Feuille d'exercices 2
Mathématiques discrètes

☆☆☆☆☆ **Exercice 1.** Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

INDICATION On pourra utiliser l'axiome suivant : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élement.

▷ **Solution.** Soit E l'ensemble des entiers a vérifiant $0 < a < 1$. Supposons que E est non vide et puisque E est une partie de $\mathbb{N}$, soit $a \in E$ son plus petit élément. Puisque a est positif, en multipliant $a < 1$ par a non nul, on déduit $a^2 < a$, et a fortiorio $a^2 < 1$, mais puisque $a > 0$, on a aussi $a^2 > 0$, donc $a^2 \in E$. Ceci contredit la minimalité de $a > a^2$, et l'on a donc une absurdité. C'est que notre hypothèse de départ était fausse, autrement dit, E est vide, donc il n'y a pas d'entier strictement compris entre 0 et 1.

Logique

☆☆☆☆☆ **Exercice 2** (Ex falso quodlibet)**.** Montrer que, dans toute pièce non vide, il existe au moins une personne telle que si elle boit, alors tout le monde dans la pièce boit.

▷ **Solution.** On rappelle que, par définition, si A est fausse et B est quelconque, l'implication $A \implies B$ est vraie (en effet, $A \implies B$ est fausse, si et seulement si, A est vraie et B est fausse). Pour résoudre l'exercice, il faut aussi être capable de nier une implication : le contraire de $A \implies B$ est : A ET (NON B), ce qui est assez intuitif. Raisonnons par l'absurde *(voir exercice ci-dessous)* : supposons que toutes les personnes de la pièce non vide, sont telles qu'elles boivent mais qu'une personne (au moins) dans la pièce ne boit pas. Ainsi en prenant une personne au hasard, ce qui est possible la pièce étant non vide, on obtient certes qu'elle boit mais qu'une personne donnée ne boit pas. D'autre part, la même assertion assure que toutes les personnes de la pièce boivent. Contradiction ! Donc la proposition annoncée est vraie.

☆☆☆☆☆ **Exercice 3** (Montrer une proposition logique : la table de vérité)**.** Vérifier que, pour n'importe quelles propositions A et B, soit l'implication $A \implies B$ est vraie, soit $B \implies A$ est vraie.

▷ **Solution.** *(Pour une illustration de ce fait, voir la première fiche d'exercice.)* Pour le démontrer, il suffit de remplir les deux tables par définition :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

et de constater que soit l'une soit l'autre des deux colonnes de droite est verte dans chaque cas.

☆☆☆☆☆ **Exercice 4** (Raisonnement par équivalences successives). Montrer que

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}+2}}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+2}}}.$$

▷ **Solution.** La technique est la suivante : on part de l'égalité proposée, puis on tape dessus comme si l'on cherchait à résoudre une inéquation : on élève au carré, on enlève 1, on inverse, etc. On obtient à la fin la ligne d'égalité : $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, qui est vraie, car $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. Seulement, rédigé comme cela, on fait fausse route : on peut très bien partir d'une proposition fausse pour obtenir le vrai et rien n'est prouvé. Il faut donc justifier que toutes les lignes précédentes sont des implications à double sens, autrement dit des équivalences. Toutes les opérations (addition, multiplication) le sont évidemment. L'inversion, quand elle est licite, l'est également, car l'inverse de l'inverse est le nombre. Reste à justifier que l'on peut « inverser la mise au carré ». Il s'agit alors simplement de remarquer que ce que l'on met au carré est bien positif, comme toute racine. À rédiger proprement !

☆☆☆☆☆ **Exercice 5** (Raisonnement par analyse-synthèse). Résoudre, lorsque cela a un sens, l'équation de la variable réelle : $x = \sqrt{1-3x}$.

▷ **Solution.** Ce type de raisonnement apparaît lorsque le raisonnement par équivalence fait défaut. On commence par la même étape : une suite d'implications, c'est l'étape d'analyse. Soit x un réel solution de l'équation. Remarquons que pour que cela ait un sens, il faut que $x \leqslant \frac{1}{3}$. On l'élève donc au carré, ce qui est plutôt naturel, et l'on obtient $x^2 = 1 - 3x$. On peut résoudre cette équation du second degré, et l'on obtient deux solutions x_1,x_2, dont une seule positive. Arrêter le raisonnement ici est incorrect : il faut vérifier que la valeur trouvée est solution de l'équation, c'est l'étape de synthèse. Or la racine restante x_2 est plus grande que $\frac{1}{3}$, donc cette valeur n'est pas solution de l'équation. Récapitulons : si x est solution, il doit être égal à x_1 ou x_2 ; or ni x_1 ni x_2 n'est solution, donc l'équation n'a aucune solution.

☆☆☆☆☆ **Exercice 6** (Raisonnement par l'absurde). Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Montrer de même que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel, ni $\sqrt[3]{2}$.

▷ **Solution.** On raisonne par l'absurde, autrement dit, on suppose le contraire de la proposition à démontrer, et l'on en déduit une contradiction ou une assertion explicitement fausse. C'est que le contraire de la proposition est incorrect, autrement dit, que la proposition est vraie.

