Cours de mathématiques

TOME III

ANALYSE

Mathématiques générales

France ∼ 2024

Écrit et réalisé par Louis Lascaud

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}$

Résumé

Avant d'étudier les bases de l'analyse réelle (continuité, dérivation, intégration), il convient d'étudier les propriétés du corps topologique $\mathbb{R}$. Cet espace topologique, ordonné, dense en lui-même, complet, permet de fournir une définition propre de la limite qui est au fondement des notions suivantes.

1.1 Axiomatique et définition de $\mathbb{R}$

1.2 Propriétés élémentaires de $\mathbb{R}$

1.3 Topologie avancée de $\mathbb{R}$

1.3.1 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$

1.3.1.1 Description de la topologie de la droite réelle

On a en fait un résultat général sur les ouverts de $\mathbb{R}$:

Théorème. ***(Description des ouverts de $\mathbb{R}$)***

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

$\triangleright$ Ce ne sont autre que ses composantes connexes, qui restent ouvertes. Il est clair que ce partage est au plus dénombrable, par séparabilité de $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

On peut donner une version légèrement différente de ce résultat, en troquant l'hypothèse de disjonction par une condition de bornitude des intervalles. Cette description a ceci d'intéressant qu'elle ne vaut plus en dimension supérieure.

Théorème. ***(Description des ouverts de $\mathbb{R}$, version bornée)***

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés.

▷ La preuve est nettement différente de la première, et laissée en exercice. ■

Exercice 1

$\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts bornés deux à deux disjoints ?

▷ **Éléments de réponse.**

Classique.

Exercice 2

(Quid des fermés ?) On s'intéresse maintenant à la description des fermés, dont on rappelle que la donnée est équivalente à celle d'une topologie.

1. Montrer qu'un fermé n'est pas nécessairement une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints.
2. Montrer qu'en fait, une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints n'est pas nécessairement fermée.
3. Que peut-on déduire plutôt des théorèmes précédents sur la description des fermés de $\mathbb{R}$?

▷ **Éléments de réponse.**

Les deux premières questions sont d'une simplicité navrante. Quant à la dernière question, il suffit d'observer que le complémentaire d'un intervalle ouvert est la réunion d'au plus deux intervalles fermés (mais a priori pas bornés).

1.3.2 Propriétés topologiques de la droite réelle

Lemme. ***(Lemme des pics)***

De toute suite on peut extraire une suite monotone.

Théorème. ***(Bolzano-Weierstrass)***

De toute suite bornée on peut extraite une suite convergente.

Corollaire

$\mathbb{R}$ est localement compact.

Corollaire

$\mathbb{R}$ est complet.

1.3.3 Topologie de $\overline{\mathbb{R}}$

La topologie de $\mathbb{R}$ est régie par la propriété fondamentale suivante :

Propriété. ***(Propriété de la borne supérieure achevée)***

Toute suite réelle monotone converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.3.4 Différences fondamentale entre la topologie de la droite réelle et la topologie du plan et des espaces de dimension strictement supérieure à 1

1.3.4.1 Défaut de connexité forte

Propriété

$\mathbb{R}$ privé d'un point quelconque n'est plus connexe.

Propriété

$\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$ privé d'un point quelconque est encore connexe par arcs.

1.3.4.2 Convexité

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un connexe non convexe dans $\mathbb{R}^n$, si et seulement si, $n \geqslant 2$.

1.3.4.3 Description de la topologie

Propriété

Pour $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ n'est pas réunion dénombrable de boules ouvertes deux à deux disjointes.

▷ Il suffit de montrer le résultat dans le plan, ce qui revient à un problème de pavage. En effet, on peut ensuite descendre d'une dimension en remarquant que les boules d'un espace de dimension n ont pour trace sur un hyperplan, des boules de dimension $n-1$! ■

Chapitre 2

Suites et séries numériques

Résumé

Quelques questions éparses sur le sujet : développements autour du théorème de Cesàro, surtout.

2.1 Série numérique

2.1.1 Détermination d'équivalents de séries numériques

2.1.1.1 Le théorème de Cesàro

Voici un corollaire d'intérêt illustratif du théorème de Cesàro. Il s'applique lorsqu'on dispose d'un équivalent en fonction du terme général de la suite de la différence entre deux de ses termes consécutifs.

Théorème. ***(Théorèmes « pan »)***

Soient a,p deux réels strictement positifs et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive.

1. On suppose $x_{n+1} - x_n \sim \frac{a}{x_n^{p-1}}$. Alors $x_n \sim (pan)^{1/p}$.
2. On suppose $x_{n+1} - x_n \sim -a x_n^{p+1}$. Alors $x_n \sim \left(\frac{1}{pan}\right)^{1/p}$.

▷ On traite le premier cas, le second étant laissé en exercice. On pose $y_n = x_n^p$. Alors l'hypothèse se récrit $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{a}{y_n} + o\left(\frac{1}{y_n}\right)\right)^p$ donc la suite (y_n) est croissante à partir d'un certain rang. Si sa limite l donnée par le théorème de convergence monotone était finie, elle vérifierait $1 = (1 + \frac{a}{l})^p$, absurde. Donc y_n tend vers $+\infty$. Donc $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{pa}{y_n} + o\left(\frac{1}{y_n}\right)$, donc $y_{n+1} - y_n \to pa$. Le théorème de Cesàro permet de sommer $pan \sim \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} - y_k = y_n - y_0 \sim y_n$. Ainsi $x_n \sim (pan)^{1/p}$. ■

Le théorème de Cesàro permet également l'obtention d'équivalents asymptotiques des séries de Riemann, en particulier, un développement asymptotique à l'ordre quelconque de la série harmonique en fonction de la constante d'Euler.

Lemme

Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et $c \neq 0$. Alors u_n converge et en notant l sa limite, on a $u_n - l \sim \frac{-c}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Propriété. *(Développement asymptotique de la série harmonique d'ordre arbitrairement grand)*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + \frac{691}{32760n^{12}} - \frac{1}{12n^{14}} + o\left(\frac{1}{n^{14}}\right).$$

▷ On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. À partir d'un développement à l'ordre d de $u_{n+1} - u_n$, nous allons trouver, grâce au lemme, un développement de u_n à l'ordre $d-1$. ■

Chapitre 3

Fonctions de la variable réelle

Résumé

Pour l'instant, seulement une définition : limites supérieure et inférieur en un point.

3.1 Limites

3.1.1 Limites supérieures, limites inférieures

Définition. ***(Limite supérieure d'une fonction en un point)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un point x.

On note $\limsup\limits_{\substack{y \to x \\ y \in I}} f(y) = \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\substack{|x-y|<\delta \\ y \in I}} f(y)$.

Noter que cette dernière condition s'écrit $y \in B(x,\delta) \cap I$.

Ne pas confondre $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$ et $\limsup\limits_{y \to x} f_n$, cette dernière dépendant de n.

Chapitre 4

Analyse asymptotique

Résumé

On étudie d'abord la notion de négligeabilité avant d'étudier la notion d'équivalence de suites et de fonctions qui permet de généraliser les approximations de type dérivation, Taylorisation, en identifiant deux courbes localement selon une précision elle-même à définir, un « échelon ».

4.1 Relations asymptotiques

4.1.1 Négligeabilité

Un réflexe à avoir :

Observation. ***(Heuristique des grands $\mathcal{O}$)***

Soit f une fonction définie au voisinage de x. Soit M une constante réelle. Alors $Mf(t) = \underset{t\to x}{O}(f(t))$. Réciproquement, soit f une fonction qui soit définie au voisinage de x. Alors il existe une constante réelle M telle que la notation $\underset{t\to x}{o}(f(t)) = Mf(t)$.

Observation. ***(Heuristique des petits o)***

Soit f une fonction définie au voisinage de x. Soit e une fonction qui tende vers 0 en x. Alors $f(t)e(t) = \underset{t\to x}{o}(f(t))$. Réciproquement, soit f une fonction qui soit définie au voisinage de x. Alors il existe une fonction e qui tende vers 0 en x telle que la notation $\underset{t\to x}{o}(f(t)) = f(t)e(t)$.

Observation. ***(Heuristique des équivalents)***

Soit f une fonction définie au voisinage de x. Soit s une fonction qui tende vers 1 en x. Alors $f(t)s(t) = \underset{t\longrightarrow x}{\sim} (f(t))$. Réciproquement, soit f une fonction qui soit définie au voisinage de x. Alors il existe une fonction s qui tende vers 1 en x telle que la notation

$\underset{t \longrightarrow x}{o}(f(t)) = f(t)s(t)$.

Remarquons la dissymétrie des grands O avec les deux autres notions courantes d'asymptotisme.

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions

Résumé

En particulier, on donne des contre-exemples utiles sur les notions de convergence simple et uniforme et les théorèmes de régularité associés.

5.1 Définition

Exercice 3

La limite simple d'une suite d'applications continues par morceaux est-elle continue par morceaux ?

▹ **Éléments de réponse.**

Non. On peut choisir $\mathbb{1}_{q_1,\dots,q_n}$ où (q_n) est une énumération des rationnels. Ces fonctions sont bel et bien continues par morceaux, mais leur limite $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ne l'est pas. Remarquons que l'on peut se limiter à un compact en remplaçant $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Et même :

Contre-exemple. ***(Limite uniforme de fonctions cpm non cpm)***

Voilà f la fonction qui vaut zéro sur les irrationnels et en tout rationnel $x = \frac{n}{m}$ sous forme irréductible canonique, vaut $\frac{1}{n}$. Elle est réglée mais n'est pas continue par morceaux. □

On sait, et c'est un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus, que la limite simple d'applications continues linéaires est continue (et linéaire) si la source est complète.

Chapitre 6

Théorie de Fourier

Résumé

On étudie, indépendamment du cours d'analyse fonctionnelle, la construction élémentaire des séries de Fourier. On ne sera pas surpris d'y retrouver donc les théorèmes généraux sur les espaces de Hilbert. La théorie des séries de Fourier, dans un premier temps, cherche à écrire une fonction périodique arbitraire comme une somme de fonctions trigonométriques, éventuellement infinie.

Ceci fait, on se rendra compte qu'on aura élaboré une théorie *discrète* de la transformée de Fourier, adaptée aux phénomènes de la théorie du signal. On généralisera avec beaucoup de naturel cette théorie au domaine continue, dont on trouvera de grandes applications en théorie des équations aux dérivées partielles, dû à la mise en correspondance d'un espace physique, décrit par des fonctions, et un espace spectral décrit par la transformation de Fourier.

6.1 Théorie de Fourier discrète : séries de Fourier

6.1.1 Définition

Définition. ***(Espace des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques)***

On note $\mathcal{C}^{2\pi}_{pm}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui soient 2π-périodiques.

Définition. ***(Condition de Schwartz)***

On dit qu'une fonction continue par morceaux sur un intervalle I vérifie la *condition de Schwartz* si, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) + \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)\right)$.

Intuitivement, la condition de Schwartz permet de contrôler les discontinuités (en nombre dénombrable) de f en posant, à chaque saut, la valeur exactement au milieu de ce saut. Ainsi, *à chaque saut, aucune valeur, ni à gauche, ni à droite, n'est privilégiée.*

La remarque suivante est constructivement évidente. L'étudiant doit en comprendre la raison sans effort.

Proposition

Toute fonction continue par morceaux est égale presque partout à une fonction vérifiant la condition de Schwartz.

On peut maintenant définir en toute généralité l'espace des fonctions continues par morceaux périodiques qui nous intéressera pour le cadre de la théorie de Fourier.

Définition-propriété. ***(Espace de Fourier)***

On note $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}_{pm}^{2\pi}(\mathbb{R})$, dite *espace trigonométrique*, vérifiant la condition de Schwartz.

▷ On laisse le soin au lecteur de vérifier que c'est bien un espace vectoriel. Ne pas oublier de vérifier qu'une combinaison linéaire de fonctions vérifiant la condition de Schwartz vérifie la condition de Schwartz ! ■

On munit naturellement cet espace, comme on l'a déjà vu en exemple, d'un produit scalaire hermitien.

Définition-propriété. ***(Produit scalaire sur l'espace de Fourier)***

L'application définie pour $f,g \in \mathbb{E}$ par :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

Remarque. Puisque les fonctions de $\mathbb{E}$ sont 2π-périodiques, on aurait pu calculer sur n'importe quel intervalle de longueur 2π :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t.$$

qui nous donne une identité générale et une facilité de calcul.

▷ Il est clair que l'expression ci-dessus définit bien une forme bilinéaire symétrique positive. La définie positivité vient de la condition de Schwartz imposée aux fonctions $f \in \mathbb{F}$: ■

Remarque. Dans le cas où les fonctions $f,g \in \mathbb{F}$ sont en fait toutes à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut omettre la conjugaison dans la définition du produit scalaire.

Autre formalisme. La condition de Schwartz est aisément remplaçable par un formalisme $L^2 = \mathcal{L}^2/=$ p.p.. Ce premier a le bon goût d'être accessible aux étudiants de deux premières années après le bac, ce qui est bien moins le cas du second.

6.2 Fourier à une dimension

Afin de ne pas générer une rupture trop brutale entre une théorie de niveau BAC+2 à une théorie de niveau BAC+4, on propose d'abord une théorie de la transformée de Fourier intégrale limitée aux fonctions continues par morceaux sur un espace à une dimension, comme on la trouve souvent dans des sujets d'écrit de concours de classes préparatoires.

6.3 Théorie de Fourier continue générale : la transformation de Fourier

On introduit la transformation de Fourier au moyen d'une analogie puissante avec les séries de Fourier.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et l'on prend $f \in L^1(]0{,}1[^n)$, ce qui, du reste, revient à la donnée d'une fonction $1 = (1,\ldots,1)$-périodique dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut définir sans peine pour $k \in \mathbb{Z}^n$, le « coefficient de Fourier » continu $\hat{f}(k) = \int_{]0,1[}^{n} e^{i\langle -2\pi k,\theta\rangle} f(\theta)\mathrm{d}\theta$ où $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

De plus, en posant les fonctions $e_k(\theta) = e^{i\langle 2\pi k,\theta\rangle}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$, les (e_k) forment, quitte à réindexer par $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^n$, une base hilbertienne de $L^2(]0{,}1[^n)$: l'orthonormalité se vérifie par calcul, et la densité des polynômes en ces fonctions découle du théorème de Stone-Weierstrass. On a en particulier par définition du produit scalaire : $\hat{f}(k) = (f|e_k)$. Ainsi, si $f \in L^2$,

Théorème. ***(Décomposition de Fourier d'une fonction L^1 périodique)***

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e_k = f}$$

au sens de la limite dans L^2, d'après le théorème de décomposition selon une base hilbertienne (égalité de Parseval-Bessel).

Si l'on veut maintenant décomposer une fonction non périodique[1], on se rend compte que l'on va devoir généraliser la base hilbertienne précédente sur une famille non dénombrable pour $k \in \mathbb{R}^n$. Remarquons d'abord que les k dans le raisonnement précédent n'ont pas besoin d'être entier pour faire sens.

On va essayer d'écrire $f \in L^1$ ou L^2 en fonction des $e_x(\xi) = e^{i\langle \xi,x\rangle}$; puisque la famille est indénombrable, naturellement, on ne sommera plus, mais on intègrera.

[1] On sait depuis longtemps, du moins, si l'on a suivi un cours de physique élémentaire, que la théorie de Fourier continue permet de généraliser la décomposition en série de Fourier, discrète, à des fonctions qui ne sont plus périodiques.

En premier lieu, on n'essaie pas de décomposer f, mais de généraliser le coefficient $\hat{f}(k)$. On veut donc définir :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

sous de bonnes hypothèses. Ce « coefficient de Fourier continu » n'est autre que la transformation de Fourier ; ce n'est plus un nombre, mais lui-même une fonction.

Connaissant $\hat{f}$, il se trouve que l'on peut reconstituer f (c'est ce que l'on veut faire, en somme) de la même manière que dans le cas discret, avec une formule tout à fait parallèle ; c'est le théorème principal de cette section (*inversion de Fourier*).

Une remarque de clarté d'esprit pour finir. Toutes les fonctions $\widehat{f}$ sont ponctuellement périodiques de période au plus $\frac{2\pi}{x_1},\ldots,\frac{2\pi}{x_n})) = \hat{f}(\xi)$ pour l'intégrande à $x = (x_1,\ldots,x_n)$ fixé. (Attention, si les termes s'annulent, ce qu'on écrit ensuite n'est plus vrai, mais la fonction est encore plus périodique.) On a en effet $\hat{f}(\xi + (\frac{2\pi}{x_1},\ldots,\frac{2\pi}{x_n})) = \hat{f}(\xi))$ mais les périodes ne sont pas toutes commensurables (puisque $(x_1,\ldots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n$, donc la somme limite, sous forme d'intégrale, n'est plus périodique : ouf, on aurait que toute fonction non périodique est périodique.

En généralisant comme on fait, on n'est plus dans L^2, donc on n'a plus accès à un produit scalaire : la fonction exponentielle complexe unité est dans L^∞ ; $f \in L^1$ suffit donc en toute généralité pour l'intégrabilité par l'inégalité de Hölder ; même si l'on aura des résultats spécifiques à l'intégration de Fourier dans L^2, ce n'est pas le cas général.

6.3.1 Transformation de Fourier dans L^1

Pour avoir généralité, on considère toutes les intégrales multiples contre une mesure de Lebesgue.

6.3.1.1 Définition

Soit n un entier naturel.

Définition. ***(Transformée de Fourier)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa *transformée de Fourier*, notée $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F} \circ f = \hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Attention, dans la littérature, les définitions de la transformée de Fourier varient beaucoup, ce qui peut mener à des calculs différents (qui, au demeurant, ne varient en général que par des constantes multiplicatives indépendantes de l'intégrale). Suivant les auteurs, on peut avoir les variations suivantes :

Proposition. ***(Définition dans le cadre L^1)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est bien définie.

▷ Notons $g(x,\xi) = e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)$ pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Alors $|g(x,\xi)| = |f(x)|$ et f est intégrable, donc $\hat{f}$ existe. ■

Bien que f ne soit pas construction que définie presque partout, $\hat{f}$ est définie vraiment partout.

Proposition. ***(Linéarité de la transformation de Fourier)***

L'application $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$ est linéaire de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^n}$.

Remarque notable. Même si f est à valeurs réelles, $(\hat{f})$ ne l'est pas forcément.

Exercice 4

(Réalité de la transformée de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple où $\hat{f} \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}^n} \setminus \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$.
2. Sous quelle condition a-t-on $\hat{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$?

Proposition. ***(Continuité de de la transformée de Fourier)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est continue.

▷ On reprend les notations précédentes. Puisqu'on a la domination $|g(x,\xi)| \leqslant |f(x)|$ pour tout x, pour tout ξ, et que g dépend continûment de x, alors par continuité sous le signe intégrale, $\hat{f}$ est continue. ■

Proposition. ***(Borne de de la transformée de Fourier)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est bornée avec $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.

▷ Cela vient de la majoration établie ci-dessus en passant aux normes. ■

6.3.1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété. ***(Lemme de Riemann-Lebesgue)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

▷ On sait que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ est dense dans $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^1})$. Soit donc $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ telle que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Alors $\left\|\hat{f} - \hat{g}\right\|_\infty = \left\|\widehat{f-g}\right\|_\infty \leqslant \|f-g\|_1 < \varepsilon$. Si l'on montre l'existence de R tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \geqslant R \implies |\hat{g}(\xi)| < \varepsilon$, on en déduira :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|\xi\| \implies \left|\hat{f}(\xi)\right| < 2\varepsilon.$$

et c'est gagné. On choisit $[-A,A]^n$ un pavé qui contient le support de g. On note le laplacien de g : $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}$ qui est aussi de classe C^∞ à support compact dans $[-A,A]^n$, car g l'est. On a :

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \Delta g(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{[-A,A]^n} e^{-i(x,\xi)} (\Delta g)(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{[-A,A]^{n-1}} \left(\int_{-A}^A e^{-i(x|\xi)} \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} \mathrm{d}x_1 \right) d\overline{x}.\end{aligned}$$

On note I_k les termes de cette somme, et $\overline{x} = (x_2,...,x_n)$. Pour $k = 1$, $I_1 = \int_{[-A,A]^{n-1}} \left(\left[e^{-i(x,\xi)} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \right]_{x_1=-A}^A \int_{-A}^A -ie^{i(x,\xi)} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}\overline{x} = \int_{[-A,A]^{n-1}} \left(\left[-i\xi_1 e^{i(x,\xi)} g(x) \right]_{x_1=-A}^A - \int_{-A}^A \xi_1^2 e^{i(x,\xi)} g(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\overline{x}$.

On pourrait faire l'IPP plusieurs fois selon k ce qui donne le résultat suivant : $\widehat{\Delta g(\xi)} = -(\xi_1^2 + ...\xi_n^2) \int_{[-A,A]^n} e^{i(x,\xi)} g(x) \mathrm{d}x = -\|\xi\|_2^2 \,\hat{g}(\xi)$. Donc $\hat{g}(\xi) = \frac{-\widehat{\Delta g}(\xi)}{\|\xi\|_2^2}$. Puisque $\widehat{\Delta g}(\xi)$ est borné par $\|\Delta g\|_1$, ce terme tend vers 0 lorsque ξ tend en norme vers ∞. ■

Remarque. D'après la preuve, $\hat{g} = o_\infty\left(\frac{1}{\|\xi\|_2^k}\right)$ pour tout $k \geqslant 1$, $g \in Cj_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Elle est donc **à décroissance rapide**, notion que nous étudierons plus en détail dans la section suivante.

