Théoremes d'échange entre opérations usuelles (limites, sommes, intégrales, dérivation)

Interversions discrètes	
Interversion	**Hypothèses**
$\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{p\to\infty} u_{n,p} = \lim\limits_{p\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} u_{n,p}$	u croissante en n et en p
Théorème de Fubini pour les familles sommables $\sum\limits_{p\in A}\sum\limits_{q\in B} a_{p,q} = \sum\limits_{q\in B}\sum\limits_{a\in A} a_{p,q}$	Pour tout p, $\left(a_{p,q}\right)_q$ est sommable et la série des sommes est absolument convergente
Convergence dominée discrète $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k}$	Convergence simple des $u_{n,k}$ lorsque n tend vers l'infini vus comme une fonction de k. Hypothèse de domination uniforme en n : $\lvert u_{n,k}\rvert \leq v_k$ et $\sum v_k < +\infty$
Simples fonctions	
Interversion limite-limite $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$	CVU au voisinage de a et l'une des limites existe
Interversion des limites pour les séries de fonctions $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$	CVU au voisinage de a et l'une des limites existe
Calcul différentiel propre	
Lemme de Schwartz (généralisable) $\frac{\partial f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y\partial x}$	f de classe D^2 (condition forte ! Existence des $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ voire de toutes les dérivées partielles ne suffit pas)
Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment	
Échange limite (uniforme)-intégrale $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n$	CVU de la suite (continuité des f_n) -- CVU de la suite, à valeurs dans un Banach (Cpm des f_n et Cpm de $\boldsymbol{f}$)
Convergence trivialement dominée $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n$	CVS de la suite (Cpm des f_n et limite Cpm)
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$	CVU de la série (continuité des f_n)
$\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \left(x \mapsto \int_a^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)$	f_n CVU sur tout sous-segment, les F_n notant leurs primitives s'annulant en a
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} F_n = \left(x \mapsto \int_a^x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$	$\sum f_n$ CVU sur tout sous-segment, les F_n notant leurs primitives s'annulant en a
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}^k f_n}{\mathrm{d}t^k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$	<u>Cas $k=1$</u> : f_n C^1 CVS des f_n, CVU des f_n' sur tout sous-segment <u>Cas général</u> : f_n C^k CVS des f_n, CVS des $f_n^{(i)}$ pour $1 \leqslant i < k$ et CVU des $f_n^{(k)}$ sur tout sous-segment

	<u>Cas $k = \infty$</u> : f_n C^∞ CVS des f_n, CVU sur tout sous-segment des $f_n^{(k)}$ pour tout k à partir d'un certain rang et CVS des précédentes à ce rang
Théorème de dérivation sous le signe somme $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}^k f_n}{\mathrm{d}t^k}$	Idem pour les $\sum f_n$ (et $\sum f_n'$, etc.) sur tout sous-segment
$\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	f est continue
Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque	
Théorème de convergence dominée $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$	CVS, $\int$bilité et hypothèse de domination uniforme sur $\mathbb{N}$ (Cpm des f_n et limite Cpm)
Théorème de convergence dominée version continue $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f_\lambda(t)\mathrm{d}t = \int_I \left(\lim_{\lambda\to\infty} f_\lambda\right)(t)\mathrm{d}t$	CVS, $\int$bilité et hypothèse de domination uniforme en lambda (Cpm des f_n et limite Cpm)
Théorème d'échange série-intégrale $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$	Intégrabilités, CVS et convergence de la série des normes 1 (Cpm des f_n et limite de la somme Cpm) *OU* CVD sur les sommes partielles ou les restes
Continuité sous le signe intégral Continuité de $x \longmapsto \int_I f(t,x)dt$ sur J	• $t \longmapsto f(t,x)$ Cpm pour tout x • $x \longmapsto f(t,x)$ continue pour tout t • domination uniforme en x
Théorème de Leibniz = théorème de dérivation sous le signe intégral $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)\mathrm{d}t$	<u>Cas $k = 1$</u> : • $f(\cdot,t)$ de classe C^1 ; • $f(x,\cdot)$ intégrable ; • $\frac{\partial}{\partial x} f(x,\cdot)$ est Cpm ; • hypothèse de domination sur elle uniforme en x (au voisinage de tout point, sur tout compact…) <u>Cas général</u> : • $f(\cdot,t)$ de classe C^k ; • pour tout $0 \leqslant p < k$, $\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,\cdot)$ intégrable ; • $\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,\cdot)$ est Cpm ; • hypothèse de domination sur elles uniforme en x (même remarque) <u>Cas $k = \infty$</u> : • $f(\cdot,t)$ de classe C^∞ ; • pour tout k, $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,\cdot)$ intégrable ; • $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,\cdot)$ est Cpm ; hypothèse de domination sur elles uniforme en x (idem)

