Propriétés universelles des constructions classiques données sous forme de limites & colimites

Soit C une catégorie localement petite. On rappelle :

- ⋆ un objet défini par une propriété universelle, s'il existe, est unique à isomorphisme près et à unique isomorphisme près. En effet, il est défini par un foncteur représentable.
- ⋆ Cependant, il n'existe pas forcément dans C (mais ici toujours dans Ens, autrement l'objet n'a aucune chance d'exister dans les catégories concrètes). On se passe de préciser à chaque fois que l'objet est tel que "s'il existe".
- ⋆ Dans la suite, les flèches "à trouver" sont écrites en pointillés. Par la remarque précédente, ce sont des isomorphismes si et seulement si le "deuxième objet" est également une limite du même diagramme.
- ⋆ Tous les diagrammes dans C sont supposés commutatifs.
- ⋆ Le sens de la flèche entre l'objet construit et l'objet construit tiers s'écrit toujours dans un seul sens qui puisse imposer au moins une nouvelle condition de commutation.
- ⋆ Toute limite est objet final d'une certaine catégorie, toute colimite est objet initial d'une certaine catégorie.

1 Objets remarquables

1.1 Objet initial

Un objet $A \in C$ est *initial* si pour tout objet X, il existe une unique flèche $f : A \to X$.

$$X \xrightarrow{f} A$$

1.2 Objet final

Un objet $A \in C$ est *final* si pour tout objet X, il existe une unique flèche $f : X \to A$.

$$A \xrightarrow{f} X$$

1.3 Objet nul

Un objet $A \in C$ est *initial* si pour tout objet X, il existe une unique flèche $f : A \to X$ et une unique flèche $g : X \to A$. Dans ce cas, on a forcément $gf = id_X$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_X"'] & X \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

2 Limites

2.1 Produit

Soient X_1,$X_2 \in C$. Le *produit (fini)* de X_1 et X_2 est l'objet $X_1 \times X_2 = X_1 \prod X_2$ de C muni de deux morphismes *projections* $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_1 : Y \to X_1$ et $f_2 : Y \to X_2$, il existe un unique $f : Y \to X_1 \times X_2$ où $\pi_1 f = f_1$ et $\pi_2 f = f_2$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f_1"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\ & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$

Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de C. Le *produit* de $(X_i)_i$ est l'objet $\prod\limits_{i\in I} X_i$ de C muni des morphismes *projections* $\pi_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$ pour tous $i \in I$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_i : Y \to X_i, i \in I$, il existe un unique $f : Y \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ où $\pi_i f = f_i$ pour tout i.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, bend left, "f_i"] & \\ \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

2.2 Égalisateur

Soient $X_1,X_2 \in C$ et $f,g : X_1 \to X_2$ deux morphismes *parallèles* dans C. L'*égalisateur* ou *égaliseur* de X_1 et X_2 est l'objet E de C muni d'un morphisme également appelé *égaliseur* $\mathrm{eg}(f,g) = \mathrm{eq}(f,g) = e : E \to X_1$ qui *égalise* la paire (f,g), *i.e.* $fe = ge$, tel que pour tout objet E' et morphisme $e' : E' \to X_1$ égalisant (f,g), *i.e.* $fe' = ge'$, il existe un unique $y : E' \to E$ tel que $e' = ey$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \\
E' \arrow[u, dashed, "y"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.3 Produit fibré

Soient $X_1,X_2,A \in C$ et $f : X_1 \to A$, $g : X_2 \to A$ deux morphismes. Le *produit fibré* ou *pullback*, “tiré en arrière” de X_1 et X_2 *sur/au-dessus de* A, dépendant des morphismes f,g, est l'objet $X_1 \times_A X_2 = X_1 \star_A X_2$ muni de deux morphismes *projections* $\pi_1 : X_1 \times_A X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times_A X_2 \to X_2$ tels que $f\pi_1 = g\pi_2$, de sorte que pour tout objet Y et morphismes $p_1 : Y \to X_1$ et $p_2 : Y \to X_2$ tels que $fp_1 = gp_2$, il existe une unique $y : Y \to X_1 \times_A X_2$ tel que $\pi_1 y = p_1$ et $\pi_2 y = p_2$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& X_1 \times_A X_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
& X_1 \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