Illustrons cela en montrant que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Supposons donc que cela soit le cas, autrement dit, que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p,q deux entiers, $q \neq 0$, inconnus mais fixés. Quitte à réduire la fraction, on peut supposer p et q premiers entre eux. En élevant au carré, $2 = \frac{p^2}{q^2}$ puis $2q^2 = p^2$. À ce stade, la preuve se complique car on manque d'outils plus malléables, mais ce n'est pas grave, on va réviser l'arithmétique. Observons que 2 divise p^2, mais par le lemme d'Euclide, il divise donc p. Ainsi 2 ne divise pas q, puisque p et q sont premiers entre eux, ni donc q^2 par le même argument. Ainsi, dans la décomposition en facteurs premiers du terme de gauche, il y a un seul 2, tandis que dans celui de droite, il y a un 2^2, et là est la contradiction.

On peut copier cette preuve mot à mot en remplaçant l'entier premier 2 par l'autre premier 3. Quant à $\sqrt[3]{2}$, il suffit de remarquer que le lemme d'Euclide s'applique tout aussi bien à un produit de trois facteurs, quitte à l'invoquer en cascades.

☆☆☆☆☆ **Exercice 7** (Démonstration non constructive). Montrer, sans en exhiber nécessairement, qu'il existe deux nombres irrationnels $x,y > 0$ tels que x^y soit un nombre rationnel.

▷ **Solution.** Comme nombre irrationnel, on connaît bien $\sqrt{2}$. Supposons que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ soit rationnel, alors on pose $x = y = \sqrt{2}$ et c'est terminé. Si ce n'est pas le cas, alors posons $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$. Alors $x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ qui est rationnel et on a aussi répondu à la question.

Ce type de démonstration est remarquable, car il produit un raisonnement tout à fait viable pour démontrer l'existence d'un objet, sans donner cet objet explicitement. Ceci vient de la disjonction de cas qui a été faite en début de preuve.

Polynômes

★★☆☆☆ **Exercice 8** (Le nombre d'or φ).

1. Montrer qu'il existe un nombre φ de sorte que si $\varphi = \frac{a}{b}$ où a,b sont deux longueurs strictement positives, alors $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ et que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   Indication Se ramener à une équation ne faisant intervenir que la quantité φ puis à une équation du second degré en φ.
2. Montrer que $\varphi \in [1{,}5; 2]$.
3. À quoi est-égal le nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ défini comme la limite (dont on admet qu'elle existe) de la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

▷ **Solution.**

1. L'équation $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ se récrit donc $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$. Le nombre φ étant non nul, cette équation est équivalente à $\varphi^2 = \varphi + 1$, soit $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. C'est un trinôme du second degré donc les deux racines sont, après calcul, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est clairement négative, car $\sqrt{5} \geqslant 1$, donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et par la même occasion on constate qu'un unique nombre satisfait cette propriété.
2. Montrons que $\varphi \leqslant 2$. En remplaçant par la valeur trouvée, il s'agit de montrer $1+\sqrt{5} \leqslant 4$, soit $\sqrt{5} \leqslant 3$. Or $5 \leqslant 9$, d'où le résultat en passant à la racine carrée qui est une fonction croissante. Quant à $\frac{3}{2} \leqslant \varphi$, il s'agit de montrer que $3 \leqslant 1+\sqrt{5}$, soit $2 \leqslant \sqrt{5}$. Or $4 \leqslant 5$, et même conclusion, d'où l'encadrement demandé.
3. Par une manipulation un peu magique, on peut constater que cette infinité de racines imbriquées, si nous l'écrivons $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, vérifie $x = \sqrt{1+x}$, précisément parce que le nombre de racines imbriquées est infini. Le nombre x étant une racine, il est positif, donc cette équation est équivalente à $x^2 = 1+x$. C'est bien celle qui, si l'on impose x positif, caractérise le nombre d'or, et donc la suite (u_n) tend vers φ.

☆☆☆☆☆ **Exercice 9** (À la conquête des trinômes). Soient x un réel, a,b,c, trois réels et on considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. À quelle condition P est-il du second degré ? À quel moment cette hypothèse apparaît-elle dans le théorème fondamental ? On fait cette hypothèse dès à présent.
2. Dans le cas où $\Delta > 0$ et $a > 0$, comparer les deux racines distinctes de P. *On dit parfois que les deux racines d'un trinôme sont conjuguées, à cause du changement de signe devant* $\pm\sqrt{\Delta}$.
3. Étudier le cas $c = 0$.
4. Étudier le cas $b = 0$.
5. Étudier le cas $a = b = c$.
6. Étudier le cas $b = c = -a$.
7. En observant une symétrie sur une parabole quelconque, donner les coordonnées de son sommet en fonction de a,b,c. Retrouver cette valeur en admettant que l'unique extremum de P est au point d'annulation de sa dérivée *(théorème du point stationnaire)*.

