Feuille d'exercices 1
Calcul

Révisions du collège

Exercice 1 (Tables de multiplication). Donner, par calcul mental : 3×7 ; 8×6 ; 7×8 ; 8×9 ; 13×6 ; 16×20 ; $10\ 000 \times 1\ 000$.

▷ **Solution.** Les tables de multiplication doivent être connues sans hésitation. Comme le reste, seule la pratique permet de les faire rentrer...

Exercice 2 (Pourcentages).

1. Une grandeur Y égale aux $\frac{4}{5}$ de X. Que représente X en pourcentage de Y ? Calculer t le pourcentage d'évolution de Y à X et le coefficient multiplicateur associé au taux t.
2. Un blouson soldé bénéficie d'une réduction de 40 %. Son prix de départ est de 94 €. Le même blouson subit dans un deuxième magasin une baise de 60 %, mais se rendant compte qu'il vend à perte, le commerçant augmente son nouveau prix de 20 %. Où est-il finalement le plus avantageux d'acheter le blouson ?

▷ **Solution.**

1. On a : $Y = \frac{4}{5}X$ donc $X = \frac{5}{4}Y$. Le pourcentage d'évolution de Y à X est par définition $t = \Delta_{Y \to X} \times 100$ où $\Delta_{Y \to X} = \frac{X-Y}{Y}$ est la variation relative de la grandeur Y, de sorte que $Y + t\%Y = X$. Le coefficient multiplicateur associé à t est $k = 1 + \frac{t}{100}$, de sorte que $X = kY$. On a donc $k = \frac{5}{4}$ et $t = 25$.
2. Le piège est d'additionner les points de pourcentage pour chaque solde successif, et on aurait alors la même réduction pour les deux blousons, mais c'est grossièrement faux. En réalité, ce sont les coefficients multiplicateurs qui se multiplient entre eux. Le prix d'un blouson à k euros soldé à t % est $(1 - t\%)k$.

Exercice 3 (Arithmétique).

1. Le nombre 17 est-il premier ? Et le nombre 75789410 ?
2. Rappeler l'énoncé du théorème fondamental de l'arithmétique.
3. Effectuer la division euclidienne de 6894 par 299.
4. Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres 18 et 45. En déduire leur pgcd et leur ppcm. Quelle est la décomposition en facteurs premiers de 18×45 ?
5. Les entiers 12 et 135 sont-ils premiers entre eux ?

▷ **Solution.**

1. Pour vérifier si un petit nombre est premier, on utilise un crible d'Ératosthène. Les premiers nombres premiers sont : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23$. Il est beaucoup plus simple de démontrer qu'un nombre n'est pas premier : il suffit de lui trouver un facteur (premier) strict. Pour en trouver des petits facilement, il faut connaître ses premiers critères de divisibilité.
2. Le théorème fondamental dit que tout entier naturel non nul se décompose de manière unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de nombres premiers. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des nombres premiers p_1,...,p_r et des entiers > 0 α_1,...,α_r tels que $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, et si $p_1 < ... < p_r$ et $q_1 < ... < q_s$ sont aussi des nombres premiers et β_1,...,β_s des entiers > 0, si de plus $n = q_1^{\beta_1}...q_s^{\beta_s}$, alors on a $r = s$, $p_1 = q_1$, ..., $p_r = q_r$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_r = \beta_r$.
3. On pose la potence, comme à l'école. On rappelle que la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ est l'unique décomposition $a = bq + r$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{avec } r \in [\![1,b[\![}$.
4. Il s'agit de trouver le plus petit nombre premier divisant le nombre, puis sa plus grande puissance le divisant, puis on passe au suivant, etc. Si un facteur premier est évident, ne pas se priver de factoriser directement par lui, l'ordre dans le décomposition étant anodin.
   Pour trouver le pgcd de deux nombres à partir de leurs décompositions en facteurs premiers, il s'agit de sélectionner les facteurs communs et prendre la plus petite valuation des deux ; pur le ppcm, on prend la plus grande puissance de tous les facteurs apparaissant dans l'une ou l'autre des décompositions. Enfin, par unicité, la décomposition en facteurs premiers d'un produit est le produit des décompositions.
5. Autrement dit, la fraction $\frac{12}{135}$ (ou, de façon équivalente, $\frac{135}{12}$) est-elle irréductible ? Il s'agit exactement de voir si les nombres ont un facteur commun > 1.

☆☆☆☆☆ **Exercice 4** (Proportionnalité). Dire si les situations suivantes sont des situations de proportionnalité ; le cas échéant, illustrer par un calcul simple (et utile !).