Théorème de Fubini $\int_I \int_J f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_J \int_I f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	• $\int_J \|f(x,y)\|\mathrm{d}x$ et $\int_J \|f(x,y)\|\mathrm{d}y$ existent toujours pour l'autre variable fixée ; • $y \longmapsto \int_J \|f(x,y)\|\mathrm{d}x$ et $x \longmapsto \int_J \|f(x,y)\|\mathrm{d}y$ sont continues ; la première est intégrable sur J.
INTERVERSION	**HYPOTHÈSES**
Intégration de Riemann sur un segment	
Continuité des intégrales paramétriques Continuité de $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)dt$ sur D	f continue
Dérivation des intégrales à paramètre $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t$ continue	f continue, $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ existe en tout point du pavé et $(x,t) \longmapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ continue
INTERVERSION	**HYPOTHÈSES**
Intégration de Riemann sur un intervalle quelconque	
Théorème d'interversion $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx = \int_I \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,dx$	f_n localement intégrables, CVU vers f sur tout sous-segment et I_n CVU sur $\mathbb{N}$ (si $(f_i)_{i\in I}$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont l.i., $\left(\int_a^b f_i\right)$ CVU sur I si $\exists \phi : I \to \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A \in [a,b]\ \ \forall i \in I\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ A < x < b \Longrightarrow \left\|\left(\int_a^x f_i\right) - \phi_i\right\| < \varepsilon$, càd $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A \in]a,b[\ \forall x,y\ \ \forall i \in I\ A < x,y < b \Longrightarrow \left\|\int_x^y f_i\right\| < \varepsilon$).
Théorème de convergence simple $\int_I f_n \overrightarrow{CVU} \int_I f$ uniformément	f_i l. i. $\forall i \in I\ \|f_i\| \leq g$ l. i. d'intégrable convergente
Continuité des intégrales impropres à paramètres Continuité de $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)dt$ sur D	$f : [a,b[\times D \to \mathbb{R}$ • f continue • $t \longmapsto f(t,y)$ l. i. sur $[a,b[$ pour tout $y \in D$ • $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ CVU sur D
Dérivabilité des intégrales impropres à paramètres $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\mathrm{d}t$ continue	• D ouvert • f continue • $\frac{\partial}{\partial x} f(t,y)$ existe $\forall (t,y) \in [a,b[\times D$ et est continue sur $[a,b[\times D$ • $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\mathrm{d}t$ CVU sur D
INTERVERSION	**HYPOTHÈSES**
Intégration de Borel-Lebesgue	
INTERVERSION	**HYPOTHÈSES**
Théorème de convergence monotone/théorème de Beppo-Levi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,d\mu = \int_I \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu$	(f_n) suite croissante de fonctions mesurables positives à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$
Échange série intégrale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n\,d\mu = \int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\,d\mu$	f_n mesurables positives

Théorème de convergence dominée $$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n\,d\mu = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$ (et convergence dans L^1 !)	f_n suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui converge vers f quelconque presque partout μ-p.p. $\lvert f_n\rvert \leqslant g$ intégrable
Théorème de CVD continue $$\lim_{x\to\infty}\int_I f(x,t)d\mu(t) = \int_I \lim_{x\to\infty} f(x,t)d\mu(t)$$	$f(x,\cdot)$ fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui convergent simplement vers f μ-p.p. μ-p.p. $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant g$ intégrable
Échange série intégrale (amélioré) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n\,d\mu = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,d\mu$$	u_n mesurables, $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \lvert u_n\rvert < \infty$
Continuité sous le signe Continuité de $u \longmapsto \int_X f(u,y)d\mu(y)$ en $u_0 \in I$	• $u \longmapsto f(u,y)$ continue en u_0 pour μ-presque tout y • Pour tout $u \in I$, pour μ-presque tout y, $\lvert f(u,y)\rvert \le g(y)$ intégrable
Dérivation sous le signe intégral $\frac{d}{du}\int_X f(u,y)d\mu(y) = \int_X \frac{\partial}{\partial u} f(u,y)d\mu(y)$ sur I	• $y \longmapsto f(u,y)$ L^1 pour tout u • $u \longmapsto f(u,y)$ dérivable pour μ-presque tout y • pour tout $u \in I$, pour μ-presque tout y, $\left\lvert \frac{\partial}{\partial u} f(u,y)\right\rvert \le g(y)$ intégrable
Holomorphie sous le signe intégral $\frac{d}{dz}\int_X f(z,x)d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z,x)d\mu(x)$ sur U	• $f(z,\cdot)$ mesurable pour tout z ; • $f(\cdot,x)$ holomorphe pour presque tout x ; • $\lvert f(z,x)\rvert \le \varphi(x)$ mesurable intégrable pour tout $z \in U$, pour presque tout $x \in X$.
Théorèmes de Fubini $$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu_1\otimes\mathrm{d}\mu_2 = \int_X\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\mu_1\,\mathrm{d}\mu_2 = \int_Y\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu_2\,\mathrm{d}\mu_1$$ avec séparation en produit si $f(x,y) = g(x)h(y)$	μ_1, μ_2 σ-finies $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ mesurable (alors les fibres le sont) f positive, ou f intégrable au choix !