constante) est un fibré de fibre discrète.

6. Parfois, on impose que B soit paracompacte.

Définition. ***(Morphisme de fibrations)***

Soient (E,B,F) et (E',B,F') des fibrations de base B. Un *morphisme de fibrations* (de base B) est une application C^p :

$$\begin{tikzcd} f : E \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

telle que $p' \circ f = p$. Ainsi, pour tout $b \in B$, f envoie $p^{-1}(b)$ dans $p'^{-1})$.
Si de plus f est un difféomorphisme, f^{-1} est aussi un morphisme et l'on dit que f est un *isomorphisme de fibrations*.

Exemples. ***(Fibrations)***

1. *(Fibration triviale)* Soient B,F deux variétés et $E = B \times F$. Alors pour $p = pr_1 : E \longrightarrow B$, pour tout $b \in B$, $pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$.
   Par définition, une fibration quelconque est localement isomorphe à une fibration triviale.
2. L'application $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une fibration de fibre de type $\mathbb{R}^\times$.
   En effet, on a introduit les ouverts $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ avec les $U_i = p(V_i)$ formant un atlas.

$$\begin{tikzcd} V_i = p^{-1}(U_i) : (v_1,\ldots,v_{n+1}) = \underline{v} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & U_i \times \mathbb{R}^k : (p(\underline{v}), v_i) \arrow[dl] \\ & U_i : [(v_1,\ldots,v_{n+1})] = [(\frac{v_1}{v_i},\ldots,1,\ldots,\frac{v_{n+1}}{v_i})] & \end{tikzcd}$$

3. L'application $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$ qui à $t \mapsto e^{it}$ est une fibration de type $2\pi\mathbb{Z}$. On constate l'analogie avec la théorie des revêtements topologiques *(que nous explorerons ci-après)*.

Définition. ***(Fibré vectoriel)***

Un *fibré vectoriel* de classe C^p est une fibration (E,B,F) de classe C^p telle que F est un espace vectoriel, les fibres $p^{-1}(b)$ sont des espaces vectoriels et les difféomorphismes ϕ de trivialisation locale

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & U \times F, \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels entre les $p^{-1}(b)$ et F.
Par définition, le *rang* du fibré vectoriel est la dimension de F.

Exemples. ***(Fibrés vectoriels)***

1. *(Fibré trivial)* Donné par $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$.
2. *(Fibré tangent)* Soit M une variété différentielle de classe C^p. Alors $TM \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel C^{p-1}, de rang $\dim(M)$.

   En effet, on considère l'atlas de TM construit à partir d'un atlas (U_i, φ_i) de M

$$\begin{tikzcd} TU_i \arrow[r, "\varphi_i"'] \arrow[d] & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^k \\ U_i & \end{tikzcd}$$

   où l'on prend $(\varphi_i^{-1} \times id) \circ \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd} TU_i \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U_i. & \end{tikzcd}$$

3. Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$ ou $SL_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors TG est trivialisable : $TG \longrightarrow G \times T_{id}G$ grâce à $(g,v) \mapsto (g, g^{-1}v)$.

Définition. ***(Fibré trivialisable)***

Un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe à un fibré trivial.

Exemple. ***(Le fibré vectoriel tautologique sur l'espace projectif)***

Soit $E = \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}; v \in [x]\}$ et $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la restriction de la première projection. Alors E est une sous-variété de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ et $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}$.

On considère l'atlas (U_i, ϕ_i) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ habituel, d'où un atlas $U_i \times \mathbb{R}^{n+1}$ de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par les $\phi_i \times id$. On veut voir que $(\phi_i \times id)(U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété. Prenons $[y] = [y_1,\dots, y_{n+1}] \in U_i$, avec $y_i \neq 0$. Alors $\phi_i([y]) = (\frac{y_1}{y_i},\dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$ sans le i-ième terme. Alors $(\phi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) = \{(z,v), v_k = v_i z_k, k \leqslant i+1, v_k = v_i z_{k-1}, k \geqslant i+1\}$ avec $z = (z_1,\dots,z_n)$, $v = (v_1,\dots,v_{n+1})$. C'est donné par n équations, *i.e.* par une application $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Comme les différentielles de ces n équations sont linéairement indépendantes, F est une submersion et l'on a donc une sous-variété. Ainsi E est une variété et $\dim(E) = n+1$, avec $\Pi : E \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Pour tout $[x]$, $\Pi^{-1}([x]) = \mathbb{R}x$ une droite vectorielle. On obtient une trivialisation locale sur $\Pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}$ donnée sur $U_i \times \mathbb{R}$ par $[(u_1,\dots u_{i-1},1,u_{i+1},\dots,u_{n+1})], t) \mapsto ([u], (tu_1,\dots,t,\dots,tu_{n+1}))$.

On introduit la notion de revêtement en topologie différentielle. Elle est semblable à celle de la topologie.

Définition. ***(Revêtement différentiel)***

Soient E,B des variétés de classe C^p. Soit $p : E \longrightarrow B$ une application surjective et de classe C^p. On dit que (E,B,p) est un revêtement si pour tout $b \in B$, il y a un ouvert *trivialisant* $U \ni b$ tel que la *fibre* $p^{-1}(U)$ est une réunion d'ouverts $V_i, i \in I$, les *feuillets*, deux à deux disjoints, et *bien revêtus*, soit tels que $p_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ est un C^p-difféomorphisme. En particulier, p est ouverte.

Remarque. Un revêtement est toujours un difféomorphisme local. La réciproque est fausse. Par contre, un difféomorphisme global est un revêtement, à un seul feuillet.

Exemples. ***(Revêtements différentiels)***

1. *(Revêtement trivial)* Soit B un variété et F un ensemble discret. Soit $pr_1 : B \times F \longrightarrow B$. Localement, on est dans cette situation avec $F = I$:

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\simeq U \times I \\ V_i &\longmapsto U \times \{i\} \\ x &\longmapsto (p(x),i). \end{aligned}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ est un revêtement différentiel à n feuillets.
3. La projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ fournit un revêtement à deux feuillets pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme on va le voir.
4. De même, la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ fournit un revêtement diférentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par $\mathbb{Z}^2$. Plus généralement, la projection canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ fournit un revêtement diférentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par $\mathbb{Z}^n$.
5. Si K est la bouteille de Klein, on a un revêtement $\mathbb{T}^2 \to K$ à deux feuillets.
6. On en déduit un revêtement $\mathbb{R}^2 \to K$ à fibre dénombrable.
7. L'application $p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2i\pi t}$ est un revêtement à fibres dénombrables.
8. L'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$ définit un revêtement holomorphe. Chaque fibre ici est infinie dénombrable : $\pi^{-1}(p(x)) = x + 2i\pi\mathbb{Z}$.

On rappelle :

Théorème. ***(Revêtement par une action proprement libre)***

Soit G un groupe discret agissant librement et proprement par homéomorphismes sur un espace topologique localement compact M. Alors $p : M \longrightarrow M/G$ est un revêtement (topologique).

Exemples. ***(D'autres revêtements différentiels)***

1. Pour $M = S^n$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agissant par $x \longmapsto -x$, donc librement. Alors $M/G = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Alors $S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est un revêtement (*à deux feuillets*) de classe C^∞.

4.4.2 Définitions fondamentales sur les revêtements

La théorie des revêtements est véritablement une théorie de Galois pour les espaces topologiques : il existe comme un dictionnaire entre les sous-groupes du groupe fondamental et les *revêtements* de l'espace topologique.

Définition. ***(Revêtement général)***

Soit X un espace topologique. Un revêtement de X (par Y) est une application continue $P : Y \longrightarrow X$ qui est localement triviale. Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que $P^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ où les U_i, $i \in I$ ensemble, sont ouverts, dits *feuillets*, et $P_{|U_i}$ est un homéomorphisme sur U $P : U_i \simeq U$. On dit alors que U est un *ouvert trivialisant* (de x), et que les U_i sont bien revêtus.
Une telle application est nécessairement surjective et ouverte, et même un homéomorphisme local. Les U_i sont les composantes connexes de l'image réciproque de U.
Le cardinal du revêtement est le cardinal de l'ensemble de ses feuillets, en particulier *fini*, *dénombrable*...
On appelle Y l'*espace total* du revêtement et X la *base* du revêtement. Pour tout $b \in X$, on note $F_n := p^{-1}(b)$ la *fibre* en/au-dessus de b du revêtement.

Intuitivement, il faut que la fibre au-dessus d'un point soit discrète, ou plutôt indexée par un ensemble (qui n'a pas de topologie) : on ne doit pas pouvoir sauter d'un point à un autre comme ça.

En fait, un espace vérifiant à peu près cette propriété est un *espace fibré*. Dans le cas du revêtement, on impose que les fibres soient discrètes, heu... pour que ça marche.

Propriété. ***(Caractérisation des revêtements finis en milieu séparé)***

Soit $f : Y \to X$ un homéomorphisme local avec Y séparé. Si les fibres des éléments de X par f sont toutes finies = compactes ici et f est fermée, alors f est un revêtement. En particulier, si les fibres des éléments de X par f ont toutes le même cardinal fini, alors f est un revêtement.
Ainsi, si Y est séparé, un homéomorphisme local est un recouvrement fini si et seulement si c'est une application propre.

Contre-exemple. ***(Pas un revêtement)***

Soit Δ le disque unité strict. L'application $\begin{array}{ccc} \Delta \smallsetminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2}\}) & \longrightarrow & \Delta \smallsetminus \{0\} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$ est un homéomorphisme local, surjective mais n'est pas un revêtement.

En effet, le cardinal des fibres devrait être constant, car la base est connexe.

On peut aussi le voir ainsi : pour $z = \frac{1}{4}$, si $U = D(\frac{1}{4},r)$, $p^{-1}(U) = f(U) \smallsetminus \{\frac{1}{2}\} \sqcup -f(U)$ pour r assez petit et qui existe bien, où $f : z \mapsto e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(p(z))}$ où Log est une détermination sur $\mathbb{C} \smallsetminus i\mathbb{R}_+$ et tout cela a un sens pour r encore assez petit. Le problème est que p n'induit pas d'homéomorphisme de $U_1 = f(U) \smallsetminus \{\frac{1}{2}\}$ sur U. □

Exemple. ***(Toy-model des revêtements)***

Si $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$, alors P est un revêtement. Elle induit un homéomorphisme déjà rencontré $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$.

Les revêtements vérifient la propriété d'équivalence des homotopies.

Propriété

Soit $P : Y \longrightarrow X$ une revêtement, et $H : Z \times I \longrightarrow X$ une application continue et on pose $g : H(-,0) : Z \longrightarrow X$. Si g se relève en $\tilde{g} : Z \longrightarrow Y$,

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

alors H aussi : $\tilde{H} : Z \times I \longrightarrow Y$.

▷ Soit $z_0 \in Z$. Comme H est continue, il existe pour tout t un ouvert $V_t \times W_t \subseteq Z \times I$ qui contient (z_0,t) et tel que $H(V_t, W_t)$ soit contenu dans un ouvert trivialisant de X de $H(z_0,t) = x_0$, c'est-à-dire un ouvert U tel que $P^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ et $P_{|U_i} \simeq U$. Comme $\{z_0\} \times I$ est compact, on peut trouver un voisinage ouvert de z_0 dans Z et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ une subdivision telle que $H(V \times [t_i,t_{i+1}])$ est contenue dans un seul des W_i. Supposons qu'on a étendu H à $Z \times [0,t_i]$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} : Z \times [0,t_i] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "P"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et $H(Z \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$ est un ouvert trivialisant et $P^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{U_j}$ et $\tilde{H}(z_0,t_i) \in \tilde{U_j}$ pour un certain j. Mais $P_{|U_j} \simeq U_i$, et l'on définit $\tilde{H}$ sur $Z \times [t_i, t_{i+1}]$ en tirant H en ouvert via p.

On montre de la même façon que $\tilde{H}$ est unique. ■

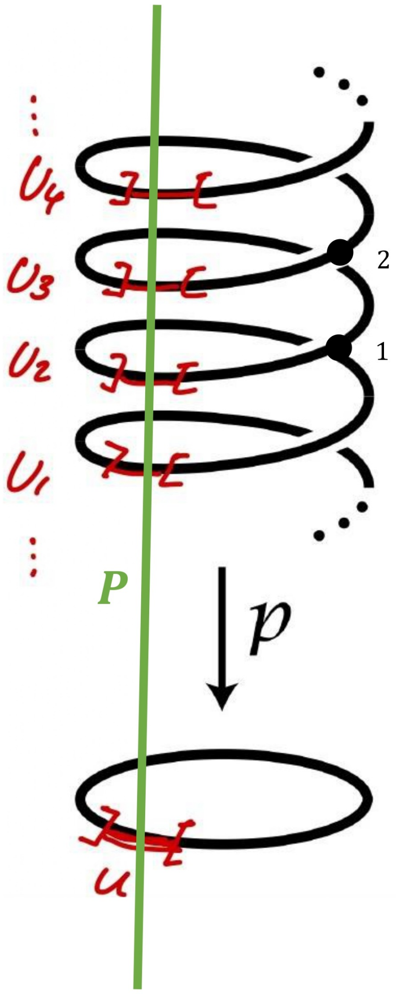


FIGURE 4.4.1 : *Revêtement canonique du cercle.* —
Le cercle est revêtu par la droite réelle ici représentée en tire-bouchon.

Voilà enfin la propriété fondamental de relèvement selon un revêtement, qui permet de faire le lien entre revêtements et groupe fondamental.

Corollaire. ***(Décomposition selon une projection continue)***

Soit $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement et $\gamma : I \longrightarrow X$ un chemin. Soit $x_0 = \gamma(0)$. Alors pour tout $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ qui relève γ et tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x_0}$.
De plus, pour toute homotopie relativement à $\{0{,}1\}$, $\gamma \simeq \gamma'$, chemins de source x_0, il existe une unique homotopie relative $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma'}$ qui la relève en notant $\tilde{\ }$ le relèvement sur $\tilde{x_0}$. (On démontrera cela plus tard.)

▷ C'est un corollaire du théorème précédent si $Z = \star$, avec le diagramme $\star \times I \longrightarrow Y \longrightarrow X$ et $\star \times I \longrightarrow X$. Pour le deuxième point, on prend $Z = I$. ■

On peut le réénoncer autrement :

Proposition. *(Propriété universelle des revêtements : relèvement unique des chemins)*

Tout revêtement $p : E \to B$ satisfait la propriété universelle suivante : pour tout chemin $\varphi : I \to B$ où $I = [0,1]$ dans B, our tout $x \in E$ tel que $\varphi(0) = p(x)$, *i.e.* $x \in p^{-1}(\varphi(0))$, il existe un unique chemin $\tilde{phi} : I \to E$ dans E de départ x, *i.e.* $\tilde{\varphi}(0) = x$, et relevant φ, c'est-à-dire tel que $p\tilde{\varphi} = \varphi$.

Lemme. *(Nombre de Lebesgue)*

Pour tout espace métrique compact (E,d), pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_i i \in I$ de E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i \in \tilde{h}$ avec $B(x,\varepsilon) \subseteq U_i$. Autrement dit, tout recouvrement d'un espace métrique compact admet un *nombre de Lebesgue* qui vaut ε.

Preuve.

▷ Puisque φ est continue, $(\varphi^{-1}(U_{\varphi(t)})_{t\in I}$ est un recouvrement ouvert de I. Or I est un espace métrique compact ; soit ε le nombre de Lebesgue associé à ce recouvrement. On divise $I = [0,1]$ en $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ tel que $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Montrons par récurrence sur k qu'il existe une unique $\psi_k : [0,t_k] \to E$ telle que $\psi_k(0) = x$ et $p\psi_k = \varphi_{|[0,t_k]}$. Pour $k = 0$, c'est trivial. Supposons ψ_k construite. Il existe $t \in I$ tel que $]t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon[\subseteq \varphi^{-1}(U_{\varphi(t)}) \iff \varphi(]t_k,\varepsilon,t_k+\varepsilon[) \subseteq U_{\varphi(t)}$. Notons C la composante connexe contenant $\psi_k(t_k)$. Puisque $p_{|C} : C \to U_{\varphi(t)}$ est un homéomorphisme, il y a une unique manière d'étendre ψ_k en ψ_{k+1}, en posant pour $t_k \leqslant s \leqslant t_{k+1}$: $\psi_{k+1}(s) = (p_k)^{-1}(\varphi(s))$ et pour $0 \leqslant s \leqslant t_k$: $\psi_{k+1}(s) = \psi_k(s)$. ■

4.4.3 Le groupe fondamental du cercle

Cet exemple n'a rien de trivial.

Théorème. *(Groupe fondamental du cercle)*

On a[a] : $\Pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z}$.

[a] L'égalité est prise au sens d'un représentant dans la classe d'isomorphie.

▷ On montre ça à partir du revêtement canonique $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$. Si γ est une boucle basée en 1, remarquons que $P(0) = 1$. D'après le théorème, il existe un relèvement $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\gamma}(0_{(I)}) = 0_{(\mathbb{R})}$. Soit $n = \tilde{\gamma}(1) \in P^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Le chemin $\omega_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & nt \end{array}$ est un chemin de 0 à n dans $\mathbb{R}$ et il est homotope à $\tilde{\gamma}$, de façon immédiate car $\mathbb{R}$ est simplement connexe. Ainsi $w_n = P \circ \tilde{w_n}$ et $[w_n] = [\gamma]$. Il reste à montrer que $[w_n] = [w_m] \implies m = n$. Or il est clair que $[w_n][w_m] = [w_{n+m}]$. Donc $\mathbb{Z} \longrightarrow P_1(S^1,1)$ est un morphisme surjectif bien défini. Ainsi, il suffit de montrer que ce morphisme de $\mathbb{Z}$ dans le groupe fondamental du cercle est un objet injectif, autrement dit, qu'à deux chemins homotopes de cette forme correspond le même entier, et c'est la partie difficile.

Soit H une homotopie entre w_n et w_m. Alors d'après le théorème précédent, il existe une homotopie $\tilde{H}$ entre $\tilde{w_n}$ et $\tilde{w_m}$. Ainsi $m = n$, car si non, ils n'ont même pas les extrémités, donc ne peuvent être homotopes. ■

4.4.4 Relèvement

Intuitivement, on a des points d'un espace topologique en bas, et on essaie de les *relever* en des points d'un espace topologique en haut.

4.4.5 Degré d'une application

4.4.6 Applications et conséquences en Analyse

4.4.6.1 Préservation des bords

Exercice 6 *(Un exemple : bords d'une couronne)*

Pour $r > 0$, on note $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$. Soient $r' > r > 1$ et $f : C_r \to C_{r'}$ un homéomorphisme. Le but est de montrer que f envoie ∂C_r dans $\partial C_{r'}$.

1. Soient $D_n = C_{1+2^{-n}(r-1)}$ et $E_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + 2^n(r' - 1) \leqslant |z| \leqslant r'(1 - 2^{-n})\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est une partie compacte de $C_{r'}$ et que pour n assez grand, $C_{r'} \smallsetminus E_n$ a deux composantes connexes.
2. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant n$, $f(D_k) \subseteq C_{r'} \smallsetminus E_N$.
3. Conclure en utilisant la connexité de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4.6.2 Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine

4.4.6.3 Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue

4.4.6.4 Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon

4.4.7 Théorie générale des revêtements

On aura besoin du Théorème de Van Kampen pour cette description.

4.5 Théorème de Van Kampen

On calcule du groupe fondamental par une méthode diviser pour régner. L'idée générale est, pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique, de découper celui-ci en petits sous-espaces, calculer les groupes fondamentaux de ces espaces pour le recoller ensuite.

On démontre plusieurs versions, de différentes forces, du théorème de Van Kampen.

4.5.1 Version faible du théorème de Van Kampfen

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen faible)***

Soit X une espace topologique et on suppose que U,V sont deux ouverts connexes par arcs de X d'intersection non vide et connexe par arcs qui recouvrent X. Soit $x_0 \in U \cap V$. Par fonctorialité du groupe fondamental, on a des morphismes $\Pi_1(U,x_0), \Pi_1(V,x_0) \longrightarrow \Pi_1(X,x_0)$.
Alors $\Pi_1(X,x_0)$ est engendré par les images de ces morphismes.

$\triangleright$ Soit $\gamma : I \longrightarrow X$ une boucle basée en x_0. On a $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ et, en notant I_i, I_j des intervalles ouverts, $\gamma^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} I_i$ et $\gamma^{-1}(V) = \bigsqcup_{j\in J} I_j$, donc l'union des I_i avec l'union des I_j est un recouvrement de I. Par compacité de I (subtilité qui n'apparaissait pas dans le schéma, qui n'a donc pas tout à fait valeur de preuve... loin de là), on extrait un recouvrement fini de la forme $[0,1] = [0,s_1[\cup]u_2,s_2[\cup ... \cup]u_2,1]$ où les s_i sont ordonnés et $u_i < s_{i-1} \quad \forall i \geqslant 1$; en choisissant $t_i \in]u_{i+1},s_i[$, on obtient un recouvrement de la forme suivante : $I = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup ... \cup [t_n,1]$ tel que $\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subseteq U$ ou V par connexité, pour tout $i \in [\![1,n[\![$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, pour des $t_i \in I$. On peut de plus supposer que $\gamma(t_i) \in U \cap V$. Comme $U \cap V$ est connexe par arcs par hypothèse, il existe un chemin α_i dans $U \cap V$ reliant x_0 à $\gamma(t_i)$. Alors puisque $[0,1] \simeq [0,t_1]$, en notant $\gamma([0,t_1]$, γ restreint à U ou V, la composition étant licite car $[\alpha_1\alpha_1^{-1}][c_{x_0}]$, on a $\gamma = \gamma([0,t_1]) \star \gamma([t_1,t_2]) \star ... \star \gamma([t_n,1])$. Ainsi $[\gamma_1 \times \alpha^{-1} \times \alpha_1 \times \gamma_2 ... \times \gamma_n] = [\gamma]$. On peut supposer $\gamma_1 \subseteq U$ où $\alpha_1 \subseteq U$, donc $\gamma_1\alpha_1^{-1} \subseteq U$. Et $[\gamma_1\alpha^{-1}] \in \Pi_1(U,x_0)$ pour une boucle basée en x_0. De même, $\alpha_i\gamma_{i+1}\alpha_{i+1}^{-1} \in \Pi_1(A,x_0)$ donc $A = U$ ou $A = V$. $\blacksquare$

Remarque. Ce théorème faible ne s'applique pas dans le cas du cercle ! On aura besoin des groupoïdes ici.

Corollaire. ***(Corollaire faible de Van Kampen faible)***

Avec les hypothèses précédentes, si $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ est connexe pas arcs et si $\Pi_1(U_1,x_0)$ et $\Pi_2(U_2,x_0)$ sont triviaux, alors $\Pi_1(X,x_0)$ aussi.
Autrement dit, un espace réunion de deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe par arcs est simplement connexe.

On peut toutefois appliquer le théorème à la *sphère* en dimension supérieure ou égale à 3.

Théorème. ***(Simple connexité de la sphère)***

Pour $\underline{n \geqslant 2}$, $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

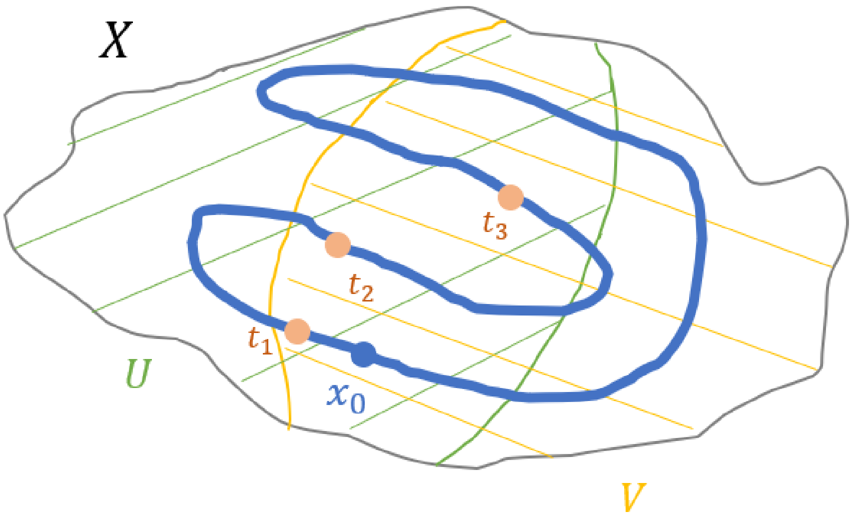


FIGURE 4.5.1 : *Démonstration du théorème de Van Kampen, version faible.* — L'intersection des deux ouverts est supposée connexe.

▷ On prend pour ouverts, la sphère privée du pôle nord, respectivement du pôle sud. Alors ces ouverts sont contractiles car homéomorphes au plan par projection stéréographique et leur intersection est bien connexe par arcs (exercice). D'où le résultat. ■

On obtient donc un des plus simples exemples du fait suivant :

Contre-exemple. ***(Le GF ne caractérise pas le type d'homotopie)***

$\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{S}^3$ ont le même groupe fondamental. Pourtant, elles n'ont pas le même type d'homotopie.

La façon la plus simple de le voir est d'en calculer les groupes d'homologie supérieurs. (Il est possible de calculer des groupes d'homotopie supérieure en petites dimensions, mais c'est difficile, et c'est encore ouvert pour le cas général.) On a $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ tandis que $H_2(\mathbb{S}^3) = 0 \not\simeq \mathbb{Z}$. □

Cette asymétrie avec le cercle n'est pas sans surprise : le cercle privé de deux points n'est plus connexe par arcs, la sphère, si. Plus topalgébriquement, on ne peut plus tourner autour du cercle privé d'un point, mais on peut autour de la sphère privé d'un point. Remarque : pourtant, on peut toutes les deux les déformer en un point !

Théorème. ***(Théorème faible de Van Kampen pour les groupoïdes)***

Soient $X = U_1 \cup U_2$, U_1,U_2 deux ouverts et $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Alors $\Pi(X)$ est engendré au sens des catégories par les images au sens des catégories de $\Pi(U_1)$ et $\Pi(U_2)$ par les foncteurs $\Pi(\iota_i) : \Pi(U_i) \longrightarrow \Pi(X)$ induits par les inclusions $U_i \longrightarrow X$.

▷ Même preuve, et même un peu plus simple, que dans le cas des groupes fondamentaux. ■

Remarque. On peut déduire le théorème classique par passage à des sous-groupoïdes pleins.

Un espace de groupe fondamental non trivial peut être engendré par des groupes triviaux ! C'est ce qui se passe pour le cercle

4.5.2 Théorème de Van Kampen général

On aura besoin de quelques notions catégoriques.

4.5.2.1 Somme amalgamée dans une catégorie

Définition. ***(Somme amalgamée de catégories, pushout)***

Soient C une catégorie et supposons qu'on ait entre objets et morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

et bien la somme amalgamée, si elle existe, est dans ce cas un objet noté $Y \bigcup\limits_X Z$, et la donnée des morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, "h_1"] & \\ Z \arrow[r, "f'"'] \arrow[drr, "h_2"'] & Y \cup_X Z \arrow[dr, dotted] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

tels que tout le diagramme commute (soit quatre identités).

Remarque. Si ça existe, c'est unique à unique isomorphisme près.

Exemples

1. Si X est l'union de deux ouverts U_1,U_2, alors

$$\begin{tikzcd} U_1 \cap U_2 \arrow[r] \arrow[d] & U_2 \arrow[d] \\ U_1 \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

est une somme amalgamée où $X = U_1 \cup_{U_1 \cap U_2} U_2$.
Ici $f : U_1 \longrightarrow Y$ et $g : U_2 \longrightarrow Y$. On définit $h : X \longrightarrow Y$ par recollement de U_1 et

U_2 où par hypothèse f et g coïncident sur $U_1 \cap U_2$ d'où la bonne définition.
Dans la catégorie des espaces topologiques pointés Top*, si (X,x_0) est un objet avec $X = U_1 \cup U_2$, $x_0 \in U_1 \cap U_2$, soit $(X,x_0) = (U_1,x_0) \cup (U_2, x_0)$ par abus, alors $X = (U_1,x_0) \cup_{(U_1 \cap U_2, x_0)} (U_2,x_0)$.

Théorème. ***(Produit amalgamé de groupes)***

Dans la catégorie des groupes, les sommes amalgamées existent toujours (et on l'appelle plutôt *produit amalgamé*).

▷ On définit le produit libre $G \star H = G \star_1 H$ via le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \star H \end{array}$$

où $G \star H$ est l'ensemble des mots dits alternés, de la forme $g_1 h_1 g_2 \ldots$ finie ou $h_1 g_1 h_2 \ldots$ finie, avec aucune interaction entre les g et les h, mais bien sûr les règles de calcul au sein de H et de G. Autrement dit, si $G = \langle S \mid R \rangle$, $H = \langle S' \mid R' \rangle$ où $G \star H = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle$. Il est clair que l'une ou l'autre de ces descriptions vérifie bien la propriété universelle demandée. Il faut maintenant vérifier le reste de la propriété universelle. Si $f : K \longrightarrow G$ et $g : K \longrightarrow H$, on pose le produit amalgamé au-dessus de K : $G \star_K H = G \star H / \langle f(h) = g(h), h \in K \rangle$, *i.e.* $G \star_K H = \langle S \cup S', R \cup R' \cup \{f(k)g(k)^{-1}, k \in K\} \rangle$. (Si K est trivial, on retombe bien sur le groupe libre.) ■

Exemples

1. $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2$.
2. $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z} = \langle a,b \mid a^2 = 1 \rangle$. En effet, par exemple, $abb^{-1}aaaba^{-1} = aaba^{-1} = ba^{-1}$. Ainsi un mot s'écrit toujours (sous forme *normale* ou *canonique*) comme $b^{k_1}ab^{k_2}a \ldots b^{k_n}$ avec $h_1,\ldots,h_n \in \mathbb{Z}$, $h_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4.5.2.2 Le théorème de Van Kampen fort

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen)***

Soit X une espace topologique et on suppose que U_1,U_2 sont deux ouverts quelconques de X qui le recouvrent, tels que $U_1 \cap U_2$ soit connexe par arc. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Alors $\Pi_1(X,x_0) \simeq \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \Pi_1(U_2,x_0)$.

▷ Conséquence du théorème pour les groupoïdes (plus tard). ■

Exemples

1. *(Groupe fondamental d'un espace multiplement pointé)* On prend *(Groupe fondamental du plan projectif réel)* $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$, alors $\Pi_1(X,x_0) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \emptyset \rangle$.
2. Soit $X = \mathbb{RP}^2 = D^2/(x \sim -x, x \in S^1)$. $\Pi_1(\mathbb{R}P^2, x_0) = 1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   Alors avec les ensembles évidents $\Pi_1(U_2,x_0) = 1$ et $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathbb{Z}$. Or U_1 est un rétract par déformation de $S^1/(x \sim -x)$, mais $S^1/(x \sim -x) \cong S^1$ par $z \mapsto z^2$. Ainsi $\Pi_1(U_1, x_0) = \Pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z}$. On a donc $\Pi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Pi_1(U_1)$, soit $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, qui à $1 \longmapsto z$.

Intuitivement, il sera beaucoup plus difficile de trouver des espaces non simplement connexes dont le groupe fondamental est fini, ou même de torsion ; cela signifierait, par définition du GF, qu'il existe des boucles non homotopes à un point qui, parcourues plusieurs fois, le deviendraient.

Remarque. Ce théorème ne s'applique toujours pas au cercle.

Théorème. ***(Produit amalgamé de groupoïdes)***

Les produits amalgamés existent aussi dans la catégorie des groupoïdes.

▷ Voir la preuve du théorème suivant. ■

Théorème. ***(Théorème de Van Kampen pour les groupoïdes)***

Si $X = U_1 \cup U_2$ un espace topologique, U_i deux ouverts. Alors

$$\Pi(X) \simeq \Pi(U_1) \star_{\Pi(U_1 \cap U_1)} \Pi(U_2).$$

▷ On reprend les notations de l'énoncé. Pour $f : U_1 \longrightarrow Y$, $g : U_2 \longrightarrow Y$, on veut faire commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & \Pi(U_1) \arrow[d] \arrow[ddr, "g^\star"] & \\
\Pi(U_2) \arrow[r] \arrow[drr, "f^\star"'] & \Pi(X) & \\
& & \Pi(Y)
\end{tikzcd}$$

Soient $x,y \in X$, un *chemin généralisé* est un objet de la forme $\alpha : [0,l] \longrightarrow X$, $l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que $\alpha(l) = y$. Alors par reparamétrage $\gamma_\alpha : [0,1] \longrightarrow X$, $t \mapsto \alpha(tl)$ est un chemin au sens usuel. On note l_x le chemin constant, $[0,l] \longrightarrow X$, $t \mapsto x$. Soit $P(X)$ (P pour *path*) la *catégorie des chemins* de X, dont les objets sont les éléments de X et les morphismes $x \to y$ les chemins généralisés. La composition est définie pour $\alpha : [0,l_1] \longrightarrow X$ un chemin de $x \to y$ et $\beta : [0,l_2] \longrightarrow X$ un chemin de $y \to z$, avec

$\alpha \star \beta : [0, l_1 + l_2] \longrightarrow X$, $t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) \text{ si } t \in [0,l_1] \\ \beta(t - l_1) \text{ si } t \in [l_1,l_2] \end{cases}$, et l'on définit l'identité par $id_x = 0_x$. Dans ce cas, $P(x)$ est une catégorie, mais pas un groupoïde. On a cependant un foncteur $P(X) \longrightarrow \Pi(X)$, et $\Pi(X)$ est le quotient par la relation : $\alpha \sim \beta$, s'il existe des chemins constants l_y, l'_y tels que $l_y \circ \alpha$ et l'_y soient homotopes. On a :

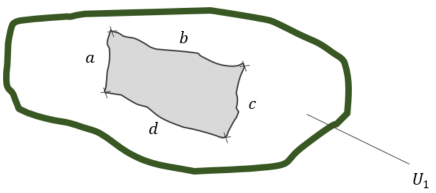
$$\begin{tikzcd}
P(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d] & P(U_1) \arrow[d] \arrow[ddr, "F_2=P(f)"] & \\
P(U_2) \arrow[r] \arrow[drr, "F_1=P(g)"'] & P(X) \arrow[dr, dashed, "G"] & \\
& & P(Y)
\end{tikzcd}$$

et l'on pose donc $G(x) = \begin{cases} F_1(x) \text{ si } x \in U_1 \\ F_2(x) \text{ si } x \in U_2 \end{cases}$ bien définie par hypothèse du théorème. Comme dans les preuves précédentes, si $\gamma : x \to y$ est généralisé, on peut trouver une subdivision $0 < t_1 < ... < t_n = l$ telle que $\gamma([t_i,t_{i+1}]) \subseteq U_1$ ou U_2. On pose $\gamma_i(t) = \gamma(t_i + t)$. On a $\gamma = \Gamma_{n-1} \times ... \times \gamma_1$. On pose donc $G(\gamma) = F_{j_n}(\gamma_n)...F_{j_1}(\gamma_1)$ où $j_h = 1$ ou 2.

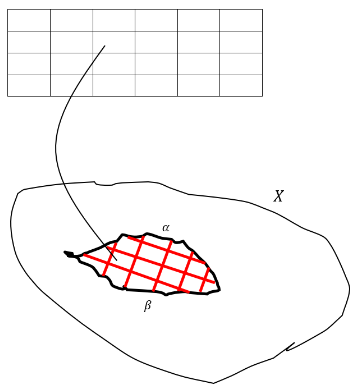
Il reste à montrer que G passe au quotient.

$$\begin{tikzcd}
P(X) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \Pi(Y) \\
\Pi(X) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Primo, G envoie les chemins constants sur les identités. Secundo, soit $H : I \times I \longrightarrow U_j$. Puisque $I \times I$ est un carré, soit a,c,d,b ses côtés. Alors $F_i(a)F_i(b) = F_i(c)F_i(d)$.



Tertio, si $\alpha, \beta : [0,l] \longrightarrow X$ et $H : [0,l] \times I \longrightarrow X$ est une homotopie de $\alpha \to \beta$,



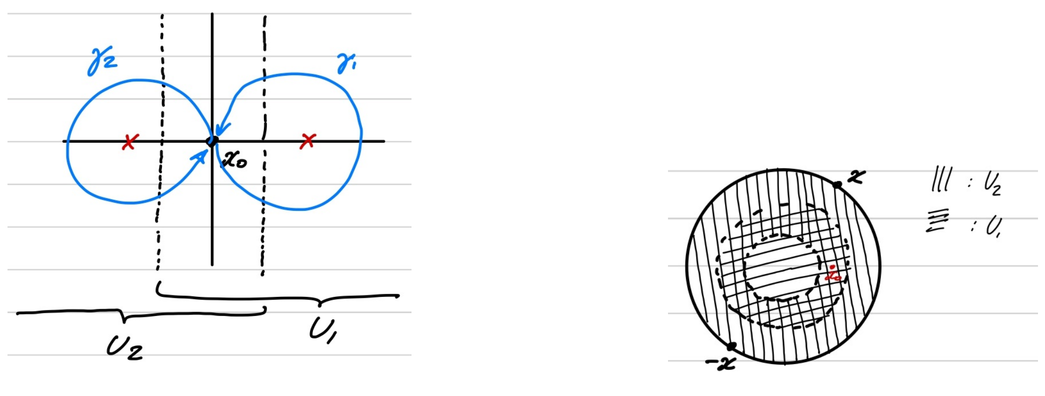
où l'on découpe $[0,l] \times I$ comme sur la figure de telle sorte que l'un d'eux s'écrive comme $\in H^{-1}(U_1)$ ou $H^{-1}(U_2)$. En utilisant le deuxième point sur chaque petit carré, on déduit $G(\alpha\alpha') = G(\beta'\beta)$, si α et β son thomotopes à extrémité fixés, $G(\alpha) = G(\beta)$ puis G descend à $\Pi(X)$.

Par suite, $\Pi(X)$ satisfait la propriété universelle de $\Pi(U_1) \star \Pi(U_2)$ sur $\Pi(U_1 \cap U_2)$.

En particulier, ce produit amalgamé existe comme on l'avait prétendu. ■

Application

Retrouvons le groupe fondamental du cercle. Soit $X = S^1$. Alors $\Pi_1(S^1) = \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(I) \star \Pi_1(J)} \Pi_1(U_2) \simeq \Pi_1(U_1, x_0, x_1)$ où I,J sont dans l'intersection $U_1 \cap U_2$, sur les côtés opposés du cercle. Or en notant c_1, c_2 les chemins (quelconques) sur les demi-arcs respectifs, on a $\mathrm{Hom}_{\Pi(U_1)}(I,J) = \{[c_1]\}$ et $\mathrm{Hom}_{\Pi(U_2)}(I,J) = \{[c_2]\}$. Par suite, $\mathrm{Hom}_{\Pi(S^1)}(I,J) = \langle [c_1][c_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$.



(a) *Le plan doublement pointé.* — (b) *Le plan projectif réel.* —

FIGURE 4.5.2 : *Applications du théorème de Van Kampen.* —

Reformulation pratique. ***(Van Kampen formulé avec un groupe présenté)***

Soit $M = M_1 \cup M_2$ la réunion de deux espaces topologiques connexes par arcs ouverts dans l'espace M et tels que $I = M_1 \cap M_2$ soit connexe par arcs. On suppose que $\pi_1(M_1) = \langle \gamma_1,\ldots|r_1,\ldots\rangle$ et $\pi_1(M_2) = \langle \delta_1,\ldots|s_1,\ldots\rangle$. On suppose que $\pi_1(I)$ est engendré par les η_i. On écrit chaque η_1 comme $\varphi_{i,1}$ en utilisant les générateurs de $\pi_1(M_1)$ et $\varphi_{i,2}$ en utilisant ceux de $\pi_1(M_2)$. Alors

$$\pi_1(M) = \left\langle \gamma_1,\ldots,\delta_1,\ldots \mid r_1,\ldots,s_1,\ldots,\varphi_{i,1}\varphi_{i,2}^{-1} \right\rangle$$

4.5.3 Conséquence sur la théorie générale des revêtements

Soit X un espace topologique ; on s'intéresse aux revêtements de X.

Définition. ***(Revêtement CALCA)***

Soit $P : E \longrightarrow X$ une application continue surjective, E un espace topologique. On rappelle que P est un *revêtement*, si tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert U tel que $P^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$, $PU_i \simeq U$.

On dit que ce revêtement est *CALCA* (connexe par arcs localement connexe par arcs) si E et X sont connexes par arcs et localement connexe par arcs. **On suppose toujours cela à partir de maintenant.**

On appelle P la *projection*, $P^{-1}(x)$ la *fibre au-dessus de* x, U un *ouvert trivialisant*, car localement au voisinage de x, $P_{|U_i} \simeq U_1 \times X \longrightarrow X$. Les U_i s'appellent les *feuilles* au-dessus de U.

On conseille au lecteur de revoir cette partie avant de continuer.

4.5.3.1 Morphismes de revêtements

Définition. ***(Morphisme de revêtements)***

Soit $P_1 : E_1 \longrightarrow X$ et $P_2 : E_2 \longrightarrow X$ deux revêtements d'un même espace X. Un *morphisme de revêtements* est un diagramme commutatif (d'applications continues) comme suit.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "P_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "P_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Hom}(P_1,P_2)$ ces morphismes.

Si P est un revêtement, on a $\mathrm{Aut}(P)$ le groupe des automorphismes. Un automorphisme de revêtement P est exactement une bijection bicontinue f de E dans E telle que $P = P \circ f$. En effet, il faudrait aussi imposer $P \circ f^{-1} = P$, mais c'est conséquence de $P = P \circ f$.

On a donc la *catégorie des revêtements* à base fixée.

Remarque importante. $\mathrm{Aut}(P)$ agit sur $P^{-1}(x)$ pour tout $x \in X$

4.5.3.2 Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications

Définition. ***(Propriété de relèvement des homotopies)***

On dit alors que $\tilde{H}$ *relève h avec conditions initiales.*

Remarques.

1. Schématiquement,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d, "id_X \times \{0\}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \times I \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & B. \end{tikzcd}$$

   Par suite, le relèvement des homotopies est la propriété duale de leur extension.

Il existe une généralisation

Définition. ***(Propriété d'extension de relèvement des homotopies)***

Théorème. ***(Propriété de relèvement des homotopies)***

Toute boucle dans X basée en x se relève de façon unique en un chemin dans E basé en n'importe quel point de $P^{-1}(x)$.
Les homotopies se relèvent aussi.

Les lacets se relèvent en des <u>chemins</u> a priori ! (Il suffit de penser au cercle pour ne pas stresser.)

Corollaire. ***(Plongement des groupes fondamentaux)***

Soient $x \in X$, $x_0 \in P^{-1}(x)$. Alors le morphisme $\Pi_1(E,x_0) \xrightarrow{P^\star} \Pi_1(X,x)$ est injectif.

$\triangleright$ Soit γ une boucle de E basée en x_0, sa projection $P(\gamma)$ est une boucle basée en x, et il existe un unique chemin qui relève cette boucle d'extrémité donnée. Soit $\tilde{\Gamma}$ l'unique chemin qui relève $P(\gamma)$ basé en x_0. On a $P(\tilde{\gamma}) = P(\gamma)$, donc ils sont homotopes. Donc $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, donc c'est une boucle. ■

Si $p : E \to X$ est un revêtement, on cherche enfin à savoir si $f : Y \to X$ se relève en une application $\tilde{f} : Y \to E$, *i.e.* telle que $p\tilde{f} = f$.

Fait

Si Y est connexe, deux relèvements de f qui coïncident en au moins un point sont égaux. Et oui.

Remarque. $p_* : \pi_1(E,\tilde{x_0}) \to \pi_1(X,x_0)$ est injective.

Corollaire. ***(Relèvement des applications)***

Soit $f : Y \longrightarrow X$ (Y CALCA) une application continue avec $x_0 = f(y_0)$ et $p(\tilde{x_0}) = x_0$. Alors f se relève en $\tilde{f} : Y \longrightarrow E$ (de façon unique avec $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$) ssi $f^\star(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq p^\star(\pi_1(E,\tilde{x_0})$ le *sous-groupe définitif du recouvrement*, inclus dans $\pi_1(X,x_0)$. Soit :

$$\begin{tikzcd}
y_0 \in Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr] & E \ni \tilde{x_0} \arrow[d, "P"] \\
& X \ni x_0
\end{tikzcd}$$

$\triangleright$ **Preuve complètement brouillon** Si $y \in Y$, $\alpha : y_0 \longrightarrow y$, $f^\star(\alpha)$ est un chemin dans X de x_0 vers x. On peut le relever en un chemin basé en x_0. On voudrait que $\tilde{f}(y) = x$. On cherche F_x. Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ se relève en $\tilde{f} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi $f^\star(\Pi_1(Y,y_0)) = 1$.

Dans Y, soient y_0, y et deux chemins γ' et γ les reliant chacun. Dans le relèvement (penser à $\mathbb{R}$), $x = f(y)$ et $\tilde{x_0}$ est dans la fibre, tout comme $\tilde{f}(y)$. Il existe $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$ tel que $\gamma' = \alpha \times \gamma$, car tout isomorphisme entre deux objets est obtenu par précomposition par un automorphisme du premier à un isomorphisme fixé (résultat élémentaire valable dans toute catégorie). Si l'image de $[\alpha]$ dans $\Pi_1(X,x)$ est inclus dans $P^\star(\Pi_1(E,\tilde{x_0}))$. Si x est l'image de y obtenue en utilisant γ et x' par γ', alors l'unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de $f^\star([\alpha])$ est un chemin de x vers x', or $x = x'$ équivaut à $\tilde{\alpha}$ est une boucle, lui-même équivalant à $\alpha \in P^\star(\Pi_1(E,\tilde{x_0}))$. ■

Remarque. Pour un autre point base $\tilde{x_0}'$, les sous-groupes définitifs sont conjugués. En toute bonne fois, le sous-groupe définitif est donc la donnée d'une classe de conjugaison (l'espace étant supposé connexe).

Application. ***(Relèvement sur le cercle)***

Si Y est connexe, une application continue $f : Y \to S^1$ se relève en $\tilde{f} : Y \to R$ si et seulement si f est simplement homotope à une application constante, autrement dit si elle ne fait pas le tour du cercle.
Remarque : toute application $Y \to S^n$, $n \geqslant 2$, admet un relèvement.

Propriété. ***(Équivalence des revêtements)***

Soient X_1,X_2,Y trois espaces où Y est connexe par arcs. Soient $p_1 : X_1 \to Y$ et $p_2 : X_2 \to Y$ deux revêtements tels que $p_1(x_1) = p_2(x_2,\ x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Alors il existe un homéomorphisme $F : X_1 \longrightarrow X_2$ tel que $p_2F = p_1$ et $F(x_1) = x_2$ si et seulement si $p_{1*}(\pi_1(X_1,x_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2,x_2))$.

4.5.3.3 Monodromie

Théorème. ***(Action de monodromie)***

On a une action **à droite** (c'est-à-dire qui renverse la composition) $P^{-1}(x) \times \Pi_1(X,x) \longrightarrow P^{-1}(x)$, dite *action de monodromie*, donnée pour $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$, $x_0 \in P^{-1}(x)$, par $x_0 \cdot [\alpha]$: l'extrémité de l'unique chemin relevant α, basé en x_0.

