

# Propriétés universelles des constructions classiques données sous forme de limites & colimites

Soit  $C$  une catégorie localement petite. On rappelle :

- ★ un objet défini par une propriété universelle, s'il existe, est unique à isomorphisme près et à unique isomorphisme près. En effet, il est défini par un foncteur représentable.
- ★ Cependant, il n'existe pas forcément dans  $C$  (mais ici toujours dans  $\mathbf{Ens}$ , autrement l'objet n'a aucune chance d'exister dans les catégories concrètes). On se passe de préciser à chaque fois que l'objet est tel que "s'il existe".
- ★ Dans la suite, les flèches "à trouver" sont écrites en pointillés. Par la remarque précédente, ce sont des isomorphismes si et seulement si le "deuxième objet" est également une limite du même diagramme.
- ★ Tous les diagrammes dans  $C$  sont supposés commutatifs.
- ★ Le sens de la flèche entre l'objet construit et l'objet construit tiers s'écrit toujours dans un seul sens qui puisse imposer au moins une nouvelle condition de commutation.
- ★ Toute limite est objet final d'une certaine catégorie, toute colimite est objet initial d'une certaine catégorie.

## 1 Objets remarquables

### 1.1 Objet initial

Un objet  $A \in C$  est *initial* si pour tout objet  $X$ , il existe une unique flèche  $f : A \rightarrow X$ .

$$X \xrightarrow{f} A$$

### 1.2 Objet final

Un objet  $A \in C$  est *final* si pour tout objet  $X$ , il existe une unique flèche  $f : X \rightarrow A$ .

$$A \xrightarrow{f} X$$

### 1.3 Objet nul

Un objet  $A \in C$  est *initial* si pour tout objet  $X$ , il existe une unique flèche  $f : A \rightarrow X$  et une unique flèche  $g : X \rightarrow A$ . Dans ce cas, on a forcément  $gf = id_X$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{id_X} \end{array} X \xrightarrow{g} A$$

## 2 Limites

### 2.1 Produit

Soient  $X_1, X_2 \in C$ . Le *produit (fini)* de  $X_1$  et  $X_2$  est l'objet  $X_1 \times X_2 = X_1 \amalg X_2$  de  $C$  muni de deux morphismes *projections*  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$  et  $p_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$  tel que pour tous objet  $Y$  et morphismes  $f_1 : Y \rightarrow X_1$  et  $f_2 : Y \rightarrow X_2$ , il existe un unique  $f : Y \rightarrow X_1 \times X_2$  où  $\pi_1 f = f_1$  et  $\pi_2 f = f_2$ .

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ f_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow f_2 \\ & X_1 \times X_2 & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X_1 & & X_2 \end{array}$$

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'objets de  $C$ . Le *produit* de  $(X_i)_i$  est l'objet  $\prod_{i \in I} X_i$  de  $C$  muni des morphismes *projections*  $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  pour tous  $i \in I$  tel que pour tous objet  $Y$  et morphismes  $f_i : Y \rightarrow X_i, i \in I$ , il existe un unique  $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  où  $\pi_i f = f_i$  pour tout  $i$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f_i \swarrow & \searrow f_i & \\ \prod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{\pi_i} & X_i \end{array}$$

## 2.2 Égalisateur

Soient  $X_1, X_2 \in C$  et  $f, g : X_1 \rightarrow X_2$  deux morphismes *parallèles* dans  $C$ . L'*égalisateur* ou *égaliseur* de  $X_1$  et  $X_2$  est l'objet  $E$  de  $C$  muni d'un morphisme également appelé *égaliseur*  $\text{eg}(f, g) = \text{eq}(f, g) = e : E \rightarrow X_1$  qui *égalise* la paire  $(f, g)$ , *i.e.*  $fe = ge$ , tel que pour tout objet  $E'$  et morphisme  $e' : E' \rightarrow X_1$  égalisant  $(f, g)$ , *i.e.*  $fe' = ge'$ , il existe un unique  $y : E' \rightarrow E$  tel que  $e' = ey$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & X_1 & \xrightarrow[f]{g} & X_2 \\ \uparrow y & \nearrow e' & & & \\ E' & & & & \end{array}$$