▷ **Solution.**

1. On n'a de terme en x^2 que si $a \neq 0$. Si $a = 0$, on obtient un polynôme du premier degré, et si $b = 0$, un terme constant, de degré nul. Dans le théorème factorisant un trinôme du second degré (et donc donnant la formule des racines), la première chose faite est de factoriser par a pour remarquer une identité remarquable : pour cela, on divise par a les deux derniers termes, il faut donc que a soit non nul.
2. On remarque que $-\sqrt{\Delta} \leqslant \sqrt{\Delta}$, d'où $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \leqslant \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Autrement dit, les deux racines sont centrées autour de $\frac{-b}{2a}$ avec un rayon de $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ *(voir dernière question)*.
3. Lorsque $c = 0$, on peut factoriser par x : $P(x) = x(ax + b)$. Les racines sont donc 0 et l'unique racine de $ax + b$, qui vaut $\frac{-b}{a}$. Ceci est encore très cohérent avec la remarque de la question précédente !
4. Lorsque $b = 0$, $P(x) = ax^2 + c$ est nul si et seulement si $x^2 = \frac{c}{a}$. Si $\frac{c}{a}$ est strictement négatif, il n'y a aucune racine ; sinon, les deux racines sont $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$.
5. On a alors $\Delta = b^2 - 4b^2 < 0$ et le trinôme n'a aucune racine si b est non nul, et si b est nul, P est la fonction nulle qui a tous les réels comme racines.
6. En factorisant par a, on obtient $P(x) = a(x^2 - x - 1)$ qui s'annule si et seulement si $x^2 - x - 1$ est nul. On reconnaît le trinôme ayant pour racine le nombre d'or et son conjugué.
7. On renvoie à la deuxième question pour observer cette symétrie. L'abscisse du sommet est donc la moyenne des racines, qui vaut $\frac{-b}{2a}$, et son image par P est l'ordonnée du sommet.
   On peut le retrouver grâce à l'indication du point de vue analytique. En dérivant, $P'(x) = 2ax + b$ qui s'annule si et seulement si $x = \frac{-b}{2a}$, d'où le résultat.

☆☆☆☆☆ **Exercice 10** (Relations de Viète du second degré). Exprimer la somme et le produit des racines d'un trinôme du second degré de discriminant positif en fonction des coefficients de ce trinôme. Application : trouver une solution particulière dans $\mathbb{R}^2$ du système : $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \text{-}1. \end{cases}$

▷ **Solution.** On peut certes faire le calcul avec l'expression des racines, mais ce n'est pas astucieux. Nommons α, β les racines de P (en reprenant les notations précédentes), on a alors pour tout réel x : $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta$ en développant. Or on sait que les coefficients d'un trinôme sont uniques. On peut donc identifier : $a(\alpha + \beta) = b$ et $a\alpha\beta = c$, soit : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

Avec cette façon de voir les choses, trouvons une solution au système proposé. En fixant $a = 1$, on voit qu'en posant $-b = 1$ et $c = -1$, le polynôme $x^2 - x - 1$ aura pour racines x et y vérifiant justement $x + y = 1$ et $xy = -1$, autrement dit un couple de solution au système. Il suffit donc de trouver les racines de $x^2 - x - 1$! C'est le nombre d'or et son conjugué.

☆☆☆☆☆ **Exercice 11** (Équation du troisième degré). On considère $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Déterminer les racines réelles de P.

▷ **Solution.** Inutile de chercher des formules, ce n'est jamais la solution pratique au troisième degré. Par contre, si l'on trouve une racine, il suffira de factoriser par cette racine pour obtenir un facteur du premier degré et un facteur du $3 - 1 = 2$-ième degré (que l'on saura donc factoriser). Cherchons donc une racine évidente. Les premiers candidats sont toujours 0, 1, -1. Ici, on voit que $P(1) = 0$. Maintenant, factorisons. On écrit $P(x) = (x - 1)Q(x)$ où $Q = x^2 + bx + c$ avec b,c à déterminer. Là, ça se complique. À ce niveau, le plus simple est de développer $(x - 1)Q(x)$ formellement et d'identifier ses coefficients avec ceux de P pour obtenir b et c, en pratique : $x^3 - x^2 + x - 1 = \underbrace{x^3 + bx^2 + cx}_{xQ(x)} + \underbrace{-x^2 - bx - c}_{-1Q(x)} = x^3 + (b - 1)x^2 + (c - b)x - c$. En identifiant, on trouve $b - 1 = -1$ d'où $b = 0$ et $-c = -1$ d'où $c = 1$. Ainsi, $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$. Puisque $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution, P n'a que le nombre 1 pour racines réelles.

☆☆☆☆☆ **Exercice 12** (Équation bicarrée). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

▷ **Solution.** Cette technique est à connaître. On dit que l'on change de variable : on pose $y = x^2$, et l'équation devient $y^2 - 3y + 2 = 0$, que l'on sait résoudre. Notons a et b ses racines. On a donc $y = x^2 = a$ ou b. Ainsi, pour dans le cas où a est positif, $\pm\sqrt{a}$ sont racines de l'équation bicarrée, et dans le cas où b est positif, $\pm\sqrt{b}$ également. On a au plus quatre racines, ce qui est cohérent avec le théorème fondamental de l'algèbre qui assure qu'un polynôme de degré $n > 0$ a au plus n racines.