2.4 Noyau

On suppose C abélienne.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de C. Le *noyau* de f est l'objet $\mathrm{Ker}(f) = K$ muni d'un morphisme $k : K \to X_1$ vérifiant $fk = 0_{K \to X_2}$, tel que pour tous objet K' de C et morphisme $k' : K \to X_1$ vérifiant $fk' = 0_{K' \to X_2}$, il existe une unique $v : K' \to K$ telle que $kv = k'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "f"] & \\
 & K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"'] & X_2 \\
K' \arrow[uur, "k'"] \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.5 Image

On suppose C abélienne.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de C. On suppose que f admet un conoyau (Q, q) *(voir cette colimite)*. L'*image* de f est l'objet $\mathrm{Im}(f) = I$ muni d'un morphisme $i : X \to X_2$ vérifiant $qi = 0_{I \to Q}$, tel que pour tous objet I' de C et morphisme $i' : I' \to X_2$ vérifiant $qi' = 0_{I' \to Q}$, il existe une unique $t : I' \to I$ telle que $it = i'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \arrow[r, "q"] & Q \\
 & I \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "0"'] & \\
I' \arrow[uur, "i'"] \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[uurr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.6 Limite projective

Soient D une (finie, petite) catégorie et $F : D^{\text{op}} \to C$ un foncteur, dit *diagramme*. La *limite* ou *limite inverse* ou *limite projective* du diagramme F est un objet L de C muni d'une famille de morphismes $(\varphi_X)_{X \in D}$ chacun de L dans $F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $F(f)\varphi_X = \varphi_Y$, *i.e.* (L,φ) est un *cône*, de sorte que pour tous objet N et morphismes $(\psi_X)_{X \in D}$ chacun de N dans $F(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $F(f)\psi_X = \psi_Y$, il existe un unique $u : N \to L$ où $\varphi_X u = \psi_X$ en tout $X \in D$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[ddl, bend right, "\psi_X"'] \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_Y"] & \\
 & L \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_X"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

3 Colimites

3.1 Coproduit/réunion disjointe/somme directe

Soient $X_1, X_2 \in C$. Le *coproduit (fini)* ou *union disjointe* ou *somme (directe) (externe)* de X_1 et X_2 est l'objet $X_1 \sqcup X_2 = X_1 \coprod X_2$ de C muni de deux morphismes *plongements* $i_1 : X_1 \to X_1 \coprod X_1$ et $i_2 : X_2 \to X_1 \coprod X_2$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_1 : X_1 \to y$ et $f_2 : X_2 \to y$, il existe un unique $f : X_1 \coprod X_1 \to Y$ où $fi_1 = f_1$ et $fi_2 = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, "f_2"] \\
 & X_1 \coprod X_2 \arrow[d, dashed, "f"] & \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Soient $(X_j)_{j\in I}$ une famille d'objets de C. Le *coproduit* ou *réunion disjointe* ou *somme directe (externe) quelconque* de $(X_i)_i$ est l'objet $\coprod\limits_{j\in I} X_j$ de C muni des morphismes *plongements* $i_j : X_j \to \coprod\limits_{j\in I} X_j$ pour tous $j \in I$ tel que pour tous objet Y et morphismes $f_j : X_j \to Y, j \in I$, il existe un unique $f : \coprod\limits_{j\in I} X_j \to Y$ où $fi_j = f_j$ pour tout j.