1. Un distance mesurée en miles et la même distance mesurée en kiomètres.
2. Le prix d'un sac d'oranges et son poids.
3. Le poids d'un pack de lait et le nombre de briques de lait qui le composent.
4. Le nombre d'enfants d'une femme et son âge.
5. Le nombre d'enfants d'une femme ayant un enfant tous les ans à partir de sa majorité.
6. Le nombre d'enfants du pape et son âge.
7. Le nombre d'enfants du pape et le nombre de branchies du président américain.
8. Le périmètre d'un carré et son côté.
9. L'aire d'un carré est son côté.
10. Le triple du périmètre d'un carré et son côté.
11. Le cube du périmètre d'un carré et son côté.
12. La moyenne de trois notes de devoirs sur table et la première de ces trois notes.

▷ **Solution.**

1. Oui. Exemple : puisqu'une mile peut être assimilée à 1,6 kilomètres, vingt miles correspondent à environ 32 kilomètres.
2. Oui. Si un kilo d'oranges coûte 3 euros, quatre kilos d'orange coûtent 12 euros.
3. Non. En effet, la courbe représentative du nombre de briques de lait en fonction du poids est une fonction en escalier, et non linéaire.
4. Non : une femme peut avoir trois enfants à trente ans, mais toujours trois enfants à soixante ans et non $6 = 3 \times 2$ où $2 = 60 \div 30$.

5. Toujours pas : à 18 ans, cette femme aura donc un enfant, mais à $36 = 18 \times 2$ ans, cette femme aura $36 - 18 + 1 = 19$ enfants, et non $2 = 2 \times 1 = 36 \div 18$.
6. Oui. En effet, le nombre d'enfants du pape est toujours nul. Il s'écrit donc $f(x) = 0 = 0 \times x$ où x est l'âge du pape. C'est donc une situation de proportionnalité de rapport 0.
7. Oui, même raisonnement : si le président américain a $x = 17$ branchies, le pape aura toujours $f(x) = 0$ enfants.
8. Oui ! En effet, le périmètre d'un côté de côté a est $p(a) = 4a$. C'est donc une situation de proportionnalité de coefficient 4.
9. Non. Un carré de côté de longueur 1 aura une aire de 1 mais un carré de côté de longueur 2 aura une aire de $2^2 = 4 \neq 2 \times 1$.
10. Oui. Cette fonction s'exprime en fonction de a le côté du carré : $f(a) = 3p(a) = 3 \times 4a = 12a$. C'est donc une situation de proportionnalité de coefficient 12.
11. Non. Un carré de côté 1 aura un cube de périmètre de 4^3, mais un carré de côté 2 aura un cube de périmètre de $8^3 \neq 2 \times 4^3$.
12. Soient n_1, n_2, n_3 ces trois notes. Notons $m(n_1, n_2, n_3) = \frac{n_1+n_2+n_3}{3}$ leur moyenne. C'est une fonction de n_1, en l'écrivant $m' : n_1 \mapsto m(n_1, n_2, n_3)$ et en fixant n_2 et n_3. Alors $m'(n_1) = \frac{1}{3}n_1 + c$ où $c = \frac{n_2+n_3}{3}$. Ainsi, m' est linéaire, autrement dit on a une situation de proportionnalité, si et seulement si, $c = 0$, c'est-à-dire $n_2 = n_3 = 0$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 5** (Conversion Fahrenheit-Celsius). Dans le film *The Day after Tomorrow*, au cours de la 41ᵉ minute, après que trois hélicoptères de la Royal Air Force britannique se sont écrasés parce que leur kérosène a subitement gelé, on nous affirme, dans la version française du film, que le kérosène gèle à $-65°C$. Or, ce n'est pas ce que dit la version originale américaine. En effet, dans celle-ci, il est dit « negative one hundred and fifty degrees Fahrenheit », c'est-à-dire $-150°F$ (au demeurant, le point de fusion du kérosène est compris entre -48 et $-26°C$). Les formules de conversion entre les deux unités de température sont bien connues : pour convertir des degrés Fahrenheit en degrés Celsius, la formule est $[x°C] = ([x°F] - 32) \times \frac{5}{9}$. Donner la température de fusion du kérosène en degrés Celsius (selon la version originale du film) et expliquer l'erreur du traducteur.

▷ **Solution.** De toute évidence, le traducteur français a omis le signe $-$ de -150 durant le calcul ($(150 - 32) \times \frac{5}{9} = 65{,}3°C$) pour ensuite le rajouter au résultat final, et ainsi obtenir ce $-65°C$. En vérité, la formule utilisée correctement donne $-150°F = (-150 - 32) \times \frac{5}{9} = -101{,}1°C$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 6** (Qui dit triangle...). Une voiture descend quinze kilomètres sur une pente rectiligne de 3 degrés. Quelle distance a-t-elle parcouru sur la carte ? Quelle est le pourcentage de la pente ? On arrondira au dixième près à chaque étape du calcul.

▷ **Solution.** Qui dit triangle... dit trigonométrie. Ici, il s'agit de *résoudre* un triangle, c'est-à-dire trouver toutes ses informations (à partir deux angles et un côté, les longueurs des trois côtés...). Commencer par faire un schéma. Calculons par exemple la longueur AC, qui correspond au dénivelé. Puisque c'est le côté opposé à l'angle connu, on utilise la formule[1] de trigonométrie du triangle rectangle : $\sin(3°) = \frac{AC}{15 \text{ km}}$, d'où :

1. Rappelons que, dans la calculatrice, la valeur de l'argument du sinus doit être exprimée selon l'unité rentrée dans la calculatrice, ici, les degrés.