▷ Rien à faire. ■

Théorèmes

1. $\mathrm{Stab}(x_0) = P^\star(\pi_1(E,x_0)) \subseteq \pi_1(X,x)$.
2. Cette action est transitive. En particulier $p^{-1}(x)$ est en bijection avec $\pi_1(X,x)/p_*(\pi(E,\tilde{x}))$.
3. Les groupes $\{P^\star(\pi_1(E,x_0)), x_0 \in P^{-1}(x)\}$, forment une classe de conjugaison dans $\pi_1(X,x)$.

▷ Successivement :

1. Si $x_0 \cdot [\alpha] = x_0$, c'est exactement que le relèvement de α dans E basé en x_0 est une boucle, soit $[\alpha] \in P^\star(\pi_1(E,x_0))$.
2. Soient $x_0, x_1 \in P^{-1}(x)$. E est connexe par arcs, donc il existe γ dans E de $x_0 \to x_1$. Soit $\alpha = P^\star(\gamma)$, boucle basée en x. Par définition, $x_0 \cdot [\alpha] = x_1$.
3. Soit γ un chemin de x_0 sur x_1 avec $\alpha = P^\star(\gamma)$. Alors $P^\star(\pi_1(E,x_0))$ et $P^\star(\pi_1(E,x_1))$ sont conjugués par $[\alpha]$. Réciproquement, si un tel α existe, on peut relever ça en un chemin basé en x_0, en posant $x_1 = \gamma(1)$. ■

Corollaire

Si $p : E \to X$ est un revêtement, si E est CPA et X simplement connexe, alors p est un homéomorphisme.

4.5.3.4 Classification des morphismes de revêtements

Remarque importante. Tout $f \in \mathrm{Hom}(p_1,p_2)$ est un relèvement de p_1 au-dessus de p_2. En effet, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p_1"] & X \end{tikzcd}$$

et en particulier si E_1 est connexe, deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux.

Lemme

Soit $f \in \mathrm{Hom}(P_1, P_2)$, $x \in X$. Alors $f_x : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x), \tilde{x_1} \mapsto f(\tilde{x_1}$ est compatible avec $=$ invariante sous l'action de $\pi_1(X,x)$.

▷ Soit $x_1 \in P_1(x)$ et $x_2 = f(x_1) \in P_2^{-1}(x)$. Soit $\gamma \in P_1(X,x)$, $\tilde{\gamma_1}$ un relèvement dans E_1 de γ basé en x_1, avec $x_1 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma_1}(1)$ et $\tilde{\gamma_2}$ un relèvement de γ dans E_2, avec donc $x_2 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma_2}(1)$. Or f est un morphisme de revêtements, $f_X(\tilde{\gamma_1})$ est un relèvement de γ dans E_2, et comme $f(\tilde{\gamma_2}(0)) = x_1 = \tilde{\gamma_2}(0)$, $f^\star(\tilde{\gamma_1})$ est basé en x_2, c'est même égal à $f^\star(x_1 \cdot [\gamma]) = f^\star(x_1) \cdot [\gamma]$. ■

Remarque. On peut le dire ainsi : les actions de $\mathrm{Aut}(P)$ et de $\pi_1(X,x)$ sur $P^{-1}(x)$ commutent.

Théorème. ***(Théorème fondamental de la monodromie)***

L'application

$$\mathrm{Hom}(P_1,P_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\pi_1(X,x)}(P_1^{-1}(x),P_2^{-1}(x))$$

est une bijection.

En particulier, $\mathrm{Aut}(P) \simeq \mathrm{Aut}_{\pi_1(X)}(P^{-1}(x_0))$ est un isomorphisme de groupes.

▷ L'injectivité vient de la connexité de E_1. Soit $x_1 \in P_1^{-1}(x)$. Soit $h : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$. Si h commute avec l'action de $\pi_1(X,x)$, alors elle est déterminée par $h(x_1)$. Soit $x_1' \in P_1^{-1}(x)$, il existe $\gamma \in \pi_1(X,x)$ tel que $x_1' = x_1 \cdot [\gamma]$. On a $h(x_1') = h(x_1) \cdot [\gamma]$. Fabriquons un morphisme de revêtements. On a donc nos revêtements $P_1 : E_1 \longrightarrow X$ et $P_2 : E_2 \longrightarrow X$. Or on a vu qu'un morphisme $\tilde{P} : E_1 \longrightarrow E_2$ existe si et seulement si $P^\star(\pi_1(E_1,x_1)) \subseteq P_2^\star(\pi_1(E2,x_2))$ en tant que cas particulier de relèvement d'applications. Soit γ_1 un lacet dans E_1 basé en x_1. On a $x_1 \cdot [P_1\gamma_1] = x_1$. Ainsi $h(x_1 \cdot [P_1\gamma_1]) = P_2^\star(\Pi(E_2,x_2)) = x_2$. ■

Corollaire

Si p_1,p_2 sont des revêtements CALCA de base $X \ni x$, où $\tilde{x_i} \in p_i^{-1}(x)$, il existe un isomorphisme f de p_1 vers p_2 si et seulement si $(p_1)_*(\pi_1(E_1,\tilde{x_1})) = (p_2)_*(\pi_1(E_2,\tilde{x_2}))$.

Heuristique

Un automorphisme de revêtements commute avec les projections, donc agit sur les fibres ; le groupe fondamental aussi ; ce que l'on dit, c'est qu'ils agissent de la même façon, en ce qu'ils se déterminent l'un l'autre.
Autrement dit, un automorphisme de revêtements est caractérisé par ce qu'il fait sur la fibre, puisque chaque fibre est reliée, par connexité par arcs (hypothèse CALCA), à tout le revêtement.

Récapitulons : prenons pour exemple en esprit X le cercle et E son revêtement canonique par la droite réelle représentée en tire-bouchon. On a vu que pour toute boucle de X, il y a une unique de façon de la relever dans le revêtement E, mais alors en un chemin. Intuitivement, les boucles dans E vont donc constituer le noyau de cette action (si c'est une boucle et non seulement un chemin, c'est que c'était seulement un point).

4.5.3.5 Revêtements galoisiens

Théorème. ***(Compatibilité de revêtements)***

Soit $P : E \longrightarrow X$ un revêtement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in E \quad \pi_1(E,x) \subseteq \pi_1(X,P(x)))$ est distingué ;
2. $\forall x \in E \quad \Pi_1(E,x) \subseteq \pi_1(X,P(x)))$ est distingué ;
3. Le groupe $\mathrm{Aut}(P)$ agit transitivement sur $P^{-1}(x_0)$.

$\triangleright$ Les deux premiers points sont équivalents, car on a vu que tous les $\pi_1(E,x)$ sont conjugués dans $\pi_1(X, P(x))$. Le deuxième point équivaut à ce que si $\tilde{x}, \tilde{y} \in P^{-1}[x_0)$, $P(\pi_1(E, \tilde{x})) = P(\pi_1(E, \tilde{y}))$, d'où $\exists f \in \mathrm{Aut}(P)$ tel que $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. La réciproque est claire. ■

Remarque. L'action de $\mathrm{Aut}(P)$ est en toute généralité libre (elle agit sans point fixe). La transitivité de l'action par monodromie est donc équivalente à sa simple transitivité.

Définition. ***(Revêtement galoisien)***

On dit qu'un revêtement est *galoisien*, ou *régulier*, ou *normal*, s'il vérifie l'une des propriétés précédentes.

Remarque. Si P est galoisien, on a une bijection $\mathrm{Aut}(P) = \pi_1(X)/\pi_1(E)$ ensembliste où $\pi_1(E) = p_*(\pi_1(E,\tilde{x}))$.

Théorème. ***(Revêtements galoisiens et monodromie : théorème fondamental qui font de ces revêtements des objets « normaux »)***

Si P est galoisien, l'action par monodromie induit un isomorphisme de groupe $\mathrm{Aut}(P) \simeq \pi_1(X,x)/P^{-1}(\pi_1(E,\tilde{x}))$, où $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$.

▷ $\mathrm{Aut}(P) = \mathrm{Aut}_{P_1(X)}(P^{-1}(x))$. On veut un morphisme $\pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\pi_1(X,x))}(P^{-1}(x))$. Si $\gamma \in \pi_1(X,x)$, $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$, on relève γ en un chemin $\tilde{\gamma}$ dans E basé en $\tilde{x}$, et soit $\tilde{y}$ son extrémité. Puisque P est galoisien, il existe (par transitivité simple) un unique $f_\gamma \in \mathrm{Aut}(P)$ tel que $f_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Comme tous les $\pi_1(E,\tilde{x})$ sont égaux (dans $\pi_1(X,x)$). Ainsi, f_γ ne dépend que de $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$. On a donc construit une application $\pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P)$. Par construction, c'est un morphisme de groupe. Or $f_\gamma = id$ si et seulement si $\tilde{\gamma}$ est une boucle, si et seulemnt si $\gamma \in \pi_1(E,\tilde{x})$. Par le théorème d'isomorphisme, on a alors $\pi_1(X,x)/\pi_1(E,\tilde{x}) \simeq \mathrm{Aut}(P)$. ■

Le théorème suivant conclut cette section.

Définition. ***(Action totalement discontinue)***

Soit G un groupe discret. L'action de G sur un espace X est continue si et seulement si pour tout $g \in G$, g agit par homéomorphisme.
On dit que l'action de G est *totalement discontinue* si $\forall x \in X\ \exists U \in \gamma(x) \quad U \cap g \cdot U \neq \emptyset,\ g = id$.

Remarque. Dans ce cas, l'action de G est libre, mais c'est encore plus fort.

Théorème. ***(Les revêtements galoisiens CALCA sont des quotients de trucs connexes par des groupes discrets)***

Soit G agissant sur E CALCA de façon totalement discontinue. Alors $P : E \longrightarrow E/G$ est un revêtement galoisien, et $\mathrm{Aut}(P) = G$.

▷ On avait vu que P est une application ouverte. Soit $x \in E$. Soit $U \in \gamma(x)$; pour tout $g \neq id$, $g \cdot U \cap U = \emptyset$. Or U est ouvert, donc $P(U)$ est ouvert. Par construction, $P^{-1}(P(U)) = \coprod_{g \in G} g \cdot U$ et $g \cdot U \simeq U$.

Secundo, on a un morphisme de $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$. Par construction, c'est un élément de $\mathrm{Aut}(P)$, c'est-à-dire $P(x) = P(g \cdot x)$. Comme l'action de G libre, ce morphisme est injectif. Montrons qu'il est surjectif. Soit $f \in \mathrm{Aut}(P)$ et soit $\tilde{x_0} \in E$ et $x_0 = P(\tilde{x_0})$. Comme $f(\tilde{x_0}) \in P^{-1}(x_0)$, il existe $g \in G$ tel que $f(\tilde{x_0}) = g \cdot \tilde{x_0}$. L'action de f sur $P^{-1}(x_0)$ coïncide avec l'action de g. Comme E/G est connexe, alors l'action de f et de g coïncident partout. ■

Remarque. On a $G \simeq \pi_1(X,x)/\pi_1(E,\tilde{x}) = \pi_1(E/G,q(x))/q_*(\pi_1(E,x))$ où $q : E \to E/G$ par le théorème précédent.

L'analogie à la théorie de Galois des extensions de corps apparaît ici : cette remarque, en tant que réciproque du théorème précédent, dit que tous les revêtements de Galois sont précisément de cette forme. Ainsi :

$$\boxed{\{\text{revêtements galoisiens}\} \longleftrightarrow \{\text{sous-groupes distingués de } \Pi_(X,x)\}}.$$

Exemples

1. Si E est simplement connexe, $\pi_1(E/G) = G$.
2. $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translation. On a $(S^1) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le n-tore, d'où $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$. On retrouve aussi le groupe fondamental du cercle (ce qui n'était pas trivial).
3. Le théorème nous dit autre chose, dont avec la précédente, deux propositions qui ont l'air bien différentes et dont aucune n'est triviale. Les revêtements fermés de S^1 sont donnés par $P_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$. Le groupe d'automorphisme est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a $P_n^\star : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $k \longmapsto nk$. Grâce au théorème, à équivalence près, ce sont les seuls.

Corollaire

Soit $P : E \longrightarrow X$ un revêtement galoisien. Alors $\mathrm{Aut}(P) := A(P)$ agit de façon totalement discontinue et $P : E/A(P) \longrightarrow X$ est un homéomorphisme.

4.5.3.6 Revêtements universels

Définition. ***(Revêtement universel)***

Soit X un espace topologique CALCA. Un *revêtement universel* de X est un revêtement $P : E \longrightarrow X$ avec un espace total E simplement connexe. Autrement dit, c'est le recouvrement de groupe définitif trivial.

Justifions l'usage de l'article défini ci-dessus.

Proposition

Soit $p_u : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel et $p : E \to X$ un revêtement. Soit $x_0 \in X, \tilde{x_0} \in E, \tilde{y_0} \in \tilde{X}$. Il existe un unique $f \in \mathrm{Hom}(p_u,p)$ tel que $f(\tilde{y_0}) = \tilde{x_0}$.

Corollaire

Si X admet un revêtement universel E, alors

$$\{\text{classes d'isomorphismes de revêtements}\} \longleftrightarrow$$
$$\{\text{classes de conjugaison dans l'ensemble des sous-groupes de } \pi_1(X,x)\},$$

soit $G \subseteq \Pi_(X,x) \rightsquigarrow E/G$.

Remarque. De plus, les classes d'isomorphismes de revêtements finis sont en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini du π_1.

Heuristique

Soit Γ le GF. Si $H \leqslant G$ est d'indice d, Γ agit sur l'ensemble des coensembles Γ/H qui sont finis de cardinal d. On obtient donc une représentation de Γ à travers $\mathfrak{S}(\Gamma/H)$, notée ρ_H. Changer H par un conjugué $H' = zHz^{-1}$ induit une bijection $c_z : \mathfrak{S}_d(\Gamma/H) \to \mathfrak{S}_d(\Gamma/H')$. On note C_z la conjugaison par z. On a donc un opérateur d'entrelacement entre représentations :

$$c_z \circ \rho_H = \rho_{H'} \circ C_z$$

et l'on peut aussi observer que le stabilisateur du coensemble H est le sous-groupe H lui-même, et que $\mathrm{Stab}(gH) = C_g(H)$.

Conséquence. ***(Unicité du revêtement universel)***

Un revêtement universel est unique à isomorphisme près.

Corollaire

Tout recouvrement d'un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe lui est homéomorphe.

Plus généralement :

Théorème

Le groupe des automorphismes de revêtements de $\tilde{X} \to X$ est isomorphe à $\left\langle\left\langle p_*(\pi_1(\tilde{X}))\right\rangle\right\rangle / p_*(\pi_1(\tilde{X}))$.

VOC Un revêtement dont le sous-groupe définitif est normal est appelé *revêtement régulier* ou *normal*. En particulier le revêtement universel est normal et son groupe d'automorphismes est $\pi_1(X)$.

Exemple. ***(Revêtement normal)***

Le disque unité épointé D^* est recouvert par le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ qui est son revêtement universel, via $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Le groupe fondamental $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{H}$ par translations entières. Le revêtement régulier correspondant au sous-groupe engendré par $e^{2\pi i m}$ est encore le disque, avec un groupe de revêtement isomorphe à $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Ainsi, les revêtements finis de D^* sont équivalents aux $z \mapsto z^m, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Trouver les revêtement réguliers du tore recouvert par le plan.

Définition. ***(Espace des chemins)***

Soit X un espace topologique CALCA et séparé, et $x_0 \in X$. On appelle *espace des chemins* $P(X,x_0)$ l'ensemble des chemins de x basé en x_0 (c'est une pieuvre).
On a $P : P(X,x_0) \longrightarrow X$, $\gamma \longmapsto \gamma(1)$ surjectif, car X est CALCA, et un revêtement. C'est simplement connexe.

Exemples

1. $P(S^1,1) = \mathbb{R}$. Classification des revêtements de S^1.
2. Classification des revêtements à deux feuillets d'un bouquet de cercle.

Voilà une illustration des considérations précédentes qui démontre au passage la supériorité définitive de la topologie sur l'algèbre. Il existe une preuve algébrique imbuvable du résultat suivant, qui ne peut que pâlir devant la concision apporté par la preuve de la topologie algébrique.

Théorème. ***(Nielsen-Schreier)***

Tout sous-groupe de F_2 est libre.

$\triangleright$ On fait une preuve sans détail. F_2 est le groupe fondamental du bouquet de sphères $S^1 \vee S^1$ pointées en 1, par le théorème de Van Kampen. Cet espace admet bien un revêtement universel : en effet, on peut le représenter comme un graphe infini sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, avec b l'axe des abscisses ($\bar{b} = b^{-1}$) dans le sens opposé, et a dans l'axe des abscisses ; la donnée d'un mot sur F_2 correspond exactement à un chemin partant de l'origine et fini sur ce revêtement, que nous notons Γ (il faudrait en fait définir la topologie sur des arbres). Ainsi, d'après le théorème précédent, prendre un revêtement de $S^1 \vee S^1$ revient à prendre des sommets de ce graphe et à les attacher (quotient par l'action d'un sous-groupe $G \subseteq F_2$). Par exemple, $abaab \in G$ peut se refermer en une boucle par un autre chemin, d'ailleurs très arbitraire Donc Γ/G est un bouquet de cercle, éventuellement un nombre infini. Si on a n cercles, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, c'est facile (puis il faut généraliser au cas dénombrable). Ainsi, $\pi_1(\Gamma/G,x_0) = \star_n \mathbb{Z} = F_n$. Ainsi $G \simeq F_n$ est donc libre. ■

Proposition

Soit X CALCA. Alors X admet un revêtement universel si et seulement s'il est *semi-localement simplement connexe* si pour tout $x \in X$, il existe $U \in \mathcal{V}(X)$ tel que $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ soit triviale.

Exercice 8

Soient M_1,M_2 deux variétés ayant le même revêtement universel $\tilde{M}$ avec des projections $p_1 : \tilde{M} \to M_1$ et $p_2 : \tilde{M} \to M_2$. On note $G_1 = \mathrm{Aut}(p_1)$ et $G_2 = \mathrm{Aut}(p_2)$. Montrer que si $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ est un homéomorphisme, on peut le relever en un automorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{M}$ de sorte que $G_2 = \tilde{\varphi} \circ G_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}$.

Théorème

Soit $p : E \twoheadrightarrow B$ un revêtement simplement connexe et localement connexe par arcs. Alors $\pi_1(B) \simeq \mathrm{Aut}(p)$.

Application

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

4.6 Notions introductives d'algèbre homologique

Le problème est qu'il existe des espaces assez différents au niveau du type d'homotopie et qui auront des groupes fondamentaux identiques. L'algèbre homologique permet d'associer des homotopies entre homotopies et prendre en compte des paramètres de degré supérieur que le groupe fondamental ne voit pas.

4.6.1 Complexes associés à un espace topologique

Soit R un anneau commutatif. Pour une suite exacte donnée, l'image est facile à construire, le noyau facile à tester ; l'égalité entre les deux revient à construire les solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$. L'algèbre homologique va permettre de quantifier la connaissance de ces solutions.

On rappelle qu'un groupa abélien correspond exactement à la notion de $\mathbb{Z}$-module.

Un *complexe de R-module* est une suite de R-modules :

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} \ldots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où les d_i indexés par $\mathbb{N}$ sont des morphismes de modules tels que $d_i d_{i+1}$, soit $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$. On note (C, d) (parfois, par convention, on utilise (M_0,d_0) et l'on indexe la chaîne par $\mathbb{Z}$).

On définit pour $n = i$ l'*espace des cycles* $Z_n(C,d) = Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ et on appelle les *bords* $B_n(M_0, d_0) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. On a $B_n \subseteq Z_n$ et on appelle *homologie* de (C,d) les quotients $H_n = H_n(C,d) = Z_n/B_n$, le *n-ième groupe d'homologie*. On appelle d en général la *différentielle*.

On dit que le complexe est *exact* en C_n si et seulement si $H_n = 0$.

On dit que (C,d) est *exact*, ou *acyclique*, si $H_n = 0$ pour tout n, c'est-à-dire s'il est exact en chacun de ses termes.

Un *morphisme de complexes* avec la définition précédente, noté $f : (C,d) \longrightarrow (C',d')$, est une collection de morphismes $f_i : C_i \longrightarrow C'_i$ qui commute avec la différentielle :

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ C'_i \arrow[r, "d'_i"'] & C'_{i-1} \end{tikzcd}$$

commutatif. Un tel morphisme induit $[f_i] : H_i \longrightarrow H'_i$.

On dit que le morphisme de complexe de modules f est un *quasi-isomorphisme* si les $[f_i]$ sont des isomorphismes.

4.6.2 Homologie simpliciale

4.6.2.1 Δ-complexe

On utilise la notion de Simplexe, qui permet de former de manière combinatoire des espaces topologiques.

Un « simplexe » qui n'a pas la bonne orientation, n'en est pas un.

Définition. ***(Δ-complexe)***

Une structure de Δ-*complexe* sur X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$, d'applications continues $\sigma_\alpha : \Delta_{n_\alpha} \longrightarrow X$, $\alpha \in \mathcal{A}$, tels que :

1. $\sigma_{\alpha|\mathring{\Delta}_{n_\alpha}}$ soit injective,
2. $\forall x\ \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad x \in \mathrm{Im}(\sigma_\alpha)$,
3. $\forall i\ \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \sigma_{\alpha|\partial_i \Delta_{n_\alpha}} = \sigma_\beta$ pour un certain $\beta \in \mathcal{A}$,
4. $A \subseteq X$ est ouvert ssi $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ sont tous ouverts, autrement dit, la topologie sur X est la topologie finale associée à $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

$\mathcal{A}$ est un ensemble d'indices.

On dit : e_{n_α} est un simplexe dans E si on le plonge naturellement dans un espace E.

Fait

La quatrième condition est automatiquement vérifiée dans le cas d'une famille $\mathcal{A}$ finie.

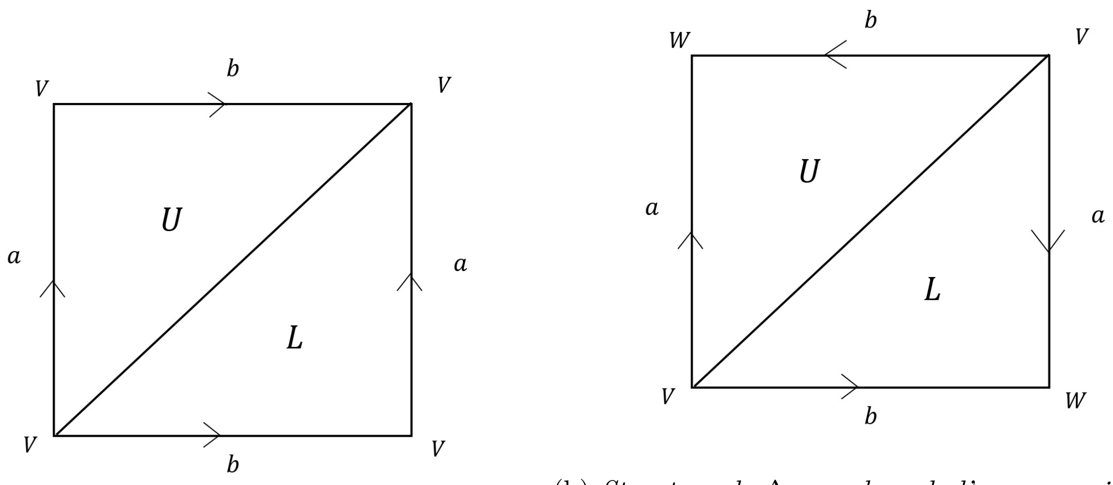
Exemples. ***(Δ-complexe)***

1. La sphère S^1 est un Δ-complexe : elle est composée d'un 0-simplexe, un point, et d'un 1-simplexe, le segment, dont les deux extrémités sont jointes sur ce point.

2. Le tore admet une structure de Δ-complexe, composée d'un 0-simplexe, de 3 1-simplexes et de 2 2-simplexes.

   En effet, il suffit de recoller deux triangles égaux sur leurs hypoténuses respectives, et l'on obtient un carré. Il suffit enfin de prendre les segments des côtés, qui vont être deux à deux égaux, et la diagonale pour 1-complexes, et l'on peut faire le même artifice de recollement d'un carré que pour la structure de CW-complexe du tore.

3. L'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ est un Δ-complexe *(voir le schéma ci-dessous)*.



(a) *Structure de Δ-complexe du tore usuel.* —

(b) *Structure de Δ-complexe de l'espace projectif de dimension 2.* —

FIGURE 4.6.1 : *Exemples de Δ-complexes classiques.* —

Propriété. ***(Lien CW-complexe et Δ-complexe)***

Tout Δ-complexe est en particulier un CW-complexe.

Remarque importante. Tout ce dont on va parler ne dépend pas vraiment des σ_α, mais seulement de leurs images + des informations combinatoires concernant la position des sommets + l'ordre des sommets/l'orientation des arêtes.

Définition. ***(Complexe de chaîne simplicial)***

Étant donnée une structure de Δ-complexe sur X, on définit un *complexe de chaînes* :

$$C_n^\Delta(X) = \{ \sum_{\text{finies}} n_i \underbrace{e_n^\alpha}_{=\sigma_\alpha(\Delta_n),\, \alpha \in \mathcal{A},\ \text{tel que } n_\alpha = n} \mid n_i \in \mathbb{Z}\},$$

et on définit la différentielle sur ce simplexe de chaînes δ_n par :

$$\partial_n\sigma(\Delta_n) = \sum_i (-1)^n \sigma([V_0,..., \hat{V_i}, ..., V_n].$$

Exemples. ***(Complexes de chaîne, différentielles)***

1. On considère le 1-simplexe (segment) de sommets V_0,V_1, orienté de V_0 à V_1. Sa différentielle est $[V_1] - [V_0]$.
2. On considère le 2-simplexe (triangle) de sommets V_0,V_1,V_2, orienté de V_0 à V_1, de V_1 à V_2 et de V_0 à V_2. Alors sa différentielle s'exprime : $[V_0V_1] + [V_1V_2] - [V_0V_2]$.

Lemme

C'est bien un complexe de modules, *i.e.* $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

▷ Soit $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$. Alors $\partial_n(\sigma) = \sum_i(-1)^i\sigma([V_0,...,\hat{V_i},...,V_n])$, puis $\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{i,j}(-1)^i(-1)^j\sigma([V_0,...,\hat{V_i},...,\hat{V_j}, ...,V_n])$. ■

VOC On appelle et l'on note H_n^Δ le n-ième groupe d'homologie simpliciale de (X, Δ), le n-ième groupe d'homologie de (X, Δ).

Exemples. ***(Groupes d'homologie simpliciaux)***

1. Dans le premier cas, la différentielle vaut $b - a + d - c + f - d$.
2. Dans le deuxième cas, la différentielle vaut $[ab] + [bc] + [cd] + [de] + [ea] = 0$.
3. La concaténation cyclique de trois 1-simplexe ne donne pas un 2 simplexe, faute d'orientation. L'alternance dans la somme de la différentielle permet de rectifier cette construction.
   Plus explicitement, dans le troisième cas présenté, les 1-cycles sont les cycles dans X. La différentielle vaut $[ab] + [bc] + [ca] = [ab] + [bc] - [ac]$. On remarque que $[ab]$ correspond au 1-simplexe de sommets a,b orienté de a à b, et $[ba]$ au 1-simplexe d'orientation opposée.
   Généralement, en homologie singulière, la plaie est le choix des signes...

Exemples. ***(Toy-models : homologie de la sphère, du tore et du plan projectif)***

1. *(Homologie de la sphère)* Prenons la sphère de sommet V selon le 1-simplexe a, orientée dans le sens anti-horaire. Alors $\partial(a) = [V]-[V] = 0$. On a $C_0^\Delta = \mathbb{Z}$, $C_1^\Delta = \mathbb{Z}$, d'où la chaîne $\dots 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0}\longrightarrow 0$. Ainsi, $H_0^\Delta = \mathbb{Z} = H_1^\Delta$.
2. *(Homologie du tore)* Dans le cas du tore (on reprend les notations de la figure précédente), $\partial_1(a) = [U]-[U] = 0$, $\partial_1(b) = 0$, puis $\partial_2(U) = \partial_2(V) = a+b-c$. On en

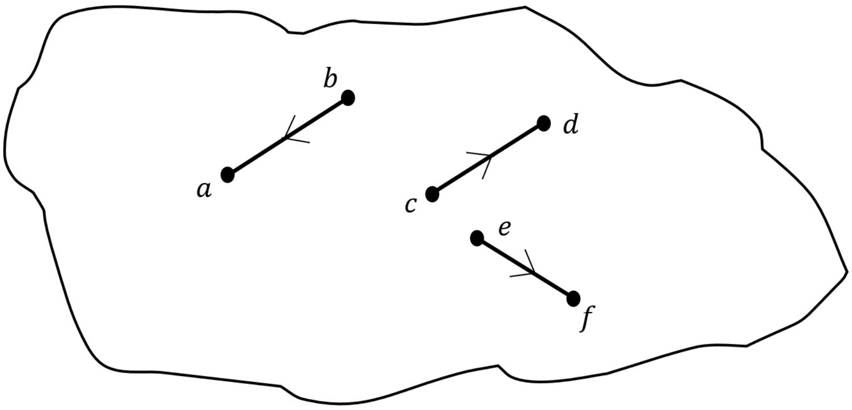


Figure 4.6.2 : *Différentielle simpliciale sur trois branches.* — Un premier exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

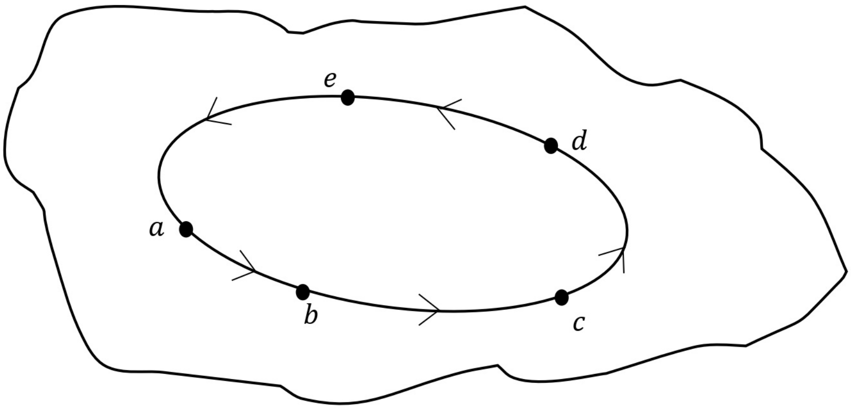


Figure 4.6.3 : *Différentielle simpliciale sur le pentagone.* — Un deuxième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

déduit la chaîne $\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$. Ainsi, $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}^2$ et $H_2 = \mathbb{Z}$.

3. *(Homologie du ruban de Möbius)*

4. *(Homologie du plan projectif)* Dans le cas du plan projectif (on reprend les notations de la figure précédente), $\partial_1(a) = [W] - [V] = \partial_1(b)$, $\partial_1(c) = 0$, puis $\partial_2(U) = c + b - a$ et $\partial_2(L) = c + a - b$, ces deux derniers étant linéaires indépendants. D'où la chaîne $0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} 0$. Ainsi $\mathrm{Im}(\partial_1) = \langle [W] - [V] \rangle$, $\mathrm{Ker}(\partial_2) = 0 = \mathrm{Im}(0)$. Ainsi $H_2 = 0$. De plus, $\mathrm{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}^2 = \langle c, a - b + c \rangle$ et $\mathrm{Im}(\partial_2) = 2c$ d'où $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est le premier exemple de groupe d'homologie qui n'est pas un groupe libre. D'ailleurs, $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

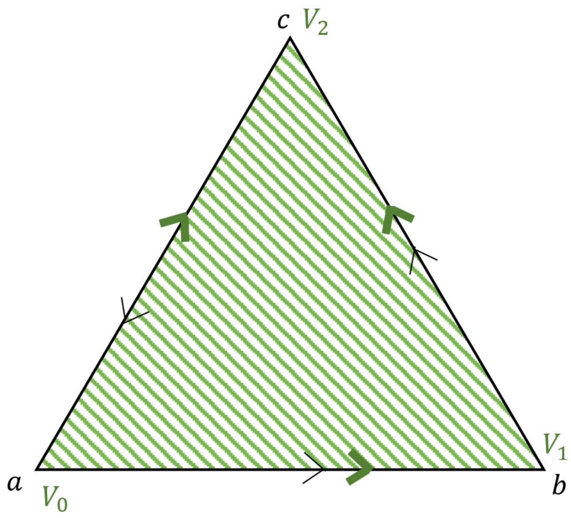


FIGURE 4.6.4 : *Différentielle simpliciale sur le triangle.* —
Un troisième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

4.6.2.2 Complexes simpliciaux

On généralise les Δ-complexes en ne prenant plus, plus que des simplexes standards.

Définition. ***(Complexe simpliciel)***

Un *complexe simpliciel* K de $\mathbb{R}^N$ est une collection de simplexes dans $\mathbb{R}^N$ tel que toute face de K est aussi dans K et l'intersection de deux simplexes est une face de chacun d'eux.

Propriété. ***(Lien Δ-complexe et complexe simplicial)***

Tout Δ-complexe est en particulier un complexe simplicial. Réciproquement, tout complexe simplicial est homéomorphe à un Δ-complexe.

▷ Il s'agit de trianguler des polygones, tétraédriser des polyèdres, etc. On utilise ensuite que tous les convexes compacts sont homéomorphes dans $\mathbb{R}^N$. ■

Définition. ***(Structure de complexe sur un complexe simpliciel)***

Soit X un espace topologique et K un complexe simpliciel. Une structure de K-complexe sur X est la donnée d'application $\Delta \longrightarrow X$, $\Delta \in K$ injectives. Pour tout $x \in X$, il existe $\Delta \in K$ tel que x est dans l'image de Δ.

4.6.3 Vers l'homologie singulière

On définit $C_n(X)$, le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par toutes les applications continues $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$. On définit la différentielle ∂ de la même façon.

Théorème

L'application évidente

$$(C^\Delta(X), \partial) \longrightarrow (C(X), \partial)$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce théorème, dont l'application calculatoire est éminemment intéressante, ne connaît pas de preuve élémentaire.

Chapitre 5

Homologie

Résumé

En mathématiques, l'homologie est une manière générale d'associer une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets mathématiques tels que des espaces topologiques. Les groupes d'homologie ont été définis à l'origine dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique, mais c'est chez nous qu'il convient le mieux de l'introduire. La motivation initiale pour définir les groupes d'homologie était l'observation que deux formes peuvent être distinguées en examinant leurs trous. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est solide et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un trou bidimensionnel alors que le cercle renferme un trou unidimensionnel. Cependant, étant donné qu'un trou n'est « pas là », définir un trou et distinguer différents types de trous n'est pas évident. L'homologie était à l'origine une méthode mathématique rigoureuse pour définir et classer les trous dans une variété. Sommairement, un cycle est dans ce formalisme une sous-variété fermée, une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une classe d'homologie, qui représente un trou, est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un trou, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle, mais qui « n'est pas là ». Il existe de nombreuses théories d'homologie. Un type particulier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées. Lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique, à l'instar des espaces topologiques, le n-ième groupe d'homologie représente le comportement dans la dimension n. La plupart des groupes d'homologie ou des modules peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective abstraite, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée.

5.1 Idée

L'homologie quantifie l'inexactitude des suites de morphismes.

Exercice 1

1. Soit G un groupe de Lie. Notons Δ la projection diagonale $G \times G$, $x \mapsto (x,x)$. Montrer que l'on peut compléter la suite

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{?} ? \longrightarrow 0$$

de sorte qu'elle soit exacte scindée.

2. Est-ce vrai pour un groupe topologique en général ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. Le problème revient à trouver un automorphisme (difféomorphique) de $G \times G$ tel que pour un certain $x_0 \in G$, on ait $(x,x_0) = (x,x)$ pour tout $x \in G$. On pose $(x,y) \mapsto (x,x+y)$ et $x_0 = 0$.
2. Non. On peut considérer $G = S^2$.

5.2 Homologie simpliciale

On a développé en détail cette théorie simplifiée de l'Homologie singulière dans l'introduction à l'homologie du chapitre Topologie algébrique élémentaire.

On aura l'occasion de préciser en quoi elle est un cas particulier de l'homologie générale des espaces topologiques, dite homologie singulière, après l'étude de l'homologie cellulaire qui en est elle-même un cas particulier.

5.3 Homologie singulière

5.3.1 Groupes d'homologie

Mnémonik : les groupes d'homotopie sont faciles à introduire, les groupes d'homologie sont faciles à calculer. Personne n'est parfait...

5.3.1.1 Définition de l'homologie singulière

L'homologie singulière est l'*homologie générale des espaces topologiques*. De même que l'homotopie au sens du groupe fondamental, elle est définie sans aucune hypothèse sur l'espace, en particulier, on n'a pas besoin de prendre un espace séparé. Cela dit, on étudiera en premier lieu la topologie des variétés qui sont des espaces séparés, à base dénombrable de voisinages, localement compacts et localement connexes par arcs.

$\longrightarrow$ *Notation.* Soit k un entier naturel. On note T^k le k-simplexe standard, notion introduite dans la section sur les SIMPLEXES de la TOPOLOGIE GÉNÉRALE. Dans ce contexte, on note souvent $(v_0,\ldots,v_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Définition. ***(Simplexe singulier)***

Soit k un entier naturel. Soit $\sigma : T^k \to X$ une application continue, où X est un espace topologique. On dit que c'est un *k-simplexe singulier* de X.

VOC Le terme *singulier* marque le fait que, contrairement à l'homologie simpliciale, on n'a pas besoin que le plongement de T^k dans X ait aucune régularité : il peut être non injectif, avoir des singularités, en un mot, il est quelconque.

Heuristique

Si $k = 2$, on a affaire à une *quasi-triangulation.*

Définition. ***(Chaîne singulière dans un espace)***

Soit k un entier naturel. Une *k-chaîne singulière* dans un espace topologique X est une somme finie formelle

$$n_1\sigma_1 + \ldots + n_m\sigma_m$$

où $m \in \mathbb{N}$, $n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ sont des k-simplexes singuliers de X. L'ensemble des k-chaînes singulières de X forme donc un groupe abélien libre de base X^{T^k}, que l'on peut aussi voir comme un $\mathbb{Z}$-module, et que l'on note $C_k(X)$.

Définition-propriété. ***(Complexe de chaînes singulières)***

Soit X un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de X est le complexe $\mathcal{C}(X)$:

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k(X)$ est le groupe des k-chaînes singulières de X et pour tout σ i-simplexe singulier de X, $i \in \mathbb{N}$,

$$\partial_i(\sigma) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \sigma \circ \Delta_{(v_0,\ldots,\hat{v_j},\ldots,v_i)}$$

où $\Delta_{(v_0,\ldots,\hat{v_j},\ldots,v_i)}$ décrit un plongement affine de $T^{i-1} \to T^i$ en omettant le sommet v_j. Le morphisme *différentielle* ou *bord* ∂_i est alors définie sur tout $C_i(X)$ par linéarité[a]. On note ∂ ou ∂^X la donnée des $(\partial_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note $Z_k(X) = \begin{cases} \mathrm{Ker}(\partial_k) \text{ si } k \geqslant 1 \\ C_0(X) \text{ sinon}^b \end{cases}$ le k-ième groupe abélien des cycles de ce complexe dit *k-cyles* de X, $B_k(X) = \mathrm{Im}(\partial_{k+1})$ le k-ième groupe abélien des bords de ce complexe *k-bords* ou *k-limites* de X et $H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$ le k-ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle k-ième *groupe d'homologie (singulière) de X*. C'est un quotient d'un sous-groupe de $C_k(X)$. Bien sûr, $\mathcal{C}(X)$ est exact en $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si $H_k(X) = 0$.
Deux cycles, qui sont des chaînes singulières, sont *homologues* si leur différence est un bord. Un cycle est *homologue à zéro* si c'est un bord.

[a] Dans toute la suite, on utilisera librement que, tous les objets en jeu étant encore des sous-groupes (noyau, image, quotients, etc.), il suffit de vérifier les inclusions sur une famille génératrice, à savoir les simplexes singuliers qui engendrent les chaînes singulières.

[b] Ce qui revient à compléter le complexe à droite par $C_0(X) \xrightarrow{\partial_0=0} 0$, procédé classique en homologie lorsqu'on a affaire à un complexe arrêté.

▷ Pour affirmer que $\mathcal{C}(X)$ est un complexe, ce qui permet la construction des groupes d'homologie, puisqu'il faut avoir $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ pour parler du quotient, il faut vérifier que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ pour tout entier $i \geqslant 0$. C'est un calcul classique de différentielle par somme alternée. ■

Remarques.

1. L'image d'un simplexe standard de X est toujours incluse dans l'une des composantes connexes de X. C'est ce fait qui permet de voir le complexe de chaînes de X comme une somme de complexes sur chaque composante connexe, ce qui permet grosso modo de se ramener au cas X connexe.
2. Le groupe des 0-chaînes singulières $C_0(X)$ est donc le groupe abélien libre engendré par les points de X. On l'appelle parfois *groupe des diviseurs de X*. Par définition, tous les 0-simplexes singuliers de X, *i.e.* tous les points de X, sont des 0-cycles. Un 0-simplexe singulier n'est jamais un 0-bord. En effet, une 0-chaîne singulière est un 0-bord si et seulement si on peut l'écrire comme l'a différence de deux points dans la même composante connexe *(voir le calcul de l'homologie en degré nul)*.
3. L'ensemble des 1-simplexes singuliers peut-être vu sans problème comme l'ensemble des chemins (continus) $\gamma : [0,1] \to X$ grâce à l'identification $[v_0,v_1] \simeq [0,1]$. C'est un 1-cycle si et seulement si γ est un lacet (continu) de X, car $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$. Il n'existe pas de caractérisation évidente des 1-bords parmi les 1-simplexes singuliers, mais remarquons qu'un chemin constant dans X en $c_0 \in X$ est toujours un bord : il suffit de considérer la 2-chaîne singulière constituée seulement du 2-simplexe singulier constant en c_0 *(voir les lemmes du théorème d'Hurewicz)*. On dit par extension que chemins dans X sont *homologues* si leur différence en tant que chaînes est un 1-bord. En particulier, on dit qu'un chemin est *homologue à zéro* si elle est homologue à un chemin constant, lui-même homologue à 0. Une condition suffisante est qu'il

soit contractile, *i.e.* homotopie à un chemin constant, car on verra que l'homotopie entraîne l'homologie.

4. Le groupe $C_2(X)$ est engendré par les 2-simplexes singuliers de X qui sont des applications définies sur des triangles.

5.3.1.2 Homologie singulière en basses dimensions

Lemme. ***(Homologie d'une décomposition en composantes connexes)***

Soit X un espace topologique. Soit $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ l'ensemble de ses composantes connexes. Alors on a un isomorphisme de $H_n(X)$ sur $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} H_n(X_\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisqu'un simplexe standard a toujours une image connexe par arcs donc connexe, $C_n(X)$ se décompose comme la somme directe des sous-groupes $C_n(X_\alpha)$ en séparant la base X^{T^k} selon la composante dans laquelle se trouve l'image de chaque simplexe singulier. Il est évident par sa définition que la différentielle préserve cette décomposition, autrement dit que $\partial_{n|C_n(X_\alpha)}$ est bien définie et à valeurs dans $C_{n-1}(X_\alpha)$, puis alors que les bords et les limites se scindent également, et donc que les groupes d'homologies se décomposent : $H_n(X) \simeq \bigoplus\limits_\alpha Z_n(X_\alpha)/\bigoplus\limits_\alpha B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus\limits_\alpha Z_n(X_\alpha)/B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus\limits_\alpha H_n(X_\alpha)$ en remarquant que l'ensemble des simplexes singuliers de X_α est exactement l'ensemble des simplexes singuliers de X à valeurs dans X_α. Dans le cas $n = 0$, il y a encore moins à faire puisque les 0-cycles sont tous les points de X. $\blacksquare$

Propriété. ***(Calcul de l'homologie au rang nul)***

Si X est un espace topologique connexe par arcs non vide, $H_0(X) = \mathbb{Z}$.
Plus généralement, si X est un espace non vide quelconque,

$$H_0(X) = \mathbb{Z}^c$$

où c est le nombre de composantes connexes par arcs de X. Autrement dit, c'est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes de X, ensemble de cardinal c a priori quelconque.

$\triangleright$ Par définition, $H_0(X) = C_0(X)/\mathrm{Im}(\partial_1)$. Posons $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ le degré comme on le définira systématiquement ci-après, défini par $\varepsilon(\sigma) = 1$ sur toute chaîne singulière. Puisque X est non vide, ε est surjective. Montrons que $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathrm{Im}(\partial_1)$ pour conclure par théorème d'isomorphisme. Or si l'on a une application $\sigma : T^1 = [v,v'] \to X$, $\partial_1(\sigma) = [v_0] - [v_1]$ d'où $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = 1 - 1 = 0$. Réciproquement, soit $x = \sum\limits_{i=1}^n n_i\sigma_i \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. On a donc $\sum\limits_{i=1}^n n_i = 0$. Notons que les σ_i sont des 0-simplexes, *i.e.* des points de X. Pour tout i, soit $\tau_i : [0,1] \to X$ un chemin continu de x_0 à $\sigma_i(v_0)$ par connexité pour x_0 fixé définitivement dans $X \neq \emptyset$. Soit σ_0 le 0-simplexe standard d'image x_0. On peut voir τ_i comme un 1-simplexe standard qui n'est autre qu'une application continue $[v_0,v_1] \to X$. Alors $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Ainsi $\partial(x) = \sum_i n_i\sigma_i - \underbrace{\sum_i n_i\sigma_0}_{=0.\sigma_0} = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(\partial_1)$.

On généralise en utilisant le lemme précédent permettant de casser l'homologie sur les composantes connexes par arcs. ■

Exemples. ***(Homologies triviales)***

1. *(Homologie singulière du vide)* $H_n(\emptyset) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset^{T^k} = \emptyset$, $C_n(\emptyset) = \langle\emptyset\rangle = 0$ à tout rang.
2. *(Groupes d'homologie singulière d'un point)* Soit $X = \{\star\}$ le singleton standard de la catégorie des espaces topologiques. Alors $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geqslant 1. \end{cases}$
   Si $n = 0$, $H_n(X) = \mathbb{Z}$, car un point est connexe par arcs. Soit $n \geqslant 1$. Notons σ_n l'unique application de $\{\star\}^{T^n}$. Alors $\partial_n(\sigma_n) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}\sigma_{n-1}$. Par suite, $\mathrm{Im}(\partial_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $\mathrm{Ker}(\partial_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ En particulier, $H_n(\{\star\}) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = 0 = 0/0 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ dans tous les cas.
3. *(Groupes d'homologie d'un discret)* Soit X un espace topologique discret, ou plus généralement un espace totalement discontinu, en particulier un espace fini séparé. Alors $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z}^{\mathrm{card}(X)} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geqslant 1. \end{cases}$
   En conjuguant le lemme précédent et le calul des groupes d'homologie ponctuels.

On peut d'ores et déja aller plus loin et élaborer un premier lien, assez fondamental, entre homologie et homotopie.