## 2.3 Produit fibré

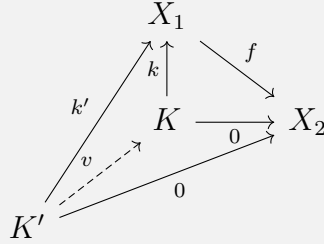
Soient  $X_1, X_2, A \in C$  et  $f : X_1 \rightarrow A, g : X_2 \rightarrow A$  deux morphismes. Le *produit fibré* ou *pullback*, “tiré en arrière” de  $X_1$  et  $X_2$  *sur/au-dessus de*  $A$ , dépendant des morphismes  $f, g$ , est l'objet  $X_1 \times_A X_2 = X_1 \star_A X_2$  muni de deux morphismes *projections*  $\pi_1 : X_1 \times_A X_2 \rightarrow X_1$  et  $\pi_2 : X_1 \times_A X_2 \rightarrow X_2$  tels que  $f\pi_1 = g\pi_2$ , de sorte que pour tout objet  $Y$  et morphismes  $p_1 : Y \rightarrow X_1$  et  $p_2 : Y \rightarrow X_2$  tels que  $fp_1 = gp_2$ , il existe une unique  $y : Y \rightarrow X_1 \times_A X_2$  tel que  $\pi_1 y = p_1$  et  $\pi_2 y = p_2$ .

$$\begin{array}{ccccc} Y & & & & \\ & \searrow p_2 & & & \\ & & X_1 \times_A X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \\ & \nearrow p_1 & \downarrow \pi_1 & & \downarrow g \\ & & X_1 & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

## 2.4 Noyau

On suppose  $C$  abélienne.

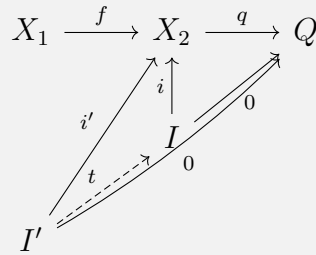
Soit  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un morphisme entre deux objets de  $C$ . Le *noyau* de  $f$  est l'objet  $\text{Ker}(f) = K$  muni d'un morphisme  $k : K \rightarrow X_1$  vérifiant  $fk = 0_{K \rightarrow X_2}$ , tel que pour tous objet  $K'$  de  $C$  et morphisme  $k' : K' \rightarrow X_1$  vérifiant  $fk' = 0_{K' \rightarrow X_2}$ , il existe une unique  $v : K' \rightarrow K$  telle que  $kv = k'$  **et c'est tout**.



## 2.5 Image

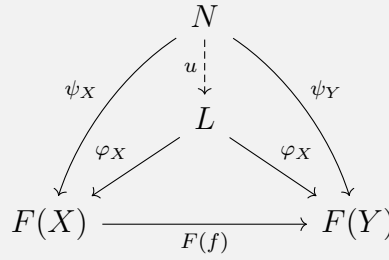
On suppose  $C$  abélienne.

Soit  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un morphisme entre deux objets de  $C$ . On suppose que  $f$  admet un conoyau  $(Q, q)$  (voir cette colimite). L'*image* de  $f$  est l'objet  $\text{Im}(f) = I$  muni d'un morphisme  $i : I \rightarrow X_2$  vérifiant  $qi = 0_{I \rightarrow Q}$ , tel que pour tous objet  $I'$  de  $C$  et morphisme  $i' : I' \rightarrow X_2$  vérifiant  $qi' = 0_{I' \rightarrow Q}$ , il existe une unique  $t : I' \rightarrow I$  telle que  $it = i'$  **et c'est tout**.