$h := AC = 15 \text{ km } \times \sin(3°)$, soit au dixième près[1], $AC \approx 0{,}79$ km. Il ne manque plus qu'à en déduire BC (distance parcourue « à plat » par la voiture, c'est-à-dire vue du ciel ou encore sur la carte). Par le théorème de Pythagore, $d := BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \approx 4{,}94$ km. On perd donc 600 mètres par rapport à la distance réelle.

Le pourcentage de la pente, le dénivelé et la distance vue du ciel sont reliés par la relation suivante : $\text{dénivelé} = \text{distance vue du ciel}\frac{\text{pente}}{100}$. On trouve une pente de 16 %.

☆☆☆☆☆ **Exercice 7** (Un peu de logique). Dans un monde différent du nôtre, la météo est toujours la même d'une semaine sur l'autre. Par exemple, s'il pleut le mardi 16, alors il pleut également tous les autres mardis.
Sidonie possède un parapluie et suit le principe, très bien pensé, suivant :

$$P : \text{« S'il pleut, Sidonie prend son parapluie ».}$$

Il pleut les mardis, les jeudis et les samedis. Les autres jours, il ne pleut pas. Seulement, Sidonie prend quand même son parapluie le dimanche, parce qu'il va bien avec son chapeau.

1. Quelle est la contraposée de la proposition P ?
2. Démontrer que la contraposée de P est vraie.
3. Quelle est la réciproque de la proposition P ?
4. Est-elle vraie ou fausse ?
5. Quelle est la *contra-réciproque* de la proposition P (la contraréciproque est définie comme la contraposée de la réciproque) ?
6. La réciproque d'une proposition vraie est-elle toujours vraie ?
7. La contraposée d'une proposition vraie est-elle toujours vraie ?
8. Que dire de la contraposée d'une proposition fausse ?
9. Que dire de la réciproque d'une proposition fausse ?
10. Donner un exemple de proposition (ou de théorème) vraie dont la réciproque est également vraie.

▷ **Solution.**

1. C'est la proposition : « Si Sidonie ne prend pas son parapluie, alors il ne pleut pas ». La contraposée de l'implication $A \implies B$ est, en toute généralité, l'implication NON $B \implies$ NON A.
2. On fait une table de vérité selon les valeurs de vérité de A et B et on constate que l'implication est toujours vraie. On rappelle qu'une implication $A \implies B$ est fausse, si et seulement si, A est vraie et B est fausse.
3. « Si Sidonie prend son parapluie, alors il pleut ». La réciproque de $A \implies B$ est $B \implies A$.
4. Elle est fausse. En effet, le dimanche, Sidonie prend son parapluie bien qu'il ne pleuve pas.
5. « S'il ne pleut pas, alors Sidonie ne prend pas son parapluie ». Remarquer que c'est aussi la réciproque de la contraposée.
6. Non, voir question surprécédente.
7. Oui. La démonstration est la même que celle faite sur un exemple ci-dessus.

Notons aussi que rien ne sert de convertir l'unité km en l'unité de base (le mètre), tant que toutes les longueurs intervenant restent dans cette unité et qu'aucune formule faisant intervenir d'autres grandeurs n'apparaisse.

1. Nous arrondissons selon la requête de l'énoncé, car, sinon, il aurait fallu mener le calcul littéral jusqu'au bout avant de procéder au calcul par machine pour éviter la propagation d'erreurs d'arrondis.

8. Elle peut être vraie : par exemple, la réciproque de la proposition fausse « Si Sidonie prend son parapluie, alors il pleut » est la proposition P qui est vraie.
En fait, elle est toujours vraie ! On peut le démontrer avec une table de vérité.
9. Elle est également fausse. En effet, la contraposée à la même valeur de vérité que l'implication de départ (toujours la même démonstration).
10. Les théorèmes qui sont des équivalences conviennent : le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès, etc.

☆☆☆☆☆ **Exercice 8** (Jour de tonte). Aujourd'hui, à la ferme, on tond les 150 moutons du propriétaire. Parmi eux, 140 sont des brebis (moutons femelles). De plus, sur les 150 moutons, on sait que 25 ont la tête noire, tandis que les autres ont la tête blanche.
Le soir, tous les moutons sont tondus et il faut les faire rentrer un à un, pris au hasard, dans la bergerie. Le tondeur, qui a vu toutes les bêtes dans la journée, fait la réflexion suivante : « Seulement 23 brebis ont la tête noire ». On fait entrer un premier mouton dans la bergerie.