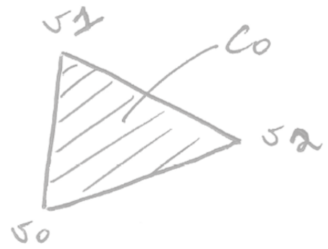
Théorème. ***(Théorème d'Hurewicz)***

Soit X un espace topologique connexe par arcs non vide. Soit $x_0 \in X$. Alors le *morphisme de Hurewicz* :

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto \overline{\gamma} \end{aligned}$$

envoyant la classe d'homotopie d'un lacet basé en x_0 sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant est bien défini, un morphisme de groupes est induit un isomorphisme entre $H_1(X)$ et l'abélianisé $\pi_1(X,x_0)^{ab}$ du groupe fondamental de X, autrement dit, $H_1(X) = \pi_1(X)/D(\pi_1(X))$.

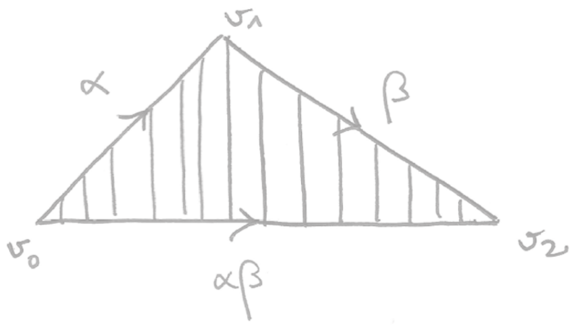
▷ On identifie librement les chemins dans X aux 1-simplexes singuliers. On rappelle qu'un chemin constant est toujours homologue à zéro, grâce à l'illustration suivante.



Lemme

Soient α,β deux chemins composables dans X, *i.e.* tels que $\beta(0) = \alpha(1)$. On rappelle que $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta$ désigne alors le chemin parcourant α jusqu'au temps moitié puis β dans le temps restant. Alors il existe une 2-chaîne singulière $c \in C_2(X)$ telle que $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$.

▷ En effet, considérons une application de Δ^2 dans X donnée par α sur $[v_0,v_1]$, par β sur $[v_1,v_2]$ et $\alpha\beta$ sur $[v_0,v_2]$, les chemins pris dans cet ordre. À l'intérieur du 2-simplexe, on la définit constante sur chaque segment parallèle à $[v_1,\frac{v_0+v_2}{2}]$, étant donné que ses extrémités ont même image par construction. Alors ce simplexe c est bien une application continue et immédiatement $\partial c = \beta - \alpha\beta + \alpha$, ce qu'il fallait montrer. ■

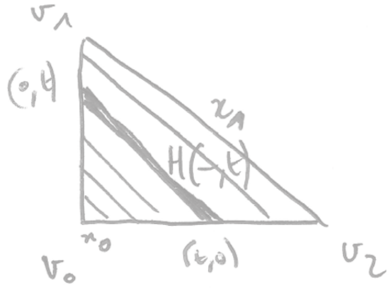


Enfin,

Lemme

Enfin, soient α,β deux chemins homotopes par $H : [0,1]^2 \to X$, avec donc $H(0,-) = \alpha$, $H(1,-) = \beta$, $H(-,0) = x_0$ et $H(-,1) = x_1$ les extrémités de ces chemins. Alors il existe une 2-chaîne singulière c telle que $\alpha = \beta + \partial c$.

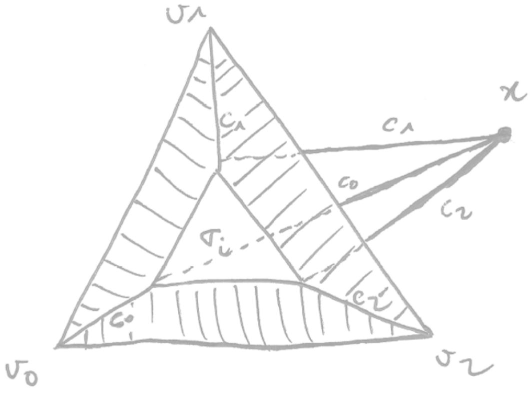
▷ Considérons σ définie sur le triangle T^2 par $H(-,t)$ sur le segment $([t,0],[0,t])$ et a fortiori constante en x_1 sur $[v_1,v_2]$ et vaut x_0 en v_0. Alors $\partial\sigma = \beta + cste_{x_1} - \alpha$ où $cste_{x_1} = \partial\tau$ car un chemin constant est toujours homologue à zéro, d'où $\beta - \alpha = \partial(\sigma - \tau)$. Ainsi $\alpha - \beta$ est un bord en prenant $c = \sigma - \tau$. ■



Posons donc $[\gamma] \mapsto \overline{\gamma}$ comme dans l'énoncé. Par le lemme précédent, cette application est bien définie, car deux chemins homotopes sont dans la même classe d'homologie, puisqu'ils diffèrent à un bord près et $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$. D'après le lemme surprécédent, c'est même un morphisme de groupes.

Concluons. Montrons que φ est surjectif. Soit $n_1\sigma_1 + ... + n_k\sigma_k$ un 1-cycle singulier quelconque, et montrons qu'il est homologue à un lacet. Quitte à multiplier chacun des termes et comme $-[\sigma]$ est homologue à $[\sigma^{-1}]$, on peut supposer que $n_i = 1$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Comme par hypothèse $\partial(\sigma_1 + ... + \sigma_k) = 0$, si σ_i n'est pas un lacet, il existe j tel que σ_i et σ_j soient composables, et comme $\sigma_i + \sigma_j$ est homologue à $\overline{\sigma_i\sigma_j}$, par récurrence immédiate, on peut prendre tous les σ_i des lacets ; enfin, si l'on fixe $x \in X$, pour tout i, soit α_i un chemin dans X de x à l'origine de σ_i ; $\overline{\alpha_i\sigma_i\overline{\alpha_i}}$ étant homologue à α_i, on peut supposer que σ_i est un lacet en x. Alors à homologie près $\sigma_1 + ... + \sigma_k$ est un lacet en x, évidemment maintenant.

Pour appliquer le théorème d'isomorphisme, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = D(\pi_1(X,x_0))$. Puisque $H_1(X)$ est abélien, tout commutateur est dans le noyau de φ. Réciproquement, soit α un lacet de X tel que $\overline{\alpha}$ soit nul, *i.e.* homologue à 0. Soit également $\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i$ un 2-cycle singulier tel que $\partial(\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i) = \alpha$. Chaque σ_i est homotope à un 2-simplexe singulier dont les trois sommets sont égaux à $x \in X$ fixé pour tous. En effet, en notant λ_t l'homotopie de rapport t et de centre le barycentre de Δ_2, on considère c_0,c_1,c_2 les chemins joignant x à $\sigma_i(v_0),\sigma_i(v_1),\sigma_i(v_2)$. Pour $s \in [0,1]$, considérons l'application continue h_s de Δ_2 dans X valant $\sigma_i \circ \lambda_{\frac{1+s}{2}}^{-1}$ sur $\lambda_{\frac{1+s}{2}}(\Delta_2)$, $c_j(t)$ sur $[\lambda_{\frac{1+s}{2}}(e_j),e_j]$ pour $j = 0,1,2$ et sur chaque composante connexe C du complémentaire dans Δ_2 de la réunion de ces ensembles, constant sur les segments perpendiculaires aux côtés de $\Delta_2 \subseteq \overline{C}$.



En particulier, σ_i est homologue à un tel simplexe singulier, et l'on peut supposer que les sommets des σ_i sont égaux à x. On suppose également que tous les $n_i = 1$ comme précédemment. Notons $\sigma_{i,j}$ la j-ième face propre de σ_i, de sorte que $\partial\sigma_i = \sigma_{i,0} - \sigma_{i,1} + \sigma_{i,2}$. Comme $\alpha = \sum_{i,j}(-1)^j n_i \sigma_{i,j}$, il est possible de regrouper les $\sigma_{i,j}$, sauf un, par paires pour lesquelles les deux coefficients $(-1)^j n_i$ valent ± 1, et le $\sigma_{i,j}$ restant vaut alors α. Notons que chaque $\sigma_{i,j}$ est un lacet en x. Notons $\tilde{}$ l'image dans le groupe dérivé. On a $\tilde{\alpha} = \sum_{i,j}(-1)^j n_i \tilde{\sigma_{i,j}}$, mais $\sigma_{i,0}\sigma i,1^{-1}\sigma_{i,2}$ est homotope à zéro, car il borde σ_i, d'où $\tilde{\alpha} = \prod_i n_i(\tilde{\sigma_{i,0}}\tilde{\sigma_{i,1}}^{-1}\tilde{\sigma_{i,2}} = 1$. ∎

Corollaire

Soit X un espace topologique connexe par arcs, non vide et de groupe fondamental abélien. Alors $\pi_1(X) = H_1(X)$.

Exercice 2 *(Naturalité du morphisme de Hurewicz)*

Montrer que si X,Y sont deux espaces topologiques pointés en x et y et $f : X \to Y$ une application continue pointée, alors en notant φ_X,φ_Y respectivement les morphismes de Hurewicz de X et Y, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f^*"'] & H_1(X) \arrow[d, "f_{*,1}"] \\
\pi_1(Y,x) \arrow[r, "\varphi_Y"'] & H_1(Y)
\end{tikzcd}$$

commute, en notant f^* l'application induite sur les groupes fondamentaux et $f_{*,1}$ l'application induite en homologie au degré 1.

Exemples. ***(Calcul des homologies en basses dimensions)***

1. *(Premiers groupes d'homologie du cercle)* On retrouve $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$ et $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
2. *(Premiers groupes d'homologie des sphères)* On a $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_1(S^n) = 0$ pour $n \geqslant 2$ et pour $n = 0$, $H_0(S^0) = H_1(S^0) = 0$.
3. *(Premiers groupes d'homologie du ruban de Möbius)* De même, si $\mathbb{RM}$ est le ruban de Möbius, $H_0(\mathbb{RM}) = H_1(\mathbb{RM}) = \mathbb{Z}$.
4. *(Premiers groupes d'homologie du tore)* De même, $H_0(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}$ et $H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Plus généralement, si G est un groupe topologique connexe par arcs, son groupe fondamental est abélien, donc $H_0(G) = \mathbb{Z}$ et $H_1(G) = \pi_1(X)$.
6. *(Premiers groupes d'homologie des espaces projectifs)* En outre, $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. De même, $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

7. Si X est un bouquet de $n \in \mathbb{N}$ cercles, $H_0(X) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1(X) = F_n$ donc $H_1(X) = \mathbb{Z}^n$.

5.3.1.3 Applications induites en homologie

Fait. *(Applications induites dans le complexe de chaînes singulières)*

Toute application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme $f_\# : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ « en homologie singulière donnée pour σ simplexe singulière de X, par $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$.

Il faut vérifier que la collection de morphismes $f_\#$ est bien un morphisme de complexes, *i.e.* qu'on ait la commutation du diagramme rectangulaire infini suivant :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\#,k+1}"'] & C_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\#,k}"'] & \dots \arrow[r] \arrow[d, "\dots"'] & C_0(X) \arrow[d, "f_{\#,0}"'] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(Y) \arrow[r] & C_k(Y) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C_0(Y).
\end{tikzcd}$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{*,k} \circ \partial_{k+1} = \partial'_{k+1} \circ f_{*,k+1}$: il suffit de l'écrire, et l'on trouve que ces deux quantités sont égales, en tout $\sigma \in C_{k+1}(X)$, à $\sum_{j=0}^{k} f \circ \sigma \circ \Delta_{v_0,\dots,\hat{v_j},\dots,v_n}$.

Ce morphisme induit donc pour tout entier $k \geqslant 0$ un morphisme $f_{*,k} : H_k(X) \to H_k(Y)$ dont on note la donnée $f_* = (f_{*,k})_{k\in\mathbb{N}}$ dite *application induite en homologie (singulière)*.

En effet, ce morphisme passe donc au quotient simultanément : si $\sigma \in B_k(X)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\sigma = \partial_{k+1}(\sigma_0)$ où $\sigma_0 \in C_{k+1}(X)$. Alors avec les notations non indiciées, menteuses mais pas tant que ça, $\partial' f_*(\sigma) = f_*\partial(\sigma) = f_*(0) = 0_{Z_k(Y)}$, soit $f_*(\sigma) \in B_k(Y)$.

À partir d'ici, il est conseillé de connaître les bases d'HOMOLOGIE dans les CATÉGORIES ABÉLIENNES.

Propriétés. *(Fonctorialité de l'application induite en homologie singulière)*

Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux applications continues entre trois espaces topologiques.

1. On a $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$, *i.e.* pour tout $k \geqslant 0$, $(g \circ f)_{\#,k} = g_{\#,k} \circ f_{\#,k}$.

2. On a $id_{X\#} = id_{\mathcal{C}(X)}$, *i.e.* pour tout $k \geqslant 0$, $(id_X)_{\#,k} = id_{C_k(X)}$.

De plus :

1. On a $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, *i.e.* pour tout $k \geqslant 0$, $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k}$.
2. Pour tout $k \geqslant 0$, $(id_X)_{*,k} = id_{H_k(X)}$.

▷ Successivement :

1. Par covariance de la post-composition.
2. Immédiat.
3. Corollaire du premier point en passant au quotient.
4. Immédiat. ■

Corollaire. ***(Application induite en homologie par une rétraction)***

Soit $i : A \to X$ un rétract topologique. Alors $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ En effet, s'il existe $r : X \to A$ continue telle que $ri = id_A$, alors $r_* i_* = id_{A*}$ et un morphisme rétractable, même ensemblistement soit dit en passant, est toujours injectif. ■

Corollaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S^n n'est pas un rétract de D^{n+1}.

▷ Il faut connaître l'homologie des sphères, qui vaut $\mathbb{Z}$ au rang n, et celle d'un convexe, qui est contractile, donc est nulle aux rangs non nuls. Si l'on sait ceci, l'implication induite par l'inclusion canonique au rang n est un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans 0, qui ne peut être injectif. ■

Propriété. ***(Propagation de l'homotopie dans le complexe de chaînes singulières)***

Soient $f,g : X \to Y$ deux applications continues entre deux espaces topologiques. Si f et g sont homotopes, alors $f_\#$ et $g_\#$ sont homotopes en tant que morphismes de complexes de chaînes.
En particulier, ils induisent les mêmes morphismes en homologie, *i.e.* $f_* = g_*$.

▷ Il y a quelque chose à faire dans :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "f_{\#,k+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{\#,k+1}"] & C_k(X) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "f_{\#,k}"'] \arrow[d, shift left, "g_{\#,k}"] & \dots \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, "\dots"'] & C_0(X) \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "f_{\#,0}"'] \arrow[d, shift left, "g_{\#,0}"] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(Y) \arrow[r] & C_k(Y) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C_0(Y).
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, il existe une homotopie H de f à g, et en notant $\iota_0 : x \mapsto (x,0)$ et $\iota_1 : x \mapsto (x,1)$ de X dans $X \times I$, on a $f = H \circ \iota_0$ et $g = H \circ \iota_1$. Par fonctorialité, il suffit de constuire une homotopie de morphismes de complexes entre $\iota_{0\#}$ et $\iota_{1\#}$. On cherche donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, des morphismes de groupes $H_k : C_k(X) \to C_{k+1}(X \times [0,1])$ de sorte que $\iota_{0\#,k} - \iota_{1\#,k} = \partial_{k+1}^{X \times I} \circ H_k + H_{k-1} \circ \partial_k^X$.

L'idée est de poser $H_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\sigma \times id) \circ ((a_0,\ldots,a_i,b_i,\ldots,b_k))$ en l'étendant par linéarité, où pour $x_0,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^N$, on note $((x_0,\ldots,x_p))$ l'unique application affine de Δ_p dans $\mathbb{R}^N$ envoyant v_k sur x_k pour $k \in [\![0,p]\!]$. Ce calcul est sans astuce et pas si long. Visuellement, on a décomposé le prisme $\Delta_p \times [0,1]$ en $p+1$ simplexes.

Redémontrons dans ce cas particulier que deux morphismes de complexes de chaînes homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie. Prenons $\sigma = \partial_{k+1}^X(\sigma_0)$. Alors $f_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) - g_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) + h_{k-1}\partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$ où $h_{k-1}\partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$ est nul par structure de complexe et $\partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = 0$ dans $Z_k^Y/\mathrm{Im}(\partial_{k+1}^Y)$, d'où $f_{\#,k}(\sigma) = g_{\#,k}(\sigma) : H_k(X) \to H_k(Y)$. ■

Corollaire. ***(Identification des chaînes singulières homotopes)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\sigma, \sigma' : \Delta_n \longrightarrow X$ sont homotopes, alors $[\sigma]$ et $[\sigma']$ sont égales dans $H_n(X)$, *i.e.* σ et σ' sont homologues en tant que chaînes singulières. Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tous $a_1,\ldots,a_p \in \mathbb{Z}$, si σ_i est un n-simplexe singulier homotope à σ_i' un autre n-simplexe singulier pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, alors $\sum_{i=1}^{p} a_i\sigma_i = \sum_{i=1}^{p} a_i\sigma_i'$.

▷

■

Mnémonik : homotope $\implies$ homologue.

Corollaire. ***(Type d'homotopie et isomorphisme de complexes)***

Deux espaces homotopiquement équivalents $X \cong Y$, en particulier deux espaces homéomorphes, ont des complexes de chaînes singulières isomorphes dans la catégorie homotopique des complexes de chaînes singulières. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$H_k(X) \simeq H_k(Y).$$

Ainsi, l'homologie du complexe de chaînes singulières est un invariant d'homotopie (de la catégorie des) des espaces topologiques.

▷ En effet, soient $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ une paire d'équivalence d'homotopie. On a $f \circ g \cong id_Y$ et $g \circ f \cong id_X$. Par la proposition précédente, $(f \circ g)_{*,k} = f_{*,k} \circ g_{*,k} = id_{H_k(Y)}$ et $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k} = id_{H_k(X)}$, autrement dit $f_{*,k} = g_{*,k}$ sont une paire d'isomorphie de groupes, d'où $H_k(X) \simeq H_k(Y)$. ■

$\longrightarrow$ *Notation.* Dans le cadre de l'homologie singulière, on identifie deux groupes d'homologie isomorphes par un signe =.

Corollaire. ***(Homologie d'un espace contractile)***

Soit X un espace contractile. Alors $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geqslant 1. \end{cases}$

▷ C'est l'homologie singulière d'un point. ■

Cette propriété nous donne envie de définir :

5.3.1.4 Quasi-isomorphie

Définition. ***(Quasi-isomorphisme)***

Un *quasi-isomorphisme* est une application continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques qui induit pour tout $k \in \mathbb{N}$, elle induise un isomorphisme $f_{*,k} : H_k(X) \to H_k(Y)$.

Cette définition ne coïncide qu'en apparence avec celle donnée pour des complexes de chaînes dans les catégories abéliennes. En effet, ici f n'est pas un morphisme de complexes *i.e.* dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ mais un morphisme de $\mathcal{A}$ qui en induit un sur le complexe grâce à la première remarque de cette section, ce qui n'a rien d'automatique en théorie générale de l'homologie.
On rappelle également qu'un *isomorphisme de complexes de chaînes singulières*, *i.e.* la donnée d'isomorphismes réciproques entre les complexes de chaînes singulières à tout degré et commutant avec les différentielles, est un quasi-isomorphisme au sens des complexes de chaînes mais que la réciproque est fausse.

D'après ce qui précède, donc :

Fait. ***(Équivalence d'homotopie $\implies$ quasi-isomorphisme)***

Toute équivalence d'homotopie, en particulier tout homéomorphisme est un quasi-isomorphisme.

C'est le corollaire surprécédent.

Contre-exemple. ***(Équivalences d'homotopie, quasi-isomorphismes, réciproques en homotopie)***

La réciproque est fausse : un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie.

Montrons le fait suivant : soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces connexes par arcs. Alors $f_* : H_0(X) \to H_0(Y)$ est un isomorphisme induit, *i.e.* f est un quasi-isomorphisme. On écrit $H_0(X) = \mathbb{Z}[x]$ où $[x]$ est la classe d'homologie de n'importe quel point vu comme un 1-simplexe standard $\Delta^1 \to X, t \mapsto x$. Alors l'application induite $f_* := f_{*,0}$ envoie $k[x]$ sur $k[f(x)]$. On a aussi $H_0(Y) = \mathbb{Z}[y]$

de même que pour X, et puisque $f(x)$ est également un point de Y, $[f(x)] = [y]$... donc $f(k[x]) = k[y]$. Ainsi, f est « l'identité » si l'on identifie $H_0(X) = H_0(Y) = \mathbb{Z}$, mais il est moins cavalier de simplement dire que f est un isomorphisme de groupes, car elle envoie une base sur une base.

Et même, l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque.

Le contre-exemple précédent convient également d'après la remarque qui suit directement.

De plus, ces deux énoncés étaient équivalents !

Notons P : « un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie » et Q : « l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque ». Il est clair que $Q \implies P$. Réciproquement, soit f un quasi-isomorphisme qui ne soit pas une équivalence d'homotopie. Alors montrons qu'il n'a pas de quasi-isomorphisme réciproque. En effet, si $fg = gf = id$ en homologie, cela signifie que f et g sont équivalences d'homotopie réciproques, en particulier que f est une équivalence d'homotopie. □

Proposition

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Cette assertion sera démontrée dans le cours d'Homotopie. ■

On retrouve donc :

Corollaire

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

Remarque. La réciproque est vraie pour des espaces qui se comportent bien, tels les *CW*-complexes, comme le précise un théorème de Whitehead.

5.3.1.5 Groupes d'homologie réduits

Définition-propriété. ***(Complexe de chaînes singulières augmenté)***

Soit X un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de X est le complexe $\tilde{\mathcal{C}}(X)$ ou encore $\mathcal{C}(X)$:

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k(X)$ est le groupe des k-chaînes singulières de X et ε est la somme des coefficients.

En considérant les groupes d'homologie de ce nouveau complexe de chaînes, on obtient par définition les *groupes d'homologie réduits* $\tilde{H}_k(X)$ de X.

▷ Il est clair que ε est un morphisme de groupes car de type degré. Il suffit de vérifier que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, ce qui est immédiat : si $\sigma = \partial_1(\sigma_0)$, $\sigma = \sigma_0(1) - \sigma_0(0)$ d'où $\varepsilon(\sigma) = 1 - 1 = 0$. ■

Ce formalisme se justifie en fait plus naturellement que celui du complexe non augmenté : l'ensemble des simplexes de degré -1 est vide, donc le groupe abélien libre engendré par leur ensemble est égal à $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$.

Remarque. On a en particulier $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$ si $k \geqslant 1$, mais a priori $\tilde{H}_0(X) \neq H_0(X)$. Ainsi, l'homologie réduite ne concerne que l'homologie en degré nul, qui se restreint aux 0-chaînes de « degré ε » nul, à savoir $\boxed{\tilde{H}_0(X) = \mathrm{Ker}(\varepsilon)/\mathrm{Im}(\partial_1)}$.

Fait. ***(L'homologie réduite est plus petite que l'homologie singulière)***

Pour tout espace topologique X, $\tilde{H}_0(X) \subseteq H_0(X)$.

Tout est en fait réglé par :

Proposition. ***(Lien homologie réduite-homologie singulière)***

Pour tout espace topologique non vide X, $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.
En particulier, $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{nombre de composantes connexes par arcs de } X \text{ - } 1}$.

▷ Technique classique : soit $x_0 \in X$. On la suite exacte courte $0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\tilde{i}} H_0(X) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, puisque $\tilde{i} : \mathrm{Ker}(\partial_0)/\mathrm{Im}(\partial_1) \to C_0(X)/\mathrm{Im}(\partial_1)$ descend injectivement évidemment, $\tilde{\varepsilon}$ est a fortiori surjective évidemment et par construction $\mathrm{Ker}(\tilde{\varepsilon}) = \mathrm{Im}(\tilde{i})$. Elle scinde par $n \mapsto n[x_0]$, $n[x_0]$ n'étant pas un 1-cycle, d'où le résultat. ■

Exemples. ***(Groupes d'homologie réduits triviaux)***

1. Si X est connexe par arcs, $\tilde{H}_0(X) = 0$.
2. *(Homologie réduite du point)* Soit X un espace contractile. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{H}_k(X) = 0$. C'est pour eux que l'on a inventé l'homologie réduite !

5.3.1.6 Groupes d'homologie relatifs

On constate que l'inclusion d'une partie A dans un espace X induit une suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A) \longrightarrow 0$. Elle induit donc une suite exacte en homologie. Ce nouveau complexe singulier prenant en compte l'influence d'une partie choisie est l'homologie de X relative à A.

Soit (X,A) une paire topologique, et notons ι l'inclusion canonique. Il n'est pas difficile de voir que les colonnes de

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & C_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(A) \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r] & C_k(X) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r] & C_0(X)
\end{tikzcd}$$

sont exactes, autrement dit que les morphismes induits par l'inclusion canonique sont injectifs, ce qui est sans détour. En définissant $C_k(X,A) = C_k(X)/C_k(A)$ pour tout $k \geqslant 0$, on peut alors compléter grâce aux projections canoniques $\pi_k : C_k(X) \to C_k(X,A)$ le diagramme précédent en

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & C_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(A) \arrow[d] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & C_0(X) \arrow[d] \\
 & C_{k+1}(X,A) \arrow[d] & C_k(X,A) \arrow[d] & & C_1(X,A) \arrow[d] & C_0(X,A) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

où les colonnes sont encore exactes. De plus, la suite $(C_k(X,A))_{k\in\mathbb{N}}$ est naturellement munie d'une structure de complexe notée $\mathcal{C}(X,A)$ en posant pour différentielle d'ordre $k \in \mathbb{N}$ $\partial_{k\mathcal{C}(X,A)}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$ où σ' est un représentant de la classe σ *(voir la preuve suivante)*, autrement dit en notant π_k^{-1} une section ensembliste de π_k, $\partial_{k\mathcal{C}(X,A)} = \pi_k \circ \partial_{kX} \circ \pi_{k+1}^{-1}$.

Vérifions que l'application bord sur $C(X,A)$ est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour σ,σ' dans $C_{k+1}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, tels que $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$, *i.e.* $\sigma = \sigma' + c$ où $c \in C_{k+1}(A)$, on a $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$. C'est en fait immédiat, car $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$ étant $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$ et alors $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$ où $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$.

D'autre part, montrons que $\pi_{k-1}\partial_{k-1}^X\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X\pi_{k+1}^{-1}$ est nulle. On ne peut dire que $\pi_k^{-1}\pi_k = id_{C_k(X,A)}$, car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute $k+1$-chaîne σ de X, $\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X(\sigma) = \partial_k^X(\sigma) + c$ où $c \in C_k(A)$. En passant la différentielle ∂_{k-1}^X, le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne $\partial_{k-1}^X(c)$ qui est dans $C_{k-1}(A)$, donc est tuée par π_{k-1}.

Ainsi le grand diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[d, "0"] & & 0 \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(A) \arrow[r, "\partial_{k\mathcal{C}(A)}"] \arrow[d, "\iota_{*,k+1}"] & C_k(A) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{*,k}"] & \dots \arrow[r] & C_1(A) \arrow[r, "\partial_{0\mathcal{C}(A)}"] \arrow[d, "\iota_{*,1}"] & C_0(A) \arrow[d, "\iota_{*,0}"] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X) \arrow[r, "\partial_{k\mathcal{C}(X)}"] \arrow[d, "\pi_{k+1}"] & C_k(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_k"] & \dots \arrow[r] & C_1(X) \arrow[r, "\partial_{0\mathcal{C}(X)}"] \arrow[d, "\pi_1"] & C_0(X) \arrow[d, "\pi_0"] \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{k\mathcal{C}(X,A)}"] \arrow[d, "0"] & C_k(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \dots \arrow[r] & C_1(X,A) \arrow[r, "\partial_{0\mathcal{C}(X,A)}"] \arrow[d, "0"] & C_0(X,A) \arrow[d, "0"] \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif, par construction.

▷ Vérifions que l'application bord sur $C(X,A)$ est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour σ,σ' dans $C_{k+1}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, tels que $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$, *i.e.* $\sigma = \sigma' + c$ où $c \in C_{k+1}(A)$, on a $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$. C'est en fait immédiat, car $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$ étant $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$ et alors $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$ où $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$.

D'autre part, montrons que $\pi_{k-1}\partial^X_{k-1}\pi_k^{-1}\pi_k\partial^X_k\pi_{k+1}^{-1}$ est nulle. On ne peut dire que $\pi_k^{-1}\pi_k = id_{C_k(X,A)}$, car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute $k+1$-chaîne σ de X, $\pi_k^{-1}\pi_k\partial^X_k(\sigma) = \partial^X_k(\sigma) + c$ où $c \in C_k(A)$. En passant la différentielle ∂^X_{k-1}, le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne $\partial^X_{k-1}(c)$ qui est dans $C_{k-1}(A)$, donc est tuée par π_{k-1}. ■

Définition-propriété. ***(Groupes d'homologie relatifs)***

Soit (X,A) une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs* de (X,A) sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative* $\mathcal{C}(X,A)$ défini comme dans le laïus précédent. On note $H_k(X,A)$ le *k-ième groupe d'homologie relatif de X par rapport à A.*

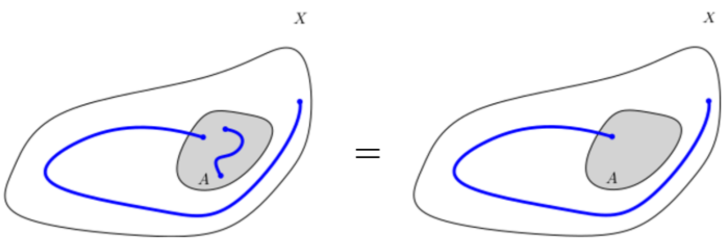


FIGURE 5.3.1 : *Une seule et même 1-chaîne de $\mathcal{C}(X,A)$.* —

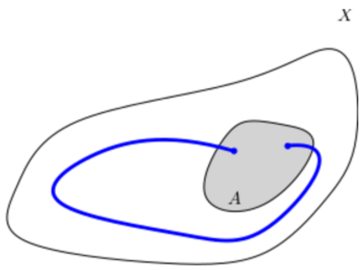


FIGURE 5.3.2 : *Un* 1*-cycle de* $\mathcal{C}(X,A)$*.* —

On peut en même temps appliquer le théorème fondamental de l'homologie qui nous donne la

Propriété. ***(Suite exacte homologique de la paire*** (X,A)***)***

Soit (X,A) une paire topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie, terminée par $H_0(A) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$.

▷ Redémontrons-le pour l'hygiène et exhibons les flèches, ce qui est important.

La discussion faite a donc exhibé un morphisme de complexes de chaînes $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \xrightarrow{i_\#} \mathcal{C}(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow 0$, car les différentielles commutent avec $i_\#$ et π. Les applications $H_k(A) \to H_k(X)$ pour $k \in \mathbb{N}$ ne sont autre que les applications induites en homologie par l'inclusion $i \in \mathbb{N}$. Pour $H_{k+1}(X) \to H_{k+1}(X,A)$, c'est déjà moins évident.

Construisons enfin maintenant le connectant $\delta_{k+1} : H_{k+1}(X,A) \to A)$.

Vérifions maitenant que cette suite est exacte. ■

Exercice 3 *(Propriétés de l'homologie relative)*

Soit (X,A) une paire topologique.

1. *(Homologie relative en degré nul)* Montrer que $H_0(X,A) = 0$ si et seulement si A rencontre toutes les composantes connexes par arcs de X.
2. *(Homologie relative de degré* 1*)* Montrer que $H_1(X,A) = 0$ si et seulement si l'application homologique induite par l'inclusion $H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et toute composante connexe par arcs de X contient au plus une composante connexe par arcs de A.
3. Montrer que l'inclusion canonique est un quasi-isomorphisme si et seulement si l'homologie relative est identiquement nulle.

▷ **Éléments de réponse.**

1.

2.

3. Si c'est le cas, $C_k(A) \simeq C_k(X)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $C_k(X,A) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en particulier $H_k(X,A) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Réciproquement,

Si (X,A) est un paire topologique, en général, $H_k(A)$ n'est pas un sous-groupe de X, sauf si (X,A) est un rétract, ce que l'on a déjà vu. Il est donc délirant d'espérer écrire en toute généralité $H_k(X,A) \simeq H_k(X)/H_k(A)$.

L'homologie relative englobe grosso modo l'homologie tout court, par la remarque suivant :

Corollaire. ***(Récupération des groupes réduits par l'homologie relative)***

Considérons X un espace topologique. Soit $x_0 \in X$. Alors

$$H_k(X,x_0) := H_k(X,\{x_0\}) \simeq \tilde{H}_k(X)$$

pour tout $k \geqslant 0$.

▷ En effet, on prend $A = \{x_0\}$ dans la preuve précédente, ce qui donne grâce $H_k(A) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ des suites exactes $H_{k+1}(A) = 0 \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,x_0) \longrightarrow H_k(A) = 0$. Autrement dit, la flèche du milieu est injective et surjective ; c'est un isomorphisme, d'où $H_{k+1}(X) \simeq H_{k+1}(X,x_0)$. Reste à traiter le cas $k = 0$. ■

Remarque importante. On peut même récupérer l'homologie singulière non réduite en considérant $A = \emptyset$. Ainsi, l'homologie relative est le type le plus général d'homologie topologique.

Corollaire. ***(Suite exacte d'homologie réduite associée à la paire*** (X,A)***)***

On obtient la suite exacte associée à une paire topologique (X,A) où $A \neq \emptyset$ pour les groupes d'homologie réduits :

$$\dots \to \tilde{H}_{k+1}(A) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \longrightarrow \dots$$

où seuls les $H_i(X,A)$ n'ont pas de tildes.

▷ Puisque $A \neq \emptyset$, on peut prendre $B \subseteq A$ ponctuel et le résultat s'ensuit. ■

Fait. *(Application induite en homologie relative)*

Toute application continue $f : (X,A) \to (Y,B)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_{|A_{*,k+1}}"'] & H_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f_{*,k+1}"'] & H_{k+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H_k(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_{|A_{*,k}}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_{k+1}(B) \arrow[r] & H_{k+1}(Y) \arrow[r] & H_{k+1}(Y,B) \arrow[r] & H_k(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

où la flèche manquante est construire à partir du diagramme à deux entrées de l'homologie relative.

Propriété. *(Type d'homotopie et isomorphisme de complexes relatifs)*

Si $f : (X,A) \to (Y,B)$ est une application continue entre paires topologiques qui est une équivalence d'homotopie et telle que $f_{|A\to B}$ est aussi une équivalence d'homotopie, alors $f_* : H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$ induit un isomorphisme

$$H_k(X,A) \simeq H_k(Y,B)$$

pour tout $k \geqslant 0$.

▷ Application directe du lemme des cinq dans le diagramme du fait précédent. ■

Corollaire

$H_k(X,A) = H_k(X)/H_k(A)$.

Définition. *(Triplet topologique)*

Un *triplet topologique* est un triplet (X,A) tel que (X,A) et (A,B) soient des paires topologiques, *i.e.* X,A,B sont trois espaces topologiques tels que $X \supseteq A \supseteq B$.

Propriété. *(Suite exacte homologique associée au triplet (X,A,B))*

Soit (X,A,B) un triplet topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A,B) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie relative.

▷ Explicitons les flèches. La première flèche représentée est induite par l'inclusion $(A,B) \hookrightarrow (X,B)$. La seconde est induite ar $(X,B) \hookrightarrow (X,A)$. La troisième est la composée $H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A,B)$.

Montrons maintenant qu'elles forment une suite exacte. ■

5.3.2 Calcul pratique de l'homologie singulière

5.3.2.1 Théorème d'excision

Fait

On considère un triplet (X,A,V) où V est *fortement inclus* dans A, *i.e.* $\overline{V} \subseteq \mathring{A}$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, l'inclusion $i : (X \setminus V, A \setminus V) \longrightarrow (X,A)$ induit un isomorphisme $i_* : H_k(X \setminus V) \to H_k(X,A)$.

Définition-propriété. ***(Complexe de chaînes subordonné)***

Soient X un espace topologique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X tel que $(\mathring{U}_i)_{i\in I}$ soit un recouvrement ouvert de X. On peut considrer le complexe de chaînes, parfois dit *complexe subordonné au recouvrement* $\mathcal{U}$, noté $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$ où l'on se restreint dans chaque groupe abélien libre aux simples singuliers dont l'image est contenue dans (au moins) l'un des U_i (mais même au même ordre, nul besoin pour additionner deux simplexes qu'ils soient contenus dans un même ouvert).

Théorème. ***(Théorème des petites chaînes, excision)***

Soient X un espace topologique et $\mathcal{U}$ un recouvrement de X dont les intérieurs forment un recouvrement de X. Alors l'inclusion canonique inc : $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. En particulier, ce morphisme induit des isomorphismes des goupes d'homologie.

D'abord, la preuve repose sur la notion importante suivante :

Définition. ***(Subdivision barycentrique)***

Pour toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le k-simplexe $\{(x_0,\ldots,x_k) \in T^k \mid x_{\tau(0)} \leqslant x_{\tau(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\tau(k)}\}$.

Corollaire. ***(Homologie d'un conifié)***

Soit (X,A) une paire topologique. L'inclusion $(X,A) \longrightarrow (X \cup CA, CA)$ induit un isomorphisme $H_k(X,A) \to H_k(X \cup CA, CA)$ pour tout entier naturel k.

▷ En effet, les hypothèses du théorème d'excision sont vérifiées : $V = \{v\}$ où v est le sommet du cône CA est un fermé inclus dans l'intérieur de CA. ■

On rappelle que si (Y,X) a la PEH et X est contractile, alors Y et Y/X sont homotopiquement équivalents. Plus généralement :

Proposition. *(Théorème d'écrasement)*

Soit (X,A) une paire de Borsuk. Alors la projection $p : X \to X/A$ induit un isomorphisme $H_k(X,A) \simeq \tilde{H}_k(X/A)$ pour tout entier naturel k.
Ainsi, le théorème d'excision a pour conséquence que dans le cas d'une bonne paire topologique, on peut retrouver à partir de l'homologie relative l'homologie absolue, quoique réduite.

▷ On montre qu'elle induit plus précisément un isomorphisme $H_k(X,A) \to H_k(X/A,A/A)$. ■

Exercice 4

Retrouver la propriété rappelée au-dessus grâce au théorème d'excision.

Une application importante du théorème d'excision est le calcul des groupes d'homologie singulière des sphères que nous verrons avant la fin du chapitre.

5.3.2.2 Suite de Mayer-Vietoris

Définition. *(Somme directe de complexes de chaînes)*

La somme directe de complexes de chaînes est définie terme à terme par la somme directe en tant que $\mathbb{Z}$-modules de chaque terme.

Généralisons ce que nous avons vu pour la décomposition en composantes connexes.

Propriété. *(Homologie d'une somme disjointe)*

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_k(X \sqcup Y) = H_k(X) \oplus H_k(Y)$.
Plus généralement, si $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ est une somme topologique d'espaces $(X_i)_{i\in I}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_k(X) = \bigoplus_{i\in I} H_k(X_i)$.

Définition-propriété. *(Suite de Mayer-Vietoris)*

Soient A,B deux parties d'un espace topologique X telles que $A \cap B \neq \emptyset$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$. On pose $\mathcal{U} = \{A,B\}$. La suite exacte courte suivante de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A \cap B) \longrightarrow \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

produit une suite exacte longue

$$\dots H_k(A\cap B) \longrightarrow H_k(A)\oplus H_k(B) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_{k+1}(A\cap B)\dots$$

dite *suite de Mayer-Vietoris.*

Application. ***(Homologie de la suspension)***

Application. ***(Homologie du tore)***

5.3.2.3 Groupes d'homologie des sphères

5.3.2.3.1 Calcul de l'homologie des sphères $S^n, n \in \mathbb{N}$

Théorème. ***(Groupes d'homologie des sphères)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De plus, $H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

En termes de groupes réduits, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

▷ On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$. Ainsi, on a une chaîne

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \longrightarrow & \tilde{H}_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n,S^{n-1}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(D^n) & \longrightarrow \dots \\ & \| & & \wr\| & & & & \| & \\ & 0 & & \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) & & & & 0 & \\ & & & \wr\| & & & & & \\ & & & \tilde{H}_k(S^n) & & & & & \end{array}$$

dont le résultat découle facilement. ■

▷ *(Autre preuve)* On peut naturellement utiliser la suite de Mayer-Vietoris. ■

Application. *(Homologie du ruban de Möbius)*

5.3.2.3.2 Degré d'une application entre sphères

Définition-propriété. *(Degré d'un endomorphisme de la sphère)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. L'application induite $f_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(S^n)$ est à isomorphisme près un morphisme de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Les générateurs de $\tilde{H}_n(X)$ étant simultanément fixés à celui dont l'image par l'isomorphisme $\tilde{H}_n(X) \simeq \mathbb{Z}$ choisi est $1_{\mathbb{Z}}$, ce morphisme s'écrit $n \mapsto dn$ avec $d \in \mathbb{Z}$. On appelle d le *degré* de f et l'on note $\deg(f)$ qui est donc défini au signe près. Souvent, on le prend positif. De plus, le degré est constant sur les classes d'homotopie $[S^n,S^n]$.

Proposition. *(Degré d'une composée)*

$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

▷

■

Exemples

1. Dans le cas $n = 1$, c'est le...
2. En identifiant $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$ a degré k.
3. $\deg(id) = 1$.
4. Le degré d'une réflexion à travers un hyperplan vectoriel est -1. Par suite, l'application antipodale $S^n \to S^n$ a degré $(-1)^{n+1}$. En effet, $(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\ldots,-x_i,\ldots,x_{n+1})$ a degré -1 et $f_1 \circ \ldots \circ f_{n+1}$ donne l'antipodale.
5. Plus généralement, toute application sans point fixe étant homotope à l'antipodale, son degré est $(-1)^{\dim(S^n)+1}$.

Corollaire. *(Degré d'un automorphisme)*

Soit $f : S^n \to S^n, n \in \mathbb{N}$ un automorphisme. Alors $\deg(f) = \pm 1$.

Propriété. *(Degré d'une surjection)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : S^n \to S^n$ une surjection continue. Alors $\deg(f) \neq 0$.

▷ Si f n'atteint pas le point x, $f : S^n \to S^n \setminus \{x\}$ est bien définie. Or $S^n \setminus \{x\}$ est contractile, donc son groupe d'homologie est nul. ■

Contre-exemple

La réciproque est fausse.

Rien que dans S^1, un lacet peut faire plusieurs fois le tour du cercle et se renrouler avant la fin du temps. □

Lemme. ***(Degré d'une suspension)***

Soit f une application de la sphère S^n sur elle-même. On sait que $\Sigma S^n = S^{n+1}$ à homéomorphisme près. Alors $\deg(f) = \deg(\Sigma f)$.

▷ Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\times \deg(\Sigma f) = \Sigma f_*"'] & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \arrow[d, "f_* = \times \deg(f)"] \\
\mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) \arrow[r, "\sim"] & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

commute. ■

Exercice 5 *(Théorème de la boule chevelue)*

1. Soit n un entier naturel impair. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs (tangents) sur S^n continu et ne s'annulant pas.
2. Soit n un entier naturel pair. Montrer que tout champ de vecteurs tangents continu sur S^n s'annule en au moins un point.
3. En déduire que l'on ne peut peigner la boule S^2 de $\mathbb{R}^3$ sans lui faire d'épi.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Puisque $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, on considère le champ qui à $v = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \mapsto (-s_1, s_2, -s_3, s_4, \ldots, -s_{n-1}, s_n)$. Il est bien tangent à S^n.
2. Il suffit de remarquer que l'existence de $V \in \Gamma(S^n, TS^n)$ non nul équivaut à celle de $f : S^n \to S^n$ sans point fixe, avec $f : x \mapsto \frac{x+V(x)}{\|x+V(x)\|}$. Si tel est le cas, $f \sim id_{S^n}$ par un simple chemin normalisé, absurde par signe.
3. C'est simplement un habillage plaisant du cas $n = 2$.

Définition. ***(Degré local d'une application entre sphères)***

5.3.2.3.3 Sphères homologie

Définition. ***(Sphère d'homologie)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *sphère d'homologie* de dimension n est une variété topologique connexe ayant la même homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$ que S^n, explicitement, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$H_i(X) = \delta_i^n H_n(X).$$

5.3.2.4 Comparaison entre homologie et homotopie

Propriété. ***(Homotopie $\implies$ homologie)***

Deux espaces topologiques homotopiquement équivalents ont même homologie singulière.

Exercice 6

Montrer que l'on peut avoir même homologie sans être homotopiquement équivalents.

▷ **Éléments de réponse.**

Considérons $X = S^2 \vee \underbrace{S^1 \vee ... \vee S^1}_{2g \text{ fois}}$ et Y l'unique surface topologique orientable de genre g, pour par exemple $g = 1$. Alors X et Y ne sont pas homotopiquement équivalents puisqu'ils n'ont pas le même groupe fondamental, mais ils ont des groupes d'homologie isomorphes.

Ainsi, contrairement à ce que l'on peut entendre de prêcheurs peu scrupuleux, l'homologie ne comprend pas la théorie de l'homotopie (ce n'est pas ce que dit le diagramme suivant !). Cependant, le théorème de Hurewicz en capture l'essence.

5.3.3 Quelques invariants numériques de l'homologie singulière

Définition. ***(Nombres de Betti)***

Soit X un espace topologique. Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que le groupe $H_i(X)$ soit de type fini. En particulier, $H_i(X) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus A$ où A est un groupe abélien fini. On appelle *i-ième nombre de Betti* de X l'entier r e tl'on note $r = \beta_i(Y)$ où β_i s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition. ***(Caractéristique d'Euler-Poincaré)***

Soit X un espace topologique. On suppose que les groupes d'homologie de X sont de type fini et presque tous nuls. La somme alternée $\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \beta_i(X)$ s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X. On la note $\chi(X)$ où χ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

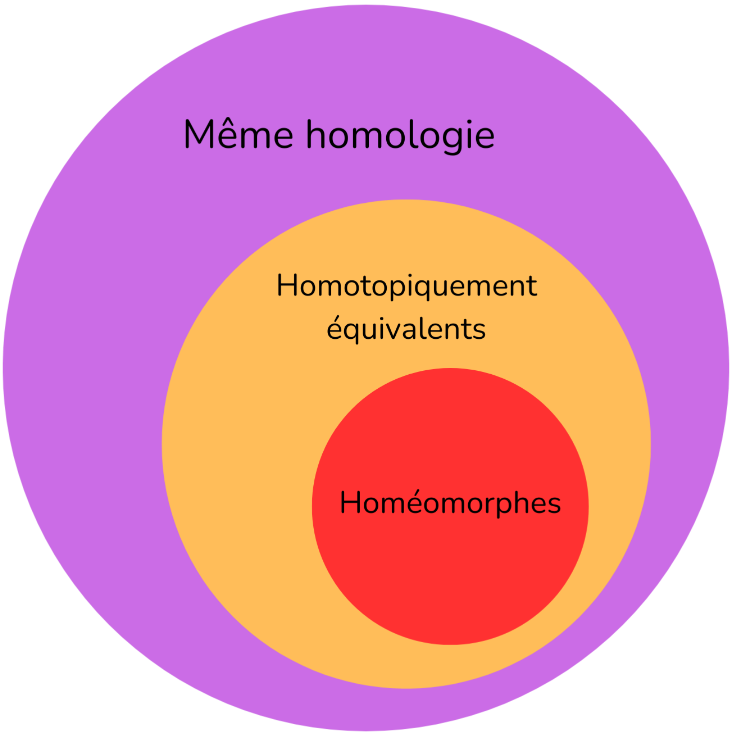


TABLE 5.1 : *Diagramme de Venn : topologie générale, homotopie et homologie.* — Les inclusions sont strictes, comme finit de le montrer l'exemple suivant.

