Théorie générale des équations différentielles

Définitions Un équation différentielle est la donnée d'un intervalle de définition I, d'une fonction p fois dérivable, l'ordre, sur I notée y dite inconnue et d'une fonction dite dynamique ou équation différentielle $F : I \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(p+1)$ fois non indépendante de la dernière variable (parfois, F n'est pas définie partout). Une inconnue pour un même reste est une solution si $F\left(t, y(t), y'(t), \ldots y^{(p)}(t)\right) = 0$ pour tout $t \in J$ où J est un sous-intervalle de I dit intervalle de vie de la solution (parfois, par abus, *de définition*).
Si $m = 1$, l'équation est scalaire. Si $m > 1$, l'équation différentielle est dite système différentiel de taille m.
Une solution générale est un paramétrage de l'ensemble des solutions. Une solution particulière ou courbe intégrale est un élément de la solution générale.
Elle est dite normalisée si l'on peut écrire $y^p(t)$ en fonction φ des autres dérivées de y et obtenir une équation équivalente (ce n'est pas toujours le cas). Elle est dite autonome si elle est normalisée et cette forme est de plus indépendante de la première variable.
Une équation est linéaire si la relation entre les dérivées de y et y est linéaire pour tout t fixé. La variable t peut intervenir à tout niveau, sans aucune condition de régularité. Elle vérifie le principe de superposition.

Méthode de réduction de l'ordre Toute équation différentielle d'ordre n peut être ramenée par changement de variable à une équation différentielle d'ordre n.

Maximalité Une solution (*i. e.* une fonction régulière, vérifiant l'équation par F et un intervalle de vie) est maximale si elle n'admet aucun prolongement strict, au sens de l'intervalle de vie. Une solution est globale si son intervalle de vie est I.
Théorème (Zorn) : Toute équation différentielle solvable (= qui admet au moins une solution) admet une solution maximale.
Corollaire : résoudre une équation différentielle revient à déterminer ses solutions maximales.

Orbite Une orbite ou trajectoire d'une équation différentielle est la courbe paramétrée définie par une solution. Elles sont dites maximales si la solution choisie l'est. Le portrait de phase est la représentation des orbites maximales dans R^m dit alors espace des phases. Le sens de parcours peut être indiqué par des flèches (si la temps est représenté, on parle de portrait élargi). Une orbite peut être réduite à un point. On peut y observer attracteur, répulseur ou cycle limite. Un point d'équilibre est une solution globale constante de la dynamique.

Intégrale première du mouvement C'est une fonction non constante η constante sur chaque solution. C'est une préservation d'une quantité. L'ensemble de niveau associé à η en λ est $\Gamma_\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^m, \eta\big(t, Y(t)\big) = \lambda \; \forall t \in I\}$. Étant donnée une intégrale première, toute orbite est incluse dans un ensemble de niveau.
Propriété : Pour le système $\begin{cases} x' = \varphi_1(x,y) \\ y' = \varphi_2(x,y) \end{cases}$, une intégrale première est solution de l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial \eta}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\varphi_2 = 0$.

Champs de direction La représentation en presque chaque point (t, y) d'un treillis rectangulaire un vecteur de pente $\varphi(t, y)$ (cas scalaire) ou dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ du champ de vecteur $\varphi(x, y)$ (cas système 2×2 autonome). Une solution se trace à partir d'un point en suivant le sens des vecteurs.

Problème de Cauchy Une condition initiale ou finale est un ensemble de relations du type $y^{(i)}(t_0) = y_0$ joints au système différentiel. Une condition aux limites est un ensemble de relations du type $\lim\limits_{t\to a} y^{(i)}(t) = b$ joints au système.
Un problème de Cauchy d'ordre n est la donnée d'une équation normalisée d'ordre n et de n conditions initiales sur chacune des $y^{(i)}$, $i \leq n$. Il est trivialement équivalent à une équation intégrale.
On dit qu'une dynamique normalisée vérifie CLL (condition de Cauchy-Lipschitz locale) si elle est localement lipchitzienne quant à sa seconde variable. On dit qu'elle vérifie CLG si elle est uniformément (globalement) lipschitzienne en sa seconde variable. C'est le cas si elle est C^1 par rapport à sa deuxième variable. D'ailleurs CLL équivaut à ce que $\partial_y \varphi$ soit localement bornée.
Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit : sous CLL, un problème de Cauchy admet une unique solution maximale dont la vie contient la condition initiale. De plus, sous CLG, il admet une unique solution « maximale qui est globale ».
Conséquences (sous les hypothèses de CLL) : deux courbes intégrales ne se croisent pas. Si la solution nulle est admise, toute autre solution *ne s'annule jamais*. Si I est ouvert, une solution maximale a pour intervalle de vie un intervalle ouvert.

Principe de majoration *a priori*, explosion en temps fini, critère de sortie de tout compact, théorème des bouts, théorème de l'alternative (formulations équivalentes) Si F est une dynamique sur $]a,b[\times U$, U ouvert de l'espace, b éventuellement infini, lipschitzienne quant à la seconde variable, et f une solution maximale de $y' = F(t,y)$ d'intervalle de vie $]c,d[$, alors si $d < b$, alors f sort de tout compact au voisinage de d. De même de l'autre côté.
Si $U = \mathbb{R}^n$, on obtient que $\lim\limits_{t\to d} \|f(t)\| = +\infty$. On peut lui combiner à profit le lemme de Gronwall pour obtenir des solutions maximales : en effet, toute solution maximale bornée du problème de Cauchy, pour une dynamique continue, est globale. De même si la dynamique est uniformément bornée.

Facteurs intégrants Exemple sur $y' + py = q$. En multipliant par m, $(my)' + (mp - m')y = mq$. En imposant $m' = mp$, c'est-à-dire $m = \exp(\int p)$ (le vérifier), on a $y = \frac{(\int qm)}{m}$.

Wronskien Soit $Y' = A(t)Y + B(t)$, $V_1, \dots, V_n$ des solutions. On note : $W(t) \colon t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$. Elles forment une base des solutions de l'équation ssi $W(t)$ ne s'annule pas ssi $W(t)$ est non identiquement nul. De plus, une solution $Y(t)$ est donnée par $= \lambda_1(t)V_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)V_n(t)$ où :

$$\lambda_i'(t) = \frac{\det(V_1, \dots V_{i-1}, B, V_{i+1}, \dots V_n)}{W(t)}.$$

Formule de Duhamel On ne rappelle pas la définition de l'exponentielle de matrices. La solution du problème de Cauchy associé à $y' = Ay$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_t^{t_0} e^{(t-s)A}b(s)ds$.

Méthode de variation de la constante Ce principe consiste à chercher une équation différentielle de la même forme que la solution générale de l'équation homogène en remplaçant la constante par une fonction de la même régularité que les solutions, et à l'injecter dans la dynamique.

Lemme de Gronwall Soient f, g, y trois fonctions continues positives sur $[a,b]$ telles que pour tout t, $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds$. Alors pour tout t, $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds$.