Exemple. ***(Transformée de l'exponentielle)***

Pour $n = 1$, $f(x) = e^{-|x|}$. On a bien $f \in L^1$. En séparant en deux on obtient $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Elle est dans L^1.

Exemple. ***(Transformée d'une fonction porte)***

Pour $\mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée vaut $2a$ si $\xi = 0$ et $2\frac{\sin(\xi a)}{\xi}$ ailleurs. On remarque qu'alors $\hat{f} \notin L^1$.

On peut définir des opérations élémentaires compatibles avec la transformation de Fourier ; voyons plutôt.

Propriété. ***(Transformée de Fourier d'une translaté)***

Si $f \in L^1$, si $h \in \mathbb{R}^n$, alors $\tau_h(f) \in L^1$ et

$$\widehat{\tau_h(f)} = e^{-i(h,\xi)} \hat{f}(\xi)$$

où $\tau_h f(x) = f(x+h)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$\triangleright$ On a $\widehat{\tau_h(f)} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x+h)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy,\xi)+i(h,\xi)} f(y)\mathrm{d}y = e^{i(h,\xi)} \hat{f}(\xi)$ par le changement de variable $y = x+h$. ■

Propriété. ***(Transformée de Fourier d'une dilatée)***

Si $f \in L^1$, si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, alors $H_\lambda(f) \in L^1$ et

$$\widehat{H_\lambda(f)} = \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$$

où $H_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$\triangleright$ On a $\widehat{H_\lambda(f)} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\frac{\xi}{\lambda})} f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}(\frac{\xi}{\lambda})$ par le changement de variable naturel, sachant que son jacobien vaut $\frac{1}{\lambda^n}$. ■

Maintenant deux propriétés analogues l'une pour l'autre.

Propriété. ***(Transformée de Fourier et multiplication par un monôme)***

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $x = (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_j f(x)$ soit dans L^1 pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Alors $\hat{f}$ est C^1 et $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i\widehat{x_j f}$.

$\triangleright$ On reprend les hypothèses de l'énoncé. On a $\widehat{x_j f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x_k e^{-(x,\xi)} f(x)\mathrm{d}x$. On note $g(x,\xi) = e^{-i(x,\xi)} f(x)$. Alors g est mesurable, et dérivable par rapport à ξ_j et :

$$\left|\partial_{\xi_j} g(x,\xi)\right| = \left|-ie^{-i(x,\xi)} f(x)\right| = |x_j f(x)|$$

et $x \longmapsto x_j f(x) \quad \in L^1$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral. Alors

$$\partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\xi_j} g(x,\xi)\mathrm{d}x = -i \int_{\mathbb{R}^d} x_j e^{-i(x,\xi)} f(x)\mathrm{d}x = -i\widehat{x_j f}(\xi)$$

et voilà le résultat. ■

Propriété. ***(Transformée de Fourier d'une dérivée)***

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial_{x_j} f \in L^1$ pour tout j. Alors

$$\widehat{\partial_{x_j} f} = i\xi_j \hat{f}.$$

▷ On suppose que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, on a automatiquement $f \in L^1 \cap C^1$ et $\partial_{x_j} f \in L^1$. On calcule grâce au théorème de Fubini :

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix,\xi)} \partial_{x_j} f(x) \mathrm{d}x$$

en notant $x = (x_j, \tilde{x})$ où $\tilde{x} = (x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_d)$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j\xi_j} e^{-i(\tilde{x},\tilde{\xi})} \partial_j f(x_j, \tilde{x}) dx_j \text{ à } \tilde{x}, \xi \text{ fixés.}$$

Ici $\partial_j f(x_j, \tilde{x})$ est à support compact. En intégrant par parties, ceci vaut $[e^{i(x,\xi)} f(x)]_{x_j=-\infty=-A}^{+\infty=A} - \int_{\mathbb{R}} -i\xi_j e^{-i(x,\xi)} f(x) \mathrm{d}x_j = -i\xi_j \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x,\xi)} f(x) \mathrm{d}x_j$. On intègre sur $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, ce qui donne $\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi)$. Si f n'est pas à support compact, on l'approxime par $f_c \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$ pour $\| \cdot \|_{L_1}$, de manière à approximer aussi $\partial_{x_j} f$ par $\partial_{x_j} f_c$ pour $\| \cdot \|_\infty$. On utilise pour cela une fonction plateau régulière : $\eta : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $B(0,r)$ et 0 en dehors de $B(0,R)$. Alors $f_c = \eta f$. On a alors $\left\| \mathcal{F}(\partial_{x_j} f) - \mathcal{F}(\partial_{x_j} f_c \right\|_\infty \leqslant \left\| \partial_{x_j} f - \partial_{x_j} f_c \right\|_{L^1}$. De même pour f. On en déduit le résultat aussi pour f. ■

Remarque. La quatrième propriété permet de transformer une équation aux dérivées partielles en une relation entre $\hat{f}$ et des monômes en ξ_j, c'est-à-dire une équation algébrique en $\hat{f}$. Avec la propriété de la transformée de Fourier inverse qui permettra une fois calculée $\hat{f}$ de retrouver f, on ouvre sur la théorie des équations aux dérivées partielles.

6.3.1.3 Théorème d'inversion de la transformée de Fourier

Définition. ***(Transformée de Fourier inverse)***

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa *transformée de Fourier inverse*, notée $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F} \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)} f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Remarquer qu'il n'y a plus de signe moins dans l'exponentielle complexe, d'où la notion d'*inverse*. Cette définition n'est posée que pour montrer que cette opération inverse la transformée de Fourier ; c'est ce qu'exprime la propriété suivante, fondamentale.

Théorème. ***(Inversion de Fourier)***

Si $f \in L^1$ et $(\hat{f}) \in L^1$ ($\hat{f}$ est bien définie puisque $f \in L^1$), alors on a :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

égalité ayant lieu presque partout [a].

[a] Tout simplement parce que f n'est elle-même définie que presque partout.

▷ La démonstration de l'inversion de Fourier est ignoble, on va la faire dans des espaces où elle est quand même plus naturelle. ■

Remarque. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, on pose $f_-(x) = f(-x)$ pour tout x. Si $f \in L^1$, $f_- \in L^1$ par changement de variables. On peut réécrire : $\boxed{f = (\widehat{\frac{1}{(2\pi)^2} \hat{f}_-}}$. Autrement dit, $\boxed{\mathcal{F}' \circ \mathcal{F}(f) = f}$. Cependant, on ne pourra écrire $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{-1}$ que si les départs et arrivés sont bien précisés et font de $\mathcal{F}$ une application ; il y a en particulier un défaut de surjectivité. L'inversibilité à gauche donne toutefois le premier résultat suivant.

Définition. ***(Être à peu près égal à sa Fourier)***

On dit que deux fonctions sont *à peu près* égales, et l'on note $f \approx_F g$, si elles sont égales à un facteur constant près, comme 2π, ou à changement de variables $x \to -x$ près.

Ainsi, puisque :

$$\boxed{2\pi f_- = \hat{f}},$$

on a $f \approx \hat{f}$.

On a les corollaires suivant d'intérêts tout aussi primordiaux :

Propriété. ***(Injectivité de la transformée de Fourier)***

$\mathcal{F}$ est injective.

▷ Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, il suffit de chercher $\mathrm{Ker}(\mathcal{F})$. Par le théorème, cet ensemble est bien réduit à $\{0\}$. ■

On a également l'énoncé (un peu bancal) suivant :

Corollaire. ***(Construction de transformées de Fourier non intégrables)***

Soit $f \in L^1$ telle que $f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$ (ça existe ?). Alors $\hat{f} \notin L^1$.

▷ Si $f \in L^1$, ce n'est pas une transformée de Fourier par la remarque. ■

Le problème dans l'énonciation de ce théorème est que la limite d'une fonction quotientée par l'égalité presque partout est mal définie. On peut aisément corriger ce détail en remplaçant par : soit $f \in \mathcal{L}^1$ telle que... et remplacer $\hat{f}$ par $\hat{\bar{f}}$.

Plus précisément, si $f \sim g$ pour l'égalité presque partout dans $\mathcal{L}^1$, et si f admet une limite en l'infini, alors g n'admet pas forcément de limite en l'infini. En revanche, si c'est le cas, alors les limites sont les mêmes.

6.3.2 Espace de Schwartz et transformée de Fourier

Deux Schwar(t)z pour le prix d'un

Ne pas confondre Laurent Schwartz (1915 ‡2002), mathématicien français contemporain ayant développé la théorie des distributions, et Hermann Amandus Schwarz, sans t, mathématicien allemand (1843 † 1921), contributeur de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Problème : la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, en escalier, comme la fonction porte, ne garde pas la régularité L^1, ce qui rend les choses très problématiques. On introduit un espace plus restreint qui va permettre de rendre la transformation de Fourier bijective - et donc un automorphisme vectoriel.

Définition. ***(Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)***

On appelle *espace de Schwartz*, et l'on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longrightarrow (1+\|x\|^2)^k \partial^\alpha f(x)$ soit bornée. On dit que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est *à décroissance rapide*. Avec des symboles :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left|(1+\|x\|^2)^k \partial^\alpha f(x)\right| < +\infty\}.$$

Remarque. Si $\|x\| \geqslant 1$, alors $\|x\|^2 \leqslant 1 + \|x\|^2 \leqslant 2\|x\|^2$.

Propriété. ***(Caractérisation de l'espace de Schwartz unidimensionnel)***

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$. Alors $f \in \mathcal{S}(1)$, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \underset{x \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ pour tout $k \geqslant 2$.

▷ Par continuité en zéro, fausse singularité, et échelonnage asymptotique des fonctions puissances dans $\mathbb{R}$. ■

Remarque. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout entier naturel k, pour tout entier naturel d-dimensionnel $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_2)$, en prenant $k+1$,

$$|\partial^\alpha f(x)| = \left|\partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_d}^{\alpha_d} f(x)\right| = \underset{\|x\|\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(1+\|x\|^2)^k}\right).$$

L'espace de Schwartz, quoique intuitivement restreint, est extrêmement stable.

Propriété. ***(Un sous-espace du Schwartz : les continues-compactes)***

On a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Propriété. ***(Linéarité de l'espace de Schwartz)***

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un sev de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$.

Propriété. ***(Stabilité de l'espace de Schwartz par dérivation)***

Si $f \in \mathcal{S}$, $\partial^\alpha f \in S$.

Propriété. ***(Algébritude de l'espace de Schwartz)***

Si $f \in \mathcal{S}$, si $P \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_d]$, $\tilde{P}(f) \in \mathcal{S}$.

Corollaire. ***(Stabilité par produit de l'espace de Schwartz)***

Soient $f,g \in \mathcal{S}$. Alors $fg \in \mathcal{S}$.

Propriété. ***(Inclusion de l'espace de Schwartz dans les L^p)***

Si $f \in \mathcal{S}$, alors pour tout $p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{S} \subseteq L^p$.

▷ En effet, f est continue et $f(x)$ est un petit o de $\frac{1}{(1+\|x\|^2)^d}$. ■

Propriété. ***(Densité de l'espace de Schwartz dans les L^p)***

Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $\mathcal{S}$ est dense dans $\subseteq L^p$.

▷ En effet, il contient les fonctions C^∞ à support compact, qui forment un dense. ■

Quelques exemples et contre-exemples utiles cependant :

Exemple. ***(Premier exemple)***

Soit une norme euclidienne. Alors $x \longrightarrow e^{-\sqrt{1+\|x\|^2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour $d=1$, en dérivant $f : x \longrightarrow e^{-\sqrt{1+x^2}}$, $f^{(n)}(x) = \tilde{F}(\sqrt{1+x^2}, x)e^{\sqrt{1+x^2}}$ où $F \in \mathbb{R}(X,Y)$. On conclut par croissances comparées.

Exemple. ***(Un contre-exemple)***

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{-x} \notin \mathcal{S}$ car pas bornée derrière.

Exemple. ***(Pas de fractions rationnelles dans S...)***

$g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}$ car $(1+x^2)^2 g$ n'est pas bornée.

6.3.2.1 Topologie sur l'espace de Schwartz

On cherche maintenant à définir une topologie sur l'espace de Schwartz.

On définit une famille de normes (semi-normes) pour $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}$,

$$\|f\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \left\|x^2\right\|)^k \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha f(x)| \,.$$

À partir de cela on peut définir une distance. (D'ailleurs, une infinité de normes de la forme précédente définissent la même topologie, mais ma prof ne sait plus comment le démontrer.)

On définit donc $d_{\mathcal{S}}$ si $f,g \in \mathcal{S}$ par : $d_{\mathcal{S}}(f,g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\min(1, \|f-g\|_{k,\mathcal{S}})}{2^k}$, qui est une métrique sur S. Alors f_n tend vers f pour $d_{\mathcal{S}}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_n tend vers f pour la norme k sur $\mathcal{S}$. **On montre que $\mathcal{S}$ munit de cette distance est complet.**

L'espace de Schwartz est un espace vectoriel complet. Mais ce n'est pas un espace de Banach ! En effet, la distance n'est pas issue d'une norme.

Théorème. ***(Automorphisme de Fourier dans l'espace de Schwartz)***

On a la surjectivité $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ dans lui-même et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont continues. Autrement dit la transformation de Fourier est un automorphisme de l'espace de Schwartz.

▷ Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $x^\alpha f = x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d} \in S \subseteq L^1$. Donc par multiplication et Fourier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\hat{f} \in C^k$ c'est-à-dire $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty$. Et $\partial^\alpha f \in \mathcal{S} \subseteq L^2$. Ainsi $\|\xi_j\|^k \left|\hat{f}\right| \in C_b$. Donc pour tout k, $(|1+|\xi|^2)^k \left|\hat{f}(\xi)\right|)$ bornée. Donc $\hat{f} \in \mathcal{S}$. On peut utiliser la transformée inverse. Si $g \in S$, f définie par $f(x) = \mathcal{F}(g_-)(x)$ définit un antécédent de g par $\mathcal{F}$ restreint à S. Pour montrer la continuité, il suffit de voir que pour tout k, si f_n tend vers f pour d_S, alors $\left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_{k,\mathcal{S}} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.en utilisant les deux derniers points de la proposition 2. ■

Dans l'espace de Schwartz, on peut énoncer l'inégalité d'Heisenberg :

Théorème. ***(Principe d'incertitude d'Heisenberg)***

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\|\varphi\|_2 = 1$. On suppose que $\overline{x} = \int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2 ddx$ et $\overline{\xi} = \int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi} = 0$. On note $\sigma_x = (\int_{\mathbb{R}}(x-\overline{x})^2|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$ et $\sigma_\xi = \left(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\overline{\xi})^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. Alors :

$$\sigma_x\sigma_\xi \geqslant \frac{1}{2}.$$

▷ D'abord, on se ramène au cas où $\overline{x} = \overline{\xi} = 0$ en utilisant la propriété de translation de Fourier pour $\tilde{\varphi}(x) = e^{-ix}\varphi(x+\overline{x})$.

On peut montrer que $\left|\mathfrak{Re}(\int_{\mathbb{R}} x\overline{\varphi(x)}\varphi'(x)\mathrm{d}x)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} x(|\varphi|^2)'(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}$ par une simple intégration par parties. Pour conclure, il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle\varphi', x\mapsto x\varphi(x)\rangle$ dans $L^2(\mathbb{R})$ en remarquant que $\hat{\varphi}'(\xi) = i\xi\hat{\varphi}(\xi)$. ■

6.3.3 Transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Théorème. ***(Formule de Parseval-Plancherel)***

Soient $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$(2\pi)^d \int \mathbb{R}^d f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \int \mathbb{R}^d \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x.$$

Corollaire. ***(La Fourier est une isométrie dans L^2)***

$\mathcal{F}$ est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), (2\pi)^{\frac{d}{2}}\|\cdot\|_{L^2})$ sur $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2})$.

▷ On utilise la transformée de Fourier inverse.

$$(2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \overset{\text{Fubini}}{=} \int \mathbb{R}^d\overline{\hat{g}}(\xi)\left(\int \mathbb{R}^d f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right)\mathrm{d}\xi = \int \mathbb{R}^d\hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\mathrm{d}x.$$

■

En résumé, $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2})$ est une isométrie sur son image à un facteur $(2\pi)^{d/2}$ près. Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire continue et que $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2})$ est un Banach, et puisqu'on a vu que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2})$, donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ également, alors par prolongement des applications linéaires continues, $\mathcal{F}$ admet un unique prolongement continu $\tilde{\mathcal{F}}$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\left\|\tilde{\mathcal{F}}\right\| = \|\mathcal{F}\| = (2\pi)^{d/2}$. Alors, par continuité de $(\cdot|\cdot)$ et $\tilde{\mathcal{F}}$, on a :

$$\forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)\ (2\pi)^d(f|g)_{L^2} = (\tilde{\mathcal{F}}(g)|\tilde{\mathcal{F}}(g))_{L^2}.$$

Question. A-t-on pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ que $\mathcal{F}(f) = \tilde{\mathcal{F}}(f)$? Oui !

▷ Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité telle que $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si $f \in L^2 \cap L^1$, il existe une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}} \in]0,+\infty[^{\mathbb{N}}$ telle que $g_k = \mathbb{1}_{B(0,R_k)} f \overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\underset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}} f$ lorsque $k \to +\infty$. De plus, chaque fonction $\rho_n \star g_k$ est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et pour chaque k, $\rho_n \star g_k \overset{\|\cdot\|_{L^1}}{\underset{\|\cdot\|_{L^2}}{\longrightarrow}} g_k$ lorsque $n \to \infty$. Ceci permet de construire une suite $(\rho_{n_k} \star g_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_k = \rho_{n_k} \star g_k \overset{\|\cdot\|_{L^2}}{\underset{\|\cdot\|_{L^1}}{\longrightarrow}} f$. Or dans L^1, $\mathcal{F}(f) = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}(f_k)$ par continuité de $\mathcal{F} : (L^1, \|\cdot\|_{L^1}) \longrightarrow (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. De plus $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{F}(f_k)$ par continuité de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $(L^2, \|\cdot\|^2)$ dans lui-même. Il y a égalité des limites pour ces deux topologies (pourquoi ?). ■

Ceci nous autorise à noter $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

Théorème. ***(Isomorphisme de Banach de Fourier)***

L'application $\mathcal{F}$ de $(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|^{L^2})$ dans lui-même est un isomorphisme de Banach et pour tout $f \in L^2$, $(2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}$.

▷ Il faut juste montrer que $\mathcal{F}$ est surjective. Or $\mathcal{F}$ est une « isométrie », donc $\mathcal{F}(L^2)$ est un Banach. Il est donc fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et dense, car il contient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $\mathcal{F}$ est surjectif. ■

Théorème. ***(Prolongement de la transformation de Fourier à L^2)***

L'application $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^2})$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$, notée $\mathcal{F}$.

On peut obtenir un certain nombre de règles calculatoires.

Théorème. ***(Fourier et convolution)***

Si $f,g \in L^1$, $f \star g \in L^1$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$. Si $f \in L^1$ et $g \in L^2$, $f \star g \in L^2$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

Théorème. ***(Fourier et produit)***

Si $f,g, fg \in L^1$ et $\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \in L^1$, $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.

6.3.4 Espaces de Sobolev

Définition. ***(Espaces de Sobolev)***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $m \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$\{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant m \quad \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

où α est un multi-indice est ∂^α désigne bien sûr une dérivée partielle de u au sens faible des distributions[a].

[a] On rappelle aussi pour exemple que $u \in L^2(]0,1[)$ admet une dérivée au sens faible s'il existe $v \in L^2(]0,1[)$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, on a $\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 v(x)\phi(x)$.

Sur $W^{m,p}(\Omega)$, on définit la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty \\ \max_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Théorème. ***(Structure de l'espace de Sobolev)***

Pour tout $p \in [1, +\infty], m \in \mathbb{N}$, $W^{m,p}$ est un espace de Banach.

6.3.4.1 Le cas préhilbertien

Définition. ***(Espaces H^m)***

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On note souvent $H^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$.

Propriété. ***(Structure de l'espace H)***

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace H^m est un espace de Hilbert.