Fait

Si l'homologie d'un espace X est dans F-Vect, F un corps, alors $\chi(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(-1)^i \dim_F(H_i(X;F))$.

5.4 Homologie cellulaire

5.4.1 Complexe de chaînes cellulaire

On conseille vivement de relire le cours introductif sur les CW-COMPLEXES.

Lemme. ***(Homologie d'un bouquet agréable)***

Soit $(X_i,x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une collection d'espaces pointés telle que (X_i,x_i) soit une paire de Borsuk pour tout $i \in \mathcal{I}$. Alors

$$\tilde{H}_k(\bigvee_{i\in\mathcal{I}} X_i) = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \tilde{H}_k(X_i)$$

en tout entier naturel k.

▷ On note $\bigvee\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i = \coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i / \coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} \{x_i\}$. On utilise la suite exacte de $(\coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i, \coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} \{x_i\})$ et la relation $\tilde{H}_k(\bigvee\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i) = H_k(\coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i, \coprod\limits_{i\in\mathcal{I}} \{x_i\})$. ■

Corollaire. ***(Homologie relative d'un squelette)***

Soit X un CW-complexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z} \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Définition-propriété. ***(Complexe de chaînes cellulaires)***

Soit X un $CW-$complexe. On considère la suite

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) \longrightarrow \dots$$

où, pour tout entier $k \geqslant 1$, le morphisme ∂_k provient de la suite exacte du triplet $(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$. C'est un complexe de chaînes dont les groupes d'homologie s'appellent *groupes d'homologie cellulaires* de X.
De plus, ce complexe est fonctoriel dans la catégorie des CW-complexes dont les morphismes sont les applications cellulaires.

▷ En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Il suffit pour voir cela d'observer la commutation de

$$\begin{tikzcd}
H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) \arrow[d] \arrow[dr, "\partial_{k+1}"] & & \\
H_k(X^{(k)}) \arrow[dr, "0"'] & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
& H_{k-1}(X^{(k+1)}) & H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}).
\end{tikzcd}$$

On a donc bien un complexe. ■

On vérifie que l'homologie cellulaire des CW-complexes coïncide avec leur homologie singulière.

Théorème. ***(Homologie cellulaire = homologie singulière)***

Les groupes d'homologie du complexe de chaînes singulières sont isomorphes terme à terme aux groupes d'homologie singulière de X.

Corollaire

Soit X un CW-complexe. Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que X ait un nombre fini c_i de i-cellules. Alors $H_i(X)$ est de type fini et $\beta_i(X) \leqslant c_i$.

Exercice 7 *(Caractéristique d'Euler d'un CW-complexe.)*

Soit X un CW-complexe fini. On note c_i le nombre de i-cellules de X est fini. Montrer qu'alors

$$\sum_i (-1)^i \beta_i(X) := \chi(X) = \sum_i (-1)^i c_i.$$

En particulier, si X est un polyèdre à F faces, A arêtes et S sommets, $\chi(X) = F - A + S = S - A + F$.

Exercice 8 *(Calcul de la caractéristique d'un CW-complexe)*

Soient X,Y deux CW-complexes.

1. *(Caractéristique d'Euler d'une réunion de complexes)* Montrer que $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$. En déduire la caractéristique de la somme connexe de deux graphes.
2. *(Caractéristique d'Euler d'un produit de complexes)* Montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Grâce à la notion d'Orientation des cellules grâce au Degré d'une application de S^n dans elle-même et celle de Coefficient d'incidence, on peut exprimer la différentielle de manière close.

Proposition. ***(Expression floue de la différentielle du complexe cellulaire)***

Soit X un CW-complexe. Soit σ une k-cellule orientée de X où $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $\partial_k \sigma = \sum_\tau \pm[\sigma : \tau]\tau$.

Corollaire. ***(Homologie en grand degré des complexes cellulaires)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X un CW-complexe de dimension n. Alors pour tout $k > n$, $H_k(X) = 0$.

Exercice 9 *(Homologie du plan projectif complexe)*

Exercice 10 *(Homologie du plan projectif réel)*

Exercice 11

En déduire l'homologie de $\mathbb{CP}^\infty$ qui est la somme topologique de tous les espaces projectifs complexes.

On peut définir aussi dans le cas de l'homologie cellulaire, l'homologie cellulaire à coefficients quelconques, sans aucun problème conceptuel.

5.4.2 Lien avec l'homologie simpliciale

On réintroduit les complexes simpliciaux, pour les grands maintenant.

Définition. ***(Complexe simplicial géométrique)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *complxe simplicial géométrique* dans $\mathbb{R}^n$ est une collection $\mathcal{K}$ de simplexes dans $\mathbb{R}$Ín telle que :

- ⋆ toute face d'un simplexe dans $\mathcal{K}$ est dans $\mathcal{K}$;
- ⋆ l'intersection de deux si mplexes dans $\mathcal{K}$ est toujours leur face commune ;
- ⋆ la collection $\mathcal{K}$ est localement finie.

Le *support* $\mathcal{K}$ d'un complexe simplicial géométrique $\mathcal{K}$ est la réunion dans $\mathbb{R}^n$ de tous les simplexes de $\mathcal{K}$. Un *sommet* de $\mathcal{K}$ est un 0-simplexe de $\mathcal{K}$.

Définition. ***(Complexe simplicial)***

Un *complexe simplicial* est un espace topologique homéomorphe au support d'un complexe simplicial géométrique.

Fait. ***(Tout complexe simplicial est un complexe cellulaire)***

Soit X un complexe simplicial fini. On numérote tous les sommets de X. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout k-simplexe σ^k de X, on a un unique homéomorphisme $\underbrace{T^k}_{\simeq D^k} \to \sigma^k$ qui préserve les ordres de sommets.

Par suite, canoniquement, un complexe simplicial est un CW-complexe fini dont les cellules sont orientées.

Définition. ***(Homologie simpliciale d'un complexe simplicial)***

Les groupes d'homologie cellulaire du CW-complexe sous-jacent d'un complexe simplicial s'appellent les *groupes d'homologie simpliciale* du complexe simplicial considéré.

Proposition. ***(Lien homologie simpliciale-homologie cellulaire)***

Pour tout k-simplexe σ^k d'un complexe simplicial X, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\partial \sigma^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k)$$

où $\Gamma_i(\sigma^k)$ est la i-ième face de codimension 1 de σ^k.

Corollaire. ***(Lien homologie simpliciale-homologie singulière)***

Les groupes d'homologie simpliciale d'un complexe simplicial sont isomorphes à ses groupes d'homologie singulière.

5.5 Généralisations de l' homologie singulière

5.5.1 Homologie à coefficients quelconques

Soit G un groupe abélien, en particulier un anneau commutatif $\mathbb{A}$, un module sur un anneau A ou un espace vectoriel sur un corps K.

Définition. ***(Chaîne singulière d'un espace à coefficients dans G)***

Soit k un entier naturel. Une k-*chaîne singulière* dans un espace topologique X à coefficients dans G est une somme finie formelle

$$g_1\sigma_1 + ... + g_m\sigma_m$$

où $m \in \mathbb{N}$, $g_1,...,g_m \in G$ et $\sigma_1,...,\sigma_m$ sont des k-simplexes singuliers de X. L'ensemble des k-chaînes singulières de X est un groupe abélien libre, noté $C_k(X;G)$.

Définition-propriété. ***(Complexe de chaînes singulières à coefficients dans G)***

Soit X un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de X à coefficients dans G est le complexe $\mathcal{C}(X;G)$:

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1}(X;G) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X;G) \xrightarrow{\partial_k} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;G)$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k(X;G)$ est le groupe des k-chaînes singulières de X à coefficients dans G et pour tout σ i-simplexe singulier de X à coefficients dans G, $i \in \mathbb{N}$, $\partial_i(\sigma)$ est définie comme dans le cas de $\mathbb{Z}$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note $Z_k(X;G) = \begin{cases} \mathrm{Ker}(\partial_k) \text{ si } k \geqslant 1 \\ C_0(X) \text{ sinon} \end{cases}$ le k-ième groupe abélien des cycles de ce complexe, $B_k(X;G) = \mathrm{Im}(\partial_{k+1})$ le k-ième groupe abélien des bords de ce complexe et $H_k(X;G) := Z_k(X;G)/B_k(X;G)$ le k-ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle k-ième *groupe d'homologie (singulière) de X à coefficients dans G*.

▷ Rien de nouveau en fait. ■

Définition. ***(Groupes d'homologie réduits)***

En considérant les groupes d'homologie de du complexe de chaînes singulières à coefficients dans G augmenté, on obtient par définition les *groupes d'homologie réduits à coefficients dans G* $\tilde{H}_k(X;G)$ de X.

Définition. ***(Groupes d'homologie relatifs)***

Soit (X,A) une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs à coefficients dans G* de (X,A) sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative à coeffients dans G* $C(X,A;G)$ défini de manière évident. On note $H_k(X,A;G)$ le k-ième groupe d'homologie relatif à coefficients dans G.

De même, on peut induire des applications dans l'homologie à coefficients généraux.

Remarque. L'homologie singulière classique est l'homologie à coefficients dans $G = \mathbb{Z}$. Ainsi, $C_k(X) = C_k(X;\mathbb{Z})$, notations parfois utilisées dans les calculs, aussi pour $H_k(X) = H_k(X;\mathbb{Z})$, $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(X,;Z)$ et $H_k(X,A) = H_k(X,A;\mathbb{Z})$.

Exercice 12 *(Homologie à coefficients quelconques des espaces projectifs)*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit G un groupe abélien. Calculer l'homologie à coefficients dans G de $\mathbb{CP}^n$.

2. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Calculer l'homologie à coefficients dans G de $\mathbb{RP}^n$.

5.5.2 Cohomologie des espaces topologiques

Pour définir la cohomologie singulière, on utilise l'opérateur de dualisation classique Hom. On considère toujours G un groupe abélien.

Définition. ***(Cochaîne singulière d'un espace à coefficients dans G)***

Soit k un entier naturel. Une *k-cochaîne singulière* dans un espace topologique X à coefficients dans G est une fonction qui associe à tout k-simplexe singulier de X un élément de G, autrement dit, l'ensemble des k-cochaînes singulières de X est $C^k(X;G) := \mathrm{Hom}(C_k(X),G)$.

Remarque. En effet, $\mathrm{Hom}(C_k(X;G),G) \simeq \mathrm{Hom}(X^{T^k},G)$ par l'adjonction oubli-libre.

Définition-propriété. *(Complexe de cochaînes singulières à coefficients dans G)*

Soit X un espace topologique. Le *complexe de cochaînes singulières* de X à coefficients dans G est le complexe $\mathcal{C}^\bullet(X;G)$:

$$\ldots \longleftarrow C^{k+1}(X;G) \xleftarrow{\partial^{k+1}} C^k(X;G) \xleftarrow{\partial^k} \ldots \xleftarrow{\partial^1} C^0(X;G)$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(X;G)$ est le groupe des k-cochaînes singulières de X à coefficients dans G et pour toute c i-cochaîne singulière de X à coefficients dans G, pour tout σ $i+1$-simplexe singulier de X à coefficients dans G, $i \in \mathbb{N}$,

$$(\partial^{i+1}(c))(\sigma) := \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j c(\sigma \circ \Delta_{(v_0,\ldots,\hat{v_j},\ldots,v_{i+1})}).$$

Le morphisme *différentielle* ou *de cobords* ∂^i est alors définie sur tout $C_i(X)$ par linéarité. On note ∂ ou ∂_X la donnée des $(\partial^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note $Z^k(X;G) = \begin{cases} \mathrm{Ker}(\partial^k) \text{ si } k \geqslant 1 \\ C^0(X) \text{ sinon} \end{cases}$ le k-ième groupe abélien des cocycles de ce complexe, $B^k(X;G) = \mathrm{Im}(\partial^{k+1})$ le k-ième groupe abélien des cobords de ce complexe et $H^k(X;G) := Z^k(X;G)/B^k(X;G)$ le k-ième groupe abélien de cohomologie de ce complexe (de cochaînes) que l'on appelle k-ième *groupe de cohomologie (singulière) de X à coefficients dans G*.

▷ Si $a \in C_{k+1}(X)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\left\langle \partial^{k+1}c,a \right\rangle = \left\langle c,\partial^{k+1}a \right\rangle}$. En particulier, $\partial^{k+1} \circ \partial^k = 0$. ■

On a redémontré que le foncteur Hom transforme un complexe de chaînes en complexe de cochaînes.

⟶ *Notation.* On note parfois encore $\partial_k = \partial^k$ par commodité le morphisme de cobords.

⟶ *Convention.* Souvent, la cohomologie se note de gauche à droite, *i.e.*

$$C^0(X;G) \xrightarrow{\partial_1} \ldots \xrightarrow{\partial_k} C^k(X;G) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C^{k+1}(X;G) \longrightarrow \ldots.$$

On peut considérer le complexe de cohomologie augmenté.

Définition-propriété. ***(Complexe de cochaînes singulières augmenté)***

Soit X un espace topologique. Le *complexe de cochaînes singulières* de X est le complexe $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet(X;G)$ ou encore $\mathcal{C}^\bullet(X;G)$:

$$G \xrightarrow{\varepsilon'} C^0(X;G) \xrightarrow{\partial_1} \dots \xrightarrow{\partial_k} C^k(X;G) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C^{k+1}(X;G) \longrightarrow \dots$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C^k(X;G)$ est le groupe des k-cochaînes singulières de X et ε' associe à tout $g \in G$ la fonction constante g définie sur l'ensemble des 0-cochaînes singulières de X.
En considérant les groupes de cohomologie de ce nouveau complexe de cochaînes, on obtient par définition les *groupes de cohomologie réduits* $\tilde{H}^k(X)$ de X à coefficients dans G.

On dispose également des groupes de cohomologie relatifs ainsi que des suites exactes longues associées.

On ne peut dualiser l'homologie d'un complexe après coup : en général, $H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X),G)$ ne sont pas isomorphes. Cependant :

Fait. ***(Morphisme de la cohomologie dans l'homologie duale)***

Soient X un espace topologique et G un groupe abélien. On a un morphisme

$$h : H^n(X;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X),G).$$

On le définit de la façon suivante : si $\alpha \in H^n(X;G) = H_n(X)$ est représenté par un morphisme $\varphi : \underbrace{C_n}_{\supseteq Z_n \text{ le sous-groupe des } n\text{-cycles}} \to G$ tel que $\partial\varphi = 0$.
On a $\varphi \circ \partial = 0$.
Donc φ s'annule sur $\underbrace{B_n}_{\text{le sous-groupe des } n\text{-bords}} \subseteq C_n$. La restriction $\varphi_0 = \varphi_{|Z_n}$ induit donc un morphisme $\overline{\varphi_0} : H_n(X) = Z_n/B_n \to G$ qui est un élément de $\mathrm{Hom}(H_n(X),G)$.
Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant φ de α : si $\varphi \in \mathrm{Im}(\partial)$, on a $\varphi : \partial\psi = \psi\partial$, donc φ est nul sur $Z_n(X;G)$.
Ce morphisme est toujours surjectif.
En effet, on a avec un peu d'ampleur une suite exacte courte scindée $0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \longrightarrow H^n(X;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_n(X),G) \longrightarrow G$. Attention : la section de cette suite n'est pas naturelle, au sens de l'universalité.

5.5.3 Théorème des coefficients universels, foncteurs topologiques d'extension et de torsion

On chercher à reconstruire l'homologie à coefficients quelconques à partir de l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$. C'est possible au rang n, si on la connaît aux rangs $n-1$ et $n+1$.

Fait. ***(Résolution libre de l'homologie singulière)***

Supposons que le complexe de chaînes singulières de l'espace topologique X soit un complexe de groupes abéliens libres. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

qui peut être vue comme résolution libre de $H_{n-1}(\mathcal{C})$. En dualisant, on obtient

$$0 \longleftarrow B_{n-1}^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}^* \longleftarrow \mathrm{Hom}(H_{n-1}(\mathcal{C}),G) \longleftarrow 0.$$

Cette suite n'est pas forcément exacte au terme B_{n-1}^*. On considère donc[a] le conoyau $\mathrm{Coker}(i_{n-1}^*) = \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}),G)$.

[a] Si $\mathcal{F} : \ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$ est une résolution libre de H, on dualise par $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,,G) : \ldots \longleftarrow F_2^* \longleftarrow F_1^* \longleftarrow F_0^* \longleftarrow H^* \longleftarrow 0$. Cette résolution est nulle sauf en $F_1^* := \mathrm{Ext}(H,G)$.

Théorème. ***(Formule des coefficients universels pour la cohomologie)***

Soient X un espace topologique, G un groupe abélien. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a une suite exacte courte scindée :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}),G) \longrightarrow H^n(\mathcal{C};G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(\mathcal{C}),G) \longrightarrow G.$$

Exercice 13 *(Calculs de* Ext*)*

Montrer que

1. $\mathrm{Ext}(H \oplus H',G) \simeq \mathrm{Ext}(H,G) \oplus \mathrm{Ext}(H',G)$;
2. $\mathrm{Ext}(H,G) = 0$ si H est libre ;
3. $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},G) = G/nG$.

Corollaire

Si les groupes $H_n(\mathcal{C})$ et $H_{n-1}(\mathcal{C})$ sont de type fini, alors $H^n(\mathcal{C};\mathbb{Z}) \simeq \left({}^{H_n(\mathcal{C})}\!\big/\!{}_{H_n(\mathcal{C})^{tor}} \right) \oplus H_{n-1}(X)^{tor}$.

Théorème. ***(Formule des coefficients universels pour l'homologie)***

On a[a] une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow H_n(\mathcal{C}) \otimes G \longrightarrow H_n(\mathcal{C};G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}),G) \longrightarrow 0.$$

[a] Si $\mathcal{F} : \ldots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H$ est une résolution libre de H, on a le complexe de chaînes $\mathcal{F} \otimes G : \ldots F_2 \otimes G \longrightarrow F_1 \otimes G \longrightarrow F_0 \otimes G \longrightarrow H \otimes G \longrightarrow 0$ qui est exacte sauf en $\mathrm{Tor}(H,G) = F_1 \otimes G$.

Ne pas se précipiter sur la formule des coefficients universels : c'est un marteau-pilon ! Lorsqu'on sait calculer explicitement l'homologie dans $\mathbb{Z}$, on sait a priori le faire partout : les coefficients universel ne servent que lorsque les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sont seulement donnés.

Exercice 14 *(Calculs de* Tor*)*

Montrer que

1. $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(B,A)$;
2. $\mathrm{Tor}(A \oplus A',B) = \mathrm{Tor}(A,B) \oplus \mathrm{Tor}(A',B)$;
3. $\mathrm{Tor}(A,B) = 0$ si A ou B est libre ;
4. $\mathrm{Tor}(A,B) = \mathrm{Tor}(A^{tor},B)$;
5. $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},A) \simeq \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\times n} A)$.

Corollaire. ***(Homologue $\implies$ G-homologue)***

Si X,X' ont même homologie singulière, alors ils ont même homologie à coefficients dans G pour tout groupe abélien G.

Contre-exemple

On cherche deux espaces topologiques ayant même homologie singulière dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$. $\square$

Contre-exemple

On cherche deux espaces topologiques ayant même homologie singulière dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$. $\square$

5.6 Algèbre homologique

5.6.1 Complexes de modules

La théorie de l'homologie énoncée dans le cadre général des catégories abéliennes peut être étudiée indépendemment des théories de l'homologie topologiques développées précédemment. On invite le lecteur à s'y référer de temps à autre pour prendre un certain recul sur les notions présentées.

Définition. ***(Complexe de module)***

Un *complexe de R-module* est une suite de R-modules :

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} \dots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où les d_i indexés par $\mathbb{N}$ sont des morphismes de modules tels que $d_i d_{i+1}$, soit $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subseteq \mathrm{Ker}(d_i)$. On note (C, d) (parfois, par convention, on utilise (M_0,d_0) et l'on indexe la chaîne par $\mathbb{Z}$).

On définit pour $n = i$ l'*espace des cycles* $Z_n(C,d) = Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ et on appelle les *bords* $B_n(M_0, d_0) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. On a $B_n \subseteq Z_n$ et on appelle *homologie* de (C,d) les quotients $H_n = H_n(C,d) = Z_n/B_n$, le *n-ième groupe d'homologie*. On appelle d en général la *différentielle*.

On dit que le complexe est *exact* en C_n si et seulement si $H_n = 0$.

On dit que (C,d) est *exact*, ou *acyclique*, si $H_n = 0$ pour tout n, c'est-à-dire s'il est exact en chacun de ses termes.

Définition. ***(Morphisme de complexes)***

Un *morphisme de complexes* avec la définition précédente, noté $f : (C,d) \longrightarrow (C',d')$, est une collection de morphismes $f_i : C_i \longrightarrow C_i'$ qui commute avec la différentielle :

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & C_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ C_i' \arrow[r, "d_i'"'] & C_{i-1}' \end{tikzcd}$$

commutatif.

Propriété

Un tel morphisme induit $[f_i] : H_i \longrightarrow H_i'$.

Définition. ***(Quasi-isomorphisme)***

On dit que le morphisme de complexe de modules f est un *quasi-isomorphisme* si les $[f_i]$ sont des isomorphismes.

5.6.2 Caractéristique d'Euler

Définition. ***(Caractéristique d'Euler d'un complexe)***

Soit C un complexe de cochaînes de modules libres, par exemples de groupes abéliens libres ou d'espaces vectoriels. On note $(H^i)_{i\in\mathbb{N}}$ son homologie. La *caractéristique (d'Euler)(-Poincaré)* de C est la somme

$$\chi = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i \dim(H^i).$$

Si C est canoniquement associé à un espace topologique X, on note $\chi = \chi(X)$. On peut préciser en indice le type d'homologie considéré.

Propriété. ***(Caractéristique d'Euler d'un produit)***

Propriété. ***(Caractéristique d'Euler d'une somme directe)***

Propriété. ***(Caractéristique d'Euler d'une somme connexe)***

5.6.3 Axiomes d'Eilenberg-Steenrod

Chapitre 6

Homotopies

Résumé

Le but de cette leçon intitulée Théories de l'homotopie est de développer deux premiers exemples de théories de l'homotopie : celle des espaces topologiques et celle des ensembles simpliciaux. L'approche choisie est de les présenter d'une façon uniforme menant à leur généralisation sous la forme de catégorie de modèles. Le second but caché est de donner assez de matière au lecteur à propos des ensembles simpliciaux pour ouvrir la porte à l'étude de la théorie des catégories de plus grandes dimensions, via la notion de ∞-catégorie. Les théories de cette envergure permettent de classer les espaces topologiques à équivalence d'homotopie près. Toutes ces notions ont, de nos jours, un grand avenir, tant la théorie de l'homotopie irriguent les mathématiques, de sorte que, si au XX^e^ siècle, on était convaincu que les mathématiques allaient être fondées sur les bases de la théorie des ensembles, nous pensons que celles du XXI^e^ siècle le seront sur celles de la théorie de l'homotopie. En effet : la notion d'∞-catégorie stable surpasse aujourd'hui celle de catégorie triangulée ; en ses termes, on peut enfin formuler le but final du programme de Langlands ; la géométrie algébrique qui en dérive pourrait donner un sens à la notion de tangente en un point singulier ; les ∞-groupoïdes infinis donnent naissance à la théorie de Lie et à la théorie de la déformation, et d'autres choses encore.

6.1 Théorie de l'homotopie (supérieure) des espaces topologiques

6.1.1 Prolégomènes : quelques faits sur le segment [0,1] et ses amis

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $I = [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle donc I^n le *n-cube* ou *cube de dimension n*.

Proposition. ***(Décomposition du cube en sous-cubes)***

Pour tous entiers $0 \leqslant k \leqslant n$, $I^n \simeq I^k \times I^{n-k}$.

▷ Cette identité ensembliste est une identification bénigne, et elle se transmet aux espaces topologiques par associativité de la topologie produit. ■

Proposition. ***(Propriété différentielle de la frontière)***

Soient $0 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers. Alors

$$\partial I^n \simeq (\partial I^k \times I^{n-k}) \cup (I^k \times \partial I^{n-k}).$$

▷ Il est assez visuel (dites cela à $n = 4$) mais en tout cas pas très difficile à vérifier au moyen d'argument de topologie des espaces vectoriels normés, que $\partial I^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in I^n \mid \exists i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0 \text{ OU } x_i = 1\}$. Le résultat s'ensuit, car $[\![1,n]\!] \simeq [\![1,k]\!] \cup [\![1,n-k]\!]$ et la réunion traduit bien la disjonction logique. ■

On utilisera aussi :

Lemme. ***(Le n-cube écrasé sur son bord est la n-sphère)***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I^n/\partial I^n$ est un modèle de la sphère de dimension n, *i.e.* $I^n/\partial I^n \cong S^n$.

▷ En effet, $S^n = \partial D^{n+1} \simeq \partial I^{n+1} \simeq I^n/\partial I^n$, la deuxième identité venant de ce qu'un n-cube est une n-boule à homéomorphisme près. Montrons le dernier homéomorphisme. Raisonnons par récurrence. La frontière ∂I^{n+1} du $(n+1)$-cube est constituée de $2(n+1)$ faces homéomorphes à I^n. On peut choisir l'une d'elles et étendre sa frontière pour couvrir les $2(n+1)-1$ autres faces, ce qui donne le dernier homéomorphisme. Explicitement, on considère la face $F = \{x_{n+1} = 0\}$. Sa frontière est $\{(x_1,\ldots,x_n,0) \mid \exists i \in [\![1,n]\!] \quad x_i = 0 \text{ OU } x_i = 1\}$. Considérons donc l'arête $\{x_i = b\}$ contenue dans $\{x_i = b\}$ face de I^{n+1}. Il est clair que la face $\{x_i = b\}$ du cube se rétracte par déformation forte par une simple dilatation orthogonale sur la face opposée à F définie par $\{x_{n+1} = 1\}$. Il reste donc à traiter le cas de la face $\{x_{n+1} = 1\}$, car tous les points de la frontière de cette face appartiennent à une autre face, dont on déjà été contractés par le procédé précédent. Par hypothèse de récurrence, cette face est homéomorphe à $I^n \cong I^{n-1}/\partial I^{n-1}$, et donc de fil en aiguille à $I^0/\partial I^0 = \{*\}$, autrement dit est contractile. D'où le résultat. ■

Exercice 1 *(Universalité de l'intervalle* $[0,1]$*)*

Un *espace topologique bipointé muni d'une duplication* est un quintuplet $(X,\mathcal{T},x_0,x_1,\delta_X)$ où $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique, $x_0,x_1 \in X$ et δ_X est un homéomorphisme de X sur $(X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0,x_1}$ où $\mathcal{R}_{x_0,x_1}$ est la relation d'équivalence engendrée par celle qui identifie x_0 dans la première copie de X à x_1 dans la deuxième copie de X. Un *morphisme d'espaces topologiques bipointés munis d'une duplication* entre $(X,\mathcal{T},x_0,x_1,\delta_X)$ et $(Y,\mathcal{T}',y_0,y_1,\delta_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ et faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \arrow[d, "\delta_Y"] \\ (X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0,x_1} \arrow[r, "f \coprod f"'] & (Y \coprod Y)/\mathcal{R}_{y_0,y_1}, \end{tikzcd}$$

i.e. $\delta_Y \circ f = f \coprod f \circ \delta_X$ où $f \coprod f$ est l'application canonique $X \coprod X \to Y \coprod Y$ passée simultanément au quotient, ce qui est possible par hypothèses de pointage.

1. Vérifier que la collection des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication forme une catégorie concrète.

2. Montrer que l'espace topologique bipointé $([0,1],0,1)$ est naturellement muni d'une duplication.

3. Justifier que l'on a une théorie de l'homotopie en remplaçant $[0,1]$ par n'importe quel espace topologique bipointé muni d'une duplication.

4. Soit (X,x_0,x_1,δ_X) un espace topologique bipointé. Exhiber un morphisme $(X,x_0,x_1,\delta_X) \to ([0,1],0,1,\delta_{[0,1]})$.

5. En déduire que $([0,1],0,1,\delta_{[0,1]})$ est terminal dans la catégorie des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication.

À propos. ***(Choix de*** $[0,1]$ ***par rapport à un intervalle compact)***

- ⋆ Le choix de $[0,1]$ plutôt que de n'importe quel intervalle compact de $\mathbb{R}$ est purement conventionnel, en témoigne les définitions alternatives de chemins choisies avec $[\alpha,\beta]$, $\alpha < \beta$ deux réels qui ne changent rien. En pratique, changer $[\alpha,\beta]$ en $[a,b]$ par précomposition avec $h : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ un homéomorphisme entre les deux, $a < b$ deux réels avec a priori $(\alpha,\beta) \neq (a,b)$, est une *reparamétrisation*.
- ⋆ Dans un monde ouvert d'esprit où un lacet est une application $H : X \times [0,\lambda] \to Y$ avec $\lambda > 0$ quelconque, il n'y a pas de problème, mais pour nous, la composition des lacets n'est pas associative stricto sensu (se rappeler un petite diagramme rectangulaire bien connu de ceux qui ont scrupuleusement construit le groupe fondamental).

6.1.2 Équivalence d'homotopie et théorie des catégories

On commence par formuler la théorie de l'homotopie connue en topologie algébrique élémentaire grâce au langage des catégories.

6.1.2.1 Homéomorphie

Définition. ***(Homéomorphie)***

Soit $f : X \to Y$ une flèche de Top. On dit que f es un *homéomorphisme* si f est un isomorphisme dans Top, autrement dit s'il existe $g : Y \to X$ dans Top telle que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$.
Deux espaces X et Y sont *homéomorphes* s'ils sont isomorphes dans Top, autrement dit s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f = id_X$ et $f \circ g = id_Y$. On note $X \simeq Y$.

6.1.2.2 Homotopie

Reformulation pratique. ***(Formulation catégorique de la notion d'homotopie)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \to Y$ continues. Alors f et g sont homotopes si et seulement si on peut trouver une application continue H, qui est alors une homotopie entre f et g, faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, dashed, "H"'] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

où ι_0 est l'inclusion $x \mapsto (x,0)$ et ι_1 est l'inclusion $x \mapsto (x,1)$.

On retrouve alors très visuellement :

Proposition

Soient X,Y deux espaces topologiques. L'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathrm{Top}(X,Y)$. L'ensemble quotient est noté $[X,Y]$.

▷ En effet :

⋆ si $f = g$, alors on peut prendre $H : X \times I \to Y$ constante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\text{cste}"] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

qui est continue et fait commuter trivialement chaque triangle du diagramme.

⋆ Pour la symétrie, il suffit d'observer que

$$\begin{tikzcd}
& Y & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[u, dashed, "H(?,-\bullet)"] \arrow[d, dashed, "H(?,\bullet)"'] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

mais surtout

⋆ pour montrer que l'homotopie est transitive, on concatène :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[drr, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "H"] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[d, "g"] & X \times I \arrow[dl, dashed, "H'"'] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dll, "h"] \\
& & Y & &
\end{tikzcd}$$

dont on déduit à réparamétrisation près

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[drr, "f"'] \arrow[ddrr, hook, "\iota_0"'] & X \times [0,\frac{1}{2}] \arrow[dr, dashed, "H"] & X \arrow[l, hook', "\iota_{\frac{1}{2}}"'] \arrow[r, hook, "\iota_{\frac{1}{2}}"] \arrow[d, "g"] & X \times [\frac{1}{2},1] \arrow[dl, dashed, "H'"'] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dll, "h"] \arrow[ddll, hook', "\iota_1"] \\
& & Y & & \\
& & X \times I \arrow[u, dashed, "H''=H\oplus H'"] & &
\end{tikzcd}$$

où $X \times I = X \times [0,\frac{1}{2}] \oplus X \times [\frac{1}{2},1]$ avec la définition évidente,

ce qui démontre bien que la relation d'homotopie est une équivalence. ■

⟶ **Notations.** Pour X,Y deux espaces topologiques, on note $\mathrm{Top}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X,Y)$. De même, on notera $h\mathrm{Top}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{h\mathrm{Top}}(X,Y)$ comme on va le définir juste maintenant.

6.1.2.3 La catégorie d'homotopie

Définition. ***(Nouvelle introduction de la catégorie* Top *modulo homotopie)***

On note $h\mathrm{Top}$, ou hoTop, et l'on appelle *catégorie homotopique des espaces topologiques*, la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et la classe des morphismes entre X et Y est $[X,Y]$, *i.e.* la catégorie Top quotientée par la congruence d'homotopie.

En fait, sans cette dernière remarque, on n'a pas là une catégorie a priori (il faut des identités, une associativité, etc.). La proposition précédente éclaire ce point et justifie la construction précédente.

Proposition

Considérons la projection $H_0 : \mathrm{Top} \longrightarrow h\mathrm{Top}$ qui à un espace topologique associe ce même espace et parallèlement à une application continue $f : X \to Y$ associe $[f] \in [X,Y]$. Alors il existe une unique structure de catégorie sur $h\mathrm{Top}$ telle que H_0 soit un foncteur.

$\triangleright$ On raisonne par analyse synthèse. Si une telle structure existe, alors $\boxed{H_0(id_X) = id_{H_0(X),H_0} = [id_X]}$ et

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "{[f]}"] \\
Y \arrow[d, "g"'] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{H_0}"] & Y \arrow[d, "{[g]}"] \\
Z & Z
\end{tikzcd}$$

d'où $\boxed{[g] \circ [f] = [g \circ f]}$ ce qui définit au plus une structure de catégorie sur la classe des objets et des morphismes H_0. Réciproquement, la composition est bien définie de cette manière, car si l'on a

$$X \xrightarrow{f \overset{H}{\sim} f'} Y \xrightarrow{g \overset{K}{\sim} g'} Z$$

avec $H(-,0) = f, H(-,1) = f', K(-,0) = g, K(-,1) = g'$, alors $g \circ f \sim g' \circ f'$ par $\begin{array}{rccl} N : & X \times I & \longrightarrow & Z \\ & (x,t) & \longmapsto & K(H(x,t),t) \end{array}$; en effet, $N((-,0),0) = g \circ f$ et $N((-,1),1) = f$. ■

Remarque. La preuve précédente fixe des concepts et des notations, il faut s'y référer sans regimber.

Définition. ***(Diagramme homotopiquement commutatif)***

Un diagramme est dit *homotopiquement commutatif* s'il commute modulo la relation d'homotopie, par exemple dans Top :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "k"'] & Y
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif si son image dans $h\mathrm{Top}$ l'est, *i.e.* $gf \simeq kh$.

Remarque. La commutativité est plus forte que la commutativité modulo homotopie.

6.1.2.4 Deux types d'isomorphie nouveaux

Définition. ***(Équivalence d'homotopie)***

Soit $f : X \to Y$ un flèche de Top. On dit que f est une *équivalence d'homotopie* si $H_0(f)$ est un isomorphisme dans hTop, autrement dit s'il existe $g : Y \to X$ dans Top telle que $g \circ f \sim id_X$ et $f \circ g \sim id_Y$.
Deux espaces X et Y sont *homotopiquement équivalents* ou *ont le même type d'homotopie* s'ils sont isomorphes dans hTop, autrement dit s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $g \circ f \sim id_X$ et $f \circ g \sim id_Y$. On note $X \cong Y$ ou plus simplement $X \sim Y$.

Définition. ***(Rétract par déformation)***

Soient X,Y deux espaces topologiques avec $X \subseteq Y$ et $i : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion canonique. On dit que X est un *rétract par déformation* de Y s'il existe $r : Y \to X$ qui soit une rétraction de i dans Top et une équivalence d'homotopie, *i.e.* soit telle que $ri = id_X$ et $ir \sim id_Y$.

Exemple

Tout espace topologique X est un rétract par déformation de son cylindre $X \times I$, identifié à n'importe quelle hauteur de tranche.

6.1.2.5 Notion d'invariant topologique

On souhaite définir la notion d'invariant d'un espace topologique. On veut qu'il envoie non seulement un espace topologique sur un objet d'une certaine catégorie, mais qu'il soit fonctoriel en envoyant une flèche sur une flèche entre deux objets. On souhaite de plus que deux espaces homotopiquement équivalents soient envoyés sur deux objets isomorphes.

Définition. ***(Invariant topologique)***

On appelle *invariant topologique* un foncteur de hTop sur $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie.

Exemples. ***(Invariants topologiques)***

1. π_0 est un invariant topologique à valeurs dans Ens.
2. π_1 est un invariant topologique *pointé (voir la section suivante)* dans Grp, donc presque un invariant topologique. Π_1 est un invariant topologique dans la catégorie des groupoïdes.
3. Plus généralement, Π_n est un invariant topologique pour $n \geqslant 1$.
4. Les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie forment également une classe d'invariants topologiques.

Propriété. ***(Propriété universelle de l'homotopie)***

Un invariant est donc un foncteur $F : \mathrm{Top} \to \mathcal{C}$ une catégorie donnée qui se factorise par $h\mathrm{Top}$, visuellement :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[r, "H_0"] \arrow[dr, "F"'] & h_0\mathrm{Top} \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$h\mathrm{Top}$ vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur $\mathrm{Top} \to \mathcal{C}$ envoyant une équivalence d'homotopie de Top sur un isomorphisme de $\mathcal{C}$ se factorise par $h\mathrm{Top}$ et réciproquement tout foncteur $F : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathcal{C}$ se factorisant par $h\mathrm{Top}$ envoie les équivalences d'homotopie sur des isomorphismes.

▷ Supposons que F envoie une équivalence d'homotopie sur un isomorphisme. Sur les objets, on a forcément $F(X) = \tilde{F}(\underbrace{H_0(X)}_{=X})$ et donc on pose $\tilde{F}(X) = F(X)$ pour tout espace topologique X. Soit maintenant $f : X \to Y$ une application continue, alors on pose $\tilde{F}([f]) = F(f)$ par

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & {[f]} \arrow[d, mapsto, "\tilde{F}"] \\ & F(f) \end{tikzcd}$$

qui est bien définie, car $f \overset{H}{\sim} g$, soit $F(f) = F(g)$, équivaut à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d] & X \arrow[l, hook', "\iota_1"'] \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

qui par composition à F devient

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, hook, "F(\iota_0)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & F(X \times I) \arrow[l, bend right, "F(r)"'] \arrow[r, bend left, "F(r)"] \arrow[d, "F(H)"] & F(X) \arrow[l, hook', "F(\iota_1)"'] \arrow[dl, "F(g)"] \\ & F(Y) & \end{tikzcd}$$

d'où $F(f) = F(H) \circ F(\iota_0) = F(H) \circ F(\iota_1) = F(g)$ avec de plus $r\iota_0 = r\iota_1$, r étant la rétraction par déformation commune $(x,t) \mapsto x$ et donc $F(r)$ est un isomorphisme d'où $F(\iota_0) = F(\iota_1)$, car $F(r)F(\iota_0) = F(r)F(\iota_1)$.

Réciproquement, si $F = \tilde{F} \circ H_0$, si f morphisme de Top est une équivalence d'homotopie, par définition $H_0(f)$ est un isomorphisme, donc $F(f) = \tilde{F}(H_0(f))$ l'est, simplement parce que $\tilde{F}$ est un foncteur. ■

Puisque toute catégorie vérifiant cette propriété universelle est isomorphe à $h\mathrm{Top}$, on a :

Fait. ***(Identification de*** h**Top*****)***

hTop définie par sa propriété universelle est uniquement à isomorphisme près : c'est la catégorie localisée Top$[h-\text{eq}^{-1}]$ de Top par rapport à $h-$eq l'ensemble des équivalences d'homotopie. hTop est la catégorie dérivée de Top.

Rappelons qu'une telle construction est obtenue en considérant les chaînes finies de morphismes de hTop et de leurs inverses formels :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[l, bend right, "\sim"'] \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \bullet \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[l, bend right, "\sim"'] \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[l, bend right, "\sim"'] \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

prises modulo la relation d'équivalence engendrée par la composition des morphismes

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \approx \quad X \xrightarrow{gf} Z,$$

l'inversion formelle à droite

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, dashed, "f^{-1}"'] & X \arrow[l, bend right, "\sim"'] \end{tikzcd} \quad \approx \quad id_X$$

et l'inversion formelle à gauche

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "f^{-1}"'] & X \arrow[l, bend right, "\sim"'] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \quad \approx \quad id_Y.$$

6.1.2.6 Catégories relatives

Définition. ***(Catégorie relative*** $\mathrm{Top}_{(2)}$***)***

La *catégorie relative* $\mathrm{Top}_{(2)}$ a pour objets les couples d'espaces topologiques (X,A) où $A \subseteq X$ et pour morphismes $f : (X,A) \to (Y,B)$ les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subseteq B$.

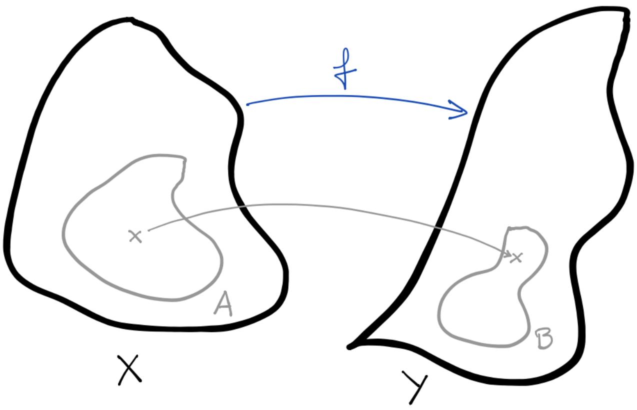


Figure 6.1.1 : *Illustration de la catégorie relative avec une paire topologique et un morphisme de paires.* —

Remarque importante. $\mathrm{Top}_{(2)}$ a la catégorie des espaces topologiques pointés Top_* pour sous-catégorie pleine, en prenant comme A l'ensemble des sous-espaces ponctuels de X. Un morphisme de (X,x_0) dans (Y,y_0) est alors tel que $f(x_0) = y_0$. On rappelle au passage que Top_* n'est autre que le quotient dual de Top par l'objet singleton standard.

Définition. ***(Homotopie dans la catégorie relative)***

Une *homotopie* (encore) entre flèches $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ de $\mathrm{Top}_{(2)}$ est une homotopie $H : X \times I \to Y$ entre f et g telle que $H(a,t) \in B$ pour tout $a \in A$ pour tout $t \in I$.
En particulier, $\boxed{\text{on peut définir } h\mathrm{Top}_{(2)}}$ et $\boxed{h\mathrm{Top}_*}$. On note $[X,Y]_* = h\mathrm{Top}_*(X,Y)$.

Définition. ***(Invariant topologique pointé)***

On appelle *invariant topologique pointé* un foncteur de $h\mathrm{Top}_*$ sur $\mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie.

Propriété. ***(Propriété universelle de l'homotopie pointée)***

Un invariant pointé est donc un foncteur $F : \mathrm{Top}_* \to \mathcal{C}$ une catégorie donnée qui se factorise par $h\mathrm{Top}_*$, visuellement :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top}_* \arrow[r, "H_{0*}"] \arrow[dr, "F"'] & h_0\mathrm{Top}_* \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\
& \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$h\mathrm{Top}_*$ vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur $\mathrm{Top}_* \to \mathcal{C}$ envoyant une équivalence d'homotopie pointée de Top_* sur un isomorphisme de $\mathcal{C}$ se factorise par $h\mathrm{Top}_*$ et réciproquement tout foncteur $F : \mathrm{Top} \longrightarrow \mathcal{C}$ se factorisant par $h\mathrm{Top}_*$ envoie les équivalences d'homotopie pointées sur des isomorphismes.

▷ À expliciter soi-même. ■

On pourrait même définir plus générale la notion d'*invariant topologique relatif*, mais sans grand intérêt.

Cette notion de *relativité* n'est pas idéale. On lui préfère :

Définition. ***(Homotopie relative à une partie)***

Soient X,Y deux espaces topologiques et $f,g : X \to Y$ dans Top telles que $f_{|A} = g_{|A}$. Une *homotopie relative à A* H entre f et g est une homotopie entre f et g telle que $H(a,t) = f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$, pour tout $t \in I$. On note $f \sim g$ rel A.

Une homotopie relative n'est pas une homotopie dans la catégorie relative ! Une homotopie relative est en particulier une homotopie dans la catégorie relative, mais c'est une notion strictement plus forte.

Définition. ***(Rétract par déformation forte)***

Soient X,Y deux espaces topologiques avec $X \subseteq Y$ et $i : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion canonique. On dit que X est un *rétract par déformation forte* de Y s'il existe $r : Y \to X$ qui soit une rétraction de i dans Top et une équivalence d'homotopie de plus relative à X à droite, *i.e.* soit telle que $ri = id_X$ et $ir \sim id_Y$, avec de plus $ir \sim id_Y$ rel X.

Remarque. On souhaiterait aussi définir $\mathrm{Top}_{(3)}$, $\mathrm{Top}_{(4)}$, etc. Pour ne pas perdre d'informations cruciales, allons-y doucement.

(Vers des catégories d'homotopie d'ordre supérieur) Considérons la suite composable d'homotopies

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left=70, "f"] \arrow[r, bend left=20, "g"'] \arrow[r, bend right=20] \arrow[r, bend right=70, "k"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow H"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow K"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "h \ \Downarrow L"] & Y.
\end{tikzcd}$$

On peut définir la composition d'homotopies sans problème par reparamétrisation. De même que dans le cas des lacets et du groupe fondamental, dans un monde ouvert d'esprit où une homotopie est une application $H : X \to [0,\lambda] \to Y$ pour un $\lambda > 0$ quelconque, la composition des homotopies serait associative, mais ce n'est pas le cas a priori sans reparamétrisation. Ainsi, on préfère considérer plutôt que les homotopies, les homotopies modulo l'homotopie relativement à $X \times \partial I$. On obtient alors une 2-catégorie $\Pi(X,Y)$, dite 2-*catégorie d'homotopie des espaces topologiques*, dont les objets sont les espaces topologiques, les 1-morphismes les applications continues et les 2-morphismes sont les classes d'homotopie entre applications continues modulo l'homotopie décrite ci-dessus.
Il est intuitif que continuer ce processus en considérant les homotopies entre homotopies entre homotopies, on peut obtenir une 3-catégorie, puis une n-catégorie, puis une ∞-catégorie, en un sens à préciser quand même dans la suite. La donnée d'une telle catégorie permettra de caractériser le type d'homotopie d'espaces gentils comme les CW-complexes !

6.1.3 Constructions topologiques catégoriques et constructions topologiques pointées

Faisons un pas de côté et voyons quelles constructions catégoriques peuvent être menées à bien dans Top, typiquement, quelles limites et colimites existent.

