Questions sur la loi de la gravitation universelle

Remarques générales :
Le paradigme (pas du tout trivial !) de la loi newtonienne de la gravitation permet déjà d'éprouver les capacités du jeune candidat : travail sur les ordres de grandeur, respect de la cohérence entre les unités, bilan des forces, interprétation selon le changement de référentiel.
On pourra s'attacher à ce que l'interlocuteur en revienne toujours à la formule, sache la rappeler sans ses notes et en adapte les notations au contexte, et puisse substituer correctement aux lettres des valeurs numériques (compétence purement mathématique).
Quant au cas précis de la loi gravitationnelle, les points suivants sont cruciaux : différence entre masse (valeur intrinsèque) et poids (force extrinsèque), portée infinie de la gravitation mais évolution inversement quadratique en fonction de la distance, symétrie de la loi en accord avec la 3e loi de Newton.

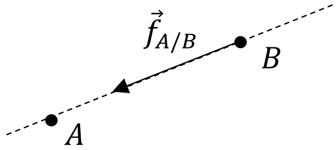
On donne : $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2} \simeq \frac{1}{2}10^{-10}$ (notation convenue).

Les questions en écriture plus claire sont plus pointues et sont donc à réserver aux candidats les plus solides.

- **Qu'est-ce qu'une force ?**
  Une force est la donnée d'un point d'application, d'une longueur (ou *intensité*), d'une direction et d'un sens. On peut rajouter que le point d'application se trouve sur le corps sur lequel s'applique la force (ainsi, sur l'astre attiré si la force est attractive) et dirigée vers le corps étant cause de la force si la force est attractive (et dans le sens contraire si la force est répulsive, cf la force magnétique).
  Ainsi, une force est exactement la donnée d'un vecteur affine (i.e. de la forme $\mathrm{A} + \vec{\mathrm{u}}$, ou encore de la forme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A est le point d'application). Avec ces notations, l'intensité de la force n'est autre que la norme du vecteur force, soit la longueur AB.
- **Pourquoi assimile-t-on un astre sphérique massif (= de masse non nulle) à un point ?**
  La répartition de la masse dans un astre sphérique (ce qui constitue déjà une approximation, la Terre étant déjà un ellipsoïde) n'est pas uniforme, mais en bonne approximation en couches concentriques de même masse. Par symétrie sphérique, le centre de masse/centre de gravité (voir plus bas) où s'applique la force gravitationnelle est au centre de l'astre. À partir du moment où deux astres ne collisionnent pas, on peut les identifier à leurs centres de masse.
  Un point muni d'une masse représentant un astre est appelé *point mécanique*.
- **Quel mouvement a un objet loin de tout autre massif (c'est-à-dire s'il ne subit aucune force, la force de gravitation étant négligeable) ?**
  Il est immobile ou a un mouvement rectiligne uniforme. Et oui : penser à un lance-pierre soudain lâché : il part tout droit — il tombe après, certes… la faute à la gravitation !
  C'est le principe d'inertie, ou 1re loi de Newton. Il est à connaître à la fin du Collège, de même que la 3e loi de Newton ou « principe des actions réciproques ». Quant à la 2e loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique, elle est hors programme : elle exprime que la quantité de mouvement $m\vec{a}$ d'un point de masse m et d'accélération $\vec{a}$ égale la résultante des forces subies. Ainsi, la 1re loi en est une conséquence dans le cas où cette résultante est nulle.
- **Rappeler la formule de l'intensité gravitationnelle *pour un astre représenté par un point A de masse μ_1 et un astre B de masse μ_2*.**
  La formule (scalaire, c'est-à-dire non vectorielle) s'écrit : $G\,\frac{\mu_1\mu_2}{AB^2}$.
  Toujours faire travailler l'élève avec la formule sous les yeux, que ce soit pour des applications numériques ou des interprétations à l'oral ! Il ne faut pas être avare en réécriture de la formule dès que besoin se sent, avec les notations convenues (en prenant garde de ne pas changer d'âne au milieu du gué).
- **Newton a-t-il lui-même trouvé la formule que l'on apprend en classes ?**
  Oui ! Il l'énonce dans son œuvre maîtresse : *Principia Mathematica* publiée en 1687, date retenue le plus souvent pour l'énoncé de la loi de la gravitation universelle. Il y exprime également les trois lois du mouvement mentionnées plus haut.