Lorsque Ω s'étend à l'espace tout entier, alors il y a un lien fondamental entre les espaces H^m de la théorie des équations aux dérivées partielles et la transformée de Fourier. En effet :

Propriété. ***(Définition de l'espace H^m par la transformée de Fourier)***

On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout entier naturel n,

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \int \mathbb{R}^n |\hat{u}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^m d\xi < \infty\}.$$

▷ C'est une application de la formule de Parseval-Plancherel. En effet, par positivité, $|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^m$ est intégrable ssi $|\hat{u}(\xi)|^2(|\xi|^2)^m$ l'est, et par comparaison cela équivaut à $|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^\alpha$

intégrable pour tout $|\alpha| \leqslant m$, soit $|(\hat{u}(\xi)||\xi|^{\alpha})^2$ intégrable. Or $|\xi|^{\alpha}\hat{u}(\xi) = \hat{D^{\alpha}u}$ comme on sait, ce qui revient à dire $\hat{D^{\alpha}u}^2$ intégrable. Ici à valeurs réelles, l'identité de Parseval assure que cela équivaut à $(D^{\alpha}u)^2$ intégrable. C'est exactement la définition de $W^{m,2} = H^m$. ■

Chapitre 7

Analyse complexe

Résumé

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions à valeurs complexes (ou, plus généralement, à valeurs dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et qui sont dérivables par rapport à une ou plusieurs variables complexes. Les fonctions dérivables sur un ouvert du plan complexe sont appelées holomorphes et satisfont de nombreuses propriétés plus fortes que celles vérifiées par les fonctions dérivables en analyse réelle. Entre autres, toute fonction holomorphe est analytique et vérifie le principe du maximum.

7.1 Dérivation

UNE fonction de la variable complexe n'est autre qu'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; dériver une telle fonction se ramènerait donc au calcul d'une simple différentielle, soit une dérivation composante par composante ; et bien non. On ne va pas définir les choses ainsi, pour des raisons que nous étudierons ultérieurement ; la définition va se rapprocher très fortement du cas réel, mais, comme nous l'allons voir rapidement, elle est loin d'être équivalente à celle du calcul différentiel, ni aussi peu régulière que celle de l'analyse réelle.

7.2 Séries entières

7.2.1 Comportement sur le disque de convergence

Théorème. ***(Théorème d'Abel radial)***

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 = \partial D(0,R)$. Notons f la somme de la série entière sur le disque unité. On suppose que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z_0^n = S$ converge. Alors il y a continuité non tangentielle de f en z_0. Autrement dit, on fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, et l'on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < |z_0| \text{ et } \exists \rho > 0 \ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \quad z = z_0 - \rho e^{i\theta}\}$. Alors :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S.$$

$\triangleright$ On montre la résultat dans le cas où $R = 1$ et $z_0 = 1$, pour alléger les notations. Il n'y a aucune différence fondamentale, et l'on invite le lecteur à la récrire dans le cas général pour se former à la rédaction lourde.

On note R_n le n-ième reste de la série entière, soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n z^n$. On souhaite majorer $|f(z) - S|$. On effectue une transformation d'abel sur $f(z) - S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z^{n+1} - z^n)$. On obtient :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque les restes R_n tendent vers zéro, fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|R_n| < \varepsilon$. D'après le calcul précédent, pour tout complexe z tel que $|z| < 1$,

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| (\sum_{n=0}^{N} |R_n|) + |z-1| \varepsilon \frac{1}{1 - |z|}.$$

Or pour z assez proche de 1, disons $|z - 1| < \alpha$, alors ce premier terme $< \varepsilon$.

Maintenant, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, alors $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$, et $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1 + |z|) \leqslant \frac{2}{2\cos(\varphi) - \rho}$. Ainsi, si $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$, ceci $\leqslant \frac{2}{\cos(\theta_0)}$. Ainsi, si $z \in \Delta$ et $|z - 1| \leqslant \inf(\alpha, \cos(\theta_0))$, $|f(z) - S| \leqslant \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$. ■

Ceci n'a d'intérêt que si, au bord, la convergence n'est pas absolue ! Autrement, il y a convergence normale, donc continuité directement.

La réciproque est fausse : si f est continue depuis même tout le disque, la série peut ne pas converger en un point !

7.3 Fonctions analytiques

7.3.1 Principe du module maximal

Lemme. ***(Module maximal pour les séries entières)***

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série de rayon de convergence $R \in [0, \infty]$. On définit sa somme f sur $D(0,R)$. On suppose que f n'est pas constante sur $D(0,R)$.

1. Pour tout voisinage U de 0, il existe $z \in U$ tel que $|f(z)| > |f(0)|$.
2. Si de plus $f(0) \neq 0$, alors pour tout voisinage U de 0, il existe $z \in U$, il existe $z \in U$ tel que $|f(z)| < |f(0)|$.

▷ Si $f(0) = 0$, d'après le principe des zéros isolés, il existe un voisinage de zéro sur lequel f ne s'annule qu'en zéro. On a bien $|f| > |f(0)|$ sur ce voisinage et cela suffit par transitivité des voisinages. Si maintenant $a_0 \neq 0$, quitte à diviser par lui on peut suppose $a_0 = 1$. Soit n le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $a_n \neq 0$, qui existe par hypothèse. Alors $f(z) = 1 + a_n z^n(1 + g(z))$ où g est une série entière nulle en zéro. Ainsi $f(\rho e^{i\theta}) = 1 + a_n \rho^n e^{in\theta}(1 + g(\rho e^{in\theta}))$. On choisit alors θ tel que $e^{in\theta} = \overline{a_n}/|a_n$ et $\rho > 0$ suffisamment petit pour que $|g| \leqslant 1/2$ sur $D(0,\rho)$, de sorte que $|f(\rho e^{i\theta})| \geqslant 1 + |a_n|\rho^n(1 - |g(e^{i\theta})|) \geqslant 1 + \frac{|a_n|\rho^n}{2} > 1 = |f(0)|$.

Dans le deuxième cas, alors d'après le principe des zéros isolés, il existe un voisinage de zéro sur lequel f ne s'annule plus. On se restreint à ce voisinage et applique le premier point à $1/f$. Ceci est valable, car tout sous-voisinage d'un voisinage est un voisinage contenant un z qui satisfait encore à la propriété donnée. ■

Théorème. ***(Principe du module maximal)***

Soit U un ouvert connexe et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante.

▷ Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ et δ tel que $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ pour tout $z \in D(z_0, \delta)$. Quitte à restreindre à un voisinage encore plus restreint sur lequel f est tout simplement une série entière, le lemme du module maximal pour les séries entières implique que f est nulle sur un voisinage de z_0. Par principe du prolongement analytique, f est nulle. ■

Théorème. ***(Principe du module minimal)***

Soit U un ouvert connexe et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Si $|f|$ n'est pas constante et admet un minimum local en z_0, alors $f(z_0)$.

▷ C'est strictement la même preuve avec la deuxième proposition donnée en avant. ■

Exemples. ***(Applications du PMM)***

1. Si g est holomorphe sur un ouvert contenant $\overline{D}(0,1)$, et pour tout z tel que $|z| = 1$, $|g(z)| \leqslant 1$. Alors pour tout $z \in D(0,1)$, $|g(z)| \leqslant 1$. En effet, sinon soit z niant cela. S'il existe quand même un deuxième z' tel que $|g(z')| \leqslant 1$, alors sur le compact $\overline{D}(0,1)$, $|g|$ n'est pas constante, donc est bornée et atteint ses bornes. Elle a donc un maximum local. Absurde. Sinon, pour tout $z \in D(0,1)$, $|g| > 1$. Alors soit $|g| = 1$ partout et il n'y a rien à faire, soit ce n'est pas le cas, et de même, $|g|$ est bornée et atteint ses bornes sur le compact donc n'est pas constante et admet un maximum local ; impossible.
2. Soit P un polynôme non constant. Alors $|P(z)| \to \infty$ quand $z \to \infty$, donc P atteint son minimum (global sur $\mathbb{C}$) en un point z_0. D'après le principe du module minimal, $P(z_0) = 0$. On a démontré le théorème de d'Alembert-Gauss.

7.4 Théorie de Cauchy

7.5 Théorie de Laurent

7.5.1 Fonctions méromorphes

7.5.1.1 Classification des singularités

Propriété. ***(Caractérisation des singularités artificielles)***

Soit $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f holomorphe sur $D(z_0,r)*$. Alors z_0 est une singularité artificielle de f si et seulement si $|f|$ est bornée sur un voisinage de z_0.

▷ Pour simplifier la preuve, on prend $z_0 = 0$. La condition est nécessaire par continuité des fonctions holomorphes et théorème des bornes. Pour la réciproque, soit $f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ le DSL sur $D(0,r)*$ de f. Or d'après les inégalités de Cauchy, si M est une borne de f sur un voisinage encore plus restreint, par intersection de deux voisinages, alors $|a_n| \leqslant M(r')^{-n}$. Ainsi, pour $n \leqslant$ -1 et $r' \to 0$, on obtient $a_n = 0$. Donc f se DSE, elle est donc en fait holomorphe sur $D(a,r)$. ■

En un certain sens, les fonctions méromorphes explosent de façon spectaculaire au voisinage de leurs singularités essentielles. Le théorème de Weierstrass-Casorati illustre ce fait.

Théorème. ***(Théorème de Weierstrass-Casorati)***

Soit f une fonction holomorphe sur un disque $D(a,r)$ épointé, $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Supposons que a soit une singularité essentielle de f. Alors, pour tout $k \in]0,r[$, $f(D(a,k)*)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

▷ Supposons qu'il existe $k > 0$, $k \leqslant r$ tel que $f(D(a,k)*)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Par définition, il existe $b \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - b| > \varepsilon$ pour tout $z \in D(a,k)*$ et sur cet ensemble, la fonction $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)-b}$ est donc bornée. Par conséquence, a est une singularité artificielle de g qui se prolonge donc sur $D(a,k)$ en une fonction holomorphe $\overline{g}$. Alors, soit $\overline{g}(a) \neq 0$ et $1/\overline{g}$ est holomorphe sur $D(a,k)$, mais cette fonction a le même type de singularité que $f(z) - b \sim f$, soit elle possède un pôle du premier ordre si $\overline{g}(a) = 0$. Dans tous les cas, a n'est plus une singularité essentielle de f, et l'on conclut par contraposée. ■

Corollaire

Soit f une fonction holomorphe sauf en point a qui lui est une singularité essentielle. Alors pour tout complexe c, pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(z_j)_j$ de $D(a,k)*$ telle que $f(z_j) \to c$.

7.5.2 Développement en série de Laurent

7.5.3 Formule des résidus

7.6 Approfondissements

7.6.1 Théorèmes de Picard

7.6.2 Formes différentielles et théorème de Poincaré

7.6.3 Prolongement de la fonction zêta de Riemann

Chapitre 8

Analyse fonctionnelle

Résumé

L'analyse fonctionnelle regroupe l'étude des espaces de fonctions grâce aux outils topologiques dans le but de résoudre des équations fonctionnelles parmi lesquelles surtout les équations aux dérivées partielles.

8.1 Espace des fonctions bornées, espace des fonctions continues

8.1.1 Parties compactes de $\mathcal{C}(X,Y)$

On commence par introduire une notion indépendante de la topologie, mais que le théorème d'Ascoli relie à elle ensuite.

8.1.1.1 Notion d'équicontinuité

Définition. ***(Interprétation de l'équicontinuité)***

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions de E espace topologique dans F espace uniforme, I un ensemble. On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow F^I$ telle que pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Alors :

- La famille (f_i) est continue (*i.e.* , toutes les f_i sont continues) si et seulement si l'application Φ est continue lorsque l'on munit F^I de la topologie de convergence simple.
- La famille (f_i) est composée de fonctions uniformément continues (*i.e.* , toutes les f_i sont uniformément continues) si et seulement si l'application Φ est uniformément continue lorsque l'on munit F^I de la topologie de convergence simple.
- La famille (f_i) est équicontinue si et seulement si l'application Φ est continue lorsque l'on munit F^I de la topologie de convergence uniforme.
- La famille (f_i) est uniformément équicontinue si et seulement si l'application Φ

est uniformément continue lorsque l'on munit F^I de la topologie de convergence uniforme.

8.1.1.2 Théorème d'Ascoli

Dans toute la suite, on suppose X compact.

Propriété. ***(Généralité du théorème d'Ascoli)***

Soit X non compact. Soit A une partie de $\mathcal{C}(X,Y)$ comportant une infinité de fonctions qui ne soient pas à support dans un même compact. Alors A n'est pas compact.

Propriété. ***(Réciproque au théorème d'Ascoli)***

Soient X et Y deux espaces métriques, X **non nécessairement compact**. Soit $\mathcal{H}$ une partie relativement compacte de $\mathcal{C}(X,Y)$. Alors $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compacte dans Y.

8.1.1.3 Approfondissements du théorème d'Ascoli

Propriété. ***(Équicontinuité et uniforme équicontinuité)***

Soient X et Y deux espaces métriques, X compact. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues de X dans Y. Alors $\mathcal{F}$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.

▷ Seul le sens direct compte. Or la définition de l'équicontinuité permet de recouvrir X par des boules dont les rayons sont des modules de continuité ; par compacité, on n'a plus qu'un nombre fini de boules qui permette d'avoir l'uniformité. ■

Propriété. ***(Convergence simple d'une suite équicontinue)***

Toute suite équicontinue de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue converge uniformément.

8.2 Opérateurs continus

8.2.1 Applications linéaires continues et espaces de Banach

On ne s'étonnera pas que les résultats suivants soient des conséquences du théorème de Baire, puisqu'on en dispose primairement dans un espace de Banach.

8.2.1.1 Borner une famille d'opérateurs : le théorème de Banach-Steinhaus

Théorème. ***(Théorème de Banach-Steinhaus)***

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, $\{T_n x, n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Alors la famille T_n est également bornée (pour la norme d'opérateur).

$\triangleright$ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{B}_N = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad \|T_n(x)\| \leqslant N\}$ qui est clairement fermé (par intersection de fermés). Par hypothèse du théorème, on a $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_N = E$. Comme E est un espace de Banach, le théorème de Baire implique qu'un certain $\mathcal{B}_N$ est d'intérieur non vide. Ainsi, il existe $x \in E$, $r > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{B}(x,r) \subseteq \mathcal{B}_N$, c'est-à-dire que pour tout $y \in \overline{B}(x,r)$, pour tout entier naturel n, $\|T_n(y)\|_F \leqslant N$. Ramenons-nous à la boule unité par homothétie et translation : si $z \in \overline{B}(0_E,1)$, alors $x + rz \in \overline{B}(x,r)$. Ainsi $\|T_n(x+rz)\|_F \leqslant N$. Or, on a $z = \frac{1}{r}(x+rz) - \frac{1}{r}x$, donc par linéarité, $\|T_n(z)\| = \|\frac{1}{r}T_n(x+rz) - \frac{1}{r}T_n(x)\|$. Par inégalité triangulaire et homogénéité, on a donc :

$$\|T_n(z)\| \leqslant \frac{1}{r}\|T_n(x+rz)\| - \frac{1}{r}\|T_n(x)\| \leqslant \frac{2N}{r}.$$

Par suite, pour tout $z \in \overline{B}(0,1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n(z)\|_F \leqslant \frac{2N}{r}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|_{L(E,F)} = \sup_{\|z\|=1} \|T_n(z)\|_F \leqslant \dfrac{2N}{r}$ ce qui donne une majoration explicite. ■

Remarque. Observer le parallèle avec le théorème d'Ascoli. Voir également que, à cause du théorème de Baire, on ne s'autorise à parler que de familles dénombrables (ce qui peut en une certaine mesure remplacer l'équicontinuité dans la tête du candidat, de même que la complétude du départ remplace la compacité du départ).

Corollaire. ***(Limite simple d'opérateurs continus)***

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F qui converge simplement vers T. Alors T est continu est $\|T\|_{L(E,F)} \leqslant \liminf n{+}\infty \|T_n\|_{L(E,F)}$.

$\triangleright$ Soit $x \in E$. Par convergence simple, la suite $(T_n(x))$ converge donc elle est bornée. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, donc il existe une constante M majorant uniformément les T_n. Remarquons que T est linéaire comme limite simple d'applications linéaires. De plus, $\|T_n(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$. Par continuité de la norme, on obtient la même inégalité pour T ce qui signifie, comme elle est linéaire, qu'elle est continue. Ainsi $\|T\|_{L(E,F)} \leqslant M$.

Soit $m = \liminf n{+}\infty \|T_n\|_{L(E,F)}$. Montrons $\|T\|_{L(E,F)} \leqslant m + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Or, il existe une sous-suite extraite par φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|T_{\varphi(n)}\right\|_{L(E,F)} \leqslant m + \varepsilon$. On applique ce qui précède à cette suite extraite, qui tend encore vers T, d'où le résultat. On en déduit $\|T\|_{L(E,F)} \leqslant m$, ce qu'il fallait montrer. ■

Exercice 5

Donner un exemple de limite simple d'applications linéaires continues qui converge vers une application linéaire qui n'est pas continue.

▷ **Éléments de réponse.**

Remarquons qu'en toute généralité, l'application limite est linéaire. Pour fournir un contre-exemple intéressant, on se borne à donner une suite d'applications d'un espace vectoriel normé non complet dans un espace de Banach. Prenons $T_n : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_n(X^k) = k$ si $k \leqslant n$ et 0 sinon. En munissant $\mathbb{R}[X]$ de la norme infinie, tous les T_n sont continues et (T_n) converge vers T qui n'est pas continue, car $TX^n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8.2.1.2 Inverser un opérateur continu : le théorème de Banach-Schauder

Exercice 6

Montrer qu'une application linéaire ouverte entre deux espaces vectoriels normés est surjective.

▷ **Éléments de réponse.**

D'après le lemme suivant, soit $yinF$. Alors $y' = \frac{y}{2\|y\|} \in B_F(0,1)$, donc il existe $x' \in B_E(0,C) \subseteq E$ tel que $y' = f(x')$. En posant $x = 2\|y\|\,x$, par linéarité de f, $y = f(x)$.

Lemme

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors f est ouverte si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que $B_F(0,1) \subseteq f(B_E(0,C))$.

Théorème. ***(Théorème de Banach-Schauder, théorème de l'application ouverte)***

Soient E,F deux espaces de Banach et une application linéaire continue et surjective de E dans F. Alors T est ouverte.

▷ Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Puisque f est surjective, F s'écrit comme la réunion des fermés $F_n = \overline{f(B(0,n))}$, boule de l'espace E. D'après le théorème de Baire, l'un de ces fermés, notons-le F_N, est d'intérieur non vide ; il contient donc une boule $B(y,\eta)$ de l'espace F. Le fermé F_{2N} contient donc la boule $B(0,\eta)$. On dispose ainsi, par linéarité, d'un réel M tel que $B_F(0,1) \subseteq \overline{B_E(0,M)}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_F(0,\frac{1}{2^n}) \subseteq \overline{f(B_E(0,\frac{M}{2^n})}$. Montrons que $B_F(0,1) \subseteq B_E(0,2M)$. Soit $z \in B_F(0,1)$. D'une part, il existe x_0 de norme strictement inférieure à M tel que $z_1 = z - f(x_0)$ soit de norme inférieure à $\frac{1}{2}$, et d'autre part, il existe x_1 de norme inférieure à $M/2$ tel que $z_2 = z_1 - f(x_1)$ soit de norme inférieure à $1/4$. On construit alors, par récurrence, une suite (x_n) de vecteurs de E telle que $\|x_n\| \leqslant M/2^n$ et $z_{n+1} = z - f(x_0 + \ldots + x_n)$ soit de norme inférieure à $1/2^{n+1}$. La série $\sum x_n$ est en particulier absolument convergente, donc comme E est un espace de

Banach, elle est convergente. De plus, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2M$. Par passage à la limite, $z = f(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n) \in f(B_E(0,2M))$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Exercice 7

Donner un exemple d'isomorphisme (bijection linéaire) entre deux espaces vectoriels normés continu mais non bicontinu.

▷ **Éléments de réponse.**

D'après le théorème suivant, on ne doit se placer entre des Banach. On peut donc considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme ℓ^1 sur les coefficients qui envoie X^n sur $\frac{X^n}{n+1}$.

Théorème. ***(Théorème de l'isomorphisme de Banach)***

Toute bijection linéaire continue d'un espace de Banach dans un espace de Banach est un homéomorphisme.

▷ C'est un corollaire direct de ce qui précède. En effet, si E,F sont deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ est une bijection linéaire continue, elle est a fortiori surjective donc ouverte. Cela signifie que f^{-1} est continue. Puisqu'elle est est élémentairement linéaire, l'application f est un homéomorphisme, ce qu'il fallait montrer. ■

8.3 Espaces ℓ^p, espaces L^p

8.3.1 Espaces ℓ^p

On se fixe évidemment $p \in [1, +\infty]$.

8.3.1.1 Premières considérations

Propriétés.

1. $\ell^1(E)$ est l'ensemble des suites à valeurs dans E qui sont terme général de série convergente.
2. $\ell^\infty(E)$ est l'ensemble des suites à valeurs dans E bornées.

Définition. ***(Espace des suites qui tendent vers zéro)***

On note $c_0(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E qui tendent vers zéro.

Propriété

$c_0(E)$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞. De plus, si E est une algèbre normée, c'est un idéal de ℓ^∞.

Formule. ***(Inclusions réciproques des trois principaux espaces de suites)***

$$\ell^1 \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty.$$

8.3.1.2 Familles remarquables de ℓ

Définition. ***(Base canonique de ℓ^∞)***

On pose les fonctions définies par le symbole de Kronecker selon la formule suivante : pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\delta^j = (\delta^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On précisera plus tard en quel sens cette famille est une base d'un espace, au sens analytique du terme. La section suivante fait un premier pas dans cette direction.

8.3.1.3 Étude de la séparabilité des ℓ^p

On dispose du fait suivant :

Théorème. ***(Séparabilité des ℓ^p)***

ℓ^p est séparable si et seulement si p est fini.