1. Calculer la probabilité que ce mouton soit un bélier (*i.e.* un mouton mâle).
2. Calculer la probabilité que ce mouton ait la tête noire ou soit un bélier.
3. Calculer la probabilité que ce mouton ait la tête blanche et soit un bélier.

Ceci fait, on fait entrer un deuxième mouton dans la bergerie (toujours au hasard).

4. Calculer la probabilité que le premier mouton soit une brebis, et que le second mouton soit un bélier.
5. Calculer la probabilité que ces deux moutons soient une brebis et un bélier. Est-elle plus grande ou plus petite que la précédente ?

▷ **Solution.** Avant de commencer ce genre d'exercice, il est bon de déterminer les informations que l'on peut déduire directement des données.

- ⋆ Nombre de moutons = 150
- ⋆ Nombre de brebis = 140
- ⋆ Nombre de béliers = 150 − 140 = 10
- ⋆ Nombre de moutons à la tête noire = 25
- ⋆ Nombre de moutons à la tête blanche = 150 − 25 = 125
- ⋆ Nombre de brebis à la tête noire = 23
- ⋆ Nombre de béliers à la tête noire = 25 − 23 = 2 (puisqu'un mouton à la tête noire est soit une brebis, soit un bélier)
- ⋆ Nombre de béliers à la tête blanche = 10 − 2 = 8 (puisqu'un bélier a la tête soit blanche soit noire)
- ⋆ Nombre de brebis à la tête blanche = 125 − 8 = 117 (puisqu'un mouton à la tête blanche est soit une brebis, soit un bélier)

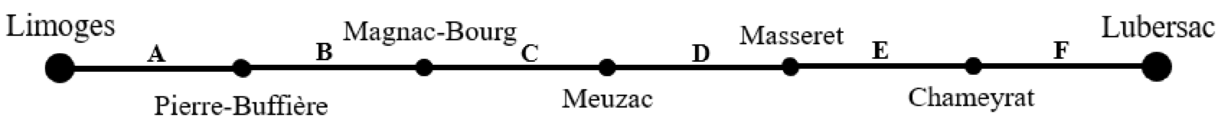
On remarque que l'on est en situation d'équiprobabilité, donc toutes les probabilités se calculent en considérant le nombre d'issues favorables quotienté par le nombre total d'issues dans l'univers (ici, 150, le nombre de moutons).

1. La probabilité que le mouton pris au hasard soit un bélier est $\frac{\text{nombre de béliers}}{\text{nombre de moutons}} = \frac{10}{150}$ soit un quinzième.
2. Par la formule du crible : $\frac{\text{nombre de béliers}+\text{nombre de moutons à la tête noire}-\text{nombre de béliers à la tête noire}}{\text{nombre de moutons}} = \frac{33}{150}$.
3. On a déjà fait ce calcul. On doit trouver $\frac{8}{150}$.
4. Pour deux choix successifs, on dresse systématiquement un arbre de probabilité.

Rappelons que la somme des probabilités sur toutes les branches issues d'un même nœud doit valoir 1, la probabilité de l'événement certain. La probabilité que le premier mouton soit une brebis et que le second mouton soit un bélier correspond au parcours noté en pointillés. [1] On sait d'après le cours que la probabilité d'un parcours sur un arbre est le produit des probabilités de chaque branche. Ici donc on cherche $\frac{14}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{14}{225}$. C'est relativement faible, ce qui est dû à la faible proportion de bélier.

5. La question est différente de la précédente, puisque l'ordre n'est plus pris en compte. Deux issues correspondent : un bélier puis une brebis, ou le contraire. Ainsi, on doit considérer une nouvelle issue, qui correspond au parcours de branche : bélier puis brebis (branche du bas, puis branche issue de celle-ci partant vers le haut). La probabilité de cette branche vaut, de même que précédemment, $\frac{1}{1} \times \frac{14}{15} = \frac{14}{225}$. Puisque ces deux issues s'excluent mutuellement (en effet, le premier mouton ne peut être à la fois une brebis et un bélier), la probabilité de la réunion des deux issues vaut la somme de leur probabilité, soit : $\frac{14}{225} + \frac{14}{225} = \frac{28}{225}$.

★☆☆☆☆ **Exercice 9** (Paradoxe de Rogers). Un jour, pendant les vacances d'été, Roger décide de parcourir un trajet reliant Limoges à Lubersac à pied et à monocycle, en faisant quelques détours. Lorsqu'il est à pied, il garde son monocycle sous le bras. Le trajet proposé par Mappy est divisé en portions sur lesquelles Roger se déplace à vitesse constante.



Chacune des portions mesure exactement 15 kilomètres de long. Tout le long de la portion A, Roger se déplace à monocycle. Sur la portion B, il se déplace ensuite à pied, puis, le long de la portion C, il se déplace à monocycle ; sur la portion D, à pied, etc. Voilà les temps de parcours de Roger sur chacune des portions avec le véhicule correspondant :

1. Pour ceux qui savent : la probabilité d'un quinzième sur la deuxième branche parcourue est en réalité la probabilité que le deuxième mouton soit un bélier sachant que le premier mouton est une brebis. Puisque ces deux événements sont indépendants, cette probabilité égale la probabilité que le deuxième mouton soit un bélier, tout court.

A	1 heure 30
B	30 min (Roger est en forme)
C	55 minutes
D	1 heure
E	1 h 10
F	4 heures (Roger est un peu fatigué)

1. Calculer au dixième près la vitesse moyenne de Roger sur chacune des portions.
2. En déduire la vitesse moyenne parcourue par Roger à monocycle, notée v_m, définie comme la moyenne (simple) des vitesses de Roger sur les trois portions qu'il parcourt à monocycle, et la vitesse moyenne parcourue par Roger à pied définie de la même manière, notée v_p.

Le dimanche suivant, Roger veut refaire le même trajet, mais lorsqu'il arrive à la portion D, il décide de la parcourir à monocycle afin d'améliorer ses performances. Cependant, manque de chance, il refait exactement les mêmes temps sur chaque portion, y compris la portion D.

3. Calculer les nouvelles vitesse moyenne à monocycle et vitesse moyenne à pied, notées respectivement v'_m et v'_p.
4. Expliquer comment cette situation illustre l'énoncé suivant : « lorsqu'on déplace un élément d'un ensemble vers un autre, il est possible que les moyennes des *deux* ensembles augmentent ».

☆☆☆☆☆ **Exercice 10** (Les Chinois sont tous forts en maths). Selon une idée commune, les Chinois seraient tous très doués en mathématiques. Posons-nous la question : est-il possible que l'ensemble des Asiatiques de la planète soient au-dessus de la moyenne générale en mathématiques de toute l'humanité ? On fait les approximations suivantes : 60 % des 7 milliards d'humains sont Asiatiques. On admet ceci : le niveau général en maths de tous les Asiatiques est de 16 (note sur 20), tandis que le niveau général en maths de tous les autres êtres humains est de 6.

Population considérée	Asiatiques	Non-Asiatiques
Niveau en maths	16	6
Niveau en anglais	10	14
Niveau en biologie	14	8

1. Combien y a-t-il de données dans la série statistique considérée ici ?
2. Quel est le pourcentage d'humains non asiatiques ? Calculer l'effectif de chaque donnée.
3. Rappeler la définition de la médiane.
4. Quelle est la médiane de cette série ?
5. Quelle est la moyenne générale en mathématiques de tous les êtres humains ? On admettra que c'est la moyenne de la série statistique considérée.
6. La moyenne fait-elle partie des valeurs de la série ?
7. La médiane et la moyenne de cette série sont-elles égales ?
8. Répondre au problème posé.

▷ **Solution.**

1. Il n'y a que deux données : Asiatiques et non-Asiatiques.
2. Il y a $100 - 60 = 40$ % de non-Asiatiques. Ainsi, il y a 4200 millions d'Asiatiques et 2800 millions de non-Asiatiques.
3. Lorsqu'une série statistique est ordonnée, la médiane est la valeur de la série qui partage cette série en deux séries de même effectif. Il y a donc autant de valeurs inférieures à la médiane que de valeurs supérieures.
4. Pour une série ayant un effectif total pair, ce qui est notre cas, on calcule : $\frac{7000000000+1}{2} = 3500000000{,}2$. La médiane est donc la moyenne simple entre la 3500000000$^{\text{e}}$ et la 3500000001$^{\text{e}}$ valeur. Ordonnons la série statistique selon leurs valeurs. La 3500000000$^{\text{e}}$ comme la 3500000001$^{\text{e}}$ valeur sont toutes deux associées à des individus de la série du groupe des Asiatiques. La valeur associée est donc 16 dans les deux cas, donc la médiane de la série considérée est 16.
5. Le niveau des Asiatiques en maths est, selon le tableau considéré, de 16. Le niveau des non-Asiatiques en maths est de 6. Cependant, les effectifs ne sont pas constants : il y a plus d'Asiatiques sur Terre que de non-Asiatiques. Calculons la moyenne de cette série statistique : $\frac{\text{valeur de la donnée } 1 \times \text{effectif de la donnée } 1 + \text{valeur } 2 \times \text{effectif } 2}{\text{effectif total}}$ soit dans notre cas une moyenne de 12. Remarquons qu'il aurait suffi de calculer : $16 \times 60\% + 6 \times 40\%$, ce qui revient au même, en évitant les grands nombres toutefois, ce qui est préférable.
6. La moyenne ne fait pas partie des données de la série, ce qui arrive généralement.
7. On a vu que la moyenne est de 12, tandis que la médiane est 16.
8. Les Asiatiques ont un niveau général en maths de 16 tandis que la moyenne générale de l'humanité est de 12, inférieur à 16, dans notre modèle. Ainsi, les Asiatiques ont un niveau strictement supérieur à la moyenne de l'humanité, ce qui est donc possible même s'ils représentent plus de la moitié de l'humanité.