- **Où s'applique la force de gravité ?**
La force de gravitation, tout comme la force de pesanteur qui en dérive, s'applique au *centre de gravité* d'un corps massif qui, dans tous les cas traités à ce niveau, coïncide avec le centre géométrique des corps considérés.
Avec cette nouvelle information, on peut écrire une version extensive de la loi de la gravitation de Newton, avec les notations de la question précédente :

$$\vec{f}_{\text{gravitation de } A \text{ sur } B} := \vec{f}_{A/B} = -G\frac{\mu_1\mu_2}{AB^2}\vec{u}$$

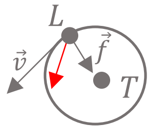


où $\vec{u}$ est une flèche d'intensité 1 dirigée de A vers B (c'est-à-dire porté par la droite (AB)). Si le vecteur $\vec{u}$ était dirigé de B vers A, ce que je ne conseille pas (la convention la plus répandue étant qu'une force attractive s'écrit avec un – devant), il faut supprimer le signe moins dans la formule et l'on obtient la même chose, et donc le même dessin… La longueur de la flèche sur la figure est $G\frac{\mu_1\mu_2}{AB^2}$.
Il ne sert à rien de préciser des unités pour les masses ou les distances dans la formule : ce sont par défaut celles du système international (SI). Il faut les connaître cependant (voir ci-dessous) !
Dans un champ uniforme (ce qui est toujours le cas à ce niveau), le centre de gravité coïncide avec le centre de masse qui est par définition le barycentre des masses du corps.
- **Quelle est l'unité de la force de gravitation, du poids ? Quelle est l'unité d'une force ?**
Le poids et la force de gravitation sont deux exemples de force. Une force est en Newton (de symbole N).
- **Quelle est l'unité d'une masse ?**
Le kilogramme, et non le gramme.
- **Quelle est l'unité de G ?**
La constante gravitationnelle G est en Newtons mètres carrés par kilogrammes carrés ($N.m^2.kg^{-2}$).
On peut le retrouver grâce à la formule de la gravitation, par un procédé appelé « analyse dimensionnelle ». Il s'agit d'oublier les valeurs numériques des lettres intervenant dans la formule en les remplaçant par leurs unités. On obtient donc, après substitution : $N = [G]\frac{(kg)^2}{m^2}$ où $[G]$ désigne l'unité de G que l'on cherche. On trouve $[G]$ après une simple inversion de fractions.
Bonus : la valeur de G a été estimée en 1797 par Henry Cavendish grâce à une fameuse expérience qui porte son nom.
L'unité N n'est pas fondamentale : on peut l'exprimer en fonction des mètres, des kilogrammes et des secondes. C'est facile avec la 2e loi de Newton ; c'est bien sûr tout à fait hors programme.
- **Application : calculer l'intensité de la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Terre. On donne la masse du Soleil $m_S = 2.10^{30}\ kg$, la masse de la Terre $m_T = 6.10^{24}\ kg$ et la distance Terre-Soleil $d = ST = 150\ 000\ 000\ km$.**
Calculer de même la force d'attraction de la Lune par la Terre, avec la masse de la Lune $m_L = \frac{1}{81}m_T \simeq \frac{1}{80}m_T$ et la distance $\delta = LT = 4.10^8\ m$.
    - Cas Terre-Soleil : il faut commencer par convertir la valeur ST dans les unités de la formule, c'est-à-dire en mètres. On a alors $d = 1{,}5.10^{11}\ m$. Le calcul donne $f = 4.10^{22}\ N$ (avec des approximations moins violentes, on trouverait $3{,}5.10^{22}$). C'est une valeur-type qu'il est peut-être bon d'avoir en tête.
    - Cas Terre-Lune : la seule vraie astuce est de ne pas calculer numériquement la masse de la Lune mais de bien remplacer par une fraction dans la formule (savoir-faire classique : on n'en vient aux chiffres qu'à la toute fin des opérations littérales).
    On obtient sinon : $f = \frac{1}{16^2}\frac{6^2.10^{48}}{10^{27}} = 0{,}15.10^{21} = 1{,}5.10^{20}\ N$ (proche de la valeur réelle $1{,}98.10^{20}$). Noter que l'intensité d'une force a la même unité que le vecteur force.

