Théorie de Teichmüller

1 Approfondissements sur les surfaces de Riemann

1.1 Surfaces de type fini

Définition. Une *surface de type fini* est une surface compacte privée d'un nombre fini de points.
Théorème. *(Classification des surfaces à bord)* Toute surface à bord de type fini est isomorphe à $\Sigma_{g,n,b} := \Sigma_g \smallsetminus \{p_1,\dots,p_n\}, \bigcup_{i=1}^{b} D_i$ où les D_i sont des disques ouverts. g est le *genre*, n le nombre de *pointages* et b le nombre de *composantes de la frontière*. Le triplet (g,n,b) est la *signature* de la surface. En particulier, les surfaces fermées sont entièrement déterminées par leur genre.
Définition. *(Triangulation faible)* Soit S une surface. Une *triangulation (faible)* est un triplet (S,V,F) où $V \subseteq S$ est fini, E est une collection fini d'arcs à extrémités dans S, et $S \smallsetminus (V \cup E)$ est une réunion disjointe finie $F = \{f_1,\dots,f_k\}$ de disques dont chacun est incident à trois éléments de E en comptant les multiplicités.
Exemple. Le tore se triangule par un sommet, trois arêtes et deux faces.
Définition. *(Caractéristique généralisée)* Un lemme facile donne que $\chi(\Sigma_g) = 2-2g$ (en triangulant le polygone fondamental, par exemple). On pose pour une surface non fermée S : $\chi(S) = 2-2g-n-b$. Remarque : cette définition coïncide avec 1) la définition homologique 2) la généralisation des triangulations aux surfaces trouées.

1.2 Automorphismes des surfaces de Riemann

Théorème. *(Uniformisation, admis)* Toute surface de Riemann simplement connexe X est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ où $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Im}(z) > 0\} \simeq \mathring{D}^1$. En particulier, tout domaine simplement connexe strict du plan complexe est biholomorphe au disque de Poincaré.
Lemme. Soit $D \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine (= ouvert connexe) et $G < PSL_2(\mathbb{C})$ tel que G fixe D et agit librement sur D, *i.e.* pour tout $g \in G$ $g(D) = D$ et pour tout $g \neq e$ les points fixes de g sont hors de D. Si de plus l'action de G est proprement discontinue (pour tout compact $K \subseteq D$, $\{g \in G \mid g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini, le quotient D/G est une surface de Riemann.
Corollaire. Toute surface de Riemann X est un quotient de $D = \mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{H}$: il existe $G < \mathrm{Aut}(D)$ tel que $G \circlearrowright D$ librement et proprement discontinûment et $X = D/G$. En effet, $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$ où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X.
Exemples.

1. *(Plan complexe)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{C}^*$.
2. *(Sphère de Riemann)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1\mathbb{C}) = PGL_2(\mathbb{C}) = PSL_2(\mathbb{C})$. En effet, $PGL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par multiplication matricielle. L'action sur $\hat{\mathbb{C}}$ est explicitement :
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} \text{ si } z \neq -\frac{d}{c} \\ \infty \text{ sinon} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0 \\ \infty \text{ sinon.} \end{cases} \end{cases}$$
On les appelle *transformations de Möbius.*
3. *(Tores)* On prend $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$. Alors $\Lambda_\tau = \langle g_1, g_\tau \rangle = \{z \mapsto z + m + n\tau, n,m \in \mathbb{Z}\} = \{\begin{pmatrix} 1 & m+n\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n,m \in \mathbb{Z}\} < PSL_2(\mathbb{C})$ vérifie les hypothèses précédentes sur $D = \mathbb{C}$.
Vérifions la discontinuité propre. La *distance de translation* de $g \in \Lambda_\tau$ sur $\mathbb{C}$ est $T_g = \inf\{|g \cdot z - z|, Z \in \mathbb{C}\}$. (Dans ce cas, elle est réalisée en tout point de $\mathbb{C}$.) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ compact. On observe que si $T_g > 2diam(K)$, $g(K) \cap K) = \emptyset$.
Ce quotient est un tore : tout point de $\mathbb{C}$ s'écrit $x + y\tau$ de manière unique d'où une application bijection $[x + y\tau] \in \mathbb{C}/\Lambda_\tau \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) \in S^1 \times S^1$.
4. *(Surfaces hyperboliques)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$) qui agit par homographies.