Sommes

☆☆☆☆☆ **Exercice 13** (Le symbole sigma). On introduit un symbole pour noter de façon plus compacte les sommes numériques. Étant donnée une suite finie de nombres réels u_1,...,u_n, on note la somme $S = u_1 + ... + u_n$ de la façon suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Le symbole k est un indice, dit *muet*, car on aurait pu choisir n'importe quel autre symbole, et il n'existe pas en dehors de la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Par défaut, c'est un entier qui varie entre la valeur indiquée en dessous de la somme (et on l'affecte alors par le signe $=$), ici 1, et la valeur indiquée au-dessus de la somme, ici n. On dit que l'on somme *pour* $k = 1,2,\ldots,n$ ou k *variant de* 1 *à* n. À chaque étape, on ajoute u_k à la valeur précédente, la somme vide étant par convention égale à 0. L'ordre dans lequel les $k \in [\![1,n]\!]$ sont pris n'a pas d'importance, car l'addition est une opération commutative ($a + b = b + a$).

1. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{3} k$? Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{3} k$?

2. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2$? Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{3} k^2$?

3. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{4} 2^k$? Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{4} 2^k$?

4. Que vaut $\sum\limits_{k=1}^{3} 1$? Que vaut $\sum\limits_{k=0}^{3} 1$?

5. Soient u et v deux suites réelles. Soit n un entier naturel. Que dire de l'identité $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k + v_k = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$? Corriger si besoin.

6. Que dire de l'identité $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k + \sum\limits_{k=p}^{n} u_k$? Corriger si besoin.

7. Montrer que pour tout réel t, $\sum\limits_{k=0}^{n} t u_k = t \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

▷ **Solution.**

1. $\sum\limits_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6$ et $\sum\limits_{k=0}^{3} k = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$. De même, $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2 = 14$ car ajouter 0 n'a aucun effet.

3. $\sum\limits_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30 \neq \sum\limits_{k=0}^{4} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 17$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{3} 1 = \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{1}_{k=2} + \underbrace{1}_{k=3} = 3$ et $\sum\limits_{k=0}^{3} 1 = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{1}_{k=2} + \underbrace{1}_{k=3} = 4$.

5. On a $(u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) = (u_1 + \ldots + u_n) + (v_1 + \ldots + v_n)$, car l'addition de réels est commutative. On peut donc « casser une somme » sous le symbole sigma.

6. Dans le second membre, le premier terme somme $u_1 + \ldots + + u_{p-1} + u_p$ et le second terme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$. En regroupant, on a donc $u_1 + \ldots + + u_{p-1} + u_p + u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$ et l'on a deux fois le terme u_p qui n'apparaît a priori qu'une seule fois dans le terme de gauche $u_1 + \underbrace{\ldots}_{\text{avec } u_{p-1}+u_p+u_{p+1} \text{ quelque part}} + u_n$. Il faut donc corriger : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} u_k$ ou ce qui est correct encore $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{p-1} u_k + \sum\limits_{k=p}^{n} u_k$.

7. C'est simplement une généralisation de la propriété de distributivité : pour tout réel t, $\sum\limits_{k=0}^{n} t u_k = t u_0 + t u_1 + \ldots + t u_n = t(u_0 + \ldots + u_n) = t \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

★★★☆☆ **Exercice 14** (Somme des premiers entiers). On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Ecrire $2S = S + S$ de sorte que le premier terme ordonne les termes par ordre croissant, et le second terme, à aligner en dessous, par ordre décroissant.
2. Qu'observe-t-on pour deux nombres l'un au-dessus de l'autre ?
3. Combien cette somme a-t-elle de termes ?
4. Conclure.

▷ **Solution.**

1. On a :
$$\begin{aligned} 2S = {} & 1 + 2 + ... + (n-1) + n \\ & + n + (n-1) + ... + 2 + 1. \end{aligned}$$
2. $1 + n = n + 1$, $2 + (n-1) = n + 1$, etc., jusqu'à $(n-1) + 2 = n + 1$, et bien sûr $n + 1 = n + 1$.
3. Cette somme a n termes.
4. La somme $2S$ a n couples de termes valant tous $n+1$, autrement dit, $2S = n \times (n+1)$. On en déduit la formule : $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

☆☆☆☆☆ **Exercice 15** (La factorielle)**.** Étant donné n un entier naturel, on définit la *factorielle* de n comme l'entier naturel $n! := 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$, autrement dit, $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ où le symbole Π note comme le symbole Σ un produit au lieu d'une somme. On pose, par convention, $0! = 1$.

1. Que valent $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$, $6!$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \times (n-1)!$.
3. Exprimer $\prod_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n!$.
4. Que dire de l'identité : $(nm)! = n!m!$ où n,m sont des entiers naturels ?
5. Comparer $2^{n-1}, n!$ et n^n.
6. On cherche à démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour tous entiers naturels $k \leqslant n$.
   (a) Rappeler la définition des coefficients binomiaux.
   (b) Vérifier la formule pour $k = 1$ et n quelconque.
   (c) *(Difficile)* Montrer par récurrence sur n, en utilisant la formule de Pascal, la formule des coefficients binomiaux en fonction de la factorielle.
   (d) En déduire que pour tous $k,n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un entier.
   (e) Retrouver la formule de symétrie des coefficients binomiaux.
   (f) Donner une formule pour $\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

▷ **Solution.**

1. $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$.
2. Par associativité du produit, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de parenthèses, $(n+1)! = \prod_{k=1}^{n+1} k = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \times \underbrace{\prod_{k=n+1}^{n+1} k}_{=n+1}$ (propriété ayant été vue pour le symbole sigma) qui est bien $= n!(n+1)$.
3. $\prod_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 \times 2^2 \times ... \times n^2 = (1 \times 2 \times ... \times n)^2 = n!^2$.
4. Elle est grossièrement fausse : par exemple, $(2 \times 3)! = 6! = 720 \neq 2!3! = 2 \times 6 = 12$. Heuristiquement, la factorielle augmente trop rapidement pour vérifier une propriété multiplicative.

