

COURS DE MATHÉMATIQUES

---

TOME VI  
**TOPOLOGIE**

---

Mathématiques générales  
France ~ 2025  
*Écrit et réalisé par Louis Lascaud*



# Table des matières

<b>1 Espaces vectoriels normés</b>	<b>17</b>
1.1 Normes . . . . .	17
1.2 Limites . . . . .	17
1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	17
1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	18
1.3.2 Boules et hypercubes . . . . .	19
1.4 Applications continues . . . . .	19
1.4.1 Formes linéaires . . . . .	19
1.4.2 Projections scalaires . . . . .	20
1.4.3 Projections vectorielles . . . . .	21
1.5 Convexité . . . . .	21
1.5.1 Jauge d'un convexe . . . . .	21
1.5.2 Convexes et applications . . . . .	23
1.5.3 Points extrémaux . . . . .	24
<b>2 Espaces métriques</b>	<b>27</b>
2.1 Distances . . . . .	27
2.1.1 Définition d'une distance . . . . .	27
2.1.2 Distance issue d'une norme . . . . .	28
2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties . . . . .	28
2.1.3.1 Définition . . . . .	28
2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie . . . . .	28
2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances . . . . .	32
2.1.4 Équivalence de distances . . . . .	35
2.2 Boules . . . . .	36
2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées . . . . .	36
2.2.2 Premières propriétés . . . . .	36
2.2.3 Propriétés géométriques . . . . .	36
2.3 Limites . . . . .	37
2.3.1 Limites de suites . . . . .	37
2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence . . . . .	38

2.3.1.1.1	Théorèmes de convergence grossière des suites . . . . .	38
2.4	Compacité . . . . .	41
2.4.1	Suites à valeurs dans un compact . . . . .	41
2.5	Complétude . . . . .	42
2.5.1	Suites de Cauchy . . . . .	42
2.5.2	Espaces complets . . . . .	42
2.5.3	Théorie de Baire dans le cas complet . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Topologie générale</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	Définitions de base d'une topologie . . . . .	47
3.1.1	Ouverts et fermés . . . . .	47
3.1.2	Voisinages . . . . .	48
3.1.3	Comparaison de topologies . . . . .	49
3.1.3.1	Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble . . . . .	49
3.1.3.2	Topologies minimales et maximales . . . . .	49
3.1.4	Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité . . . . .	50
3.1.4.1	Réseaux topologiques . . . . .	50
3.1.4.2	Base d'ouverts . . . . .	50
3.1.4.3	Base de voisinages . . . . .	51
3.1.4.4	Axiomes de dénombrabilité . . . . .	52
3.1.4.5	Séparabilité . . . . .	52
3.1.5	Adhérence, intérieur, frontière . . . . .	53
3.1.5.1	Frontière ou bord . . . . .	53
3.1.5.2	Points limites, points d'accumulation, isolation . . . . .	53
3.1.5.3	Densité . . . . .	53
3.1.5.4	Adhérence et intérieur dans le produit . . . . .	53
3.1.5.5	Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence . . . . .	54
3.1.6	Applications continues . . . . .	55
3.1.6.1	Continuité globale . . . . .	55
3.1.6.2	Continuité en un point . . . . .	56
3.1.6.3	Homéomorphismes . . . . .	56
3.1.7	Irréductibilité d'un espace topologique . . . . .	57
3.2	Constructions de topologies . . . . .	59
3.2.1	Topologie engendrée . . . . .	59
3.2.2	Topologie initiale . . . . .	60
3.2.3	Topologie induite . . . . .	61
3.2.4	Topologie finale . . . . .	62
3.2.5	Topologie faible . . . . .	63
3.2.6	Topologie somme . . . . .	64
3.2.7	Topologie produit . . . . .	65

3.2.7.1	Cas fini . . . . .	65
3.2.7.2	Cas général . . . . .	66
3.2.7.3	Convergences . . . . .	68
3.2.8	Topologie quotient . . . . .	68
3.2.8.1	Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient . . . . .	68
3.2.8.2	Séparation des quotients . . . . .	71
3.2.8.3	Autres propriétés des quotients . . . . .	73
3.2.9	Quotient d'une topologie par une action de groupes . . . . .	73
3.3	Espaces topologiques classiques . . . . .	74
3.3.1	Peignes . . . . .	74
3.3.2	Boules, sphères . . . . .	74
3.3.3	Cylindre (absolu) . . . . .	76
3.3.4	Ruban de Möbius . . . . .	76
3.3.4.1	Variantes du ruban de Möbius . . . . .	77
3.3.5	Tore . . . . .	77
3.3.6	Bouteille de Klein . . . . .	78
3.3.7	Plans projectifs . . . . .	79
3.3.7.1	Droite projective réelle . . . . .	79
3.3.7.2	Plan projectif réel . . . . .	79
3.3.7.3	Sphère de Riemann . . . . .	79
3.3.7.4	$\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ . . . . .	79
3.3.7.5	Espaces projectifs généraux . . . . .	79
3.3.7.6	Sphère de Riemann . . . . .	83
3.3.8	Simplexes . . . . .	83
3.3.8.1	Simplexes standard . . . . .	84
3.3.8.2	Géométrie des simplexes . . . . .	85
3.3.8.3	Subdivisions barycentriques . . . . .	85
3.4	Constructions d'espaces topologiques . . . . .	86
3.4.1	Cylindres . . . . .	86
3.4.2	Cônes . . . . .	86
3.4.3	Suspensions, doubles cônes . . . . .	88
3.4.4	Écrasements . . . . .	89
3.4.5	Recollements, bouquets . . . . .	89
3.4.6	Joints . . . . .	92
3.5	Propriétés topologiques classiques . . . . .	94
3.5.1	Le caddie de contre-exemples . . . . .	94
3.5.1.1	Droite de Sorgenfrey . . . . .	94
3.5.1.2	Plan de Sorgenfrey . . . . .	94
3.5.1.3	Droite de Michael . . . . .	94
3.5.2	Séparation . . . . .	94

3.5.2.1	Autres axiomes de séparation . . . . .	96
3.5.2.1.1	Régularité . . . . .	96
3.5.2.1.2	Régularité complète . . . . .	97
3.5.2.1.3	Régularité . . . . .	97
3.5.3	Dénombrabilité . . . . .	98
3.5.4	Métrisabilité . . . . .	98
3.5.4.1	Produits d'espaces métrisables . . . . .	98
3.5.5	Compacité . . . . .	99
3.5.5.1	Compacts, quasi-compacts et applications continues . . . . .	100
3.5.5.2	Applications propres . . . . .	101
3.5.5.3	Produit d'espaces compacts . . . . .	101
3.5.5.4	Locale compacité . . . . .	103
3.5.5.5	Compactification d'Alexandrov . . . . .	104
3.5.5.6	Séquentielle compacité . . . . .	104
3.5.5.6.1	Le théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	104
3.5.5.6.2	Généralisations . . . . .	105
3.5.5.7	Dénombrabilité à l'infini . . . . .	105
3.5.5.8	Paracompacité . . . . .	106
3.5.5.9	Théorème de la cornemuse . . . . .	108
3.5.6	Complétude . . . . .	108
3.5.7	Convexité . . . . .	108
3.5.8	Connexité par arcs . . . . .	109
3.5.9	Connexité . . . . .	112
3.5.9.1	Définition . . . . .	112
3.5.9.2	Opérations sur les connexes . . . . .	114
3.5.9.3	Connexes et applications . . . . .	117
3.5.9.4	Composantes connexes . . . . .	118
3.5.9.5	Totale discontinuité . . . . .	119
3.5.9.6	Lien avec la connexité par arcs . . . . .	120
3.5.9.7	Locale connexité et locale connexité par arcs . . . . .	123
3.5.10	Connexité simple . . . . .	127
3.5.11	Discrétion . . . . .	127
3.6	Exemples classiques de topologie . . . . .	128
3.6.1	Topologies cofinies . . . . .	128
3.6.1.1	Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$ . . . . .	128
3.6.1.2	Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$ . . . . .	128
3.6.2	Topologie de Zariski . . . . .	128
3.6.3	Topologie compacte-ouverte . . . . .	129
3.6.3.1	Définition et premières propriétés . . . . .	129
3.6.3.2	Enrichissement de Top . . . . .	133

<b>4 Topologie algébrique élémentaire</b>	<b>135</b>
4.1 Invariants simples en topologie algébrique . . . . .	136
4.1.1 Le $\pi_0$ . . . . .	136
4.2 Construction et opérations d'espaces topologiques . . . . .	137
4.3 Groupes topologiques . . . . .	138
4.3.1 Définition . . . . .	138
4.3.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe . . . . .	140
4.3.3 Propriétés des groupes topologiques . . . . .	142
4.3.3.1 Groupes compacts . . . . .	142
4.3.4 Groupes séparés . . . . .	143
4.3.5 Groupes topologiques distingués . . . . .	143
4.4 Espaces cellulaires . . . . .	144
4.4.1 Attachements cellulaires . . . . .	144
4.4.2 CW-complexe, espace cellulaire . . . . .	148
4.4.2.1 Définition générale . . . . .	148
4.4.2.2 CW-complexe fini, espace cellulaire fini . . . . .	153
4.4.2.3 Applications cellulaires . . . . .	155
4.4.2.4 Opérations sur les CW-complexes . . . . .	155
4.4.2.5 Orientation de cellules (hors-programme) . . . . .	156
4.4.2.6 Boucle d'oreille hawaïenne . . . . .	156
4.4.2.7 Point de vue catégorie des CW-complexes . . . . .	156
4.5 Homotopie . . . . .	157
4.5.1 Point de vue catégorique de la topologie . . . . .	157
4.5.2 Notion d'homotopie . . . . .	157
4.5.2.1 Applications homotopes . . . . .	157
4.5.2.2 Équivalence d'homotopie . . . . .	161
4.5.2.3 Isotopie . . . . .	164
4.5.3 Espaces contractiles . . . . .	164
4.5.3.1 Rétractions . . . . .	165
4.5.4 Propriété d'extension des homotopies . . . . .	167
4.6 Groupe fondamental . . . . .	173
4.6.1 Le groupe fondamental . . . . .	173
4.6.1.1 Homotopie entre chemins, lacets et boucles . . . . .	173
4.6.1.2 Bagage théorique pour la construction du GF . . . . .	173
4.6.1.3 Définition du groupe fondamental et du groupoïde fondamental .	175
4.6.1.4 Comportement du GF vis-à-vis des applications continues .	177
4.6.1.5 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique .	178
4.6.1.6 Lien avec la connexité simple . . . . .	183
4.6.1.6.1 Espace localement simplement connexe . . . . .	184
4.6.1.7 Théorème du cône . . . . .	184

4.6.2	Groupes d'homotopie supérieurs . . . . .	185
4.7	Premiers pas en topologie algébrique . . . . .	186
4.7.1	Définitions élémentaires sur les revêtements . . . . .	186
4.7.2	Le groupe fondamental du cercle . . . . .	189
4.7.3	Relèvement . . . . .	190
4.7.4	Degré d'une application . . . . .	190
4.7.5	Applications et conséquences en Analyse . . . . .	190
4.7.5.1	Préservation des bords . . . . .	190
4.7.5.2	Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine .	191
4.7.5.3	Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue . . . . .	191
4.7.5.4	Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon . .	191
4.7.6	Théorie générale des revêtements . . . . .	191
4.8	Théorème de van Kampen . . . . .	192
4.8.1	Version faible du théorème de Van Kampfen . . . . .	192
4.8.2	Théorème de van Kampen général . . . . .	194
4.8.2.1	Somme amalgamée dans une catégorie . . . . .	194
4.8.2.2	Le théorème de van Kampen fort . . . . .	196
4.8.2.3	Applications au théorème de Van Kampen . . . . .	200
4.9	Théorie générale des revêtements . . . . .	201
4.9.1	Conséquence sur la théorie générale des revêtements . . . . .	201
4.9.1.1	Morphismes de revêtements . . . . .	201
4.9.1.2	Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications . . . . .	202
4.9.1.3	Monodromie . . . . .	204
4.9.1.4	Classification des morphismes de revêtements . . . . .	205
4.9.1.5	Revêtements galoisiens . . . . .	209
4.9.1.6	Revêtements universels . . . . .	211
4.9.1.7	Revêtements images réciproques . . . . .	215
4.9.1.8	Classification des revêtements . . . . .	215
4.10	Fibrés . . . . .	216
4.10.1	Faisceau géométrique . . . . .	216
4.10.2	Fibrations ou fibrés généraux . . . . .	218
4.10.2.1	Définition et premières propriétés . . . . .	218
4.10.2.2	Morphismes de fibrations . . . . .	224
4.10.2.3	Exemples fondamentaux de fibrations . . . . .	225
4.10.2.4	Fibrations de Hopf . . . . .	227
4.10.2.4.1	Fibration de Hopf classique . . . . .	227
4.10.2.4.2	Fibration de Hopf complexe généralisée . . . . .	231
4.10.3	Fibrés vectoriels . . . . .	231

4.10.3.1	Définition et premiers exemples. Fibrés particuliers . . . . .	231
4.10.3.2	Sections d'un fibré . . . . .	240
4.10.3.3	Opérations sur les fibrés vectoriels . . . . .	246
4.10.3.3.1	Produit cartésien de fibrés . . . . .	246
4.10.3.3.2	Fibrés duaux . . . . .	246
4.10.3.3.3	Fibrés orthogonaux . . . . .	247
4.10.3.3.4	Pullback de fibrés . . . . .	247
4.10.3.3.5	Restriction de fibrés . . . . .	248
4.10.3.3.6	Sous-fibrés . . . . .	248
4.10.3.3.7	Fibrés quotients . . . . .	249
4.10.3.3.8	Sommes de fibrés . . . . .	249
4.10.3.3.9	Produits tensoriels de fibrés . . . . .	250
4.10.3.3.10	Foncteurs continus sur les catégories de fibrés . . . . .	253
4.10.3.4	Constructions classiques de fibrés . . . . .	254
4.10.3.5	Applications fibrées . . . . .	255
4.10.3.6	Fibrés euclidiens . . . . .	256
4.10.3.7	Fibrés complexes . . . . .	259
4.10.4	Fibrés principaux . . . . .	261
4.10.4.1	Notion de fibré principal . . . . .	262
4.10.4.2	Espaces classifiants . . . . .	263
4.10.4.3	Fibré des repères . . . . .	263
4.11	Notions introducives d'algèbre homologique . . . . .	265
4.11.1	Complexes associés à un espace topologique . . . . .	265
4.11.2	Homologie simpliciale . . . . .	265
4.11.2.1	$\Delta$ -complexe . . . . .	265
4.11.2.2	Complexes simpliciaux . . . . .	270
4.11.3	Vers l'homologie singulière . . . . .	271
<b>5</b>	<b>Homologie</b>	<b>273</b>
5.1	Idée . . . . .	274
5.2	Homologie simpliciale . . . . .	274
5.3	Homologie singulière . . . . .	274
5.3.1	Groupes d'homologie . . . . .	274
5.3.1.1	Définition de l'homologie singulière . . . . .	274
5.3.1.2	Homologie singulière en basses dimensions . . . . .	277
5.3.1.3	Applications induites en homologie . . . . .	282
5.3.1.4	Quasi-isomorphie . . . . .	288
5.3.1.5	Groupes d'homologie réduits . . . . .	289
5.3.1.6	Groupes d'homologie relatifs . . . . .	290
5.3.2	Calcul pratique de l'homologie singulière . . . . .	298

5.3.2.1	Théorèmes d'excision . . . . .	298
5.3.2.2	Suite de Mayer-Vietoris . . . . .	300
5.3.2.3	Homologie d'une limite inductive . . . . .	307
5.3.2.4	Groupes d'homologie des sphères . . . . .	308
5.3.2.4.1	Calcul de l'homologie des sphères $S^n, n \in \mathbb{N}$ . . . . .	308
5.3.2.4.2	Degré d'une application entre sphères . . . . .	309
5.3.2.4.3	Degrés locaux . . . . .	312
5.3.2.4.4	Sphères d'homologie . . . . .	313
5.3.2.5	Comparaison entre homologie et homotopie . . . . .	314
5.3.3	Quelques invariants numériques de l'homologie singulière . . . . .	315
5.4	Homologie cellulaire . . . . .	316
5.4.1	Complexe de chaînes cellulaire . . . . .	316
5.4.2	Lien avec l'homologie simpliciale . . . . .	325
5.5	Généralisations de l'homologie singulière . . . . .	326
5.5.1	Homologie à coefficients quelconques . . . . .	326
5.5.2	Cohomologie des espaces topologiques . . . . .	329
5.5.3	Cohomologie cellulaire . . . . .	333
5.5.4	Théorème des coefficients universels, foncteurs topologiques d'extension et de torsion . . . . .	333
5.5.5	Formule de Künneth . . . . .	338
5.5.5.1	Théorème de Künneth . . . . .	338
5.5.5.2	Formule de Künneth pour la cohomologie . . . . .	339
5.6	Algèbre homologique . . . . .	340
5.6.1	Complexes de modules . . . . .	340
5.6.2	Caractéristique d'Euler . . . . .	340
5.6.3	Axiomes d'Eilenberg-Steenrod . . . . .	341
<b>6 Homotopies</b>		<b>343</b>
6.1	Théorie de l'homotopie (supérieure) des espaces topologiques . . . . .	343
6.1.1	Prolégomènes : quelques faits sur le segment $[0,1]$ et ses amis les cubes .	344
6.1.2	Équivalence d'homotopie et théorie des catégories . . . . .	346
6.1.2.1	Homéomorphie . . . . .	346
6.1.2.2	Homotopie . . . . .	346
6.1.2.3	La catégorie d'homotopie . . . . .	347
6.1.2.4	Deux types d'isomorphie nouveaux . . . . .	349
6.1.2.5	Notion d'invariant topologique . . . . .	349
6.1.2.6	Catégories relatives . . . . .	351
6.1.3	Constructions topologiques catégoriques et constructions topologiques pointées . . . . .	353
6.1.3.1	Rappels : produits et coproduits topologiques . . . . .	354

6.1.3.2	Adjonctions topologiques pointées : curryfication et $\Sigma\text{-}\Omega$	355
6.1.3.3	Smash-produit. Lien avec la suspension	363
6.1.4	Groupes d'homotopie supérieurs	366
6.1.4.1	Construction formelle de l'homotopie supérieure	366
6.1.4.2	Fonctorialité des groupes d'homotopie supérieurs	376
6.1.4.3	Équivalences faibles d'homotopie	376
6.1.4.4	$n$ -connexité	379
6.1.5	Suites de fibres et de cofibres	379
6.1.5.1	Suites exactes et coexactes dans les catégories concrètes	380
6.1.5.2	Cônes, chemins et suites exactes de (co)fibres, de Puppe	380
6.1.6	Fibrations et cofibrations	386
6.1.6.1	Cofibrations ( $\cong$ paires de Borsuk)	387
6.1.6.2	Fibrations ( $\cong$ revêtements)	393
6.1.7	Calcul des groupes d'homotopie	405
6.1.7.1	Homotopie d'un produit	405
6.1.7.2	Homotopie relative	405
6.1.7.3	Homotopie d'une fibration	407
6.1.7.4	Groupes d'homotopie des sphères	408
6.1.7.5	Fibrations de Hopf	409
6.1.7.6	Lenticularité	410
6.1.7.7	Homotopie du cercle polonais	412
6.1.8	Un modèle simple : homotopie des <i>CW</i> -complexes	413
6.1.8.1	Définition catégorique des complexes cellulaires	413
6.1.8.2	Théorèmes homotopiques sur les complexes cellulaires	420
6.1.8.3	Approximation cellulaire	427
6.1.9	Lien entre homotopie supérieure et homologie simpliciale	430
6.2	Homotopie des ensembles simpliciaux	432
6.2.1	Espaces topologiques triangulés	432
6.2.1.1	Introduction : les complexes simpliciaux	432
6.2.1.2	Notion abstraite de triangulation	436
6.2.1.3	Applications simpliciales	439
6.2.1.4	$\Delta$ -complexes	443
6.2.2	Construction des ensembles simpliciaux	447
6.2.2.1	Catégories permettant de construire celle des ensembles simpliciaux	447
6.2.2.2	Opérations sur les ensembles simpliciaux	454
6.2.2.3	Réalisation géométrique des ensembles simpliciaux	458
6.2.2.4	Catégorie des ensembles simpliciaux	459
6.2.2.5	Produit d'ensembles simpliciaux et décomposition prismatique	466
6.2.2.6	Autoenrichissement des ensembles simpliciaux	468
6.2.3	Exemples conceptuels d'ensembles simpliciaux	470

6.2.3.1	Ensembles simpliciaux constants . . . . .	470
6.2.3.2	Ensembles simpliciaux singuliers . . . . .	471
6.2.3.3	Nerf d'une catégorie . . . . .	473
6.2.3.4	Correspondance de Dold-Kan . . . . .	477
6.2.4	Complexes de Kan et $\infty$ -catégories . . . . .	479
6.2.5	Homotopie simpliciale . . . . .	485
<b>7</b>	<b>Topologie des variétés</b>	<b>499</b>
7.1	Compléments généraux sur les variétés topologiques grâce à l'homologie . . . . .	499
7.1.1	Propriétés locales algébriko-topologiques des variétés . . . . .	499
7.1.1.1	Définitions sur les variétés topologiques . . . . .	499
7.1.1.2	Locale contractibilité . . . . .	500
7.1.1.3	Théorème du voisinage tubulaire . . . . .	500
7.1.1.4	Platitude locale . . . . .	501
7.1.2	Propriétés géométriques globales des variétés . . . . .	502
7.1.2.1	Classification des variétés à équivalence d'homotopie près . . . . .	502
7.1.2.2	Lemmes locaux-globaux sur les variétés . . . . .	503
7.1.2.3	ENR et structures simpliciale et cellulaire des variétés compactes	505
7.1.2.4	Variétés asphériques . . . . .	507
7.1.3	Éléments de topologie différentielle . . . . .	508
7.1.3.1	Théorèmes de lissité en basses dimensions . . . . .	508
7.1.4	Orientations locales des variétés topologiques . . . . .	508
7.1.4.1	Définition topologique de l'orientabilité . . . . .	508
7.1.4.2	Le revêtement double d'orientation . . . . .	514
7.1.4.3	Homologie des variétés en degré de dimension . . . . .	517
7.1.4.4	$G$ -orientabilité . . . . .	518
7.1.4.5	Classes fondamentales . . . . .	520
7.1.5	Classification des variétés topologiques de très petites dimensions . . . . .	523
7.1.5.1	Sommes connexes de variétés . . . . .	523
7.1.5.2	Variétés topologiques de dimension nulle . . . . .	524
7.1.5.3	Variétés topologiques de dimension 1 . . . . .	524
7.1.5.4	Classification des surfaces topologiques . . . . .	525
7.1.5.4.1	Triangulation des surfaces . . . . .	526
7.1.5.4.2	Classification des surfaces topologiques compactes connexes . . . . .	527
7.1.5.4.3	Classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables . . . . .	528
7.1.5.4.4	Genre des surfaces . . . . .	532
7.1.5.4.5	Combinatoire des surfaces topologiques . . . . .	540
7.1.5.4.6	Surfaces de type fini . . . . .	543

7.1.5.5	Classification des variétés topologiques de dimension $\geq 3$	543
7.1.6	Décomposition en anses	544
7.1.6.1	Théorème du voisinage tubulaire élémentaire	544
7.2	Dualité de Poincaré et théorie des intersections	544
7.2.1	Prolégomènes à la dualité de Poincaré	544
7.2.1.1	Motivation : liens entre la cohomologie de Rham et l'homologie singulière	544
7.2.1.2	Première approche : triangulation des variétés compactes	546
7.2.1.3	Formalisme moderne des cup produit et cap produit	547
7.2.1.4	D'autres produits en cohomologie	552
7.2.1.4.1	Produit croisé	552
7.2.1.4.2	Produit oblique	553
7.2.2	Dualité de Poincaré	554
7.2.2.1	Isomorphismes de Poincaré	554
7.2.2.2	Dualité de Poincaré proprement dite	559
7.2.2.3	Anneaux de cohomologie	561
7.2.2.4	Signature d'une variété	565
7.2.3	Autres formes de dualité	568
7.2.3.1	Dualité de Poincaré pour les variétés à bord	568
7.2.3.2	Dualité d'Alexander	570
7.2.3.3	Éléments de dualité de Thom	571
7.2.3.4	Quelques commentaires concernant variétés topologiques et variétés lisses	572
7.2.4	Théorie des intersections	573
7.2.4.1	Classes de Thom naïves	573
7.2.4.2	Classes d'Euler naïves	577
7.3	Introduction au cobordisme	578
7.3.1	Homologie naïve des variétés à bord	578
7.3.2	Notion de cobordisme	579
7.3.2.1	Définition et exemples	579
7.3.2.2	Cobordismes orientés	581
7.4	Théorie des classes caractéristiques	585
7.4.1	Trois choses à savoir avant de se lancer dans la topologie algébrique des fibrés	585
7.4.1.1	Théorème de Leray-Hirsch et applications	585
7.4.1.2	Fibrés projectifs	587
7.4.1.3	Principe de décomposition en fibrés en droites	588
7.4.2	Classes de Stiefel-Whitney	589
7.4.2.1	Axiomes de Stiefel-Whitney	589

7.4.2.2	Premières propriétés sur les classes de Stiefel-Whitney. Conséquences sur les fibrés projectifs . . . . .	595
7.4.2.3	Nombres de Stiefel-Whitney . . . . .	601
7.4.3	La variété grassmannienne . . . . .	603
7.4.3.1	Topologie des grassmanniennes . . . . .	603
7.4.3.2	Une structure cellulaire sur la grassmannienne . . . . .	613
7.4.3.3	L'anneau de cohomologie modulo 2 de la grassmannienne infinie $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . . . . .	619
7.4.4	Construction des classes de Stiefel-Whitney . . . . .	622
7.4.4.1	Théorème de satisfaisabilité des axiomes de Stiefel-Whitney . .	622
7.4.4.2	Isomorphisme de Thom . . . . .	624
7.4.4.3	Carrés de Steenrod . . . . .	626
7.4.4.4	Classes d'Euler . . . . .	627
7.4.5	Preuve de l'isomorphisme de Thom . . . . .	631
7.4.6	Obstructions . . . . .	634
7.4.6.1	Suite de Gysin . . . . .	634
7.4.6.2	Fibré universels orientés . . . . .	634
7.4.6.3	L'obstruction due à la classe d'Euler . . . . .	634
7.4.7	Applications des classes de Stiefel-Whitney . . . . .	634
7.4.7.1	Calculs sur le fibré normal . . . . .	634
7.4.7.2	Classe de cohomologie diagonale . . . . .	636
7.4.7.3	Lien entre classe et caractéristique d'Euler . . . . .	639
7.4.7.4	Formule de Wu . . . . .	640
7.4.7.5	Autres applications . . . . .	641
7.4.8	Classes de Chern et classes de Pontryagin . . . . .	641
7.4.8.1	Grassmanniennes complexes . . . . .	642
7.4.8.2	Définition des classes de Chern . . . . .	644
7.4.8.3	Classes de Pontryagin . . . . .	646
7.4.8.4	Nombres de Chern, nombres de Pontryagin . . . . .	648
7.4.9	L'anneau de cobordisme orienté . . . . .	652
7.4.10	Approfondissements . . . . .	653
7.4.10.1	Espaces de Thom . . . . .	653

# Chapitre 1

## Espaces vectoriels normés

### Résumé

Les espaces vectoriels normés sont un cadre agréable pour une introduction à la topologie, classiquement dispensée en mathématiques spéciales, mais on comprend rapidement qu'ils sont en grande partie sans nouveauté par rapport aux espaces métriques, eux-mêmes qui se reformulent presque entièrement dans un vocabulaire topologique pur. Cependant, deux pans de la théorie se dégagent nettement : l'intérêt de la dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass et le théorème de Riesz, et d'autre part, la gratuité de certains comportements des boules qui permettent une géométrie intuitive.

### 1.1 Normes

**Exemples.** (*Normes classiques, normes usuelles*)

1.

### 1.2 Limites

### 1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

**Proposition.** (*Normes non équivalentes en dimension finie*)

Un espace vectoriel  $E$  est de dimension finie si et seulement si toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

▷ En exercice. ■

**Propriété.** (*Compacité locale des evn de dimension finie*)

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.

*Remarque.* En dimension infinie, on peut quand même trouver des parties compactes non comprises dans un sous-espace de dimension finie. Elle sont données, par exemple, dans  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ , par le théorème d'Ascoli qui permet d'établir la compacité de familles libres de fonctions.

### Propriété. (*Théorème d'Heine-Borel*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

### Propriété. (*Fermeture des sous-espaces vectoriels de dimension finie*)

Soit  $K$  un corps complet pour sa valuation. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel normé de dimension quelconque et  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors  $F$  est fermé dans  $E$ .

### Contre-exemple. (*Fermeture des sous-espaces vectoriels de dimension finie*)

C'est faux si  $K$  n'est pas complet ! En effet, on peut considérer  $K$  comme un  $K$ -ev de dimension 1. Il se plonge dans son complété qui est un ev et il est dense dedans donc non fermé.  $\square$

### 1.3.1 Théorème de Bolzano-Weierstrass

#### Propriété. (*Convergence des suites bornées par les valeurs d'adhérence*)

Dans un espace de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

#### Exercice 1 (*Contre-exemples*)

Les hypothèses précédentes sont essentielles.

1. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de bornitude.
2. Trouver un contre-exemple si on enlève l'hypothèse de dimension.

#### ▷ Éléments de réponse.

Pour le premier cas, la suite définie par  $u_{2n} = 2n$  et  $u_{2n+1} = 0$  doit convenir. Pour le second cas, on peut considérer  $(1 - \sin(n\pi/2))X^n$  suite bornée qui ne converge pas mais admet 0 pour seule valeur d'adhérence.

### 1.3.2 Boules et hypercubes

**Lemme.** (*Toute boule contient un hypercube*)

Soit  $n$  un entier naturel. On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme quelconque. Alors toute boule ouverte non vide ni réduite à un point de  $\mathbb{R}^n$  contient strictement un hypercube fermé ni vide ni réduit à un point et de même centre.

▷ Supposons d'abord que  $\mathbb{R}^n$  soit muni de sa topologie usuelle. On utilise l'intuition donnée dans le plan de ce que dans un cercle de rayon 1, on peut inscrire un carré de côté  $\sqrt{2}$ . Soit donc  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . On pose  $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^n [a_i - \frac{\sqrt{2}}{4}r, a_i + \frac{\sqrt{2}}{4}r]$ . Alors  $\mathcal{H}$  est un hypercube et convient.

Pour passer au cas général, on utilise l'équivalence des normes en dimension finie. ■

## 1.4 Applications continues

### 1.4.1 Formes linéaires

**Propriété.** (*Caractérisation de la discontinuité des formes linéaires*)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f$  une forme  $\mathbb{K}$ -linéaire non nulle de  $E$ . Alors  $f$  est discontinue si et seulement si son noyau est dense dans  $E$ .

▷ D'après le théorème précédent, une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. De plus, si elle n'est pas nulle, son noyau est un hyperplan de  $E$ . Or un hyperplan est fermé ou dense, ces deux conditions s'excluant mutuellement, car le seul fermé dense est l'espace lui-même, qui n'est pas un hyperplan. Ainsi,  $f$  est non continue, si et seulement si,  $\text{Ker}(f)$  est dense. ■

On peut caractériser la réalisation de la distance au noyau d'une forme linéaire linéaire continue de la manière suivante.

**Proposition.** (*Réalisation de la distance à un hyperplan fermé*)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $\phi \in E'$ . Alors la distance de  $u \in E \setminus \text{Ker}\phi$  à  $\text{Ker}\phi$  est atteinte si et seulement si la norme de  $\phi$  est atteinte (sur la sphère unité), c'est-à-dire s'il existe  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $|\phi(x)| = \|\phi\|$ .

▷ Notons  $H = \text{Ker}\phi$ . Soit  $u \in E$ . Remarquons d'abord que  $d(u, H) = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|}$ . On procède par double inégalité. D'une part,  $|\phi(u)| = |\phi(u - h)| \leq \|\phi\| \|u - h\| \quad \forall h \in H$  d'où  $\frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} \leq d(u, H)$ . Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , par définition de la borne supérieure, il existe un vecteur unitaire  $s$  tel que  $|\phi(s)| \geq \|\phi\| - \varepsilon > 0$ . En prenant  $h = u - \frac{\phi(u)}{\phi(s)}s$ , on obtient  $d(u, H) \leq \|u - h\| = \frac{|\phi(u)|}{|\phi(s)|} \leq \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\| - \varepsilon}$  et l'on conclut par  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Concluons. Soit  $u \in E \setminus H$ . Si  $d(u, H)$  est atteinte en un certain point  $z \in E$ , alors  $z \neq u$ , car  $u \notin H$ , et l'on a  $d(u, H) = \|u - z\| = \frac{|\phi(u - z)|}{\|\phi\|}$ . Ainsi, puisque  $\|u - z\| \neq 0$ ,  $\|\phi\| = \frac{|\phi(u - z)|}{\|u - z\|} = \left| f \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right|$

en posant  $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$ . Quitte à remplacer  $x$  par  $-x$ , on peut toujours avoir  $\|\phi\| = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ , avec bien  $\|x\| = 1$ . De plus, si la norme de  $\phi$  est atteinte, il existe  $x$  de norme 1 tel que  $|\phi(x)| = \|\phi\|$ . On a en particulier, sauf cas trivial  $\phi$  nulle,  $E = \text{Ker}\phi \oplus \mathbb{K}x$  donc  $u = z + \lambda x$  où  $z \in \text{Ker}\phi$ . Par égalité de normes, on a  $\lambda = \|u-z\|$ . Ainsi  $x = \frac{u-z}{\|u-z\|}$  puis  $\phi\left(\frac{u-z}{\|u-z\|}\right) = \phi\frac{u}{\|u-z\|} = \phi(x) = \|\phi\|$ . Ainsi, il existe  $z \in H$  tel que  $\|u-z\| = \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|} = d(u, H)$  par le lemme. ■

**Remarque importante.** Remarquons la dichotomie du résultat précédent : soit toutes les distances des points hors du noyau au noyau sont atteintes, soit aucune ne l'est.

### 1.4.2 Projections scalaires

#### Théorème. (*Continuité des projections en dimension finie*)

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  une base de  $E$ . Soit  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $p$  la projection selon la composante sur  $e_{i_0}$ . Alors  $p$  est continue.

▷ On sait que  $p$  est une forme linéaire. Or toute application linéaire partant d'un espace de dimension finie est continue, donc  $p$  est continue. ■

En dimension infinie, c'est facilement faux comme le montre le contre-exemple suivant.

#### Contre-exemple. (*Projection discontinue en dimension infinie*)

Une projection n'est pas continue en général.

On munit l'espace  $E = C([0,1], \mathbb{R})$  d'une base algébrique, forcément indénombrable, car la famille  $x \mapsto e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est libre. De cette base on extrait une base du sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales sur  $[0,1]$ . Il est de dimension dénombrable ; soit donc  $e$  un vecteur de la base d'origine qui n'est pas cette extraction. Le noyau de la projection sur  $e$  contient l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est dense dans  $E$ , donc le noyau de cette projection est dense, en particulier il n'est pas fermé, donc elle n'est pas continue, et voilà.

Heuristiquement, ce n'est pas étonnant. Un tel résultat signifierait que toute application nilpotente d'ordre 2 serait continue, ce qui est curieux. □

#### Exercice 2

Est-ce que, plus généralement, un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si toutes les projections scalaires contre une base donnée sont continues ?

### 1.4.3 Projections vectorielles

**Corollaire.** (*Décomposition selon une projection continue*)

Soit  $p$  la projection sur la droite vectorielle engendrée par  $e_{i_0}$  dont on suppose qu'elle est continue. Alors il existe un supplémentaire de  $\text{Ker}(p)$  fermé dans  $E$ , donc une décomposition de  $E$  en deux sous-espaces fermés.

▷ On pose  $q = 1 - p$ . On sait que  $q$  est une projection, de plus,  $pq = p(1 - p) = p - p^2 = 0$  au sens de la composition. D'après le lemme des noyaux, puisque  $X$  et  $X - 1$  sont premiers entre eux,  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q) = E$ . Or  $\text{Ker}(p)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , car  $p$  est continue, et  $q$  est également continue par opérations usuelles donc  $\text{Ker}(q)$  est également fermé dans  $E$ , ce qui termine la preuve. ■

*Remarque.* Le supplémentaire obtenu est bien la projection sur  $\text{Vect}(e_i, i \in I \setminus \{i_0\})$ , ce qui est commode dans la pratique la base ayant été fixée.

#### Exercice 3

Vérifier explicitement le fait précédent.

## 1.5 Convexité

DANS toute cette section, on se limite aux espaces vectoriels normés  **$E$  sur un sur-corps valué de  $\mathbb{R}$** . En vérité, toutes les interprétations géométriques des résultats, qui sont la règle, se font sur la restriction des théorèmes aux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

### 1.5.1 Jauge d'un convexe

Voilà une notion dont la principale application est la preuve du théorème de Hahn-Banach géométrique.

**Définition.** (*Jauge d'un convexe*)

Soit  $C \subseteq E$  un convexe contenant  $0_E$ . La *jauge*  $p$  de  $C$  est l'application  $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $p(x) = \inf \{t \geq 0, x \in tC\}$ .

*Remarque.* Si  $t \in I_x$ , pour tout  $s \geq t$ ,  $s \in I_x$ . En effet, si  $t \neq 0$ ,  $t \in I_x \iff x/t \in C \iff [0, x/t]_E \subseteq C \iff \forall s \geq t \quad x/s \in C \iff \forall s \geq t \quad s \in I_x$ .

**Propriété.** (*Définition de la jauge*)

$p$  est bien définie.

▷ Soit  $x \in E$  et  $I_x = \{t \geq 0, x \in tC\}$ . Si  $t$  est non nul, on l'écrit  $x/t \in C$ . Comme  $C$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(0_E, r) \subseteq C$  puisque  $0 \in C$ . Donc si  $x \in E$  est non nul,  $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in C$  c'est-à-dire que  $x \in \frac{2\|x\|}{r} C$  (★). Donc  $I_x \neq \emptyset$ . Puisque  $I_x \subseteq [0, +\infty)$ , donc  $p(x)$  est bien définie. ■

### Propriété. (Jauge en zéro)

$p(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

▷ Clair et clair. ■

### Propriété. (Sous-additivité, homogénéité positive)

$p$  vérifie les hypothèses du théorème analytique de Hahn-Banach réel.

▷  $p$  est positivement homogène. En effet,  $p(x) = \inf \{t \geq 0, x \in tC\}$ . Soit  $\lambda > 0$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda x \in \lambda tC \iff x \in tC$ . Donc  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ . ■

▷ Montrons que la jauge d'un convexe vérifie l'inégalité triangulaire (exercice classique de L2). Soient  $x, y \in E$  non nuls. Soient  $\varepsilon > 0$ , alors  $p(x) + \varepsilon \in I_x$  et  $p(y) + \varepsilon \in I_y$ , c'est-à-dire  $\frac{x}{p(x)+\varepsilon}, \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ . Alors comme  $C$  est convexe,

$$\frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \frac{x}{p(x) + \varepsilon} + \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \frac{y}{p(y) + \varepsilon} = \frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C,$$

donc  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ . Donc  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ . ■

### Propriété. (Identification du convexe par la jauge)

$C = \{x \in E, p(x) < 1\}$ .

▷ Montrons que  $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$ . Si  $x \in C$  non nul, comme  $C$  est ouvert, il existe  $\rho > 0$  tel que  $B(x, \rho) \subseteq C$ . Soit  $\lambda = \frac{\|x\| + \frac{1}{2}}{\|x\|} > 1$ . Alors  $\lambda x = x + \frac{1}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(x, \rho) \subseteq C$ . Donc  $\frac{1}{\lambda} \in I_x$  donc  $p(x) = \inf(I_x) < 1$ . On a montré que  $C \subseteq \{x, p(x) < 1\}$ . Réciproquement, si  $p(x) < 1$ ,  $I_x \supseteq [1, +\infty[$ , donc  $x \in C$ . ■

### Propriété. (Majoration de la jauge)

Il existe  $M$  tel que  $p \leq M \|\cdot\|$ .

▷ La relation (★) donne  $p(x) \leq M \|x\|$  pour  $M = \frac{2}{r}$ . ■

### Propriété. (Continuité de la jauge)

$p$  est lipschitzienne.

▷ Conséquence de la majoration précédente. ■

### Propriété. (*Norme issue d'une jauge*)

La jauge d'un convexe compact symétrique par rapport à l'origine définit une norme dont la boule unité est ce convexe.

### Théorème. (*Homéomorphie des convexes*)

Tous les convexes compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont homéomorphes, pour  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ On montre que  $C$  est homéomorphe à la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  en utilisant la fonction  $x \mapsto \frac{j(x)}{\|x\|}x$ , bijection bicontinue de  $C$  sur la boule unité. ■

### Corollaire. (*Boules et point*)

Toute boule de  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à un point.

### Heuristique

La jauge d'un convexe permet de le déterminer dans l'espace.

## 1.5.2 Convexes et applications

### Exercice 4

L'image d'un convexe par une application continue est-elle nécessairement convexe.

▷ Éléments de réponse.

Clairement pas. Pourtant, d'après les valeurs intermédiaires, un exemple de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ne suffit pas. On peut considérer simplement l'image de  $[-\pi, \pi]$  par l'exponentielle imaginaire, qui est la sphère du plan d'Argand-Cauchy, qui n'a rien de convexe, en cela que deux points distincts formeront toujours une corde sortant de la sphère.

### Propriété. (*Image d'un convexe par une application linéaire*)

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels réels. Soit  $C$  un convexe de  $E$  et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f(C)$  est convexe.

### 1.5.3 Points extrémaux

#### Définition. (*Point extrémal*)

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $c \in A$  est *extrémal* (dans  $A$ ), ou que  $c$  est un *point extrême* de  $A$ , si  $A \setminus \{c\}$  est convexe.

*Remarque.* Cette définition n'a d'intérêt que si  $A$  est déjà connexe, mais elle n'est pas dépourvue de sens dans le cas général néanmoins.

#### Exercice 5

Trouver une partie non convexe du plan et exhiber l'un de ses points extrémaux.

▷ Éléments de réponse.

Prendre une boule et un point hors de la boule. Ce n'est pas une partie convexe du plan. Pourtant, le point hors de la boule est extrémal, car si on le retire, on obtient une boule, convexe.

#### Propriété. (*Caractérisation des points extrémaux*)

Soit  $A$  un convexe. Un point  $c \in A$  est extrémal, si et seulement si, pour tous  $c_1, c_2 \in A$ ,  
 $c = \frac{c_1+c_2}{2} \implies c_1 = c_2 = c$ .

▷ Supposons que  $c$  soit le milieu de deux points distincts de  $A$ , distincts de  $c$ ; en effet, si  $c_1 \neq c$ , alors  $c_2 \neq c$ . Alors  $A$  privé de  $c$  ne peut être convexe, car alors on aurait un segment liant deux éléments de  $A \setminus \{c\}$  dont le milieu n'est pas dans  $A \setminus \{c\}$ . Réciproquement, si  $A$  privé de  $c$  n'est pas convexe, alors il existe  $a, b \in A$ ,  $a, b \neq c$ , tel qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $x \notin A \setminus \{c\}$ . Remarquons que  $a \neq b$ . Puisque,  $A$  étant convexe,  $x \in [a, b] \subseteq A$ , on a  $x = c$ . Posons  $\rho = \min(\|x - a\|, \|x - b\|)/2$  et  $c_1 = \rho x + (1 - \rho)a$ , et  $c_2 = \rho x + (1 - \rho)b$ . Puisque  $x \neq a, b$ , on a  $\frac{c_1+c_2}{2} = x = c$  où ni  $c_1$ , ni  $c_2$  n'égale  $c$ . ■

#### Exercice 6

Quels sont les points extrémaux d'un triangle ?

▷ Éléments de réponse.

Les points extrémaux d'un triangle sont ses trois sommets (et non sa frontière!).

Voilà un exemple géométrique précisant la conception géométrique du point extrémal :

La notion de point extrémal apparaît dans le théorème de Krein-Milman dont nous donnons une version élémentaire.

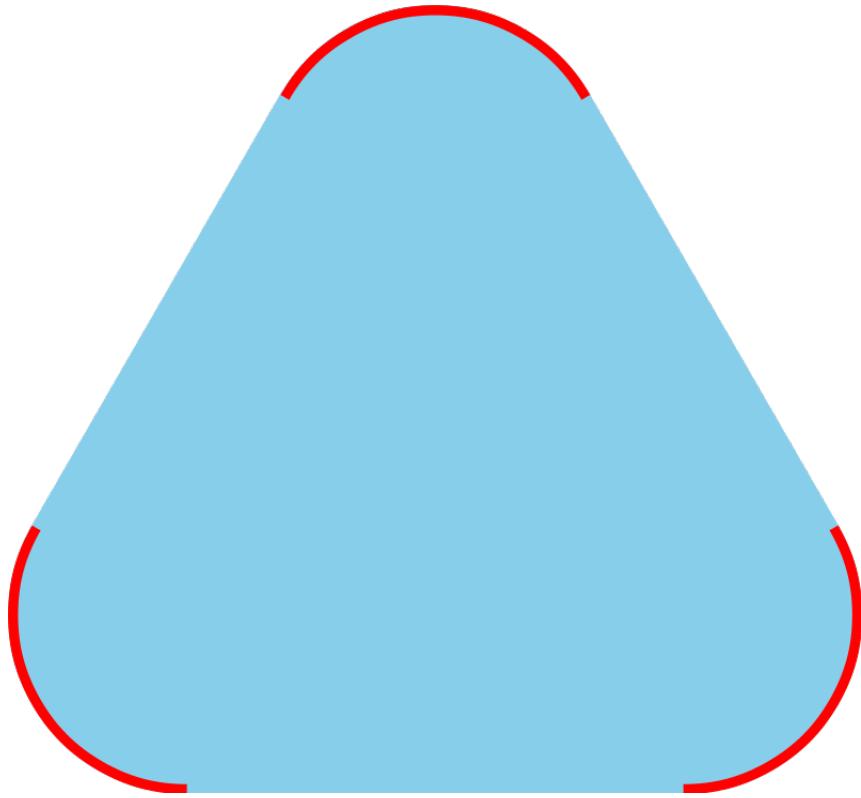


FIGURE 1.5.1 : Un convexe dont les points extrémaux ne sont ni les sommets, ni la frontière. — Les points extrémaux sont indiqués en surlignage rouge.

### Théorème. (*Théorème de Krein-Milman*)

Tout convexe compact en dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

▷ On procède par récurrence sur la dimension. En dimension nulle, il n'y a rien à faire : il n'y a que deux convexes,  $\emptyset$  et  $\{0\}$  ; c'est trivial dans les deux cas. Soit maintenant  $C$  un convexe compact dans un espace vectoriel normé réel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons le théorème vrai pour tout convexe compact inclus dans un sous-espace de dimension  $k < n$ . Soit  $m \in C$ . Montrons que  $m$  s'exprime comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $A$ , et cela suffit, car l'enveloppe convexe des points extrémaux de  $A$ , est a fortiori incluse dans  $A$ , convexe. Soit  $D$  une droite quelconque passant par  $m$ , par exemple,  $\mathbb{R}_-$ . L'ensemble  $C \cap D$  est alors un convexe inclus dans  $C$ . Puisque  $C$  et  $D$  sont fermés,  $C \cap D$  est un compact en tant que fermé dans le compact  $C$ . C'est donc un convexe compact d'un espace de dimension 1. Il est donc de la forme  $[a,b]$ , où  $a,b \in A$  et  $m \in [a,b]$ , naturellement. Or  $a,b$  sont sur la frontière du convexe  $C$ , car ils sont adhérents au complémentaire de  $C$ , autrement, on formerait une boule contenant un point de  $D$  dans  $C$  et non dans  $[a,b]$ , absurde. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc des hyperplans d'appuis  $H_a$  et  $H_b$  en ces points. Introduisons les convexes, par intersections de convexes,  $C_a = C \cap H_a$  et  $C_b = C \cap H_b$ . On remarque alors que tout point extrémal de  $C_a$  est encore un point extrémal de  $C$ . En effet, étant donné un point extrémal  $c$  de  $C_a$  et  $x,y \in C \setminus \{c\}$ . Si l'un au moins des deux points  $x,y$  n'est pas dans  $H_a$ , vu le caractère séparant de cet hyperplan, tout le segment ouvert  $]x,y[$  reste dans un seul demi-espace ouvert délimité par  $H_a$  et évite donc  $c$ . Si  $x,y \in H_a$  maintenant, puisque  $C_a \setminus \{c\}$  est convexe,  $[x,y]$  évite  $c$ . Dans tous les cas,

$[x,y]$  est entièrement dans  $C \setminus \{c\}$ , d'où l'observation. Elle tient également pour le convexe  $C_b$ .

Les convexes  $C_a, C_b$  étant inclus dans des hyperplans de dimension  $k - 1$ , on peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence. Ainsi  $a$  est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $C_a$ , donc de  $C$ ; de même,  $b$  est barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de  $C_b$  donc de  $C$ . Puisque  $m$  est barycentre à coefficients positifs de  $a$  et  $b$ , par associativité, le résultat est montré. ■

### Exercice 7

Donner un exemple graphique où, dans le théorème précédent,  $C_a$  ou  $C_b$  ne sont pas réduits à des points.

On retrouve le résultat suivant :

**Corollaire. (*Krein-Milman pour les polygones*)**

Tout polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

# Chapitre 2

## Espaces métriques

### Résumé

On donne quelques propriétés propres aux espaces métriques : notion de distance atteinte, propriétés des boules, complétude et théorie de Baire dans le cadre complet.

### 2.1 Distances

#### 2.1.1 Définition d'une distance

**Définition.** (*Majoration d'une distance*)

Soit  $(E,d)$  un espace métrique. Alors  $(E, \min(1,d))$  est une distance.

▷ Preuve facile. ■

#### Exercice 1

Ces deux espaces sont-ils homéomorphes ?

**Définition.** (*Distance de Manhattan*)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On pose pour tous  $x,y \in E$  :

$$d(x,y) = \|x - y\| \text{ si } x,y \text{ sont colinéaires, } d(x,y) = \|x\| + \|y\| \text{ sinon.}$$

▷ Il suffit de disjoindre les cas. ■

### 2.1.2 Distance issue d'une norme

#### Définition. (*Distance homogène*)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$  un corps valué. On dit qu'une distance  $d$  sur  $E$  est homogène si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y).$$

#### Propriété. (*Homogénéité des distances*)

Toute distance sur un espace normé issue d'une norme est homogène.

#### Exercice 2

La distance de Manhattan associée à la norme euclidienne est-elle issue d'une norme ?

#### Méthode. (*Montrer qu'une distance n'est pas issue d'une norme*)

Si une distance sur un espace normé n'est pas homogène en les scalaires, elle ne peut être issue d'une norme.

### 2.1.3 Distance à une partie, distance entre deux parties

#### 2.1.3.1 Définition

On note que la distance à une partie est toujours définie en tant que borne inférieure d'une famille minorée non vide de réels.

#### 2.1.3.2 Réalisation de la distance à une partie

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On introduit le problème d'optimisation suivant :

#### Définition. (*Distance à une partie atteinte*)

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x$  un point de  $E$ . On dit que la distance de  $x$  à  $A$  est atteinte, ou que  $x$  réalise la distance de  $x$  à  $A$ , s'il existe  $y \in A$  tel que

$$d(x, y) = d(x, A) = \inf_{z \in A} d(x, z).$$

On remarque que l'hypothèse  $y \in A$  est tout le fond de cette définition.

#### Exercice 3

Soit  $A$  une partie non vide d'un espace métrique  $E$  et  $x \in E$ . Existe-t-il toujours  $y \in E$  tel que  $d(x, A) = d(x, y)$ ? Que dire dans le cas d'un espace vectoriel normé?

Notons également que le problème de réalisation de la distance n'a de sens que dans un espace métrique (qui dit distance...)

Si le point considéré appartient à la partie, alors la distance est trivialement atteinte en ce point et la notion n'a aucun intérêt. Sans autre condition supplémentaire, la distance d'un point à une partie n'a aucune raison d'être atteinte. On a même le fait général suivant :

### Fait. (*Distance à un ouvert*)

Dans un espace normé, la distance à un ouvert d'un point n'appartenant pas à cet ouvert, n'est jamais atteinte.

Soit  $O$  un ouvert de  $E$  et  $x \notin O$ . Si  $O$  est vide,  $d(x,O) = +\infty$  ne peut être atteinte par une distance (finie). Sinon, supposons que  $d(x,O) = d(x,y)$  pour un certain  $y \in O$ . Par définition d'un ouvert il existe une boule  $B(y,\rho)$ ,  $\rho > 0$ , incluse dans  $O$ . Alors le point  $z = (1 - \frac{\rho/2}{d(x,y)})x + \frac{\rho/2}{d(x,y)}y$  est dans  $O$  et sa distance à  $x$  est strictement inférieure à  $d(x,y)$ , absurde.

Intuitivement, il faut des hypothèses de rigidité sur  $A$  pour que la distance soit atteinte : typiquement, fermeture, compacité, complétude. La distance à un compact est l'exemple le plus élémentaire de tous.

### Propriété. (*Distance à un compact*)

La distance d'un point à un compact non vide est atteinte.

▷ Soit  $x$  un point de  $E$  et  $K$  un compact. Il s'agit de remarquer que l'application  $x \rightarrow d(x,y)$  est continue, ce qui découle de ce qu'elle est 1-lipschitzienne, par la seconde inégalité triangulaire. L'image continue d'un compact étant compacte, donc fermée, l'infimum  $\inf_{z \in K} d(x,z)$  est un minimum, c'est-à-dire atteint. (On peut aussi invoquer le théorème des bornes atteintes qui est sensiblement la même chose.) ■

Par contre, la distance à un fermé peut facilement ne pas être atteinte.

### Contre-exemple. (*Distance à un fermé non atteinte : l'hyperbole polynomiale*)

Les propriétés suivantes montrent que, dans un espace vectoriel normé, on doit se placer en dimension infinie pour trouver un tel contre exemple.

Dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme infinie, la partie  $A = \{(1 + \frac{1}{2^n})X^n, n \in \mathbb{N}\}$  est fermée : elle est discrète et les points ne peuvent s'accumuler qu'au voisinage de l'infini. La distance au polynôme nul est clairement nulle, mais évidemment jamais atteinte. □

On dispose pourtant du résultat suivant.

**Proposition.** (*Distance à un fermé dans un espace métrique sympathique*)

On suppose que toutes les boules fermées de  $E$  sont compactes. Soit  $F$  un fermé de  $E$  et  $x \in E$ . Alors la distance à  $E$  est atteinte.

▷ La preuve est grossièrement la même que dans les espaces vectoriels de dimension finie, qui, par le théorème de Riesz, écopent de la propriété précédente. On laisse le soin au lecteur d'adapter la preuve ci-dessous, faite dans ce cas beaucoup plus pratique, mais fondamentalement inchangée. ■

On s'intéresse donc au cas des espaces vectoriels normés, où les choses se déroulent un peu mieux. Soit donc  $E$  un espace vectoriel normé par  $\|\cdot\|$ . On note  $d$  la distance issue de la norme.

**Propriété.** (*Distance à un fermé de dimension finie*)

Soit  $F$  un fermé de  $E$  inclus dans un sous-espace de dimension finie. Soit  $x \in E$ . Alors la distance de  $x$  à  $E$  est atteinte.

▷ Classique. ■

**Corollaire.** (*Distance à un sev de dimension finie*)

La distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie, est toujours atteinte.

▷ Puisque tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie est fermé dans  $E$ . ■

En dimension infinie, rien ne va plus, même si le sous-espace en question est fermé.

**Contre-exemple.** (*Distance à un sous-espace vectoriel fermé non atteinte*)

Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles de limite nulle muni de la norme infinie. La forme  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}x_n$  est clairement linéaire, continue et non nulle ; son noyau est donc un hyperplan fermé de  $E$ . Pourtant, pour tout point  $x \notin H$ , la quantité  $d(x,H)$  n'est pas atteinte.

Vérifions-le. Soit  $x$  quelconque, hors de  $H$ . Remarquons que  $d(x,H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$ . En effet, pour tout  $h \in H$ ,  $|f(u-h)| \leq \|f\| |u-h|$  d'où  $\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq d(x,H)$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un vecteur unitaire  $s$  tel que  $|f(s)| \geq \|f\| - \varepsilon > 0$ . On a donc, en prenant  $h = u - \frac{f(u)}{\|f\|}s$ ,  $d(u,H) \leq \|u-h\| \leq \frac{\|f(u)\|}{\|f\|-\varepsilon}$ .

Par conséquent, si  $d(x,H)$  est atteinte, alors  $f$  atteint sa norme sur la sphère. En effet,  $d(u,H) = \|u-z\| = \frac{|f(u-z)|}{\|f\|}$ . Or la norme de  $f$  est 2 en considérant les  $(1,\dots,1,0,\dots)$ . Seulement,  $f$  atteint sa norme seulement en  $(1,\dots) \notin E$ . Par contraposée,  $d(x,H)$  n'est pas atteinte. □

On rappelle en parallèle du cours sur les espaces de Hilbert que l'on dispose du théorème très fort suivant dans les espaces préhilbertiens et complets :

**Théorème. (*Théorème de projection sur un convexe fermé*)**

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte.

En particulier :

**Corollaire. (*Distance à un sous-espace fermé dans un Hilbert*)**

Dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un sous-espace de Hilbert est toujours atteinte.

▷ En effet, un sous-espace de Hilbert est complet donc fermé ; de plus, un sous-espace vectoriel est convexe. ■

On voit d'abord que l'hypothèse de complétude était nécessaire. L'existence d'un produit scalaire est cruciale, de même que la convexité. Les trois contre-exemples suivants permettent de trancher dans les cas qui restent.

**Contre-exemple. (*Si l'on n'est plus dans un complet*)**

On considère l'espace pourtant préhilbertien  $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$  muni de la norme 2. Alors le noyau  $F = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \int_0^1 f = 0\}$  de la forme linéaire  $f \mapsto \int_0^1 f$  est un convexe fermé, car  $f$  est continue et un espace vectoriel est convexe. La distance de 1 à  $F$  n'est pourtant pas atteinte.

Exercice : s'inspirer du contre-exemple précédent.

On a en fait le fait général suivant : la distance au noyau d'une forme linéaire continue d'un point ne lui appartenant pas est atteinte si et seulement si la norme de cette forme est atteinte. Nous démontrons ce résultat dans la partie sur les espaces vectoriels normés déjà vu si tout est normal. □

**Contre-exemple. (*Si l'on n'est plus dans un Hilbert*)**

On reprend l'exemple développé des suites qui tendent vers zéro et du noyau de la forme linéaire qui à  $x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ .

Puisque c'est un Banach. □

**Contre-exemple. (*Distance à un fermé dans un Hilbert*)**

On cherche donc une partie non convexe.

On a en fait en toute généralité : soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension infinie (tout Hilbert de dimension infinie convient alors). Alors la distance de l'origine à la sphère unité de  $E$  n'est pas atteinte. D'après le théorème de Riesz, la sphère unité de  $E$  n'est pas compacte, donc il existe une suite  $(x_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$  qui n'admet pas de valeurs d'adhérence. Posons  $x'_n = (1 + \frac{1}{n+1})x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $A = \{x'_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Cette partie est un fermé de  $E$  (clairement non convexe,

d'ailleurs). En effet, si  $u$  est une suite convergente à valeurs dans  $A$ , soit elle admet un nombre fini de termes, auquel cas elle est stationnaire donc de limite dans  $A$ , soit elle admet un nombre infini de termes, auquel cas on peut en extraire une sous-suite qui est également une sous-suite de  $(x'_n)$ . Cependant, celle-ci tend vers l'infini, donc la sous-suite également, donc ne converge pas, ce qui est exclu.

De plus, et de façon immédiate, on observe que  $d(0, A) = 0$  en observant  $d(0, x'_n)$  qui tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini, mais que  $d(0, x'_n) = 1 + \frac{1}{n+1} \neq 1$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , donc la distance de 0 à  $A$  n'est pas atteinte.  $\square$

Grâce au contre-exemple général précédent, on peut énoncer sans autre justification la caractérisation suivante.

#### Propriété. (*Caractérisation de la dimension par les distances à fermés*)

Un espace vectoriel normé est de dimension finie, si et seulement si, la distance de tout point à tout fermé est atteinte.

##### 2.1.3.3 Unicité de la réalisation des distances

On se demande maintenant quelles conditions supplémentaires ajouter pour que, lorsque la distance d'un point à une partie est atteinte par un point dans cette partie, ce point d'atteinte soit unique.

Il n'y a aucune raison que ce soit le cas, en particulier on peut avoir une infinité de points en lequel la réalisation de la distance a lieu, comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple. (*Distance atteinte une infinité de fois*)

Dans  $\mathbb{R}^2$  le plan muni de la distance euclidienne, on considère la sphère unité  $A = S(0,1)$  et l'origine  $x = (0,0)$ . Alors  $d(A, x)$  est atteinte en un infinité de points.

Pour tout  $y \in A$ ,  $d(x, y) = 1$  par définition. Ainsi en passant à l'infimum,  $d(x, A) = 1$ . Or  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{R}$  (par exemple, elle contient  $\mathbb{U}_p$  pour tout nombre premier  $p$ ). On a le résultat.

Notons que  $A$  et donc l'ensemble des points de réalisation de la distance est même indénombrable.

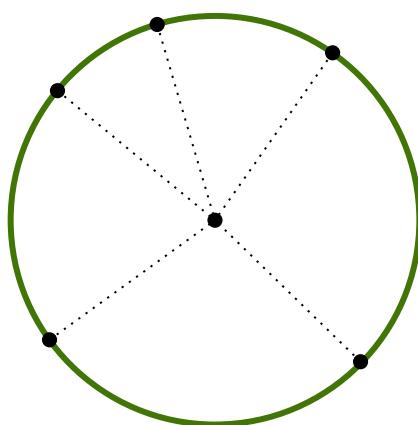


FIGURE 2.1.1 : *Distance de l'origine à la sphère unité.* —  
La distance de la sphère à son centre est atteint en une infinité de points.

De façon plutôt intuitive, le problème vient de ce que la partie  $A$ , globalement éloignée du point  $x$ , peut « s'approcher de  $x$  » plusieurs fois. Un exemple très simple est donné par la figure 2.1.2.

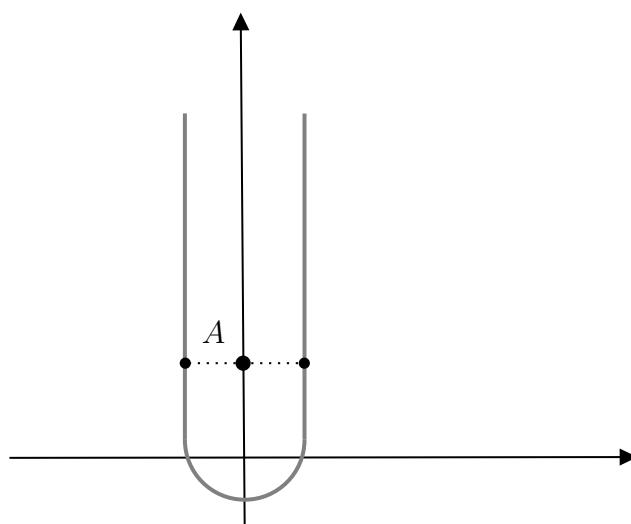


FIGURE 2.1.2 : *Distance de la fourche à un point de la bissectrice.* —  
Sur la figure ci-dessus, quitte à prendre le point  $A$  suffisamment éloigné du cul de la courbe en U, si tant est qu'il soit sur une droite équidistante à ses deux asymptotes, sa distance à la courbe est atteinte en deux points distincts opposés par symétrie de la figure.

On comprend que si la figure est convexe, une telle disposition ne peut se concevoir. On a le résultat suivant :

**Propriété. (*Distance à un convexe dans un espace préhilbertien*)**

On se place dans un espace préhilbertien. Si la distance d'un point à une partie convexe est atteinte, alors ce point est unique.

▷ Soient  $C$  un convexe d'un espace vectoriel normé  $E$  et  $x \in E$ . Supposons que la distance de  $x$  à  $C$  soient atteintes en deux points  $y, y' \in C$ , c'est-à-dire  $d(x, C) = d(x, y) = d(x, y')$ . Soit  $z = \frac{y+y'}{2}$  le milieu de  $[y, y']$ . Alors  $z \in C$  par convexité. Montrons que  $d(x, z) \leq d(x, y) = d(x, C)$ . On a :  $2d(x, z) = 2\|x - z\| = \|2x - y - y'\| \leq \|x - y\| + \|x - y'\| = d(x, y) + d(x, y') = 2d(x, y')$  d'où le résultat. Si  $y \neq y'$ , on a même l'inégalité stricte, car le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire s'exprime, pour une norme issue d'un produit scalaire,  $x - y = \lambda(x - y')$  où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Puisque  $x - y$  et  $x - y'$  ont la même norme, on obtient, si  $d(x, z) = d(x, y)$ ,  $\lambda = \pm 1$  d'où  $\lambda = 1$ . De plus, par le cas d'égalité,  $(1 - \lambda)x = y - \lambda y'$  en ramenant tout du bon côté, d'où  $y = y'$ . Mais  $d(x, z) < d(x, y)$  est exclu par définition de la distance à une partie. Par contraposée,  $y = y'$ . ■

Remarquons que la distance à un convexe n'est pas forcément atteinte : il suffit de considérer une boule ouverte et un point hors de cette boule.

#### Exercice 4

Fournir un contre-exemple dans le cas d'un convexe d'un espace non préhilbertien.

▷ Éléments de réponse.

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$  muni de la distance associée à la norme  $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ , on choisit le point  $M = (1, 0)$  et la partie  $D = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ . Alors pour tout  $N = (0, y) \in D$ ,  $MN = \|(1, -y)\| = \max(1, |y|)$ . L'infimum de cet ensemble sur  $y \in \mathbb{R}$  est 1, qui est atteint pour tout  $N \in \{0\} \times [-1, 1]$ , soit une infinité de points.

Les deux énoncés suivant permettent également de garantir l'unicité du projeté.

#### Théorème. (*Théorème de projection sur un convexe fermé*)

En fait, dans un espace de Hilbert, la distance d'un point à un convexe fermé est atteinte *en un unique point*.

Au vu des considérations précédentes, on peut aussi énoncer sans problème le fait suivant, déjà connu des élèves familiers du cours d'optimisation :

#### Propriété. (*Projection sur un compact convexe*)

Soit  $n$  un entier naturel quelconque. Soit  $K$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  un point. La distance de  $x$  à  $K$  est atteinte en un unique point.

▷ La compacité assure l'existence, la convexité l'unicité. ■

### 2.1.4 Équivalence de distances

**Définition. (*Lipschitz-équivalence des distances*)**

Deux distances sur  $E$  sont dites *Lipschitz-équivalentes*, s'il existe des constantes  $c$  et  $c'$  telles que  $cd_1 \leq d_2 \leq c'd_1$ .

**Observation. (*Caractérisation de la Lipschitz-équivalence par l'identité*)**

Deux distances  $d_1, d_2$  sur  $E$  sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si l'identité de  $E$  est un  $(d_1, d_2)$ -homéomorphisme.

**Définition. (*Lipschitz-équivalence des distances*)**

Deux distances sur  $E$  sont dites *topologiquement équivalentes* si elles définissent les mêmes ouverts.

On peut montrer que deux distances sont topologiquement équivalentes, si et seulement si toute boule de l'une est incluse dans une boule de l'autre de même centre, et réciproquement. On a également une caractérisation séquentielle : deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente au sens de l'une converge au sens de l'autre. Par ailleurs, le cas échéant, les limites coïncident.

**Propriété. (*Lipschitz-équivalence implique équivalence topologique*)**

Deux normes Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

▷ Le vérifier. ■



Contrairement à ce qui se passe pour les normes, la réciproque est fausse en général pour des distances non issues de normes.

**Contre-exemple. (*Distances topologiquement équivalentes non-Lipschitz-équivalentes*)**

Prenons  $h : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$  un homéomorphisme quelconque. Prenons la distance  $d_1$  associée à la valeur absolue sur  $]0,1[$  et l'on définit :  $d_2(x,y) = |h(x) - h(y)|$ . Dans ce cas,  $d_1$  et  $d_2$  sont des distances sur  $]0,1[$  qui définissent la même topologie, mais ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

En effet, l'une est bornée mais l'autre non. □

## 2.2 Boules

### 2.2.1 Boules ouvertes, boules fermées

#### Exercice 5 (*Extrêmement formateur*)

Donner une exemple de boule fermée qui soit ouverte mais ne soit pas une boule ouverte.  
On pourra se placer sur un sous-espace métrique du plan muni de la norme euclidienne.

▷ Éléments de réponse.

On prend comme indiqué  $E = [-1, -1] \times \{0\} \cup \{0\} \times ]1, 2]$  et la boule  $B = B_f(0, 1)$ .

### 2.2.2 Premières propriétés

### 2.2.3 Propriétés géométriques

#### Propriété. (*Inclusions réciproques des boules*)

Soit un espace métrique  $E$  et  $a \in E$ ,  $r < r'$  deux réels. Alors

$$B_0(a, r) \subseteq \overline{B_0(a, r)} \subseteq B_F(a, r) \subseteq B_0(a, r') \subseteq \overline{B_0(a, r')} \subseteq B_F(a, r').$$

#### Propriété. (*Propriété fondamentale des sous-boules*)

Soit un espace métrique  $E$ . Soient  $a, b$  deux points de  $E$  et  $r > 0$ . On suppose que  $b \in B(a, r)$ . Alors  $B(b, r - d(a, b)) \subseteq B(a, r)$ . De plus, si  $\rho = \frac{d(a, b)}{2}$ , alors

$$B(b, r - \rho) \subsetneq B(a, r).$$

#### Propriété. (*Intercalaison de sous-boules*)

Soit un espace métrique  $E$ . Soient  $a, b \in X$  et  $r, s > 0$ . Soit  $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$ . Soit  $\rho = \min(r - d(a, x), s - d(b, x))$ . Alors  $\rho > 0$  et  $B(x, \rho) \subseteq B(a, r) \cap B(b, s)$ .

#### Propriété. (*Homéomorphie des boules dans un evn*)

Dans un espace vectoriel métrique, les boules ouvertes forment une base de la topologie canonique.

#### Propriété. (*Déplacement de boules*)

Soit un espace **vectoriel**  $E$ . Soient  $a \in E$  et  $r > 0$ . Alors  $z \in B(0, 1) \iff rz + a \in B(a, r)$ .

**Corollaire.** (*Homéomorphie des boules dans un evn*)

Dans un espace vectoriel normé, toutes les boules sont homéomorphes.

## 2.3 Limites

### 2.3.1 Limites de suites

On dispose du résultat suivant, dont on s'étonne seulement qu'il ne soit pas plus généralement enseigné.

**Propriété.** (*Invariance de la limite par permutation*)

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On suppose que  $u$  tende vers  $l \in E$ . Alors pour toute permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$ , la suite  $(u_{\varphi(n)})$  est convergente de limite  $l$ .

▷ Reprenons les notations du théorème. Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut montrer qu'il existe un rang  $N$  à partir duquel tout  $n \geq N$ ,  $u_{\varphi(n)} \in B(l, \varepsilon)$ . Or par hypothèse, il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_n \in B(l, \varepsilon)$ . Comme  $\varphi$  est injective, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $\varphi(n) \geq N_0$  dès que  $n \geq N_1$ . En effet, supposons le contraire. Cela signifierait que pour tout entier naturel  $N_1$ , on peut trouver un entier  $n \geq N_1$  tel que  $\varphi(n) < N_0$ . Autrement dit, on peut construire un sous-ensemble infini  $X$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $\varphi(X) \subseteq \{1, 2, \dots, N_0 - 1\}$ . Mais l'image d'un ensemble infini par une application injective est infini, contradiction. Par conséquent, pour  $n \geq N_1$ ,  $u_{\varphi(n)} \in B(l, \varepsilon)$ . ■

Tous les termes de la suite sont dans le segment rouge à partir d'un certain rang

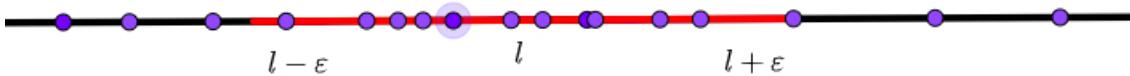


FIGURE 2.3.1 : *Invariance de la limite par permutation.* —

Par définition de la limite, tous les termes de la suite sont dans une boule centrée en la limite (ici, dans le cas de la droite réelle) à partir d'un certain rang. Ainsi, seulement un nombre fini de termes permuteds seront hors de la boule également.

*Remarque.* En observant la preuve, on se rend compte que l'on a montré le résultat pour toute application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  injective. On retrouve en particulier le résultat sur les limites des suites extraites, puisque toute extractrice est strictement croissante, donc injective.

On se rend compte, en fait, que l'hypothèse d'injectivité est équivalente à ce que la nouvelle suite construite comporte une infinité des termes de la suite d'origine. Le théorème précédent énonce précisément que cette condition suffit à ce que la propriété asymptotique de limite soit inchangée.

Ceci se généralise, dans le cas où  $E = \mathbb{R}$ , à des limites infinies.

### Exercice 6

Montrer que, si une suite  $(u_n)$  diverge, alors pour toute permutation  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$ ,  $(u_{\varphi(n)})$  diverge.

▷ **Éléments de réponse.**

Se ramener au théorème précédent.

#### 2.3.1.1 Sous-suites et valeurs d'adhérence

**Propriété.** (*Caractérisation de la limite par les sous-sous-suites*)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans l'espace métrique  $(E, d)$ . On suppose que de toute sous-suite de  $u$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge. Alors  $(u_n)$  converge.

▷ Supposons que  $u$  ne converge pas. Alors pour tout  $l \in E$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tel que  $d(u_{n_k}, l) > \varepsilon$ . En appliquant de façon itérée ceci à  $n_k$ , on extrait une sous-suite de  $u$  vérifiant  $d(u_{n_k}, l) > \varepsilon$  pour tout  $k \geq 0$ . Par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente de  $(u_{n_k})$ , notée  $(u_{n_{k_l}})$ , convergeant vers  $m$ . Absurde, car ■

*Remarque.* Il est clair qu'il ne suffit pas de pouvoir extraire une sous-suite convergente de  $u$ , pour qu'elle soit convergente : considérer  $((-1)^n)$  bornée et la suite des termes pairs.

##### 2.3.1.1.1 Théorèmes de convergence grossière des suites

Dans cette section, on énonce trois théorèmes qui ne le sont jamais proprement dans n'importe quel cours élémentaire de mathématiques, mais qui le devraient être, tant ils ont la nécessité d'exister par leur évidence, et qu'ils facilitent l'emploi de la notion de sous-suite dans des cas particuliers. En particulier, il est important de retenir ces résultats et l'aisance à les établir lorsqu'on travaillera en topologie générale dans un espace métrique.

Les théorèmes sont de trois natures. Ils portent sur :

1. les suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ;
2. les suites passant une infinité de fois sur la même valeur ;
3. les suites à valeurs dans l'image d'une suite.

Dans les trois cas, et de façon principale pour les deux premiers, on s'intéresse aux suites convergentes vérifiant l'une de ces conditions.

On dispose donc des propositions suivantes, qui, quoique largement ignorée, permet de manipuler avec des outils topologiques les ensembles de la forme  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Les choses ne sont pas si simples, mais avec un peu de travail, on s'y ramène dans trop de peine.



Une suite à support fini n'est pas nécessairement périodique à partir d'un certain rang !

### Contre-exemple. (*Suite à support fini non périodique même à pcr*)

La suite des décimales de  $\pi$  n'est pas périodique à partir d'un certain rang, sinon il existerait un entier  $n$  tel que  $10^n\pi$  soit rationnel, car sa suite de décimales serait périodique, et donc  $\pi$  le serait.  $\square$

On se servira du lemme suivant, qui découle des propriétés sur les ensembles discrets d'un espace métrique. On peut néanmoins le montrer par des moyens élémentaires.

### Lemme. (*Suites convergentes à support fini*)

Une suite convergente qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est stationnaire.

► Soit  $u$  une suite d'un espace métrique  $E$ . On suppose que  $u$  converge et ne prend qu'un nombre fini  $n$  de valeurs. Montrons le résultat par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour un certain  $n$ . Soient  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  les valeurs prises par la suite. Si  $u$  ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur  $a_{n+1}$ , alors à partir d'un certain rang, elle ne prend plus que  $n$  valeurs : par hypothèse de récurrence, elle est donc stationnaire. Sinon, elle prend une infinité de fois la valeur  $a_{n+1}$ . On construit une sous-suite de  $u$  qui ne prend que la valeur  $a_{n+1}$  : on pose  $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k = a_{n+1}\}$  et  $\varphi(0), \dots, \varphi(p)$  étant construits, on pose  $\varphi(p+1) = \min\{k \in [\varphi(p)+1, +\infty], u_k = a_{n+1}\}$  qui existe, car si la partie considérée était finie,  $u$  prendrait au plus  $\varphi(p)+2$  fois la valeur  $a_{n+1}$ . On a donc une sous-suite qui converge trivialement vers  $a_{n+1}$ , donc la limite de  $u$ , supposée convergente, est  $a_{n+1}$ . Soit  $i \in [1, n]$ . Supposons que  $u$  prenne une infinité de fois la valeur  $a_i$ . Alors de même que précédemment, on construit une sous-suite constante égale à  $a_i \neq a_{n+1}$ , ce qui est absurde, car une suite convergente n'a qu'une limite. Ainsi, à partir du rang  $N_i < +\infty$ ,  $u$  ne prend plus la valeur  $a_i$ . Par conséquent, à partir du rang  $\max i \in [1, n] N_i < +\infty$ ,  $u$  ne prend plus que la valeur  $a_{n+1}$ , elle est donc stationnaire à  $a_{n+1}$ . ■

On peut donner une preuve plus topologique de ce résultat, qui montre bien qu'elle fonctionne grâce à l'axiome de séparation :

▷ Notons  $l$  la limite de la suite  $u$  qui ne prend que les valeurs deux à deux distinctes  $x_1, \dots, x_n \in E$ . On peut noter  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $D = \text{Diam}(A)$ . Notons  $\rho = \frac{1}{2} \min_{i \neq j} d(x_i, x_j) = \frac{D}{2}$ . Alors à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de  $u$  sont dans  $B(l, \rho)$  qui ne peut par définition contenir deux termes distincts de  $A$ . S'il n'en contient aucun, c'est contradiction, car  $u_N \in B(l, \rho)$  et  $u_N \in A$ . C'est terminé. ■

Au regard de la première preuve du résultat précédent, on peut même énoncer le lemme précédent, qui a été démontré :

**Lemme. (*Suites convergentes repassant au même endroit à l'infini*)**

Une suite convergente qui prend une infinité de fois la valeur  $l$  converge vers  $l$ .

On peut surtout dire :

**Propriété. (*Suite à valeurs dans l'image d'une suite*)**

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On note  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$ . Alors  $(a_n)$  est à support fini ou il existe une suite extraite de  $(a_n)$  qui est une sous-suite de  $(u_n)$ .

▷ Si  $(a_n)$  n'est pas à support fini, alors elle prend une infinité de termes d'indices distincts dans  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . De manière générale, par définition, il existe donc une correspondance quelconque (par forcément croissante)  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = u_{f(n)}$ . Par hypothèse, l'image de  $f$  est infinie. Construisons une sous-suite de  $(a_{\varphi(n)})$  de  $(a_n)$  qui soit une sous-suite de  $(u_n)$ . Posons  $\varphi(0) = 0$ . Maintenant, pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé,  $a_{\varphi(0)}, \dots, a_{\varphi(n)}$  étant construits, on pose  $\varphi(n+1) = \min\{k \in [\varphi(n)+1, +\infty[, a_k \neq a_{\varphi(0)}, \dots, a_k \neq a_{\varphi(n)} \text{ et } f(k) > f \circ \varphi(n)\}$ . Ce minimum existe, car par hypothèse,  $(a_k)_k$  n'est pas à support fini, donc n'est pas à support fini à partir du rang  $\varphi(n)+1$ , et si la partie considérée était vide, soit tous les termes à partir de ce rang seraient égaux à l'un de  $a_{\varphi(i)}$ , ce qui exclu, car ceux-ci sont en nombre fini, soit on aurait  $f(k) \leq f \circ \varphi(n)$  fixe, ce qui est absurde, car on a vu que  $f$  ne peut envoyer le complémentaire d'une partie finie sur une partie finie, autrement son image serait finie. L'extractrice  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  est bien strictement croissante par construction, donc  $(a_{\varphi(n)})$  est bien une sous-suite de  $a$ . De plus, on a imposé  $f \circ \varphi(n+1) > f \circ \varphi(n)$ , ce qui implique que  $f \circ \varphi$  est également une extractrice. Or pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{\varphi(n)} = u_{f \circ \varphi(n)}$ , donc  $(a_{\varphi(n)})$  est une sous-suite de  $u$ . ■

On en déduit ce qui suit :

**Conséquence. (*Suites convergentes à valeurs dans l'image d'une suite*)**

Soit  $E$  une espace métrique et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On note  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente d'éléments de  $A$ . Alors  $(a_n)$  est stationnaire ou tend vers une valeur d'adhérence de  $u$ .

▷ Supposons  $(a_n)$  convergente. On note  $l$  sa limite. Si  $(a_n)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est stationnaire. Sinon, d'après la proposition précédente, elle admet une sous-suite qui est une sous-suite de  $u$ , qui converge également vers  $l$ , car toutes les sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite. Ainsi,  $u$  admet une sous-suite convergeant vers  $l$ , soit  $l$  est une valeur d'adhérence de  $u$ . ■

## 2.4 Compacité

### 2.4.1 Suites à valeurs dans un compact

On dispose de la proposition suivante, souvent oubliée, mais qui peut se révéler très utile.

**Propriété.** (*Suite compacte n'ayant qu'une valeur d'adhérence*)

Soit  $K$  un partie compacte de l'espace métrique  $E$ . Si  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $K$  n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.

▷ Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit  $l$  l'unique valeur d'adhérence de  $u$ . Par définition de la limite, on peut écrire  $\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N d(u_n, l) > \varepsilon$ . On construit donc aisément une extractrice et une sous-suite de  $u$  qui ne peut avoir  $u$  comme valeur d'adhérence, puisqu'elle reste hors de  $B(l, \varepsilon)$ . Cependant, cette sous-suite  $v$  a valeurs dans un compact donc admet une sous-suite  $w$  qui a une unique valeur d'adhérence. Celle-ci vaut forcément  $l$ , car  $w$  est aussi une sous-suite de  $u$ . Contradiction. ■

Conjointe à la propriété sur les valeurs d'adhérence d'une sous-suite, on obtient le théorème de caractérisation suivante dans les compacts :

**Théorème.** (*Caractérisation de la convergence dans les compacts*)

Soit  $u$  une suite à valeurs dans un compact. Alors  $u$  converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

▷ Le sens réciproque vient d'être traité. Pour le sens direct, on savait déjà qu'une suite convergente (à valeurs dans un ensemble quelconque) admet une unique valeur d'adhérence. ■

**Théorème.** (*Caractérisation des Banach par Banach*)

Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

▷ Seul le sens direct nous intéresse véritablement. Soit  $E$  un espace de Banach. Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $E$  telle que  $\sum |x_n|$  converge. Alors les sommes  $S_N = \sum_{n \leq N} x_n$  vérifient pour tout

$M \geq N$  :

$$\|S_M - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\|.$$

Or, la série  $\sum \|x_n\|$  étant convergente, les tranches de Cauchy du dernier membre tendent vers zéro lorsque  $M, N$  tendent vers  $+\infty$ . Ainsi, la suite  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Comme  $E$  est complet, elle converge, c'est-à-dire que la série est convergente.

On donne la réciproque par souci d'exhaustivité. Supposons que toute série absolument convergente converge dans  $E$ . Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy à valeurs dans  $E$ . On peut extraire une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  telle que  $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$ , en choisissant  $\varphi(n) = N$  le module associé à  $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ . On pose alors  $u_n = x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}$  et la série  $\sum u_n$  est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Or  $x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(0)} = \sum_{k=0}^n u_k$ , donc on déduit que la sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  converge. Comme toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge, on en déduit la convergence de  $(x_n)$ , et  $E$  est un espace de Banach. ■

## 2.5 Complétude

### 2.5.1 Suites de Cauchy

**Propriété. (Condition suffisante de non-Cauchitude)**

Si pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$   $i \neq j$ ,  $d(x_i, x_j) > \varepsilon > 0$ , alors non seulement  $(x_n)$  n'est pas de Cauchy mais n'admet aucune sous-suite convergente.

### 2.5.2 Espaces complets

**Exemples. (Espaces complets)**

1.  $\mathbb{R}$  muni de la distance dérivée de la valeur absolue est complet.
2.  $]0, 1]$  n'est pas complet.
3.  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  est complet pour la norme infinie.
4.  $\mathcal{C}_b^0((X_1, d_1), (X_2, d_2))$  est complet pour  $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X_1} d_2(f(x), g(x))$  si  $(X_2, d_2)$  est complet.
5. Un ensemble borné en dimension finie est complet si et seulement s'il est compact.

### Contre-exemple. (*Un espace non complet*)

On considère  $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$  pour  $p \in [1, \infty[$ . Prenons pour tous  $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n \left( x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Alors  $f_n \rightarrow f = \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$  et par convergence dominée,  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{m, q > n} \|f_q - f_m\|_p = 0$ .

La suite  $(f_n)$  est donc de Cauchy. Pourtant, elle ne converge pas dans  $\mathcal{C}^0([0,1])$ , puisque la limite n'est pas continue et unique dans  $L^p$ .  $\square$

*Remarque.* On verra que ceci montre que cet espace n'est pas fermé dans  $L^p$ .



On voit là la difficulté de traiter avec l'espace des fonctions continues sur un compact. Cet espace peut être muni de beaucoup de normes, en particulier, toutes les normes  $p$ , et se plonge ainsi dans tous les espaces  $L^p$  (qui, eux, par définition, ne peuvent être muni que de la norme  $L^p$ , ou de normes inférieures...).

### Propriété. (*Sous-espace complet d'un espace quelconque*)

Tout sous-espace complet d'un espace métrique quelconque est fermé.

▷ Soit  $F$  un sous-espace métrique complet d'un espace métrique  $E$  quelconque. Soit  $u$  une suite à valeurs dans  $F$  convergeant dans  $E$  vers  $l$ . Toute suite convergente est de Cauchy, dans n'importe quel espace, donc  $u$  est une suite de Cauchy de  $E$  à valeurs dans  $F$ . C'est extrinsèque :  $u$  est donc une suite de Cauchy de  $F$ . Puisque  $F$  est complet,  $u$  converge donc dans  $F$  vers  $l'$ . Par unicité de la limite,  $l = l' \in F$ , donc  $F$  est fermé. ■

### Propriété. (*Compact $\Rightarrow$ complet*)

Tout espace métrique compact est complet.

Plus généralement, toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

### 2.5.3 Théorie de Baire dans le cas complet

Pour s'échauffer, on énonce la propriété suivante :

### Propriété. (*Intersection finie d'ouverts denses*)

Dans un espace topologique quelconque, toute intersection finie d'ouverts denses est dense.

▷ Soit  $O_1, \dots, O_n, n \in \mathbb{N}$ , des ouverts denses de l'espace  $E$ . Soit  $\Omega$  un ouvert quelconque. On veut montrer  $(O_1 \cap \dots \cap O_n) \cap \Omega \neq \emptyset$ . On pourrait écrire :

$$(O_1 \cap \dots \cap O_n) \cap \Omega = (O_1 \cap \Omega) \cap \dots \cap (O_n \cap \Omega),$$

et chaque  $O_i \cap \Omega$  est non vide, mais cela ne suffit pas pour conclure. Par contre, on peut raisonner par récurrence :  $O_1 \cap \Omega$  est non vide, et  $O_{i+1} \cap [(O_i \cap \dots \cap O_1) \cap \Omega]$  est non vide, car  $O_{i+1}$  est dense et  $(O_i \cap \dots \cap O_1) \cap \Omega$  est un ouvert non vide, par intersection finie d'ouverts et car  $O_i \cap \dots \cap O_1$  est dense dans  $E$  par hypothèse. ■



On se rappellera de ce butoir dans la preuve qui justifie que la preuve du théorème de Baire utilise le théorème des fermés emboîtés : *on a besoin d'une densité jointe et non d'une densité ouvert par ouvert* qui donne éventuellement des ouverts disjoints, donc d'intersection vide.

Puisque la propriété duale de la densité et le fait d'être d'intérieur vide, on peut l'énoncer également de la manière suivante :

### Propriété. (*Réunion finie de fermés d'intérieur vide*)

Dans un espace topologique quelconque, toute réunion finie de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Plus généralement, la théorie de Baire se demande ce qui se passe dans le cas d'une intersection finie.

### Définition. (*Espace de Baire*)

On dit qu'un espace topologique  $E$  est un *espace de Baire* s'il vérifie la *propriété de Baire* énoncée comme suit : toute intersection d'ouverts dense est dense.

On énonce un lemme célèbre et utile pour la preuve du théorème de Baire, qui donne que les espaces métriques complets, **en particulier les espaces de Banach**, sont tous des espaces de Baire.

### Théorème. (*Théorème des fermés emboîtés*)

Dans tout espace métrique complet, toute intersection décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers zéro est réduite à un singleton.

▷ Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $(F_n)$  une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(F_n) = 0$  où  $\delta(F_n) = \sup_{(x,y) \in F_n^2} d(x,y)$ . Montrons qu'il existe

$x \in E$  tel que  $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est non vide donc il contient un élément  $x_n$  d'après l'axiome du choix dénombrable. Soit  $\varepsilon > 0$ . Les diamètres tendant vers zéro, on peut choisir  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta(F_N) < \varepsilon$ , et alors pour tous  $p, q > N$ ,  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ , car par décroissance de  $(F_n)$ ,  $x_p, x_q \in F_N$ . La suite des  $(x_n)$  est donc une suite de Cauchy.  $E$  étant complet, elle converge vers un élément  $x$  de  $E$ . Or pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $F_p$  est fermé et  $x_n \in F_p$  pour tout  $n \geq N$ , donc  $x$  appartient à  $F_p$ . On en déduit que  $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$ . Ainsi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est non vide. Supposons enfin que  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in F_n$  donc  $0 \leq d(x, y) \leq \delta(F_n)$ . En passant à la limite,  $d(x, y) = 0$  d'où par séparation  $x = y$ . On en déduit que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est le singleton  $\{x\}$ . ■

**Remarque importante.** On montre en fait un résultat plus fort. Sous les hypothèses du lemme, toute suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  adaptée à l'emboîtement des fermés, c'est-à-dire telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F_n$ , est convergente, de limite  $x$  telle que  $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .

### Théorème. (*Théorème de Baire*)

Dans tout espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Autrement dit, tout espace métrique complet est de Baire.

▷ Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet, et  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ouverts denses dans  $E$ . Montrons que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  est dense dans  $E$ , c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide  $V$  de  $E$ ,  $V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \emptyset$ . Soit donc  $V$  un ouvert de  $E$ . On construit par récurrence une suite  $(B_n)$  de boules fermées de  $E$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n$  est de rayon non nul inférieur à  $\frac{1}{2^n}$ , et d'autre part,  $B_0 \subseteq O_0 \cap V$  et  $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ . On notera que ces boules sont emboîtées.

L'ouvert  $O_0$  est dense dans  $E$  donc  $O_0 \cap V \neq \emptyset$ . Or cet ensemble est ouvert par intersection de deux ouverts, donc il existe une boule ouverte  $B(x_0, r) \subseteq O_0 \cap V$ . Si  $B_0$  est la boule fermé de centre  $x_0$  et de rayon  $r/2$  (ou 1 si  $r/2 > 1$ ), on a donc  $B_0 \subseteq O_0 \cap V$ . Supposons les boules  $B_0, \dots, B_n$  construites et vérifiant les propriétés voulues. L'ouvert  $O_{n+1}$  étant dense dans  $E$ ,  $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$  est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte  $B(x, r)$  incluse dans  $O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ , et si l'on prend pour  $B_{n+1}$  la boule fermé de centre  $x$  et de rayon  $\min(r/2, \frac{1}{2^{n+1}})$ , on a  $B_{n+1} \subseteq O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ , et  $B_{n+1}$  vérifiant bien les propriétés voulues.

Par construction,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de fermés non vides de  $E$  dont le diamètre tend vers 0. De plus,  $E$  est complet, donc d'après le théorème des fermés emboîtés, il existe  $x \in E$  tel que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x\}$ . Comme  $B_0 \subseteq V$ , on a en particulier  $x \in V$ . D'autre part, par construction,  $B_n \subseteq O_n$  pour tout  $n$ , donc  $x \in O_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent,  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  donc  $x \in V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ , ce qu'il fallait montrer. ■

### Contre-exemple. (*Théorème de Baire infirmé dans un pasbanach*)

En général, le théorème de Baire a besoin de la complétude.

On prend  $E = \mathbb{R}[X]$ . On pose  $\Omega_n = \mathcal{C}_E \mathbb{R}_n[X]$ . Puisque  $\mathbb{R}[X]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , c'est un fermé d'intérieur vide, donc  $\Omega_n$  est un ouvert dense de  $E$ . De plus,  $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_n[X]$

donc  $\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ . Ainsi  $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n} = \emptyset \neq E$ !

On voit en particulier que  $\mathbb{R}[X]$  n'est pas un espace de Banach.  $\square$

### Contre-exemple. (*Théorème de Baire*)

Soit  $E = [0,1]$  compact donc complet. Soit  $O_x = [0,1] \setminus \{x\}$ , ouvert dense de  $E$ . Alors  $\bigcap_{x \in E} O_x = \emptyset$  est une intersection (indénombrable) d'ouverts dense, non dense.  $\square$

### Exercice 7 (*Éclaircissements*)

- Montrer que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  grâce au théorème de Baire.

**INDICATION** Utiliser la dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$ .

- En déduire qu'il n'y a aucune raison pour qu'une intersection dénombrable d'ouverts dense soit dense.

**Remarque importante.** Tout espace homéomorphe à un espace métrique complet (on dit *complètement métrisable*) vérifie la propriété de Baire, sans qu'il doive être forcément complet.

### Reformulation pratique. (*Propriété de Baire pour les fermés d'intérieur vide*)

Toute réunion de fermés recouvrant un espace métrique complet non vide, contient au moins un fermé d'intérieur non vide.

▷ Il suffit de passer au complémentaire dans le théorème de Baire. ■

### Définition. (*Espace complètement de Baire*)

On dit qu'un espace topologique  $E$  est un *espace complètement de Baire* si tout sous-espace fermé de  $E$  est de Baire.

### Propriété. (*Complète Bairitude des espaces complètement métrisables*)

Tout espace complètement métrisable est complètement de Baire.

▷ Soit  $E$  un espace complètement métrisable en  $d$ . Soit  $F$  un sous-espace fermé de  $E$ . Alors, muni de la distance induite, c'est un sous-espace fermé de  $(E,d)$  qui est complet. Donc  $F$  est un espace métrique complet. Il vérifie donc la propriété de Baire d'après le théorème précédent. ■

# Chapitre 3

## Topologie générale

### Résumé

La topologie permet de formaliser la notion de *proximité*, et donc, celle de convergence et de continuité. En analyse, on s'intéresse à une topologie extrêmement souple, dite *topologie métrique*, où l'on mesure numériquement la distance entre deux points. En topologie générale, on ne connaît pas forcément la distance entre tous les points de l'espace, mais on est capable de dire, avec une certaine précision (dépendant de la donnée d'une *topologie*), s'ils sont proches.

### 3.1 Définitions de base d'une topologie

#### Définitions

1. Un espace est dit *nul* ou *vide* s'il est vide. Il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.
2. Un espace est dit *trivial* s'il est vide ou réduit à un singleton. Dans le cas où il n'est pas vide, il n'en existe qu'un à homéomorphisme près.

#### 3.1.1 Ouverts et fermés

Cette définition est *minimale*, comme souvent en mathématiques. On verra d'autres définitions qui ne le sont plus, mais seront forcément plus intuitives.

*Remarque.* Le complémentaire induit une bijection involutive des ouverts d'un espace topologique sur l'ensemble de ses fermés.



A priori, il existe des parties de  $X$  qui ne sont ni ouvertes, ni fermées !

**Exemples. (*Topologies*)**

1. (*Topologie grossière, topologie triviale*) Sur tout ensemble  $X$  on peut définir la topologie grossière  $\{\emptyset, X\}$ .
2. (*Topologie discrète, topologie maximale*) Sur tout ensemble  $X$  on peut définir la topologie discrète  $\mathcal{P}(X)$ .



Ainsi, curieusement, les ouverts et les fermés en topologie générale ne passent pas à la limite ensembliste !

**Exercice 1**

Que dire d'une topologie dont les axiomes permettraient la stabilité par intersection quelconque d'ouverts ?

▷ **Éléments de réponse.**

On aurait alors la stabilité par réunion quelconque de fermés... Dans le cas où les singletons sont fermés, cela donne une topologie nécessairement grossière. Mais ce n'est pas forcément le cas (exemple?). Avec les lois de Morgan, on parvient à la même conclusion avec un peu plus de travail sur les ensembles.

Remarquons que les intersections croissantes et les réunions décroissantes sont tout à fait dépourvues d'intérêt (pourquoi?).

**Exercice 2**

1. Donner un exemple d'une intersection décroissante d'ouverts qui n'est pas ouverte.
2. Donner un exemple d'une réunion croissante de fermés qui n'est pas fermée.

**Propriété. (*Somme d'ouverts*)**

Dans un evn, la somme de deux ouverts est ouverte.

▷ Soient  $A, B$  deux ouverts. Alors  $A + B = \bigcup_{a \in A} \tau_a(B)$  où la translation  $\tau_b$  est un homéomorphisme. ■

**3.1.2 Voisinages**

**Mnémonik :** les ouverts sont exactement les ensembles qui sont voisinage d'eux-mêmes.

### 3.1.3 Comparaison de topologies

#### 3.1.3.1 Ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble

##### Définition. (*Finesse, grossièreté*)

Soient  $E$  un ensemble et  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  deux topologies sur  $E$ , définies au moyen des ouverts.

- Si  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ , on dit que  $\mathcal{T}_1$  est *moins fine* ou *plus grossière* que  $\mathcal{T}_2$ .
- Si  $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ , on dit que  $\mathcal{T}_1$  est *plus fine* ou *moins grossière* que  $\mathcal{T}_2$ .

##### Heuristique

On a vu qu'une topologie est d'autant plus fine qu'elle contient beaucoup d'ouverts (ou beaucoup de fermés). Intuitivement, on peut penser les ouverts comme des patrons dont on connaît la grandeur et que l'on peut calculer sur l'espace, voir si des points leurs appartiennent, pour approximer la distance entre eux. Une topologie est plus fine qu'une autre si elle contient plus d'ouverts, autrement dit si le patronnage est plus détaillé.

##### Propriété. (*Caractérisation de la finesse par la continuité*)

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  deux topologies sur  $X$ . Alors  $\mathcal{O}_1$  est plus fine que  $\mathcal{O}_2$  si et seulement si  $id : (X, \mathcal{O}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_2)$  est continue.

#### 3.1.3.2 Topologies minimales et maximales

##### Définition. (*Minimalité d'une topologie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $P$  un prédictat sur  $\mathcal{P}(X)$ . Alors la topologie minimale sur  $X$  vérifiant  $P$ , si elle existe, est la topologie la moins fine sur  $X$  vérifiant  $P$ .

*Remarque.* Si  $P = \top$ , la topologie  $\top$ -minimale sur  $X$  est la topologie grossière.

Dualemment :

##### Définition. (*Maximalité d'une topologie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $P$  un prédictat sur  $\mathcal{P}(X)$ . Alors la topologie maximale sur  $X$  vérifiant  $P$ , si elle existe, est la topologie la plus fine sur  $X$  vérifiant  $P$ .

*Remarque.* Si  $P = \perp$ , la topologie  $\perp$ -maximale sur  $X$  est la topologie discrète.

### 3.1.4 Bases d'une topologie, axiomes de dénombrabilité

#### 3.1.4.1 Réseaux topologiques

#### 3.1.4.2 Base d'ouverts

*Remarque.* Toute base est évidemment une prébase.

#### Fait. (*Construire une base à partir d'une pré-base*)

Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique et  $E \subseteq \mathcal{T}$ . Soit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $E$ . Alors  $E$  est une prébase de  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{T}$ .

#### Fait

Tout espace topologique admet des bases.

#### Propriété. (*Caractérisation des bases topologiques*)

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace topologique. Soit  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Alors  $\mathcal{B}$  est une prébase de  $\mathcal{T}$  si et seulement si :

1.  $\mathcal{B}$  est un recouvrement de  $X$ ,
2. l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{B}$  s'écrit toujours comme réunion (quelconque) d'éléments de  $\mathcal{B}$ .

#### Méthode. (*Montrer qu'un truc est la base d'une topologie*)

Soit  $P$  une partie d'un espace topologique  $X$ . Alors pour que l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $P$  soit une base de la topologie de  $X$ , il suffit que  $P$  recouvre  $X$ .

#### Propriété. (*Critère pour qu'une pré-base soit une base*)

Soit  $X$  un ensemble,  $\mathcal{B}$  une partie de l'ensemble des parties de  $X$  telle que  $\bigcup \mathcal{B} = X$ . On suppose :

$$\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad x \in W \subseteq U \cap V.$$

Alors l'ensemble des unions d'éléments de  $\mathcal{B}$  est la topologie engendrée par  $\mathcal{B}$ . En particulier,  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

La notion de base est utile, car elle permet de montrer une propriété à vérifier sur tous les ouverts au moyen d'une collection réduite de ceux-ci. Donnons une illustration.

**Méthode. (*Montrer une densité grâce à une base*)**

Pour montrer que  $A$  est dense, il suffit de montrer que l'intersection de  $A$  avec tout ouvert d'une base est habitée. Ceci permet donc de montrer que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . En fait, dans un espace métrique, c'est désuet : tout ouvert contient déjà une boule ouverte.

On démontre le lemme suivant, très utile :

**Théorème. (*Lemme de Lindelöf*)**

Tout espace à base dénombrable est de Lindelöf, c'est-à-dire : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement dénombrable.

▷ Soit  $\mathcal{B} = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de l'espace  $X$ . Soit  $\mathcal{O}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Pour tout  $x \in X$ , il existe  $\omega \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \omega$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est une base, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in \omega_i \subseteq \omega$ . Intuitivement, nous n'avons pas besoin de tous les éléments de  $\mathcal{O}$ , mais de seulement ceux qui contiennent un élément de  $\mathcal{B}$ , et dans ce cas, un seul élément de  $\mathcal{O}$  par élément de  $\mathcal{B}$  est nécessairement, clairement. De façon constructive, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega_i$  soit inclus dans un élément de  $\mathcal{O}$ , choisissons  $\Omega_i \in \mathcal{O}$  tel que  $\omega_i \subseteq \Omega_i$ . Pour conclure, l'ensemble  $\{\Omega_i, i \in I\}$  est un sous-ensemble dénombrable de  $\mathcal{O}$ . C'est un recouvrement. ■

**3.1.4.3 Base de voisinages****Définition. (*Base de voisinages d'un point*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . Une *base de voisinages* ou *système fondamental de voisinages* de  $x$  est un ensemble  $\mathcal{B}_x$  de voisinages de  $x$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $U \in \mathcal{B}_x$  tel que  $U \subseteq V$ .

On peut énoncer des propriétés similaires aux précédentes et créer un lien entre base d'ouverts et base de voisinages.

**Exercice 3**

Donner un exemple d'espace séparable qui n'est pas à bases dénombrables de voisinages.

▷ **Éléments de réponse.**

La topologie cofinie sur  $\mathbb{R}$  convient.

### 3.1.4.4 Axiomes de dénombrabilité

### 3.1.4.5 Séparabilité

La séparabilité est une notion un peu isolée mais tout à fait abordable dans les petites classes. Elle prend tout son sens dans le cadre des axiomes de dénombrabilité.



Ceci n'a rien à voir avec la notion de séparation !

#### Exercice 4 (*Un petit peu de clarté d'esprit*)

On vérifie l'assertion précédente.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparé non séparable.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable non séparé.

▷ Éléments de réponse.

$\ell^\infty$  n'est pas séparable (c'est bien connu), mais séparé, car métrique, puisque c'est un espace vectoriel normé !

Réciproquement, la topologie grossière sur  $\mathbb{Q}$  n'est pas séparé, mais clairement séparable.

#### Exercice 5 (*Non-affaiblissement des hypothèses*)

On montre que la réciproque repose véritablement sur la forme des ouverts, à savoir des boules.

1. Donner un exemple d'espace topologique séparable qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
2. Donner un exemple d'espace topologique séparable, qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité mais pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

▷ Éléments de réponse.

Pour le deuxième exemple, qui transcende le premier, il faut creuser un peu. Le lecteur intéressé pourra se pencher sur la construction de la droite de Sorgenfrey ou encore l'espace de Helly.

#### Méthode. (*Pour montrer qu'un espace n'est pas séparable*)

On veut montrer que  $E$  n'est pas séparable, autrement dit, qu'il n'admet aucune partie dénombrable dense. On cherche une famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints indexée par un ensemble indénombrable  $I$ . Dans ce cas, une partie dense  $A$  doit rencontrer chacun d'eux, d'où une injection d'un indénombrable  $I$  dans  $A$ , qui n'est pas dénombrable. Ainsi, aucune partie dense de  $E$  n'est dénombrable (ou aucune partie dénombrable n'est dense ;), donc  $E$  n'est pas séparable.

**Propriété. (*Produit d'espaces séparables*)**

Tout produit d'espaces séparables est séparable.

▷ Pour chaque  $X_i$ , soit  $A_i$  dénombrable dense. Alors le produit des  $A_i$  est dense par propriété de l'adhérence d'un produit (même infini). ■

### 3.1.5 Adhérence, intérieur, frontière

Ainsi l'adhérence et l'intérieur sont des ensembles extrémaux. En particulier, ils définissent des opérateurs de clôture.

**Lemme**

Une application constante sur une partie d'un espace topologique  $X$  est constante sur son adhérence.

#### 3.1.5.1 Frontière ou bord

**Propriété. (*Caractérisation de la frontière dans un espace métrique*)**

Soit  $A$  une partie d'un espace métrique  $E$ . Alors  $x \in \text{Fr}(A) \iff \exists \rho > 0 \ B(x, \rho) \cap A, B(x, \rho) \cap \complement_E A \neq \emptyset$ .

#### 3.1.5.2 Points limites, points d'accumulation, isolation

#### 3.1.5.3 Densité

#### 3.1.5.4 Adhérence et intérieur dans le produit

**Propriété. (*Adhérence, intérieur d'un produit*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques. Soient  $A_i$  une partie de  $X_i$  pour tout  $i$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  autres espaces topologiques. Soient  $A_1, \dots, A_n$  des parties respectives de ces espaces.

1.  $\overline{A_1 \times \dots \times A_n} = \overline{A_1} \times \dots \times \overline{A_n}$ .
2.  $(\overset{\circ}{A_1} \times \dots \times A_n) = \overset{\circ}{A_1} \times \dots \times \overset{\circ}{A_n}$ .
3.  $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$ .
4. On n'a pas de propriété similaire pour le produit.

### 3.1.5.5 Aspects combinatoires de la dualité intérieur-adhérence

#### Méthode. (*Définition d'une topologie par les adhérences*)

Dans un ensemble  $E$ , toute application  $\dashv$  de  $\mathcal{P}(E)$  dans lui-même vérifiant pour toutes parties  $X, Y$  de  $E$  :

1.  $X \subseteq \overline{X}$ ;
2.  $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ ;
3.  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ ;
4.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ;

permet de définir une topologie sur  $E$  dont les fermés sont les parties  $X$  telles que  $X = \overline{X}$  et donc  $\dashv$  est l'adhérence.

▷ Seule la propriété d'intersection est à démontrer : elle vient de la croissance de l'opérateur  $\dashv$  qui se déduit des axiomes précédents comme tout opérateur de préclôture. Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des fermés. Soit  $i \in I$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} X_i \subseteq X_i$ , d'où  $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \overline{X_i} = X_i$ , d'où  $\overline{\bigcap_{i \in I} X_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$  en passant à l'intersection sur  $I$  d'où l'égalité. ■

#### Propriété. (*Idempotence de $\text{Adh} \circ \text{Int}$* )

Soit  $E$  un espace topologique. Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

▷ On a, puisque l'intérieur est plus petit que la partie,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$ . Par croissance de l'adhérence,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$  par idempotence de l'adhérence. Réciproquement, puisque l'adhérence est plus grand que la partie,  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overline{A}$  puis par croissante de l'intérieur,  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A} \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}}$  et enfin, par croissante de l'adhérence,  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}} = \overline{A}$ . ■

#### Propriété. (*Idempotence de $\text{Int} \circ \text{Adh}$* )

Soit  $E$  un espace topologique. Pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$ .

▷ S'obtient grâce à la dualité adhérence-intérieur donnée par le passage au complémentaire. ■

Avec les mêmes arguments (et même moins élaborés), on obtient :

#### Propriété

Soit  $E$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$ .

**Propriété**

Soit  $E$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$ .

**Propriété**

De plus,  $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$ .

**Propriété**

De plus,  $\overline{\overset{\circ}{A}} \subseteq \overline{A}$ .

**Contre-exemple.** (*L'inclusion peut être stricte.*)

Il suffit de considérer  $E = \mathbb{R}$  et  $A = \mathbb{R}^*$ . □

### 3.1.6 Applications continues

#### 3.1.6.1 Continuité globale



Remarquer que la continuité sur une partie dépend de la topologie induite (ce qui ne pose pas de problème, car elle est canonique).

**Exemple.** (*Très classique*)

L'exponentielle de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  muni de leurs topologies métriques éventuellement induites, est un homéomorphisme, mais pas une isométrie (elle ne préserve pas toutes les distances).

**Propriété**

Soit  $X$  un espace discret et  $Y$  un espace topologique quelconque. Alors toute application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue.

**Propriété**

Soit  $X$  un espace topologique quelconque et  $Y$  un espace grossier. Alors toute application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue.

**Exercice 6**

L'image d'une pré-image d'un ouvert par une application continue est-elle ouverte ?

▷ Éléments de réponse.

Non ! Mais c'est un ouvert de l'image, au vu de la formule pour l'image d'une préimage. Pour fournir un contre-exemple, considérer  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.1.6.2 Continuité en un point

#### Définition. (*Continuité locale*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $x_0$  si pour tout voisinage  $V$  de  $f(x_0)$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $x_0$ .

De façon équivalente, pour tout voisinage  $V$  de  $f(x_0)$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x_0$  tel que  $f(W) \subseteq V$ .

#### Théorème

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $A \subseteq X$ . Une application de  $X \rightarrow Y$  est continue sur  $A$  si et seulement si elle est continue en tout point de  $A$  (ouf).

▷ Supposons  $f$  continue sur  $A$ . Soit  $x \in A$ . Soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ ; il contient un ouvert  $U$  contenant  $f(x)$ . Par continuité,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $A$ . Clairement, il contient  $x$ . Or  $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$  ensemblistement, donc  $f^{-1}(V)$  contient un ouvert contenant  $x$ , donc c'est un voisinage de  $x$ .

Réciproquement, supposons  $f$  continue en tout point de  $A$ . Soit  $U$  un ouvert de  $Y$ . Posons  $O = f^{-1}(U)$  et montrons que  $O$  est un ouvert de  $A$ , autrement dit, montrons que  $O$  est voisinage de chacun de ses points. Soit  $x \in O$ , c'est-à-dire  $f(x) \in U$ . Alors  $U$  est ouvert, donc c'est un voisinage de  $f(x)$ . Ainsi  $f^{-1}(U)$  est un voisinage de  $x$ , donc  $O$  est un voisinage de  $x$ , et c'est terminé. ■

### 3.1.6.3 Homéomorphismes

#### Propriété. (*Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une bijection continue. Alors  $f$  est un homéomorphisme, si et seulement si,  $f$  est ouverte, si et seulement si,  $f$  est fermée.

▷ En effet, si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}(f(O)) = O$  pour toute partie  $O$  de  $Y$ . ■

#### Propriété. (*Caractérisation des homéomorphismes parmi les bijections continues*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une bijection continue. Alors  $f$  est un homéomorphisme, si et seulement si,  $f$  est ouverte, si et seulement si,  $f$  est fermée.

**Exercice 7**

Soit  $f$  une surjection ouverte. Existe-t-il toujours une section continue de  $f$ ? Soit  $f$  une injection ouverte. Existe-t-il toujours une rétraction continue de  $f$ ?

**3.1.7 Irréductibilité d'un espace topologique**

Voici une notion un peu étonnante qui sera principalement utile à l'heure des fondements de la géométrie algébrique.

**Définition. (*Espace topologique noethérien*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés de  $X$  est stationnaire.

**Propriété. (*Fermé d'un noethérien*)**

Tout sous-espace fermé d'un espace noethérien est noethérien.

**Propriété. (*Caractérisation des espaces noethériens par les ouverts*)**

Un espace topologique  $X$  est noethérien, si et seulement si, tout ouvert de  $X$  est quasi-compact.

▷ Soit  $X$  un espace noethérien, soit  $O$  un ouvert de  $X$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  ouverts de  $X$  qui recouvrent  $O \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ . Si  $I$  est fini, il n'y a rien à faire. Sinon,  $I$  est infini. Il contient une copie de  $\mathbb{N}$ . Si  $U_1$  recouvre  $O$ , c'est encore terminé. Sinon, il existe  $x \notin U_1$ ,  $x \in O$ , et  $x$  dans un certain  $U_i$ , qui quitte à re-numéroter, est  $U_2$ . Si  $U_1 \cup U_2$  recouvre  $O$ , c'est terminé. Sinon, on ré-itère le processus, de sorte que l'on obtient une suite strictement décroissante, grâce au point discriminé à chaque étape, de fermés  $\complement_X(U_1 \cup \dots \cup U_n)$ , mais c'est impossible, car  $X$  est noethérien ; donc le processus s'arrête et  $U_1, \dots, U_N$  recouvrent  $O$  pour un certain  $N$ , d'où la quasi-compacité.

Réciproquement, soit  $(F_n)$  une suite décroissante de fermés de  $X$ . Alors  $(O_n = \complement_X F_n)$  est une suite croissante d'ouverts de  $X$ . Sa réunion  $O$  est un ouvert de  $X$ . En particulier, il est quasi compact, donc il existe un  $N$  tel que  $O_1, \dots, O_N$  recouvre  $O$ . Par les propriétés basiques de la réunion, pour tout  $i > N$ ,  $O_i$  est inclus dans l'un des  $O_i$ , et par monotonie de  $(O_n)_n$ , on a  $O_i = O_N$ . Donc  $(O_n)$  est stationnaire, donc  $(F_n)$  est stationnaire. ■

**Heuristique**

On a donc là affaire à des topologies dont nous n'avons pas l'habitude. En particulier, elles ont peu de chances d'être séparées (pourquoi?).

**Définition. (*Espace topologique irréductible*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *irréductible* si  $X$  est vide ou si l'on ne peut pas écrire  $X = F_1 \cup F_2$  où  $F_1, F_2$  où  $F_1, F_2$  sont deux fermés (non nécessairement disjoints !) distincts de  $X$ .

**Propriété. (*Caractérisation des espaces irréductibles*)**

Un espace topologique  $X$  est irréductible, si et seulement si, pour tous ouverts non vides  $U, V$ , leur intersection  $U \cap V$  est non vide; autrement dit, si tout ouvert non vide est dense.

▷ Provient directement de la définition en passant au complémentaire sur  $X = F_1 \cup F_2$ ,  $F_1, F_2 \subsetneq X$ . ■

**Exemples. (*Espaces irréductibles*)**

1. L'espace vide est irréductible.
2. Tout singleton est irréductible.
3. Un ensemble fini de points du plan muni de la topologie induite par la topologie usuelle n'est pas irréductible.
4.  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ... ne sont pas irréductibles ; ils s'écrivent comme la réunion de deux demi-plans fermés respectivement réels et complexes.
5. Un ensemble algébrique déterminé par l'idéal engendré par un polynôme irréductible, muni de la topologie de Zariski, est un ensemble irréductible.
6. Munie de la topologie usuelle, une droite du plan  $\mathbb{R}^2$  n'est pas irréductible, mais munie de la topologie de Zariski, si.

**Proposition. (*Décomposition en composantes irréductibles*)**

Soit  $X$  un espace topologique noethérien. Alors on peut écrire  $X$  comme réunion finie de fermés irréductibles, décomposition unique à l'ordre près des facteurs si l'on impose qu'il n'y a aucune inclusion réciproque entre eux. De plus, ces composantes sont les fermés irréductibles de  $X$  maximaux pour l'inclusion.

▷ On raisonne par récurrence noethérienne : soit  $\Phi$  l'ensemble des fermés  $F \subseteq X$  tel que  $P(F)$  est fausse où  $P(F)$  : «  $F$  peut s'écrire comme réunion finie de fermés distincts irréductibles ». Supposons  $\Phi \neq \emptyset$ . Alors puisque  $X$  est noethérien, il existe  $F \in \Phi$ , minimal pour  $\subseteq$ . Comme  $P(F)$  est fausse,  $F$  n'est pas irréductible, dont on peut écrire  $F = F' \cup F''$  où  $F', F'' \subsetneq F$  sont fermés. Par minimalité de  $F$ ,  $F' \notin \Phi$  et  $F'' \notin \Phi$  donc  $P(F')$  et  $P(F'')$  sont vraies. Ainsi  $F'$  et  $F''$  admettent des décompositions, donc  $F$  aussi en prenant la réunion de celles-ci, donc  $P(F)$  est vraie. Absurde. Donc  $\Phi$  est vide, en particulier  $P(X)$  est vraie. La remarque finale vient alors tout naturellement d'après les définitions posées.

Pour l'unicité des composantes irréductibles : si l'on a deux décompositions, l'inclusion de l'une dans l'autre envoie chaque composante de la première dans une de la seconde ; en effet, une composante de la première qui serait envoyée à cheval sur plusieurs de l'autre ne serait pas irréductible, elle s'écrirait comme union d'un nombre fini de fermés (son intersection avec les composantes de la deuxième décomposition). Mais les composantes sont les irréductibles maximaux pour l'inclusion, d'où l'égalité. ■

### Proposition

Soit  $X$  un espace topologique qui admette un recouvrement ouvert fini par des sous-espaces noethériens. Alors  $X$  est noethérien.

▷ Il suffit d'appliquer la caractérisation duale (par les ouverts) d'espace noethérien et la suite vient naturellement par *divide et impera*. ■

## 3.2 Constructions de topologies

**S**YSTÉMATIQUEMENT, en construisant une nouvelle topologie à partir d'espaces topologiques donnés, nous cherchons :

- ★ à caractériser la topologie en fonction d'applications liant l'espace topologique de départ au nouveau, typiquement, projection ou inclusion,
- ★ à décrire explicitement les ouverts de la topologie,
- ★ à caractériser la continuité d'applications définies sur ou vers le nouvel espace considéré.

### 3.2.1 Topologie engendrée

#### Définition-propriété. (*Topologie engendrée par une partie*)

Soit  $X$  un ensemble et  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Alors l'intersection de toutes les topologies sur  $X$  contenant  $\Sigma$  est appelée *topologie engendrée* par  $\Sigma$  sur  $X$ . C'est la topologie la moins fine sur  $X$  telle que toute partie de  $\Sigma$  soit un ouvert.

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie engendrée*)

Soient  $X$  un ensemble et  $\Sigma$  une partie de  $X$ . Alors les ouverts de  $\langle \Sigma \rangle$  sont exactement les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de  $\Sigma$ .

▷ Par définition d'une topologie, une telle partie doit être ouverte. Réciproquement, par définition d'une topologie, une topologie doit contenir toutes les parties ouvertes. La proposition est démontrée. ■

**Remarque importante.** Par les propriétés de distributivités généralisées (*exercice*), il revient au même de dire que ce sont les intersections finies de réunions quelconques d'éléments de  $\Sigma$ .

**Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie engendrée*)**

Soient  $Y$  un espace topologique et  $\Sigma$  une partie de  $Y$  qui engendre la topologie de  $Y$ . Soit  $X$  un espace topologique. Alors si c'est définissable, une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si l'application  $f : X \rightarrow \Sigma$  est continue.

### 3.2.2 Topologie initiale

**Définition-propriété. (*Topologie initiale associée à une famille d'applications*)**

Soit  $X$  un ensemble et  $(Y_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout  $i \in I$ , une application  $f_i : X \rightarrow \mathcal{O}_i$ . On appelle *topologie initiale* associée aux  $(f_i)$ , ou *topologie engendrée par les  $f_i$* , la topologie la moins fine sur  $X$  qui rende toutes les applications  $f_i, i \in I$ , continues.

**Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie initiale*)**

La topologie initiale sur  $X$  engendrée par les  $f_i : X \rightarrow Y$  est la topologie engendrée (strictement) par les  $f_i^{-1}(U)$  pour  $U$  ouvert de  $\mathcal{O}_i$ , pour  $i$  parcourant  $I$ .

▷ Il est clair qu'une topologie rendant toutes les  $f_i$  continues contient toutes ces parties. Par minimalité de la topologie engendrée, on a le résultat. ■

**Propriété. (*Continuité des applications sous la topologie initiale*)**

On reprend les notations précédentes ; soit également  $Z$  un espace topologique et  $g : Z \rightarrow X$  une application. Alors  $g$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $f_i \circ g \rightarrow Y_i$  est continue.

▷ Le sens direct vient d'une simple composition d'applications continues. Pour le sens réciproque, soit  $U$  un ouvert de  $X$ , et il suffit de vérifier la condition dans le cas où  $U$  est dans une prébase de  $X$ . Puisque d'après la proposition précédente, une telle prébase est donnée par les  $f_i^{-1}(\Omega)$ , il existe  $i \in I$  et  $\Omega \in \mathcal{O}_i$  tel que  $U = f_i^{-1}(\Omega)$ . Alors  $g^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i \circ g)^{-1}(\Omega)$  ensemblistement, ouvert de  $Z$  par hypothèse. ■

Signalons les propriétés secondaires suivantes :

- Si  $\mathcal{B}_i$  est une base d'ouverts de  $Y_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$  est une prébase de  $X$ .
- Si  $x \in X$  et  $\mathcal{V}_i$  est une base de voisinages de  $f_i(x)$  pour tout  $i \in I$ , alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de  $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$  est un système fondamental de voisinages du point  $x$ .

Les topologies induite et produit sont des exemples fondamentaux de topologies initiales.

### 3.2.3 Topologie induite

Dans ce cas spécial, on retourne le procédé habituel.

#### Définition. (*Topologie induite à un sous-espace topologique*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . Alors la *topologie induite* (de  $X$ ) sur  $A$  est la topologie sur  $A$  donc les ouverts sont les  $A \cap U$  où  $U$  décrit l'ensemble des ouverts de  $X$ .

▷ C'est simple à faire par le calcul par associativité simple des opérations ensemblistes, mais il est plus judicieux d'attendre la caractérisation suivante qui fait le job. ■

#### Propriété. (*Caractérisation abstraite de la topologie induite*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . Alors la topologie induite sur  $A$  est la topologie la moins fine rendant l'inclusion canonique  $\iota : A \hookrightarrow X$  continue ; autrement dit, c'est la topologie initiale associée à  $(\iota, X)$ .

▷ Par définition de la topologie induite, si  $U$  est un ouvert de  $X$ , alors  $\iota^{-1}(U) = U \cap A$  est un ouvert de  $A$ . Réciproquement, vérifions que l'ensemble des parties de cette forme est déjà une topologie. Elle contient  $\emptyset$  et  $A$ . Elle est stable par réunion quelconque par distributivité et par intersection finie (en fait, quelconque) de même. ■

#### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie initiale*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors pour toute partie  $A \subseteq X$ , la restriction  $f : A \rightarrow Y$  est continue.

▷ Immédiat. ■



Il est clair que la réciproque est fausse en fixant  $A$  !

On énonce également :

#### Propriété. (*Propriété universelle de la topologie induite*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie de  $X$ . La topologie induite est la topologie minimale sur  $A$  qui rend l'inclusion canonique continue.



Un ouvert pour la topologie induite n'a aucune raison d'être un ouvert dans le grand espace.

La topologie induite est la topologie *sous un certain angle*, celui du sous-espace.

### 3.2.4 Topologie finale

#### Définition-propriété. (*Topologie finale associée à une famille d'applications*)

Soit  $Y$  un ensemble et  $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Soient pour tout  $i \in I$ , une application  $f_i : X_i \rightarrow Y$ . On appelle *topologie finale* associée aux  $(f_i)$ , la topologie sur  $X$  la plus fine qui rende toutes les applications  $f_i, i \in I$ , continues.

*Remarque.* Pour la topologie initiale, où l'on construisait une topologie sur la source, on demandait une topologie minimale ; dans le cas de la topologie finale, on demande une topologie la plus fine. En fait, c'est cohérent : pour rendre des applications données continues, il y a deux manières : soit l'on enlève des ouverts à l'arrivée, soit l'on en rajoute à la source.

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts dans la topologie finale*)

Un ensemble  $U \subseteq Y$  est ouvert si et seulement si  $f_i^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X_i$  pour tout  $i \in I$ .

▷ On note  $\mathcal{O}_Y$  la topologie finale sur  $Y$ . Soit  $U \subseteq Y$  tel que  $f_i^{-1}$  soit un ouvert des  $X_i$ . Alors  $\mathcal{O}_U = \{\emptyset, Y, U\}$  est une topologie sur  $Y$  telle que chacune des  $f_i$  est continue. Par définition,  $U \in \mathcal{O}_Y$ . Ceci suffit. ■

*Remarque.* C'est bien plus restrictif qu'avec la topologie initiale. Ceci explique en partie que tout se passe bien pour les topologies produits, mais mal en général dans les topologies quotients.

#### Propriété. (*Continuité des applications sous la topologie finale*)

On reprend les notations précédentes ; soit également  $Z$  un espace topologique et  $g : Y \rightarrow Z$  une application. Alors  $g$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $g \circ f_i : X_i \rightarrow Z$  est continue.

▷ Réciproquement, si  $g : Y \rightarrow Z$  est telle que  $g \circ f_i$  est continue, soit  $U$  un ouvert de  $Z$ . On a  $f_i^{-1}(g^{-1}(U))$  ouvert des  $X_i$ . Ainsi  $g^{-1}(U)$  est un ouvert dans  $Y$ , donc  $g$  est continue. ■

Les topologies somme et quotient sont des exemples fondamentaux de topologies finales.

### 3.2.5 Topologie faible

#### Définition-propriété. (*Topologie faible*)

Soit  $X$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$ . On suppose que chaque  $X_i$  est muni d'une topologie  $\mathcal{O}_i$  et l'on note  $f_i : X_i \longrightarrow X$  l'inclusion. La topologie finale sur  $X$  définie par les  $(f_i)_{i \in I}$  est appelée *topologie faible* définie par  $(X_i)_{i \in I}$ .

#### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie faible*)

On reprend les notations précédentes. Alors  $F \subseteq X$  est fermé (resp. ouvert) dans  $X$  pour la topologie faible si et seulement pour tout  $i \in I$ ,  $F \cap X_i$  est fermé (resp. ouvert) dans  $(X_i, \mathcal{O}_i)$ .

Autrement dit, la topologie faible est la topologie la plus fine qui induise toutes les topologies des  $X_i$ .

#### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie faible*)

Pour tout espace topologique  $Y$ , une application  $f : X \longrightarrow Y$  est continue si et seulement si sa restriction  $f_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$  est continue pour tout  $i \in I$ .

#### Exercice 8

Montrons que  $X$  est discret si et seulement si sa topologie est la topologie faible définie par les singletons. Montrer que cette condition est équivalente à ce que la projection canonique  $\coprod_{x \in X} \{x\} \longrightarrow X$  soit un homéomorphisme.

#### Définition. (*Colimite topologique*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La *colimite* de la famille  $X$  est l'espace topologique sur l'ensemble  $\bigcup_{i \in I} X_i = X^{\text{col}}$  muni de la topologie faible définie par  $(X_i)_{i \in I}$ , ou encore la topologie finale associée aux inclusions canoniques  $j_i : X_i \rightarrow X^{\text{col}}, i \in I$ .

Ainsi,  $U \subseteq \bigcup X$  est ouvert si et seulement si  $U \cap X_i$  est ouvert dans  $X_i$  pour tout  $i \in I$ .

*Remarque.* Le cas où  $I = \mathbb{N}$  et  $X_n \subseteq X_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  est particulièrement utilisé. Attention alors : il ne s'agit pas de la topologie réunion disjointe, ni d'ailleurs de la topologie faible associée aux inclusions canoniques  $\iota_n : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  (ça ne voudrait rien dire!). Dans ce cas particulier, on parle également de *topologie « (en) tour »*.

L'exemple suivant est vraiment subtil.

### Contre-exemple. (*Topologies colimite et réunion d'une tour*)

La topologie colimite sur la tour ne coïncide pas nécessairement avec la topologie de la réunion lorsque plongée dans un espace au préalable.

Considérons  $X = \mathbb{N}$  munie de la topologie cofinie. On considère les  $X_n = [\![0, n]\!] \subseteq \mathbb{N}$ . La topologie induite sur chaque  $X_n$  est la topologie discrète. On montre aisément que la colimite topologique des  $X_n$ , qui est  $\mathbb{N}$ , porte également la topologie discrète, c'est donc  $(X, discret)$ . Cependant, la réunion des  $X_n$  dans  $(X, cofinie)$  vaut  $X$  et est donc naturellement  $(X, cofinie)$ , ce que l'on peut voir si l'on est tâillon comme la topologie induite par  $X$  sur...  $X$ .  $\square$

### Exemple fondamental. (*Espaces projectifs infinis*)

L'espace projectif réel infini  $\mathbb{RP}^\infty = \mathbb{PR}^\infty$  est la limite directe  $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{RP}^n$  munie de la topologie colimite associée aux inclusions canoniques  $\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

L'espace projectif complexe infini  $\mathbb{CP}^\infty = \mathbb{PC}^\infty$  est la limite directe  $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{CP}^n$  munie de la topologie colimite associée aux inclusions canoniques  $\mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 3.2.6 Topologie somme

On continue notre litanie de définitions.

### Définition-propriété. (*Somme topologique*)

Soit  $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. La somme  $\bigoplus_{i \in I} (X_i, \mathcal{T}_i)$  est la réunion disjointe  $\bigsqcup_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$  munie de la topologie la plus fine qui rend chaque injection canonique continue, autrement dit, la topologie finale pour les inclusions canoniques.

*Remarque.* Dans ce cas, contrairement à la topologie produit, ce n'est plus la topologie engendrée par (...) mais littéralement la topologie dont les ouverts sont les sommes disjointes d'ouverts : même constat que pour la topologie induite.

Les conséquences sont grandes.

#### Propriété

Les inclusions canoniques dans la somme topologiques sont ouvertes et fermées.

### Propriété. (*Caractérisation des ouverts de la topologie somme*)

La topologie somme  $\mathcal{T}$  est telle que  $U \in \mathcal{T}$  si et seulement si pour tout  $i \in I$ , il existe  $U_i \in \mathcal{T}_i$  tel que  $U \cap (X_i \times \{i\}) = U_i \times \{i\}$ ; autrement, une partie est ouverte si chacune de ses traces est ouverte.

Il est clair alors que  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des  $\bigoplus_{i \in I} U_i$  pour  $U_i$  ouverts respectifs de  $\mathcal{T}_i$ .

#### Propriété. (*Applications continues sur la somme disjointe*)

Si  $X_i$  sont des espaces topologiques, on munit  $\coprod X_i$  de la topologie finale. On a  $\text{Hom}(\coprod X_i, Z) = \prod \text{Hom}(X_i, Z)$ .

▷ Ouf! ■

La topologie somme n'est jamais qu'un recollement d'espaces. La topologie est assez stable par somme, comme l'intuition le permet.

#### Proposition. (*Identification des parties d'une somme*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espace topologique. Soit  $\iota$  l'inclusion canonique de  $X_i$  dans  $\bigsqcup X$  pour un  $i \in I$ . Alors  $\iota$  est un homéomorphisme sur son image.

#### Proposition. (*Clopens d'une somme topologique*)

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espace topologique. Alors  $X_i \times \{i\}$  est un ouvert fermé de  $\bigsqcup X$ .

En particulier :

#### Fait. (*Non-connexité d'une somme topologique*)

Une somme d'espaces topologiques est non connexe dès que deux au moins des termes sont non vides.

### 3.2.7 Topologie produit

Les propriétés viennent toutes de la topologie initiale ; on les redémontre quand-même dans ces cas particuliers.

#### 3.2.7.1 Cas fini

##### Définition-propriété. (*Topologie produit fini*)

Soit  $n$  un entier naturel et  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur  $\prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$  est la topologie la moins fine qui rende les projections canonique  $p_i : \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i \longrightarrow X_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux  $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

**Propriété. (*Description de la topologie produit fini*)**

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *ouverts élémentaires* :  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ , où  $\Omega_1 \subseteq X_1, \dots, \Omega_n \subseteq X_n$  sont des ouverts respectifs de ces espaces.

Une prébase est donnée par les  $X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \Omega_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ .

▷ Conséquence du cas infini. ■

**Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie produit fini*)**

Soient  $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, Z$  des espaces topologiques. Une application  $f : Y \longrightarrow \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$  est continue.

▷ Le sens direct est clair par composition. Réciproquement, soit  $U$  un ouvert du produit. Il suffit de vérifier la condition dans le cas où  $U$  est dans une pré-base de cet espace ; ici, un ouvert élémentaire à une composante convient. Ainsi il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $U = p_i^{-1}(\Omega)$  pour  $\Omega$  ouvert de  $X_i$ . Ainsi,  $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_i^{-1}(\Omega)) = (p_i \circ f)^{-1}(\Omega)$  est un ouvert de  $Y$  car ces applications sont continues par hypothèse. ■



On n'a pas de propriétés semblables pour les applications *partant* d'un espace produit ; le calcul différentiel nous le montre assez. En particulier, pour un produit infini non plus.

**Propriété. (*Ouverture des projections*)**

Les projections sont ouvertes pour la topologie produit.

▷ On fait la preuve dans le cas général, puisqu'elle tient encore. Soit  $\prod_{i \in I} U_i$  un cylindre ouvert pour la topologie produit. Il est clair qu'à  $i$  fixé,  $p_i(\prod_{i \in I} U_i) = U_i$  est un ouvert de  $X_i$ . Puisque les cylindres forment une base, et que la réunion est stable par image réciproque, et qu'une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, le résultat tient pour n'importe quel ouvert. ■

Cette propriété tient dans le cas général, mais on ne la ré-énoncera pas.

### 3.2.7.2 Cas général

**Définition-propriété. (*Topologie produit fini*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques. Alors la topologie produit sur  $\prod_{i \in I} X_i$  est la topologie la moins fine qui rende les projections canoniques  $p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ ,  $i \in I$ , continues, autrement dit, la topologie initiale associée aux  $(p_i)_{i \in I}$ .

**Propriété. (*Description de la topologie produit*)**

La topologie produit sur un produit fini d'espaces topologiques est la topologie engendrée par les *cylindres (ouverts)* :

$\prod_{i \in I} U_i$ , où  $U_i$  est un ouvert de  $X_i$  pour tout  $i$  et il existe  $J$  fini tel que pour tout  $i \in I \setminus J$ ,

$$U_i = X_i$$

qui coïncident avec les ouverts élémentaires seulement dans le cas fini

Ils forment d'ailleurs une *base* de la topologie produit

▷ Il est nécessaire qu'une topologie rendant continue les projections canoniques contiennent les ouverts  $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(U_i)$  pour  $U_i$  ouverts de  $X_i$ ,  $J$  fini. Ces ensembles sont exactement les cylindres ouverts. Par minimalité de la topologie produit, on en déduit le résultat. ■

**Théorème. (*Produit d'ouverts d'un espace produit*)**

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Alors si  $(U_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts pour tout  $i \in I$   $U_i$  de  $X_i$ , alors  $\prod_{i \in I} U_i$  est un ouvert du produit si et seulement si  $U_i = X_i$  pour tous les  $i \in I$  sauf éventuellement un nombre fini.

**Fait**

Tout ouvert du produit contient un produit d'ouverts élémentaires. Tout voisinage d'un point du produit contient un voisinage élémentaire de ce point.

**Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie produit*)**

Soient  $(X_i)_{i \in I}, Z$  des espaces topologiques. Une application  $f : Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$  est continue si et seulement si pour tout  $i \in I$ ,  $p_i \circ f : Z \longrightarrow X_i$  est continue.

▷ Même preuve que dans le cas fini. ■

**Mnémonik :** tout se passe bien dans le produit, tout se passe mal dans le quotient.



Les propriétés vraies sur un produit d'espaces ne sont des équivalences que si l'on suppose le produit non vide, puisqu'un produit avec un terme vide est vide.

### 3.2.7.3 Convergences

#### Propriété. (*Convergence dans l'espace produit*)

Soient  $(X_i)_{i \in I}$  des espaces topologiques compacts. Soit  $(x_n = (x_{n,i})_{i \in I})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X = \prod_{i \in I} X_i$ . Soit  $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ . Alors  $(x_n)$  tend vers  $x$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ , la suite  $(x_{n,i})_n$  tend vers  $x_i$ .

▷ Le sens direct vient de la continuité des projections. Montrons le sens réciproque. Soit  $\Omega$  un ouvert contenant  $x$ . Il contient donc un cylindre  $C$  contenant  $x$ . Soient  $U_1, \dots, U_n$  les membres de ce produit non vide. Alors par hypothèse, pour tout  $i \geq n$ , il existe un rang  $N_i$  à partir duquel  $(x_{n,i})_i$  est dans  $U_i$ . Ainsi, à partir du rang  $\max N_i$ , la suite  $(x_n)$  est dans  $C$ , donc dans  $\Omega$ . ■

### 3.2.8 Topologie quotient

Il n'y a rien de compliqué, une fois qu'on a défini la topologie quotient (voir sur Wikipédia). Une *quotient map*, le terme n'ayant pas d'équivalent en français, est une application continue et ouverte : une application est ouverte, si l'image de tout ouvert est ouverte.

C'est plutôt la régularité de la topologie quotient qui pose un réel problème en topologie.

#### 3.2.8.1 Définition et propriétés premières sur les ouverts du quotient

#### Définition. (*Topologie quotient*)

Soit  $q : X \rightarrow Y$  une application surjective entre deux ensembles, où  $X$  est un espace topologique. On définit sur  $Y$  la *topologie quotient* comme étant la topologie finale associée à l'application  $q$ .

#### Fait

$U \subseteq Y$  est ouvert si et seulement si  $q^{-1}(U)$  ouvert.  $F \subseteq Y$  est fermé si et seulement si  $q^{-1}(F)$  est fermé.

#### Remarques.

1. (*Cas particulier*) Si  $R$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , la projection canonique induit une topologie sur le quotient  $X/R$  grâce à cette définition. C'est le cas que nous étudierons dès à présent.
2. (*Cas particulier du cas particulier : géométrie du caoutchouc*) Si  $A \subseteq X$ , on définit la relation d'équivalence  $xR_Ay$  si et seulement si  $x = y$  ou  $x$  et  $y \in A$ . On peut alors définir le quotient  $X/A = X/R_A$ . Cela revient heuristiquement à ramasser une partie sur un point. Cette partie est quelconque (pas forcément simplement connexe)!!!



On ne demande absolument aucune rien sur  $R$ , c'est pourquoi les quotients topologiques, qui existent donc toujours, écopent en général de propriétés minables (pour les groupes, les espaces vectoriels au contraire, la structure descend, mais on demandait des propriétés fortes avant de quotienter). C'est en exigeant des compatibilités de  $R$  quant à la topologie de  $X$  que l'on aura des propriétés acceptables pour nos topologies quotients.

### Exemples. (*Espaces topologiques quotients*)

1. Le tore est un quotient du plan par un réseau.
2. Les espaces projectifs sont des quotients d'espaces euclidiens par une relation d'équivalence.

La topologie quotient satisfait la propriété universelle suivante :

### Propriété. (*Propriété universelle des topologies quotients*)

On reprend les notations précédentes. L'application  $q : X \rightarrow X/R$  satisfait la propriété suivante : pour tout espace topologique  $Z$ , pour toute application  $f : X \rightarrow Z$  continue et constante sur les classes d'équivalence, *i.e.*  $xRy \implies f(x) = f(y)$ , alors elle descend en un unique application continue sur le quotient, autrement dit,  $\exists! \tilde{f} : X/R \rightarrow Z$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ X/R & & \end{array}$$

▷ Comme d'habitude, en oubliant la structure topologique, on a le passage au quotient ensembliste qui donne une unique application de  $X/R \rightarrow Z$  tel que le diagramme commute dans la catégorie des ensembles qui donne  $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$  de façon indépendante du choix de  $x$ . Si  $U \subseteq Z$  est ouvert,  $f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ , et  $\tilde{f}^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$  ouvert. ■

### Propriété. (*Continuité des applications pour la topologie initiale*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence. On note  $Y = X/R$ . Pour tout espace topologique  $Z$ , une application  $f : Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si, l'application  $f \circ \pi$  est continue, en notant  $\pi$  la projection canonique.

▷ Conséquence de la propriété pour la topologie finale.

Redémontrons-le pour le fun. Puisque la projection canonique est continue, le sens direct vient d'une composition d'applications continues. Réciproquement, soit  $U$  un ouvert de  $Z$ . Alors  $V = f^{-1}(U) \subseteq Y = X/R$  est ouvert si et seulement si  $\pi^{-1}(V) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$  est ouvert, ce qui est le cas si  $f \circ \pi$  est

bien supposée continue. ■

Le problème principal auquel on va se heurter, est que le quotient d'un espace séparé (ou même très régulier) n'est pas nécessairement séparé (en particulier pas métrisable). Pour cela, voir la section suivante.

### Définition. (*Saturation d'un ouvert*)

Soit  $E \subseteq X$ , le *saturé* de  $E$  est :

$$RE = \{y \in X, \exists x \in E, xRy\} = \bigcup_{x \in E} \bar{x} = q^{-1}(q(E)).$$

On dit que  $E$  est *saturé* si  $RE = E$ . Autrement dit, il existe  $A \subseteq X/R$  tel que  $E = q^{-1}(A)$ <sup>a</sup>. Ceci revient encore à dire que  $E$  contient tous les éléments équivalents à ses éléments.

---

<sup>a</sup> Le sens direct est donné par l'une des expressions ci-dessous. Réciproquement, toute partie de la forme  $q^{-1}(A)$  est saturé, car si  $\bar{x} \in A$  et  $y \sim x$ ,  $\bar{y} = \bar{x} \in A$  également.

*Toutes les choses qu'on voudraient vraies ne sont pas vraies, mais elles le deviennent si l'on rajoute saturé derrière.*

### Propriété. (*Images des ouverts dans le quotient*)

1. Si  $O$  est un ouvert saturé dans  $X$ , alors  $q(O)$  est ouvert dans  $X/R$ .
2. Si  $F$  est fermé et saturé dans  $X$ , alors  $q(F)$  est fermé dans  $X/R$ .

▷ On a que  $RO = q^{-1}(q(O))$ . Si  $O$  est saturé,  $RO = O = q^{-1}(q(O))$ . Ainsi  $O$  est ouvert si et seulement si  $q(O)$  l'est. Le deuxième point est identique. ■

En général, l'hypothèse *saturé* ne peut être omise.

### Contre-exemple. (*Projection quotient non ouverte*)

On considère la relation sur le tore  $\mathbb{T}^2$  définie par  $x' \sim y'$  s'il existe une droite  $D$  de pente  $\alpha$  joignant  $x$  à  $y$  et tels que  $\pi(x) = x'$  et  $\pi(y) = y'$ . On peut vérifier que si  $\alpha$  est rationnel ou infini,  $\pi(D)$  est un cercle, et sinon, son image est dense dans le tore et  $\pi$  induit une bijection continue sur son image, qui n'est pas un homéomorphisme. L'espace quotient est séparé si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ; dans le cas contraire, la topologie quotient est grossière. Naturellement, cet exemple convient, puisqu'on peut exhiber des ouverts dont l'image sur le tore ne l'est plus. □

En général, il est trop fort de demander que tout ouvert soit saturé.

### 3.2.8.2 Séparation des quotients

Les propriétés topologiques se conservent pas produit, même si, dans le cas infini, les preuves ne sont pas toujours évidentes. Par contre, elles sont extrêmement instable pour ce qu'il s'agit du quotient. En particulier, le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un réflexe.

Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On rappelle qu'un espace est séparé si et seulement si sa diagonale est fermée dans son carré topologique.

#### Propriété. (*Condition nécessaire de séparation du quotient*)

Si  $X/\mathcal{R}$  est séparé, alors le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X \times X$ .

▷ En effet,  $\Gamma_{\mathcal{R}} = q^{-1} \times q^{-1}(\Delta_{X/\mathcal{R}})$ . ■

#### Propriété. (*Réciproque partielle à la propriété précédente*)

Si le graphe de  $\mathcal{R}$  est fermé dans  $X \times X$  et si  $q$  est ouverte, alors  $X/\mathcal{R}$  est séparé.

▷ Si  $q$  est ouverte,  $q \times q(X \times X \setminus \Gamma_{\mathcal{R}}) = (X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R}) \setminus \Delta_{X/\mathcal{R}}$  est ouvert. Ainsi,  $\Delta_{X/\mathcal{R}}$  est fermée, donc  $X/\mathcal{R}$  est séparé. ■

*Remarque.* En toute généralité, un espace non séparé peut se quotienter en un espace séparé : prendre une espace non séparé et l'écraser sur lui-même. Pourtant, en pratique, on énoncera des théorèmes permettant de *préserver* la séparation au passage au quotient.

La condition n'est pas minimale ; il peut arriver que  $q$  ne soit pas ouverte mais que, par miracle, l'espace quotient soit séparé.

#### Propriété. (*Caractérisation de la séparation des quotients par saturation*)

L'espace  $X/\mathcal{R}$  est séparé si et seulement si pour tous  $x \neq y$ , il existe des ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$  : on dit que  $X$  est *saturé-séparé*.

▷ Soient  $x, y \in X$  tels que  $q(x) \neq q(y)$ , soit  $(x, y) \notin \mathcal{R}$ . Si  $U_x, U_y$  sont des voisinages ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$ , alors  $q(U_x)$  et  $q(U_y)$  sont des ouverts de  $X/\mathcal{R}$  par saturation qui séparent  $q(x)$  et  $q(y)$  : puisque  $U_x$  est saturé,  $q(y) \notin q(U_x)$ . Réciproquement, si  $U_x, U_y$  sont des ouverts de  $X/\mathcal{R}$  qui séparent  $q(x), q(y)$ , alors on voit que  $q^{-1}(U_x)$  et  $q^{-1}(U_y)$  sont des ouverts saturés et disjoints qui séparent  $x$  et  $y$ . ■

#### Proposition. (*Condition suffisante de séparation par compacts et fermés*)

Soit  $X$  séparé. Supposons que  $q$  satisfasse :

(a)  $\forall x \in X \quad q^{-1}(q(x))$  est compacte,

(b) pour tout fermé de  $X$ , son saturé est fermé.

Alors  $X/R$  est séparé.

▷ Soient  $x,y \in X$ ,  $q(x) \neq q(y)$ . Posons  $C_x = q^{-1}(q(x))$  et  $C_y = q^{-1}(q(y))$  qui sont donc des compacts disjoints de  $X$ . Puisque  $X$  est séparé, il existe des ouverts  $U_x, U_y$  disjoints séparant ces compacts (propriété connue). On pose  $F_x, F_y$  les complémentaires de ces ouverts. Ce sont des fermés dont les saturés  $\mathcal{R}F_x$  et  $\mathcal{R}F_y$  sont donc également fermés, par hypothèse. On pose  $U'_x, U'_y$  les complémentaires respectifs de ces saturés, qui sont donc des ouverts. Ils sont disjoints, car contenus dans les premiers. Supposons que  $x \notin U'_x$ . Alors  $x \in \mathcal{R}F_x$ . Alors il existe  $z \in F_x$  tel que  $x \mathcal{R} z$  et  $z \in C_x = q^{-1}(q(x)) \subseteq U_x$ , contradiction. Ainsi  $x \in U'_x$ . De même  $y \in U'_y$  et tout est fait. ■

### