Feuille d'exercices 2
Mathématiques discrètes

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

INDICATION On pourra utiliser l'axiome suivant : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élement.

Logique

Exercice 2 (Ex falso quodlibet). Montrer que, dans toute pièce non vide, il existe au moins une personne telle que si elle boit, alors tout le monde dans la pièce boit.

Exercice 3 (Montrer une proposition logique : la table de vérité). Vérifier que, pour n'importe quelles propositions A et B, soit l'implication $A \implies B$ est vraie, soit $B \implies A$ est vraie.

Exercice 4 (Raisonnement par équivalences successives). Montrer que

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}+2}}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}}.$$

Exercice 5 (Raisonnement par analyse-synthèse). Résoudre, lorsque cela a un sens, l'équation de la variable réelle : $x = \sqrt{1-3x}$.

Exercice 6 (Raisonnement par l'absurde). Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Montrer de même que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel, ni $\sqrt[3]{2}$.

Exercice 7 (Démonstration non constructive). Montrer, sans en exhiber nécessairement, qu'il existe deux nombres irrationnels $x,y > 0$ tels que x^y soit un nombre rationnel.

Polynômes

Exercice 8 (Le nombre d'or φ).

1. Montrer qu'il existe un nombre φ de sorte que si $\varphi = \frac{a}{b}$ où a,b sont deux longueurs strictement positives, alors $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ et que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Indication Se ramener à une équation ne faisant intervenir que la quantité φ puis à une équation du second degré en φ.

2. Montrer que $\varphi \in [1{,}5; 2]$.
3. À quoi est-égal le nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ défini comme la limite (dont on admet qu'elle existe) de la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

☆☆☆☆☆ **Exercice 9 (À la conquête des trinômes).** Soient x un réel, a,b,c, trois réels et on considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. À quelle condition P est-il du second degré ? À quel moment cette hypothèse apparaît-elle dans le théorème fondamental ? On fait cette hypothèse dès à présent.
2. Montrer que le trinôme ax^2+bx+c a des racines si et seulement si le trinôme ax^2-bx+c a des racines.
3. Dans le cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$, comparer les deux racines distinctes de P. *On dit parfois que les deux racines d'un trinôme sont conjuguées, à cause du changement de signe devant* $\pm\sqrt{\Delta}$.
4. Étudier le cas $c = 0$.
5. Étudier le cas $b = 0$.
6. Étudier le cas $a = b = c$.
7. Étudier le cas $b = c = -a$.
8. En observant une symétrie sur une parabole quelconque, donner les coordonnées de son sommet en fonction de a,b,c. Retrouver cette valeur en admettant que l'unique extremum de P est au point d'annulation de sa dérivée *(théorème du point stationnaire)*.

★★☆☆☆ **Exercice 10 (Relations de Viète du second degré).** Exprimer la somme et le produit des racines d'un trinôme du second degré de discriminant positif en fonction des coefficients de ce trinôme. Application : trouver une solution particulière dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x+y=1 \\ xy = \text{-}1. \end{cases}$

★★☆☆☆ **Exercice 11 (Équation du troisième degré).** On considère $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Déterminer les racines réelles de P.

★★★☆☆ **Exercice 12 (Équation bicarrée).** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Sommes

★☆☆☆☆ **Exercice 13 (Le symbole sigma).** On introduit un symbole pour noter de façon plus compacte les sommes numériques. Étant donnée une suite finie de nombres réels u_1,...,u_n, on note la somme $S = u_1 + ... + u_n$ de la façon suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Le symbole k est un indice, dit *muet*, car on aurait pu choisir n'importe quel autre symbole, et il n'existe pas en dehors de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Par défaut, c'est un entier qui varie entre la valeur indiquée en dessous de la somme (et on l'affecte alors par le signe =), ici 1, et la valeur indiquée au-dessus de la somme, ici n. On dit que l'on somme *pour* $k = 1,2,\ldots,n$ ou k *variant de* 1 *à* n. À chaque étape, on ajoute u_k à la valeur précédente, la somme vide étant par convention égale à 0. L'ordre dans lequel les $k \in [\![1,n]\!]$ sont pris n'a pas d'importance, car l'addition est une opération commutative ($a + b = b + a$).

1. Que vaut $\sum_{k=1}^{3} k$? Que vaut $\sum_{k=0}^{3} k$?
2. Que vaut $\sum_{k=1}^{3} k^2$? Que vaut $\sum_{k=0}^{3} k^2$?
3. Que vaut $\sum_{k=1}^{4} 2^k$? Que vaut $\sum_{k=0}^{4} 2^k$?
4. Que vaut $\sum_{k=1}^{3} 1$? Que vaut $\sum_{k=0}^{3} 1$?
5. Soient u et v deux suites réelles. Soit n un entier naturel. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^{n} u_k + v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} v_k$? Corriger si besoin.
6. Que dire de l'identité $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{p} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k$? Corriger si besoin.
7. Montrer que pour tout réel t, $\sum_{k=0}^{n} t u_k = t \sum_{k=0}^{n} u_k$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 14** (Somme des premiers entiers). On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = S = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. Ecrire $2S = S + S$ de sorte que le premier terme ordonne les termes par ordre croissant, et le second terme, à aligner en dessous, par ordre décroissant.
2. Qu'observe-t-on pour deux nombres l'un au-dessus de l'autre ?
3. Combien cette somme a-t-elle de termes ?
4. Conclure.