5. Tous les entiers $1 \leqslant k \leqslant n$ étant positifs, on peut faire le produit de cette inégalité : $1 \times 2 \times ... \times 2 \leqslant 1 \times 2 \times ... \times n \leqslant n \times n \times ... \times n$, soit $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.

(a) Le coefficient $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

(b) On sait que $\binom{n}{1} = n$. Puisque $1! = 1$ et $n! = (n-1)!n$, on a bien $\frac{n!}{k!(n-k)!} = n$.

(c) Montrons par récurrence sur $n \in N$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Initialisation : pour $n = 0$, forcément $k = 0$ et $\binom{0}{0} = 1$. On a bien $\frac{0!}{0!0!} = 1$, donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, et montrons alors la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. Soit $k \in [\![0,n+1]\!]$. Si $k = 0$, c'est facile : $\binom{n+1}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$. Sinon, on utilise la formule de Pascal pour faire apparaître n à la place de $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&= \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\text{par HR}} + \underbrace{\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}}_{\text{par HR}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1))!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{k!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k-1)!(n+1-k)} \\
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}
\end{aligned}$$

qui est bien la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 0$, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$; par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

(d) Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier, donc $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ est un entier.

(e) On a bien : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

(f) Il suffit de remplacer : $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \frac{(2n)!}{n!^2}$.

Combinatoire

☆☆☆☆☆ **Exercice 16** (Question de vocabulaire). Sachant que, contrairement aux vermilingues, les oryctéropes ne sont pas des xénarthres, étant donné trois oryctéropes et quatre vermilingues, combien peut-on former de groupes de deux couples oryctérope-xénarthre pour danser à quatre ?

▷ **Solution.** Grâce à l'indication initiale, on a donc trois éléments dans un ensemble O et quatre éléments dans un ensemble $V = X$. Pour trouver le nombre de quadrettes de deux éléments de O et deux éléments de V, on cherche donc le nombre de sous-ensembles à deux éléments de O et le nombre de sous-ensembles à deux éléments de V. Ce sont respectivement $\binom{3}{2}$ et $\binom{4}{2}$. Puisque ces choix sont indépendants, on les multiplie : il y a $\binom{3}{2}\binom{4}{2}$ telles formations. Reste à calculer : $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ et $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!^2} = \frac{24}{4} = 8$, soit $3 \times 8 = 24$ choix possibles en tout.

☆☆☆☆☆ **Exercice 17** (Compter les listes). Combien y a-t-il de manières de mettre trois Télétubbies à la queue leu-leu ?

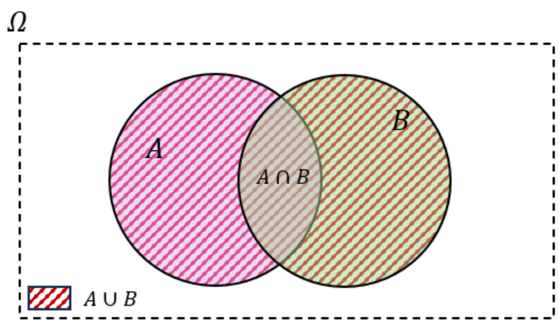
▷ **Solution.** Puisqu'il y a quatre Télétubbies deux à deux discernables, la question revient à compter le nombre de listes de trois éléments à valeurs dans un ensemble à quatre éléments (en se souciant de l'ordre). Il y a quatre manières de placer le premier Télétubbies, puis, il en reste trois, donc trois manières de placer le deuxième Télétubbies, puis deux manières de placer le dernier Télétubbies : il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ manières de mettre trois Télétubbies à la queue leu leu.

★★☆☆☆ **Exercice 18** (Formule du crible de Poincaré). Soient A,B deux ensembles finis.

1. Montrer à l'aide d'un diagramme que $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.
2. Que se passe-t-il lorsque A et B sont disjoints ?
3. Comparer $\operatorname{card}(A \cup B)$ et $\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$ en toute généralité.
4. Vérifier que cette formule est vraie si $A = B$.
5. Combien y a-t-il d'entiers naturels inférieurs à 20 qui soient pairs ou multiples de 3 ?

▷ **Solution.**

1. On dessine un diagramme de Venn :



qui permet de voir que la partie hachurée est composée des éléments de A n'appartenant pas à B, des éléments de l'intersection et des éléments de B n'appartenant pas à A. En comptant tous les élements de A et tous les éléments de B, on compte deux fois les éléments de l'intersection, d'où la formule.