6.1.3.1 Rappels : produits et coproduits topologiques

Propriétés. ***(Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans*** Top***)***

1. Top admet des produits finis et si $X,Y \in \mathrm{Top}$, l'*espace topologique produit* $X \times Y$ est l'espace topologique sur $X \times Y$ dans Ens muni de la topologie produit qui est la topologie la moins fine rendant les projections canoniques continues.
2. Top admet des coproduits finis et si $X,Y \in \mathrm{Top}$, l'*espace topologique produit* $X \sqcup Y$ est l'espace topologique sur la réunion disjointe $X \sqcup Y$ dans Ens munie de la topologie somme qui est la topologie la plus fine rendant les inclusions canoniques continues.
3. Top admet des produits fibrés et si $X,Y,Z, f : X \to Z, g : Y \to Z \in \mathrm{Top}$, le *pullback* $X \times_Z Y$ est l'espace topologique sur $\{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ munie de la topologie la moins fine rendant f et g continues.
4. Top admet des sommes amalgamées et si $X,Y,Z, f : Z \to X, g : Z \to Y \in \mathrm{Top}$, le *pushout* $X \sqcup_Z Y$ est l'espace topologique sur ${}^{X \sqcup Y}\!/_{f(z) \sim f(z),\, z \in Z}$ munie de la topologie la plus fine rendant f et g continues.

On va essayer de construire les objets topologiques classiques (cylindre, cône, suspension...) au sein de la catégorie pointée, ce qui est assez bénin, mais permet une reformulation simple des objets de l'homotopie (chemins, lacets, groupe fondamental) qui nécessitent l'existence d'un point base dans leur définition.

Propriétés. ***(Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans*** Top_****)***

1. *(Produit pointé)* Dans Top_*, le produit de (X,x_0) et (Y,y_0) est donné par :
$$(X,x_0) \times (Y,y_0) = (X \times Y,(x_0,y_0))$$
muni de la topologie produit.
2. *(Bouquet, wedge-produit)* Dans Top_*, le coproduit = somme disjointe de (X,x_0) et (Y,y_0) est donnée par :
$$(X,x_0) \vee (Y,y_0) = ({}^{X \sqcup Y}\!/_{x_0 \sim y_0}, x_0 = y_0).$$
Rappelons le plongement naturel $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ par $x \mapsto (x,y_0)$ et $y \mapsto (x_0,y)$.
3. *(Produit fibré pointé)* Dans Top_*, le produit fibré de (X,x_0) et (Y,y_0) le long de (Z,z_0) est donnée par :
$$(X,x_0) \times_{(Z,z_0)} (Y,y_0) = (X \times_Z Y,(x_0,y_0)).$$

4. *(Somme amalgamée pointée)* Dans Top_*, la somme amalgamée de (X,x_0) et (Y,y_0) le long de (Z,z_0) est donnée par :

$$(X,x_0)\sqcup_{(Z,z_0)}(Y,y_0)=(X\sqcup_Z Y,x_0\sim y_0).$$

En LaTeX, le symbole du wedge-produit est appelé « vee », en anglais. Celui du smash-produit qui lui est lié et que nous allons introduire bientôt, qui est un $\wedge$, est appelé « wedge ».

6.1.3.2 Adjonctions topologiques pointées : curryfication et Σ-Ω

On conseille au lecteur de relire la définition de la Topologie compacte-ouverte ainsi que son rôle dans l'Adjonction topologique de curryfication.

Théorème. ***(Adjonction produit-fonctionnelle dans*** Top***)***

Si Y est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction

$$?\times Y:\mathrm{Top}\rightleftarrows\mathrm{Top}:(-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle $\mathrm{Top}(X\times Y,Z)\simeq\mathrm{Top}(X,Z^Y:=\mathrm{Top}(Y,Z))$.
Autrement dit, le produit d'espaces localement compacts étant localement compact, **la sous-catégorie des espaces topologiques localement compacts est une catégorie monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même** .

Corollaire. ***(Adjonction produit-fonctionnelle dans*** $h\mathrm{Top}$***)***

Si Y est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$?\times Y:h\mathrm{Top}\rightleftarrows h\mathrm{Top}:(-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle $h\mathrm{Top}(X\times Y,Z)\simeq h\mathrm{Top}(X,Z^Y:=h\mathrm{Top}(Y,Z))$.

$\triangleright$ Il est clair que ces foncteurs adjoints sont bien définis : si $f,g:X\to X'$ sont homotopes, $f\times id_Y$ et $g\times id_Y$ sont homotopes par $X\times Y\times I\to X'\times Y\times,(x,y,t)\mapsto(H(x,t),y)$. Similairement, f_* et g_* sont homotopes par $X^Y\times I\to X'^Y,(\varphi,t)\mapsto(y\mapsto H(\varphi(y),t)$.

Attention, il faut aussi vérifier que les bijections d'adjonction passent à la catégorie quotient. Pour cela, il suffit de voir que $f,g:X\times Y\to Y$ sont homotopes si et seulement si leurs curryfiées le sont. Or si $f\sim g$ par H, alors $(x,t)\mapsto H(x,y,t)$ est une homotopie entre $\check{f}$ et $\check{g}$, et réciproquement, si K est une homotopie entre $\check{f}$ et $\check{g}$, alors $(x,y,t)\mapsto K(x,t)(y)$ est une homotopie entre f et g. Elle est bien continue, car c'est une évaluation sur Y qui est localement compact. ■

On en déduit au passage un fait très intéressant :

Propriété. ***(Autodualité de l'homotopie)***

On dit que deux applications $f,g : X \to Y$ dans Top sont *cohomotopes* si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\check{H}"] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & Y^I \arrow[l, "e_0"] \arrow[r, "e_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

où $e_0(y) = y(0)$ et $e_1(y) = y(1)$. Alors deux applications sont homotopes si et seulement si elles sont cohomotopes.

▷ C'est la bifonctorialité : fonctorialité dans un sens, puis l'autre fonctorialité pour la condition réciproque, de l'adjonction de curryification dans Top que l'on utilise. ■

Corollaire

Les théorie de l'homotopie et de la cohomotopie des espaces topologiques sont équivalentes.

Exercice 2

1. Soient X,Z,A trois espaces topologiques. Pour tout $a \in A$, soit c_a l'application constante $Z \to A$ en a. Montrer que l'application $\psi : \begin{array}{ccc} X^Z \times A & \longrightarrow & (X \times A)^Z \\ (\varphi,a) & \longmapsto & (\varphi,c_a) \end{array}$ est continue.
2. Soient X,Y deux espaces topologiques et H une homotopie entre $f,g : X \to Y$ dans cet ordre. Soit Z un troisième espace. Montrer que H^Z définie pour tout $t \in H$ par le pushout $H^Z(-,t) := H(-,t)_*$ est une homotopie de f_* à g_*. De même, montrer que Z^H définie pour tout $t \in H$ par le pullback $Z^H(-,t) := H(-,t)^*$ est une homotopie de f^* à g^*.
3. En déduire que le pushout et le pullback d'une équivalence d'homotopie sont aussi des équivalences d'homotopie.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Si K est un compact de Z et $U \times V$ un ouvert de $X \times A$, alors $\psi^{-1}(W(K,U \times V)) = W(K,U) \times V$.
2. Sans astuce.
3. Conséquence directe.

Une généralisation bénigne

Ces résultats restent vrai dans une sous-catégorie de Top plus large que celle des espaces localement compacts, qui contient également tous les CW-complexes. Il s'agit de considérer les espaces topologiques X *faiblement Hausdorff compactement engendrés (CHWF)*. Ils vérifient les deux conditions suivantes :

- ⋆ *(faiblement Hausdorff)* toute application continue $f : E \longrightarrow X$ où X est compact (en particulier séparé) a une image fermée. Tout espace séparé est faiblement Hausdorff et tout espace faiblement Hausdorff est T_1, *i.e.* les points y sont fermés ;
- ⋆ *(compactement engendrés)* X est un quotient d'une somme topologique d'espaces compacts, ou, ce qui est équivalent, la topologie sur X est la topologie finale relativement à toutes les applications continues $f : K \longrightarrow X$ pour K parcourant la catégorie des espaces topologiques compacts.

Dans cette catégorie complète et cocomplète, l'Hom interne existe ce qui rend la catégorie des espaces topologiques faiblement Hausorff compactement engendrés monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même.

On se demande maintenant si cela vaut encore dans Top_* et alors $h\mathrm{Top}_*$. Mais il faut pouvoir construire un certain produit dans cette catégorie vérifiant qu'entres espaces pointés $(X,x_0),(Y,y_0),(Z,z_0)$, on a une application continue pointée $\begin{array}{ccc} X \times Y & \longrightarrow & Z \\ (x_0,y_0) & \longmapsto & z_0 \end{array}$ si et seulement si on en a une $\begin{array}{ccc} (X,x_0) & \longrightarrow & (Z^Y, cst_{z_0}) \\ x_0 & \longmapsto & (y \mapsto z_0) \end{array}$, $\boxed{\text{l'application constante } y \mapsto z_0 \text{ étant naturellement le point base de } Z^Y := \mathcal{C}(Y,Z)}$. Or ce n'est pas vrai pour le simple produit. On définit par suite le

Définition. ***(Smash-produit)***

Soient (X,x_0) et (Y,y_0) deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de (X,x_0) et (Y,y_0) est

$$X \wedge Y := {}^{X \times Y}\Big/_{\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}},$$

pointé en $\overline{(x_0,y_0)}$.

Alors :

Fait. ***(Adjonctions produit-fonctionnelle dans*** Top_* ***et*** $h\mathrm{Top}_*$***)***

Si Y est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : \mathrm{Top}_* \rightleftarrows \mathrm{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle $\mathrm{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq \mathrm{Top}_*(X, Z^Y := \mathrm{Top}_*(Y,Z))$. De plus, lorsque X est lui-même localement compact, $Z^{X \wedge Y} \simeq Z^{Y^X}$ est un homéomorphisme pointé *(loi d'exponentiation pointée)*.
De même, si Y est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : h\mathrm{Top}_* \rightleftarrows h\mathrm{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle $h\mathrm{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq h\mathrm{Top}_*(X, Z^Y := h\mathrm{Top}_*(Y,Z))$.
Par construction du smash-produit, on a des bijections naturelles $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}_*}(X \wedge Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}_*}(X, Z^Y)$ qui induisent donc des bijections d'adjonction dans Top_*. Plus explicitement, à $f : X \wedge Y \to Z$ pointée en $f(x_0,y_0) = z_0$, on associe $g : X \mapsto Z^Y$ définie sans problème par $x \mapsto (y \mapsto f(x,y))$. Elle est bien pointée, car $g(x_0)$ à y fait correspondre $f(x_0,y) = z_0$, car $(x_0,y) = (x_0,y_0)$. Réciproquement, à $g : X \to Z^Y$ on associe $f(x,y) = g(x)(y)$, qui est bien définie, car $f(x_0,y) = z_0$ toujours et $f(x,y_0) = f(x)(y_0) = z_0$ toujours, car $g(x)$ est pointée par hypothèse ! Enfin, f est bien pointée elle-même, car $g(x_0)(y_0) = g(x_0)(y_0) = z_0$, car $g(x_0) = cste_{z_0}$. Ces applications sont, sans différence avec la curryfication classique, réciproques l'une de l'autre, donc sont bien des bijections d'adjonction, et de même sont fonctorielles.
La loi d'exponentiation se montre mot à mot comme celle du cas non pointé. Enfin, l'adjonction dans $h\mathrm{Top}_*$ se déduit de celle de Top_* par les mêmes arguments donnés pour avoir l'adjonction de $h\mathrm{Top}$ à partir de celle de Top.

Heuristique

Le smash-produit est le produit tensoriel de la catégorie des espaces topologiques pointés.

On peut donner d'autres adjonctions, plus restrictives mais qui sont classiques.

Définition. ***(Cylindre d'un espace topologique pointé)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit son *cylindre (pointé)* :

$$\mathrm{Cyl}(X,x_0) = \mathfrak{C}(X,x_0) = \left(\frac{X \times I}{\{x_0\} \times I}, (x_0,t)\right).$$

Remarque. Comme souvent, on note t pour ne pas trop induire en erreur, même si c'est légèrement dépourvu de sens : on pourrait écrire $(x_0,1)$ à la place. Mais on pourrait aussi prendre $(x_0,0)$, et même $(x_0,\frac{1}{3})$, et en fait, n'importe quel (x_0,t), $t \in [0,1]$, d'où la notation.

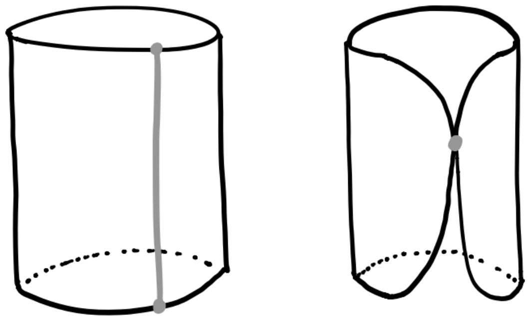


FIGURE 6.1.2 : *Cylindre pointé.* —
On représente classiquement $\mathrm{Cyl}(S^1,*)$.

Ne nous leurrons pas. Nous ne l'appelons cylindre que parce que l'on veut qu'il vérifie des propriétés similaires au cylindre pour les espaces topologiques non pointés. Même remarque pour le cône pointé et la suspension pointée à venir.

Proposition. ***(Le cylindre représente les homotopies pointées)***

On a la bijection $\mathrm{Top}_*(\mathrm{Cyl}(X,x_0),Y) \simeq \left\{ \begin{array}{c} H : X \times I \to Y \\ H(x_0,t) = y_0 \qquad \forall t \end{array} \right\}$.

Définition. ***(Cône d'un espace topologique pointé)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit son *cône (pointé)* :

$$\mathrm{Cone}(X,x_0) = C(X,x_0) = \left(\frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\}}, (x_0,t) \right).$$

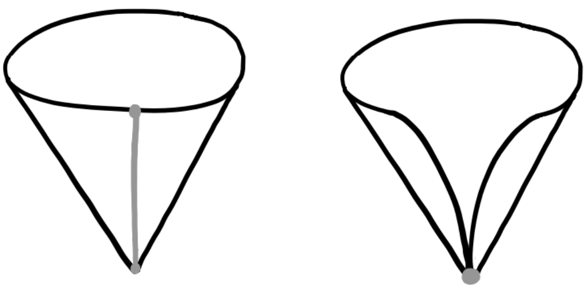


FIGURE 6.1.3 : *Cône pointé.* —
On représente classiquement $\mathrm{Cone}(S^1,*)$.

Proposition. ***(Le cône (co)représente les homotopies pointées depuis une constante)***

On a la bijection $\mathrm{Top}_*(\mathrm{Cone}(X,x_0),Y) \simeq \left\{\begin{matrix} H : X \times I \to Y & \\ H(x_0,t) = y_0 & \forall t \\ H(x,0) = y_0 & \forall x \end{matrix}\right\}$.

Définition. ***(Suspension d'un espace topologique pointé)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit sa *suspension (pointée)* :

$$\Sigma(X,x_0) = \left(\frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I}, (x_0,t) \right).$$

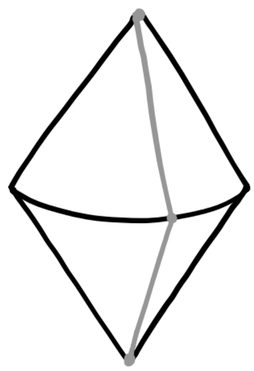


FIGURE 6.1.4 : *Suspension pointée.* —
On représente classiquement $\Sigma(S^1,*)$.

Proposition. ***(La suspension (co)représente les homotopies pointées entre deux constantes)***

On a la bijection $\mathrm{Top}_*(\Sigma(X,x_0),Y) \simeq \left\{\begin{matrix} H : X \times I \to Y & \\ H(x_0,t) = y_0 & \forall t \\ H(x,0) = y_0 & \forall x \\ H(x,1) = y_0 & \forall x \end{matrix}\right\}$. En effet, $\partial I = \{0\} \cup \{1\}$.

Pour énoncer proprement le rôle de ces trois constructions pointées, introduisons deux espaces déjà rencontrés plus haut avec un formalisme systématique.

Définition. ***(Espace des chemins)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit son *espace des chemins (pointés)* :

$$\mathrm{Path}(X) = \mathrm{Chemins}(X) = (\{\varphi : I \to X \mid \varphi(0) = x_0\}, cst_{x_0}).$$

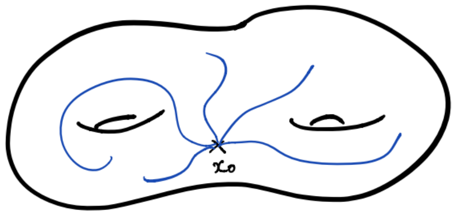


FIGURE 6.1.5 : *Chemin pointé.* —

Définition. ***(Espace des lacets)***

Soit (X,x_0) un espace topologique pointé. On définit son *espace des lacets (pointés)* :

$$\mathrm{Loop}(X) = \mathrm{Lacets}(X) = \Omega X = (\{\varphi : I \to X \mid \varphi(0) = x_0 = \varphi(1)\}, cst_{x_0}).$$

Remarque. Ces deux dernières constructions sont des sous-objets de $\mathrm{Top}_*(I,X)$ en considérant un espace X.

Exercice 3 *(Fonctorialité des cylindres, cônes, suspensions,* Hom *pointés, chemins et lacets)*

Montrer que les six constructions pointées : $\mathrm{Cyl}(X)$, $\mathrm{Cone}(X)$, $\Sigma X)$, $\mathrm{Top}_*(I,X)$, $\mathrm{Path}(X)$ et $\mathrm{Loop}(X)$ sont fonctorielles, *i.e.* chacune d'elle, notée ici F, pour toute application continue pointée $f : X \to Y$, induit $F(f) : F(X) \to F(y)$ de façon compatible avec la composition et l'identité.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Soient X,Y deux espaces pointés par x_0,y_0 respectivement et $f : X \to Y$ une application continue pointée. On pose $f : \mathrm{Cyl}(X) \to \mathrm{Cyl}(X)$ définie par $f(x,t) = (f(x),t)$. Elle est bien définie, car pour $f(x_0,t) = (f(x_0),t) = (f(x_0),t) = f(x_0,t)$ en tous $t,t' \in I$. On voit au passage que f est bien pointée, car $f(x_0,t) = (y_0,t)$ puisque $f(x_0) = y_0$. Il est clair que f envoie l'identité sur $id_{C(X)}$ et commute avec la composition.
2. Même chose, en vérifiant un peu plus mais sans aucune difficulté que f est bien définie.
3. Encore une fois, c'est la même chose.
4. Il suffit de considérer la postcomposition : $f : X \to Y$ continue pointée induit $f_* : X^I \to Y^I$ par $g \mapsto f \circ g$. On sait déjà que $\cdot_*$ est un foncteur. Reste à vérifier qu'il est pointé, ce qui est immédiat, car $f \circ cst_{x_0} = cst_{f(x_0)} = cst_{y_0}$.
5. Le foncteur précédent se restreint bien aux chemins basés au point base.
6. Et également aux lacets basés au point base.

Exercice 4

Construire des transformations naturelles $\mathrm{Cyl} \to \mathrm{Cone} \to \Sigma$. De même, construire des transformations naturelles $\Omega \to \mathrm{Path} \to (-)^I$.

▹ **Éléments de réponse.**

Pour tout espace X, on passe de $\mathrm{Cyl}(X)$ à $\mathrm{Cone}(X)$ par un passage au quotient. De même, on passe de $\mathrm{Cone}(X)$ à $\Sigma(X)$ par un passage au quotient. Pour l'autre suite de transformations, on considère la suite donnée par $\Omega X \hookrightarrow \mathrm{Path}(X) \hookrightarrow X^I$.

On a :

Proposition

Soient X,Y deux espaces topologiques, avec Y localement compact. Alors :

1. *(Adjonction cylindre-applications)* On rappelle que $Y^I := \mathrm{Top}_*(X,Y)$ est pointé par l'application constante. Alors :

$$\mathrm{Top}_*(\mathrm{Cyl}(X),Y) \simeq \mathrm{Top}_*(X,Y^I)$$

   fonctoriellement dans Top_* en (X,x_0) et (Y,y_0). En particulier, la donnée d'une homotopie pointée entre deux applications pointées f,g équivaut à une application pointée $\check{H} : (X,x_0) \to (Y^I,cste)$ satisfait au diagramme commutatif dans Top_* :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\check{H}"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y & Y^I \arrow[l, "e_0"] \arrow[r, "e_1"'] & Y. \end{tikzcd}$$

2. *(Adjonction cône-chemins)* On constate que $\mathrm{Path}(Y,y_0)$ est pointé par l'application constante. Alors

$$\mathrm{Top}_*(\mathrm{Cone}(X),Y) \simeq \mathrm{Top}_*(X,\mathrm{Path}(Y)).$$

   fonctoriellement dans Top_* en (X,x_0) et (Y,y_0). En particulier, la donnée d'une homotopie pointée de l'application constante à une application pointée f équivaut à une application pointée $\check{H} : (X,x_0) \to (\mathrm{Path}(X),cste)$ telle que $e_1(\check{H}) = f$. On parle aussi d'adjonction Cone-Path.

3. *(Adjonction suspension-lacets)* On constate que $\mathrm{Loop}(Y,y_0)$ est pointé par l'application constante. Alors

$$\mathrm{Top}_*(\Sigma(X),Y) \simeq \mathrm{Top}_*(X,\mathrm{Loop}(Y)).$$

   fonctoriellement dans Top_* en (X,x_0) et (Y,y_0). En particulier, la donnée d'une homotopie pointée de l'application constante à elle-même équivaut à une application pointée $X \to \Omega Y$. On parle aussi d'adjonction Σ-Ω.

De plus, si X est localement compact également, les bijections d'adjonction précédentes sont des homéomorphismes en munissant les espaces des topologies compactes-ouvertes.

▹ Il n'y a en fait rien à faire ! Les adjonctions sont toutes vraies ensemblistement, et se déduisent au niveau topologique pointé des considérations générales précédentes sur l'adjonction de curryification topologique. ■

Corollaire. ***(Adjonction homotopique suspension-lacets)***

On a une adjonction
$$\Sigma : h\mathrm{Top}_* \rightleftarrows h\mathrm{Top}_* : \Omega$$
dont les bijections d'adjonction sont internes.

6.1.3.3 Smash-produit. Lien avec la suspension

Définition. ***(Smash-produit)***

Soient (X,x_0) et (Y,y_0) deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de (X,x_0) et (Y,y_0) est
$$X \wedge Y := {X \times Y}\big/_{\{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}},$$
pointé en $\overline{(x_0,y_0)}$.

Remarque. On notera l'analogie formelle avec le bouquet, aussi appelée wedge-produit.

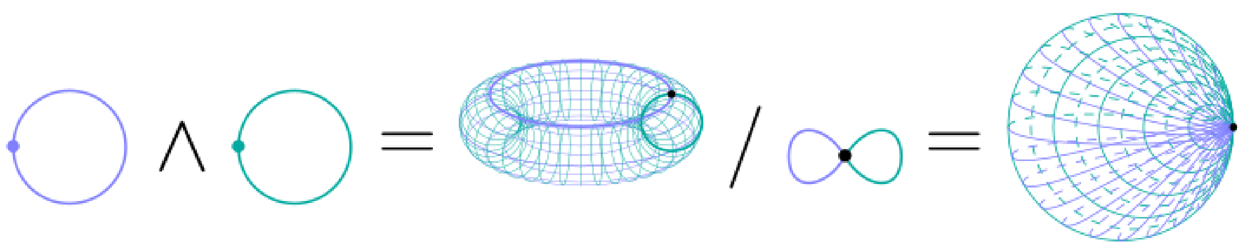


FIGURE 6.1.6 : *Smash-carré du cercle S^1.* —
On considère le produit $S^1 \times S^1$ qui est un tore, puis on l'écrase selon le protocole proposé. On trouve la sphère S^2.

Exemples. ***(Smash-produits)***

1. $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$.

   En effet, il s'agit d'écraser le tore $S^1 \times S^1$ sur la réunion rencontrée en un unique point deux cercles générateurs.
2. Soient $n,m \in \mathbb{N}$. Alors $S^n \wedge S^m \cong S^{m+n}$.

Propriété. ***(Lien wedge-produit et smash-produit)***

Soient X,Y deux espaces topologiques pointés. Alors
$$X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

▷ Puisque $X \vee Y = \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} \hookrightarrow X \times Y$ par $x \mapsto (x,y_0)$, $y \mapsto (x_0,y)$, bien défini bien sûr en x_0 et y_0, on a $X \vee Y \simeq \{(x,y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ OU } y = y_0\} = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$, d'où $X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}$. ■

Mnémonik : on a un complément $(X \vee Y)(X \wedge Y) = X \times Y$. Attention toutefois, cela ne fait pas sens d'écrire *"$\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}{\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}}$"*.

Propriétés. ***(Propriétés calculatoire du smash-produit)***

Soient X,Y,Z trois espaces pointés fixés.

1. *(Commutativité du smash)* Alors $X \wedge Y \cong Y \wedge X$.
2. *(Associativité du smash)* Si les espaces sont localement compacts, $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$.
3. *(Neutralité du point double pour le smash)* Le double point S^0 pointé, qui est le *point dans* Top_*, est l'élément neutre du smash-produit : $X \wedge S^0 \cong X$.

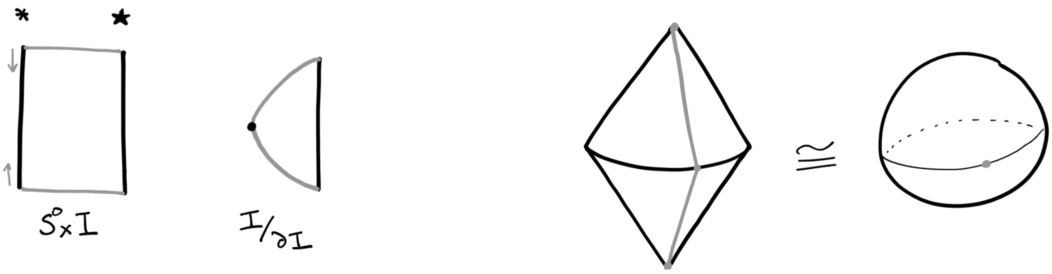
▷ Successivement :

1. Par symétrie dans la définition et l'homéomorphisme $X \times Y \simeq Y \times X$.
2. Un peu informellement : $(X \wedge Y) \wedge Y = \frac{(X \wedge Y) \times Z}{(X \wedge Y) \times \{z_0\} \cup \{(x_0,y_0)\} \times Z} \simeq \frac{X \times Y \times Z}{X \times \{(y_0,z_0)\} \cup \{x_0\} \times Y \times \{z_0\} \cup \{(x_0,y_0)\} \times Z}$ qui est symétrique en X,Y,Z. Pour le démontrer proprement, il faudrait passer aux Hom en utilisant l'adjonction de curryfication.
3. Montrons que $X \wedge \underbrace{(\{*,\star\},*)}_{=S^0} \simeq X$. On sait que $X \times S^0 = X^1 \sqcup X^2$ où X^1,X^2 sont deux copies de X. Par définition, on a alors $X \wedge S^0 = \frac{X^1 \sqcup X^2}{X^1 \cup (\{x_0\} \times S^0)}$, quotient qui équivaut à l'équivalence $x_0 \in X^1 \sim x_0 \in X^2$, d'où $X \wedge S^0 \simeq X$. ■

Exemple fondamental. ***(Suspensions sphériques pointées)***

On a $\Sigma(S^0,\star) \cong S^1$ pointé n'importe où. De même, $\Sigma(S^1,*) \cong S^2$ pointée n'importe où. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma(S^n,\bullet) \cong (S^{n+1})$ pointée n'importe où. On peut noter bien sûr $\Sigma S^n = \Sigma^n S^0$ la *suspension n-ième itérée (pointée) de la 0-sphère*, qui coïncide donc avec suspension pointée de la n-sphère. On sait donc que c'est aussi, à homéomorphisme pointé près, la $n+1$-sphère.

L'isotropie des sphères permet de pointer n'importe où et après coup. Il suffit donc de raisonner en terme d'espaces topologiques non pointés, ce qui a déjà été fait dans le passé.



(a) *Suspension pointée de* S^0*.* — (b) *Suspension pointée de* S^1*.* —

FIGURE 6.1.7 : *Premières suspensions des sphères.* —
Légende double.

Remarque. On n'a besoin que d'équivalences d'homotopie, mais beaucoup de celles notées sont en fait des homéomorphismes.

On peut observer que

Fait. ***(Formule de la suspension avec le smash-produit)***

Pour tout espace topologique localement compact X, $\Sigma X \cong X \times S^1$.

En effet, $\Sigma X = {}^{X \times I}\!\diagup_{\{x_0\} \times I \cup X \times \{1\} \cup X \times \{0\}}$, mais $X \times \{1\} \cup X \times \{0\} = X \times \{0,1\}$ où $\{0,1\} = \partial I$, et d'autre part, $X \wedge S^1 = {}^{X \times S^1}\!\diagup_{X \times \{t_0\} \cup \{x_0\} \times S^1}$ où l'on peut sans problème prendre S^1 pointé en $t_0 = \overline{1} = \overline{0}$ lorsque $S^1 = I/\partial I$.

C'est en fait très visuel, en observant (avec des yeux quadridimensionnels) la construction de la suspension pointée, faite justement sur le cercle.

Plus généralement :

Proposition. ***(Formule de la suspension utérée avec le smash-produit)***

Pour tout espace topologique localement compact X, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma^n X \simeq X \wedge I^n/\partial I^n \cong X \wedge S^n$.

▷ On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, c'est le fait précédent. Supposons que $\Sigma^n X \simeq X \wedge (I^n/\partial I^n)$. Alors $\Sigma^{n+1} \cong \Sigma(\Sigma^n X) \cong \Sigma(X \wedge I^n/\partial I^n) \cong (X \wedge I^n/\partial I^n) \wedge I/\partial I$ par le cas $n = 1$, et par associativité dans le cas localement compact, c'est $X \wedge (I^n/\partial I^n \wedge I/\partial I)$. De plus,

$$I^n/\partial I^n \wedge I/\partial I = {}^{I^n/\partial I^n \times I/\partial I}\!\diagup_{I^n/\partial I^n \times \partial I \cup \partial I^n \times I/\partial I} \cong {}^{I^n \times I}\!\diagup_{\partial I^n \times I \cup I^n \times \partial I} = I^{n+1}/\partial I^{n+1}$$

d'où l'hérédité. ■

On retrouve :

Corollaire. ***(Suspension itérée de S^0)***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma^n S^0 \cong S^n$.

▷ Par la proposition, $\Sigma^n S^0 \cong S^0 \wedge I^n/\partial I^n \cong I^n/\partial I^n$, car S^0 est neutre pour le smash. ■

Définition. ***(Spectre des sphères)***

On a une suite :

$$S^0 \xrightarrow{\Sigma} S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

infinie.

Heuristique

Le spectre des sphères est un objet universel, qui joue un rôle fondateur en théorie de l'homotopie stable. La catégorie des spectres est la bonne catégorie pour représenter les théories cohomologiques, et le spectre sphérique est l'unité de cette catégorie.

⟶ *Notation.* On note encore le foncteur $\Sigma : h\mathrm{Top}_* : h\mathrm{Top}_*$.

6.1.4 Groupes d'homotopie supérieurs

6.1.4.1 Construction formelle de l'homotopie supérieure

Définition-propriété. ***(Pincement)***

Soit X un espace topologique pointé. Le *pincement* associé à X est l'application pointée

$$\Sigma X \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X$$

définie de la manière suivante : puisque

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & & \Sigma X \vee \Sigma X \\ \uparrow\!\!\uparrow & & \uparrow\!\!\uparrow \\ X \times I & & X \times I \cup X \times I \end{array}$$

où cependant $X \times I \cup X \times I$ n'est pas pointé, on pose

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} (x,2t) \text{ dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (x,2t-1) \text{ dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

▷ Elle passe au quotient, car $(x,0) \mapsto (x,0) = *$, $(x,1) \mapsto (x,1) = *$ et $(x_0,t) \mapsto (x_0,\star) = *$. Enfin, pinch est pointée. ■

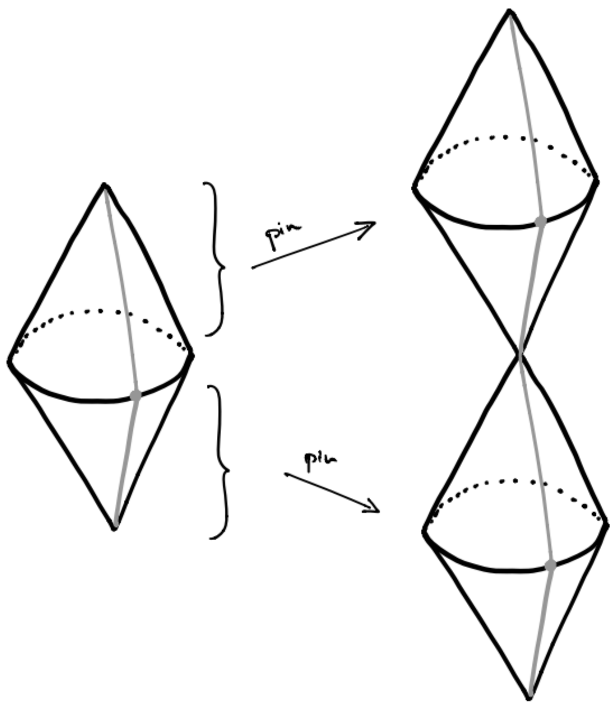


FIGURE 6.1.8 : *Pincement.* —
Le pinch est parfois aussi noté pin, sans confusion possible.

Fait. ***(Composition des applications définies sur une suspension pointée)***

Soient X,Y deux espaces topologiques pointés. Soient $f,g \in \mathrm{Top}_*(\Sigma X,Y)$. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}_*(\Sigma X, Y) \times \mathrm{Top}_*(\Sigma X, Y) \arrow[drr, "\bullet"'] & \equiv & \mathrm{Top}_*(\Sigma X \vee \Sigma X, Y) \arrow[d, "\mathrm{pinch}^*"] \\ & & \mathrm{Top}_*(\Sigma X, Y) \end{tikzcd}$$

qui permet de définir $f \bullet g : \Sigma X \xrightarrow{\mathrm{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$, explicitement donnée par

$$(f \bullet g)(x,t) \mapsto \begin{cases} f(x,2t) \text{ dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(x,2t-1) \text{ dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour l'instant, cette opération telle quelle n'est ni associative, ni unitaire.

D'une façon très similiaire à la construction du groupe fondamental, en fait, qui le généralise, nous rendons cette loi une loi de groupe à homotopie près.

Lemme. ***(Définition du groupe fondamental généralisé)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Alors $([\Sigma X,Y]_*, \bullet ,[cst_{y_0}])$ est un groupe. (On rappelle que $[\Sigma X,Y]_* \simeq_{\dashv} \mathrm{Top}_*((X,x_0),\Omega(Y,y_0))$.)

▷ Faisons-le.

⋆ La loi $f \bullet g$ est bien définie : si $f \overset{H}{\sim} f'$ rel $\{*\}$, $f,f' : \Sigma X \to Y$ et $g : \Sigma X \to Y$, alors $f \bullet g \sim K f' \bullet g$ rel $\{*\}$. En effet, pour $\begin{array}{rccl} H\colon & \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t,s) & \longmapsto & H(x,t,s) \end{array}$ avec $H(x,t,0) = f(x,t)$, $H(x,t,1) = f'(x,t)$ et $H(x_0,t,s) = y_0$, on pose $\begin{array}{rccl} K\colon & \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t,s) & \longmapsto & \begin{cases} H(x,2t,s) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \end{array}$ continue et telle que $H(x,1,s) = y_0 = g(x,0)$; en $s = 0$, on a $f \bullet g$; en $s = 1$, on a $f' \bullet g$; enfin, K est pointée car $K(x_0,t,s) = y_0$. La même compatibilité vaut à droite ce qui permet de conclure sur la bonne définition.

⋆ Montrons que $f \bullet cst_{y_0} \overset{H}{\sim} f$ rel $\{*\}$. Il suffit de poser $\begin{array}{rccl} H\colon & \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y. \\ & (x,t,s) & \longmapsto & \begin{cases} f(x,\frac{2t}{1+s} & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{2} \\ y_0 & \frac{1+s}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \end{array}$

⋆ Exhibons $f \bullet (g \bullet h) \overset{H}{\sim} (f \bullet g) \bullet h$ rel $\{*\}$. On pose $\begin{array}{rccl} H\colon & \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y. \\ & (x,t,s) & \longmapsto & \begin{cases} f(x,\frac{4}{1+s}t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{4} \\ g(x,4(t-\frac{1+s}{4}) & \frac{1+s}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2+s}{4} \\ h(x,\frac{2+s}{4}\frac{1}{1-\frac{2+s}{4}}(t-\frac{2+s}{4}) & \frac{2+s}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \end{array}$

⋆ Pour l'inversibilité, $f \bullet \overline{f} \sim cst_{y_0}$ rel $\{*\}$ où $\begin{array}{rccl} \overline{f}\colon & \Sigma X & \longrightarrow & Y. \\ & (x,t) & \longmapsto & f(x,1-r) \end{array}$

Donc $[\Sigma X,Y]$ est bien un groupe. ■

Remarque. On se rappelle qu'une application de $\mathrm{Top}_*(\Sigma X,Y)$ est une homotopie pointée depuis et jusqu'à l'application constante entre X et Y, et que le produit $\bullet$ est alors une composition paramétrée d'elles d'eux. On peut aussi voir une homotopie entre deux telles applications comme une application relative à $X \times \partial I$. Sous cette interprétation, un groupe fondamental générailsé est une 2-catégorie *(au sens mentionné dans la section précédente).*

Observation. ***(Groupe fondamental du premier ordre)***

Le groupe fondamental $\pi_1(X,x_0) = ([S^1 X]_*, \bullet ,[cst_{x_0}])$ où de plus

$$[S^1 X]_* \simeq [\Omega X]_* \simeq [S^0,\Omega X]_* \simeq [\Sigma S^0, X]_*.$$

Définition. ***(Groupes d'homotopie supérieur)***

Soit X un espace topologique. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\pi_n(X,x_0) := ([\Sigma^n S^0,X]_* = [S^n,X]_*, \bullet ,[cst_{x_0}])$$

le *n-ième groupe d'homotopie* de X.

$\longrightarrow$ *Convention.* Pour $n = 0$, on pose $\pi_0(X,x_0) = [S^0,X]_*$ qui n'est autre que l'ensemble des composantes connexes de X.

$\triangleright$ En effet, ■

Proposition. ***(Invariance homotopique des groupes d'homotopie)***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, π_n est un invariant topologique pointé.

$\triangleright$ $\pi_n : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Grp}$ se factorise à travers $h\mathrm{Top}_*$: si $f : (X,x_0) \xrightarrow{\sim} (Y,y_0)$ est une équivalence, $\pi_n(f) : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ est une bijection, car $\pi_n(X,x_0) = [\Sigma^n S^0,X]_* \overset{f_*}{\simeq} [\Sigma^n S^0,Y]_* = \pi_n(Y,y_0)$. ■

Proposition

L'endofoncteur Σ induit un morphisme de groupes $(\Sigma X,Y]_*, \bullet ,[cst,y_0]) \xrightarrow{\Sigma} ([\Sigma^g X, \Sigma Y], \bullet, [cst])$.

Exemples

1. *(Invariants homotopiques du vide)* $\pi_n(\emptyset) = (\{0\}, + ,0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si X est discret, $\pi_n(X) = \begin{cases} (\{0\}, + ,0) \text{ si } n \geqslant 1 \\ X \text{ sinon.} \end{cases}$
3. Si X est contractile, $\pi_n(X) = (\{0\}, + ,0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $\pi_1(S^1) = (\mathbb{Z}, + ,0)$.
5. $\pi_k(S^n)$ est un problème ouvert.

Théorème. ***(Commutativité des groupes d'homotopie supérieurs)***

Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $[\Sigma^n X,Y]_*, \bullet ,[cst_{y_0}])$ est abélien. En particulier, $\pi_n(X,x_0)$ est abélien pour tout $n \geqslant 2$.

Pour montrer cela, on aura besoin du

Lemme. ***(Argument d'Eckmann-Hilton)***

Étant donnés deux magmas unitaires $(+_1,u_1)$ et (t_2,u_2) sur un même ensemble A qui satifsont la *relation d'échange* :

$$(x +_1 x') +_2 (y +_1 y') = (x +_2 y) +_1 (x' +_2 y'),$$

ces deux magmas sont les mêmes et sont en fait associatifs et commutatifs.

▷ Montrons que $u_1 = u_2 = u$. En utilisant la neutralité, on a $u_2 = (u_2 +_1 u_1) +_2 (u_1 +_1 u_2) = (u_2 +_2 u_1) +_1 (u_1 +_2 u_2) = u_1$.

De même, $x +_2 y = (x +_1 u) +_2 (u + y) = (x +_2 u) +_1 (u +_2 y) = x +_1 y$, donc $+_1 = +_2 = +$.

La loi $+$ est commutative. En effet, $x + y = (u + x) + (y + u) = (u + y) + (x + u) = y + x$.

Elle est de plus associative, car $(x + y) + z = (x + y) + (u + z) = (x + u) + (y + z) = x + (y + z)$. ■

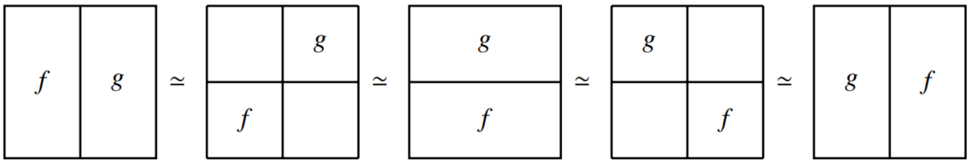


FIGURE 6.1.9 : *Principe d'Eckmann-Hilton.* —

Montrons maintenant le théorème de commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

Preuve.

▷ Soit n un entier plus grand que 2. Soient $f,g : \Sigma^n X \to X$ où $\Sigma^n X = \Sigma(\Sigma^{n-1}X)$ et $X \times I^n \twoheadrightarrow \Sigma^n X$. Explicitement, $f : (x,t_1,\dots,t_n) \mapsto f(x,t_1,\dots,t_n)$. Considérons $+_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ définie par $f +_i g(x,t_1,\dots,t_n) := \begin{cases} f(x,t_1,\dots,2t_i,\dots,t_n) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(x,t_1,\dots,2t_i - 1,\dots,t_n) & \frac{1}{2} \leqslant t_i \leqslant 1. \end{cases}$ En particulier, $\bullet = +_n$. Il est clair quoique très fastidieux à vérifier que les $+_i$ sont bien définies sur $[\Sigma^n X,Y]_*$ et unitaires, mais c'est la même preuve que pour $\bullet$. Vérifions la loi d'échange pour appliquer l'argument d'Eckmann-Hilton, qui en particulier donnera que les $+_i$ sont les mêmes et que $+_n = \bullet$ sera commutative. Montrons là pour $+_1$ et $+_2$ même s'il faut la démontrer pour $+_1$ et $+_2$. On a $(f +_1 f') +_2 (g +_1 g'))(x_1,t_1,\dots,t_n) = \begin{cases} f(x,2t_1,2t_2,\dots,t_n) & 0 \leqslant t_2 \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ f'(x,2t_1 - 1,2t_2,\dots,t_n) & 0 \leqslant t_2 \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \\ g(x,2t_1,2t_2 - 1,\dots,t_n) & \frac{1}{2} \leqslant t_2 \leqslant 1, 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g'(x,2t_1 - 1,2t_2 - 1,\dots,t_n & \frac{1}{2} \leqslant t_2 \leqslant 1, \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases}$ d'où l'égalité de cette fonction à $(f +_2 g) +_1 (f' +_2 g)$. ■

Exercice 5 *(Abélianité du π_2)*

Montrer directement que $([\Sigma^2,Y]_*,+_1)$ est abélien.

6.1.4.2 Fonctorialité des groupes d'homotopie supérieurs

6.1.4.3 Équivalences faibles d'homotopie

Définition. ***(Équivalence faible d'homotopie)***

Soient $(X,x),(Y,y)$ deux espaces topologiques et une application continue pointée $f : X \to Y$. On dit que f est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les morphismes induits $f_n : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,y)$ sont des isomorphismes, *i.e.* si f est un quasi-isomorphisme dans le complexe homotopique.

Fait. ***(Équivalence d'homotopie $\implies$ équivalence faible d'homotopie)***

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

$\longrightarrow$ *Notation.* Dans le cadre de l'homotopie supérieure, on identifie deux groupes d'homotopie isomorphes par un signe $=$.

Contre-exemple. ***(Équivalence faible d'homotopie $\not\Longrightarrow$ équivalence d'homotopie)***

Une équivalence faible d'homotopie n'est pas forcément une équivalence d'homotopie. On considère W le cercle de Varsovie. Soient a,b deux points sur la courbe avec a sur le segment $\{0\} \times [-1,1]$ et b sur la courbe reliant les deux sinus du topologue. Alors on peut calculer que l'application identité $f : \{a,b\} \to W$ est une équivalence faible d'homotopie. Cependant, on sait que W a deux composantes connexes, donc toute application $g : W \to \{a,b\}$ est constante, de sorte qu'il est impossible de $gf \sim id_{\{a,b\}}$ et $fg \sim id_W$. $\square$

6.1.4.4 n-connexité

Définition. ***(n-connexité)***

Soit X un espace topologique. Pour un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on dit que X est *n-connexe* si $\pi_k(X) = 0$ pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exemples. ***(n-connexité)***

1. Les espaces 0-connexes sont exactement les espaces connexes par arcs.
2. Les espaces 1-connexes sont exactement les espaces simplement connexes par arcs.

La réunion disjointe de deux cercles n'est pas 1-connexe, car elle n'est pas 0-connexe.

Définition. ***(Application n-connexe)***

Soient X,Y deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On dit que f est n-connexe si $\pi_k(f)$ est un isomorphisme pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $\pi_n(f)$ est un épimorphisme, *i.e.* est surjectif.

6.1.5 Suites de fibres et de cofibres

6.1.5.1 Suites exactes dans la catégorie des espaces topologiques pointés

Définition. ***(Suite exacte d'ensembles pointés)***

Soit $(A,a) \xrightarrow{f} (B,b) \xrightarrow{g} (C,c)$ une suite dans Ens_*. On dit qu'elle est *exacte* lorsque $f(A) = g^{-1}(c)$.

Définition. ***(Suite exacte d'espaces pointés)***

Une suite courte $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{W}$ dans Top_* est dite *h-coexacte*, respectivement *h-exacte*, si pour tout $Z \in \mathrm{Top}_*$, $[U,Z]_* \xleftarrow{f^*} [V,Z] \xleftarrow{g^*} [W,Z]$ est exacte, respectivement $[Z,U]_* \xrightarrow{f_*} [Z,V]_* \xrightarrow{g_*} [Z,W]$ est exacte.
Autrement dit, pour toute $\psi : V \to Z$ dans Top_*, ψ est *homotope à* 0, *i.e.* $\psi \circ f : U \to Z \sim cst_{z_0}$ rel $\{0\} \iff \varphi : W \to Z \mid \psi \sim \varphi \circ g$ rel $\{*\}$.
Une suite longue est dite *h-coexacte*, respectivement *h-exacte*, si toutes ses sous-suites courtes le sont.

Fait. ***(Condition nécessaire d'exactitude)***

Si une suite est h-coexacte, avec $Z = W$ et $\varphi = id_W$, $\psi = g \implies f^*(\psi) = g \circ f$ est homotope à zéro.

Rien ne dit que la suite canonique $X \xrightarrow{f} Y \twoheadrightarrow Y/X$ est exacte.

