# Intégration complexe

| *Théorème et hypothèses* | *Formule* |
|---|---|
| Fonctions holomorphes | |
| **Formule de Cauchy avec l'indice**<br>$U$ ouvert étoilé, $z_0 \in U$,<br>$f: U \to \mathbb{C}$ holomorphe,<br>$\gamma$ lacet $C^1pm$ où $z_0 \notin \gamma([a,b])$ | $I_\gamma(z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$<br>$I_\gamma(f, z_0) = I_\gamma(1, z_0)f(z_0)$ |
| **Formule de Cauchy version à paramètre réel**<br>$U$ ouvert étoilé, $z_0 \in U$,<br>$f: U \to \mathbb{C}$ holomorphe,<br>$\overline{D}(z_0, r) \subseteq U$ | $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt$ |
| **Théorème de Cauchy avec l'indice**<br>$U$ ouvert, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorphe<br>$z_0 \in U$ et $\overline{D}(z_0, R) \subseteq U$, $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$<br>$\forall z \in D(z_0, R) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ | $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$<br>pour tout $0 < r < R$ |
| **Théorème de Cauchy version à paramètre réel**<br>Aucune différence | $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)e^{-int}dt$<br>pour tout $0 < r < R$ |
| **Inégalité de Cauchy**<br>$U$ ouvert, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorphe<br>$z_0 \in U$ et $D(z_0, R) \subseteq U$<br>$r \in ]0, R[$, $n \in \mathbb{N}$ | $\left\lvert f^{(n)}(z_0)\right\rvert \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left\lvert f\left(z_0 + re^{it}\right)\right\rvert$ |
| Fonctions méromorphes | |
| **Coefficients de Laurent**<br>$f: C(z_0, R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ holomorphe<br>$\forall z \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ | Mêmes formules que le théorème de Cauchy pour les $a_n$ |
| **Résidu**<br>$f: U \to \mathbb{C}$ méromorphe, $z_0$ pôle de $f$ | $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)} f(z)dz$<br>pour tout $r$ t. q. $f$ holomorphe sur $D^*(z_0, r)$ |
| **Formule des résidus**<br>$U$ ouvert étoilé non vide,<br>$f: U \to \mathbb{C}$ méromorphe,<br>$\gamma$ lacet $C^1pm$ où $\gamma([a,b])$ ne contient aucun pôle de $f$ | $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0\in P_\gamma(f)} I_\gamma(z_0)\mathrm{Res}(f, z_0)$<br>où $P_\gamma(f)$ est l'ensemble des pôles de $f$ (tels que $I_\gamma(z_0) \neq 0$) |
| **Expression pratique des résidus**<br>On reprend les hypothèses précédentes<br>$z_0$ pôle d'ordre $k$ de $f$<br>$R$ tel que $f$ n'a qu'un pôle sur $D(z_0, R)$ | $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$<br>$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ (en limite) |
| **Cas $k = 1$** | $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$ |