2. Le fait A et B sont disjoints s'écrit exactement : $A \cap B = \emptyset$. Or $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$, donc on peut écrire $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$. Attention, ceci est faux dans le cas général.
3. Puisque que $\operatorname{card}(A \cap B)$ est un nombre positif, on a toujours la majoration $\operatorname{card}(A \cup B) \leqslant \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$.
4. Si $A = B$, $A \cup B = A \cap B = A = B$. La formule se récrit par exemple $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A)$, et donc elle est vérifiée.
5. On considère Ω l'ensemble des entiers positifs $\leqslant 20$ et A l'ensemble de ces entiers pairs, B l'ensemble de ces entiers multiples de 3. En comptant 0, $\operatorname{card}(A) = 11$ et en toujours en comptant 0, $\operatorname{card}(B) = 7$. Les élements de $A \cap B$ sont les entiers naturels inférieurs à 20 pairs et multiples de 3, c'est-à-dire les multiples de 6 (car $2 \wedge 3 = 6$) soit 0, 6, 12 et 18, d'où $\operatorname{card}(A \cap B) = 4$. Ainsi, le nombre cherché est $\operatorname{card}(A \cup B) = 11 + 7 - 4 = 14$.

★★★★★ **Exercice 19** (Preuve par dénombrement de la formule de Pascal). Après avoir rappelé la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, $k \leqslant n$, k,$n \in \mathbb{N}$, démontrer la formule de Pascal sans calcul, en utilisant la formule de l'exercice précédent.

INDICATION Si l'on isole un élément x d'un sac de boules, alors on peut considérer les parties à k boules ne contenant pas la boule x et les parties à k boules dont on sait qu'elles la contiennent.

▷ **Solution.** Comptons le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments, que l'on peut interpréter comme un sac de boules. Isolons comme dans l'indication une boule, notons-là x. Alors l'ensemble des parties à k éléments du sac est l'union disjointe de l'ensemble des parties à k éléments contenant x et de l'ensemble des parties ne la contenant pas, donc d'après l'exercice précédent, son cardinal, soit $\binom{n+1}{k}$, est la somme des cardinaux de ces deux derniers.

Sélectionner une partie à k éléments du sac à $n+1$ boules ne contenant pas x revient à trouver une partie à k éléments parmi les n boules restantes. Il y a donc $\binom{n}{k}$ telles parties. D'autre part, sélectionner une partie à k éléments d'un sac à $n+1$ boules dont on sait qu'elle contient x revient à trouver une partie à $k-1$ éléments parmi les n boules restantes, car on a déjà un élément, x, déjà choisi. Il y a donc $\binom{n+1}{k-1}$ telles parties. On a donc $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Probabilités

☆☆☆☆☆ **Exercice 20** (Poker). On joue au poker avec un jeu de 52 cartes. Une main est toujours constituée de 5 cartes.

1. Quelle chance a-t-on d'obtenir un carré ?
2. Quelle chance a-t-on d'obtenir un full ?
3. Quelle chance a-t-on d'obtenir une double paire ?
4. Quelle chance a-t-on d'obtenir un brelan ?
5. Quelle chance a-t-on d'obtenir une paire ?
6. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush ?
7. Quelle chance a-t-on d'obtenir une quinte flush royale ?
8. Quelle chance a-t-on d'obtenir une suite ?
9. Quelle chance a-t-on d'obtenir une couleur ?
10. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un as ?
11. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins un trèfle ?
12. Quelle chance a-t-on d'obtenir au moins une figure ?
13. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et une figure ?
14. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as et un trèfle ?
15. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou une figure ?
16. Quelle chance a-t-on d'obtenir un as ou un trèfle ?

▷ **Solution.** La première chose à faire est de compter le nombre de mains. C'est le nombre de parties à 5 éléments d'un jeu à 52 éléments, il y a donc $\binom{52}{5}$ mains. Dans chaque cas, on dénombre le nombre de mains favorables et pour trouver la probabilité d'en obtenir une, on divise par ce même nombre. Il faut prendre garde à ce que l'ordre d'une main n'importe pas : on raisonnera en termes de combinaisons (parties d'un ensemble) plutôt que d'arrangements (listes à valeurs dans un ensemble).

1. Comptons le nombre de carrés. On adapote une méthode du même type que le calcul des « probabilités

composées ». Il s'agit de choisir le rang de la carte, soit 13 choix, puis une dernière carte au hasard parmi les restantes, soit 48 choix. Il y a donc 13×48 carrés. Il y a donc $\frac{13\times 48}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir un carré.

2. Comptons le nombre de fulls. Il faut choisir le rang du brelan, soit 13 choix, ainsi que la carte du carré n'apparaissant pas, soit 4 choix. Puis, il faut choisir le rang de la paire, soit 12 choix, puisqu'on ne peut choisir le même rang que celui du brelan. Il reste à choisir les deux cartes du carré n'apparaissant pas, soit $\binom{4}{2}$ choix, d'où $\frac{13\times 4\times 12\times\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir un full.

