

Feuille d'exercices 2

Mathématiques discrètes

Logique

★★★★☆ **Exercice 1** (Ex falso quodlibet). Montrer que, dans toute pièce non vide, il existe au moins une personne telle que si elle boit, alors tout le monde dans la pièce boit.

★★★★☆ **Exercice 2** (Montrer une proposition logique : la table de vérité). Vérifier que, pour n'importe quelles propositions A et B , soit l'implication $A \implies B$ est vraie, soit $B \implies A$ est vraie.

★★★★☆ **Exercice 3** (Raisonnement par équivalences successives). Montrer que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}} + 2}}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}}.$$

★★★★☆ **Exercice 4** (Raisonnement par analyse-synthèse). Résoudre, lorsque cela a un sens, l'équation de la variable réelle : $x = \sqrt{2 - x}$.

★★★★☆ **Exercice 5** (Raisonnement par l'absurde). Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Montrer de même que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel, ni $\sqrt[3]{2}$.

★★★★☆ **Exercice 6** (Démonstration non constructive). Montrer, sans en exhiber nécessairement, qu'il existe deux nombres irrationnels $x, y > 0$ tels que x^y soit un nombre rationnel.

Polynômes

★★★★☆ **Exercice 7** (Le nombre d'or φ).

1. Montrer qu'il existe un nombre φ de sorte que si $\varphi = \frac{a}{b}$ où a, b sont deux longueurs strictement positives, alors $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ et que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Montrer que $\varphi \in [1, 5; 2]$.
3. À quoi est-égal le nombre $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ défini comme la limite (dont on admet qu'elle existe) de la suite $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

☆☆☆☆☆ **Exercice 8 (À la conquête des trinômes).** Soit x un réel, a, b, c , trois réels et on considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. À quelle condition P est-il du second degré ? À quel moment cette hypothèse apparaît-elle dans le théorème fondamental ? On fait cette hypothèse dès à présent.
2. Dans le cas où $\Delta > 0$, comparer les deux racines distinctes de P .
3. Étudier le cas $c = 0$.
4. Étudier le cas $b = 0$.
5. Étudier le cas $a = b = c$.
6. Étudier le cas $b = c = -a$.
7. En observant une symétrie sur une parabole quelconque, donner les coordonnées de son sommet en fonction de a, b, c .

☆☆☆☆☆ **Exercice 9 (Relations de Viète du second degré).** Exprimer la somme et le produit des racines d'un trinôme du second degré de discriminant positif en fonction des coefficients de ce trinôme.

Application : trouver une solution particulière dans \mathbb{R}^2 du système :
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}.$$

☆☆☆☆☆ **Exercice 10 (Équation du troisième degré).** On considère $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Déterminer les racines réelles de P .

☆☆☆☆☆ **Exercice 11 (Équation bicarrée).** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Suites et sommes

☆☆☆☆☆ **Exercice 12 (Le symbole sigma).** On introduit un symbole pour noter de façon plus compacte les sommes numériques. Étant donnée une suite finie de nombres réels u_1, \dots, u_n , on note la somme $S = u_1 + \dots + u_n$ de la façon suivante :

$$S = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Le symbole k est un indice, dit *muet*, car on aurait pu choisir n'importe quel autre symbole, et il n'existe pas en dehors de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{i=1}^n u_i.$$

Par défaut, c'est un entier qui varie entre la valeur indiquée en dessous de la somme (et on l'affecte alors par le signe $=$), ici 1, et la valeur indiquée au-dessus de la somme, ici n . On dit que l'on somme *pour* $k = 1, 2, \dots, n$ ou k *variant de* 1 à n . À chaque étape, on ajoute u_k à la valeur précédente, la somme vide étant par convention égale à 0. L'ordre dans lequel les $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont pris n'a pas d'importance, car l'addition est une opération commutative ($a + b = b + a$).

1. Que vaut $\sum_{k=1}^3 k$? Que vaut $\sum_{k=0}^3 k$?
2. Que vaut $\sum_{k=1}^3 k^2$?
3. Que vaut $\sum_{k=1}^3 1$? Que vaut $\sum_{k=0}^3 1$?
4. Soient u et v deux suites réelles. Soit n un entier naturel. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^n u_k + v_k = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k$? Corriger si besoin.
5. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=p}^n u_k$? Corriger si besoin.
6. Montrer que pour tout réel t , $\sum_{k=0}^n t u_k = t \sum_{k=0}^n u_k$.

☆☆☆☆ **Exercice 13 (Somme des premiers entiers).** On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = S = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Ecrire $2S = S + S$ de sorte que le premier terme ordonne les termes par ordre croissant, et le second terme, à aligner en dessous, par ordre décroissant.
2. Qu'observe-t-on pour deux nombres l'un au-dessus de l'autre?
3. Combien cette somme a-t-elle de termes?
4. Conclure.

