Homotopie avancée

Motivation. On a deux théories homotopiques raisonnables envisageables dans Top : celle à équivalence d'homotopie près (catégorie Top$[h\text{-eq}^{-1}]$) et celle à équivalence faible d'homotopie près (catégorie Top$[fh\text{-eq}^{-1}]$). Puisqu'en général les localisées ne ressemblement pas aux catégories de départ, on a besoin d'un modèle de celles-là. Problème : les limites ne se comportent pas bien dans ces catégories. Par exemple, le pushout n'est pas préservé par équivalence d'homotopie : $[0{,}1] \cong \{*\}$ mais $\{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} \{*'\} \simeq \{*\} \ncong S^1 \simeq \{*\} \sqcup_{\{*,*'\}} [0{,}1]$.
Autre exemple : dans les catégories de complexes de chaînes, les noyaux ne sont pas invariants par quasi-isomorphismes : si R est un anneau, le complexe C constant en R alternant pour différentielles id_R et $0_{R\to R}$: $\ldots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{id} R \xrightarrow{0} 0$ ici écrit en degrés $(1{,}0,-1)$, est exact donc en particulier quasi-isomorphe à 0. De même pour le complexe $C' = \Sigma^{-1}C$. Dans $Ch(R)$, $\mathrm{Ker}(0 \to 0) \simeq 0$ (ouf). Cependant, en considérant le morphisme de complexes $\varphi : C \to C'$ donné par $\varphi_{2n} = 0$ et $\varphi_{2n+1} = id_R$, c'est un quasi-isomorphisme et $\mathrm{Ker}(C \xrightarrow{\varphi} D) \ni C$ n'est pas quasi-isomorphe à 0.
Encore un exemple : un foncteur linéaire $F : R$-Mod $\to S$-Mod induit un foncteur $Ch(R) \to Ch(S)$ qui en général ne préserve pas les quasi-isomorphismes et donc ne passe pas aux catégories dérivées $\mathcal{D}(R) = Ch(R)[\mathrm{qis}^{-1}]$. On peut prendre par exemple $\mathrm{Hom}(M,-) : R$-Mod $\to \mathbb{Z}$-Mod pour M un R-module fixé qui n'est pas projectif (puisque les foncteurs exacts préservent les quasi-isomorphismes), tel $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$.
Le rôle de l'algèbre homologique apparaît alors clairement. De même que la catégorie des complexes de chaînes a assez de projectifs, *i.e.* à quasi-isomoprhisme près, tout objet est équivalent à un projectif, dans Top, à équivalence faible d'homotopie près, tout espace est équivalent à un CW-complexe.

Si F est exact à droite et $P_\bullet(M) \to M$ une résolution projective, alors $H_0(F(P_\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $\ldots \longrightarrow H_1(F(B)) \longrightarrow H_1(F(C)) \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(b) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$. On note $F(P_\bullet(M)) = LF(M)$ le foncteur dérivé à gauche de F.
Si F est exact à gauche et $M \to I^\bullet(M)$ une résolution injective, alors $H^0(I^\bullet(M)) = M$ et pour toute suite exacte coute $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, on obtient une suite exacte longue $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow H^1(F(A)) \longrightarrow H^1(F(B)) \ldots$. On note $F(I^\bullet(M)) = RF(M)$ le foncteur dérivé à droite de F.