Pour préciser, on démontre séparément la séparabilité des ℓ^p et la non-séparabilité de ℓ^∞.

Propriété. ***(Séparabilité des ℓ^p, $p < \infty$)***

Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors ℓ^p est séparable.

▷ On pose les fonctions définies par le symbole de Kronecker selon la formule suivante : pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $\delta^j = (\delta^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (Ce n'est autre que la famille des puissances d'une indéterminée d'un espace de polynômes à une variable.) Le sous-espace vectoriel F sur $\mathbb{Q}$ engendré par $\{\delta^j, j \in \mathbb{N}\} \cup \{i\delta^j, j \in \mathbb{N}\}$ coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires des δ^j à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ qui est clairement dénombrable. En effet, on peut écrire :

$$F = \bigcup_{A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}), A \text{ fini}} \left\{ \sum_{j\in A} (\lambda_j \delta^j + \mu_j i\delta^j) \mid \forall j \in A \quad \lambda_j \in \mathbb{Q}, \mu_j \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Reste à montrer que F est dense dans ℓ^p. Soit $u \in \ell^p$ et $\varepsilon > 0$. Puisque le reste d'une série convergente tend vers 0, il existe un rang N tel que : $\sum\limits_{n\geqslant N} |u_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Comme $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ est lui-même dense dans $\mathbb{C}$, il existe une suite finie $(z_n)_{0\leqslant n\leqslant N-1} \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{N+1}$ telle que pour tout n, $|z_n - u_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2(N+1)}$.

Alors $\sum_{j=0}^{N-1} z_j\delta^j \in F$ et $\left\| u - \sum_{j=0}^{N-1} z_j\delta^j \right\|_{\ell^p}^p \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |z_n - u_n|^p + \sum_{n=N}^{\infty} |u_n|^p < \varepsilon^p$ d'où $\left\| u - \sum_{j=0}^{N-1} z_j\delta^j \right\|_{\ell^p} \leqslant \varepsilon$ ce qui termine la preuve. ■

Propriété. ***(Non séparabilité de ℓ^∞)***

ℓ^∞ n'est pas séparable.

▷ Soient $u,v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $u \neq v$, alors $\|u - v\|_\infty = 1$. Ainsi $(B(u,\frac{1}{2}))_{u\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ forme une famille indénombrable d'ouverts non vides deux à deux disjoints. Par conséquent, ℓ^∞ n'est pas séparable. ■

8.3.1.4 Parties denses des ℓ^p

Exercice 8

On rappelle que, pour tous $p \in]1, +\infty[$,

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \subseteq \ell^1 \subseteq \ell^p \subseteq c_0 \subseteq \ell^\infty \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Montrer que les injections associées aux inclusions non extrémales de la suite ci-dessus sont continues. Parmi ces injections, lesquelles ont une image dense ?

▷ **Éléments de réponse.**

On a vu que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans c_0, ce qui donne trois densités d'un coup. On peut également que l'espace des suites bornées est dense dans l'espace des suites. Enfin, c_0 est fermé donc n'est pas dense.

$$\begin{tikzcd}
(c_0)' \arrow[r, "\iota'"] & (l^p)' \arrow[r] & (l^1)' \\
l^1 \arrow[u, "\phi_0"] \arrow[r, "\iota_1=\phi_p^{-1}\circ\iota'\circ\phi_0"'] & l^q \arrow[u, "\phi_p"] \arrow[r] & l^\infty \arrow[u, "\phi_1"']
\end{tikzcd}$$

Exercice 9

Soient $p < q < \infty$. Montrer que ℓ^p est dense dans ℓ^q.

On aura un résultat similaire pour les espaces L^p pour une mesure finie.

8.3.1.5 Dualité ℓ^p-$\ell^{p'}$

Dans cette section, on fixe $p \in [1, +\infty[$ avec bien $p < +\infty$. On note p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Lemme. ***(Injection isométrique de dualité)***

Soit $p \in [1,+\infty]$ ($+\infty$ inclus). Si $v \in \ell^{p'}$, alors $\varphi_v(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ définit un élément φ_v du dual topologique $(\ell^p)'$ de ℓ^p et $|\varphi_v|_{(\ell^p(\mathbb{N}))'} = |v|_{\ell^{p'}(\mathbb{N})}$.

$\triangleright$ La fonction φ_v est bien définie puisque si $v \in \ell^{p'}$ et $u \in \ell^p$, alors $uv \in \ell^1$. On a clairement que φ_v est une forme linéaire par linéarité de la somme d'une série convergente. De plus, d'après l'inégalité de Hölder, $|\varphi_v(u)| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right| \leqslant |u|_p |v|_{p'}$. Ainsi φ_v est continue, de norme plus petite que $|v|_{p'}$. Pour conclure la preuve du lemme, il suffit de chercher $u \in \ell^p \setminus \{0\}$ telle que $|\varphi_v(u)| = |u|_p |v|_{p'}$. Dans le cas p, p' finis, si n est tel que $v_n = 0$, on pose $u_n = 0$; sinon, on pose $u_n = \frac{1}{v_n}|v_n|^{p'}$. Dans ce cas : $\varphi_v(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^{p'} = \|v\|_{p'}^{p'}$. Ainsi, $\|u\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^{(p'-1)p} = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^{p'} = \|v\|_{p'}^{p'}$. On a donc $\|v\|_{p'} - \|u\|_p = \|v\|_p - \|v\|_{p'}^{\frac{p'}{p}} = \|v\|_{p'}^{p'} = |\varphi_v(u)|$ donc $\|\varphi_v\|_{(\ell^p)'} = \|v\|_{p'}$. Il reste le calcul de normes dans le cas infini, qui est laissé en exercice, quoique non trivial. ■

Définissons :

Définition. ***(Isomorphisme de dualité p-p')***

On note I_p l'application $v \to \varphi_p$.

On peut maintenant conclure :

Théorème. ***(Dualité ℓ^p-$\ell^{p'}$)***

Soit $p \in [1, \infty[$ ($+\infty$ exclu). On a $(\ell^p)' \simeq \ell^{p'}$ par l'isomorphisme d'espaces de Banach de plus isométrique I_p.

$\triangleright$ Il nous suffit de montrer que I_p est surjective, et l'on conclut par ce que l'on sait déjà et le théorème d'isomorphisme de Banach. Soit donc $\varphi \in (\ell^p)'$; on cherche une suite $v \in \ell^{p'}$ telle que $\varphi_v = \varphi$. Si v existe , on a $\varphi_v(\delta^j) = v_j = \varphi(d^j)$. On définit donc v par $v_j = \varphi(\delta^j)$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit u^j en posant pour tout $n \geqslant j+1$, $u_n^j = 0$ et pour tout $n \leqslant j$, $u_n^j = \frac{1}{v_n}|v_n|^{p'}$ si $v_n \neq 0$ et 0 sinon. On a $u^j \in \ell^p$, car elle nulle à partir du rang $j+1$. De plus, par linéarité, on a : $|\varphi(u^j)| = \left|\sum_{n=0}^{j} u_n^j v_n\right| = |\varphi_{v^j}(u^j)| = \|v^j\|_{p'}^{p'}$ d'après le lemme. Heuristiquement, comme dans la preuve du lemme, on construisait u à partir de v, ici l'on construit u^j à partir de v^j en posant $v_n^j = v_n$ si $n \leqslant j$ et 0 sinon ce qui impose $v_j \in \ell^{p'}$. Puisque φ est continue, cette dernière quantité est majorée par $\|\varphi\|_{(\ell^p)'} \|u^j\|_p \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^p)'} \|v^j\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}$. Ainsi $\|v^j\|_{p'}^{p'-\frac{p'}{p}} \leqslant \|\varphi\|_{(\ell^p)'} := C$ c'est-à-dire pour tout j, $\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'} \leqslant C^{p'}$ donc $(v_n) \in \ell^{p'}$. Soit $F = \operatorname{Ker}(\varphi - \varphi_v)$. L'espace F est un sous-espace vectoriel fermé (par continuité de l'application $\varphi - \varphi_v$) qui contient les δ^j, donc son sous-espace vectoriel engendré, donc est dense. Ainsi $F = \ell^p$ et c'est terminé. ■

Remarque. Il y a une véritable dissymétrie dans le cas $p = 1$, car le dual topologique de ℓ^1 est bien ℓ^∞, mais le contraire est faux par un argument de séparabilité.

Exercice 10

Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞, et qu'il est séparable. Montrer ensuite que ℓ^1 est Banach-isomorphe à $(c_0)'$.

▷ **Éléments de réponse.**

Il est facile de voir la fermeture avec des epsilonneries et de voir que $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(\mathbb{N})}$ est dense dans $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, lui-même dense dans c_0. Pour montrer l'isomorphie, on définit une bijection linéaire isométrique $\phi : \ell^1 \to (c_0)'$ en posant $\phi(y) = f_y$ pour tout $y = (y_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^1$ où $f_y(x) = \sum_{n=}^{+\infty} x_n y_n$ pour $x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in c_0$. En effet, on peut associer à un $f \in (c_0)'$ la suite $(y_n)_{n\geqslant 0} = (f(\delta_n))_{n\geqslant 0}$ et majorer la valeur de f au point $x^{(m)} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m \\ y_k\neq 0}} \frac{|y_k|}{y_k}\delta_k$, $m \in \mathbb{N}$, en utilisant la continuité de f.

8.3.2 Espaces L^p

8.3.2.1 Construction des espaces L^p

Dans toute la suite, sauf restriction particulière qui sera alors annoncée, on note $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable tel que μ soit une mesure σ-finie quelconque. On prend également $p \in [1, +\infty[$.

Définition. ***(Espaces $\mathcal{L}^p$)***

On note $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ (muni de la tribu borélienne) telles que $\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

Définition. ***(Presque-norme sur $\mathcal{L}^p$)***

Pour $f \in (\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, on note :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ceci n'est pas une norme.

Définition. ***(Espace $\mathcal{L}^\infty$)***

On note $(\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ (muni de la tribu borélienne) telles qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que pour μ-presque tout $x \in X$, $|f(x)| \leqslant K$.

Définition. ***(Presque-norme sur $\mathcal{L}^\infty$)***

Pour $f \in (\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, on note :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf\{K \geqslant 0 \mid |f(x)| \leqslant K \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in X\}.$$

On demande au lecteur de se convaincre du fait suivant :

Propriété

Pour toute $f \in (\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ est un minimum.

▷ On a $\{|f| \leqslant K\} = \bigcap_{n\geqslant 1} \{|f| \leqslant K + \frac{1}{n}\}$. ■

Ceci n'est pas non plus une norme.

Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $\mathcal{F}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$ des fonctions nulles μ-presque partout. On note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{F}_p$ et on note $\overline{\cdot}$ la projection canonique. Si $f_1 = f_2 \in \mathcal{L}^p$ sont égales μ-presque partout, de même pour g_1,g_2, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\lambda f_1 + \mu g_1$ et $\lambda f_2 + \mu g_2$ sont égales μ-presque partout, en outre $f_1 g_1 = f_2 g_2$ μ-presque partout. De plus, $\|f_1\|_{\mathcal{L}^p} = \|f_2\|_{\mathcal{L}^p} := \left\|\overline{f_1}\right\|_{L^p}$. Alors $\| \cdot \|_{L^p}$ est une norme sur L^p. Dans toute la suite, on n'utilisera plus la notation $\overline{f}$, mais f, et nous prendrons soin de toujours notifier les moments où cela pose problème.

Avant de continuer, voici un lemme qui se révèlera utile quelquefois.

Lemme. ***(Expression duale de la norme infinie)***

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors

$$\|f\|_\infty \sup_{\|g\|_1 \leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \right|.$$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[0{,}1]$ par $x = 0$ sur $x \in [0{,}1]/2]$ et $x = 1$ sinon. Montrer que f n'est pas dans la classe d'une fonction continue au sens de l'égalité presque partout sur $[0{,}1]$.

▷ **Éléments de réponse.**

Si $f = g$ presque partout où g est continue, d'abord, on remarque que g prend la valeur 0 et la valeur 1. En effet, f prend la valeur 0 sur un ouvert non vide, donc un nombre non négligeable de fois. Puisque g est continue, par le TVI, $g^{-1}(]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[)$ est non vide, donc un ouvert non vide donc non négligeable, donc f prend des valeurs dans $]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ un nombre non négligeable de fois. Impossible.

Proposition. ***(Inégalité de Hölder)***

Soient p,p' deux exposants conjugués. Alors si $f \in L^p$ et $f \in L^{p'}$:

- $fg \in L^1$,
- $\left|\int_X fg\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |fg|\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}}$.

La dualité apporte l'intégrabilité. Quelques cas particuliers importants :

$$\text{si } f \in L^1, g \in L^\infty,\ fg \in L^1\,;\ \text{si } f,g \in L^2, fg \in L^2\ \textit{(Cauchy-Schwarz)}.$$

Attention ! La norme p n'est clairement pas multiplicative. Cependant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne : $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2$.

Proposition. ***(Extension à trois termes de l'inégalité de Hölder)***

Soient $p,q,r \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$. Alors si $f \in L^p$, $f \in L^q$ et $h \in L^r$, alors $fgh \in L^1$ et $\int_X |fgh|\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}\,\|h\|_{L^r}$.

On peut l'étendre à plus de variables.

Proposition. ***(Inégalité de Hölder généralisée dans les L^p)***

Soient $p_1,\ldots,p_n \in [1,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_n}=1$. Alors si $f_1 \in L^{p_1}$, ..., $f_n \in L^{p_r}$, alors $f_1 \ldots f_n \in L^1$ et $\int_X |f_1 \ldots f_n|\mathrm{d}\mu \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}} \ldots \|f_n\|_{L^{p_n}}$.

Exercice 12

Que dire dans le cas d'un produit infini ?

▷ **Éléments de réponse.**

Réfléchir avant de répondre.

Corollaire. ***(Comparaison des L^p en mesure finie)***

On suppose que μ est **finie** sur X. Si $p_1,p_2 \in [1,+\infty]$ et $p_1 \leqslant p_2$, alors $L^{p_2} \subseteq L^{p_1}$ et :

$$\|\cdot\|_{L^{p_1}} \leqslant (\mu(X))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}\,\|\cdot\|_{L^{p_2}}.$$

▷ Soit $f \in L^{p_2}$. Comme X est de mesure finie, $1 \in L^q$ où q est l'exposant conjugué de $\frac{p_2}{p_1}$. De plus, $|f|^{p_1} \in L^{\frac{p_2}{p_1}}$. Ainsi $1.|f|^{p_1} \in L^1$ et par l'inégalité d'Hölder, on obtient une inégalité qu'il suffit de mettre à la puissance $\frac{1}{p_1}$ pour obtenir le résultat. ■

Exercice 13

Soient $1 \leqslant p < q < +\infty$. Montrer que les inclusions $L^\infty([0,1]) \subseteq L^q([0,1]) \subseteq L^p([0,1])$ sont strictes. En déduire le résultat pour tout intervalle borné.

▷ **Éléments de réponse.**

Avec $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-q}}$, on montre que $L^\infty \subsetneq L^q$. Pour $f(x) = \frac{1}{x^{1-q}}$, on montre que $L^q \subsetneq L^p$.

Exercice 14

On considère $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrer qu'on ne peut écrire aucune inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$. En déduire un résultat pour tout intervalle non borné.
2. *(Raffinement des inclusions entre L^p en mesure σ-infinie)* Montrer $L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}) \subsetneq \bigcap_{p<r<q} L^r(\mathbb{R})$.
3. Affiner le résultat du **1.** pour $L^p \cap C^p$.

▷ **Éléments de réponse.**

En effet :

1. Il suffit de considérer les exemples précédents avec plus ou moins $\mathbb{1}_{[0,1]}$ et avec $\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$.
2. On peut écrire $r = \theta p + (1-\theta)q$ avec $\theta \in]0,1[$ et appliquer Hölder à $|f|^{\theta p}|f|^{(1-\theta)q}$.

Propriété. ***(Convexité logarithmique de la norme)***

On se donne $1 \leqslant p_0 < q_0 \leqslant +\infty$ et $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{q_0}(\mathbb{R})$. Alors l'application $r \in [p_0,q_0] \mapsto \ln(\|f\|_r^r)$.

▷ Même idée que précédemment. ■

Corollaire. ***(Inégalité de Minkowski)***

Si $p \in [1,+\infty]$, $(L^p(X,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_{L^p}$ est un evn et pour toutes $f,g \in L^p$, $\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

▷ Traiter à part le cas $p = \infty$. ■

Théorème

Si $p \in [1,+\infty]$, alors $(L^p, \|\cdot\|_{L^p}$ est un espace vectoriel normé.

▷ Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Elle est donnée par l'inégalité de Minkowski. ■

Théorème. ***(Théorème de Riesz-Fischer)***

Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $(L^p, \| \cdot \|_{L^p}$ est un Banach.

▷ Soit $(f_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ un suite de Cauchy. Il suffit de trouver une sous-suite convergente de (f_n) pour conclure. On construit par hypothèse une suite strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall p,q \geqslant n_i \quad \|f_p - f_q\|_{L^p} < \frac{1}{2^i}$. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L^p} < \frac{1}{2^i}$. On note, pour tout $x \in X$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \in [0, \infty]$. Si $p \neq \infty$,

$$\begin{aligned}
\int g^p \mathrm{d}\mu &\leqslant \int \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \int \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} (|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|)^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \lim_{N\to\infty} \int (|f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|)^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \lim_{N\to\infty} \int \sum_{i=0}^{N} |(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| \,\mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^i}
\end{aligned}$$

fini, successivement par continuité de la fonction puissance p et par théorème de convergence monotone, et parce que la dernière quantité sous le signe de somme n'est autre que $\|...\|_p$. Ainsi $g \in L^p$ donc g est finie μ-presque partout et la série de fonctions de terme général $g_0 = f_{n_0}$ et si $i \geqslant 1$, $g_i = f_{n_i} - f_{n_{i-1}}$ convergence absolument presque partout sur X. Ainsi la limite simple des f_{n_i} existe pour μ-presque tout x. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) est de Cauchy, il existe N tel que pour $q,r \geqslant N$, $\|f_q - f_r\|_p \leqslant \varepsilon$. On a donc $\int_X |(f_{n_q} - f)(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_X \lim_{r\to\infty} |(f_{n_q} - f_{n_r})(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \liminf_{r\to\infty} \int_X |(f_{n_q} - f_{n_r})(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant \varepsilon^p$ par le lemme de Fatou. Donc on a qu'il existe q tel que $f_{n_q} - f \in L^p$, et comme $f_{n_q} \in L^p$, $f \in L^p$ par combinaison linéaire.

Il reste à traiter le cas de l'exposant infini, un peu plus simple. ■

Enfin, dans le cas $p = 2$, on a mieux.

Proposition. ***(Caractère préhilbertien de L^2)***

L'espace L^2 est un Hilbert.

Exercice 15

Montrer plus précisément que L^p est préhilbertien, si et seulement si, $p = 2$.

▷ **Éléments de réponse.**

La propriété précédente traite le sens direct. Pour montrer que seul $p = 2$ convient, utiliser l'identité du parallélogramme.

Proposition. *(Théorème fondamental de l'analyse dans les L^p)*

Soit $p \in]1, \infty[$ et $f \in \mathcal{L}^p([0,1])$. Alors pour tout $a \in [0,1]$, la fonction $f\mathbb{1}_{[0,a]}$ est intégrable sur $[0,1]$, et en notant $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \in [0,1]$, il existe $\alpha \in]0,1]$ tel que $|F(x) - F(y)| \leqslant \|f\|_p |x-y|^\alpha$ pour $x,y \in [0,1]$. Plus précisément, l'intégration des fonctions L^p est $\frac{1}{p'}$-höldérienne.

▷ Il suffit d'appliquer Hölder à $f, \mathbb{1}_{[0,x[} - \mathbb{1}_{[0,y[}$. On a alors $\alpha = \frac{1}{q} < 1$. ■

8.3.2.2 Convergence dans les L^p

Proposition. *(Lemme de Scheffé)*

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, un nombre réel $p \geqslant 1$, et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^p(\mu)$ qui converge μ-presque partout vers $f \in L^p(\mu)$. Alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p(\mu)} f$ si et seulement si $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f\|_p$.

▷ Appliquer le lemme de Fatou à $\varphi_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, $n \in \mathbb{N}$. ■

8.3.2.3 Parties denses des L^p

Définition. *(Fonctions étagées)*

Une *fonction étagée* est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables.

Théorème. *(Théorème d'approximation uniforme dans L^p)*

- L'espace vectoriel des fonctions étagées est dense dans L^∞.
- Si $p < \infty$, l'espace vectoriel des fonctions étagées s telles que $\mu(s \neq 0) < \infty$ est dense dans L^p.