3. Cette fois, il faut choisir les deux rangs, qui ne peuvent être égaux, soit, comme précédemment, 13×12 choix. Dans chaque paire (indépendantes), il faut choisir les deux cartes du carré, soit $\binom{4}{2}^2$ choix en tout. La dernière carte est relativement libre mais ne peut être d'un des deux autres rangs, sans quoi on aurait un full qui n'est pas une double paire. Il reste donc $52 - 8 = 44$ cartes. On a donc $\frac{13\times 12\times\binom{4}{2}^2\times 44}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir une double paire.

4. Il s'agit maintenant de choisir le rang du brelan, soit 13 choix, et la carte du carré n'apparaissant pas, soit 4 choix. Reste deux cartes à choisir parmi les $52 - 4 = 48$ cartes restantes qui ne sont pas dans le carré du brelan, soit $\binom{48}{2}$ choix, puis $\frac{13\times 4\times bin248}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir un brelan.

5. Même raisonnement où les 4 choix de la carte restante sont remplacés par les $\binom{4}{2}$ choix des deux cartes restantes, d'où $\frac{13\times\binom{4}{2}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir une paire.

6. Pour déterminer une quinte flush, il suffit de choisir le rang et la couleur de la première carte. Cependant, une quinte flush contenant un as doit commencer ou se terminer par l'as ; autrement dit, il n'existe pas de quinte flush strictement au-delà du 10. Il y a donc 40 quintes flushes, soit $\frac{40}{\binom{52}{5}}$ chances d'en obtenir une.

7. Il n'y a que quatre quintes flushes royales, soit $\frac{4}{\binom{52}{5}}$ chances d'en obtenir une.

8. Pour choisir une suite, il faut d'abord choisir le rang de la première carte, et de même que pour la quinte flush, elle doit commencer ou se terminer par l'as. Pour chaque carte, la couleur n'importe pas, soit 4 choix indépendants pour chacune des cinq cartes. Enfin, une suite n'est pas une quinte flush, il faut donc enlever ces 40 mains, soit $10 \times 4^5 - 40$ choix, donc une probabilité de $\frac{10\times 4^5-40}{\binom{52}{5}}$ d'obtenir une suite.

9. Pour choisir une couleur, il faut d'abord choisir la couleur des cartes, soit 4 choix. Pour chaque carte, le rang n'importe pas, soit 13 choix pour chacune des cinq cartes... mais cette fois qui ne sont pas indépendants ! Voyons-le plutôt de la manière suivante : il s'agit de choisir une partie à 5 éléments des 13 cartes de la couleur choisie, soit $\binom{13}{5}$ choix. Enfin, une couleur n'est pas une suite, il faut donc enlever ces $10 \times 4^5 - 40$ mains, soit $4 \times \binom{13}{5} - 10 \times 4^5 - 40$ choix, donc une probabilité de $\frac{4\times\binom{13}{5}-10\times 4^5-40}{\binom{52}{5}}$ d'obtenir une couleur.

10. Il s'agit de choisir l'as, soit 4 choix, puis les autres cartes de la main parmi les 51 cartes restantes, soit $\binom{51}{4}$ choix. Il y a donc $\frac{4\times\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir au moins un as.

11. Il y a 13 cartes de trèfles, donc comme précédemment, $\frac{13\times\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir au moins un trèfle.

12. Il y a 12 figures, donc comme précédemment, $\frac{12\times\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir au moins une figure.

13. Il s'agit de choisir l'as, soit 4 choix, et indépendemment, une figure (car un as n'est pas une figure et vice versa), la figure, soit 12 choix. Il reste 3 cartes à choisir parmi les 50 restantes, soit $\frac{4\times 12\times\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir au moins un as et au moins une figure.

14. C'est plus dur. Choisissons d'abord l'as. Si c'est l'as de trèfle, alors le reste de la main est sans importance, soit $\binom{51}{4}$ choix. Sinon, il faut obligatoirement un trèfle dans le reste de la main, soit 13 choix, puis le reste de la main est sans importance, soit $\binom{50}{3}$ choix, et comme il y a trois as qui ne soient pas l'as de trèfle, on a, $3 \times 13 \times \binom{50}{3}$ choix dans ce cas. Les deux cas ne se recoupant pas bien sûr, on a $\frac{\binom{51}{4}+3\times 13\times\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}}$ chances d'obtenir un as et un trèfle au moins.

15. Une disjonction appelle à utiliser la formule du crible, que l'on peut énoncer directement en termes de probabilités : $P(\text{un as ou une figure}) = P(\text{au moins un as}) + P(\text{au moins une figure}) - P(\text{un as et une figure})$, soit une probabilité de $\frac{4\times\binom{51}{4}+12\times\binom{51}{4}-4\times 12\times\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}}$.
16. De même, on trouve une probabilité de $\frac{4\times\binom{51}{4}+13\times\binom{51}{4}-(\binom{51}{4}+3\times 13\times\binom{50}{3})}{\binom{52}{5}}$.

Exercice 21 (La formule de Bayès). Un test de détection d'une maladie rare est positif à 99 % lorsqu'un individu est atteint de cette maladie, et il est positif à 0,1 % lorsqu'il n'est pas atteint. Supposons que 0,01 % de la population soit atteint de cette maladie. Sachant être positif au test de détection, calculer la probabilité que l'on soit atteint par la maladie.