Révisions de Seconde

★☆☆☆☆ **Exercice 11** (Juste pour être sûr). Énoncer et redémontrer les trois identités remarquables de développement/factorisation.

▷ **Solution.** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Elles sont valables pour tous nombres complexes a,b, en particulier pour des réels.

★★★★☆ **Exercice 12.** Factoriser : $4^n - 1$ où n est un entier naturel.

▷ **Solution.** On écrit : $4^n - 1 = (2^n)^2 - 1^2 = (2^n + 1)(2^n - 1)$.

★★★★★ **Exercice 13** (Éliminer une racine au dénominateur : méthode de l'expression conjuguée). Soient x,y deux rationnels quelconques. Après avoir précisé lorsqu'elle est définie, simplifier l'expression : $\frac{1}{x+\sqrt{2}y}$.

▷ **Solution.** Elle est définie pour tous x,y non simultanément nuls ; cela vient de l'irrationnalité de 2 (à écrire proprement). La technique est de multiplier au numérateur et au dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur $x - \sqrt{2}y$. On reconnaîtra ainsi une identité remarquable qui permet d'éliminer les racines au dénominateur et, après simplification, on obtient donc une expression de la forme $a + \sqrt{2}b$. Autrement dit, l'inverse d'un nombre non nul de la forme $X+\sqrt{2}Y$, $X,Y\in\mathbb{Q}$, est encore de cette forme, ce qui est remarquable *(l'extension* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *est un corps).*

☆☆☆☆☆ **Exercice 14.** On considère $B_n=\frac{(9^{n+1}+9^n)^2}{(3^{2n+1}-3^{2n})^2}$, $n\in N$. Calculer les termes de cette suite.

▷ **Solution.** En factorisant en haut et en bas par $9^n=3^{2n}$, on tombe sur une quantité constante égale à 2.

☆☆☆☆☆ **Exercice 15** (Calcul numérique). Calculer à la main :

1. $a=10+\frac{1}{10}+\frac{2}{10^3}+\frac{3}{10^5}+\frac{4}{10^7}+\frac{5}{10^9}$
2. $b=\frac{1}{24}-\frac{5}{12}-2\left(\frac{7}{21}+3\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\right)$
3. $c=(150^2-50^2)^2$
4. $d=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{75}+9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$
5. $e=1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{5}}}}$.

▷ **Solution.**

1. C'est l'écriture canonique du développement décimal d'un réel.
2. Méthode : réduire les fractions avant de les réduire au même dénominateur, et rebelote. Préférer le ppcm au produit des dénominateurs pour réduire au même dénominateur.
3. Il est nécessaire de remarquer l'identité remarquable pour éviter des calculs intractables.
4. Les grandes racines carrées ont des chances d'être réductibles : pour le voir, chercher les facteurs carrés des radicandes.
5. La seule difficulté est de savoir par quel calcul commencer.

☆☆☆☆☆ **Exercice 16** (Simplification). Simplifier les expressions suivantes :

1. $(2x-1)\times\frac{-1}{2-x}$ où $x\in\mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ où $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}^*$;
3. $(x^{200})^{300}$ où $x=-2$. Bonus : comparer $(x^{200})^{300}$ et $x^{200^{300}}$;
4. $(-a^{-1})^{-2}$ où $a\in\mathbb{R}^*$;
5. $\sqrt{\frac{(-a)^2}{(ab^{-2})^3}}$ où $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$;
6. $\frac{(ab)^{-3}}{a^3b^3}$ où $a,b\in\mathbb{R}^*$.

▷ **Solution.**

1. Il est important de toujours ordonner les polynômes par puissances décroissantes.
2. Pourquoi $\frac{a+b}{ab}$ est-elle bien définie ?
3. Que dire d'une puissance paire d'un réel négatif ? **Remarque pour plus tard.** Les règles pour des puissances quelconques sont vraies lorsqu'on élève un réel strictement positif. Si le réel est strictement négatif, on ne sait l'élever qu'à une puissance entière (voire rationnelle dans certains cas).
4. On se rappelle qu'inverser revient à opposer la puissance.
5. La racine carrée d'un réel positif est sa puissance $\frac{1}{2}$.
6. Une bonne règle est la suivante : on commence par ne faire apparaître dans une fraction que des puissances positives au numérateur comme au dénominateur.
   Ne surtout pas confondre les deux formules donnant $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ et $\frac{a^n}{a^m}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 17** (Découverte du second degré). Déterminer les carrés dont la valeur de l'aire est égale à 2 moins la valeur de son côté.

▷ **Solution.** On cherche à résoudre $x^2 = 2 - x$ où x est la longueur du côté du carré. C'est un trinôme du second degré équivalent à $x^2 + x - 2 = 0$. On peut factoriser à la main en faisant apparaître le début d'une identité remarquable : $x^2 + x - 2 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{4})^2 = (x + \frac{5}{4})(x - \frac{1}{4})$. C'est une équation produit nul qui a pour solutions $-\frac{5}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Or x est une longueur, donc positive, donc seule $\frac{1}{4}$ convient.

