Lemmes de Borel-Cantelli

Limite supérieure, limite inférieure d'événements

$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k =$ « l'ensemble des ω qui appartiennent à une infinité de A_n »
= « presque sûrement, A_n infiniment souvent »

$\overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n} = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \overline{A_k} = \liminf\limits_{n\to\infty} \overline{A_n}$ =« l'ensemble des ω qui n'appartiennent qu'à un nombre fini de A_n » = « presque sûrement, A_n seulement un nombre fini de fois »
= « presque jamais, A_n infiniment souvent »

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k =$ « l'ensemble des ω qui appartiennent à tous les A_n àpcr »
= « presque sûrement, tous les A_n àpcr » $\subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

$\overline{\liminf\limits_{n\to\infty} A_n} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \overline{A_k} =$ « l'ensemble des ω qui sont hors d'au moins une sous-suite de A_n »
= « presque jamais, tous les A_n àpcr » $\supseteq \overline{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n}$

Premier lemme de Borel-Cantelli

Si $\sum P(A_n) < \infty$, alors presque sûrement, $A_n$un nombre fini de fois (et presque jamais, tous les A_n à partir d'un certain rang).

Second lemme de Borel-Cantelli (« Cantelli-Borel »)

Si A_n sont mutuellement indépendants et $\sum P(A_n) = \infty$, alors presque sûrement, A_n infiniment souvent (et c'est tout).

Rappels

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \text{ (Théorème de Léon)}$$
$$\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

Technique classique

Montrons que $\liminf X_n \leq 1$ presque sûrement.
Il faut souvent montrer plutôt $\liminf X_n \leq 1-\epsilon$ p. s. pour tout ϵ et l'on conclut par intersection dénombrable de presque certains
Autrement dit, montrer que $P(\liminf X_n \leq 1-\epsilon)$.
On étudie $A_n = \{X_n > 1-\ \epsilon\}$. Si $P(A_n)$ est le t. g. d'une série CV, par B.-C.,
« presque sûrement, A_n seulement un nombre fini de fois ».
Donc àpcr $X_n \leq 1-\ \epsilon$ presque sûrement d'où le résultat par croissante de la limite inférieure.