Heuristique. Ainsi $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ est un tore. Mais pour quels τ,τ' ces quotients sont-ils biholomorphes ? La théorie de Teichmüller y répond.
Propriété. *(Quotients de $\hat{\mathbb{C}}$)* Toute surface de Riemann de revêtement universel $\hat{\mathbb{C}}$ est biholomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$ (les transformations de Möbius ont toujours des points fixes).
Propriété. *(Quotients de $\mathbb{C}$)* Si X est une surface de Riemann de revêtement universel $\mathbb{C}$, elle est biholomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ ou à un $\mathbb{C}/\Lambda_{\lambda,\mu}$ où λ,μ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Si X est une surface de Riemann difféomorphe à $\mathbb{T}^2$, alors le revêtement universel de X est biholomorphe à $\mathbb{C}$.
La preuve est formatrice. On utilise :

1. Il n'existe pas de sous-groupe strict de $PSL_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{H}/G$ existe et soit un tore.
2. Si G existe, $G \simeq \mathbb{Z}^2$.
3. Si $G < PSL_2(\mathbb{R})$ et G agit proprement discontinûment sur $\mathbb{H}$, si G est abélien, alors $G = \mathbb{Z}$ ou un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. *(Classification des éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$)* Si $g \in PSL_2(\mathbb{R}), g \neq e$ alors

- $\star$ soit $\exists! z \in \mathbb{H} \quad g(z) = z$ auquel cas g peut être conjugué dans $SO(2)$. On dit que g est *elliptique* ;
- $\star$ soit $\exists! x \in \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x) = x$ auquel gas g peut être conjugué dans $\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. On dit que g est *parabolique* ;
- $\star$ soit $\exists x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad g(x_i) = x_i$ auquel cas g est conjugué à $\begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. On dit que g est *hyperbolique* ou *loxodromique.*

Corollaire. Toute surface de genre $\geqslant 2$ n'est pas d'un des genres précédents. On dit qu'elle est *hyperelliptique.* **Exemples.** *(Quotients de $\mathbb{H}$)* Il y a donc beaucoup de quotients de $\mathbb{H}$, car tous les précédents sont S^2 ou $\mathbb{T}^2$. On dispose par exemple des surfaces hyperlliptiques $X = \mathring{X} \cup \{(\infty,\infty)\}$ où $a_1,...,a_{2g+1} \in \mathbb{C}$ sont distincts et $\mathring{X} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = (z-a_1)...(z-a_{2g+1})\}$. On montre qu'elle a une structure complexe, compacte et connexe. De plus, elle est de genre g. Pour $g \geqslant 2$ c'est donc un quotient de $\mathbb{H}$. Par conséquent, toute surface compacte orientable a une structure de surface de Riemann.

Définition. *(Involution hyperlliptique)*
$$\iota : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ (z,w) & \longmapsto & \begin{cases} (z,-w) & (z,w) \neq (\infty,\infty) \\ (\infty,\infty) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
est un automorphisme de X. π est alors l'application quotient $X \to X/\iota$ qui est le revêtement branché $X \to \hat{\mathbb{C}}$ permettant le calcul de Riemann-Hurwitz.

1.3 Géométrie riemanienne sur les surfaces orientables

Fait. Toute surface de Riemann est équipée d'une métrique riemanienne de courbure constante 1, 0 ou -1. Ces dernières sont dites *hyperboliques.*

Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec les métriques complètes de courbure constante 1, 0 ou -1 à isométrie près et homothétie près dans le cas euclidien.

Théorème. *(Killing-Hopf, admis)* Toute 2-variété riemannienne complète simplement connexe de courbure constante 1, 0 ou -1 est isométrique à S^2, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{H}$.

Propriété. Les isométries préservant l'orientation sont :
- $\star$ $\mathrm{Isom}^+(S^2) = SO(3)$.
- $\star$ $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2$.
- $\star$ $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) = PSL_2(\mathbb{R})$.

Propriété. Si $\Sigma_{g,n,b}$ est hyperbolique, $aire(\Sigma_{g,n,b}) = 2\pi(2g+b+n)$.

Théorème. Les structures complexes sur une surface fermée orientable de type fini à biholomorphisme près sont en correspondance bijective avec ses classes de métriques riemaniennes conformes à difféomorphisme près.

2 Espaces de Teichmüller, espaces de module

2.1 Cas d'étude : le(s) tores

Remarque. Par uniformisation il existe une unique structure complexe en genre 0 S^2.

Propriété. À rotation et dilatation près, tout tore est de la forme $R_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ par $(\lambda,\mu) \rightsquigarrow (1,\tau)$. Alors pour tous $\tau,\tau \in \mathbb{H}$, R_τ et $R_{\tau'}$ sont biholomorphes si et seulement si $\tau' = h(\tau)$ pour une homographie $h \in SL_2(\mathbb{Z})$. Autrement dit : les surfaces de Riemann difféomorphes au tore à biholomorphisme près sont en bijection avec $\mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathcal{M}_1$, $\mathbb{H} = \mathcal{T}_1$.

