Division euclidienne sur les polynômes de Laurent

Proposition. ***($K[X, X^{-1}]$ est euclidien)***

Soit K un corps. Alors il existe une division euclidienne sur $K[X, X^{-1}]$. De plus, pour cette division, il existe une infinité de décompositions distinctes pour un même stathme.

Remarque. La force de l'hypothèse « K est un corps » est justifiée. En effet, on utilise la division euclidienne sur $K[X]$; or si $K[X]$ est euclidien, $K[X]$ est principal, donc K est un corps.

Soit $P \in K[X, X^{-1}]$ un polynôme de Laurent. On peut écrire $P = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^n$ où la famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque nulle. Si P est non nul, on peut donc définir :

$$\deg_+(P) = \max \{n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0\}$$
$$\deg_-(P) = \min \{n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0\}$$
$$\deg^*(P) = \deg_+(P) - \deg_-(P) \geqslant 0.$$

Attention ! Le degré sur les polynômes de Laurent ne prolonge pas le degré usuel.

On remarque même que $\deg^*(X^q P) = (deg_+(P) + q) - (deg_-(P) + q) = \deg^*(P)$ ce qui est utile pour la suite.

Soient $A, B \in K[X, X^{-1}], B \neq 0$. En posant $N_0 = -\deg_-(A)$ et $N = -\deg_-(B)$, on a $X^{N_0}A, X^N B \in K[X]$ et par minimalité de $\deg_-$, $\deg^*(X^N B) = \deg(X^N B)$, puisque $\deg_-(X^N B) = 0$.

On applique la division euclidienne de $K[X]$ à $X^{N_0}A$ et $X^N B \neq 0$. On obtient :

$$X^{N_0}A = QX^N B + R \text{ où } \deg(R) < \deg(X^N B) = \deg^*(X^N B)$$

puis

$$A = (QX^{N-N_0})B + (X^{-N_0}R)$$

où :

$$\deg^*(X^{-N_0}R) = \deg^*(R) = \deg_+(R) - \underbrace{\deg_-(R)}_{\geqslant 0, \text{ car } R \in K[X]} < \deg_+(R) \leqslant \deg(R) < \deg^*(X^N B) = \deg^*(B).$$

Puisque K est intègre, on a : $\deg_+(PQ) = \deg_+(P) + \deg_+(Q)$, de même pour le degré négatif. En sommant, on a l'égalité pour le degré $\deg^*$ ce qui garantit que $\deg^*(PQ) \geqslant \deg^*(P)$, et donc que $\deg^*$ est un stathme.

Il est clair qu'en translatant ce dernier par un entier quelconque k, on obtient un nouveau stathme euclidien (mais la division est encore valide). Fixons un tel stathme. En changeant $N_0 \longrightarrow N_1 = N_0 + 1$, on peut recommencer le procédé précédent avec $X^{N_1}A, X^N B$ ce qui donne $A = (Q'X^{N-N_1})B + \frac{R'}{X_{N_0}}$. Il n'y aucune raison pour que cette décomposition égale la précédente puisqu'on doit encore avoir $\deg(R') < \deg(X^N B)$; ainsi $R' = XR$ ne convient pas dès que $\deg(R) = \deg(X^N B) - 1$. En posant $N_k = N_0 + k$, on obtient ainsi une infinité de divisions pour un même stathme $\deg^*$.