## 2.6 Limite projective

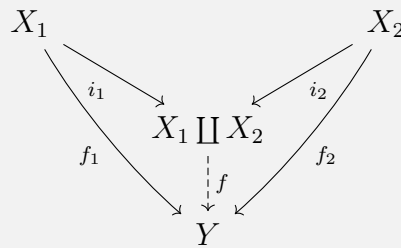
Soient  $D$  une (finie, petite) catégorie et  $F : D^{\text{op}} \rightarrow C$  un foncteur, dit *diagramme*. La *limite* ou *limite inverse* ou *limite projective* du diagramme  $F$  est un objet  $L$  de  $C$  muni d'une famille de morphismes  $(\varphi_X)_{X \in D}$  chacun de  $L$  dans  $F(X)$  tel que pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $D$ , on ait  $F(f)\varphi_X = \varphi_Y$ , i.e.  $(L, \varphi)$  est un *cône*, de sorte que pour tous objet  $N$  et morphismes  $(\psi_X)_{X \in D}$  chacun de  $N$  dans  $F(X)$  tel que pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $D$ , on ait  $F(f)\psi_X = \psi_Y$ , il existe un unique  $u : N \rightarrow L$  où  $\varphi_X u = \psi_X$  en tout  $X \in D$ .



## 3 Colimites

### 3.1 Coproduit/réunion disjointe/somme directe

Soient  $X_1, X_2 \in C$ . Le *coproduit (fini)* ou *union disjointe* ou *somme (directe) (externe)* de  $X_1$  et  $X_2$  est l'objet  $X_1 \sqcup X_2 = X_1 \amalg X_2$  de  $C$  muni de deux morphismes *plongements*  $i_1 : X_1 \rightarrow X_1 \amalg X_2$  et  $i_2 : X_2 \rightarrow X_1 \amalg X_2$  tel que pour tous objet  $Y$  et morphismes  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$ , il existe un unique  $f : X_1 \amalg X_2 \rightarrow Y$  où  $f i_1 = f_1$  et  $f i_2 = f_2$ .



Soient  $(X_j)_{j \in I}$  une famille d'objets de  $C$ . Le *coproduit* ou *réunion disjointe* ou *somme directe (externe) quelconque* de  $(X_i)_i$  est l'objet  $\coprod_{j \in I} X_j$  de  $C$  muni des morphismes *plongements*  $i_j : X_j \rightarrow \coprod_{j \in I} X_j$  pour tous  $j \in I$  tel que pour tous objet  $Y$  et morphismes  $f_j : X_j \rightarrow Y, j \in I$ , il existe un unique  $f : \coprod_{j \in I} X_j \rightarrow Y$  où  $f i_j = f_j$  pour tout  $j$ .

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{i_j} & Y \\ & \searrow f_j & \downarrow f \\ & & \coprod_{j \in I} X_j \end{array}$$

### 3.2 Co-égalisateur

Soient  $X_1, X_2 \in C$  et  $f, g : X_1 \rightarrow X_2$  deux morphismes *parallèles* dans  $C$ . Le *co-égalisateur* ou *co-égaliseur* de  $X_1$  et  $X_2$  est l'objet  $E$  de  $C$  muni d'un morphisme également appelé *co-égaliseur*  $\text{coeq}(f, g) = \text{coeq}(f, g) = e : X_2 \rightarrow E$  qui *coégalise* la paire  $(f, g)$ , i.e.  $ef = eg$ , tel que pour tout objet  $E'$  et morphisme  $e' : X_2 \rightarrow E'$  coégalisant  $(f, g)$ , i.e.  $e'f = e'g$ , il existe un unique  $y : E' \rightarrow E$  tel que  $ye = e'$ .

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow[f]{g} & X_2 & \xrightarrow{e} & E \\ & & \searrow e' & & \downarrow y \\ & & & & E' \end{array}$$