☆☆☆☆ **Exercice 14 (La factorielle).** Étant donné n un entier naturel, on définit la *factorielle* de n comme l'entier naturel $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$, autrement dit, $n! = \prod_{k=1}^n k$ où le symbole \prod note comme le symbole Σ un produit au lieu d'une somme. On pose, par convention, $0! = 1$.

1. Que valent $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.
3. Exprimer $\prod_{k=1}^n k^2$ en fonction de $n!$.
4. Que dire de l'identité : $(nm)! = n!m!$ où n, m sont des entiers naturels?
5. Comparer $2^n, n!$ et n^n .
6. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$? (On dit que l'exponentielle est négligeable devant la factorielle.)
7. On cherche à démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tous entiers naturels $k \leq n$.
 - (a) Rappeler la définition des coefficients binomiaux.
 - (b) Vérifier la formule pour $n = 1$ et k quelconque.
 - (c) Montrer par récurrence sur n , en utilisant la formule de Pascal, la formule des coefficients binomiaux en fonction de la factorielle.
 - (d) En déduire que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un entier.
 - (e) Retrouver la formule de symétrie des coefficients binomiaux.

(f) Donner une formule pour $\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Combinatoire

☆☆☆☆ **Exercice 15 (Formule du crible de Poincaré).** Soient A, B deux ensembles finis.

1. Montrer à l'aide d'un diagramme que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
2. Que se passe-t-il lorsque A et B sont disjoints ?
3. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B)$ en toute généralité.
4. Vérifier que cette formule est vraie si $A = B$.
5. Combien y a-t-il d'entiers inférieurs à 20 qui soient pairs ou multiples de 3 ?

☆☆☆☆ **Exercice 16 (Preuve par dénombrement de la formule de Pascal).** Après avoir rappelé la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, $k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule de Pascal sans calcul, en utilisant la formule de l'exercice précédent.

INDICATION Si l'on isole un élément x d'un sac à n boules, alors on peut considérer les parties à k boules ne contenant pas la boule x et les parties à k boules dont on sait qu'elles la contiennent.

Probabilités

☆☆☆☆ **Exercice 17 (Poker).** On joue au poker avec un jeu de 52 cartes. Une main est toujours constituée de 5 cartes.

1. Quelle chance a-t-on d'obtenir un carré ?
2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un full ?
3. Quelle chance a-t-on d'obtenir une double paire ?
4. Quelle chance a-t-on d'obtenir un brelan ?
5. Quelle chance a-t-on d'obtenir une paire ?
6. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush ?
7. Quelle chance a-t-on d'obtenir une suite ?
8. Quelle chance a-t-on d'obtenir une couleur ?
9. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un as ?
10. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un trèfle ?
11. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins une figure ?
12. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou une figure ?
13. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou un trèfle ?
14. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et une figure ?
15. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et un trèfle ?

☆☆☆☆ **Exercice 18 (La formule de Bayès).** Un test de détection d'une maladie rare est positif à 99 % lorsqu'un individu est atteint de cette maladie, et il est positif à 0,1 % lorsqu'il n'est pas atteint. Supposons que 0,01 % de la population soit atteint de cette maladie. On considère un

individu pris au hasard dans la population. Sachant qu'il est positif au test de détection, calculer la probabilité qu'il soit atteint par la maladie.

Informatique avec Python

- ☆☆☆☆☆ **Exercice 19** (Programmation fonctionnelle sur Python). Écrire un programme qui, à partir de la saisie d'un rayon et d'une hauteur, calcule le volume d'un cône droit.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 20** (Une fonction booléenne). Écrire une fonction qui affiche « PAIR » si un entier donné est pair est « IMPAIR » sinon.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 21** (Boucle itérative fixe). Écrire une fonction qui calcule la somme des premiers entiers jusqu'à un entier donné.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 22** (Boucle itérative conditionnelle). Écrire un programme qui calcule la plus grande puissance de 2 divisant un entier donné.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 23** (Approximation numérique). Écrire un programme qui approxime la valeur de la constante mathématique e en fonction de n assez grand en utilisant la formule $e \approx \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$.

Vers l'analyse : les inégalités

- ☆☆☆☆☆ **Exercice 24** (Positions relatives de paraboles). Comparer les positions relatives des paraboles d'équation $y = 3x^2 + 6x + 1$ et $y = 2x^2 - 7x - 2$.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 25** (Inégalité arithmético-géométrique). Montrer que, pour tous réels a, b positifs, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- ☆☆☆☆☆ **Exercice 26** (Inégalité de Bernoulli (par le calcul)). Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel $x > 0$, $(1+x)^n > 1+nx$.