Propriété. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, il existe $g \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $g\tau \in \mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -\frac{1}{2} \leqslant \mathfrak{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2}\}$. De plus :
- $\star$ si $\tau \in \mathring{\mathcal{F}}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{\tau\}$;
- $\star$ si $\mathfrak{Re}(\tau) = \frac{1}{2}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, g\tau+1\}$;
- $\star$ si $\mathfrak{Re}(\tau) = -\frac{1}{2}$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, g\tau-1\}$;
- $\star$ si $|\tau| = 1$, $(PSL_2(\mathbb{Z}) \cdot \tau) \cap \mathcal{F} = \{g\tau, -\frac{1}{\tau}\}$.

Propriété. Deux *marquages* $\Sigma_p = [A_p,B_p],\Sigma'_{p'}$ d'un tore $\ni p$, *i.e.* choix de générateurs du GF, sont équivalents si un chemin $p \to p'$ conjugue A_p,A'_p et B_p,B'_p. Alors les structures marquées $R_\tau,R_{\tau'}$ sont équivalentes si et seulement si $\tau = \tau'$. Ainsi $\mathcal{T}_1$ est l'ensemble des structures complexes marquées sur le tore à difféomorphisme près.

On peut définir une façon de marquer plus commode.

Propriété. Deux difféos préservant l'orientation $f_i : S \to R_i$, R_i surface de Riemann, S surface orientée difféomorphe au tore, sont *équivalents* si $f_2^{-1}hf_1 \sim id_S$. Alors l'ensemble des (R,f), R surface de Riemann, $f : S \to R$ à équivalence près est en bijection avec $\mathcal{T}_1$ via $(R,f) \mapsto (R,f_*([A],[B]))$.

2.2 Cas général : marquages des surfaces

Définition. *(Espace de Teichmüller)* Soit S une surface orientée de type fini. L'espace de Teichmüller de S est

$$\mathcal{T}(S) = \{(R,f), R \text{ surface de Riemann}, f : S \to R \text{ difféomorphisme préservant l'orientation}\}/\sim$$

où $(R_1,f_1) \sim (R_2,f_2) \iff \exists h : R_1 \to R_2$ biholomorphisme tel que $f_2^{-1}hf_1 \sim id_S$. Si S est de genre g à n pointages, on note $\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}_{g,n}$ et l'on impose que l'homotopie à id soit relative aux pointages (un à un, ce qu'il n'est pas nécessaire d'imposer !).

Définition. Soit S une surface de Riemann fermée de genre g. Un *marquage* de S est un ensemble de générateurs du groupe fondamental $W = (A_1,...,A_g,B_1,...,B_g$ en un point p tels que $\pi[A_i,B_i] = e$. Deux marquages W,W' sont *équivalents* lorsqu'il existe une chemin continu entre leur point d'ancrage tel que le morphisme induit sur les GF envoie W sur W'. Deux paires de surfaces de Riemann marquées sont *équivalentes* s'il existe un biholomorphisme dont le morphisme induit envoie W sur W'.

Théorème. Soit S une surface fermée marquée par Σ. Alors $\mathcal{T}(S)$ est en bijection avec les paires (R,Σ_p) où R est une surface de Riemann fermée difféomorphe à S, $p \in R$ et Σ_p un marquage sur R à équivalence près, par $[(R,f)] \mapsto [(R,f_*(\Sigma)]$.

Lemme. *(Alexander)* Soi $\varphi : D^2 \to D^2$ un homéomorphisme tel que $\varphi_{|S^1} = id$. Alors φ est isotope à D. **Propriétés.**

1. Si S est difféomorphe à $\Sigma_0,\Sigma_{0,1},\Sigma_{0,2},\Sigma_{0,3}$, alors $\mathcal{T}(S)$ est un point.
2. $\mathcal{T}(\Sigma_{1,1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}(\Sigma_1)$.

Définition. *(Mapping class group)* $(\Sigma,x_1,\ldots,x_n)$ surface fermée orientée. Alors $MCG(\Sigma,x_1,\ldots,x_n)$ est l'ensemble des *difféotopies*, *i.e.* classes à homotopie près des $f : \Sigma \to \Sigma$ difféomorphismes pointés préservant l'orientation.

Définition. *(Espace de modules)* $MCG(\Sigma)$ agit sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ par $[X,f] \mapsto [X,f \circ \varphi^{-1}]$. Son quotient est l'espace de modules. Dans $\mathcal{M}(\Sigma)$, les points marqués sont encore marqués.

Proposition. $MCG(\Sigma_{0,n})$ est trivial pour $n \leqslant 3$.

Définition. *(Torsion de Dehn)* Sur l'anneau $A = [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on considère $T : (t,[\theta]) \mapsto (t,[\theta + t])$.

Propriété. $MCG(A) \simeq \mathbb{Z} \simeq \langle [T] \rangle$.