☆☆☆☆☆ **Exercice 15** (La factorielle). Étant donné n un entier naturel, on définit la *factorielle* de n comme l'entier naturel $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$, autrement dit, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ où le symbole Π note comme le symbole Σ un produit au lieu d'une somme. On pose, par convention, $0! = 1$.

1. Que valent $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$, $6!$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.

3. Exprimer $\prod_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n!$.
4. Que dire de l'identité : $(nm)! = n!m!$ où n,m sont des entiers naturels ?
5. Comparer $2^{n-1}, n!$ et n^n.
6. On cherche à démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tous entiers naturels $k \leqslant n$.
   (a) Rappeler la définition des coefficients binomiaux.
   (b) Vérifier la formule pour $k = 1$ et n quelconque.
   (c) *(Difficile)* Montrer par récurrence sur n, en utilisant la formule de Pascal, la formule des coefficients binomiaux en fonction de la factorielle.
   (d) En déduire que pour tous $k,n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un entier.
   (e) Retrouver la formule de symétrie des coefficients binomiaux.
   (f) Donner une formule pour $\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Combinatoire

★☆☆☆☆ **Exercice 16** (Question de vocabulaire)**.** Sachant que, contrairement aux vermilingues, les oryctéropes ne sont pas des xénarthres, étant donné trois oryctéropes et quatre vermilingues, combien peut-on former de groupes de deux couples oryctérope-xénarthre pour danser à quatre ?

★☆☆☆☆ **Exercice 17** (Compter les listes)**.** Combien y a-t-il de manières de mettre trois Télétubbies à la queue leu-leu ?

★★☆☆☆ **Exercice 18** (Formule du crible de Poincaré)**.** Soient A,B deux ensembles finis.

1. Montrer à l'aide d'un diagramme que $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
2. Que se passe-t-il lorsque A et B sont disjoints ?
3. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B)$ en toute généralité.
4. Vérifier que cette formule est vraie si $A = B$.
5. Combien y a-t-il d'entiers naturels inférieurs à 20 qui soient pairs ou multiples de 3 ?

★★★★★ **Exercice 19** (Preuve par dénombrement de la formule de Pascal)**.** Après avoir rappelé la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, $k \leqslant n$, $k,n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule de Pascal sans calcul, en utilisant la formule de l'exercice précédent.

Indication Si l'on isole un élément x d'un sac de boules, alors on peut considérer les parties à k boules ne contenant pas la boule x et les parties à k boules dont on sait qu'elles la contiennent.

Probabilités

★★★☆☆ **Exercice 20** (Poker)**.** On joue au poker avec un jeu de 52 cartes. Une main est toujours constituée de 5 cartes.

1. Quelle chance a-t-on d'obtenir un carré ?

2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un full ?
3. Quelle chance a-t-on d'obtenir une double paire ?
4. Quelle chance a-t-on d'obtenir un brelan ?
5. Quelle chance a-t-on d'obtenir une paire ?
6. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush ?
7. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush royale ?
8. Quelle chance a-t-on d'obtenir une suite ?
9. Quelle chance a-t-on d'obtenir une couleur ?
10. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un as ?
11. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un trèfle ?
12. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins une figure ?
13. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et une figure ?
14. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et un trèfle ?
15. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou une figure ?
16. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou un trèfle ?

★★☆☆☆ **Exercice 21** (La formule de Bayès). Un test de détection d'une maladie rare est positif à 99 % lorsqu'un individu est atteint de cette maladie, et il est positif à 0,1 % lorsqu'il n'est pas atteint. Supposons que 0,01 % de la population soit atteint de cette maladie. Sachant être positif au test de détection, calculer la probabilité que l'on soit atteint par la maladie.

Informatique avec Python

★☆☆☆☆ **Exercice 22** (Programmation fonctionnelle). Écrire un programme qui, à partir de la saisie d'un rayon et d'une hauteur, calcule le volume d'un cône droit.

★☆☆☆☆ **Exercice 23** (Une fonction booléenne). Écrire une fonction qui affiche « PAIR » si un entier donné est pair est « IMPAIR » sinon.

★★☆☆☆ **Exercice 24** (Boucle itérative fixe). Écrire une fonction qui calcule la somme des premiers entiers jusqu'à un entier donné.

★★★☆☆ **Exercice 25** (Boucle itérative conditionnelle). Écrire un programme qui calcule la plus grande puissance de 2 divisant un entier donné.

★★☆☆☆ **Exercice 26** (Approximation numérique). Écrire un programme qui approxime la valeur de la constante mathématique e en fonction de n assez grand en utilisant la formule $e \approx \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

Vers l'analyse : les inégalités

☆☆☆☆☆ **Exercice 27** (Positions relatives de paraboles). Comparer les positions relatives des paraboles $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ d'équation $y = 3x^2 + 6x + 1$ et $y = 2x^2 - 7x - 2$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 28** (Inégalité arithmético-géométrique). Montrer que, pour tous réels a,b positifs, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 29** (Inégalité de Bernoulli (par le calcul)). Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 0$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.