▷ Traitons le cas $p = \infty$ pour changer. Si $f \in L^\infty$, et $f \geqslant 0$, et $\|f\|_\infty \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{N} < \varepsilon$. Pour $0 \leqslant k \leqslant N$, on note $A_k = f_N^{-1}([\frac{k\|f\|_\infty}{N}, \frac{(k+1)\|f\|_\infty}{N}[)$ et $S = \sum_{k=0}^N \frac{k\,\|f\|_\infty}{N} \mathbb{1}_{A_k}$. Ainsi, par définition de la borne essentielle, $X \setminus A = \{x \in X, f(x) \notin [0, \|f\|_\infty]\}$ est de mesure nulle. Or (A_k) forme une partition de A et si $x \in A_k$, alors $|f(x) - s(x)| = \left|f(x) - \frac{k\|f\|_\infty}{N}\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{N} < \varepsilon$ puisque $f(x) \in [\frac{k\|f\|_\infty}{N}, \frac{(k+1)\|f\|_\infty}{N}[$. ■

On admet la régularité de la mesure de Lebesgue *(voir le cours de* Théorie de la mesure*)*. De plus, on note $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω et à support compact.

Corollaire. ***(Densité des fonctions continues à support compact dans L^p)***

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $(L^p(\Omega, \mathcal{B}, Leb), \|\cdot\|_p$ si $p \in [1, +\infty[$.

▷ Soit $\varepsilon > 0$. On approxime $f \in L^p$ par s en escalier telle que $Leb\{s \neq 0\} < \infty$. On se ramène donc à approximer la fonction caractéristique d'un borélien A de mesure finie par un élément de $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe $K \subseteq A \subseteq U$, K compact, U ouvert, en imposant $\overline{U} \subseteq \Omega$, tels que $Leb(U \setminus K) \leqslant \min(1, \varepsilon)$. Notons η la fonction de Ω dans $[0,1]$ qui à x fait correspondre $\frac{d(x,\mathbb{R}^n}{\setminus} U d(x, \mathbb{R}^n \setminus U + d(x,K$. Alors η est continue, sa restriction à K vaut 1 et sa restriction à $\mathbb{R}^n \setminus U$ vaut 0. Alors $\int |\eta - \mathbb{1}_A|^p \,\mathrm{d}Leb \leqslant Leb(U \setminus K) < \varepsilon$ puisque $|\eta - \mathbb{1}_A|^p \leqslant 1$. Si $x \in K$, $(\eta - \mathbb{1}_A)(x) = 0$; si $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$, $(\eta - \mathbb{1}_A)(x) = 0$ donc $\|\eta - \mathbb{1}_A\|_p < \varepsilon^{n/p}$. ■

Exercice 16

Montrer que ce n'est plus le cas pour l'exposant infini.

▷ **Éléments de réponse.**

Il est évident que la fonction constante égale à 1 ne peut être approchée par des fonctions tests.

On se demande au passage si la convergence dans L^p implique d'autres convergences. On retrouve le résultat suivant, bien connu des probabilistes :

Proposition. ***(Extraction d'une sous-suite convergeant p.p. d'un L^p)***

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant dans L^p vers une fonction f. Alors il existe une sous-suite de f_n convergeant μ-presque partout.
De plus, en notant φ l'extratrice donnée par le fait précédent, on peut trouver $h \in L^p$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $\left|f_{\varphi(n)}\right| \leqslant h$ presque partout.

▷ En effet, l'inégalité de Markov pour une mesure quelconque donne la convergence en mesure. Ensuite, le premier lemme de Borel-Cantelli nous donne d'une suite convergeant en mesure la convergence presque partout le long d'une sous-suite. ■

Dans la même veine, il est intéressant de remarquer que la limite est la même.

Proposition. ***(Identité des limites L^p et presque partout)***

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ convergeant dans L^p vers une fonction f et convergeant μ-presque partout vers une fonction g. Alors $f = g$ μ-presque partout et donc $g \in L^p$.

Exercice 17

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X,\mathcal{A},\mu)\cap L^q(X,\mathcal{A},\mu)$ pour $p,q\in[1,+\infty[$ et $p\neq q$. Montrer que si f_n tend vers 0 dans L^p et est de Cauchy dans L^q, alors f_n tend vers 0 dans L^q.

▷ **Éléments de réponse.**

À faire.

8.3.2.4 Étude de la séparabilité des L^p et continuité des translations

Corollaire. ***(Séparabilité des $L^p(\Omega)$)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Alors $L^p(\Omega)$ est séparable, si et seulement si, $p\in[1,+\infty[$.

De même que pour les espaces de suite, on procède point par point.

Proposition. ***(Non-séparabilité de L^∞))***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Alors $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

▷ On cherche un ensemble non dénombrable d'ouverts non vides et deux à deux disjoints. On peut s'intéresser à un ensemble Δ indénombrable tel qu'il existe $\delta>0$, tel que pour tous $x,y\in\Delta$, $x\neq y \implies d(x,y)>\delta$. Dans ce cas, on considérera $\mathcal{U}=\{B(x,\frac{\delta}{2},x\in\Delta\}$. Soit donc :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{r}: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & r(x) \text{ tel que } B_x := B(x,r(x))\subseteq\Omega. \end{array}$$

Alors $\mathbb{1}_{B_x}\in L^\infty(\Omega)$ pour chaque $x\in\Omega$. On ne peut pas choisir les $\mathbb{1}_{\{x\}}$, car ces fonctions seraient égales presque partout et l'on ne définirait qu'un seul élément de L^∞. Si $x\neq y$, on se convainc aisément que $B_x\Delta B_y=(B_x\setminus B_y)\cup(B_y\setminus B_x)$ est un ensemble non vide de mesure de Lebesgue strictement positive. Ainsi,

$$|\mathbb{1}_{B_x}-\mathbb{1}_{B_y}|=\mathbb{1}_{B_x\Delta B_y} \text{ et } \{\mathbb{1}_{B_x\Delta B_y}\neq 0\}=B_x\Delta B_y$$

est de mesure de Lebesgue non nulle. De plus, $\|\mathbb{1}_{B_x}-\mathbb{1}_{B_y}\|_\infty=1$. Donc L^∞ n'est pas séparable. ■

Proposition. ***(Séparabilité des L^p))***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Alors $L^p(\Omega)$ est séparable si $p\in[1,+\infty[$.

▷ La dernière fois, on a vu que si $p<\infty$, $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $(L^p,\|\cdot\|_{L^p})$. On va utiliser $\mathcal{E}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}[i]}\{\mathbb{1}_{]a_1,b_1[\times\ldots\times]a_n,b_n[},a_i,b_i\in\mathbb{Q}\}$ qui s'injecte dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}[i]}(\mathbb{Q}^{2n})$ dénombrable.

On note $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_k$, réunion croissante où $\Omega_k=\Omega\cap B(0,k)$. On peut donc écrire $\mathcal{C}_c(\Omega)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{f\in\mathcal{C}_c(\Omega),\mathrm{supp}(f)\subseteq\Omega_k\}$, réunion dénombrable. Il suffit donc de montrer le résultat pour Ω borné. Supposons donc $A\subseteq[-A,A]^n$, pour $A\in\mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon>0$. Une fonction $f\in\mathcal{C}_c(\Omega)$ se prolonge en

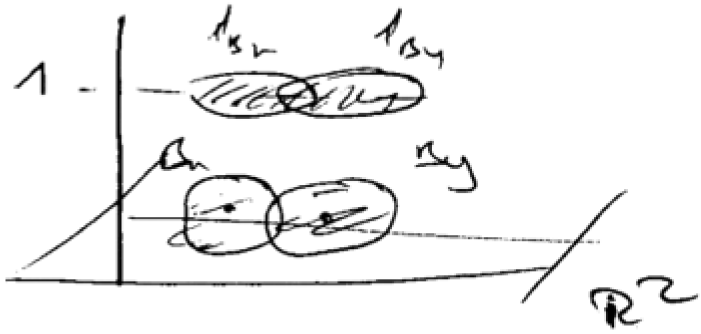

FIGURE 8.3.1 : *Non-séparabilité de L^∞. —*

$\tilde{f} \in \mathcal{C}_c([-A,A]^n)$ nulle en dehors de Ω. Par Heine, la fonction $\tilde{f}$ est uniformément continue sur le compact $[-A,A]^n$ donc il existe δ tel que pour tous $x,y \in [-A,A]^n$, $\|x-y\|_\infty < \delta \implies \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| < \varepsilon$. On choisit N un entier tel que $\frac{A}{N} < \delta$. On définit, pour $k \in [\![-N,N-1]\!]$, $a_k = \frac{kA}{N} \in \mathbb{Q}$. On peut donc découper le cube en petits cubes. On écrit :

$$[-A,A]^n = \bigcup_{k \in [\![-N,N-1]\!]^n} \prod_{i=1}^{n} [a_{k_i}, a_{k_{i+1}}]$$

où $[a_{k_i}, a_{k_{i+1}}] = [a_{k_i}, a_{k_i} + \frac{A}{N}]$ et pour $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $C_k = \prod_{i=1}^{n} [a_{k_i}, a_{k_{i+1}}]$. Si $k \in [\![-N, N-1]\!]^n$ est fixé, pour tous $x,y \in C_k$, $\|x-y\|_\infty \leqslant \frac{A}{N} < \delta$, donc $\left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\right| < \varepsilon$. On choisit $q_k \in \mathbb{Q}[i]$ tel que $|q_k - f(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})| < \varepsilon$ (pour que le point soit rationnel, cette étape est indispensable et empêche de prendre le point de la fonction, ce qui serait attendu). On note $g = \sum_{k \in [\![-N,N-1]\!]^n} q_k \mathbb{1}_{C_k^\circ}$. Alors $\|f-g\|_p^p = \int_{[} -A,A]^n |f-g|^p \mathrm{d}Leb < 2\varepsilon(2A)^n$ par majoration de $f-g$ presque partout. Quand $\frac{A}{N}$ est assez petit, on peut construire g à support dans Ω. ■

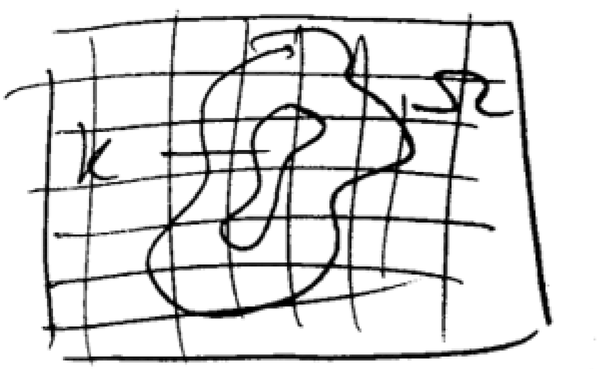

FIGURE 8.3.2 : *Séparabilité des L^p. —*

Corollaire. *(Continuité des translations)*

Soit $p \in [1,+\infty[$, on définit $\tau_h : f \longrightarrow f(\,\cdot\, + h)$ l'endomorphisme de translation par $h \in \mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $\|\tau_h f - f\|_p$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

▷ On suppose $f \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Soit K le support de f et $K_1 = \{x, d_\infty(x,K) \leqslant 1\} \subseteq R^d$. Soit f uniformément continue sur le compact K_1. Soit $\varepsilon > 0$ constante d'uniforme continuité $\delta \in]0,1[$ sur K_1. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|h\|_\infty < \delta$. Puisque $\tau_h f - f$ est à support dans K_1, $\|\tau_h f - f\|_p^p = \int_{K_1} |\tau_h f - f|^p \,\mathrm{d}Leb = \int_{K_1} |f(x+h) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x < Leb(K_1)\varepsilon^p$. Ainsi $\lim_{h \to O_{\mathbb{R}^d}} \tau_h f = f$ pour $\|\cdot\|_p$. ■

Exercice 18

Montrer qu'il n'y a pas continuité des translations dans L^∞.

▷ **Éléments de réponse.**

On considère $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Alors pour tout $h > 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}}(\mathbb{1}_{[0,1]}(x+h) - \mathbb{1}_{[0,1]}(x)) = 1$. En passant à la limite, $\|\tau_h f - f\|_{L^\infty}$ tend vers 1 quand $h \to 0$. En particulier, il ne tend pas vers zéro.

8.3.2.5 Dualité

On a vu que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est séparable mais que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ non. Or $I : L^1 \longrightarrow L^{\infty\prime}$ est une isométrie sur son image. Comme L^∞ n'est pas séparable, par Hahn-Banach, son dual non plus, forcément I n'est donc pas surjective.

Déjà, L^1 n'est pas en général le dual d'un espace normé. C'est par exemple le cas de $L^[0,1]$. Pour le justifier, l'argument classique consiste à montrer que sa boule unité n'admet pas de points extrémaux.

Dans le cas où μ est gentille, typiquement, μ étant σ-finie, on montre tout d'abord que $L^\infty(\mu)'$ s'identifie à l'espace des mesures complexes finiment additives et absolument continues par rapport à μ. Dès lors $L^1(\mu)$ s'identifie au sous-ensemble des mesures complexes σ-additives et absolument continues par rapport à μ.

8.4 Convolution

8.4.1 Définition de la convolée

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $f,g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables. On veut définir :

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Lemme

Soit E l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable, est mesurable. Sur cet ensemble, $y \longmapsto f(y)g(x-y)$ est aussi intégrable et pour tout $x \in E$, $f \star g(x) = g \star f(x)$.

▷ D'après les opérations usuelles, la fonction $(x,y) \longrightarrow f(x-y)g(y)$ est mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. ■

8.4.2 Cadre $L^p \star L^q$

Théorème. *(Cadre $L^1 \star L^1$)*

Si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{R}$, alors $f \star g$ est défini *Leb*-presque partout et $f \star g \in L^1$ et $\|f \star g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exercice 19

Montrer qu'il n'existe aucun $\delta \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\delta \star f = f$ presque partout pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.

▷ **Éléments de réponse.**

Pour $f_n : x \mapsto e^{-nx^2}$, on a $\delta \star f_n(x) = e^{-nx^2}$ presque partout. Pour passer au partout, on utilise la continuité de f_n et l'uniforme continuité de $\delta \star f_n$, et donc sa continuité. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient une absurdité.

Théorème. *(Norme de l'opérateur de convolution)*

Pour $p \in [1, \infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, on pose $T_f(h) = f \star h$ pour $f \in L^1$. Alors $\|T_f\| = \|f\|_p$.

Exercice 20

(Théorème fondamental de l'analyse L^1) Soit $h > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors $G_h : x \mapsto \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ converge vers f dans L^1 quand $h \to 0^+$.

▷ **Éléments de réponse.**

On exprime $F_h : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$ sous la forme $f \star \varphi_h$ pour un certain $\varphi_h \in L^\infty$.

8.5 Espaces de Hilbert

La théorie des espaces de Hilbert s'uniformise autour de la notion de produit scalaire quelconque (*i.e.* produit hermitien, qui généralise à la fois les produits hermitiens et les produits scalaires réels). On ne distinguera pas comme on le faisait pour les espaces préhilbertiens réels et complexes.

8.5.1 Définition et premières propriétés

8.5.1.1 Produit scalaire

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On remarque que les espaces préhilbertiens sont réels ou complexes, mais pas plus.

Définition. ***(Produit scalaire (quelconque))***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\cdot \mid \cdot) = \varphi$ une application de $E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que c'est un *produit scalaire* si :

(i) *(Sesquilinéarité)* pour tout $y \in E$, $x \longrightarrow (x|y)$ est $\mathbb{K}$-linéaire ;
(ii) *(Pseudo-symétrie)* pour tous $x,y \in E$, $(y|x) = \overline{(x|y)}$;
(iii) *(Positivité)* pour tout $x \in E$, $(x|x) \geqslant 0$;
(iv) *(Séparation/définition/définie-positivité)* pour tout $x \in E$, $(x|x) = 0 \implies x = 0_E$.

Remarques.

1. La *sesquilinéarité* signifie que la forme φ est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième : pour tous $x,y,z \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda x + y,z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$ et $\varphi(z, \lambda x + y) = \overline{\lambda}\varphi(z,x) + \varphi(z,y)$. Le terme signifie que la forme est « $\frac{3}{2}$-linéaire ».
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela revient à dire que la forme est *bilinéaire*, mais ce n'est plus le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On aura toutefois des résultats de continuité semblables, voir dans la suite.
2. On remarque que si la forme φ est sesquilinéaire hermitienne, alors pour tout x, $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$, ce qui justifie l'écriture du point *(iii)*.
3. On a toujours $x = 0 \implies (x,x) = 0$, pas besoin de le vérifier.

Définition. ***(Pseudo-produit scalaire)***

On appelle pseudo-produit scalaire un produit scalaire pour lequel le point *(iv)* n'est éventuellement pas vérifié.

Propriété. ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Si $(\cdot \mid \cdot)$ est un **pseudo-produit scalaire**, alors

$$\forall x,y \in E \quad |(x|y)| \leqslant \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}.$$

▷ La preuve, très classique, ne dépend pas de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. ■

Propriété. ***(Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwartz)***

Si $(\,\cdot\mid\cdot\,)$ est un produit scalaire cette-fois, alors le cas d'égalité dans l'inégalité ci-haut a lieu si et seulement si $\{x,y\}$ est liée sur $\mathbb{K}$.

À ne pas confondre avec le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans le cas d'une norme issue d'un produit scalaire réel, dont on rappelle qu'il a lieu si et seulement si $\{x,y\}$ est liée sur $\mathbb{R}_+$!

Définition. ***(Espace préhilbertien)***

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(\,\cdot\mid\cdot\,)$ un produit scalaire sur E. On dit que $(E,(\,\cdot\mid\cdot\,))$ est *préhilbertien (réel ou complexe)*.

Corollaire. ***(Structure topologique préhilbertienne)***

Si $(E,(\,\cdot\mid\cdot\,))$ est un $\mathbb{K}$-espace préhilbertien, alors E est muni de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé grâce à la norme $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ sur E.

▷ L'inégalité triangulaire, seul axiome à vérification non triviale, est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. ■

On remarque que ça ne marche pas pour un produit pseudo-scalaire : on n'a plus la positivité définie.

Définition. ***(Espace de Hilbert)***

Un espace préhilbertien est un espace *de Hilbert* si la norme issue de son produit scalaire en fait un espace complet. Autrement dit, les espaces de Hilbert sont les espaces de Banach préhilbertiens pour la norme issue du produit scalaire.

Exemples

1. Les espaces euclidiens, mais également $\mathbb{C}^d$ sur $\mathbb{C}$.
2. L^2 est un espace de Hilbert (mais pas $\mathcal{L}^2$!)
3. Le sous-espace des fonctions continues dans L^2 n'est pas de Hilbert, car il n'est pas fermé dedans. En effet, il est dense...

Définition. ***(Sous-espace de Hilbert)***

On appelle *sous-espace de Hilbert* d'un espace de Hilbert, tout sous-espace vectoriel de cet espace qui, muni de la norme issue du produit scalaire induit, est un espace de Hilbert.

Propriété. ***(Sous-espace de Hilbert)***

Les sous-espaces d'un Hilbert sont ses sous-espaces vectoriels normés fermés.

8.5.2 Orthogonalité

Dans cette sous-section, on se fixe un espace de Hilbert avec les notations précédentes. On note parfois le produit scalaire $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

Définition. ***(Vecteurs orthogonaux)***

Soient $x,y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux, ou que x est orthogonal à y, ou le contraire, si $(x,y) = 0$.

Définition. ***(Orthogonal d'une partie)***

Soit $A \subseteq A$. Alors l'*orthogonal* de A est par définition :

$$A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A \quad (a,x) = 0\}.$$

Propriété. ***(Orthogonal d'une partie)***

Si A est une partie de E, alors $A^{\perp} = (\overline{\mathrm{Vect}(A)})^{\perp}$.

Propriété. ***(Structure de l'orthogonal)***

Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. C'est donc un sous-espace de Hilbert de E.

Théorème. ***(Théorème de Pythagore)***

Soient $x,y \in H$. On suppose $x \perp y$. Alors :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Théorème. ***(Théorème de Pythagore généralisé)***

Soient $x_1,\ldots,x_n \in H$. On suppose les x_i sont deux à deux orthogonaux. Alors :

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2.$$

Remarque. Si tu te demandes si l'hypothèse est *deux à deux orthogonaux* ou *orthogonaux dans leur ensemble*, va te coucher et reviens demain.

8.5.3 Projection orthogonale sur un convexe fermé

Théorème. *(Projection sur un convexe fermé)*

Soit $(H,(\cdot,\cdot))$ un Hilbert, A un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$,

(i) il existe un unique $y \in A$, appelé *projeté de x sur A*, noté $p_A(x)$, tel que $\|p_A(x) - x\| = d(x,A)$;

(ii) cet y est caractérisé par $y \in A$ et pour tout $z \in A$, $\mathfrak{Re}(z - x, z - y) \leqslant 0$.

$\triangleright$ On rappelle que par définition $d(x,A) = \inf\{\|x - z\|, z \in A\}$. Soit A un convexe fermé non vide et $x \in H$. Par définition de $d(x,A)$, il existe $(z_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - z_n\| = d(x,A)$. Montrons que (z_n) est de Cauchy. On utilise l'égalité du parallélogramme.

$$2\|z_q - x\|^2 + 2\|z_p - x\|^2 = \|z_q - z_p\|^2 + \|z_q + z_p - 2x\|^2,$$

donc

$$\|z_p - z_q\|^2 = 2\|z_p - x\|^2 + 2\|z_p - x\|^2 - 4\left\|x - \frac{z_p + z_q}{2}\right\|^2.$$

Or $\frac{z_p+z_q}{2} \in A$, car A est convexe et $z_p, z_q \in A$. Ainsi,

$$\|z_p - z_q\|^2 \leqslant 2\|z_p - x\|^2 + 2\|z_p - x\|^2 - 4d(x,A)^2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_n - x\| = d(x,A)$, on en déduit l'existence d'un rang N tel que pour tout $\frac{q}{p} \geqslant N$, $\|z_p - z_q\| < \varepsilon$. Étant de Cauchy, (z_n) converge dans le complet H, et sa limite est dans A, car A est fermé. Par continuité de la norme, $\|y - x\| = d(x,A)$. Il y a l'unicité, car si $y, y' \in A$ vérifient $\|y - x\| = \|x - y'\| = d(x,A)$, la suite $(z_n) = (y,y',y,y',\ldots)$ satisfait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - z_n\| = d(x,A)$ donc on a vu que (z_n) converge. Ainsi, elle est stationnaire dans $y = y'$.

Montrons maintenant la caractérisation du projeté. On suppose que $y \in A$. Alors $y = p_A(x)$ si et seulement si pour tout $z \in A$, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\|(1-t)y + tz - x\|^2 = \|y - x + t(z-y)\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$. Cette condition a lieu si et seulement si pour tout $z \in A$, pour tout $t \in [0,1]$, $\|y - x\|^2 + t^2\|z - y\|^2 + 2t\mathfrak{Re}(y - x|z - y) \geqslant \|y - x\|^2$ soit $f_z(t) = t^2\|z - y\|^2 + 2t\mathfrak{Re}(y - x|z - y) \geqslant 0$. Si c'est vrai, alors si $\mathfrak{Re}(y - x, z - y) \neq 0$, $f_z(t) \sim_0 2t\mathfrak{Re}(y - x, z - y) \geqslant 0$ si $t \in [0,\varepsilon[$ d'où $\mathfrak{Re}(y - x, y - z) \leqslant 0$. Réciproquement, si l'on a cette comparaison, alors on a la condition établie par somme de deux termes positifs. Ceci conclut. ■

Théorème. *(Projection sur un sous-espace vectoriel fermé)*

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Si $x \in H$, alors $y = p_F(x) \iff y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Théorème. *(Décomposition en sous-espaces fermés d'un Hilbert)*

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$.

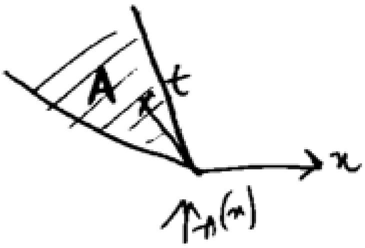

FIGURE 8.5.1 : *Situation de base du théorème.* —

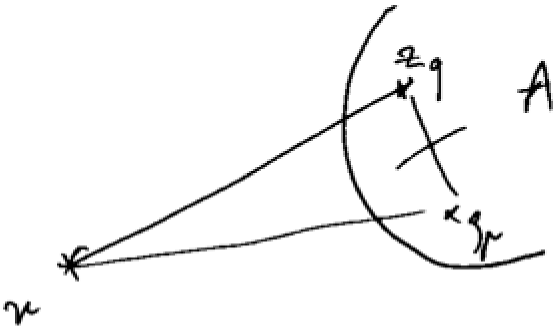

FIGURE 8.5.2 : *Preuve de l'existence.* —

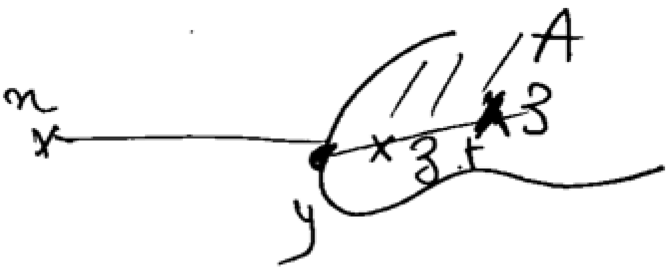

FIGURE 8.5.3 : *Preuve de l'unicité.* —

De plus p_F est la projection orthogonale usuelle par caractérisation (regarder son cours d'algèbre bilinéaire !).

Propriété. ***(Involution de l'orthogonal)***

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Corollaire. *(Sous-espaces denses de Hilbert)*

Soit G un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H, alors G est dense dans H si et seulement si son orthogonal est nul.

8.5.4 Dualité dans les espaces de Hilbert

Propriété. *(Continuité du produit scalaire)*

Tout produit scalaire est continu pour la norme associée.

▷ Attention, la forme n'est que sesquilinéaire. ■

Théorème. *(Théorème de Riesz-Fréchet)*

Soit H un espace de Hilbert muni de son produit scalaire pour les notations habituelles. Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe $x \in H$ tel que :

$$\forall y \in H \quad \varphi(y) = (y|x).$$

Réciproquement, pour tout $x \in H$, $\varphi_x(y) = (y,x)$ définit bien une forme continue $\varphi_x \in H'$.

▷ La réciproque vient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Pour le sens direct, on a besoin du lemme suivant. ■

Lemme. *(Continuité des formes linéaires)*

Dans un espace vectoriel normé, une forme linéaire est continue si et seulement son noyau est fermé.

▷ On propose une preuve alternative. Si le noyau de φ est fermé, et qu'elle est non nulle, il existe x tel que $\varphi(x) = 1$. L'hyperplan affine $\varphi^{-1}(1)$, translation du noyau, fermé, non vide et ne contient pas 0_E. Donc $\varepsilon = d(0, \mathcal{H}) > 0$. Montrons que φ est bornée sur $B(0,\varepsilon)$. Supposons que pour un $y \in B(0,\varepsilon)$, on ait $|\varphi(y)| \geqslant 1$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\varphi(\lambda y)\lambda\varphi(y) \geqslant 1$. (On a $\lambda y \in B(0,\varepsilon)$ car $\|\lambda y\| = \|y\|$. Il existe $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t(\lambda y)) = t\varphi(\lambda y)) = 1$. Or, $t\lambda y \in B(0,\varepsilon)$ et $\varphi(t\lambda y) = 1$ contredit la définition de ε. ■

On revient à la preuve du grand théorème.

▷ On suppose que φ est une forme linéaire continue non nulle. Son noyau est donc fermé. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$ soit de dimension 1, car c'est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ d'après les considérations précédentes. Ainsi, on peut écrire $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{K}x$ où $x \in H \setminus \{0_E\}$. On note alors $y = \lambda x$ où $\lambda\varphi(x) = (\lambda x, \lambda x)$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{\overline{\varphi(x)}}{(x,x)}$. La forme linéaire φ_y a pour noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{y\}^\perp$ et vaut $\varphi_y(y)$ en y. Donc $\varphi = \varphi_y$. ■

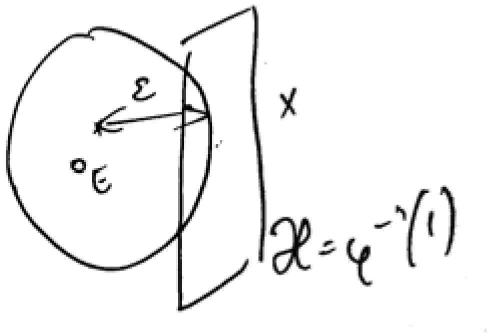

FIGURE 8.5.4 : *Illustration de la preuve alternative.* —

8.5.5 Notion de convergence faible dans les Hilbert *(suite dans le dual topologique)*

Définition. *(Convergence faible)*

Soit $(H, (|))$ un espace de Hilbert et $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$, $x \in H$. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n \to \infty} (y|x_n) = (y|x).$$

Proposition. *(Converge en norme implique convergence faible)*

Si x_n tend vers x, alors x_n tend faiblement vers x.

Contre-exemple. *(Où l'on a convergence faible et pas convergence forte)*

Dans ℓ^2, on pose $\delta_n = (0,...,0,1,0,...0)$. On prend le produit scalaire hermitien. La suite (δ_n) converge faiblement vers 0, mais c'est tout. □

La notion de convergence faible permet de définir une topologie faible dans H **(qui est son propre dual).**

Proposition. *(Séparation de la topologie faible)*

Si x_n tend faiblement vers x et y, alors $x = y$. Autrement dit, il y a unicité de la limite faible.

▷ En effet, pour deux limites x,x', on a $(x,y) = (x',y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi $x - x'$ est orthogonal à E, donc $x - x' = 0$. ■

Proposition. ***(Théorème de Bolzano-Weierstrass faible dans les Hilbert)***

De toute suite bornée pour $\|\cdot\|_H$, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Même en dimension infinie ! (Surtout en dimension infinie !)

8.5.6 Bases hilbertiennes

On commence par énoncer un théorème qui nous servira surtout de lemme dans la suite de la section.

Théorème. ***(Convergence des séries orthogonales dans les Hilbert)***

Soit H un Hilbert et (u_n) une suite de vecteurs de H deux à deux orthogonaux. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si la suite $\|u_n\|^2$ converge et dans ce cas :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 .$$

De plus, la série de terme général u_n est commutativement convergente dans H.

$\triangleright$ La série de terme général u_n converge si et seulement si les sommes partielles sont de Cauchy, car un Hilbert et complet. ■

Théorème. ***(Décomposition selon une famille orthonormale totale d'un sous-espace fermé)***

Soit H un Hilbert et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée de H. Alors pour tout $x \in H$, la série de terme général $(x|e_k)e_k$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x|e_k)e_k = p_F(x) \text{ où } F = \overline{\mathrm{Vect}(e_k, k\in\mathbb{N})} \text{ et } \|p_F(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|(x|e_k)|^2 .$$

$\triangleright$ Soit $x \in H$. Il suffit de montrer que la série de terme général $(x|e_k)$ converge. Si $F_n = \mathrm{Vect}(e_k, k \in [\![0,1]\!])$, $\sum_{k=0}^{n}(x,e_k)e_k = p_{F_n}(x)$ et $\sum_{n=0}^{\infty}|(x,e_k)|^2 = \|p_{F_n}(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$. La série de terme général $(x,e_k)^2$ converge, donc aussi celle de terme général $(x,e_k)e_k$, et $\sum_{k=0}^{\infty}(x,e_k)e_k \in F$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par continuité et bilinéarité du produit scalaire :

$$(x - \sum_{k=0}^{\infty}(x,e_k)e_k|e_n) = (x|e_n) - (x|e_n)(e_n|e_n) = 0.$$

Cela implique que $x - \sum_{k=0}^{\infty}(x,e_k)e_k \in F$. Ainsi par caractérisation $\sum_{k=0}^{\infty}(x,e_k)e_k = p_F(x)$. L'égalité sur la norme découle du théorème précédent. ■

Corollaire. ***(Inégalité de Bessel)***

Soit (e_n) une suite orthonormée de H et $x \in H$. Alors $\sum_{k=0}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$.

Définition. ***(Base hilbertienne)***

Une *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert H est une famille orthonormale de H notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = H$ (on dit parfois qu'elle est *totale*).

On se demande dès maintenant si la notion de base hilbertienne et de base algébrique, c'est-à-dire, au sens de la théorie des espaces vectoriels, peuvent coïncider. Dans le cas des Hilbert, c'est archi faux.

Proposition. ***(Algébricité des bases hilbertiennes)***

Soit H un espace de Hilbert et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors e n'est pas une base algébrique de H.

▷ Remarquons au passage que lorsque H est de dimension finie, il n'y a pas de famille orthonormale infinie, car une telle famille est nécessairement libre. Si e est une base algébrique de H, alors H est de dimension infinie dénombrable. Il n'est donc pas complet par le théorème de Baire. Ceci contredit le caractère hilbertien de la définition de H. ■

Proposition. ***(Existence de bases de Hilbert)***

Soit H un espace de Hilbert séparable. Alors il admet une base hilbertienne.

▷ La première idée serait de voir que d'une partie dense dénombrable, on peut nécessairement extraire une partie libre qui reste dense. Ensuite, on se sert d'une orthonormalisation de Gram-Schmidt. ■

Théorème. ***(Parseval)***

Soit H un Hilbert, $(e_n)_n$ une base Hilbertienne. Alors pour tout $x \in H$, $x = \sum_{k=0}^{\infty}(x, e_k)e_k$ et on a l'*égalité de Parseval* $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(x,e_k)^2$.

8.6 Formes linéaires

8.6.1 Généralités

Propriété. ***(Base duale)***

Soit E un espace vectoriel et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique base de E^*, notée $e_1^*,\dots,e_n^*$, telle que pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$.

$\triangleright$ Une analyse-synthèse est la méthode la plus puissante mais philosophiquement, il suffit de remarquer ce que sont les projections en coordonnées selon les e_i. ■

Cette notation est trompeuse, car elle laisse penser que e_i^* est déterminée par e_i. C'est faux : chaque vecteur de la base duale dépend de tous les vecteurs de la base de base.

Propriété. ***(Duaux en dimension finie)***

Soit E de dimension finie. Alors E' est de même dimension finie. De plus, $E^* = E'$.

$\triangleright$ Résultat précédent et toute forme linéaire est continue en dimension finie. ■

Remarque. En dimension finie, le dual algébrique est de dimension strictement supérieure à celle de l'espace (grand théorème).

8.6.2 Formes linéaires continues

On considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé quelconque, E' son dual topologique. Le théorème de Riesz justifie la notation suivante :

$\longrightarrow$ **Notation.** Si $\varphi \in E'$ et $x \in E$, $\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)$.

On rappelle le fait suivant :

Propriété. ***(Continuité des formes linéaires)***

Si $\varphi \in E^*$, alors $\varphi \in E' \iff \mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Propriété. ***(Hyperplan séparateur d'une forme continue)***

Soit E un espace vectorie normé et φ une forme affine continue. Alors le noyau H de φ :

1. est un hyperplan fermé de E,
2. sépare E en deux *demi-espaces* ouverts $U_1 \perp\!\!\!\perp U_2$,
3. U_1,U_2 sont les composantes connexes de $E \setminus H$.

Corollaire. *(Théorème de Krein-Milman)*

La boule unité du dual d'un espace normé admet un point extrémal.

8.6.2.1 Identification de duaux topologiques

Propriété. *(Sous-duaux d'un dual, première version)*

Soit E un espace normé et F_0 un sous-espace du dual E' de E. Si F_0 est fermé, on peut retrouver un sous-espace F de E tel que $F' = F_0$.

▷ En effet, en notant $B^\perp = \{u \in E, \forall \phi \in B, \phi(u) = 0\}$, on a $B \simeq (E/B^\perp)'$. ■

Propriété. *(Sous-duaux d'un dual, seconde version)*

Soit E un espace normé et F_0 un sous-espace du dual E' de E. Si F_0 admet un supplémentaire topologique, on peut retrouver un sous-espace F de E tel que $F' = F_0$.

▷ Même idée. Soit W ce supplémentaire et posons $F = W^\perp$ avec les mêmes notations. Alors l'application de restriction $E' \to F', \xi \to \xi_{|F}$ a pour noyau W et induit donc un isomorphisme linéaire $F_0 \simeq F'$. ■

8.6.3 Théorèmes de Hahn-Banach

Il n'est pas spécialement question de dimension finie dans cette section. Chaque fois que nous mentionnons une topologie sur le dual d'un espace normé, elle est issue de la norme subordonnée à la norme considérée sur l'espace en question et à la valeur absolue sur le corps de base.

On énonce le théorème fondamental de cette section :

Théorème. *(Hahn-Banach, forme réelle analytique)*

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *semi-sous-linéaire*, c'est-à-dire telle que :

1. $\forall \lambda > 0 \ \forall x \in E \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2. $\forall x,y \in E \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Soit D un sous-espace vectoriel de E et $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire telle que pour tout $x \in D$, $\varphi(x) \leqslant p(x)$.
Alors il existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire prolongeant φ (*i.e.* telle que $\tilde{\varphi}_{|D} = \varphi$) et $\forall x \in E \quad \varphi(x) \leqslant p(x)$.

▷ Soit φ comme dans l'énoncé. Soit $X = \{(\varphi', D') \mid D \subseteq D'$ sev de $E, \varphi' \in L(D',E), \varphi' \leqslant p, \varphi'_{|D} = \varphi\}$ l'ensemble des prolongements de φ plus petits que p muni de $\leqslant$ donnée par $(\varphi_1, D_1) \leqslant$

(φ_2, D_2) si $D_1 \subseteq D_2$ et $\varphi_{2|D_1} = \varphi_1$. On vérifie que c'est bien une relation d'ordre. Montrons que X est inductif. Il est non vide. Si $Y \subseteq X$ est totalement ordonnée, on note $D_0 = \bigcup_{(\varphi', D') \in Y} D'$: c'est un sous-espace vectoriel de E par chaîne de sous-espaces vectoriels. On définit ensuite $\varphi_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ par la construction suivante : si $x \in D_0$, il existe $(\varphi', D') \in Y$ tel que $x \in D'$. On définit alors $\varphi_0(x) = \varphi'(x)$. Ceci est bien indépendant du couple (φ', D'), car si $x \in D''$ où $(\varphi'', D'') \in Y$, comme Y est totalement ordonnée, sans perte de généralité, $(\varphi', D') \leqslant \varphi'', D'')$ donc φ'' prolonge φ' et $\varphi'(x) = \varphi''(x)$. L'application φ_0 est bien linéaire, et (φ_0, D_0) prolonge tous les éléments de Y, donc est un majorant de Y. Par conséquent, par le lemme de Zorn, on peut trouver un prolongement maximal $\tilde{\varphi} : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il suffit maintenant de montrer que $\tilde{D} = E$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait prolonger grâce à $x \in E \setminus \tilde{D}$, de sorte qu'il existe $D_0 = \tilde{D} \oplus \mathbb{R}x$. On cherche $\varphi_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi_0 \leqslant p$. On la définit pour $y \in \tilde{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par $y + \lambda x \longmapsto \tilde{\varphi}(y) + \lambda\alpha$. On cherche α, et ainsi, on aura un élément strictement plus grand que $(\tilde{D}, \tilde{\varphi})$ dans X, contradiction. La relation $\varphi_0 \leqslant p$ s'écrit : $\forall y \in \tilde{D}\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi_0(y + \lambda x) \tilde{\varphi}(y) + \lambda\alpha \leqslant p(y + \lambda x)$. Or $\tilde{\varphi}$ est linéaire et si $\lambda > 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, donc si $\lambda > 0$, $\tilde{\varphi}(\lambda y) + \lambda\alpha \leqslant p(\lambda y + \lambda x)$ équivaut à $\tilde{\varphi}(y) + \alpha \leqslant p(y + x)$. Si $\lambda > 0$, $\tilde{\varphi}(\lambda y) - \lambda\alpha \leqslant p(\lambda y - \lambda x)$ équivaut à $\tilde{\varphi(y)} - \alpha \leqslant p(y - x)$. Donc la condition cherchée équivaut à $\forall y \in \tilde{D} \quad \tilde{\varphi}(y) - p(y - x) \leqslant \alpha \leqslant p(y + x) - \tilde{\varphi}(y)$. Un tel α existe si et seulement si $\tilde{\varphi}(y) - p(y - x) \leqslant p(z + x) - \tilde{\varphi}(z)$ pour tous $y,z \in \tilde{D}$. Or $\tilde{\varphi}(y) + \tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(y - x) + \tilde{\varphi}(x + z) \leqslant p(y - x) + p(x + z)$; c'est l'hypothèse du théorème. Il suffit pour conclure de prendre pour α l'infimum de la quantité à droite, le supremum de la quantité à gauche (ou n'importe quoi entre les deux), l'inégalité à satisfaire étant large. ■

Remarque. Souvent, il y a plusieurs prolongements (notamment parce que le sous-espace considéré n'est pas dense).

Définition. ***(Semi-norme sous-linéaire)***

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
2. $\forall x,y \in E \quad p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

Théorème. ***(Hahn-Banach, forme complexe (ou réelle) analytique)***

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Soit D un sous-espace vectoriel de E et $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que pour tout $x \in D$, $|\varphi(x)| \leqslant p(x)$. Alors il existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire qui prolonge φ et telle que $|\tilde{\varphi}| \leqslant p$.

▷ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut applique le premier théorème qui fournir $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire prolongeant φ et telle que $\tilde{\varphi} \leqslant p$. Alors, si $x \in E$, $|\tilde{\varphi}(x)| = \varepsilon\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(\varepsilon x)$ pour un $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Donc $|\tilde{\varphi}(x)| = \tilde{\varphi}(\varepsilon x) \leqslant p(\varepsilon x) = p(x)$ d'où le théorème. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on aura besoin du lemme suivant : ■

Lemme. *(Passer d'une forme $\mathbb{C}$-linéaire à une forme $\mathbb{R}$-linéaire)*

L'application $\begin{array}{rccl}\phi : & \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R}) \\ & \varphi & \longmapsto & \mathfrak{Re}(\varphi)\end{array}$ est un isomorphisme sur le corps de base $\mathbb{R}$.

▷ Si $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$, $\mathfrak{Re}(\varphi) = \mathfrak{Re} \circ \varphi$ composée de deux fonctions $\mathbb{R}$-linéaires, donc $\mathfrak{Re}(\varphi) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})$. De plus, ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire, car $\mathfrak{Re}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Soit maintenant $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})$. On cherche un antécédent de ψ par ϕ, c'est-à-dire on veut résoudre l'équation $(\star)$: $\mathfrak{Re}(\varphi) = \psi$. Soit φ une solution de cette équation. Soit $x \in E$, $\varphi(ix) = \mathfrak{Re}(ix) + i\mathfrak{Im}(ix) = \psi(ix) + i\mathfrak{Im}(\varphi(ix)) = i\varphi(x) = -\mathfrak{Im}(\varphi(x)) + i\mathfrak{Re}(\varphi(x)) = -\mathfrak{Im}(\varphi(x)) + i\psi(ix)$. En identifiant parties réelle et imaginaire, on obtient $\varphi(x) = \mathfrak{Re}(\varphi(x)) + i\mathfrak{Im}(\varphi(x)) = \psi(x) - i\psi(ix)$. On a que φ est $\mathbb{R}$-linéaire, car ψ est $\mathbb{R}$-linéaire, mais on veut que φ soit $\mathbb{C}$-linéaire. Il suffit clairement de montrer que $\forall x \in \mathbb{C} \quad \varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour conclure que $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$. Or $\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = \psi(ix) + i\psi(x)$, car ψ est $\mathbb{R}$-linéaire, d'où $\varphi(ix) = i(\psi(x) - i\psi(ix)) = i\varphi(x)$. ■

On peut reprendre la preuve du théorème de Hahn-Banach.

Preuve.

▷ On a supposé que $\mathfrak{Re}(\varphi) \leqslant |\varphi| \leqslant p$. On peut appliquer à la forme $\mathbb{R}$-linéaire $\mathfrak{Re}(\varphi)$ le théorème 1 ou 2, qui donne un prolongement $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,\mathbb{R})$ de $\mathfrak{Re}(\varphi)$ tel que $\psi \leqslant p$. Le lemme donne alors $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\mathbb{C})$ telle que $\mathfrak{Re}(\tilde{\varphi}) = \psi$. On remarque que l'application du lemme sur D donne $\tilde{\varphi}_{|D} = \varphi$, unique solution de $\mathfrak{Re}(\varphi_0) = \mathfrak{Re}(\varphi)$ sur D. Il faut montrer que l'on a bien un prolongement licite. De plus, si $x \in E$, prenons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et telle que $\lambda\tilde{\varphi}(x) \geqslant 0$. Alors on a $p(x) = p(\lambda x) \geqslant \mathfrak{Re}[\tilde{\varphi}(\lambda x)] = \mathfrak{Re}(\lambda\tilde{\varphi}(x)) = |\tilde{\varphi}(x)|$. ■

Le théorème de Hahn-Banach entraîne de nombreux corollaires d'intérêt pratique.

Corollaire. *(Prolongement des formes linéaires continues)*

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit D un sous-espace vectoriel de E, $\varphi \in D'$. Alors il existe $\varphi' \in E$ prolongeant φ tel que $\|\varphi'\|_{E'} = \|\varphi\|_{D'}$.

▷ On applique le théorème de Hahn-Banach pour $p = \|\varphi\|_{D'} \|\cdot\|_E$. ■

Corollaire. *(Existence d'une forme linéaire unitaire)*

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Il existe $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\|_{E'} = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|_E$.

▷ Soit $\begin{array}{rccl}\varphi_0 : & \mathbb{K}x & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \lambda x & \longmapsto & \lambda \|x\|_E\end{array}$. Alors φ_0 est une forme linéaire telle que $\|\varphi_0\| = 1$, car si $\lambda \neq 0$,

$$\frac{|\varphi_0(\lambda x)|}{\|\lambda x\|} = \frac{|\lambda \|x\|_E|}{\|\lambda x\|_E} = 1.$$

Il suffit ensuite de prolonger φ_0 par prolongement dans le dual topologique. ■

Exercice 21

Montrer que, si E est un espace de Hilbert, alors le φ ainsi défini est unique. Donner un exemple où il n'est pas unique.

Corollaire. ***(Habitation du dual topologique)***

Si E est un espace vectoriel normé non nul, son dual topologique est non nul.

On dispose d'une première version non topologique du théorème de Krein-Milman :

Corollaire

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn. Pour tout $x \in E$,

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{\|\varphi\|_{E'}=1 \\ \varphi\in E'}} |\langle \varphi, x\rangle|$$

et ce sup est atteint.

▷ Pour $x = 0$, c'est évident. Autrement, pour tout $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi\|_{E'} = 1$, $|\langle \varphi, x\rangle| = |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E = \|x\|_E$. Par la propriété d'existence d'une forme unitaire passant sur la norme de x en x, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\|\varphi\|_{E'} = 1$, et $|\langle \varphi, x\rangle| = \|x\|_{E'} = 1$ et $|\langle \varphi, x\rangle| = \|x\|_E$. ■

Remarque. Si $x \in E$, si $\tilde{x} \in E' \longrightarrow \mathbb{K}$ à φ fait correspondre $\langle \varphi, x\rangle$, $\tilde{x} \in E''$ et $\|x\|_E = \|\tilde{x}\|_{E''}$.

D'autre part, pour les formes linéaires $\tilde{x}$, on a montré que $\|\tilde{x}\|_{E''}$ est atteinte sur la sphère unité de E', non vide d'après ce qui précède.

Corollaire. ***(Existence d'une forme linéaire unitaire conditionnée par un hyperplan)***

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel propre fermé de E. Il existe $\varphi' \in E'$ nulle sur F et telle que $\|\varphi\|_{E'} = 1$.

▷ Soit $x \in E \setminus F$. Soit $\psi : \begin{array}{ccc} F \oplus \mathbb{K}x & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y + \lambda x & \longmapsto & \lambda \end{array}$. Alors ψ est une forme linéaire sur $F \oplus \mathbb{K}x$ de noyau F. Puisque F est fermé dans $F \oplus \mathbb{K}x$, elle est continue, et $\psi \neq 0$, car $\mathrm{Ker}\psi \neq E$. Ainsi $|||\psi||| \neq 0$. Par prolongement des formes linéaires continues, il existe $\varphi \in E'$ qui prolonge ψ et telle que $\|\varphi\|_{E'} = |||\psi||| \neq 0$. Dans ce cas, $\frac{1}{\|\varphi\|_{E'}}\varphi$ est le forme linéaire cherchée. ■

Corollaire. *(Critère de densité des sev)*

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue nulle sur F l'est sur E, c'est-à-dire $\forall \varphi \in E' \quad \varphi_{|F} = 0 \implies \varphi = 0_{E'}$.

▷ Le sens direct est connu. Réciproquement, si $\overline{F}$ est strictement inclus dans E, par le corollaire précédent, puisque $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E, il existerait $\varphi \in E'$ non nulle telle que $\varphi_{|\overline{F}} = 0$. ■

Remarque. On aurait pu aussi énoncer le critère de densité de la manière suivante : F est dense dans E si et seulement si pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel F' et toute application linéaire f de E dans F', si f est nulle sur F, alors f est nulle sur E.

Corollaire. *(Séparabilité par le dual)*

Soit E un espace vectoriel normé. Si E' est séparable, alors E est séparable.

▷ On suppose que E' est séparable. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\overline{\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}} = E'$. On choisit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|x_n\|_E = 1$ et $(\varphi_n)(x_n) \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi_n\|_{E'}$. On va montrer que que $\mathrm{Vect}(\overline{\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}}) = E$ grâce au critère de densité. On en déduira que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\overline{\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}})$ est dense dans E, puis que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(\overline{\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}})$ est dense dans E. Posons $F = \mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$. Soit $\varphi \in E'$ tel que $\varphi_{|F} = 0$. Il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_{n_k} = \varphi$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{E'} &\leqslant \|\varphi - \varphi_{n_k}\|_{E'} + \|\varphi_{n_k}\|_{E'} \\
&\leqslant \|\varphi - \varphi_{n_k}\|_{E'} + 2\varphi_{n_k}(x_{n_k}) \\
&\leqslant \|\varphi - \varphi_{n_k}\|_{E'} + 2(\varphi_{n_k}(x_{n_k}) - \varphi(x_{n_k})) \\
&\leqslant 3\|\varphi - \varphi_{n_k}\|_{E'} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

et c'est fini. ■

8.6.4 Séparation des convexes : le Hahn-Banach géométrique

Dans cette section, on fixe E' un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition. *(Séparation par des hyperplans affines)*

Soient A,B deux parties de E et H un hyperplan affine fermé $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$ où $\varphi \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On dit que H *sépare au sens large* A et B si à inversion des rôles des deux ensembles près,

$$\forall a \in A \quad \varphi(a) \leqslant \alpha \text{ et } \forall b \in B \quad \varphi(b) \geqslant b.$$

2. On dit que H *sépare strictement* A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall a \in A \quad \varphi(a) \leqslant \alpha - \varepsilon \text{ et } \forall b \in B \quad \varphi(b) \geqslant \alpha + \varepsilon.$$

3. On dit que H *sépare* A et B si

$$\forall a,b \in A \times B \quad \varphi(a) < \alpha < \varphi(b).$$

Théorème. ***(Théorème de Hahn-Banach géométrique, version 1)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{R}$, A et B deux ensembles convexes disjoints de E, tel que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine H qui sépare A et B au sens large.

Pour la preuve, on a besoin de la notion de jauge. Pour cela, on renvoie au cours de Topologie dans la section sur les convexes.

Lemme

Soit $C \subseteq E$ un convexe ouvert et $x_0 \in E \setminus C$. Il existe $\varphi \in E'$ tel que $\forall x \in C \quad \varphi(x) < \varphi(x_0)$. En particulier, $H = \varphi^{-1}(\varphi(x_0))$ sépare C et $\{x_0\}$ au sens large.

$\triangleright$ On utilise une translation T telle que $0_E \in T(C) = C'$. Alors $x_0' = T(x) \notin T(C) = C'$. On va donc montrer le lemme pour C',x_0' qui donnera φ' et l'on posera simplement $\varphi = \varphi' \circ T^{-1}$. On suppose donc $0_E \in C' = C$. Soit p la jauge de C. On définit sur $\mathbb{R}x_0$ φ par $\varphi(tx_0) = t$. φ est une forme linéaire et :

- en x_0, comme $x_0 \notin C$, $p(x_0) \geqslant 1 = \varphi(x_0)$.
- par positive homogénéité, $\forall t > 0, p(tx_0) = tp(x_0) \geqslant t\varphi(x) = \varphi(tx)$.
- en 0_E, $p(0_E) = 0 \geqslant \varphi(0_E) = 0$;
- si $t \leqslant 0$, $\varphi(tx) \leqslant 0 \leqslant p(tx_0)$. Donc $\varphi \leqslant p$.

Par le théorème Hahn-Banach analytique, il existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\varphi} \leqslant p$ et $\tilde{\varphi}$ prolonge φ. Alors $\tilde{\varphi} \leqslant M\|\cdot\|$ par $p \leqslant M\|\cdot\|$. Donc $|\tilde{\varphi}| \leqslant M\|\cdot\|$ donc $\tilde{\varphi} \in E'$. De plus, si $x \in C$, $\widetilde{\varphi(x)} \leqslant p(x) < 1 = \tilde{\varphi}(x_0)$ d'où la séparation au sens large (en fait, un peu plus : quoi ?). Mais pas forcément la séparation stricte. ■

On peut maintenant donner la démonstration du théorème.

Preuve.

$\triangleright$ On note $C = A - B$. Alors C est un convexe, ouvert car $C = \bigcup_{b \in B} \tau_b^{-1}(A)$ qui ne contient pas 0_E, car $A \cap B = \emptyset$. Donc il existe $H = \varphi^{-1}(\alpha)$ un hyperplan affine qui sépare $\{0_E\}$ et $A - B$. On a alors $\forall a \in A\ \forall b \in B\ \varphi(a-b) \leqslant 0\varphi(0_E)$ où $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$. Donc $\forall (a,b) \in A \times B \quad \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Théorème. *(Théorème de Hahn-Banach géométrique, version 2)*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn réel. Soient A,B deux convexes disjoints de E tels que A est fermé, B est compact. Il existe un hyperplan fermé affine qui sépare strictement A et B.

▷ La fonction $d(\cdot, A)$ ne s'annule pas sur B, car A est fermé et $A \cap B = \emptyset$. Puisque B est compact, l'infimum suivant est un minimum et $\inf d(x,A) = 2\varepsilon > 0$. Alors $A_\varepsilon = A + B(0_E, \varepsilon) = \{x \in E, d(x,A) < \varepsilon\}$ et B_ε défini deux mêmes sont deux convexes disjoints et ouverts. Il existe par la première version du théorème donc $\varphi \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A_\varepsilon\ \forall y \in B_\varepsilon\quad \varphi(x) \leqslant \alpha \leqslant \varphi(y)$. Montrons que $\min_B \varphi > \alpha$, où B est compact, et φ est continue. Soit $x_0 \in B$ tel que $\varphi(x_0) = \min_B(\varphi)$. Soit $y \notin \operatorname{Ker}(\varphi)$, quitte à changer y en $-y$, $\varphi(y) < 0$. Alors $x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{y}{\|y\|} \in B_\varepsilon$ et $\alpha \leqslant \varphi(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{y}{\|y\|} = \varphi(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\varphi(y)}{\|y\|} < \varphi(x_0)$. Donc $\alpha < \min_B \varphi = \alpha + 2\eta$, $\eta > 0$. Finalement pour tous x,y respectivement dans A,B, $\varphi(x) \leqslant (a+\eta) - \eta \leqslant (a+\eta) + \eta \leqslant \varphi(y)$ et le tour est joué. ■

Remarque. Même en dimension finie, même pour des boules, le théorème de Hahn-Banach géométrique n'a rien de trivial.

Exercice 22

Montrer plus simplement le théorème de Hahn-Banach dans le cas de deux points distincts d'un espace quelconque.

▷ **Éléments de réponse.**

Une histoire de forme affine...

Exercice 23

Montrer que la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach implique la forme analytique.

8.6.5 Convergence faible généralisée

Définition. *(Convergence faible)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$. On dit que (x_n) converge faiblement vers x si $\forall \varphi \in E'\quad \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \varphi(x_n) = \varphi(x)$.

⟶ **Notation.** On note $x_n \underset{\rightarrow}{\rightharpoonup} x$ (« demi-flèche »).

Remarque. La limite éventuelle est unique par séparation des convexes (ici des points, ce qui fait qu'on aurait pu le faire à la main). Si $x \neq y$, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (l'ensemble des formes linéaires sur E sépare les points).

Cette notion est mieux défini dans les Hilbert par Riesz.

Proposition. ***(La convergence forte implique la convergence faible)***

Soit (x_n) une suite de points de H et $x \in H$. Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, alors $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$.

▷ Immédiat par continuité. ■

Propriété. ***(Convergence faible en dimension finie)***

Soit (x_n) une suite de points de H et $x \in H$. Alors $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \iff x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

▷ Le sens réciproque se traite simplement grâce à l'écriture en coordonnées sur une base algébrique orthonormale de l'espace : il suffit, dans la définition abstraite de convergence faible, de prendre les formes linéaires coordonnées. ■

Plus généralement :

Propriété. ***(Convergence faible $\implies$ convergence en coordonnées)***

La convergence faible implique la convergence des coordonnées.

Remarque. Et l'on retrouve le point précédent, car la convergence en coordonnées équivaut à la convergence dans E. Noter que ceci est plus large qu'en dimension finie ; voir un produit dénombrable d'espaces compacts, par exemple, où la convergence équivaut aux convergences ponctuelles qui sont exprimables par des formes linéaires continues.

Définition. ***(Application faiblement continue)***

Une application de E dans F, E,F deux espaces préhilbertiens, est dite *faiblement continue* si pour toute suite (x_n) convergeant faiblement vers x $f(x_n)$ converge faiblement vers $f(x)$.

Propriété. ***(La continuité forte implique la continuité faible)***

Une application linéaire fortement continue est faiblement continue.

▷ Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire continue pour les normes sur E et F. On conclut par composition de deux applications linéaires continues. ■

Exercice 24

On cherche des contre-exemples au principe précédent. Donner un exemple d'application linéaire faiblement continue non fortement continue, et un exemple d'application fortement continue non faiblement continue.

Remarque. La réciproque est vraie dans des espaces de Banach, en vertu du théorème du graphe fermé.

Propriété. ***(Lemme de Fatou faible)***

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $x \ni E$ tel que $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$, alors (x_n) est bornée et $\liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$.

▷ Sous les hypothèses données, on note $T_n : \begin{array}{ll} E' & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto \varphi(x_n) \end{array}$ où E' est un Banach. Si $S_x : \begin{array}{ll} E' & \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto \varphi(x) \end{array}$, alors S_x est continue et $\|S_x\|_{E''} \leqslant \|x\|_E$, car $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{E'} \|x\|_E$ et on a même $\|S_x\|_{E''} = \|x\|_E$ par un corollaire du théorème de Hahn-Banach. Donc $\|\|T_n\|\|_{E''} = \|x_n\|_E$ et $\|T\|_{E''} = \|x\|_E$ où $T = S_x$. Comme $x_n \underset{\to}{\rightharpoonup} x$, on a convergence simple de (T_n) vers T. On applique le corollaire de Banach-Steinhaus qui donne $\|T\|_{E''} = \|x\|_E \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \|T_n\|_{E''} = \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_E$ car $\|T_n\|_{E''} = \|x_n\|_E$. Ce n'est pas fini : il faut encore dire que la norme des x_n est bornée. ■

Définition. ***(Convergence-$\star$)***

Soit E un evn et $(\varphi_n) \in (E')^{\mathbb{N}}$, $\varphi \in E'$. (φ_n) *converge $\star$-faible* vers φ si pour tout $x \in E$, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$. On note alors $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\star}{\rightharpoonup}} \varphi$.

VOC On dit, à l'oral, soit *étoile*, soit *star*, soit *ultra-faible.*

Remarque importante. C'est la convergence simple (où ?).

Dans un espace de Hilbert par exemple, il n'y a rien de compliqué.

Propriété. ***(Convergence $\star$-faible dans un Hilbert)***

Dans un Hilbert, la topologie $\star$-faible coïncide avec la topologie faible.

▷ H est vu comme son dual topo par l'iso can $y \longmapsto (\,\cdot\,, y)$. ■

8.6.6 Théorème de Banach-Alaoglu

Théorème. ***(Théorèmes de Banach Alaoglu)***

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable. Alors, de toute suite bornée de E' on peut extraire une sous-suite qui converge $\star$-faiblement.

On retrouve alors le résultat suivant :

Corollaire. ***(Compacité $\star$-faible de la boule unité du dual d'un Hilbert séparable.)***

Si H est un Hilbert, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

Définition. ***(Espace réflexif)***

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn. E est dit *réflexif* si l'application suivante est surjective :

$$\hat{\cdot} \ : \ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longmapsto & (\varphi \longmapsto \varphi(x)). \end{array}$$

Remarque. Cette application linéaire, toujours injective, est alors une isométrie.

Exemples. ***(Espaces réflexifs, espaces non réflexifs)***

1. E de dimension finie
2. H un Hilbert
3. ℓ^p, L^p si $1 < p < \infty$ et μ sigma finie.
4. Pour p un ou infini, pas réflexif !

Théorème. ***(Théorème de Banach-Alaoglu généralisé)***

De toute suite bornée d'élément d'un espace réflexif, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

▷ Prendre une suite bornée et F l'adhérence du sous-espace vectoriel qu'elle engendre ; F est séparable. On utilise le lemme suivant : un sous-espace fermé d'un espace réflexif est réflexif. Donc F est réflexif et F', dont le dual est séparable, $F'' \approx F$, l'est aussi ; on conclut avec Banach-Alaoglu. ■

8.7 Théorie des distributions

La théorie des distributions permet d'étendre en éléments les espaces de fonctions. On cherche également à étendre du même coup des notions propres aux espaces de régularité, comme les espaces C^∞, telle la dérivation, à des fonctions mesurables, ou plutôt intégrables, qui a priori ne jouissent pas de cette propriété.

Tout comme les formes linéaires agissent sur les espaces vectoriels, les distributions agissent sur un espace vectoriel muni d'une distance, qui sera un espace dit de *fonctions tests*. Il faut prendre garde : il y a plusieurs types de distributions (nous verrons dans un premier temps les distributions classiques, puis les distributions tempérées), pour lesquels l'espace des fonctions tests est différent : dans ce premier cas, ce seront les $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ; dans un second temps, ce sera l'espace de Schwartz de la théorie de Fourier.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à des fonctions définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, on note son support $\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. **Le support est toujours fermé** (dans Ω).

8.7.1 L'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition. ***(Espace des fonctions tests)***

Si K est une partie compacte de Ω, $\mathcal{D}_K(\Omega) := \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω dont le support est inclus dans K. On note alors $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ compact}_{K \subseteq \Omega}} \mathcal{D}_K(\Omega)$ l'*espace des fonctions tests*.

Remarques.

1. Si $K \subseteq K'$, $\mathcal{D}(K) \subseteq \mathcal{D}(K')$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, si $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

8.7.1.1 Normes sur l'espace des fonctions tests

Définition. ***(Norme des fonctions tests)***

Si $k \geqslant 0$, si $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sup\limits_{|\alpha| \leqslant k} \sup\limits_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|$.

Définition. ***(Distance des fonctions tests)***

Soit $K \subseteq \Omega$ compact, $d(f,g) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\min(1, \|f-g\|_{\mathcal{C}^k})}{2^k}$ définie une distance sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Pour cette distance, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est complet et localement compact (à démontrer). De plus $d(f_i,f)$ tend vers 0 pour $i \to \infty$ ssi pour tout k $\|f_i - f\|_k$ tend vers 0 lui-même.

8.7.2 Distribution

Définition. ***(Distribution)***

On appelle *distribution* une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ continue en restriction à chaque $\mathcal{D}_K(\Omega)$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω.

$\longrightarrow$ **Notation.** Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u(\varphi) := \langle u, \varphi \rangle \in \mathbb{K}$

Propriété. ***(Caractérisation des distributions)***

Soit u une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors u est une distribution si et seulement si pour tout compact K dans Ω, il existe une constante C_K et un entier k_K tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C_K \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{k_K}}$.

Définition. ***(Ordre d'une distribution)***

Si l'on peut choisir $k_K = k$ indépendamment du compact K, on dit que u est d'*ordre fini*, sinon, on dit que u est d'*ordre infini*. L'*ordre* de la distribution est le plus petit k qui convienne.

Remarque. En fait, $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^k} \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{k+1}}$.

Les fonctions localement intégrables et même dans L^p_{loc} définissent des distributions. On rappelle qu'une fonction est Lebesgue-localement intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est intégrable sur tout compact, ce qui se ramène à une intégration de Riemann.

Propriété. ***(Caractérisation des distributions)***

Soit $f \in L^p_{\text{loc}}$ où $p \in [1, +\infty[$. Alors f définit une distribution u_f d'ordre 0 par la formule $\langle u_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ pour $\varphi \in D(\Omega)$. De plus $f \longmapsto u_f$ est injectif.

Question. Expliquer pourquoi un compact dans Ω est un compact d'Ω.

Remarques.

1. Ceci permet d'identifier L^p_{loc} à une partie de $\mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Les fonctions test sont elles mêmes dans L^p_{loc}.
3. Donc $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

$\triangleright$ u_f est bien définie car si φ est à support compact, $f_{|K} \in L^p$ et $\varphi \ni L^{p'}$ d'où l'intégrabilité par Hölder et une majoration $|u_f(\varphi)| \leqslant \left\| f_{|K} \right\|_{L^p} (\mathrm{Leb}(K))1/p' \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}$. u_f est bien une forme linéaire. Soit $\varphi \in D(\Omega)$. $|u_f(\varphi)| =$
$abs \int_\Omega f\varphi$. Donc u_f est une distribution d'ordre 0. On cherche le noyau de $f \in L^p_{\text{loc}} \longmapsto u_f$ elle-même linéaire. Soit $f \in \mathrm{Ker}(g \mapsto u_g)$. Cela signifie que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi = 0$. Soit (ρ_j) une approximation de l'unité de classe C^∞. Soit $x_0 \in \Omega$, on note $\varphi_j(x) = \rho_j(x_0 - x)\varphi(x)$, et alors $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $0 = \int_\Omega f\varphi_j = \varphi_j \star (f\varphi)(x_0)$ qui tend, puisque $f\varphi \in L^1$, dans L^p vers $f\varphi$. Puisque cette suite est identiquement nulle, vers 0. D'où $f\varphi = 0$ presque partout pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ d'où $f = 0$ presque partout (pourquoi ?). ■

Autre exemple. Toute mesure localement finie définit une distribution d'ordre nul par

$$u_\mu, \varphi = \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu.$$

En particulier, pour $\mu = \delta_{x_0}$, $u_{\delta_{x_0}} = \varphi(x_0)$ est une distribution. De plus, $\mu \mapsto u_\mu$ est injective.

$\triangleright$ La linéarité est claire. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, φ est à support compact et donc $\int \varphi \mathrm{d}\mu$ est bien définie et $|u_\mu(\varphi)| \leqslant \int |\varphi| \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(K) \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}$ où $\mu(K) = C_k$ donc u_μ est une distribution d'ordre 0. ■

Remarque. On peut montrer que u est injective, grâce à la représentation des formes linéaires en dimension finie (à tester). Sinon on identifie l'ensemble des mesures positives finies... mais on sait pas faire à ce niveau.

Exemples

1. Si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \delta_{ka}$ définit une distribution d'ordre 0 et dans ce cas $C_K = \sum_{k, ka\in K} |\lambda_k|$.
2. Sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut définir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par $u(\varphi) = \varphi'(0)$, distribution d'ordre 1.

$\triangleright$ Ok pour la linéarité. La continuité est donnée par $|u(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{C}^1}$. ■

Question. Peut-on pour tout compact K trouver C_K tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $|\varphi'(0)| \leqslant C_K \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0}$ où $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0} = \|\varphi\|_{\mathcal{D}}$? C'est difficile, car on peut mal contrôler une dérivée de fonction par la fonction (le contraire étant vrai grâce à l'IAF).

Exemple. ***(Distribution d'ordre 1)***

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est choisie c infinie à support compact dans $[-1,1]$. Tel que $\varphi'(0) \neq 0$. On définit $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$. Alors $|u(\varphi_n)|$ tend vers l'infini. Or $\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^0}$ est bornée constante à norme de varphi, avec le support des varphi n n'a pas changé. Donc u n'est pas d'ordre 0. U est donc d'ordre 1 car d'ordre inférieur à 1.

Exercice 25

Montrer que la fonction e^{-1/x^2} se prolonge C^∞ en 0 avec toutes ses dérivées là nulles.

[...]

$\triangleright$ Soit K dans Ω compact. Soit $\varphi_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tel que $d(\varphi_j, \varphi) \longrightarrow 0$ quand $j \to \infty$. On rappelle qu'on suppose que pour tout $\varphi \mathcal{D}_K(\Omega)$, $|u(\varphi)| \leqslant C_K \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{k_K}}$ $(\star)$. Par la définition de d, $\min(1, \|\varphi - \varphi_j\|_{\mathcal{C}^k}) \leqslant 2^k d(\varphi, \varphi_j)$ donc dès que $d(\varphi_j, \varphi) \leqslant \frac{1}{2} k_K$, $\|\varphi - \varphi_j\|_{\mathcal{C}^k} < 2^k d(\varphi, \varphi_k)$ et par $(\star)$, $|u(\varphi_j) - u(\varphi)| = |u(\varphi_j - \varphi)| \leqslant C_K 2^{k_K} d(\varphi, \varphi_j)$ tend vers 0 en l'infini. Donc u est une distrib. En admettant le lemme ci-dessous, on montre l'implication directe par contraposée. On suppose donc qu'il existe un compact K dans Ω, une suite $(\psi_j) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ non nulle telle que $\forall k \in \mathbb{N} \quad |u(\psi_j)| \geqslant j \|\psi_j\|_{\mathcal{C}^j}$. On remplace par φ_j qui est ψ_j normalisée. Alors on a l'hypothèse du lemme et $|u(\varphi_j)| \geqslant j (\star\star)$. On peut donc extraire de φ_j une sous-suite φ_{n_j} qui converge pour d vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par continuité de u, $u(\varphi_{n_j})$ tend vers $u(\varphi)$ qui contredit $(\star\star)$. ■

Lemme

La distance des distributions n'est pas issue d'une norme.

▷ À faire. ■

Lemme

Dans $(D_K(\Omega), d)$ les parties bornées sont relativement compactes.

Lemme

Soit $(\varphi_n) \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ tel qu'il existe une suite d'entiers (k_n) tels que (k_n) tend vers l'infini et pour tout n, $\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^{k_n}} = 1$. Alors on peut extraire de φ_n une suite qui converge pour d.

Remarque. Apparemment, il suffit *bornée.*

▷ Idée de preuve : Ascoli. Si je contrôle les dérivées partielles de φ_n jusqu'à l'ordre $k+1$. Les dérivées partielles d'ordre $k+1$ sont uniformément bornées et à la frontière de K nulles, on applique l'IAF donc les dérivées partielles d'ordre k de φ_n) sont uniformément Lipschitz et uniformément bornées. On obtient une sous-suite convergente pour les dérivées partielles d'ordre k de φ_n et donc toutes les dérivées partielles d'ordre k inférieur. Comme on veut pour tous les ordres, on fait un procédé diagonal. Ce théorème donne ainsi de la compacité pour d ! ■

Pour résumer, on a exhibé deux plongements dans l'espace des distributions : les mesures éventuellement infinies ! et des fonctions mesurables, les fonctions intégrables. Ce premier plongement montre que l'espace des distributions est strictement plus grand que l'espace des fonctions au sens des éléments. Certains distributions sont encore autres choses.

8.7.3 Suite de distributions

Définition. ***(Convergence d'une suite de distributions)***

La notion de convergence d'une suite de distributions est la convergence simple. Autrement dit, si $(u_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)^{\mathbb{N}}$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, (u_n) converge vers u si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \lim_{n\to\infty} u_n(\varphi) = u(\varphi).$$

Les quelques exemples suivant donnent des exemples de convergence de distributions attendus sur les distributions de Dirac.

Exemples. ***(Suites de distributions)***

1. Si $(a_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega$, alors $\lim_{n\to\infty} u_{\delta_{a_n}} = u_{\delta_a}$.

2. *(Exercice)* Si $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $(u_{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{a+k\frac{b-a}{n}}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u_{\frac{Leb_{[a,b]}}{b-a}}$.

On peut alors se demander si cette notion de convergence correspond à une convergence de fonctions, puisqu'on a vu que L^1 se plonge dans l'espace des distributions. C'est le cas, heureusement.

Propriété. ***(Convergence L^1 implique convergence en distribution)***

Soit $p \in [1,+\infty]$. Si (f_n) converge vers f dans L^p, (f_n) converge vers f au sens des distributions.

▷ On suppose que $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$ pour $f, f_k \in L^p$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$. Ainsi $|\langle u_{f_k}, \varphi\rangle - \langle u_f, \varphi\rangle| = |\int(f_k - f)\varphi| \leqslant \|f_k - f\|_p \|\varphi\|_{p'} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

Sans grande surprise, ceci ne fonctionne plus avec la convergence simple seule.

Contre-exemple. ***(CVS n'implique pas converge au sens des distrib)***

Prenons $\Omega = \mathbb{R}$. Pour tout $k \geqslant 1$, on pose $f_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2} \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$. Ainsi $f_k \to 0$ presque partout. Or, f_k étant continue, $\|f_k\|_L^\infty = \|f_k\|_\infty = \|f_k\|_{\mathcal{C}^0} = \sqrt{k}$ qui ne tend pas vers zéro quand $k \to \infty$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u_{f_k}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k}e^{-kx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}y \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\sqrt{\pi}$ par le théorème de convergence dominée, car pour tout y, $\left|e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty e^{-y^2}$. □

Un autre exemple que l'on verra pour les distributions tempérées : $x \mapsto \sin(nx)$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par Riemann-Lebesgue, $\lim u_{f_n}$ est nulle.

8.7.4 Support d'une distribution

On a vu que les distributions sont définies sur des espaces de fonctions, à priori par dans un espace vectoriel normé. On peut toutefois considérer leur support qui sera dans un espace de fonctions.

Définition. ***(Restriction d'une distribution)***

Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\mathcal{O} \subseteq \Omega$ est un ouvert, la restriction de u à $\mathcal{D}(\mathcal{O}) := \{f \in \mathcal{D}(\Omega), \mathrm{supp} f \subseteq \mathcal{O}\}$ par identification, s'appelle *restriction de u à $\mathcal{O}$*. On la note $u_{|\mathcal{O}}$.

On dit que u est nulle sur $\mathcal{O}$ si sa restriction est nulle. On dit que $u = v$ sur $\mathcal{O}$ si les restrictions de u et v à $\mathcal{O}$ sont égales.

Remarque. Si $\mathcal{O} \subseteq \Omega$, sont deux ouverts, il y a un plongement naturel de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, en remplaçant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ par $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\tilde{\varphi}_{|\mathcal{O}} = \varphi$ et $\tilde{\varphi}_{|\Omega \setminus \mathcal{O}} = 0$.

Définition-propriété. ***(Support d'une distribution)***

Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\mathcal{O}$ l'union de tous les ouverts U de Ω tels que $u_{|U} = 0$. Alors $u_{|\mathcal{O}}$ est nulle et $F = \Omega \setminus \mathcal{O}$ est le *support* de la distribution u.

Ceci est évident si ce sont des fonctions, mais pas dans le cas des distributions : on vit dans $\mathcal{D}(\Omega)$ maintenant !

$\triangleright$ Avec les notations de l'énoncé, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$. Soit le compact $K = \mathrm{supp}\varphi \subseteq \mathcal{O}$. Je veux démontrer $u(\varphi) = 0$. Pour chaque $x \in K$, il existe un ouvert $\Omega_x \ni x$ tel que $u_{|\mathcal{O}_x} = 0$. Comme K est compact, il existe $x_1,\ldots,x_k \in K$ tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{x_i}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. On sait alors, par le lemme de fragmentation, qu'il existe une partition subordonnée de l'unité C^∞ pour K subordonnée à $(\mathcal{O}_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ c'est-à-dire $\chi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]\mathcal{C}^\infty$ tel que $\chi_i \subseteq \mathcal{O}_i$ et $\chi = \sum_{i=1}^{k} \chi_i \leqslant 1$ et $\chi_{|K} = 1$. Alors :

- pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\varphi_i = \chi_i \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subseteq \mathrm{supp}(\chi_i) \subseteq \mathcal{O}_i$ donc comme $\varphi_{|\mathcal{O}_i} = 0$, $u(\varphi_i) = 0$.
- De plus $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i$ car $\begin{cases} \text{sur } \Omega \setminus K, \varphi = \varphi_i = 0 \\ \text{sur } K, \chi = 1. \end{cases}$ d'où $\varphi = \left(\sum_{i=1}^{k} \chi_i \varphi \right) = \chi\varphi$. Donc $u(\varphi) = \sum_{i=1}^{k} u(\varphi_k) = 0$.

D'où le résultat. ∎

Exercice 26

1. $x_0 \in \mathrm{supp}(u)$ ssi pour tout voisinage V de x_0, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans V tel que $u(\varphi) \neq 0$.
2. Si $F \subseteq \Omega$ est un fermé, $\mathrm{supp}(u) \subseteq F \iff u_{|\Omega \setminus F} = 0$.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\Omega,\mathbb{K})$, $\mathrm{supp}(u_f) = \mathrm{supp}(f)$. Idem si μ est une mesure, mais il faut alors définir le support d'une mesure.

8.7.5 Distribution à support compact

On note $\mathcal{D}'_c(\Omega)$ l'ensemble des distributions à support compacts.

Si $(a_k) \in \Omega^N$ n'a pas de valeurs d'adhérence, la somme des Dirac en a_k est une distribution est son support est l'image des a_k qui n'est pas compact ; la fonction constante égale à 1 est dans L^1_{loc}, donc définit une distribution est son support n'est pas compact.

8.7.6 Opérations élémentaires sur les distributions

Bien sûr, une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $\mathcal{D}'\Omega$. De même, une combi linéaire de mesures, de L^1_{loc}...

On veut étendre certaines opérations usuelles des fonctions aux distributions.

Étant donnée une fonction f, un opération sur f, on regarde comment cela se traduit sur u_f et on essaie de l'étendre à toute distribution.

On ne sait pas définir le produit de deux distributions ! Des gens essaient, actuellement.

8.7.7 Distribution tempérée

8.7.8 Fonction à décroissance rapide

Exemple. ***(Fonctions à croissante lente, fonctions à croissance polynomiale)***

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f\| = o(\|x\|^M)$ pour $\|x\|$ tendant vers $+\infty$. Alors f définit une distribution tempérée u_f par la formule habituelle (on interpole).
Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $|\langle u_f, \varphi \rangle| = \left| \int \frac{f(x)}{(1+\|x\|^2)^M} (1+\|x\|^2)^M \varphi(x) \mathrm{d}x \right|$. Le second facteur est dans $\mathcal{S}$ est le premier est borné sur $\|x\| \geqslant R$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists C, k'$ $\quad \left\| (1+\|x\|^2)^M \varphi \right\|_{k,\mathcal{S}} \leqslant C \|\varphi\|_{k',\mathcal{S}}$.

Exemple

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution à support compact $K \subseteq \Omega$, on peut l'étendre en une distribution tempérée $\tilde{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en utilisant $\chi : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1] \mathcal{C}^\infty$ tel que $\chi_{|K} = 1$ et χ est à support compact $K' \subseteq \Omega$ par la formule $\tilde{u}(f) = u(\chi f)$.

On a plus d'opérations que pour les distributions : Fourier est étendable ! Youpi !

Définition. ***(Transformée de Fourier sur l'espace des distributions tempérées)***

Su $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit $\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$.

Remarque. On a $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, car $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est continue pour $d_{\mathcal{S}}$ donc $u \circ \mathcal{F}$ est continue pour $d_{\mathcal{S}}$. De plus, $\hat{u}$ est linéaire.

Proposition

L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme bicontinu.

▷ La linéarité est immédiate. La continuité aussi, car si (u_n) converge simplement vers u en tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(\hat{u_n}(\varphi)) = (u_n(\hat{\varphi}))$ converge vers $u(\hat{\varphi}) = \hat{u}(\varphi)$. Quant à l'injectivité, si $\hat{u} = 0$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u(\hat{\varphi}) = 0$. Or $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même est un isomorphisme donc $u = 0$. Enfin, si $\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$, $(\mathcal{F}^{-1}u)(\varphi) = u(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$ définit une distribution telle que $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}u)) = u$. Ainsi $\mathcal{F}^{-1}$ est continue. ■

Remarque. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{u_f} = u_{\hat{f}}$.

▷ Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(L^(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_{L^p})$ pour $p \in \{1,2\}$. Soit $f \in L^p$. Soit $(f_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que f_k tende vers f dans L^p. Si on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad u_{f_k}(\hat{\varphi}) = u_{\hat{f_k}}(\varphi),$$

c'est terminé. On a : $|(u_{\hat{f}} - u_{\hat{f_k}})(\varphi))| = |\int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f} - \hat{f}_k)\varphi| \leqslant \left\|\hat{f} - \hat{f}_k\right\|_p \|\varphi\|_p \leqslant (2M)^n \|f - f_k\|_p \|\varphi\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $|(u_f - u_{f_k})\hat{\varphi}|$ tend vers 0 quand $k \to \infty$. Donc pour tout $f \in L^p$, pour $p = 1{,}2$, $\hat{u_f} = u_{\hat{f}}$. Si $f \in \mathcal{S}$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, $u_{\hat{f}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = u_f(\hat{\varphi})$. ■

On peut étendre les résultats concernant les opérations sur les transformées de F de fonctions avec des distributions tempérées.

$$\partial_{\xi_j} \mathcal{F} u = -i\mathcal{F}(x_j u), \mathcal{F}(\partial_{x_j} u) = i\xi_j \mathcal{F}(u).$$

On peut définir des distributions tempérées avec les mesures à support compact.

Soit μ une mesure à support compact et u_μ la distribution associée, μ borélienne finie. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $u_\mu(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}\mu$. Alors $\hat{u_\mu}(\varphi) = \int \hat{\varphi} d\mu = \int \int e^{-ix\xi} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\mu(x)$. Si $\mu = \delta_0$, alors $\hat{u_{\delta_0}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = u_1(\varphi)$, d'où $\hat{u_{\delta_0}} = u_1$ et $\hat{\delta_0} = 1$. On a $(x, \xi) \mapsto e^{-ix\xi}\varphi(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, Leb \times \mu)$. Par Fubini, $\hat{u_\mu}(\varphi) = \int \varphi(\xi) \int e^{-ix\xi} \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\xi$. Ainsi $\psi_\mu : \xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \int e^{-ix\xi} \mathrm{d}\mu$ est une fonction continue $|\psi| \leqslant \mu(\mathbb{R}^n)$. On a $\hat{u_\mu} = u_{\psi_\mu}$, par convergence dominée.

Enfin, on a une transformée de Fourier générale.

8.8 Monstres de l'analyse fonctionnelle

8.8.1 Quelques fonctions intractables

8.8.2 Espace de James

Chapitre 9

Exercices

Difficulté des exercices :

- ● ○ ○ ○ ○ Question de cours, application directe, exercice purement calculatoire sans réelle difficulté technique
- ● ● ○ ○ ○ Exercice faisable, soit intuitivement, soit en employant des moyens rudimentaires ou des techniques déjà vues
- ● ● ● ○ ○ Exercice relativement difficile et dont la résolution appelle à une réflexion plus importante à cause d'obstacles techniques ou conceptuels, qui cependant devraient être à la portée de la plupart des étudiants bien entraînés
- ● ● ● ● ○ Exercice très exigeant, destiné aux élèves prétendant aux concours les plus difficiles, exercice « classique ».
- ● ● ● ● ● La résolution de l'exercice requiert un raisonnement et des connaissances extrêmement avancés, dépassant les attentes du prérequis. Il est presque impossible de le mener à terme sans indication. Bien qu'exigibles à très peu d'endroits, ces exercices sont très intéressants et présentent souvent des résultats forts.

Appendice

Table des matières

Bibliographie

[1] *Titre du livre*, Auteur du livre, date, maison d'édition

Table des figures

Liste des tableaux