Question piège : comparer la force d'attraction Terre-Soleil et la force d'attraction Terre-Lune.
Attention à ne pas dire que la seconde est le double de la première. On travaille en puissances de dix : en ordres de grandeur (c'est-à-dire, en ne gardant que les puissances de dix), l'intensité de la force d'attraction Terre-Lune est 10^9 plus élevée que l'intensité de la force d'attraction Terre-Soleil, soit un milliard (!) de fois plus forte. Ceci explique pourquoi (actuellement) la Lune tourne autour de la Terre et non autour du Soleil.

- **Quelles sont les forces qui s'appliquent à un livre posé sur une table ? Pourquoi ne rejoint-il pas le centre de la Terre ?**
  Un livre immobile posé sur une table subit, dans le référentiel du laboratoire, la force de pesanteur d'une part et la force de réaction de la table. Celle-ci est dirigée de la table vers le livre, c'est-à-dire dans la même direction et de sens opposé à la force de pesanteur. Ainsi, elle la compense et l'on dit que la *résultante* des forces est nulle : l'immobilité du livre et donc bien en accord avec la 1re loi de Newton ou principe d'inertie.
  Si la table venait à être penchée, la force de pesanteur ne change pas de direction mais la force de réaction, si ; elle ne compense plus le poids, et le livre tombe.
  La force de réaction est due aux frottements microscopiques des corps solides (loi de Coulomb).
- **Newton a découvert la gravitation en recevant une pomme sur la tête. Comment est-il possible qu'une pomme, dont la masse est très petite, soit attirée si rapidement vers le sol ?**
  La masse de la Terre, quant à elle, est très grande : environ 6.10^{24} kilogrammes. Si l'on veut faire l'application numérique, il y a une peau de banane : la distance à considérer n'est pas de quelques mètres (distance pomme-sol), mais d'environ R où R est le rayon de la Terre, soit environ $6\ 000\ km$. Pour une pomme de $0{,}1\ kg$ (ou plutôt une prune), on doit trouver : $f = 1\ N$, valeur à retenir également.
- **Pourquoi la loi de la gravitation est dite « universelle » ?**
  Parce qu'elle s'applique à tous astres distants de d et de masses m_A, m_B. Même si la force de gravitation est alors très faible (puisqu'elle décroît selon le carré de la distance), deux astres situés dans deux galaxies différentes s'attirent quand même selon la loi de la gravitation ; de même, deux stylos dans une trousse s'attirent gravitationnellement.
  Application numérique 1 : soient deux boules de $10\ kg$ chacune, l'une située dans la Voie lactée, l'autre dans la galaxie d'Andromède. On rappelle qu'Andromède est à environ $2{,}5$ millions d'années-lumière de notre galaxie, soit $2{,}5.10^{25}$ m. Calculer.
  En ordres de grandeur, on a : $10^{-11}.\frac{(10^1)^2}{(10^{25})^2} = 10^{-59}\ N.$
  Proche : soient maintenant deux étoiles de même masse que le Soleil, l'une dans la Voie lactée, l'autre dans la galaxie d'Andromède. Refaire le calcul avec ces nouvelles données.
  En ordres de grandeur, on a : $10^{-11}.\frac{(10^{30})^2}{(10^{25})^2} = 0{,}1\ N$. *Ainsi, deux étoiles lointaines s'attirent* 10^{23} *moins que le Soleil n'attire la Terre, soit cent mille milliards de milliards moins fort. Moins impressionnant, elles s'attirent dix fois moins que la Terre n'attire une prune sur un prunier.*
  Ce constat n'a rien de satisfaisant, surtout si l'on ajoute que ces deux galaxies sont en fait constituées de myriades d'étoiles et que leurs masses sont donc extrêmement plus grandes que celles d'une seule étoile, sans que la distance entre les deux galaxies soit modifiée ; par conséquent, les deux galaxies de la Voie lactée et Andromède s'attirent gravitationnellement de façon beaucoup plus importante que le Soleil n'attire la Terre par exemple. Conséquence ? Ces deux galaxies se foncent dessus, ce qui est vérifié par l'expérience : on estime qu'Andromède s'approche de nous à environ 400 000 km/h. Du calme, il lui faudra encore 4 milliards d'années pour arriver chez nous.
  Application numérique 2 : soient deux stylos de même masse $\mathrm{m} = 12\ \mathrm{g}$ dans une même trousse. Calculer.
  En ordres de grandeur, on a, pour $m = 0{,}01\ kg$ *et* $d = 1\ cm = 0{,}01\ m$ *:* $10^{-11}.\frac{(10^{-2})^2}{(10^{-2})^2} = 10^{-11}\ N \ll 1\ N$ *l'intensité de la force d'attraction Terre-stylo.*
  Attention avec ce genre de comparaisons toutefois : il faut prendre compte de l'information vectorielle (direction et sens) des forces pour pouvoir établir un bilan cohérent.

- **Newton a également remarqué que la chute de la pomme vers la terre et la rotation de la Lune autour de la Terre étaient les manifestations d'un même phénomène. Comment se fait-il que la pomme tombe et que la Lune ne tombe pas ?**
C'est le mouvement de rotation qui s'oppose à la force de gravitation qui est quand même là et s'exerce toujours vers le centre de la Terre. Si on lançait une pomme très vite très haut dans le ciel, il se passerait la même chose (c'est ce qui se passe pour les satellites !).
Plus précisément, la rotation (même uniforme) de la Lune autour de la Terre imprime à la Lune une vitesse qui est un vecteur porté par la tangente à la trajectoire, qui est circulaire. Puisque la force de gravitation est elle dirigée selon le rayon de la trajectoire, dans l'intérieur du cercle, on a une résultante de la forme suivante (en rouge). Plus l'intensité de la vitesse est grande, plus la flèche rouge sera proche de la flèche de vitesse et donc permettra au point de persévérer dans son mouvement de rotation. Cependant, on observe que l'influence de la gravité fait toujours rapprocher, quoique légèrement, la Lune de la Terre : ainsi, elle tombe sur nous (mais pas tout de suite).



Quelques questions sur la force de pesanteur (qui est un cas particulier de la force de gravitation) :

- ***(Fondamental)*** **Quel est le lien entre le poids et la force de gravitation ?**
Le poids d'un objet est la force de gravitation qu'il subit de la part de l'astre sur lequel il est situé, souvent la Terre. Le poids dépend donc de la masse de l'astre (c'est le m_B de la formule) mais également du rayon de l'astre (et oui, la distance à mesurer est celle de l'altitude z où est situé l'objet, avec $z = 0$ s'il est au sol, et le centre de la Terre). C'est pourquoi le poids est plus faible pour un même objet (et donc de même masse) sur la Lune que sur la Terre.
On peut calculer le poids, ou *force de pesanteur* (donc en Newton), d'un objet de masse m sur Terre, en approximant toujours que z est négligeable devant le rayon de la terre (car $3\ m$ est significativement négligeable devant $6\,000\,000\ m$; s'il s'agissait d'un satellite, beaucoup plus haut qu'une pomme, il faudrait faire autrement : on dit qu'on ne se place plus dans le référentiel terrestre). C'est :
$$\vec{p} = -G\frac{m.m_T}{R_T^2}\vec{u} = m\vec{g} \text{ en posant } \vec{g} = \frac{Gm_T}{R_T^2}(-\vec{u}),$$
le *champ de pesanteur* $\vec{g}$ étant donc une flèche orientée de l'objet vers le centre de la Terre. On remarque que l'intensité de $\vec{g}$ ne dépend que des caractéristiques de la planète sur laquelle on se trouve, à savoir sa masse et son rayon. Son unité est le N/kg (mais on peut admettre que cette unité égale le m/s^2, c'est-à-dire est une accélération).

- **Quel est la valeur de l'intensité de la pesanteur (ou du champ de pesanteur) sur Terre ? Même question sur la Lune. Conséquence ?**
On donne le rayon de la Lune : $R_L = \frac{1}{27}R_T \simeq 1700\ km$.
Sur la Terre, le calcul donne environ 9,81 N/kg (à faire soi-même). Sur la Lune, on trouve $1{,}62\ N/kg$, soit presque dix fois mois. Le lecteur pourra s'amuser à calculer les champs de pesanteur sur les autres planètes telluriques en allant chercher leurs masse et rayon sur Wikipédia.
L'intensité de la pesanteur étant moins forte sur la Lune, un objet massif sur la Lune sera moins rapidement[1] attiré vers le sol que le même objet (donc de même masse) sur la Terre. <u>C'est la raison pour laquelle les astronautes font de grands bons sur la Lune !</u>

- **Quelle est la différence entre la masse et le poids ?**
Ils sont incomparables : ce n'est pas la même unité. On a $P = mg$ où g est une constante dépendant de la masse et du rayon de l'astre (voir ce qui précède). La force de pesanteur est un cas particulier de la force de gravitation lorsque l'on fixe l'un des deux corps, souvent, une planète, prise pour référentiel, et l'on considère qu'elle agit sur un objet situé à sa surface.

- **La force de gravitation est-elle attractive ou répulsive ?**
Elle est toujours attractive. En effet, elle est dirigée de l'astre tracté vers l'astre attracteur (quand on écrit la formule vectorielle, il y a un moins dans la force de gravitation). La force électrique, d'expression semblable à la force de gravitation, $F = C\frac{q_A q_B}{d^2}$ peut être attractive ou répulsive : entre un proton (de charge q positive) et un électron (de charge négative), le produit

---

[1] Cette intervention (subtile) de la vitesse, attendue du candidat, reflète en fait la 2[e] loi de Newton.

des charges est négatif dont la force a le même signe que la force de gravitation et elle est donc attractive. En deux protons ou entre deux électrons, d'après la règle des signes, c'est un signe plus : la force est répulsive — c'est la même règle que pour les pôles d'un aimant. Le fait que la force de gravitation ne soit qu'attractive vient du fait qu'il n'existe pas de masses négatives.