▷ **Solution.** C'est une simple inversion de probabilités conditionnelles qui, si l'on connaît la formule, n'a rien de savant. Posons les événements A : « l'individu est atteint de la maladie » et B : « l'individu est positif au test de détection ». L'énoncé nous donne : $P_A(B) = \frac{99}{100}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{0,1}{100}$. De plus $P(A) = \frac{0,01}{100}$. On cherche $P_B(A)$. Par définition, $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Or $P(A\cap B)$ intervient également dans la formule de $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ où toutes les données sont connues, donc on peut récrire à bon escient $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$. Il nous reste à calculer $P(B)$. On connaît $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$, ce qui nous permet d'utiliser la formule des probabilités totales : $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$ où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Après calcul, on obtient $P(B) = 0.0010989...$, puis $P_B(A) \approx 0{,}09$ soit environ 1 %. C'est très peu !

Informatique avec Python

Exercice 22 (Programmation fonctionnelle). Écrire un programme qui, à partir de la saisie d'un rayon et d'une hauteur, calcule le volume d'un cône droit.

▷ **Solution.** Penser à transformer en flottants les données rentrées dans la console. Observer la syntaxe d'un message exprimé par *print* avec des variables.

```
from math import *
rayon=float(input())
hauteur=float(input())
volumecone=(1/3)*hauteur*pi*(rayon**2)
print('Le volume du cône de rayon {} et de hauteur {} est {}'.
    format(rayon,hauteur,volumecone))
```

Exercice 23 (Une fonction booléenne). Écrire une fonction qui affiche « PAIR » si un entier donné est pair est « IMPAIR » sinon.

▷ **Solution.**

```
def parite(n):
    if n%2==0:
        print('Cet entier est pair.')
    else:
```

```
        print('Cet entier est impair.')
```

☆☆☆☆☆ **Exercice 24** (Boucle itérative fixe). Écrire une fonction qui calcule la somme des premiers entiers jusqu'à un entier donné.

▷ **Solution.** Attention ! La fonction *range* s'arrête au rang précédent de l'argument. Une erreur qui peut s'éviter par un simple petit test rapide dans la console.

```
def sommeentiers(n):
    S=0
    for i in range(n+1):
        S+=i
    return(S)
```

☆☆☆☆☆ **Exercice 25** (Boucle itérative conditionnelle). Écrire un programme qui calcule la plus grande puissance de 2 divisant un entier donné.

▷ **Solution.**

```
def valuation(n):
    v=0
    while n%2==0:
        v+=1
        n=n/2
    return(v)
```

☆☆☆☆☆ **Exercice 26** (Approximation numérique). Écrire un programme qui approxime la valeur de la constante mathématique e en fonction de n assez grand en utilisant la formule $e \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$.

▷ **Solution.** La seule difficulté est de gérer la factorielle. Le plus intelligent est de créer une fonction à part. Attention à bien commencer la boucle itérative, dans la factorielle, à partir de 1 !

```
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P*=i
    return(P)

def approximonse(n):
    S=0
    for i in range(n+1):
        S+=1/(factorielle(i))
```

```
        return(S)
```

Vers l'analyse : les inégalités

Exercice 27 (Positions relatives de paraboles). Comparer les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}$,$\mathcal{P}'$ d'équation $y = 3x^2 + 6x + 1$ et $y = 2x^2 - 7x - 2$.

▷ **Solution.** On cherche à résoudre une inéquation du second degré : $3x^2 + 6x + 1 \leqslant 2x^2 - 7x - 2$, qui équivaut à $x^2 - x - 1 \leqslant 0$. On connaît les racines de ce trinôme, qui équivaut donc à $(x - \varphi)(x - \varphi') \leqslant 0$ où φ est le nombre d'or et φ' sont conjugué. On peut raisonner par un tableau de signe ou, plus simplement, se rappeler que pour une parabole dont les branches sont orientées vers le haut, la fonction du second degré est négative exactement dans l'intervalle entre les racines. Autrement dit, la courbe $\mathcal{P}'$ est en dessous de la courbe $\mathcal{P}$ sauf dans l'intervalle $]\varphi',\varphi[$ où c'est le contraire.

Exercice 28 (Inégalité arithmético-géométrique). Montrer que, pour tous réels a,b positifs, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

▷ **Solution.** La preuve repose sur une identité remarquable. En effet, on peut récrire cette inégalité sous la forme $a+2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$, soit avec un peu d'astuce : $\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2 \geqslant 0$. Or $\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ est un carré, donc toujours positif, donc l'inégalité est toujours vérifiée.

Exercice 29 (Inégalité de Bernoulli (par le calcul)). Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x > 0$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

▷ **Solution.** Pour établir une inégalité, la technique générale en analyse est d'étudier les variations de la différence, ce qui revient à dériver une fonction. Posons donc $f(x) = (1+x)^n - 1 - nx$ et montrons que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est un polynôme ; on peut le dériver, avec $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n((1 + x)^{n-1} - 1)$. Cette quantité est toujours positive : en effet, pour $x \geqslant 1$, on a $1 + x \geqslant 1$ donc $(1 + x)^{n-1} \geqslant 1$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f(0) = 1 - 1 = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.