Théorie générale des équations différentielles

Définitions Un équation différentielle est la donnée d'un **intervalle de définition** I, d'une fonction p fois dérivable, l'**ordre**, sur I notée y dite **inconnue** et d'une fonction dite **dynamique** ou **équation différentielle** $F : I \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(p+1)$ fois non indépendante de la dernière variable (parfois, F n'est pas définie partout). Une inconnue pour un même reste est une **solution** si $F\left(t, y(t), y'(t), \ldots y^{(p)}(t)\right) = 0$ pour tout $t \in J$ où J est un sous-intervalle de I dit **intervalle de vie** de la solution (parfois, par abus, *de définition*).
Si $m = 1$, l'équation est **scalaire**. Si $m > 1$, l'équation différentielle est dite **système différentiel** de **taille** m.
Une **solution générale** est un paramétrage de l'ensemble des solutions. Une **solution particulière** ou **courbe intégrale** est un élément de la solution générale.
Elle est dite **normalisée** si l'on peut écrire $y^p(t)$ en fonction φ des autres dérivées de y et obtenir une équation équivalente (ce n'est pas toujours le cas). Elle est dite **autonome** si elle est normalisée et cette forme est de plus indépendante de la première variable.
Une équation est **linéaire** si la relation entre les dérivées de y et y est linéaire pour tout t fixé. La variable t peut intervenir à tout niveau, sans aucune condition de régularité. Elle vérifie le **principe de superposition**.

Méthode de réduction de l'ordre Toute équation différentielle d'ordre n peut être ramenée par changement de variable à une équation différentielle d'ordre n.

Maximalité Une solution (*i. e.* une fonction régulière, vérifiant l'équation par F et un intervalle de vie) est maximale si elle n'admet aucun prolongement strict, au sens de l'intervalle de vie. Une solution est **globale** si son intervalle de vie est I.
Théorème (Zorn) : Toute équation différentielle **solvable** (= qui admet au moins une solution) admet une solution maximale.
Corollaire : **résoudre une équation différentielle** revient à déterminer ses solutions maximales.

Orbite Une **orbite** ou **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe paramétrée définie par une solution. Elles sont dites **maximales** si la solution choisie l'est. Le **portrait de phase** est la représentation des orbites maximales dans $\mathbb{R}^m$ dit alors **espace des phases**. Le sens de parcours peut être indiqué par des flèches (si le temps est représenté, on parle de **portrait élargi**). Une orbite peut être réduite à un point. On peut y observer **attracteur**, **répulseur** ou **cycle limite**. Un **point d'équilibre** est une solution globale constante de la dynamique.

Intégrale première du mouvement C'est une fonction non constante η constante sur chaque solution. C'est une **préservation d'une quantité**. L'**ensemble de niveau** associé à η en λ est $\Gamma_\lambda = \{Y \in \mathbb{R}^m, \eta\left(t, Y(t)\right) = \lambda \, \forall t \in I\}$. Étant donnée une intégrale première, toute orbite est incluse dans un ensemble de niveau.
Propriété : Pour le système $\begin{cases} x' = \varphi_1(x,y) \\ y' = \varphi_2(x,y) \end{cases}$, une intégrale première est solution de l'équation différentielle suivante : $\frac{\partial \eta}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\varphi_2 = 0$.

Champs de direction La représentation en presque chaque point (t, y) d'un treillis rectangulaire un vecteur de pente $\varphi(t, y)$ (cas scalaire) ou dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ du champ de vecteur $\varphi(x, y)$ (cas système 2×2 autonome). Une solution se trace à partir d'un point en suivant le sens des vecteurs.

Problème de Cauchy Une **condition initiale** ou **finale** est un ensemble de relations du type $y^{(i)}(t_0) = y_0$ joints au système différentiel. Une **condition aux limites** est un ensemble de relations du type $\lim\limits_{t\to a} y^{(i)}(t) = b$ joints au système.
Un **problème de Cauchy** d'ordre n est la donnée d'une équation normalisée d'ordre n et de n conditions initiales sur chacune des $y^{(i)}$, $i \leq n$. Il est trivialement équivalent à une **équation intégrale**.
On dit qu'une dynamique normalisée vérifie **CLL** (condition de Cauchy-Lipschitz locale) si elle est **localement lipchitzienne** quant à sa seconde variable. On dit qu'elle vérifie CLG si elle est **uniformément (globalement) lipschitzienne** en sa seconde variable. C'est le cas si elle est C^1 par rapport à sa deuxième variable. D'ailleurs CLL équivaut à ce que $\partial_y \varphi$ soit localement bornée.
Le **théorème de Cauchy-Lipschitz** dit : sous CLL, un problème de Cauchy admet une unique solution maximale dont la vie contient la condition initiale. De plus, sous CLG, il admet une unique solution « maximale qui est globale ».
Conséquences (sous les hypothèses de CLL) : deux courbes intégrales **ne se croisent pas**. Si la solution nulle est admise, toute autre solution *ne s'annule jamais*. Si I est ouvert, une solution maximale a pour intervalle de vie un intervalle ouvert.

Principe de majoration *a priori*, explosion en temps fini, critère de sortie de tout compact, théorème des bouts, théorème de l'alternative (formulations équivalentes) Si F est une dynamique sur $]a,b[\times U$, U ouvert de l'espace, b éventuellement infini, lipschitzienne quant à la seconde variable, et f une solution maximale de $y' = F(t,y)$ d'intervalle de vie $]c,d[$, alors si $d < b$, alors f sort de tout compact au voisinage de d. De même de l'autre côté.
Si $U = \mathbb{R}^n$, on obtient que $\lim\limits_{t\to d} \|f(t)\| = +\infty$. On peut lui combiner à profit le lemme de Gronwall pour obtenir des solutions maximales : en effet, toute solution maximale bornée du problème de Cauchy, pour une dynamique continue, est globale. De même si la dynamique est uniformément bornée.

Facteurs intégrants Exemple sur $y' + py = q$. En multipliant par m, $(my)' + (mp - m')y = mq$. En imposant $m' = mp$, c'est-à-dire $m = \exp(\int p)$ (le vérifier), on a $y = \frac{(\int qm)}{m}$.

Wronskien Soit $Y' = A(t)Y + B(t)$, $V_1, \dots, V_n$ des solutions. On note : $W(t)\colon t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t))$. Elles forment une base des solutions de l'équation ssi $W(t)$ ne s'annule pas ssi $W(t)$ est non identiquement nul. De plus, une solution $Y(t)$ est donnée par $= \lambda_1(t)V_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)V_n(t)$ où :

$$\lambda_i'(t) = \frac{\det(V_1, \dots V_{i-1}, B, V_{i+1}, \dots V_n)}{W(t)}.$$

Formule de Duhamel On ne rappelle pas la définition de l'exponentielle de matrices. La solution du problème de Cauchy associé à $y' = Ay$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_t^{t_0} e^{(t-s)A} b(s) ds$.

Méthode de variation de la constante Ce principe consiste à chercher une équation différentielle de la même forme que la solution générale de l'**équation homogène** en remplaçant la constante par une fonction de la même régularité que les solutions, et à l'injecter dans la dynamique.

Lemme de Gronwall Soient f, g, y trois fonctions continues positives sur $[a,b]$ telles que pour tout t, $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds$. Alors pour tout t, $y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds$.