6.1.5.2 Cônes, chemins et suites exactes longues

Définition. ***(Cône d'une application)***

Soit $f : X \to Y$ une application pointée, donc dans Top_*. Le *cône* de f aussi appelé *cofibre homotopique* de f est défini par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & Y \arrow[d, hook, "f_1"] \\ \mathrm{Cone}(X) \arrow[r] & \mathrm{Cone}(X) \cup_f Y \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Cone}(f) := \mathrm{Cone}(X) \cup_f Y = \frac{\mathrm{Cone}(X) \cup Y}{(x,1) \sim f(x)}$.

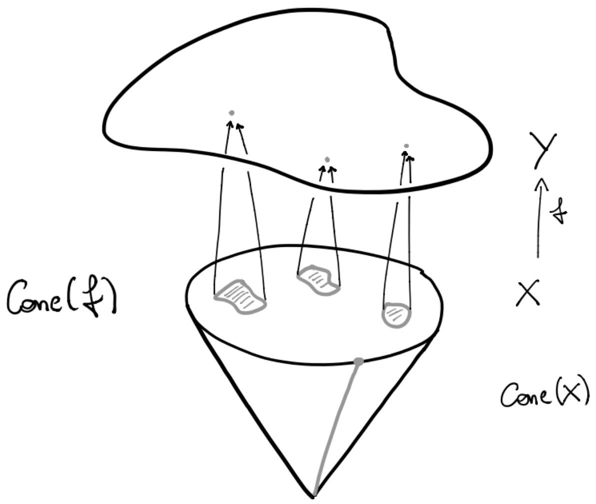


FIGURE 6.1.10 : *Cône d'une application.* —

Remarques.

1. L'application $f_1 : Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f)$ est un plongement.
2. $f_1 \circ f$ est homotope à 0 par $H : \begin{array}{rcl} X \times I & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f) \\ (x,t) & \longmapsto & (x,t) \in \mathrm{Cone}(X) \end{array}$ où bien $H(-,1) = f_1 \circ f$ et $H(-,0)$ est le point base.

Proposition

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \mathrm{Cone}(f)$ est h-coexacte.

▷ On a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & Y \arrow[d, hook, "f_1"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\ \mathrm{Cone}(X) \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[drr, bend right, "h"] & \mathrm{Cone}(X) \cup_f Y \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

où $\psi \circ f : X \to Z \sim cst_{z_0} \iff \psi \circ f : X \to \mathrm{Cone}(X) \to Z$ qui équivaut donc à $\psi = \varphi \circ f_1$. ■

Théorème. ***(Suite de cofibres, suite de Puppe)***

Pour toute application $f : X \to Y$ dans Top_*, on a une suite h-coexacte longue

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma\mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\Sigma p(f)} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 f_1} \Sigma^2\mathrm{Cone}(f) \longrightarrow \dots$$

qui continue à l'infini, dite *suite de cofibre* de f.

▷ Il est clair en itrant deux fois la proposition précédente que la suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{f_2} \mathrm{Cone}(f_1) \xrightarrow{f_3} \mathrm{Cone}(f_2)$ est h-coexacte. On peut alors montrer que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"] & Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & \mathrm{Cone}(Y) \arrow[d, "j_1"] \\ \mathrm{Cone}(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, two heads, "p"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, two heads, "p(f)"] & \mathrm{Cone}(f_1) \arrow[d, two heads, "q(f)"] \\ \mathrm{Cone}(X)/i_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(f)/f_1(Y) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cone}(f_1)/j_1(\mathrm{Cone}(Y)) \arrow[d, equal] \\ \Sigma X & \Sigma X & \Sigma X, \end{tikzcd}$$

les flèches du bas sont des homéomorphises avec la suspension de X, les deux carrés du haut étant les sommes amalgamées définissant les cônes d'application respectifs.

En outre, $q(f)$ est une équivalence d'homotopie.

Notons $\tau : \Sigma X \to \Sigma X$ l'automorphisme renversant l'orientation du cône. Alors dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "f_2"] \arrow[dr, "p(f)"'] & \mathrm{Cone}(f_1) \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "q(f)"'] \arrow[dr, "p(f_1)"] & \mathrm{Cone}(f_2) \arrow[d, "q(f_1)"] \\ & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f \circ \tau"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

non commutatif ci-dessus, les triangles latéraux commutent et le triangle centrale est homotopiquement commutatif.

En particulier, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$ est h-coexacte.

Puisqu'on a un homéomorphisme $\chi : \mathrm{Cone}(\Sigma f) \xrightarrow{\sim} \Sigma\mathrm{Cone}(f)$ tel que $\chi \circ (\Sigma f)_1 = \Sigma f_1$, on peut conclure. ■

À l'origine des catégories triangulées

C'est cette construction dont l'abstraction a donné naissance au concept de catégorie triangulée.

Remarque importante. On a en particulier une suite

$$\begin{tikzcd}
{[X,Z]_*} & {[Y,Z]_*} \arrow[l, "f^*"'] & {[\mathrm{Cone}(f),Z]_*} \arrow[l, "f_1^*"'] \arrow[dll, shorten=0] \\
{[\Sigma X,Z]_*} & {[\Sigma Y,Z]_*} \arrow[l, "(\Sigma f)^*"'] & {[\Sigma\mathrm{Cone}(f),Z]_*} \arrow[l, "(\Sigma f_1)^*"'] \\
{[\Sigma^2 X,Z]_*} & {[\Sigma^2 Y,Z]_*} \arrow[l, "(\Sigma^2 f)^*"'] & {[\Sigma^2\mathrm{Cone}(f),Z]_*} \arrow[l, "(\Sigma^2 f_1)^*"'] \\
\dots
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne est exacte dans Ens_*, la deuxième dans Grp_*, et les suivantes dans Ab_*.

Que se passe-t-il en dualisant ?

Définition. ***(Chemin d'une application)***

Soit $f : X \to Y$ une application pointée, donc dans Top_*. Le *chemin* de f est défini par

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Path}(f) \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & \mathrm{Path}(X) \arrow[d, "e_1"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Path}(f) := \{(x,\varphi : [0,1] \to Y) \in X \times \mathrm{Path}(Y) \mid \varphi(0) = y_0, f(x) = \varphi(1)\}$.

Remarques.

1. $f \circ f'$ est homotope à 0.

De même :

Proposition

$\mathrm{Path}(f) \xrightarrow{f'} X \xrightarrow{f} Y$ est h-exacte.

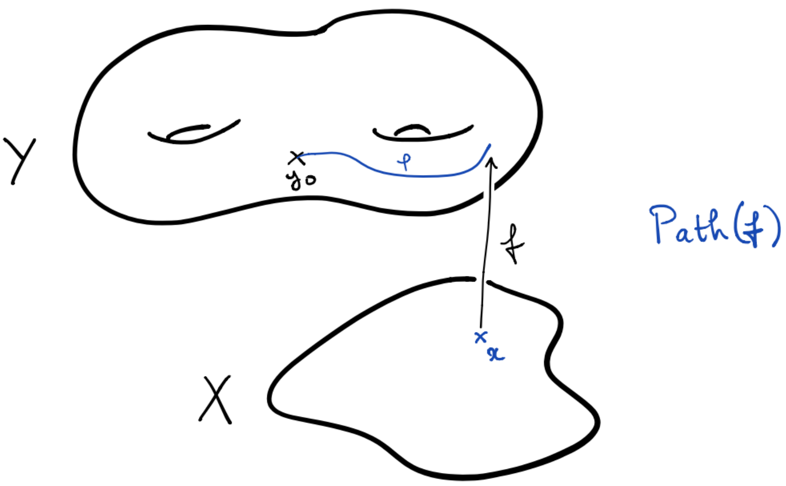


FIGURE 6.1.11 : *Chemin d'une application.* —

▷ On a

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\
& \mathrm{Path}(f) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f'"'] & \mathrm{Path}(X) \arrow[d, "e_1"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

où $f \circ \psi \overset{H}{\sim} cst \iff \exists \psi : X \to \mathrm{Path}(f) \quad f' \circ \psi \sim \psi$. ■

Théorème. ***(Suite de fibres, cosuite de Puppe)***

Pour toute application $f : X \to Y$ dans Top_*, on a une suite h-exacte longue

$$Y \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f'} \mathrm{Path}(f) \xleftarrow{i(f)} \Omega Y \xleftarrow{\Omega f} \Omega X \xleftarrow{\Omega f'} \Omega\mathrm{Path}(f) \longleftarrow \Omega^2 Y \longleftarrow \Omega^2\mathrm{Path}(f) \longleftarrow \dots$$

qui continue à l'infini, dite *suite de fibre* de f.

▷ La preuve est semblable à la précédente. ■

Remarque importante. On a en particulier une suite

$$\begin{tikzcd}
{[Z,Y]_*} & {[Z,X]_*} \arrow[l, "f_*"'] & {[Z,\mathrm{Path}(f)]_*} \arrow[l, "{f_1}_*"'] \\
{[Z,\Omega Y]_*} \arrow[urr, "i(f)_*"] & {[Z,\Omega X]_*} \arrow[l, "(\Omega f)_*"'] & {[Z,\Omega\mathrm{Path}(f)]_*} \arrow[l, "(\Omega f_1)_*"'] \\
{[Z,\Omega^2 Y]_*} \arrow[urr] & {[Z,\Omega^2 X]_*} \arrow[l, "(\Omega^2 f)_*"'] & {[Z,\Omega^2\mathrm{Path}]_*} \arrow[l, "(\Omega^2 f_1)_*"'] \\
\dots \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne est exacte dans Ens_*, la deuxième dans Grp_*, et les suivantes dans Ab_*.

Exercice 6 *(Compatibilité entre la suite de fibres et la suite de cofibres)*

1. Décrire l'unité $\eta : X \to \Omega\Sigma X$ et la coünité $\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ de l'adjonction Σ-Ω.
2. Soit $f : X \to Y$ une application pointée entre espaces pointés. Montrer que $(x,\varphi) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (x,2(1-t)) \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$ définit une application pointée $\tilde{\eta} : \mathrm{Path}(f) \to \Omega\mathrm{Cone}(f)$.
3. Décrire l'application adjointe $\tilde{\varepsilon} : \Sigma\mathrm{Path}(f) \to \mathrm{Cone}(f)$.
4. Montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma\Omega f^1"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega X \arrow[r, "\Sigma\Omega f"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega Y \arrow[r, "\Sigma i(f)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma f_1"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Path}(f) \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "\tilde{\eta}"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"] & Y \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "p(f)"] \arrow[d, "\eta"] & \Sigma X \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] & \Omega\mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "f^1"] & \Omega\Sigma X \arrow[r, "f"] & \Omega\Sigma Y \arrow[r, "f_1"] & \Omega\Sigma\mathrm{Cone}(f) &
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif.

6.1.6 Fibrations et cofibrations

En théorie des ensembles, à partir d'une application $f : X \to Y$, on peut la factoriser sous la forme $X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow Y$. En topologie :

Définition. ***(Cylindre d'une application)***

Soit $f : X \to Y$ une application, dans Top. Le *cylindre* de f est définie par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "\iota_0"'] & Y \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(f) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Cyl}(f) : \frac{(X\times I)\sqcup Y}{(x,0)\sim f(x)}$.

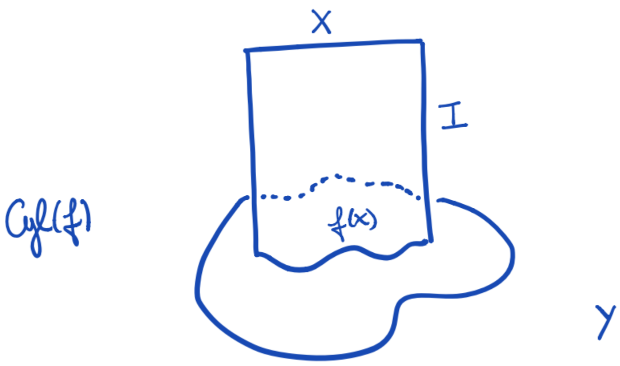


FIGURE 6.1.12 : *Cylindre d'une application.* —

Proposition

On peut factoriser $\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathrm{Cyl}(X) \arrow[r, two heads, "P"] & Y \end{tikzcd}$ et dans ce cas P est une équivalence d'homotopie. De plus, Y est un rétract par déformation du cylindre de f.

$\triangleright$ On définit P par $y \mapsto y$ et $(x,t) \mapsto f(x)$. Soit $f_0 : Y \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(f)$. On a $pf_0 = id_Y$. Montrons que $f_0 p \sim id_{\mathrm{Cyl}(f)}$. On pose $H : \mathrm{Cyl}(f) \times I \to \mathrm{Cyl}(f)$ définie par $(y,t) \mapsto y$ pour $y \in Y$ et $(x,s,t) \mapsto (x,st)$. Elle est bien définie, continue et envoie $f_0 p$ au temps nul à id au dernier instant. ■

Reformulation pratique. ***(Propriété d'extension des homotopies)***

Une application (non nécessairement un plongement, ni même injective) $i : A \to X$ satisfait la *propriété d'extension des homotopies relativement à* Z si :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id_I"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ X \arrow[r, "i_0^X"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "H"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

pour toute $g : X \to Z$, $h : A \times I \to Z$. Autrement dit, si $hi_0^A = gi$, il existe $H : X \times I \to Z$ telle que $h = H \circ (i \times id)$ et $g = H \circ i_0^X$.

On n'impose par que H soit unique... $(X \times I, H)$ n'est pas la somme amalgamée $(A \times I) \sqcup_A X$!

Fait. ***(Pas incroyable)***

Toute paire topologique satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à $(A \times I) \sqcup_A X$.

Proposition

$i : A \to X$ satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à Z si et seulement si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "i"'] & Z^I \arrow[d, "e_0"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Z \end{tikzcd}$$

i.e. pour toute $h : A \to Z^I$ et toute $g : X \to Z$ telles que $e_0\tilde{h} = gi$, il existe $\tilde{H} : X \to Z^I$ telle que $\tilde{h} = \tilde{H}i$ et $g = e_0\tilde{H}$.

▷ Découle de l'adjonction de curryfication. ■

Définition. ***(Cofibration, paire de Borsuk)***

Une *cofibration* $i : A \to X$ est telle qu'elle satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à tout espace topologique Z. On dit aussi qu'elle *satisfait la propriété d'extension des homotopies (PEH)*. On note parfois $i : A \rightarrowtail B$.

On dit que (A,X) implicitement munie de i est une *bonne paire topologique* ou encore une *paire de Borsuk*. Une paire de Borsuk est *stricte* si $i(A)$ est fermée dans X.

Exemples. *(Cofibrations)*

1. Les homéomorphismes sont des cofibrations.

Propriété. *(Composée de cofibrations)*

Les cofibrations sont stables par composition.

▷ Soit $A \overset{i}{\rightarrowtail} B \overset{j}{\rightarrowtail} C$ une suite de cofibrations. Utilisons la proposition précédente qui constitue une définition duale. Alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\check{h}"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dd, bend right, "ji"'] & Z^I \arrow[dd, "e_0"] \\
B \arrow[ur, dashed, "\check{H}_1"] \arrow[d, "j"'] & \\
C \arrow[uur, dashed, "H"'] \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

parle de lui-même. ■

Propriété. *(Somme de cofibrations)*

Les cofibrations sont stables par coproduit fini.

▷ Soient $iA \rightarrowtail X$ et $jB \rightarrowtail Y$ des cofibrations. Montrons que $A \sqcup B \overset{i \sqcup j}{\rightarrowtail} X \sqcup Y$ est une cofibration. En effet, on a

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup B \arrow[r, "\check{h}"] \arrow[d, "i \sqcup j"'] & Z^I \arrow[d, "e_0"] \\
X \sqcup Y \arrow[ur, dashed, "\check{H}_1 \sqcup \check{H}_2"] \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

où $\check{H}_1$ est donnée par le diagramme pour i avec $\check{h}_{|A}$ et $g_{|X}$, de même pour $\check{H}_2$. ■

Propriété. *(Pushout de cofibrations)*

Si $i : A \rightarrowtail B$ est une cofibration, alors $j : B \rightarrowtail X \sqcup_f B$ est une cofibration.

▷ Par hypothèse,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \arrow[ddr, bend left, "\check{h}_1"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\check{H}_1"'] & X \sqcup_f B \arrow[dr, dashed, "H"] & \\
& & Z^I
\end{tikzcd}$$

et montrons

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[r, "\check{h}"] \arrow[d, "\psi"] & Z^I \arrow[d, "e_0"] \\
X \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[urr, dashed, "\check{H}_1"] & X \sqcup_f B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "H"'] & Z
\end{tikzcd}$$

où g satisfait $g\varphi = g\varphi$ (nul) et $g\psi = e_0\check{h}$. Par propriété universelle du pushout, l'application unique universelle satisfait cela. On doit juste prouver que e_0H satisfait ces deux égalités. Alors $g\varphi = e_0\check{H}_1 = e_0H\varphi$ et e_0H si $= e_0\check{h}$, car $\check{h} = H\psi$. ■

Proposition. ***(Les cofibrations sont des plongements)***

Soit $i : A \to X$ une cofibration. Alors i est un plongement.

▷ C'est un exercice de topologie générale. ■

Fait

Si (A,X) est une paire de Borsuk, elle est stricte dès que X est séparé.

La cofibration-teté n'est pas une notion homotopique ! Si X est contractile, id_X est une cofibration mais cst_{x_0} non.

Examinons le cas du cylindre. On a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id_I"] \arrow[ddr, bend left, "j"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "i_0"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & \mathrm{Cyl}(i) \arrow[ul, "\exists ! s"]
\end{tikzcd}$$

et $i : A \to X$ satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à $\mathrm{Cyl}(i)$, donc il existe $r : X \times I \to \mathrm{Cyl}(I)$ telle que $rs = id_{\mathrm{Cyl}(i)}$ par propriété de la somme amalgamée. Ceci se généralise en fait :

Propriété. ***(Caractérisation des cofibrations)***

Soit $i : A \to X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) i est une cofibration, *i.e.* satisfait la PEH ;

(ii) i satisfait la PEH relativement à $\mathrm{Cyl}(i)$;

(iii) l'application canonique de $\mathrm{Cyl}(i) \overset{s}{\hookrightarrow} X \times I$ admet un rétract.

▷ Pour tout Z, soit $g : X \to Z$, soit $h : A \times I \to Z$ tels que $gi = hi_0^A$. Alors

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id_I"] \arrow[ddr, bend left, "j"] \arrow[dddrr, bend left, "h"] & & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "i_0"'] \arrow[dddrrr, bend right, "g"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[ddrr, dashed, bend left, "H"] & & \\
& & \mathrm{Cyl}(i) \arrow[ul, bend left, "\exists ! s"] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}$$

en reprenant le diagramme précédent. ■

Soit $A \subseteq X$ donnée par $i : A \hookrightarrow X$. Alors $\mathrm{Cyl}(i) = \frac{A \times I \sqcup X}{(a,0) \sim i(a)} \simeq (A \times I) \cup (X \times \{0\} \subseteq X \times I$ par une bijection ensembliste. Seulement, ce n'est pas un homéomorphisme ! Lorsque le quotient est muni de la topologie quotient et la paire de la topologie induite, seulement l'application de gauche à droite est continue.

Propriété

Soit $A \subseteq X$ une paire topologique. Elle est bonne si et seulement si l'inclusion canonique $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ admet un rétract.

▷ Dans un sens,

$$\begin{tikzcd}
(A \times I) \cup (X \times \{0\}) \arrow[rr, bend left, "S"] & \mathrm{Cyl}(i) \arrow[l, "\psi"] \arrow[r, shift left, "s"] & X \times I \arrow[l, shift left, "r"]
\end{tikzcd}$$

donne ψr rétract de S.

Réciproquement, quand A est fermée, $h \cup g$ est continue par recollement sur des parties fermées. Le cas général est traité par Hatcher en appendice dédié. ■

Théorème. ***(Factorisation canonique en cofibration par le cylindre)***

Toute application continue $f : X \to Y$ se factorise canoniquement par le cylindre en :

$$X \xrightarrow[i_1]{} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow[P]{} Y$$

où i_1 est une cofibration et P est une équivalence d'homotopie. En particulier, $[f] = [id_1]$ dont hTop.
Autrement dit, toute application continue est une cofibration en théorie de l'homotopie.

$\triangleright$ Il est clair que $\mathrm{Cyl}(f)$ est homotopiquement équivalent à Y. Notons $X \xhookrightarrow{i_1}$ le plongement. Il suffit de montrer que le plongement $X \times I \cup \mathrm{Cyl}(f) \times \{0\} \hookrightarrow \mathrm{Cyl}(f) \times I$ admet un rétract ρ. On pose

$$\begin{cases} \mathrm{Cyl}(f) \times I & \to X \times I \cup \mathrm{Cyl}(f) \times \{0\} \\ (y,t) & \mapsto (y,0) \\ (x,s,t) & \mapsto \begin{cases} (x, \frac{s}{1-t}, 0) \in \mathrm{Cyl}(f) \times \{0\} \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant 1-t \\ (x, s-1+t) \in X \times I \text{ pour } 1-t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

qui fait le job. ■

Dualisons tout cela, afin de définir les fibrations = cocofibrations.

Définition. ***(Espace chemin d'une application)***

Soit $f : X \to Y$ une application, dans Top. L'espace chemin de f est définie par

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Path}(f) \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y^I \arrow[d, "e_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Path}(f) = \{(x,\varphi) \in X \times Y^I \mid f(x) = \varphi(0)\}$.

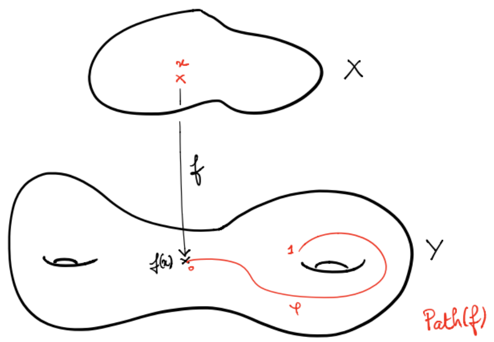


FIGURE 6.1.13 : *Espace chemin d'une application.* —

Proposition

On peut factoriser $\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathrm{Path}(f) \arrow[r, two heads, "p"] & Y \end{tikzcd}$ et dans ce cas i est une équivalence d'homotopie. De lus, X est un rétract par déformation de l'espace chemin de f.

▷ On définit i par $x \mapsto (x,cste_{f(x)})$. De plus : $(x,\varphi) \mapsto \varphi(1)$. Soit $\rho\colon \begin{array}{rcl} \mathrm{Path}(f) & \longrightarrow & X. \\ (x,\varphi) & \longmapsto & x \end{array}$

On a $\rho \circ i(x) = \rho(x,cst_{f(x)})$. Montrons que $i\rho \sim id_{\mathrm{Path}(f)}$. On pose $H : \mathrm{Path}(f) \times I \to \mathrm{Path}(f)$ définie par $(x,\varphi,t) \mapsto (x,s \mapsto \varphi(st))$. Elle est bien définie, continue et puisque $i\rho(x,\varphi) = i(x) = (x,cste_{f(x)})$, elle envoie $(x,cst_{f(x)})$ au temps nul à $(x,\varphi) = id_{\mathrm{Path}(f)}$ au dernier instant. ■

Reformulation pratique. ***(Propriété de relèvement des homotopies)***

Une application (non nécessairement un recouvrement, ni même surjective) $p : E \to B$ satisfait la *propriété de relèvement des homotopies relativement à Z* si :

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\check{H}"'] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "\check{h}"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "p_*"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "e_0^B"'] & B
\end{tikzcd}$$

pour toute $g : Z \to E$, $\check{h} : Z \to B^I$. Autrement dit, si $pg = e_0^B \check{h}$, il existe $\tilde{H} : Z \to E^I$ telle que $p_* \check{H} = \check{h}$ et $e_0^E H = g$.

On n'impose par que $\check{H}$ soit unique... (E^I,$\check{H}$ n'est pas le produit fibré $E \times_B B^I$!

Proposition

$p : E \to B$ satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à Z si et seulement si

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0^Z"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Z \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

i.e. pour toute $g : Z \to E$ et toute $h : Z \times I \to BZ$ telles que $pg = hi_0^Z$, il existe $H : Z \times I \to E$ telle que $pH = h$ et $Hi_0^Z = g$.

▷ Découle de l'adjonction de curryfication. ■

Définition. ***(Fibration, fibration de Serre)***

Une *fibration (de Hurewicz)* $p : E \to B$ est telle qu'elle satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à tout espace topologique Z. On dit aussi qu'elle *satisfait la propriété de relèvement des homotopies (PRH)*. On note parfois $p : E \twoheadrightarrow B$.
On dit que $p : E \to B$ est une *fibration de Serre* si elle satisfait la PRH relativement à tout I^n pour n parcourant $\mathbb{N}$.

Exemples. ***(Fibrations)***

1. Les homéomorphismes sont des fibrations.
2. *(Fibtrations triviales)* Les projections $B \times I \xrightarrow{pr_1} B$ sont des fibrations.
3. $E \xrightarrow{p} \{\star\}$ est une fibration.

   On prend

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dr, dashed, "H"] \arrow[ddr, bend right, "\check{h}"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, "p_*"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& \{cste_*\} \arrow[r, "\simeq"'] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

   où $H(z) = cste_{g(z)}$ pour tout $z \in Z$.

Propriété. ***(Composée de fibrations)***

Les fibrations sont stables par composition.

Propriété. ***(Produit de fibrations)***

Les fibrations sont stables par produit fini.

Propriété. ***(Pullback de fibrations)***

Si $i : A \twoheadrightarrow B$ est une fibration, alors $j : X \times_f A \to B$ est une fibration.

▷ Tout cela par dualité. ■

Proposition. ***(Les fibrations sont des surjections)***

Soit $p : E \to B$ une fibration où $\boldsymbol{B}$ **est connexe par arcs** . Alors i est une **surjection**.

Lemme. ***(Caractérisation des fibrations par section du chemin)***

On rappelle que $\mathrm{Path}(p) = \{(x,\varphi) \in E \times B^I \mid p(x) = \varphi(0)\}$. Montrons que p est une fibration si et seulement si l'application σ qui à $\psi : I \to E$ fait correspondre $(\psi(0),p\psi)$ admet une section ρ telle que $\rho\sigma = id_{\mathrm{Path}(p)}$. Autrement dit, il exsite un moyen continu de relver φ en $\psi : I \rightleftarrows E$ tel que $\psi(0) = x$.

▷ Prenons $(x,\varphi) \in \mathrm{Path}(p)$, $p(x) \in B$. Soit $b \in B$ quelconque. Puisque B est connexe par arcs, il existe $\gamma : I \to B$ tel que $\gamma(0) = p(x)$ et $\gamma(1) = b$. Considérons $\psi : I \to E$ définie par $\sigma(x,\gamma)$, de sorte que $p(\psi(1)) = \gamma(1) = b$ et $\rho(\psi) = (\psi(0),p\psi = \gamma)$. ■

Corollaire

Les fibrations ne sont pas stables par équivalence d'homotopie !

Contre-exemple. ***(Instabilité de la fibration par homotopie)***

On a $id_X \sim cste_{x_0}$ dès que X, disons $X = \mathbb{R}$, est contractile. L'identité est une fibration, mais pas cst_{x_0} puisqu'elle n'est pas surjective. □

Examinons le cas de l'espace chemin. On a

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Path}(p) \arrow[dr, dashed, "\sigma"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& E^I \arrow[ul, "\exists!\rho"] \arrow[r, "e_0^E"] \arrow[d, "p_*"] & E \arrow[d, "p"] \\
& B^I \arrow[r, "e_0^B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Propriété. ***(Caractérisation des fibrations)***

Soit $p : E \to B$. Les propriétés suivantes sont équivalntes :

(i) p est une fibration, *i.e.* satisfait la PRH ;

(ii) p satisfait la PRH relativement à $\mathrm{Path}(p)$;

(iii) l'application canonique de $E^I \twoheadrightarrow \rho\mathrm{Path}(\rho)$ admet une section.

▷

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "\Psi"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "\check{H}"] \arrow[ddrr, bend left, "g"] \arrow[dddr, bend right, "\check{h}"'] & & \\
& \mathrm{Path}(p) \arrow[dr, dashed, "\sigma"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& & E^I \arrow[ul, "\exists!\rho"] \arrow[r, "e_0^E"] \arrow[d, "p_*"] & E \arrow[d, "p"] \\
& & B^I \arrow[r, "e_0^B"'] & B
\end{tikzcd}$$

en reprenant le diagramme précédent. ■

Théorème. ***(Factorisation canonique en fibration par l'espace chemin)***

Toute application continue $f : X \to Y$ se factorise canoniquement par l'espace chemin en :

$$X \xrightarrow{I} \mathrm{Path}(f) \xrightarrow{p} Y$$

où p est une fibration et I est une équivalence d'homotopie. En particulier, $[f] = [p]$ dont $h\mathrm{Top}$.

Autrement dit, toute application continue est une fibration en théorie de l'homotopie.

▷ La donnée de g s'écrit $z \mapsto (x_z, \varphi_z : I \to Y)$ avec $x_z \in X$, $f(x_z) = \varphi_z(0)$ et $h(z,t) \in Y$, $h(z,0) = \varphi_z(1)$. La donnée de H est celle de $(z,t) \mapsto (x_{z,t} = x_z \in X, \varphi_{z,t} : I \to Y)$ telle que $f(x_{z,t}) = \varphi_{z,t}(0)$, d'autre part $(x_{z,0}, \varphi_{z,0}) = (x_z, \varphi_z)$ (commutation dans le triangle supérieur) et encore $h(z,t) = \varphi_{z,t}(1)$ (commutation dans le triangle inférieur). L'application

$$\varphi_{z,t}(s) = \begin{cases} \varphi_z((1+t)s \text{ pour } 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{1+t} \\ h(z,(1+t)s-1) \text{ pour } \frac{1}{1+t} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

fait le job. ■

La notion de cofibration n'est pas autoduale. En particulier, on n'a pas de description exhaustive des fibrations. Voyons comment en construire.

Proposition. ***(Stabilité des fibrations par changement de base)***

$$\begin{tikzcd}
E \times_f B' \arrow[r] \arrow[d, two heads] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
B' \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Proposition. ***(Passage des cofibrations aux fibrations)***

1. Soit $i : A \rightarrowtail X$ une cofibration. Alors pour tout espace Z, $i^* : Z^X \twoheadrightarrow Z^A$ est une fibration.
2. Soit $p : E \twoheadrightarrow B$ une fibration. Alors pour tout espace Z, $p_* : E^Z \twoheadrightarrow B^Z$ est une fibration.

$\triangleright$ Successivement :

1. Faisons commuter

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & Z^X \arrow[d, "i^*"] \\ W \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Z^A \end{tikzcd}$$

grâce à H. Sa donnée sur $W \times I \to Z^X$ équivaut à la donnée de $\tilde{H} : W \times I \times X \to Z$ telle que $\tilde{H}(w,0,x) = g_z(x)$ et $\tilde{H}(w,t,i(a)) = h_{(w,t)}(a)$. On veut donc étendre une application de $(W \times \{0\} \times X) \cup (W \times I \times A) \simeq W \cup (A \times I) \cup (X \times \{0\})$. Or $i : A \to X$ est une cofibration si et seulement si l'inclusion $(A \times I) \cup (X \times \{0\}) \hookrightarrow X \times I$ admet un rétract. On considère $\tilde{H} : W \times I \times X \simeq W \times X \times I \to W \times (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ de sorte que $(W \times I \times A) \cup (W \times \{0\} \times X) \xrightarrow{\tilde{h} \cup \tilde{g}} Z$ est bien définie par commutativité du carré.

2. C'est plus simple. En utilisant la définition duale,

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\check{g}"] \arrow[d, "i_0"'] & E^Z \arrow[d, "p_*"] \\ W \times I \arrow[r, "\check{h}"'] \arrow[ur, dashed, "\check{H}"] & B^Z \end{tikzcd}$$

équivaut à

$$\begin{tikzcd} W \times Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ W \times I \times Z \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

par adjonction de curryfication réciproque. ■

Exemples

1. La cofibration $i : \partial I \rightarrowtail I$ donne une fibration $i^* : Z^I \twoheadrightarrow Z^{\partial I}$ donnée par $\varphi \mapsto (\varphi(0),\varphi(1))$.
2. L'évaluation $e_t : \begin{array}{ll} Y^I & \longrightarrow Y \\ \varphi & \longmapsto \varphi(t) \end{array}$ est une fibration pour tout $t \in I$, à partir de la cofibration $\{\star\} \rightarrowtail I$.

3. $pr_1 : \mathrm{Path}(f) \twoheadrightarrow X$ est une fibration par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Path}(f) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "pr_1"'] & Y^I \arrow[d, two heads, "e_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

commutatif.

On se rend compte qu'un revêtement est un cas particulier de fibration, sans grande surprise.

Proposition

Tout revêtement est une fibration. De plus, la section $\sigma : \mathrm{Path}(p) \to E^I$ de $(x,\varphi) \mapsto x$, donnée par $(x,\varphi), \varphi(0)p(x) \mapsto$ l'unique chemin relevé de φ est unique par propriété universelle des revêtements.

$\triangleright$ Pour tout $t \in I$, par revêtement, il existe un ouvert $U_{\varphi(t)}$ satisfait la propriété des revêtements. $\blacksquare$

Plus généralement, un fibré, aussi appelé fibration, est une fibration.

Théorème

Tout fibré de base paracompacte est une fibration. De plus, sa fibre est constante.

Mnémonik : revêtements fibre $\underset{\subseteq}{\text{discrète}}$ fibrés fibre $\underset{\subseteq}{\text{constante}}$ fibration $\subseteq$ fibration de Serre.

On réunit donc la propriété :

Fait

Soit $p : E \twoheadrightarrow B$ une fibration. Si b et b' sont dans la même composante connexe de B, F_b est homotopiquement équivalent à $F_{b'}$.

On considère

$$\begin{tikzcd} F_b \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ F_b \times I \arrow[r, "\gamma_0 pr_2"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

$$(x,t) \longmapsto \gamma(t)$$

et soit $\gamma : I \to B$, avec $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = b'$. Soit $f_{\gamma,H} : F_b \to F_{b'}$ définie par $x \mapsto H(x,1) \in F_{b'}$. On montre :

Lemme

H et K étant deux relèvements, $f_{\gamma,H} \sim f_{\gamma,K}$.

Lemme

Si γ et γ' sont homotopes relativement à ∂I, $f_\gamma \sim f_{\gamma'}$ dans $\mathrm{Top}(F_b,F_{b'})$.

Lemme

Étant donnés $b \xrightarrow{\gamma} b' \xrightarrow{\chi} b''$, $f_\chi \circ f_\gamma \sim f_{\chi\gamma}$.

Par suite, F_b et $F_{b'}$ sont homotopiquement équivalentes par f_γ et $f_{\overline{\gamma}}$. En effet, $f_{\overline{\gamma}} \circ f_\gamma \sim f_{\overline{\gamma}\gamma} \sim f_{cst_b} \sim Id_{F_b}$.

Remarque. On a presque une suite exacte courte $F \to E \to B$ qui pourrait engendrer une suite exacte longue en homologie...

Principe. ***(Dualité d'Eckmann-Hilton)***

⋆ L'adjonction de curryfication topologique pointée ;

⋆ l'autodualité de l'homotopie ;

⋆ l'adjonction Σ-Ω ;

⋆ les suites de Puppe exactes et coexactes ;

⋆ la dualité entre la propriété d'extension et la propriété de relèvement des homotopies,

sont la manifestation d'une seule et même dualité, dite *d'Eckmann-Hilton.*

6.1.7 Calcul des groupes d'homotopie

6.1.7.1 Homotopie relative

À partir d'une inclusion $A \hookrightarrow X$ venant d'une paire pontée d'espaces topologiques $\star \in A \subseteq X$, on a vu que la suite de Puppe

$$\ldots \longrightarrow \Omega^2(\mathrm{Path}(i)) \longrightarrow \Omega^2(A) \longrightarrow \Omega^2(X) \longrightarrow \Omega\mathrm{Path}(i) \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \mathrm{Path}(i) \longrightarrow A \longrightarrow X$$

est h-exacte. En l'appliquant à $Z = S^0$, *i.e.* en appliquant le foncteur « Hom » donné par $[S^0,?]$, on obtient une suite

$$\ldots \longrightarrow \pi_2(\mathrm{Path}(i)) \longrightarrow \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Path}(i)) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{Path}(i)) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

exacte longue dite *suite exacte longue associée à la paire* (X,A) (à ne pas confondre avec la notion similaire en homologie singulière relative), dans Ens dès le départ, puis Grp à partir du quatrième terme, puis Ab à partir du septième terme. Le terme $\mathrm{Path}(i)$ est peu engageant pour calculer cette suite.

$\longrightarrow$ *Notation.* On note $\mathrm{Path}(X,A) = \mathrm{Path}(i) = \{\varphi : I \to X \mid \varphi(0) = \star, \varphi(1) \in A\}$.

On remarque que pour $A = \{\star\}$, $\mathrm{Path}(X,\{\star\}) = \Omega X$.

Définition. ***(Groupes d'homotopie relatifs)***

Soit $\star \in A \subseteq X$ une paire topologique pointée. On définit le *n-ième groupe d'homotopie relatif de X à A*, par

$$\pi_n(X,A) = \pi_{n-1}(\mathrm{Path}(X,A)) \simeq \pi_0(\Omega^{n-1}\mathrm{Path}(X,A)).$$

Théorème. ***(Suite exacte longue homotopique associée à une paire topologique)***

Pour toute paire topologique (X,A) pointée, on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(X,A) \longrightarrow \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(X,A \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(X,A) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ C'est tout dit. ■

6.1.7.2 Homtopie d'une fibration

Théorème. ***(Suite exacte longue homotopie associée à une fibration)***

Pour toute fibration de Serre $p : E \twoheadrightarrow B$ de base connexe par arcs, on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(F) \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \{\star\}$$

jusqu'à l'infini à gauche.

Théorème. ***(Suite exacte longue homotopie associée à un revêtement)***

Pour tout revêtement $p : E \to B$ de base connexe par arcs, on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow 0 \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \{\star\}$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ En effet, les fibres $F = F_b$ sont discrètes d'où $\pi_n(F) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\pi_0(F) = F$. ■

Corollaire. ***(Homotopie d'un revêtement)***

Soit $p : E \to B$ un revêtement de base connexe par arcs. Alors pour tout entier $n \geqslant 2$, $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E)$.

Exemple

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\pi_n(S^1) = 0$.

En effet, $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$ par contractibilité.

6.1.7.3 Groupes d'homotopie des sphères

Proposition. ***(Homotopie « par en-dessous » des sphères)***

Pour tous entiers naturels $n < d$, $\pi_n(S^d) = 0$.

⊛ *(Idée de la preuve.)* Pour tout point, $S^d \setminus \{\star\}$ est contractile. ■

Proposition

$\pi_2(S^1) = 0$.

▷ On cherche donc les applications continues (pointées) de S^2 sur S^1. Puisque S^2 est simplement connexe, une telle application f se relève en $\tilde{f}$ de S^2 dans $\mathbb{R}$ le revêtement universel du cercle. Mais celui-ci est contractile, de sorte que $\tilde{f}$ est contractile, et par composition f l'est. ■

$$\pi_i(S^n)$$

$n \downarrow$ \ $i \longrightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

TABLE 6.1 : *Premiers groupes d'homotopie des sphères.* —
Au-delà, c'est encore plus compliqué.

6.1.7.4 Lenticularité

Le but est d'exhiber une famille d'espaces topologiques « difficiles à classifier » pour motiver des théories de l'homotopie ou de l'homologie supérieures. Les espaces lenticulaires peuvent avoir même homotopie (au sens de tous 🙂 les groupes d'homotopie supérieurs) et même homologie sans être homéomorphes ni même homotopiquement équivalents.

Ainsi la suite des groupes d'homotopie n'est pas un invariant complet. Mais on peut se demander si :

Conjecture. *(fausse)* **?**

La suite des groupes d'homotopie détecte la contractibilité.

Contre-exemple

Le cercle polonais convient. □

6.1.8 Un modèle simple : homotopie des CW-complexes

6.1.8.1 Définition catégorique des complexes cellulaires

Reformulation pratique. *(Structure de complexe cellulaire)*

Une structure cellulaire sur un espace topologique X est un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq .... \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \mathrm{colim}_n X^{(n)}$$

où si J_n est un discret dit *ensemble d'étiquetage des cellules attachées d'ordre* n,

$$\begin{tikzcd} J_n \times S^{n-1} \simeq \sqcup_{J_n} S^{n-1} \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, hook] & X^{(n-1)} \arrow[d] \\ J_n \times D^n \simeq \sqcup_{J_n} D^n \arrow[r, "\Phi_n"'] & X^{(n-1)} \sqcup_{\varphi_n} (J_n \times D^n) \end{tikzcd}$$

et φ_n est une *application d'attachement* et Φ_n est application caractérisatique, de sorte que $X^{(n)}$ est la somme amalgamée $\frac{X^{(n-1)} \sqcup (J_n \times D^n)}{\varphi_n(j,x) \sim (j,x)}$.
Alors X est de dimension finie s'il exsite $n \in \mathbb{N}$ tel que $X^{(n)} = X$ et la dimension d'un complexe cellulaire est $\dim(X) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq 0\}$. De plus, X est fini lorsque $\sqcup_n J_n$ est fini.

Remarques.

1. Au rang $n = 0$, $S^0 = \emptyset$ et $D^0 = \{*\}$ d'où un recollement de la forme

$$\begin{tikzcd} J_0 \times \emptyset = \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X^{(-1)} = \emptyset \arrow[d] \\ J_0 \times \{*\} \arrow[r] & \sqcup_{J_0} \{*\}. \end{tikzcd}$$

2. Au rang $n = 1$, $\partial D^1 = S^0 = \{0,1\}$ et $D^1 = [0,1]$ d'où un recollement de la forme

$$\begin{tikzcd} J_1 \times \{0,1\} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d] & X^{(0)} \arrow[d] \\ J_1 \times D^1 \arrow[r] & X^{(1)}. \end{tikzcd}$$

3. Au rang $n = 2$, $\partial D^2 = S^1$ le cercle et D^2 est le disque, d'où un recollement de la forme

$$\begin{tikzcd} J_2 \times S^1 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d] & X^{(1)} \arrow[d] \\ J_2 \times D^2 \arrow[r] & X^{(2)}. \end{tikzcd}$$

4. On a toujours un recouvrement $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \bigsqcup_{j\in J_n} B^n \twoheadrightarrow X$. En particulier, un CW-complexe fini est compact.

Exemples. ***(Complexes cellulaires du point de vue catégorique)***

1. *(Structure cellulaire de la sphère par pushout)* S^2 admet la décomposition cellulaire suivante : prenons deux points x_0,x_2 de la sphère. On prend $J_0 = \{x_0\}$ et $X^{(0)} = \{x_0\} = X^{(1)}$, car $J_1 = \emptyset$. On prend $J_2 = \{x_2\}$ et $\varphi_2 : \{x_2\} \times S^1 \to X^{(2)}$.
2. *(Structure cellulaire du plan projectif par pushout)* $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = D^0 \sqcup_{\varphi_1} D^1 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup \ldots \sqcup_{\varphi_n} D^n$. De même, $\mathbb{P}^n\mathbb{C} = D^0 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup_{\varphi_4} D^4 \sqcup_{\varphi_6} \ldots \sqcup_{\varphi_{2n}} D^{2n}$. Remarquons que $\varphi_{2n} : S^{2n-1} : \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$ est la fibration de Hopf.
3. *(Structure cellulaire du tore par pushout)* $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 = D^0 \sqcup_{\varphi_1} (D^1 \sqcup D^1) \sqcup_{\varphi_2} D^2$.

Cette nouvelle reformulation nous permet une plus ample possibilité de manœuvre sur les espaces cellulaires.

Proposition. ***(Produit de complexes cellulaires)***

Soient X,Y deux complexes cellulaires. Si X ou Y est localement compact et si X et Y ont un nombre dénombrable de cellules, $X \times Y$ admet une structure cellulaire.

▷ Soit $(I_n,\varphi_n,\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une structure cellulaire sur X et $(J_n,\psi_n,\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une structure cellulaire sur Y. Posons $(X \times Y)^{(n)} = \bigcup_{k=0}^{n} X^{(k)} \times Y^{(n-k)}$. Posons $K_n = \bigsqcup_{k=0} nI_k \times J_{n-k}$. Au rang $n = 0$, on attache :

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\ I_0 \times J_0 \times \{*\} \arrow[r, "\Theta_0"'] & I_0 \times J_0 \times \{*\} \simeq (I_0 \times \{*\}) \times (J_0 \times \{*\}). \end{tikzcd}$$

Au rang $n = 1$, on attache par :

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} I_0\times\{*\}\times J_1\times\{0,1\}\sqcup I_1\times\{0,1\}\times J_0\times\{*\} \\ \simeq (I_0\times J_1\sqcup I_1\times J_0)\times\{0,1\}\end{array} \arrow[r, "\Phi_0\times\psi_1\sqcup\varphi_1\times\Psi_0"] \arrow[d] & X^{(0)}\times Y^{(0)} \arrow[d] \\
(I_0\times J_1)\sqcup(I_1\times J_0)\times[0,1] \arrow[r] & \begin{array}{c}(X^{(0)}\times Y^{(0)})\sqcup(I_0\times\{*\}\times J_1\times I)\sqcup(I_1\times I\times J_0\times\{0\}) \\ \simeq X^{(0)}\times Y^{(1)}\cup X^{(1)}\times Y^{(0)}\end{array}
\end{tikzcd}$$

où le dernier homéomorphisme est donné par les hypothèses.

Pour passer du rang n au rang $n+1$, on utilise

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{k=0}^n(I_k\times\partial I^k\times J_{n+1-k}\times I^{n+1-k}\sqcup\dots) \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr, "\varphi_k\times\Psi_{n+1-k}\sqcup\Phi_k\times\psi_{n+1-k}"] & \\
(\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k\times J_{n+1-k})\times\partial I^{n+1} \arrow[r, "\theta_{n+1}"] & \bigcup_{k=0}^n X^{(k)}\times^{(n-k)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k\times J_{n+1-k})\times I^{n+1} \arrow[r, "\Theta_{n+1}"'] & \bigcup_{k=0}^n X^{(k)}\times Y^{(n-k)}\sqcup\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k\times I^k\times J_{n+1-k}\times I^{n+1-k}/\sim \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \bigcup_{k=0}^{n+1} X^{(k)}\times Y^{(n+1-k)}
\end{tikzcd}$$

avec les trous évidents. ■

Définition. ***(Complexe cellulaire relatif)***

Une structure cellulaire relative à un espace topologique A sur un espace topologique X est la donnée (X,A) d'un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq .... \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \operatorname{colim}_n X^{(n)}$$

formée comme précédemment.

Remarque. Un complexe cellulaire est un complexe cellulaire de la forme $(X,\emptyset)$.

Reformulation pratique. ***(Sous-complexe cellulaire)***

Un sous-complexe cellulaire $A \subseteq X$ est un complexe cellulaire obtenu par des sous-ensembles $I_n \subseteq J_n$ et restrictions des applications d'attachement $I_n \times S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} A^{(n-1)}$.

Définition. ***(Paire cellulaire)***

Une *paire cellulaire* est une paire topologique (X,A) de complexes cellulaires telle que A est un sous-complexe cellulaire de A.