### 3.3 Somme amalgamée

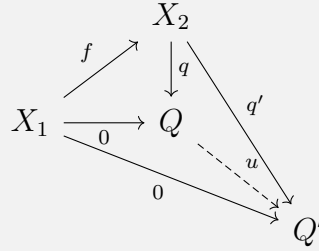
Soient  $X_1, X_2, A \in C$  et  $f : A \rightarrow X_1, g : A \rightarrow X_2$  deux morphismes. La *somme amalgamée* ou le *(co)-produit amalgamé* ou *pushout*, “poussé en avant” de  $X_1$  et  $X_2$  le long de  $A$ , dépendant des morphismes  $f, g$ , est l'objet  $X_1 \sqcup_A X_2 = X_1 \coprod_A X_2$  muni de deux morphismes *plongements*  $i_1 : X_1 \rightarrow X_1 \sqcup_A X_2$  et  $i_2 : X_2 \rightarrow X_1 \sqcup_A X_2$  tels que  $i_1 f = i_2 g$ , de sorte que pour tout objet  $Y$  et morphismes  $j_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $j_2 : X_2 \rightarrow Y$  tels que  $j_1 f = j_2 g$ , il existe une unique  $y : X_1 \sqcup_A X_2 \rightarrow Y$  tel que  $y i_1 = j_1$  et  $y i_2 = j_2$ .

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g} & X_2 & & \\ f \downarrow & & \downarrow i_2 & \searrow j_2 & \\ X_1 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \sqcup_A X_2 & \xrightarrow{y} & Y \\ & \searrow j_1 & & & \end{array}$$

### 3.4 Conoyau

On suppose  $C$  abélienne.

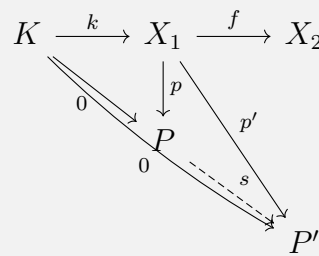
Soit  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un morphisme entre deux objets de  $C$ . Le *conoyau* ou *quotient par l'image* de  $f$  est l'objet  $\text{Coker}(f) = Q$  muni d'un morphisme  $q : X_2 \rightarrow Q$  vérifiant  $qf = 0_{X \rightarrow Q}$ , tel que pour tous objet  $Q'$  de  $C$  et morphisme  $q' : X_2 \rightarrow Q'$  vérifiant  $q'f = 0_{X \rightarrow Q'}$ , il existe une unique  $u : Q \rightarrow Q'$  telle que  $uq = q'$  et c'est tout.



### 3.5 Coimage

On suppose  $C$  abélienne.

Soit  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un morphisme entre deux objets de  $C$ . On suppose que  $f$  admet un noyau  $(K, k)$  (voir cette limite). La *coimage* ou *quotient par le noyau* ou *quotient canonique* de  $f$  est l'objet  $\text{Coim}(f) = P$  muni d'un morphisme  $p : X_1 \rightarrow P$  vérifiant  $pk = 0_{K \rightarrow P}$ , tel que pour tous objet  $P'$  de  $C$  et morphisme  $p' : X_1 \rightarrow P'$  vérifiant  $p'k = 0_{K \rightarrow P'}$ , il existe une unique  $s : P \rightarrow P'$  telle que  $sp = p'$  et c'est tout.



### 3.6 Limite inductive

Soient  $D$  une (finie, petite) catégorie et  $F : D^{\text{op}} \rightarrow C$  un foncteur, dit *diagramme*. La *co(-)limite* ou *limite directe* ou *limite inductive* du diagramme  $F$  est un objet  $L$  de  $C$  muni d'une famille de morphismes  $(\varphi_X)_{X \in D}$  chacun de  $F(X)$  dans  $L$  tel que pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $D$ , on ait  $\varphi_X F(f) = \varphi_Y$ , i.e.  $(L, \varphi)$  est un *co-cône*, de sorte que pour tous objet  $N$  et morphismes  $(\psi_X)_{X \in D}$  chacun de  $F(X)$  dans  $N$  tel que pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de  $D$ , on ait  $\psi_X F(f) = \psi_Y$ , il existe un unique  $u : L \rightarrow N$  où  $u\varphi_X = \psi_X$  en tout  $X \in D$ .

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\
 \searrow \varphi_X & & \swarrow \varphi_Y \\
 & L & \\
 \swarrow \psi_X & \downarrow u & \searrow \psi_Y \\
 & N &
 \end{array}$$