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & Y \arrow[d, dashed, "f"] \\
 & \coprod\limits_{j\in I} X_j
\end{tikzcd}$$

3.2 Co-égalisateur

Soient $X_1,X_2 \in C$ et $f,g : X_1 \to X_2$ deux morphismes *parallèles* dans C. Le *co-égalisateur* ou *co-égaliseur* de X_1 et X_2 est l'objet E de C muni d'un morphisme également appelé *co-égaliseur* $\mathrm{coeg}(f,g) = \mathrm{coeq}(f,g) = e : X_2 \to E$ qui *coégalise* la paire (f,g), *i.e.* $ef = eg$, tel que pour tout objet E' et morphisme $e' : X_2 \to E'$ coégalisant (f,g), *i.e.* $e'f = e'g$, il existe un unique $y : E' \to E$ tel que $ye = e'$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X_2 \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & E \arrow[d, dashed, "y"] \\
 & & E'
\end{tikzcd}$$

3.3 Somme amalgamée

Soient $X_1,X_2,A \in C$ et $f : A \to X_1, g : A \to X_2$ deux morphismes. La *somme amalgamée* ou le *(co)-produit amalgamé* ou *pushout*, "poussé en avant" de X_1 et X_2 *le long de* A, dépendant des morphismes f,g, est l'objet $X_1 \sqcup_A X_2 = X_1 \coprod\limits_A X_2$ muni de deux morphismes *plongements* $i_1 : X_1 \to X_1 \sqcup_A X_2$ et $i_2 : X_2 \to X_1 \sqcup_A X_2$ tels que $i_1 f = i_2 g$, de sorte que pour tout objet Y et morphismes $j_1 : X_1 \to Y$ et $j_2 : X_2 \to Y$ tels que $j_1 f = j_2 g$, il existe une unique $y : X_1 \sqcup_A X_2 \to Y$ tel que $yi_1 = j_1$ et $yi_2 = j_2$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "j_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right, "j_1"'] & X_1 \sqcup_A X_2 \arrow[dr, dashed, "y"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

3.4 Conoyau

On suppose C abélienne.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de C. Le *conoyau* ou *quotient par l'image* de f est l'objet $\mathrm{Coker}(f) = Q$ muni d'un morphisme $q : X_2 \to Q$ vérifiant $qf = 0_{X \to Q}$, tel que pour tous objet Q' de C et morphisme $q' : X_2 \to Q$ vérifiant $q'f = 0_{X \to Q'}$, il existe une unique $u : Q \to Q'$ telle que $uq = q'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, "q'"] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"'] \arrow[drr, "0"'] & Q \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
 & & Q'
\end{tikzcd}$$

3.5 Coimage

On suppose C abélienne.

Soit $f : X_1 \to X_2$ un morphisme entre deux objets de C. On suppose que f admet un noyau (K,k) *(voir cette limite)*. La *coimage* ou *quotient par le noyau* ou *quotient canonique* de f est l'objet $\mathrm{Coim}(f) = P$ muni d'un morphisme $p : X_1 \to P$ vérifiant $pk = 0_{K \to P}$, tel que pour tous objet P' de C et morphisme $p' : X_1 \to P'$ vérifiant $p'k = 0_{K \to P'}$, il existe une unique $s : P \to P'$ telle que $sp = p'$ **et c'est tout**.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "0"'] \arrow[ddrr, bend right, "0"'] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, "p'"] & X_2 \\
 & P \arrow[dr, dashed, "s"] & \\
 & & P'
\end{tikzcd}$$

3.6 Limite inductive

Soient D une (finie, petite) catégorie et $F : D^{\mathrm{op}} \to C$ un foncteur, dit *diagramme*. La *co(-)limite* ou *limite directe* ou *limite inductive* du diagramme F est un objet L de C muni d'une famille de morphismes $(\varphi_X)_{X \in D}$ chacun de $F(X)$ dans L tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $\varphi_X F(f) = \varphi_Y$, *i.e.* (L,φ) est un *co-cône*, de sorte que pour tous objet N et morphismes $(\psi_X)_{X \in D}$ chacun de $F(X)$ dans N tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ de D, on ait $\psi_X F(f) = \psi_Y$, il existe un unique $u : L \to N$ où $u\varphi_X = \psi_X$ en tout $X \in D$.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_X"'] \arrow[ddr, bend right, "\psi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\varphi_Y"] \arrow[ddl, bend left, "\psi_Y"] \\
& L \arrow[d, dashed, "u"'] & \\
& N &
\end{tikzcd}$$