- **D'autres exemples de force ?**
  On a parlé plus haut de la force de pesanteur, de la force électrique, de la force magnétique et de la force de réaction d'un solide. On parlera juste après des forces de frottement visqueux et de la poussée d'Archimède.
- **L'intensité de la force de gravitation de la Lune sur la Terre est-elle la même que celle de la force de gravitation de la Terre sur la Lune ?**
  Oui, d'après la symétrie de la formule de la gravitation sur les masses (le produit des deux masses commute). C'est ce que Newton appelait : principe des actions réciproques. Autrement dit, si f désigne la force gravitationnelle, $\vec{f}_{A/B} = -\vec{f}_{B/A}$. En particulier, l'intensité de ces deux forces est la même : c'est la même flèche, de même longueur, dans la même direction, mais où le point d'application change (B pour $\vec{f}_{A/B}$, A pour $\vec{f}_{B/A}$) et le sens est opposé. C'est plutôt contre-intuitif, surtout dans le cas de la pomme et de la Terre. Cela prend tout son sens avec la question (très importante) qui suit.
  Ceci justifie que, dans les calculs d'intensité de force gravitationnelle précédents, on s'autorise à ne pas reproduire $f_{A/B}$ dans tous les indices.
- **Une pomme se décroche d'un pommier. Si la force de gravitation est la même à son sens près, pourquoi la pomme tombe sur la Terre et non la Terre sur la pomme.**
  La réponse est : si, la Terre tombe sur la pomme dans le référentiel de la pomme, de même que « la pomme tombe sur la Terre » dans le référentiel de la Terre, et ceci avec la même intensité dans les deux cas, d'après la question précédente. On peut y voir plus clair en disant simplement : la Terre et la pomme s'attirent.
  Ceci est un exemple de la relativité du mouvement. On peut alors se poser la question (naturelle) suivante : pourquoi dit-on que c'est la Terre qui tourne autour du Soleil et non l'inverse, alors que les forces d'attraction gravitationnelle dans un sens ou dans l'autre sont les mêmes ? S'il n'y avait dans l'univers que deux astres massifs qui s'attiraient réciproquement, on se convainc facilement qu'il n'y aurait aucun moyen légitime de distinguer lequel tourne autour de l'autre. En effet, dans le référentiel de l'un, l'autre tourne autour, et réciproquement (dans le référentiel de la Terre, le Soleil tourne autour de la Terre, c'est même tout naturel !). C'est, dans notre cas, le Système solaire dans son ensemble qui n'admet qu'un seul référentiel planétaire où tous les astres ont un mouvement (presque) circulaire : le Soleil.
- **Un marteau tombe moins vite dans l'eau que dans l'air. L'intensité de la pesanteur est-elle différente ?**
  On pourrait dire que l'eau est à une altitude négative, et donc plus proche du centre de la Terre que l'air. Ceci ne tient pas du tout, car cette altitude est encore négligeable devant le rayon de la Terre, de plus, selon la formule, cet argument va à l'encontre de ce que l'on veut justifier (plus proche de l'objet → plus attiré). De plus, la même expérience est encore valable dans un aquarium d'altitude positive.
  La raison est due aux forces de frottements qui sont beaucoup plus grands dans l'eau que dans l'air et atténuent l'effet de la force de pesanteur. Dans le vide, où il n'y a pas de frottements, car pas d'atmosphère, les objets tombent donc plus vite. On peut également citer la poussée d'Archimède dans l'eau qui est dirigée du haut vers le bas et donc s'oppose au poids dans un bilan : c'est ce qui fait même que les objets flottent ou remontent à la surface.
- **La théorie de la gravitation universelle de Newton a-t-elle été remise en cause ?**
  Oui, par la théorie de la relativité générale d'Albert Einstein. Cependant, on peut interpréter la théorie de Newton comme une simplification de la théorie d'Einstein, et elle est donc vraie en bonne approximation.
- **Pourquoi dit-on que les marées sont régies par la Lune ?**
  Parce que la Lune est justement la cause des marées. En effet, deux astres qui s'attirent par la loi de la gravitation se font subir l'un l'autre des *forces de marées* due au fait que la structure

de la Terre n'est pas tout à fait solide à l'échelle du Système solaire : comme deux pâtes à modeler qui seraient magnétiquement attirées, les sphères terrestre et lunaire s'attirent et se déforment sur les côtés pour s'allonger selon l'axe Terre-Lune. Bien évidemment, ce phénomène est amplifié pour la matière déjà liquide, donc plus malléable, à la surface des planètes, et donc les océans. Étant donné que la Terre et la Lune tournent sur elles-mêmes si on se place dans un référentiel dans lequel l'axe Terre-Lune est cependant fixe, pour nous à la surface de la Terre, le point sur lequel s'applique la déformation en « pâte à modeler » varie selon la rotation de la Terre, c'est-à-dire (puisque la Terre tourne en vingt-quatre heures), au cours de la journée.

La complexité des mouvements des marées vient également à la force de marée venant du Soleil, dont un calcul numérique montre qu'elle n'est pas négligeable devant celles de la Lune.