☆☆☆☆☆ **Exercice 18** (Calcul littéral). On considère l'expression $A(x) = (3x+1)(x-2)+(x+2)(x-5)$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$, puis mettre $A(x)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   — $A(x) = 0$;
   — $A(x) = 4x^2 + 7$;
   — $A(x) = 2x + 8$.

▷ **Solution.**

1. Même chose que précédemment.
2. La première équation a normalement été résolue à la question précédente. Quant aux autres, on est obligé de « changer de trinôme », sans quoi on ne sait pas faire (je ne sais pas résoudre a priori $(x - a)(x - b) = f(x)$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 19** (Résolution d'équations). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{-x+2}{3} - \frac{1-x}{2} = x - 1$;
2. $-2x^2 + 7x = 0$;
3. $(2x + 1)^2 + 2x + 1 = 0$;
4. $\frac{2x+1}{x+3} = 1$.

▷ **Solution.**

1. Une attitude saine est de vouloir éliminer les numérateurs afin de ne manipuler que des nombres entiers, puisqu'ici, il resteront assez petits.
2. Une équation du second degré sans terme constant n'est pas comme les autres. Pourquoi ?
3. C'est, en fait, la même chose que précédemment. (Il serait vraiment, vraiment idiot de développer ce carré.)
4. Cette équation a un domaine de validité à déterminer avant toute chose.

☆☆☆☆☆ **Exercice 20** (Modélisation d'un problème). Dans un magasin, un gros oiseau coûte deux fois plus qu'un petit oiseau. Une cliente achète trois petits oiseaux et cinq gros oiseaux et paie deux cents euros plus cher que si elle avait acheté cinq petits oiseaux et trois gros oiseaux. Combien coûte chaque oiseau ?

▷ **Solution.** On doit obtenir un système à deux équations et deux inconnues, ce que l'on sait résoudre en tapant sur les lignes. La seule difficulté est qu'il faut introduire une inconnue superfétatoire, le prix payé par la cliente, qui rend le système a priori insoluble, mais en fait non.

Soit k ce prix, p le prix d'un petit oiseau, g le prix d'un gros. Par hypothèse : $\begin{cases} 3p+5g=k \\ 5p+3g=k-200. \end{cases}$ On va éliminer k qui ne nous est pas demandé. On soustrait pour cela la deuxième ligne à la première, qui donne $-2p+2g=200$ puis $g=p+100$. Il suffit d'injecter cette information dans l'une des deux équations pour conclure.

★★☆☆☆ **Exercice 21** (Équations de droite).

1. Donner une équation de la droite passant par les points (5,3) et (2, - 1).
2. Donner une équation de la droite perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OA}$, où $A=(-1,1)$ et O est l'origine du repère, et passant par le point (1,1).

▷ **Solution.**

1. Méthode : poser $y=mx+p$ et trouver m, p en évaluant en deux paires de solutions.
2. Méthode : utiliser le produit scalaire pour obtenir une équation, avec $T=(1,1)$. En effet, M appartient à la droite cherchée, si et seulement si, $\overrightarrow{TM}.\overrightarrow{OA}=0$.

★★☆☆☆ **Exercice 22** (Résolution d'inéquations). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-3x^2+6x-3 \leqslant 0$;
2. $4x^2 \leqslant 1$;
3. $\begin{cases} 3-2x \geqslant \text{-}5 \\ 3x-2 > \text{-}1 \end{cases}$;
4. $\text{-}\frac{1}{3} \leqslant 4-3x \leqslant \frac{1}{2}$.

▷ **Solution.**

1. On peut, au choix, utiliser une inéquation produit nul (qui se résoud par un simple raisonnement sur la règle des signes), mais pour cela, il faut factoriser ; ou bien, un dessin selon le signe du coefficient dominant suffit. Dans les deux cas, il faut connaître les racines.
2. Ceci se résoud beaucoup plus facilement. Un dessin permet d'éviter une erreur bête.
3. L'ensemble des solutions d'un système est l'intersection des ensembles de solutions de chaque ligne.
4. Une suite d'inéquations correspond à une conjonction d'inéquations et on raisonne comme précédemment.

★★★☆☆ **Exercice 23** (Composée de transformations affines). Soient $f: x \mapsto ax+b$ et $g: x \mapsto cx+d$ deux fonctions affines où a,b,c,d sont des nombres réels. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'image par g de l'image par f de x. Est-elle forcément égale à l'image par f de l'image par g de x ?

▷ **Solution.** Pour chercher un contre-exemple, toujours faire simple. Prendre f nulle et g constante égale à 1. Alors $f \circ g(0)=0 \neq 1 = g \circ f(0)$.

★★★☆☆ **Exercice 24** (Géométrie sur le cercle). Soient $[AC]$ et $[BD]$ deux diamètres d'un même cercle. Montrer que $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

▷ **Solution.** Faire un dessin ! Puisqu'on parle de vecteurs, il va falloir appeler un ami : son nom commence par Ch et finit par asles. Il sera certainement nécessaire d'ajouter aux données, mais un certain point s'impose assez clairement.

Avis aux plus perspicaces, la propriété peut même se déduire par un raisonnement de géométrie élémentaire (mais ce n'est pas le but de l'exercice ici). En effet, deux diamètres d'un même cercle sont deux segments se coupant en leur milieu. Ce sont donc, par caractérisation, les diagonales d'un paralélllogramme. Et c'est exactement ce que dit cette relation vectorielle ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, à opposition près) à propos du quadrilatère $ABCD$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 25** (Une identité vectorielle). Toutes les lettres capitales désignent des points du plan. Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ et M un point hors de (AB). Soient C,D tels que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IM}$.

1. Deviner la première question.
2. *(Échauffement)* Démontrer l'égalité suivante : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $AIMC$.
4. Montrer que M est milieu de $[CD]$.
5. Montrer que $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BM}$.
6. Soit E le symétrique de I quant à M. Traduire cette égalité de façon vectorielle (sans démonstration) et démontrer : $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IE}$.

▷ **Solution.**

1. Faire un dessin...
2. Opposer les vecteurs pour faire apparaître des couples de bipoints dont l'un commence par ce par quoi l'autre termine.
3. Lire la correction de l'exercice précédent ;
4. Cela revient à montrer : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MD}$.
5. Décomposer grâce à la relation de Chasles afin d'exploiter les relations précédentes.
6. E est le symétrique de I par rapport à M signifie que M est le milieu de $[EI]$ et l'on a déjà exprimé vectoriellement quelque chose de ce genre. Pour l'identité, la technique est la même que précédemment, et si avec ça, on n'a pas assez de parallélogrammes dans la journée, je ne sais pas ce qu'il faut.

☆☆☆☆☆ **Exercice 26** (Progression arithmétique). Un étang cylindrique étanche de 9000 mètres cubes et dix mètres de profondeur est rempli le premier janvier aux deux tiers. Sale époque, il pleut tous les jours, uniformément et en continu, du 8 millimètres[1] par heure. Quel jour verra-t-on l'étang déborder ?

▷ **Solution.** Travaillons en litres. L'étang a une capacité de $V = 9$ millions de litres. Calculons sa surface au sol : $V = 10 \times b$ où 10 mètres est la hauteur du cylindre, b l'aire de la base, soit une surface de 900 mètres carrés (V,b sont en mètres cubes et mètres carrés). Ainsi, en une journée, l'étang se voit remplir de $24 \times 8 \times 900000 = 172800 = r$ litres d'eau supplémentaires. Ainsi, au jour $n+1$, l'étang contient $u_{n+1} = u_n + r$ litres d'eau (jusqu'au débordement). On sait que $u_1 = 6$ millions de litres. Ainsi, $u_n = u_1 + (n-1)r$. On cherche le plus petit n tel que u_n excède les 9 gigalitres, autrement dit, résolvons $u_n > 9$ GL et prenons la plus petite valeur solution. On trouve $n = 19$: l'étang débordera le 19 janvier.

1. Cette unité (à ne pas confondre avec une unité de distance préfixée, plus courante) correspond au litre d'eau par mètre carré.

☆☆☆☆☆ **Exercice 27** (Pour travailler l'informatique). On reprend le problème précédent mais on suppose que, tous les trois jours (y compris le premier janvier), la commune vient et pompe trois cent mille litres d'eau. Écrire un programme Python pour répondre à la question sous ces nouvelles hypothèses. Même exercice, en supposant qu'il ne pleut pas un jour sur cinq, puis un jour sur quatre, etc. Quelle est la fréquence minimale de jour sans pluie de sorte que l'étang connaisse au moins un assèchement ?

▷ **Solution.** On utilise la division euclidienne pour transmettre l'information « tous les trois jours », « un jour sur deux », etc. Dans le premier cas :

```
u=6000000
n=1
while u<=9000000:
    n+=1
    u+=172800
    if n%3==2:
        u-=300000
print(n)
```

et l'on obtient un débordement au 43e jour. Pour la question avec absence de pluie régulière, on rajoute la ligne suivante :

```
u=6000000
n=1
d=5
while u<=9000000:
    n+=1
    if n%d!=1:
        u+=172800
    if n%3==2:
        u-=300000
print(n)
```

Il suffit alors de changer la valeur de $d = 5,4,\dots$. Pour $d = 3$, on trouve encore $n = 198$, mais pour $d = 2$, le programme ne se termine pas ! En faisant apparaître le résultat à chaque étape :

```
u=6000000
n=1
d=2
while u<=9000000:
    n+=1
    if n%d!=1:
        u+=172800
    if n%3==2:
        u-=300000
    print(u)
```

```
        print(n)
```

on observe un assèchement à partir du 433ᵉ jour.