Une paire cellulaire est un complexe cellulaire relatif, mais pas l'inverse.

Exercice 7 *(Quotient de complexes cellulaires)*

Soit (X,A) une paire cellulaire. Montrer que X/A est muni d'une structure de complexe cellulaire.

Proposition

Pour tout complexe cellulaire relatif (X,A), l'inclusion canonique $A \hookrightarrow X$ est une cofibration $A \rightarrowtail X$.

▷ On a par pushout de cofibrations

$$\begin{tikzcd}
\sqcup_{J_n} S^{n-1} \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, tail] & X^{(n-1)} \arrow[d, tail, dashed] \\
\sqcup_{J_n} D^n \arrow[r] & X^{(n)}
\end{tikzcd}$$

une cofibration à gauche qui donne celle de droite par changement de cobase. Par composition de cofibrations, $A \rightarrowtail X^{(0)} \rightarrowtail X^{(1)} \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail X^{(n-1)} \rightarrowtail X^{(n)}$ est une cofibration. Passons à la colimite. Chaque donnée sur chaque squelette :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\check{h}"] \arrow[d, tail] \arrow[dddd, bend right] & Z^I \arrow[dddd, "e_0"] \\
X^{(0)} \arrow[ur, dashed, "H^{(0)}"] \arrow[d, tail] \arrow[ddd, bend right] & \\
X^{(1)} \arrow[uur, dashed, "H^{(1)}"] \arrow[d, tail] \arrow[dd, bend right] & \\
\vdots \arrow[d, tail] & \\
X \arrow[uuuur, dashed, "H"] \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

permet de passer à la colimite $H := \mathrm{colim}_n H^{(n)}$ par foncteur. ■

Définition. ***(Caractéristique d'Euler)***

Soit X un complexe cellulaire fini. On définit sa *caractéristique d'Euler* $\chi(X) := \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\mathrm{card}(J_n)$.

Exercice 8

1. Montrer que la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la structure cellulaire.
2. Montrer que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique.

Reformulation pratique. ***(Application cellulaire)***

Une application continue $f : X \to Y$ entre complexes cellulaires est cellulaire si elle préserve la décomposition cellulaire, *i.e.* $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Heuristique

Les applications cellulaires peuvent être approximées : si une application traverse la diagonale d'un carré, elle n'est pas cellulaire. Mais on peut en faire le tour. C'est un domaine actif de la recherche.

Proposition

La factorisation canonique en cofibration d'une application cellulaire est cellulaire.

▷ Soit $f : X \to Y$ une fonction cellulaire. Considérons $X \overset{i_0}{\rightarrowtail} \mathrm{Cyl}(f) surjectY$ sa factorisation canonique. Puisque

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \mathrm{Cyl}(f) \end{tikzcd}$$

il suffit de montrer le lemme :

Lemme

Si (Z,A) est une paire cellulaire et $f : A \to Y$ est cellulaire, alors $Z{\cup_f}$ est un complexe cellulaire.

Il suffira alors de l'appliquer à $A = X$, $Z = X \times I$ et $f : A = X \to Y$.

Soit $(J_n,\varphi_n,\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une structure cellulaire sur Z. Soit $(I_n,\tilde{\varphi_n},\tilde{\Phi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une structure cellulaire sur A et $(K_n,\psi_n,\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sur Y. La strcuture sur $Z \cup_f Y$ de squelette $Z^{(n)} \cup_{f_{|A^{(k)}}} Y^{(n)}$ est donnée par $((J_n \smallsetminus I_n) \sqcup K_n, \varphi_{n|J_n\smallsetminus I_n} \sqcup \psi_n, \Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie que c'est cellulaire : $X^{(n)} \to X^{(n)} \times \{0\} \subseteq (X \times I)^{(n)}$, et $X^{(n-1)} \times I \to X^{(n-1)} \subseteq \mathrm{Cyl}(f)^{(n)}$ et $Y^{(n)} \to Y^{(n)} \subseteq \mathrm{Cyl}(f)^{(n)}$. ■

6.1.8.2 Théorèmes homotopiques sur les complexes cellulaires

Lemme. ***(Lemme de compression)***

Soit (X,A) un complexe cellulaire relatif d'étiquetages $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit (Y,B) une paire topologique. Soit une application de paires topologiques $f : (X,A) \to (Y,B)$, *i.e.* continue et telle que $f(A) \subseteq B$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $J_n \neq \emptyset$ (n étant la dimension des cellules que l'on recolle sur $X^{(n-1)}$ pour construire X), $\pi_n(Y,B) = 0$. Alors il existe une application continue $g : X \to B$ homotope à f relativement à A.

$\triangleright$ Notons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des dimensions des cellules recolles pour construire X, avec $J_{n_0} \neq \emptyset, J_{n_1} \neq \emptyset, m \notin (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ avec pour convention que, avec $f^{(-1)} = f$, $X^{(-1)} = A$ et $n_{-1} = -1$, il existe $f^{(k)} : X \to Y$ est homotope à $f^{(k-1)} \overset{H^{(k)}}{\sim} f^{(k)}$ rel $X^{(n_k-1)}$.

Pour $k = 0$, on a

$$\begin{tikzcd}
J_{n_0} \times S^{n_0-1} \arrow[r, "\varphi_{n_0}"] \arrow[d, hook] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
J_n \times B^{n_0} \arrow[r, "\Phi_{n_0}"'] & X^{(n_0)} \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

On a $f\Phi_{n_0}$ une application de paires $(J_{n_0} \times B^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \to Y \to B$ ce qui équivaut à une collection d'applications de paires $\{B^{n_0}, S^{n_0-1}) \to (Y,B)\}$. Or $\pi_{n_0}(Y,B) = \{0\} \simeq [(I^{n_0}, \partial I^{n_0}),(Y,B)] \simeq [(B^{n_0}, S^{n_0} - 1),(Y,B)]$ pour la relation d'homotopie relative au sous-espace. Autrement dit, $f\Phi_{n_0}$ est homotope à une application $\psi : J_{n_0} \times B^{n_0} \to B \subseteq Y$ relativement à $J_{n_0} \times S^{n_0-1}$. Nommément, $f\Phi_{n_0} \overset{\tilde{h}}{\sim} \psi$ où $\tilde{h} : J_{n_0} \times B^{n_0} \times I \to B$, $\tilde{h}(-,0) = f\Phi_{n_0}$ et $\tilde{h}(-,1) = \psi$. On peut consdérer maintenant :

$$\begin{tikzcd}
J_{n_0} \times S^{n_0-1} \times I \arrow[r, "\varphi_{n_0} \times id_I"] \arrow[d, hook] & A \times I \arrow[r, "\tilde{f}(a,t):=f(a)"] \arrow[d] & B \arrow[d, hook] \\
J_n \times B^{n_0} \times I \arrow[r, "\Phi_{n_0} \times id_I"'] \arrow[rr, bend right, "\tilde{h}"'] & X^{(n_0)} \times I \arrow[r, dashed, "\exists ! h"] & Y.
\end{tikzcd}$$

Par ce que l'on vient de dire, le carré extérieur est commutatif, ce qui par propriété de la somme amalgamée donne un unique $h : X^{(n_0)} \times I \to Y$. En outre :

- $\star$ on a une homotopie relative à A : en effet, $h(a,t) = f(a)$ par commutativité du triangle est.
- $\star$ De plus, $h(-,1) \in B$, car cette même commutation donne $h(a,1) \in B$ et $h(\Phi_{n_0}(x),1) = \tilde{h}(x,1) \in B$ pour $x \in \mathring{B}^{n_0}$ par commutation de la flèche du dessous.
- $\star$ Enfin, $h(-,0) = f_{|X^{(n_0)}}$ par le même argument.

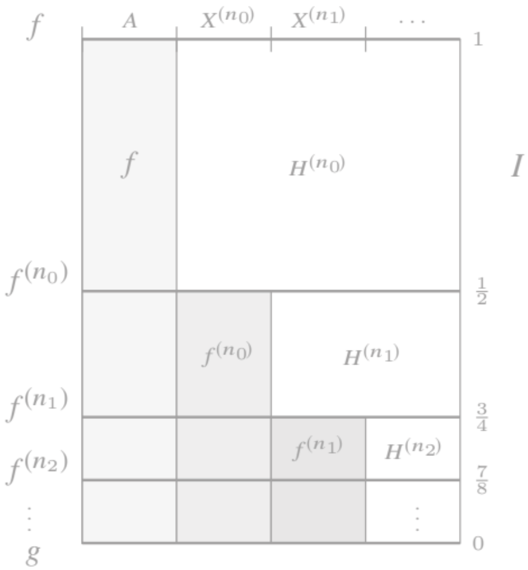
On peut presque conclure : par cofibration,

$$\begin{tikzcd}
X^{(n_0)} \arrow[r, "i_0^{X^{(n_0)}}"] \arrow[d, hook] & X^{(n_0)} \times I \arrow[d, hook] \arrow[ddr, "h"] & \\
X \arrow[r, "i_0^X"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "H^{(n_0)}"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

donne par commutation de l'extérieur $h(x,0) = f(x)$ pour $x \in X^{(n_0)}$ d'après le dernier point d'où par extension des homotopies de la cofibration $X^{(n_0)} \to X$, une homotopie $H^{(n_0)} : X \times I \to Y$. Vérifions qu'elle nous convient. On a :

- ⋆ $f^{(0)} := H^{(n_0)}(-,1) : X \to Y$;
- ⋆ $f^{(0)} \overset{H^{(n_0)}}{\sim} H^{(n_0)}(-,0) = f = f^{(-1)}$ par commutation du triangle inférieur ;
- ⋆ $H^{(n_0)}$ est une homotopie relative à A, car $H^{(n_0)}(a,t) = h(a,t) = f(a)$ pour tout $a \in A$;
- ⋆ $f^{(0)}(X^{(n_0)}) \subseteq B$ et $H^{(n_0)}(X^{(n_0)},1) = h(X^{(n_0)},1) \subseteq B$ toujours par cet argument.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang k, et démontrons-là au rang $k+1$. Ce sont les mêmes arguments. Si $\dim(X) < +\infty$, c'est déjà fini. Sinon, construsons une homotopie $\mathcal{H} : X \times I \to Y$ relative à A telle que $f = \mathcal{H}(-,0)$ et $g = \mathcal{H}(-,1)$, avec $A \times I \subseteq X^{(n_0)} \times I \subseteq X^{(n_1)} \times I \subseteq X^{(n_2)} \times I$,



la formule analytique de ce procédé étant

$$\begin{aligned} Hj : \quad X \times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\longmapsto H^{(k)}(x, 2^{k+1}(t - 1 + \tfrac{1}{2^k})) \text{ pour } 1 - \tfrac{1}{2^k} \leqslant t \leqslant 1 - \tfrac{1}{2^{k+1}}, k \geqslant 0 \end{aligned}$$

relative à A. ■

Proposition

Soit $f : X \overset{\sim_w}{\to} Y$ une équivalence faible d'homotopie entre complexes cellulaires. Pour tout complexe cellulaire Z, le push-forward $f_* : [Z,X] \to [Z,Y]$ est une bijection.

▷ Considérons la factorisation canonique $f : X \overset{i}{\rightarrowtail} \mathrm{Cyl}(f) \cong Y$. Puisque les cofibrations sont des plongements et les homéoomorphismes des équivalences d'homotopie, il suffit de le montrer pour des inclusions. Après cette réduction, soit donc $f : X \hookrightarrow Y$. Considérons la suite exacte longue associée à cette paire :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,X) \arrow[r] & \pi_0(X) \arrow[r, "\sim"] & \pi_0(Y) \\
 & \pi_2(Y,X) \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r, "\sim"] & \pi_1(Y) \arrow[ull] \\
\ldots \arrow[r] & \pi_3(Y,X) \arrow[r] & \pi_2(X) \arrow[r, "\sim"] & \pi_2(Y) \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

qui par hypothèse induit des isomorphismes $\pi_i(f) : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par force, on a donc $\pi_i(Y,X) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Appliquons donc le lemme de compression.

Montrons que f_* est surjective. Soit $\varphi : Z \to Y$ et considérons l'application de paires $(Z,\emptyset) \xrightarrow{\varphi} (Y,X)$ où $(Z,\emptyset)$ est bien un complexe cellulaire relatif. On a donc φ homotope à $\psi : Z \to X$, soit $f\psi \sim \varphi$.

Montrons que f_* est injective. Soient $\varphi,\psi : Z \to X$ telles que $f\varphi \sim_H f\psi : Z \to Y$ *i.e.* $\exists H : Z \times I \to Y$ telle que $H(-,0) = f \circ \varphi$ et $H(-,1) = f \circ \psi$. Alors $(Z \times I, Z \times \partial I)$ est un complexe celulaire relatif et de plus $H : (Z \times I, Z \times \partial I) \xrightarrow{H} (Y,X)$ est une application entre paires. En réappliquant le lemme de comression, il existe $K : Z \times I \to X$ homotope à H relativement à $Z \times \partial I$, *i.e.* $K(z,0) = H(,z0) = \varphi(z)$ et $K(z,1) = H(z,1) = \psi(z)$. Et voilà ! ■

Remarque. f n'est pas nécessairement une application cellulaire.

Théorème. ***(Whitehead, 1942)***

Une application continue entre complexes cellulaires est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Soit $f : X \to Y$ une équivalence faible d'homotopie entre complexes cellulaires. Appliquons la proposition au cas $Z = Y$. L'application $f_* : [Y,X] \xrightarrow{\sim} [Y,Y]$ est une bijection. Soit $g : Y \to X$ l'image réciproque de id_Y. Par construction, $fg \sim id_Y$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\pi_n(fg) = \pi_n(f)\pi_n(g) = id_{\pi_n(Y)}$. Ainsi, comme $\pi_n(f)$ est un isomorphisme, $\pi_n(g)$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que g est une équivalence faible d'homotopie. Maintenant, appliquons la proposition $Z = X$ et g. L'application $g_* : [X,Y] \xrightarrow{\sim} [X,X]$ est une bijection. Soit $\varphi : X \to Y$ l'image réciroque de id_X. Par construction $g\varphi \sim gf$ d'où $f = fid_X \sim fg\varphi \sim \varphi$. ■

La donnée de l'application f est obligatoire !
Considérons $X = S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$. On a deux fibrés $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$. Les suites exactes longues de groupes d'homotopie associées sont similaires, d'où en particulier $\pi_n(S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}) \simeq \pi_n(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents ! En effet, $H_5(S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}) \not\simeq H_5(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3)$.

En corollaire :

Contre-exemple. ***(Un non-CW-complexe simple)***

Le cercle polonais ne peut être muni d'une structure cellulaire. □

▷ En effet, l'application $f : \{a,b\} \in W$ où $a \in \{0\} \times [-1,1]$ et b dans l'autre composante connexe de W, serait continue. Or c'est une équivalence faible d'homotopie... mais W et $\{a,b\}$ ne sont pas homotopiquement équivalents. ■

Remarques.

1. Le théorème tient bien sûr encore pour des espaces ayant le type d'homotopie des CW-complexes.
2. L'équivalence d'homotopie faible n'est pas une relation d'équivalence sur Top, car elle n'est pas symétrique. En revanche, c'en est une dans la catégorie des espaces cellulaires.

Corollaire

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie.

▷

■

Proposition

Une application $n \in \mathbb{N}$-connexe $f : X \to Y$ entre espaces topologiques. Soit Z un complexe cellulaire.

1. Si $\dim(Z) \leqslant n-1$, $f_* : [Z,X] \xrightarrow{\sim} [Z,Y]$.
2. Si $\dim(Z) = n$, $f_* : [Z,X] \twoheadrightarrow [Z,Y]$.

▷ Similaire au théorème de Whitehead. ■

Théorème. ***(Théorème de Whitehead, version n-connexe)***

Soient X,Y deux complexes cellulaires de dimensions bornées par $n \in \mathbb{N}$. Une application continue $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si $\pi_k(f)$ est un isomorphisme pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$.

Corollaire. ***(Contractibilité des complexs cellulaires)***

Un complexe cellulaire X est contractible si et seulement si $\pi_n(X) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite d'homotopie est détecte les contractiles dans la sous-catégorie de Top des complexes cellulaires.

▷ On applique le théorème de Whitehead, version n-connexe à l'application $X \twoheadrightarrow \{*\}$. ■

Lemme

▷ Soit $f : S^k \to X$ continue pointée. En particulier, $f(S^k)$ est compacte, donc par propriété de la topologie colimite, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(S^k) \subseteq X_k$. Ainsi, en notant $\overline{f} : S^k \to X_k$, de sorte que

$$\begin{tikzcd} S^k \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & & & X \\ & X_k \arrow[r, "i"'] & X_{k+1} \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

i.e. $f = ji\overline{f}$ où $i \sim cste$, soit $f \sim jcste\overline{f} \sim jcste\overline{f} = cste$. En appliquant ce qui précède, on conclut. ■

Exercice 9 *(Sphère infinie)*

1. Montrer que la sphère de dimension $n \in \mathbb{N}$, S^n admet une structure cellulaire ayant deux k-cellules pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Ceci permet de définir, en passant à la colimite :

$$S^0 \subseteq S^1 \subseteq S^2 \subseteq ... \subseteq S^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$$

un nouveau $CW-$complexe appelé *sphère de dimension infinie.*

2. Montrer que S^∞ est contractile.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On utilise en N (puis en S) $\begin{array}{rcl} B^n & \longrightarrow & S^n. \\ x & \longmapsto & (x,\sqrt{1-\|x\|^2}) \end{array}$
2. Il suffit d'appliquer le lemme précédent.

6.1.8.3 Approximation cellulaire

Théorème. ***(Approximation cellulaire des espaces topologiques)***

Pour tout espace topologique X, il existe un complexe cellulaire X_{CW} et une équivalence faible d'homotopie $w_X : X_CW \to X$.

⊛ *(Idée de la preuve.)* L'idée est la même que pour obtenir une résolution projective d'un $\mathbb{Z}$-complexe de chaînes : on ajoute des cellules à chaque degré pour obtenir des isomorphismes de groupes. ■

Proposition. ***(Naturalité homotopique de l'approximation cellulaire)***

Pour tous espaces topologiques X,Y, il existe $F(f) : X_{CW} \to Y_{CW}$ continue telle que $w_T F(f) \sim f w_X$, autrement dit telle le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X_{CW} \arrow[r, "w_X"] \arrow[d, dashed, "\exists F"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_{CW} \arrow[r, "w_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute homotopiquement.

▷ On applique la proposition à $Z = X_{CW}$, ´ f ˇ $= w_Y$. ■

Théorème. ***(Approximation cellulaire d'applications)***

Soient X,Y deux complexes cellulaires. Alors toute application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application cellulaire.

6.1.9 Lien entre homotopie supérieure et homologie simpliciale

Définition-propriété. ***(Morphisme de Hurewicz généralisé)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X un espace topologique. Soit $f : S^n \to X$ une application continue. Elle induit une applicatoin en homologie $H_n(f) : H_n(S^n) \to H_n(X)$. D'autre part, $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. On peut définir de manière unique :

$$\begin{aligned} \pi_n(X) &\longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto H_n(f)(1). \end{aligned}$$

Théorème. ***(Hurewicz)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X un espace topologique. Si X est $(n-1)$-connexe, alors $\pi_n(X) \simeq H_n(X)$ par le morphisme de Hurewicz.

Corollaire. ***(Théorème de Brouwer)***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Théorème

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre complexes cellulaires simplement connexes. SI $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$, alors f est une équivalence d'homotopie.

6.2 Homotopie des ensembles simpliciaux

Nous venons de voir que les CW-complexes fournissaient une très large famille d'espaces topologiques : tout espace topologique est faiblement équivalent à un CW-complexe. Malheureusement, la donnée d'un CW-complexe n'est pas simple ; comment code-t-on cela dans un ordinateur ? L'idée ici sera de passer du modèle utilisant des disques (D^n,S^{n-1}) comme brique de base à des n-simplexes géométriques standards $(|\Delta|^n|,\partial|\Delta|^n|)$. La donnée des recollements de cellules est alors beaucoup plus simple car purement combinatoire. Ceci donne naissance à la notion d'ensembles simpliciaux. Ce n'est donc pas pour rien que ce domaine est souvent qualifié de *théorie d'homotopie combinatoire*. L'étudiant est chanceux-se : la théorie des ensembles simpliciaux admet un paradigme, un exemple sur lequel presque toutes les définitions et propriétés peuvent être lues facilement, il s'agit des simplexes standards.

6.2.1 Espaces topologiques triangulés

Les diverses notions de la topologie algébrique, comme les groupes d'homologie ou les groupes d'homotopie, s'avèrent en général difficiles à calculer. Comme toujours, toute information supplémentaire est la bienvenue pour simplifier de tels calculs. Dans cette section, nous considérerons les espaces topologiques munis d'une bonne décomposition en cellules qui auront la forme de points, d'intervalles, de triangles, de tétraèdres, etc. Plus précisément, en toute dimension, les briques de base sont les simplexes géométriques.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

NotationOn utilise pour $n \in \mathbb{N}$, la notation combinatoire un peu modifiée $[n] = [\![0,n]\!]$.

Définition. ***(Polyèdre simplicial)***

Un *polyèdre simplicial* $|\mathfrak{X}|$ de $\mathbb{R}^N$ est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est une face de chacun d'eux.

Définition. ***(Complexe simplicial)***

Un *complexe simplicial* est une paire $(V,\mathfrak{X})$ où V est un ensemble et $\mathfrak{X}$ est un ensemble de parties de V qui soit $\subseteq$-transitif, *i.e.* telles que pour tout $F \subseteq \mathfrak{X}$, $Z \subseteq F \implies Z \in \mathfrak{X}$. On impose parfois que $\{v\} \in \mathfrak{X}$ pour tout $v \in V$.

VOC Les éléments de V sont appelés *sommets* ; les éléments de $\mathfrak{X}$ sont appelés *faces*.

Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des polyèdres simpliciaux sont représentées fidèlement par des données combinatoires simples. Par un léger abus de notation, on notera

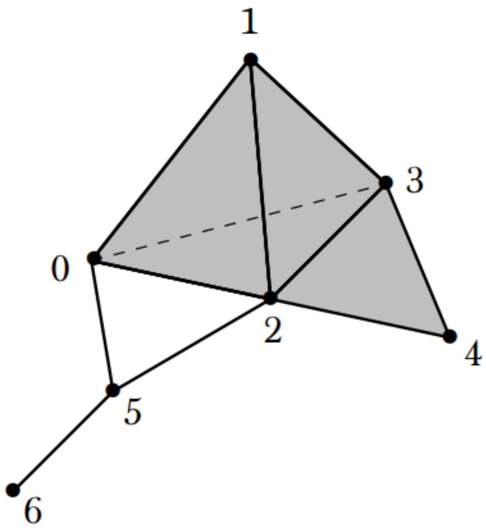


FIGURE 6.2.1 : *Un exemple de polyèdre simplicial.* —

souvent un complexe simplicial simplement par $\mathfrak{X}$. Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des polyèdres simpliciaux sont en bijection avec les complexes simpliciaux finis :

$$\text{polyèdres simpliciaux (finis)}\diagup_{\text{homéomorphisme cellulaire}} \simeq \text{complexes simpliciaux (finis)}\diagup_{\text{bijections de}}$$

Dans le cas représenté ci-dessus, le complexe simplicial fini est : $\{0,1,2,3,4,5,6,01,02,03,05,12,13,23,24,25,56,012,013,023,123,234,0123\}$.

Exemples. ***(Complexes et polyèdres simpliciaux)***

1. Tout simplexe géométrique est un polyèdre simplicial. Le complexe simplicial associé à $|\Delta^n|$ est $([n],\mathcal{P}([n]))$. C'est un modèle pour D^n.
2. Le complexe simplicial associé au polyèdre $\partial|\Delta^n|$ est $([n],\mathcal{P}([n]) \smallsetminus [n])$.
3. *(Cornets)*

Définition. ***(n-squelette d'un complexe simplicial)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le n-squelette d'un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ est le complexe simplicial $\mathfrak{X}^{(n)}$ formé des éléments de $\mathfrak{X}$ de cardinal au plus n.

La notion de complexe simplicial permet d'envisager des polyèdres simpliciaux de dimension infinie.

Définition. ***(Réalisation géométrique d'un complexe simplicial)***

La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ est la colimite $|\mathfrak{X}| = \mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}|\mathfrak{X}^{(n)}|$ définie par

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n| \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, hook] & |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n| \arrow[r, "\Phi_n"'] & |\mathfrak{X}^{(n)}| \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{X}_n = \{F \in \mathfrak{X} \mid \mathrm{card}(F) = n+1\}$ et φ_n sur $\{x_0,\ldots,x_n\} \times \langle v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n\rangle$ est définie par Φ_{n-1} sur $\{x_0,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n\} \times \langle v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,v_n\rangle$.

Remarque. $\mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{X}_0 \cup \ldots \cup X_n$.

Fait. ***(Complexe simplicial $\implies$ complexe cellulaire)***

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial est un CW-complexe.

Réciproquement :

Théorème. ***(Théorème d'approximation simpliciale)***

Tout CW-complexe est homotopiquement équivalent à la réalisation géométique d'un complexe simplicial, *i.e.* pour tout CW-complexe X, il existe un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ tel que $X \simeq |\mathfrak{X}|$.

▷ La définition de la réalisation géométrique donnée ci-dessus est proche de celle de CW-complexes. Il s'agit donc d'écrire le recollement des cellules d'un CW-complexe à la manière plus restrictive des complexes simpliciaux. Ceci se fait comme toujours par récurrence sur la dimension du squelette. Les détails sont laissés aux lecteur-trices car ils ne nous en apprennent pas d'avantage. ■

Mnémonik : les deux notions de CW-complexes et de complexes simpliciaux sont donc homotopiquement équivalentes.

Définition. ***(Triangulation)***

Une *triangulation* d'un espace topologique X est un complexe simplicial X et un homéomorphisme $X \simeq |\mathfrak{X}|$.
On dit qu'un espace X est *triangulable* s'il admet une triangulation. Le choix d'une triangulation permet de rendre un espace *triangulé*.

Exemples. ***(Triangulation des espaces topologiques)***

1. Tout polyèdre simplicial est trivialement triangulable et triangulé par l'identité.
2. Tout CW-complexe est triangulable.

Contre-exemple. *(Non-triangulation d'un triangulable)*

Cette définition combinatoirement simple a un principal écueil, elle est très rigide : le nombre de simplexes pour décomposer un espace est loin d'être optimal. En effet, deux faces distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets et les sommets d'une face sont distincts. Dans l'exemple du cercle, ces restrictions font que l'on ne peut pas l'écrire comme comme deux segments joints aux deux bouts ou comme un seul segment à sommets confondus. Il faut donc au moins trois segments pour obtenir le cercle. $\square$

Exercice 10 *(Triangulation minimale du tore)*

Montrer que pour le tore, il faut au minimum 7 sommets, 21 arêtes et 14 triangles.

6.2.1.1 Δ-complexes

Définition. *(Application simpliciale)*

Soient $(V,\mathfrak{X})$ et $(W,\mathfrak{Y})$ deux complexes simpliciaux. Une application $f : V \to W$ est une *application simpliciale* si l'image d'une face est une face, *i.e.* si $f(F) \in \mathfrak{Y}$ pour tout $F \in \mathfrak{X}$.

Définition. *(Complexe simplicial ordonné)*

Un *complexe simplicial ordonné* est un complexe simplicial muni d'un ordre total sur son ensemble de sommets.

Définition. *(Application simpliciale entre complexes ordonnés)*

Soient $(V, \leqslant, \mathfrak{X})$ et $(W, \preccurlyeq, \mathfrak{Y})$ deux complexes simpliciaux. Une application $f : V \to W$ est une *application simpliciale ordonnée* si c'est une application simpliciale qui respecte l'ordre des complexes, *i.e.* dès que $x \leqslant y$, $f(x) \preccurlyeq f(y)$.

Lemme. *(Relation fondamentale des cofaces)*

Pour tous $i < j$, $\delta_j\delta_i = \delta_i\delta_{j-1}$.

▷

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\delta_{j-1}"] & 0 \arrow[r, "\delta_i"] & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
i-1 \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i-1 \\
i \arrow[r] & i \arrow[dr] & i \\
i+1 \arrow[r] & i+1 \arrow[dr] & i+1 \\
\vdots & & i+2 \\
\vdots & & \vdots \\
j-2 \arrow[r] & j-2 \arrow[dr] & \vdots \\
j-1 \arrow[dr] & & j-1 \\
\vdots & j \arrow[dr] & j \\
\vdots & & j+1 \\
\vdots & & \vdots \\
n & & \vdots \\
& n+1 & \vdots \\
& & n+2
\end{tikzcd}$$

■

Définition. ***(Δ-complexe)***

Un Δ-*complexe* est la donnée d'une collection $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles munis d'applications dites *faces* $d_i : X_n \to X_{n-1}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ vérifiant $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$.

Définition. ***(Réalisation géométrique d'un Δ-complexe)***

Soit $\mathfrak{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un Δ-complexe. Sa *réalisation géométrique* est

$$|\mathfrak{X}|_\Delta = \coprod_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_n \times |\Delta^n|}{\sim}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(x,\delta_i(y)) \sim (d_i(x),y)$.

Chapitre 7

Topologie des variétés

Résumé

Analysis Situs est un article de référence sur les mathématiques publié par Henri Poincaré en 1895. Poincaré en a publié cinq compléments entre 1899 et 1904. Ces articles ont fourni le premier traitement systématique de la topologie et ont révolutionné le sujet en utilisant des structures algébriques pour distinguer les espaces topologiques non homéomorphes, fondant ainsi le domaine de la topologie algébrique. Les papiers de Poincaré ont introduit les concepts de groupe fondamental et d'homologie simpliciale, ont fourni une première formulation de la dualité de Poincaré, ont présenté la caractéristique d'Euler-Poincaré pour les complexes différentiels, et ont soulevé plusieurs conjectures importantes, y compris la célèbre conjecture de Poincaré, qui s'est révélé plus tard être un théorème.

On s'intéresse ici à la topologie algébrique du point de vue d'un géomètre.

7.1 Compléments généraux sur les variétés topologiques grâce à l'homologie

7.1.1 Propriétés locales algébrico-topologiques des variétés

7.1.1.1 Définitions sur les variétés topologiques

Reformulation pratique. ***(Variété topologique)***

Une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$ est un espace topologique séparé, à base dénombrable et localement homéomorphe à l'espace euclidien de dimension n.

Définition. ***(Bon ensemble, bon voisinage sur une variété)***

Soit M une variété topologique de dimension n. Un *bon ensemble ouverte* $V \subseteq M$ est un ouvert tel qu'il existe un ouvert $U \subseteq M$ tel que U soit un voisinage euclidien de chacun de ses points, autrement dit $U \simeq \mathbb{R}^n$ mar φ, et tel $V \subseteq U$ corresponde par φ à une boule ouverte de rayon fini dans $\mathbb{R}^n$.

Un *bon voisinage* V de x est un voisinage ouvert vérifiant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert euclidien $U \ni x$ muni de l'homéomorphisme φ tel que $V \subseteq U$ corresponde par φ à une boule ouverte de rayon fini dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Tout point d'une variété topologique admet un bon voisinage.

▷ Par hypothèse, tout point d'une variété topologique admet un voisinage euclidien U ouvert quitte à prendre son intérieur, avec si $n = \dim(M)$, $\varphi : U \simeq \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme. Alors $V = \varphi^{-1}(B(\varphi(x),1)) \ni x$ est un voisinage ouvert de x dans U donc dans M, car U est ouvert, homéomorphe à $B(\varphi(x),1)$ toujours par une restriction de φ. ■

7.1.1.2 Lemmes locaux-globaux sur les variétés

Lemme. ***(Local-global pour les compacts)***

Soit M une variété topologique. Soit $\mathcal{P}_M$ un prédicat sur les sous-ensembles compacts de M. Supposons pour $\mathcal{P}_M$ que :

(i) *($\mathcal{P}_M$ sur les convexes)* si A est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien $U \subseteq M$, alors $\mathcal{P}_M(A)$ est vraie ;

(ii) *($\mathcal{P}_M$ stable par crible)* si $\mathcal{P}_M(A)$, $\mathcal{P}_M(B)$ et $\mathcal{P}_M(A \cap B)$ sont vraies pour des compacts $A,B \subseteq M$, alors $\mathcal{P}_M(A \cup B)$ est vraie ;

(iii) *($\mathcal{P}_M$ stable par intersection décroissante)* si l'on a une suite emboîtée de compacts $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ telle que toutes les $\mathcal{P}_M(A_i)$, $i \in \mathbb{N}$ soient vraies, alors $\mathcal{P}_M(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_i)$ est vraie ;

alors $\mathcal{P}_M$ est vraie en tout compact dans M.

▷ Soit $U \subseteq M$ un ouvert euclidien. Si $A \subseteq U$ est une réunion finie de compacts convexes, alors $\mathcal{P}_M(A)$ est vraie, en remarquant que $C_{m+1} \cap (C_1 \cup \ldots C_m) = (C_{m+1} \cap C_1) \cup \ldots \cup (C_{m+1} \cap C_n)$ et que l'intersection de convexes et un convexe, pour appliquer la propriété de stabilité par réunion sous couvert de stabilité par intersection. Si maintenant $A \subseteq U$ est seulement compact, alors $\mathcal{P}_m(A)$ est encore vraie : en effet, considérons, pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$, une réunion finie B_i de boules fermées centrées aux points de A et de rayon $\frac{1}{i}$, qui sont dans U par construction, et telles que $A \subseteq B_i$. On pose $A_i = B_1 \cap \ldots \cap B_i$ pour tout $i \geqslant 1$. La suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et ce sont des compacts de U. De pls, $A = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}^*} A_i$, donc puisque $\mathcal{P}_M(A_i)$ est vraie pour tout $i \geqslant 1$, on peut conclure. Soit enfin A un compact quelconque de M. On sait que M est métrisable, ce qui permet de procéder comme à l'étape précédente. ■

Avançons.

Lemme. ***(Local-global pour les fermés)***

Soit M une variété topologique. Soit $\mathcal{P}_M$ un prédicat sur les fermés de M. Supposons pour $\mathcal{P}_M$ que :

(i) *($\mathcal{P}_M$ sur les convexes)* si A est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien $U \subseteq M$, alors $\mathcal{P}_M(A)$ est vraie ;

(ii) *($\mathcal{P}_M$ stable par crible)* si $\mathcal{P}_M(A)$, $\mathcal{P}_M(B)$ et $\mathcal{P}_M(A \cap B)$ sont vraies pour des fermés $A,B \subseteq M$, alors $\mathcal{P}_M(A \cup B)$ est vraie ;

(iii) *($\mathcal{P}_M$ stable par intersection décroissante)* si l'on a une suite emboîtée de compacts $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ telle que toutes les $\mathcal{P}_M(A_i), i \in \mathbb{N}$ soient vraies, alors $\mathcal{P}_M(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_i)$ est vraie ;

(iv) *($\mathcal{P}_M$ stable par réunions de compacts très disjoints)* si $(A_i)_{i\in I}$ est une collection de compacts *très disjoints*, *i.e.* il existe une collection d'ouverts deux à deux disjoints $(N_i)_{i\in I}$ de M telle que $A_i \subseteq N_i$ pour tout $i \in I$, avec $(A_i)_{i\in I}$ telle que $\mathcal{P}_M(A_i)$ soit vraie pour tout $i \in I$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ soit un fermé, alors $\mathcal{P}_M(\bigcup\limits_{i\in I} A_i)$ est vraie ;

alors $\mathcal{P}_M$ est vraie en tout fermé de M.

$\triangleright$ On sait que $\mathcal{P}_M(A)$ est vraie pour tout compact $A \subseteq M$, car les hypothèses du lemme local-global pour les fermés sont plus fortes que celui pour les compacts. Si M est compacte, c'est évident, car ses fermés sont compacts. Supposons donc que M ne soit pas compacte. Elle reste séparée et localement compacte. Considérons M^* sa compactifiée dont on note ∞ le point à l'infini. On obtient donc un espace M^* séparé, et même régulier, qui admet clairement une base dénombrable. Par le théorème de métrisation d'Urysohn, il est métrisable. Soit d une métrique, que l'on peut sans problème supposer bornée par 1. On considère sur M la fonction $f : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{d(x,\infty)} \end{array}$. Si $A \subseteq M$ est fermé, on pose $B_j = f^{-1}([2j-2,2j-1]) \cap A$ et $C_j = f^{-1}([2j-1,2j]) \cap A$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On pose $B = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} B_j$ et $C = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} C_j$. Les sous-ensembles B et C sont des réunions très disjointes de compacts. De plus, ce sont des fermés par leur construction, donc $\mathcal{P}_M(B)$ et $\mathcal{P}_M(C)$ sont vraies. De façon similaire, $\mathcal{P}_M(B \cap C)$ est vraie. Par conséquent, $\mathcal{P}_M(B \cup C)$ est vraie, mais $B \cup C = A$, donc on a terminé. ■

Lemme. ***(Local-global pour les ouverts)***

Soit M une variété topologique. Soit $\mathcal{P}_M$ un prédicat sur les ouverts de M. Supposons pour $\mathcal{P}_M$ que :

(i) *($\mathcal{P}_M$ sur les convexes)* si A est homéomorphe, en particulier s'il est difféomorphe, à un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{P}_M(A)$ est vraie ;

(ii) *($\mathcal{P}_M$ stable par crible)* si $\mathcal{P}_M(A)$, $\mathcal{P}_M(B)$ et $\mathcal{P}_M(A \cap B)$ sont vraies pour des ouverts $A,B \subseteq M$, alors $\mathcal{P}_M(A \cup B)$ est vraie ;

(iii) *($\mathcal{P}_M$ stable par réunion disjointe)* si $(A_i)_{i \in I}$ est une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que $\mathcal{P}_M(A_i)$ soit vraie pour tout $i \in I$, alors $\mathcal{P}_M(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$ est vraie ;

alors $\mathcal{P}_M$ est vraie en tout ouvert de M.

▷ Par les deux premiers points, l'affirmation $¶_M(U)$ est vraie pour tout réunion U finie d'ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$, si $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $M^* = M \cup \{infi\}$ le compactifié d'Alexandrov de M. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{d(\infty,x)}$ où d est la distance sur M^* qui est métrisable. Alors on peut voir que $f : M \to [0, +\infty[$ est une application propre. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $K_n = f^{-1}([n,n+1])$. On peut recouvrir le compact K_n par une réunion finie $U_n \subseteq f^{-1}(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[)$ d'oùverts convexes. Toutes les affirmations $P_M(U_n)$ sont vraies. On pose $U = \bigcup\limits_{2|n} U_n$ et $V = \bigcup\limits_{2\nmid n} U_n$. On déduit de la troisième hypothèse que $P_M(U)$ et $P_M(V)$ sont vraies. De plus, $U \cap V = \bigcup\limits_{i,j \in \mathbb{N}} U_{2i} \cap U_{2j+1}$. Les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes. Donc $P_M(U \cap V)$ est vraie. Par conséquent, $P_M(U \cup V) = P_M(M)$ est vraie. ■

7.1.1.3 Locale contractibilité

Fait

Toute variété topologique est localement contractile.

En effet, la notion de contractibilité est stable par équivalence d'homotopie, en particulier par homéomorphie (locale).

7.1.2 Orientations locales des variétés topologiques

7.1.2.1 Définition topologique de l'orientabilité

Définition. ***(Orientation de $\mathbb{R}^n$ en algèbre linéaire)***

L'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ quotienté par la relation d'équivalence $e \sim e' \iff \det_e(e') > 0$, a deux ensembles. Le choix d'un élément e_r de $\mathcal{B}$ est celui d'une *orientation* de $\mathbb{R}^n$. Une orientation *directe* est donnée par un élément de la classe de e_r et une orientation *indirecte* est donnée par un élément de la classe de l'autre élément de $\mathcal{B}/\sim$.

Définition. ***(Orientation locale de l'espace euclidien)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Une *orientation locale* de $\mathbb{R}^n$ en x est le choix d'un générateur de $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Remarque. On a vu ce calcul qui est un corollaire direct du théorème d'excision. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1}$ et $\mathbb{R}^n \cong D^n$, de plus, il est clair par construction que l'homologie relative est invariante par homotopie sur les deux membres de la paire considérée, d'où

$$H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(D^n,S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

puisque (S^{n-1},D^n) est une paire de Borsuk. Dans le cas $n = 0$, $H_0(\mathbb{R}^0,\emptyset) = H_0(\{\star\}) = \mathbb{Z}$ encore.

Définition. ***(Orientations locales cohérentes de l'espace)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x,y \in \mathbb{R}^n$. Remarquons que $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus B) \simeq H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ pour tout voisinage ouvert commun à x et y.
Une *orientation locale cohérente* en x et y est la donnée de deux orientations locales en x et y telles que le générateur choisi pour l'orientation de x est envoyé sur le générateur choisi pour l'orientation de y.

Définition. ***(Orientation de l'espace euclidien)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une *orientation* de $\mathbb{R}^n$ est un choix cohérent d'orientations locales en toutes paires de points de $\mathbb{R}^n$.

Généralisons aux variétés topologiques quelconques.

Définition. ***(Orientation d'une variété en géométrie différentielle)***

Soit M une variété <u>différentielle</u> munie d'un atlas $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$. Elle est *orientable* s'il existe un atlas équivalent à celui-ci dont les fonctions de transition $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont toutes de déterminant jacobien positif, dit alors *orienté*. Une *orientation* est un atlas orienté maximal de cette classe d'équivalence.

Définition-propriété. ***(Orientation locale d'une variété)***

Soit M une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$. Une *orientation locale* de M en $x \in \mathbb{M}$ est le choix d'un générateur de $H_n(M,M \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$.

▷ Montrons cet isomorphisme. Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert eucliden $U \ni x$. Par excision, on a $H_n(M,M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U,U \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$. ■

Définition-propriété. ***(Orientations locales cohérentes sur une variété)***

Soit M une variété topologique. Soient $x,y \in M$. On suppose que $x,y \in V$ un bon voisinage commun à x et y, ce qui est toujours possible. Remarquons qu'alors $H_n(M,M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M,M \setminus V) \simeq H_n(M,M \setminus \{y\})$

Une *orientation locale cohérente* en x et y est la donnée de deux orientations locales en x et y telles que le générateur choisi pour l'orientation de x est envoyé sur le générateur choixi pour l'orientation de y.

Définition. ***(Orientation d'une variété topologique)***

Soit M une variété topologique de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dit que M est *orientable* si l'on peut choisir des orientations locales $x \longrightarrow \mu_x$ générateur de $H_n(M,M \setminus \{x\})$ en tout point $x \in M$ de telle façon que tout point $x \in M$ admet un point voisinage et les orientations locales choisies de M en tous points de ce bon voisinage soient cohérentes.

Si M est une variété topologique orientable, une *orientation* de M est une telle orientation en tout point.

Proposition

Si X est connexe, il a au plus deux orientations.

Proposition. ***(Lien entre les orientations topologiques et différentielles)***

Une variété topologique munie d'une structure différentielle C^1 est orientable en tant que variété topologique si et seulement si elle est orientable en tant que variété différentielle pour cette structure.

$\triangleright$ Soit M une variété différentielle C^1 de dimension n orientable en tant que variété différentielle. Soit $x \in M$ un point. Soit (U,φ) un ouvert de carte contenant x, φ centrée en x. On suppose sans problème $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$. On fixe un générateur $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$. Alors $\varphi_*^{-1}(\alpha) \in H_n(U,U \setminus \{x\})$ en est un générateur. Si $(U'phi')$ est un ouvert ouvert de carte contenant x, φ' centrée en x, le difféomorphisme $\varphi' \circ \varphi^{-1} : R^n \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert est de jacobien strictement positif en tout point en tant que transition d'une orientable. On peut montrer qu'un tel difféomorphisme est isotope à l'identité par des difféomorphismes. On obtient qu l'application $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \longrightarrow \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ fournie par $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ est homotope à l'identité. On obtient une application $M \longrightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ *(avec le vocabulaire introduit ci-dessous)* et l'on vérifie facilement que cette application est continue, donc que c'est une section (dont toutes les valeurs sont des générateurs). Par conséquent, M est orientable en tant que variété topologique.

La réciproque est plus simple. Supposons que M soit topologiquement orientable. Soit $s : M \longrightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ une section dont toutes les images sont des générateurs. Pour chaque carte locale $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on peut carer $s(x)$ où $x \in U$ et le générateur fixé de $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Si nécessaire, on peut composer des cartes avec une réflexion de $\mathbb{R}^n$. On obtient un atlas orienté de M, en utilisant les arguments de l'implication précédente : étant donnée une transition de jacobien négatif, on compose par une réflexion et on l'obtient positif, donc les orientations sont cohérentes. Mais elles l'étaient déjà, on l'on a réléchi, donc elle ne le sont plus... c'est que tous les jacobiens de transition sont positifs. ■

Exemples. ***(Orientation des variétés topologiques)***

1. Un espace discret pris comme variété discrète X est toujours orientable. Le choix d'une orientation revient à un choix de signes en chaque point de l'espace. Il y a donc $2^{|X|}$ orientations possibles pour X.
2. Le ruban de Möbius n'est pas orientable. En effet, c'est une variété différentielle C^1 non orientable en tant que variété différentielle.

Toutes les variétés ne sont donc pas orientables, mais :

Proposition

Toute variété topologique M de dimension $n \geqslant 1$ admet un revêtement double $\tilde{M} \to M$, dit *revêtement d'orientation*, telle que $\tilde{M}$ soit une variété topologique orientable.

▷ Posons $\tilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M \text{ ET } \mu_x \in H_n(M,M \smallsetminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z} \text{ en est un générateur}\}$. On considère l'application $p\colon \begin{array}{ccc} \tilde{M} & \longrightarrow & M \\ \mu_x & \longmapsto & x \end{array}$. On munit $\tilde{M}$ d'une topologie dont une base est formée par la collection de sous-ensembles $V(\mu_V) \subseteq \tilde{M}$, où $V \subseteq M$ est un bon sous-ensemble ouvert de M, $\mu_V \in H_n(M,M \smallsetminus V) \simeq \mathbb{Z}$ en est un générateur et $V(\mu_V)$ est formé de $\mu_x \in \tilde{M}$ tel que $x \in V$ et μ_x est l'image de μ_V par l'isomorphisme $H_n(M,M \smallsetminus V) \simeq H_n(M,M \smallsetminus \{x\})$. En effet, l'intersection de deux $V(\mu_V)$ est une réunion de tels sous-ensembles. On vérifie alors que p est un revêtement àà deux feuillets et que $\tilde{M}$ est une variété topologique orientable. ■

Remarques.

1. M est orientable si et seulement si $\tilde{M}$ a deux composantes connexes.
2. Si M est simplement connexe, alors M est orientable.
   En effet, dans ce cas, le revêtement double considéré est localement trivial, et de plus une variété est orientable si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est. Réciproquement, si M est orientable, alors p est trivial, au sens que $\tilde{M} = M \sqcup M$.
3. Si $\pi(M)$ n'a pas de sous-groupe d'indice 2, alors M est orientable.
   En particulier, on retrouve le point précédent.
4. $x \mapsto \mu_x$ est une section de p si et seulement si M est orientable. Le cas échéant, cette section est un choix d'orientation locale cohérente en tout point de M.
5. Le *revêtement d'orientation* $\tilde{M}$ de M est unique à isomorphisme près. En effet, il est déterminé par les *lacets désorientants*.

Définition. ***(Orientation le long d'un fermé)***

Soit M une variété topologique. Soit A un fermé de M. Soit $\tilde{M}$ le revêtement d'orientation de M. On parle d'*orientabilité de M le long de A* s'il existe une section du revêtement $p : \tilde{M} \to M$ définie sur A, *i.e.* une section du revêtement de base A induit par p. Autrement dit, aucun des lacets basés en un point de A contenu dans A, ne sont désorientants.

Remarque. L'orientabilité d'une variété le long d'elle-même est son orientabilité.

Généralisons à coefficients quelconques. Soit donc G un groupe abélien fixé.
On peut considérer le revêtement $\tilde{M}_G = \bigcup_{x\in M} H_n(M,M \smallsetminus \{x\};G)$. On introduit une topologie sur $\tilde{M}$ à l'aide d'une base formée de $V(\mu_V)$ où $V \subseteq M$ est un bon ouvert, $\mu_V \in H_n(M,M \smallsetminus V;G)$, $V(\mu_V)$ est formé de $\mu_x \in \tilde{M}_G$ tel que $x \in V$ et μ_x soit l'image de μ_V par l'isomorphisme $H_n(M,M \smallsetminus V;G) \xrightarrow{\sim} H_n(M,M \smallsetminus \{x\};G)$.

Propriété. ***(Caractérisation de l'orientabilité topologique)***

Soit M une variété topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est orientable ;

(ii) M est orientable le long de tous ses compacts ;

(iii) les générateurs des fibres du revêtement $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \to M$ forment un revêtement double trivial ;

(iv) $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \simeq M \times \mathbb{Z}$ par un isomorphisme de revêtements.

7.1.2.2 Groupe des sections et conséquences sur l'homologie des variétés en rang de dimension

Fait. ***(Groupe des sections à support compact)***

On peut additionner deux sections de $\tilde{M}_G$. On a donc, si G est un groupe abélien et $A \subseteq M$ un fermé, un morphisme

$$\mathcal{I}_A : H_n(M,M \smallsetminus A;G) \to \Gamma_c(A,\tilde{M}_G)$$

où $\Gamma_c(A,\tilde{M}_G)$ est le groupe des sections de p à support compact définies sur A.

Soit $\alpha \in H_n(M,M \smallsetminus A;G)$. Décrivons l'image de α. Soit $x \in A$. Alors $\mathcal{I}_A(\alpha)(x)$ est l'image de α par le morphisme $H_n(M,M \smallsetminus A;G) \to H_n(M,M \smallsetminus \{x\};G)$ induit par l'inclusion. Vérifions que $\mathcal{I}_A(\alpha)$ est continue et à support compact. Soit $c \in C_n(M;G)$ un représentant (d'un représentant) de α. L'*image* de c (la réunion des images de tous les simplexes singuliers de c) est un sous-ensemble compact K de M. Si maintenant $x \in A \smallsetminus K$, alors $\mathcal{I}_A(\alpha)(x) = 0$. En effet, puisuqe $K \subseteq M \smallsetminus \{x\}$, l'image de c dans $C_n(M,M \smallsetminus A;G)$ est envoyée en $0 \in C_n(M,M \smallsetminus \{x\};G)$. D'autre part, si je considère le bord de c, avec

$\partial c \in C_{n-1}(M \setminus A; G)$ par un léger abus, l'image de ∂c est un compact $K' \subseteq M$. Si $x \in A$, on peut choisir un bon voisinage $V \ni x$ dans M tel que $K' \subseteq M \setminus V$. Donc, l'image de c dans $C_n(M,M \setminus V; G)$ définit une classe d'homologie $\beta \in H_n(M,M \setminus V; G)$. La section $V \to V \times \{\beta\}$ coïncide avec $\mathcal{I}_A(\alpha)$ sur $V \cap A$.

Théorème

Soient M une variété topologique, A un fermé de M et G un groupe abélien.

1. $H_k(M,M \setminus A; G) = 0$ pour tout entier $k > n := \dim(M)$. En particulier, $H_k(M; G) = 0$ pour tout $k > n$.
2. $\mathcal{I}_A : H_n(M,M \setminus A; G) \to \Gamma_c(A,\tilde{M}_G)$ est un isomorphisme.

▷ Successivement :

1. C'est un exercice facile.
2. Utilisons le lemme local-global (pour les fermés). Dans toute la suite, on ne mentionne pas le module des coefficients, qui est G.
   (i) Immédiat pour les compacts convexes.
   (ii) On considère la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(M,M \setminus (A \cap B)) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & H_n(M,M \setminus (A \cup B)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{I}_{A\cup B}"'] & H_n(M,M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) \arrow[d, "\mathcal{I}_A \oplus \mathcal{I}_B"] \arrow[r] & {} \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_c(A \cup B,\tilde{M}_G) \arrow[r] & \Gamma_c(A,\tilde{M}_G) \oplus \Gamma_c(B,\tilde{M}_G) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

   qui donne le résultat par le lemme des cinq.
   (iii) On pose $A = \cap_i A_i$. Les morphismes de restrictions $\Gamma(A_i,\tilde{M}_G) \to \Gamma(A,\tilde{M}_G)$, $i \in \mathbb{N}^*$, induisent un isomorphisme $\varinjlim \Gamma(A_i,\tilde{M}_G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(A,\tilde{M}_G)$. On rappelle que la construction ensembliste de cette limite inductive est donnée par le quotient de la réunion par la relation d'équivalence : deux éléments ont au moins un couple de leurs images dans l'un des termes suivants qui coïncide. Par propriété universelle :

$$\begin{tikzcd} \Gamma(A_1,\tilde{M}_G) \arrow[r] \arrow[drrr] \arrow[ddr] & \Gamma(A_2,\tilde{M}_G) \arrow[r] \arrow[drr] \arrow[dd] & \Gamma(A_3,\tilde{M}_G) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddl] & \dots \arrow[d] \\ & & & \varinjlim \Gamma(A_i,\tilde{M}_G) \arrow[dll, dashed, "\exists ! \varphi"] \\ & \Gamma(A,\tilde{M}_G) & & \end{tikzcd}$$

   et il reste à montrer que φ est un isomorphisme. On peut utiliser le fait que pour tout voisinage $W \supseteq A$, il existe A_i tel que $A_i \subseteq W$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \varinjlim H_n(M, M \setminus A_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"'] & H_n(M,M \setminus A) \arrow[d, "\mathcal{I}_A"] \\ \varinjlim \Gamma(A_i,\tilde{M}_G) \arrow[r, "\sim"] & \Gamma(A,\tilde{M}_G) \end{tikzcd}$$

qui commute. Donc $\mathcal{I}_A$ est un isomorphisme.

(iv) On a pour $A_i \subseteq N_i$ voisinage ouvert, $H_n(M, M \smallsetminus \cup_i A_i) \simeq H_n(\cup_i N_i, (\cup_i N_i) \smallsetminus (\cup_i A_i)) \simeq \oplus_i H_n(N_i, N_i \smallsetminus A_i) \simeq \oplus_i H_n(M, M \smallsetminus A_i)$. Pour ls groupes de sections à support compact, on a des isomorphismes similaires.

Ceci permet de conclure.

Corollaire. ***(Homologie en dimension d'une variété non compacte)***

Soit M une variété topologique connexe. Si M n'est pas compacte, alors $H_n(M;G) = 0$.

$\triangleright$ Montrons que $\Gamma_c(M,\tilde{M}_G)$, *i.e.* pour $A = M$, est un singleton. Soit s une section du revêtement d'orientation p définie sur M. Alors $s^{-1}(0)$ est un fermé de M, car s est continue, et un ouvert de M, car s est à support compact donc fermé, car M est séparée. De plus, il est non vide. Comme M n'est pas compacte, $s^{-1}(0) = M$, donc $s = 0$. Ainsi, $\Gamma_c(M,\tilde{M}_G) = \{0\} \simeq H_n(M;G)$. ■

7.1.2.3 G-orientabilité

Définition-propriété. ***(G-orientabilité)***

Soit M une variété topologique. Soit G un anneau commutatif unitaire. Dans ce cas, on a un isomorphisme de G-modules $H_n(M,M \smallsetminus \{x\}; G) \simeq G$ pour tout $x \in M$.
La variété M est dite G-*orientable* s'il existe une section continue $M \longrightarrow \tilde{M}_G$ dont toutes les valeurs sont des générateurs de fibres (en tant que G-modules).

Exemples. ***(Orientabilité à coefficients)***

1. Si $G = \mathbb{Z}$, on retrouve la notion précédente d'orientabilité comme $\mathbb{Z}$-orientabilité.
2. Toute variété topologique est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-orientable et canoniquement orientée.

Corollaire

Soit M une variété topologique connexe de dimension n et soit G un anneau commutatif unitaire. Supposons que M soit compacte. Si M est G-orientable, alors le morphisme $H_n(M;G) \to H_n(M,M \smallsetminus \{x\}; G)$ est un isomorphisme pour tout $x \in M$.
En particulier, $H_n(M;G) \simeq G$.

$\triangleright$ En effet, on applique le théorème à $A = M$. ■

Exercice 1

Déterminer $H_n(M;G)$ où M est une variété topologique connexe et compacte, non G-orientable.

7.1.2.4 Classes fondamentales

Définition. ***(Classe fondamentale)***

Soit G un anneau commutatif unitaire. Soit M une variété topologique de dimension n. Un élément de $H_n(M;G)$ dont l'image par le morphisme évident dans $H_n(M,M \setminus \{x\};G)$ soit un générateur pour tout $x \in M$, s'appelle une *classe fondamentale* de M à coefficients dans G.

Fait

Une telle classe existe si et seulement si M est compacte et G-orientable.

$\longrightarrow$ *Notation.* Si M est compacte, G-orientable et G-orientée, alors on note $[M]$ la classe fondamentale donnée par la section choisie.

Définition. ***(Classes réalisables)***

Soit G un anneau commutatif unitaire. Soit M une variété topologique de dimension n et soit $N \subseteq M$ une sous-variété topologique compacte G-orientable et G-orientée de M de dimension $k \subseteq n$. On considère la classe fondamentale $[N] \in H_k(N;G)$. La *classe réalisée par N dans $H_k(M;G)$* est $i_*(N)$ où $i_* : H_k(N;G) \to H_k(M;G)$ est le morphisme induit par l'inclusion canonique.

Exercice 2 *(Une question non triviale : classes réalisables d'une variété)*

On fixe $G = \mathbb{Z}$.

1. Déterminer les classes réalisables dans S^1.
2. Déterminer les classes réalisables dans S^2.
3. Déterminer les classes réalisables dans $\mathbb{T}$.

7.1.3 Homologie des variétés à bord

On rappelle que la bonne définition du bord des espaces topologiques provient d'un argument de topologie algébrique : en effet, un point d'une variété à bord ne peut à la fois admettre un voisinage euclidien et un voisinage homéomorphe à un demi-espace dans lequel elle se situe sur le bord (dans $\mathbb{R}^n$, n la dimension de la variété). En effet, en privant ces voisinages des images de ce point, l'un a une homologie relative nulle et l'autre, par excision, égale $\mathbb{Z}$.

Théorème. ***(Structure du bord d'une variété à bord)***

Soit M une variété à bord de dimension $n > 0$. Alors ∂M est une variété sans bord de dimension $n - 1$, avec donc $\partial(\partial M) = \emptyset$.

Corollaire. ***(Homologie des variétés à bord)***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n la sous-classe de la classe des variétés topologiques réelles constituées des variétés à bord de dimension n. On définit ∂_n par l'opérateur qui à une variété de M_n associe son bord qui est une variété de M_{n-1}. Alors

$$\dots M_n \xrightarrow{\partial} M_{n-1} \dots \dots \dots M_1 \xrightarrow{\partial} M_0$$

est une complexe de chaînes.

▷ Une variété sans bord est en particulier une variété à bord. Par le théorème, $\partial^2 = 0$. ■

Théorème

Toute orientation sur une variété à bord induit une orientation de son bord. En particulier, le bord d'une variété orientable est une variété orientable.

Exercice 3

1. Trouver une variété non orientable dont le bord est orientable.
2. Trouver une variété non orientable dont le bord est non orientable.

7.1.4 Calcul de l'homologie des variétés

Heuristique

A priori, le premier groupe d'homologie « intéressant » d'une variété topologique M de dimension n est $H_n(M)$.
Or le théorème des coefficients universels permet de calculer $H_n(M : G)$ pour tout groupe abélien G si l'on connaît $H_{n-1}(M)$. Nous nous intéressons à l'opération inverse.

7.1.5 Classification des variétés topologiques de très petites dimensions

7.1.5.1 Sommes connexes de variétés

Définition. ***(Somme connexe de variétés topologiques)***

Soient A et B deux variétés topologiques de dimension $n \in \mathbb{N}$. La *somme connexe* de A et B, notée $A\#B$, est la variété topologique de dimension n obtenue en retirant un voisinage homéomorphe à un disque D^n à chaque et en les recollant le long des sphères S^{n-1} apparues.

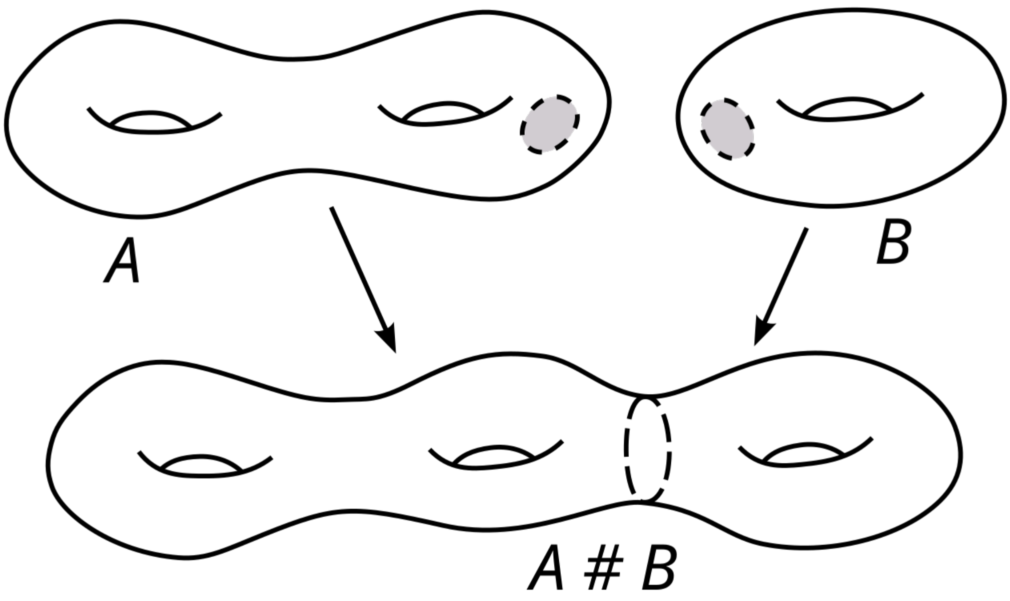


Figure 7.1.1 : *Somme connexe de deux surfaces topologiques.* — On retire un disque au deux surfaces et on les recolle le long des cercles qui les bordent.

7.1.5.2 Variétés topologiques de dimension nulle

Fait. *(Variétés topologiques de dimension* 0*)*

Les variétés topologiques connexes de dimension 0 sont les points. Les variétés topologiques de dimension 0 sont les discrets dénombrables.

Soit $x \in M$ variété topologique connexe de dimension 0. Soit U un ouvert de M contenant x, U homéomorphe à $\{0\}$. Alors $U = \{x\}$, dont x est isolé dans M. Donc M est discrète. Puisque M est connexe, $M = \{x\}$. On aurait aussi pu dire que $\{x\}$ était ouvert fermé, puisque M est séparée.

Pour le cas non connexe, une réunion disjointe de points est discrète, et réciproquement, tout discret dénombrable est séparé, à base dénombrable et trivialement tout point est son propre voisinage euclidien.

7.1.5.3 Variétés topologiques de dimension 1

Lemme. *(Variété compactes de dimension* 1*)*

Toute variété compacte (connexe) unidimensionnelle est homéomorphe au cercle.

▷ Soit M une variété topologique compacte connexe de dimension 1. Soit $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de M avec I fini. Soient U_i,U_j deux ouverts de cet atlas qui s'intersectent. Montrons que $U_i \cup U_j$ est homéomorphe soit à $\mathbb{R}$, soit à S^1. Si l'un est inclus dans l'autre, c'est clair, la réunion est homéomorphe à $\mathbb{R}$, car ces ouverts sont euclidiens. Le cas contraire, $\varphi_1(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui n'est ni $\mathbb{R}$, auquel cas $U_i \subseteq U_j$, ni un segment ouvert borné de $\mathbb{R}$, auquel cas $U_j \subseteq U_i$. Ce ne peut non plus être la réunion disjointe non triviale de deux segments ouverts bornés du type $]a,b[\cup]c,d[$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, car en considérant un chemin γ dans le connexe U_2 reliant un point de $\varphi_1^{-1}(]a,b[)$ à un point de $\varphi_2^{-1}(]c,d[)$, on aurait un grave problème en $\gamma(\inf\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin U_i\})$; il ne devrait pas être dans U_1, or il est dans $\varphi_1^{-1}([a,b])$ par continuité. Par suite, les seules formes possibles pour $\varphi_1(U_i \cap U_j)$ sont $]-\infty,a[$, $]b,+\infty[$ ou une réunion des deux. Dans les deux premiers cas, $U_i \cup U_j$ est homéomorphe à la droite réelle ; dans le troisième, on montre facilement qu'elle est homéomorphe au cercle.

On peut donc fusionner successivement les U_i s'intersectant, car M est connexe. On obtient forcément un cercle à un moment donné, car sinon, M est homéomorphe à $\mathbb{R}$, ce qui ne peut, par compacité. Une fois que l'on a obtenu un cercle, on voit que les U_j restants sont tous inclus dans ce cercle, sinon, l'on aurait une contradiction similaire à la précedente. ■

Théorème. ***(Variétés topologiques de dimension 1)***

Les variétés topologiques connexes de dimension 1 sont $\mathbb{R}$ ou S^1 à homéomorphisme près.

▷ On remarque qu'une variété admet toujours un atlas indexé par $\mathbb{N}$, car elle est Lindelöf. On applique le raisonnement précédent. ■

Exercice 4

Montrer qu'un carré est lisse.

▷ **Éléments de réponse.**

Un carré (vide) étant homéomorphe à S^1, on peut sans problème le munir d'une structure différentielle par transport de structure, et il est alors C^∞.

Corollaire

Les variétés topologiques compactes de dimension 1 sont à homéomorphisme près les sommes finies de cercles.

7.1.5.4 Classification des surfaces topologiques

Définition. ***(Surface topologique)***

Une *surface topologique* est une variété topologique réelle de dimension 2.

Lemme. ***(Somme connexe de surfaces)***

Le type topologique de la somme connexe de deux surfaces topologiques connexes et compactes ne dépend pas des choix effectués pour les disques ni l'homéomorphisme de recollement.

Exercice 5 *(Neutralité de S^2 pour la somme connexe)*

Montrer que pour tout surface topologique connexe X, $X\#S^2$ est homéomorphe à X.

7.1.5.4.1 Triangulation des surfaces

Définition. ***(Triangulation d'une surface compacte)***

Une *triangulation* d'une surface compacte X est une famille finie indexée par I d'homéomorphismes $\varphi_i : \Delta \to \varphi_i(\Delta) \subseteq X$ en fixant Δ le triangle du plan de sommets (0,0), (1,0) et (0,1) tel que pour $i,j \in I$, $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta)$ soit vide, un sommet ou une arête commune aux deux triangles. (En particulier, l'intérieur des triangles de la triangulation sont disjoints.) Une surface est dite *triangulable* ou *triangulée*, si elle admet une triangulation.

Lemme. ***(Triangulation des surfaces compactes)***

Toute surface compacte est triangulable, *i.e.* admet une structure de complexe simplicial fini.

Remarques.

1. En fait, Radó a montré en 1924 que toute surface à base dénombrable (ça lui plaisait) est triangulable, avec un nombre quelconque de triangles. Il faut alors dans la définition de triangulation, imposer que tout point possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de triangles.
2. On peut alors redéfinir l'orientabilité d'une surface triangulée en disant qu'il existe une orientation sur chaque triangle *compatible*, *i.e.* induisant des orientations opposées sur les arêtes communes.
3. *(Relative unicité de la façon de trianguler)* On peut toujours passer d'une triangulation à une autre par déformation continue et un nombre fini d'étapes élémentaires parmi les suivantes : la création d'un sommet dans l'adhérence d'un triangle et la création de trois nouveaux triangles, et l'opération inverse ; le remplacement de l'arête commune de deux triangles adjacents par l'autre diagonale du quadrilatère qu'ils forment, ce que l'on appelle un *flip*.
4. Le théorème de triangulation est en fait vrai pour les variétés compactes de dimension 3 : il a été démontré par Moise en 1952, mais en dimensions plus grandes, il est infirmé.

7.1.5.4.2 Classification des surfaces topologiques compactes connexes

Théorème. ***(Classification des surfaces topologiques connexes compactes)***

Les surfaces topologiques connexes compactes sont, à homéomorphisme près,

- $\star$ parmi les surfaces orientables,

$$S^2, \quad \mathbb{T}^2, \quad S^1 \times S^1, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \ldots$$

et plus généralement pour tout $g \in \mathbb{N}$: $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \ldots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ termes}}$;

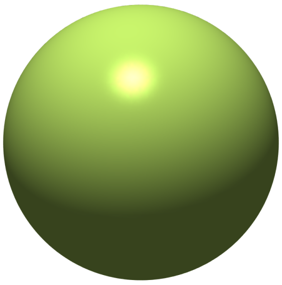
- $\star$ parmi les surfaces non orientables,

$$\mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \ldots$$

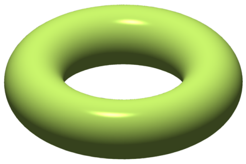
et plus généralement pour tout $g \in \mathbb{N}^*$: $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \ldots \# \mathbb{RP}^2}_{g \text{ termes}}$.

De plus, chacune des surfaces présentées sont deux à deux non homéomorphes ; on a donc une classification complète non redondante.
Regardant la signification de g, on parle de nombre d'*anses* pour une surface orientable et de *calottes croisées* pour une surface non orientable.

⊛ *(Idée de la preuve.)* Ce théorème se démontre au moyen de l'outil de triangulation des surfaces compactes et du théorème de triangulation dû à Radó, objet de la section précédente. ■

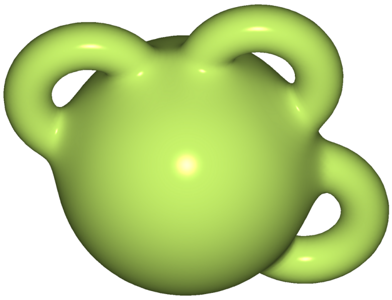


(a) *Sphère.* —

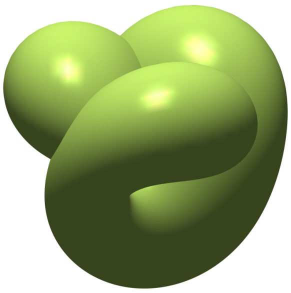


(b) *Tore.* —

(c) *Bouée à deux trous.* —



(d) *Tasse à trois anses.* —



(e) *Plan projectif réel représenté comme surface de Boy.* —

(f) *Bouteille de Klein, somme de deux plans projectifs réels.* —

FIGURE 7.1.2 : *Classification des surfaces topologiques compactes connexes.* — On a représenté les orientables et les non orientables dans deux groupes distincts.

Remarque. Remarquer la dissymétrie : il n'y a rien dans la case en dessous de la sphère dans la ligne des non-orientables.

7.1.5.4.3 Classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables

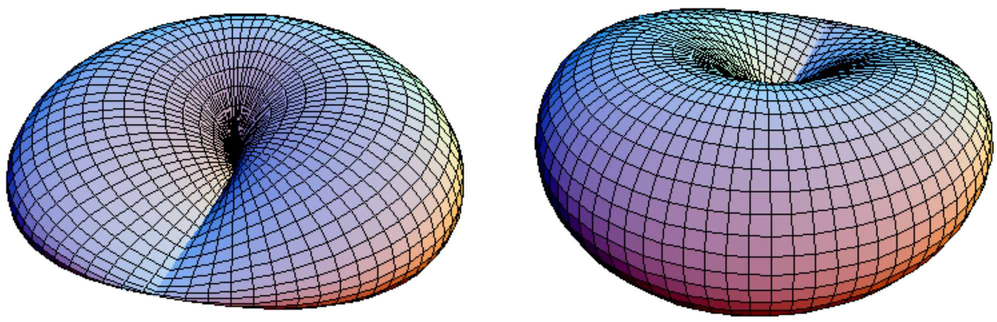


FIGURE 7.1.3 : *Deux vues de la sphère avec une calotte croisée, formant le plan projectif.* —

Théorème. ***(Classification des surfaces compactes orientables)***

Les surfaces topologiques compactes connexes orientables sont, à homéomorphisme près, la sphère S^2, le tore $\mathbb{T}^2$ et les surfaces $\mathbb{T}^2\#...\#\mathbb{T}^2$ dites *bouées à g trous* avec g termes où $g \geqslant 2$ est le *genre* de la surface. En posant S^2 la somme connexe vide, elles sont donc toutes décrites par $\{\#_{i=1}^g \mathbb{T}^i \mid g \in \mathbb{N}\}$, famille qui forme une transversale sur leur ensemble pour l'homéomorphie.

▷ Corollaire du théorème général de Radó. ■

Corollaire. ***(Plongement des surfaces dans l'espace)***

Toute surface compacte orientable se plonge dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 *(Surface de Riemann)*

Montrer que toute *surface de Riemann compacte* est une sphère, un tore ou une somme connexe d'un nombre dénombrable de tores.

▷ **Éléments de réponse.**

Toute variété complexe est canoniquement une variété différentielle (réelle), et donc topologique, de dimension paire en chaque point, et de plus orientable. En effet, on procède aux identifications topologiques $C^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Cette identification est compatible avec le calcul différentiel, puisqu'une fonction de transition holomorphe est en particulier différentiable. De plus, le déterminant jacobien d'une fonction de transition holomorphe f est toujours positif en raison des conditions de Cauchy-Riemann : $\det \mathrm{Jac}(f) = |f'(1)|^2 > 0$ d'où l'orientabilité d'une variété complexe vue comme variété réelle. Les surfaces de Riemann sont en particulier des variétés topologiques réelles orientables de dimension 2, autrement dit, des surfaces (topologiques, réelles) orientables. De plus, une surface de Riemann est compacte si et seulement si la surface topologique sous-jacente l'est.

7.1.5.4.4 Genre des surfaces

Définition. ***(Genre d'une surface)***

Soit S une surface topologique connexe compacte. Si S est orientable, on note $g(S)=0$ si S est la 2-sphère et $g(S)$ le nombre de termes dans $S \simeq \mathbb{T}^2\#...\#\mathbb{T}^2$ sinon. Réciproquement, on note S_g « la » surface orientable de genre $g \in \mathbb{N}$.
Si S est non orientable, on note $g(S)=l$ où l est le nombre de termes dans $S \simeq \mathbb{RP}^2\#...\#\mathbb{RP}^2$. Réciproquement, on note V_g « la » surface non orientable de genre $g \in \mathbb{N}^*$.

Définition-propriété. ***(Caractéristique d'Euler d'une surface)***

Soit X une surface topologique triangulée par une certaine triangulation. On note $\chi(X) = S - A + F \in \mathbb{Z}$ où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces de la triangulation. Alors $\chi(X)$ ne dépend pas du choix de la triangulation, et on appelle ce nombre la *caractéristique d'Euler* de X.

Fait. ***(Relation genre-caractéristique)***

Soit X une surface compacte orientable. Alors

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

où $g(X)$ est le genre de X. Réciproquement, $g(X) = 1 - \frac{\chi(X)}{2}$.
Si X est une surface compacte non orientable, alors

$$\chi(X) = 2 - g(X).$$

Réciproquement, $g(X) = 2 - \chi(X)$.

Mnémonik : le genre est un entier positif ou nul, défini uniquement pour une surface topologique, tandis que la caractéristique d'Euler est un entier relatif $\leqslant 2$ dans le cas d'une surface, qui est en outre pair si elle est orientable (la réciproque étant fausse) et $\leqslant 1$ si elle est non orientable.

Exemples. ***(Caractéristiques d'Euler, genres)***

1. *(Genre, caractéristique de la sphère)* $\chi(S^2) = 2$ et $g(S^2) = 0$.
2. *(Genre, caractéristique du tore)* $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ et $g(\mathbb{T}^2) = 1$.
3. *(Genre, caractéristique de la bouée à deux trous)* $\chi(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) = -2$ et $g(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) = 2$.
4. *(Genre, caractéristique du plan projectif réel)* $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ et $g(\mathbb{RP}^2) = 1$.
5. *(Genre, caractéristique de la bouteille de Klein)* $\chi(\mathcal{K}) = 0$ et $g(\mathcal{K}) = 2$.

Propriété. ***(Transport de la caractéristique via un revêtement)***

Soient X,Y deux surfaces topologiques, avec Y compacte. On suppose que Y est revêtue par X via un revêtement (topologique) à d feuillets, où $d \in \mathbb{N}$. Alors $\chi(X) = d\chi(Y)$.

Exercice 7

Donner une CNS sur $g,h \in \mathbb{N}$ pour que S_h revête S_g.

Application. ***(Caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein)***

On a un revêtement différentiel, en particulier topologique, du tore $\mathbb{T}^2$ sur la bouteille de Klein K à deux feuillets. Ainsi, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0 = 2\chi(K)$, d'où

$$\chi(K) = 0$$

puis

$$g(K) = 2.$$

Exercice 8

Peut-on en déduire que K est homéomorphe à $\mathbb{T}^2$?

▷ **Éléments de réponse.**

Non. Le théorème de classification des surfaces compactes à anses ne s'applique pas : K n'est pas orientable.

Remarque importante. Les fait suivants permettent de calculer les surfaces topologiques compactes : le lien entre genre et caractéristique dans le cas orientable ou non, le fait que **la somme connexe se comporte par règle des signes au vu de l'orientabilité**, comme le montre l'exercice suivant. Parallèlement, ces règles de calcul exhaustives sur les surfaces permettent de passer outre des démonstrations un peut laborieuses sur les faits suivants : la somme connexe de surfaces est commutative, associative, etc.

Exercice 9 *(Règle des signes pour les surfaces connexes)*

1. Montrer que *surface de Dyck* $\mathbb{RP}^2 \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$.
2. Que vaut $\mathcal{K} \# S^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$?

▷ **Éléments de réponse.**

1. C'est un théorème de Dyck.
2. Par commutativité et neutralité de la sphère, en notant $P = \mathbb{PR}^2$ et $T = \mathbb{T}^2$, $P\#P\#P\#T\#T \simeq P\#P\#P\#P\#P\#T \simeq P\#P\#P\#P\#P\#P\#P$ successivement. C'est donc la surface compacte à 7 calottes croisées.

Lemme. ***(Homologie d'une somme connexe)***

Soient A,B deux variétés topologiques de même dimension. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(A\#B) \simeq H_n(A) \oplus H_n(B)$.

▷ On applique la suite de Mayer-Vietoris de la manière suivante : dans $A\#B$, l'intersection de l'image de A avec l'image de B est contractile par construction. On a donc une suite exacte longue avec :

$$\dots 0 \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(A\#B) \longrightarrow \dots$$

à tout rang n, car $H_n(A \cap B) = H_{n+1}(A \cap B) = 0$, d'où le résultat. ■

Application. ***(Homologie des surfaces topologiques compactes)***

Soit $g \in \mathbb{N}$. Calculons l'homologie de S_g puis de V_g.

- ⋆ Dans le cas de S^2, c'est l'homologie de la sphère de $\mathbb{R}^3$. On sait que $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ et $H_k(S^2) = 0$ pour $k \geqslant 3$.
- ⋆ Si $g \in \mathbb{N}$, on note S_g la surface compacte orientable à g anses, qui est la bouée à g trous. Or on sait que $H_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$, $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$ et $H_k(\mathbb{T}^2) = 0$ pour $k \geqslant 3$. Par suite, en utilisant le lemme précédent,

7.1.5.4.5 Combinatoire des surfaces topologiques

On décrit maintenant les groupes fondamentaux des surfaces topologiques.

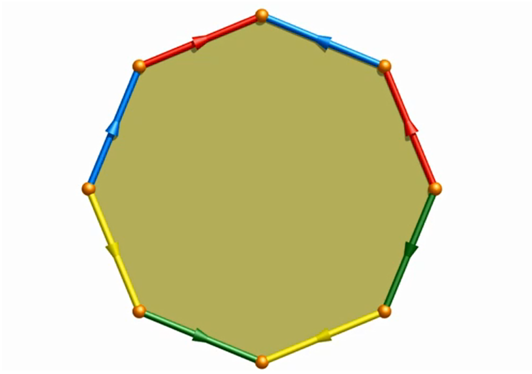
Propriété. ***(Groupe fondamental d'une surface compacte)***

Soit X une surface orientable, compacte, connexe = connexe par arcs de genre g. Alors $\pi_1(X)$ est présenté par $2g$ générateurs $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g$ et une relation $\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i] = 1$ où $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ désigne le commutateur.

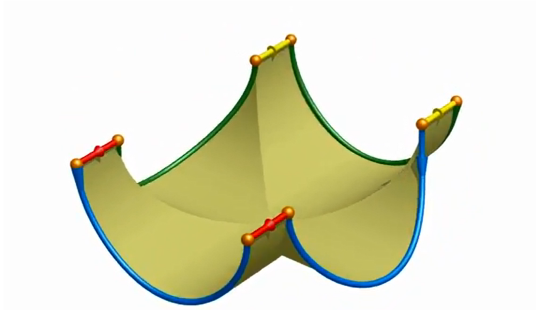
▷ Conséquence du théorème de Van-Kampen appliqué à la somme connexe $\mathbb{T}^2\#\dots\#\mathbb{T}^2$, avec $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \langle \gamma_1,\gamma_2 \mid [\gamma_1,\gamma_2]\rangle$. Pour le cas général, le groupe fondamental est invariant par homéomorphisme. ■

Corollaire. ***(Structure de CW-complexe d'une surface compacte)***

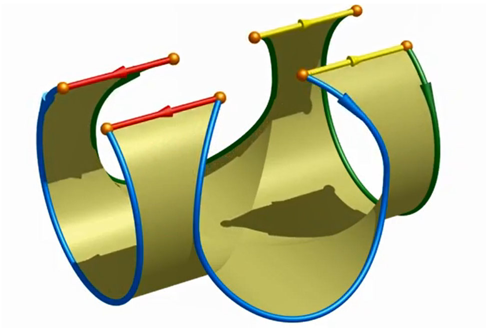
Toute surface compacte connexe orientable est munie d'une structure de CW-complexe dont le 2-squelette est un $2g$-gone, dit *polygone fondamental* de la surface.



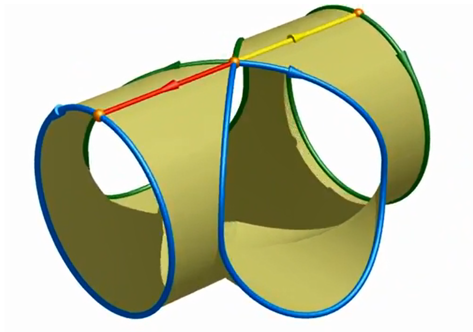
(a) *Étape 1.* —



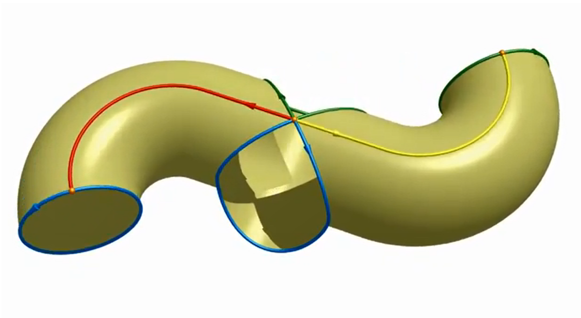
(b) *Étape 2.* —



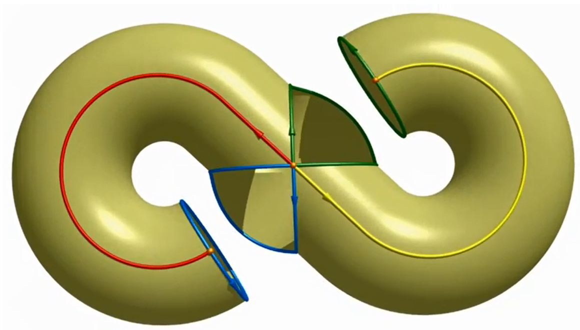
(c) *Étape 3.* —



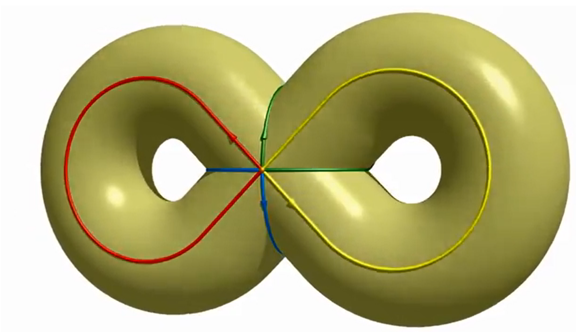
(d) *Étape 4.* —



(e) *Étape 5.* —



(f) *Étape 6.* —



(g) *Étape 7.* —

FIGURE 7.1.4 : *Structure de CW-complexe de $T\#T$.* —

7.1.5.5 Classification des variétés topologiques de dimension $\geqslant 3$

Et après ?

La somme connexe de deux variétés orientables en dimension supérieure, dépend des choix effectués pour l'homéomorphisme de recollement φ de cellules. En effet, étant données deux surfaces orientables et orientées (et c'est ce cas seul qui ne pose pas problème), on peut définir le degré de φ, qui est alors ± 1 sans détermination forcée. Cependant, le type d'homotopie ne change pas si l'on remplace un homéomorphisme qui renverse l'orientation par un qui la préserve, car toute variété orientable préserve un automorphisme qui renverse l'orientation). Par contre, en dimension 4, la somme connexe de $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ non orientables dépend fortement de ce choix. Ceci complique forcément la classification des surfaces

Le cas de la dimension 3 consiste en la conjecture de Poincaré, démontrée par Grigori Perelman. Elle est en fait (de loin) plus facile que le cas $n = 4$, résolu par Michael Freedman en 1982... car toute variété de dimension $\leqslant 3$ admet une structure lisse, ce qui n'est plus le cas au-delà. De plus, il y a en plus grandes dimensions des structures exotiques : même $\mathbb{R}^4$ admet « beaucoup » de structures lisses...

7.2 Dualité de Poincaré et théorie des intersections

7.2.1 Motivation : liens entre la cohomologie de de Rham et l'homologie singulière

7.2.2 Formalisme des cup produit et cap produit

Soit R un anneau commutatif unitaire.

Définition-propriété. ***(Cup-produit)***

Soit X un espace topologique. Pour tous entiers $k,l \geqslant 0$, on définit l'opération de *cup-produit* :

$$\smile : H^k(X;R) \times H^l(X;R) \to H^{k+l}(X;R)$$

de la façon suivante : pour toute cochaîne $c \in C^k(X;R)$, pour toute cochaîne $d \in C^l(X;R)$ et pour tout $(k+l)$-simplexe singulier σ de X, on pose

$$(c \smile d)(\sigma) = c(\sigma \circ \Delta_{(v_0,\dots,v_k)}) \times_R d(\sigma \circ \Delta_{(e_k,\dots,e_{k+1})}) \in R.$$

Ceci ne suffit pas pour définir $\smile$ sur les groupes d'homologie. Il faut montrer la proposition suivante.

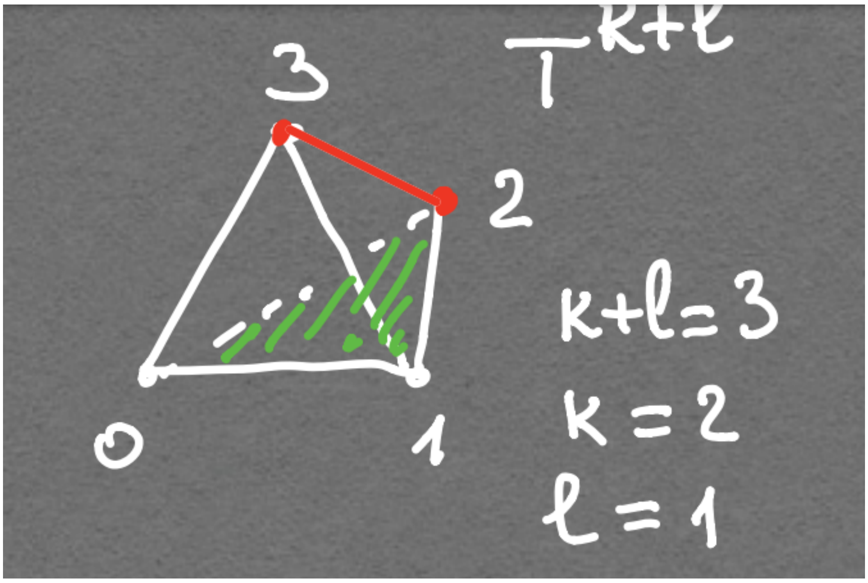


Figure 7.2.1 : *Cup-produit de deux cochaînes évalué en une chaîne.* —

Lemme. ***(Règle de Leibniz pour le cup-produit)***

Soient X un espace topologique, $k,l \in \mathbb{N}$ et $(c,d) \in C^k(X;R) \times C^l(X;R)$. Alors

$$\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^k c \smile \delta d.$$

Preuve.

▷ Ainsi, le cup-produit descend sur l'homologie. ■

Fait. ***(Bilinéarité du cup-produit)***

Pour tous $k,l \in \mathbb{N}$, $\smile : H^k(X;R) \times H^l(X;R) \to H^{k+l}(X;R)$ est bilinéaire.

Propriétés. ***(Propriétés calculatoires du cup-produit)***

1. *(Associativité du cup-produit)* Si $\alpha_i \in H^{k_i}(X;R)$ pour $i = 1,2,3$, alors $\alpha_1 \smile (\alpha_2 \smile \alpha_3) = (\alpha_1 \smile \alpha_2) \smile \alpha_3$.
2. *(Commutation du cup-produit)* Si $\alpha_i \in H^{k_i}(X;R)$ pour $i = 1,2$, alors $\alpha_1 \smile \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \smile \alpha_1$.

3. *(Transport du cup-produit sur les coefficients)* Soit $h : R \to R'$ un morphisme d'annaux. Alors $h^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = h^*(\alpha_1) \smile h^*(\alpha_2)$.
4. *(Transport du cup-produit sur l'espace de base)* Soit $f : Y \to X$ une application continue. Si $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$ pour $i = 1{,}2$, alors $f^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \smile f^*(\alpha_2)$.

Remarque. On définit de même le *cup-produit relatif*, par rapport à l'un ou les deux termes pris relatifs.

Chapitre 8

Théorie élémentaire des noeuds

Résumé

La théorie des nœuds est une théorie mathématique qui est une branche de la topologie et a pour avantage de s'inspirer du réel. Il s'agit en effet de l'étude des nœuds comme on l'entend couramment. Pour que le concept soit mieux défini et puisse être utilisé, dans cette théorie, après avoir réalisé notre noeud sur une corde, on prend les deux bouts et on les colle, de sorte que le nœud ne puisse plus se défaire de manière triviale. Les grands axes de cette théorie consistent en les questions suivantes : quand deux nœuds sont-ils en réalité les mêmes, c'est-à-dire en les manipulant dans l'espace peut-on arriver à passer de l'un à l'autre ; en particulier, quand un nœud est-il à cette manipulation près le non-noeud, c'est-à-dire un simple cercle. Pour arriver à répondre à ces questions, un grand aspect pratique de la théorie consiste à créer des invariants de noœds, ce qui consiste concrètement à associer à chaque nœud une quantité de sorte que si deux noeuds sont les mêmes alors on leurs associe la même quantité. Le but de cette première étude est d'établir plusieurs invariants de nœuds dont celui qui tiendra un rôle principal ici, à savoir le polynôme de Jones.

8.1 Premières propriétés

8.1.1 Définition

Définition-propriété. ***(Nœud)***

Soit N une partie de $\mathbb{R}^3$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) N est homéomorphe à S^1.

(ii) Il existe $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ injective d'image N.

(iii) Il existe $\varphi : S^1 \to N$ injective.

(iv) N est le support d'un lacet simplet dans l'espace.

(v) N est homéomorphe à une sous-variété lisse de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on dit que N est un *nœud (topologique)*.

Fait. ***(Indifférence homotopique des nœuds)***

Tout nœud est homéomorphe à S^1.

Exercice 1

Montrer qu'étant donné un noeud $N \subseteq \mathbb{R}^3$ et φ la donnée de ce nœud sous forme d'un plongement, alors si φ' est continue sur S^1 d'image N, $\varphi' = \varphi \circ T$ où T est un automorphisme de S^1 affine par morceaux.

8.1.2 Exemples fondamentaux

Exemples

1. *(Non-nœud)* Le plongement trivial de S^1 par restriction de l'identité de $\mathbb{R}^3$, est un nœud, dit *non-nœud*.
2. Toute courbe fermée plane est un nœud (trivial).

8.1.3 Image miroir d'un nœud

Définition. ***(Image miroir d'un nœud)***

L'*image miroir d'un nœud* $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}^3$ est le nœud $r \circ \varphi$ où

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & R^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y,-z). \end{array}$$

8.2 Diagrammes de nœud

8.2.1 Axiomes des diagrammes de noœud

Lemme

Un diagramme de nœud à $n \in \mathbb{N}$ croisements partage le plan en $n+2$ régions.

▷ Conséquence facile de la relation d'Euler. ■

8.2.2 Projections régulières des nœuds

8.2.3 Mouvements de Reidemeister

8.3 Invariants de nœud

8.3.1 Polynôme d'Alexander

Proposition

Le polynôme d'Alexander est un invariant de nœud.

▷ Il suffit de voir que les mouvements de Reidemeister ne font intervenir qu'au plus trois régions deux à deux adjacentes. Il suffit d'en considérer deux que l'on supprimera dans la matrice d'incidence. ■

Exemples. ***(Polynômes d'Alexander)***

1. Le polynôme d'Alexander du nœud trivial est 1.
2. Le polynôme d'Alexander du nœud de trèfle est $-t^2 + t - 1 \mathrel{\widehat{=}} t - 1 + t^{-1}$.

8.3.2 Polynôme de Jones

Exemples. ***(Polynômes de Jones)***

1. Le polynôme de Jones du nœud trivial est 1.
2. Le polynôme de Jones du nœud de trèfle est $t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \mathrel{\widehat{=}} \; - t^4 + t^3 + t$.

8.3.3 Polynôme de Kauffman

8.4 Homologies de noœud

8.4.1 Homologie de Khovanov

Chapitre 9

Exercices

Difficulté des exercices :

- ● ○ ○ ○ ○ Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- ● ● ○ ○ ○ Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- ● ● ● ○ ○ Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- ● ● ● ● ○ Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- ● ● ● ● ● La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.

Appendice

Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition

Table des figures

Liste des tableaux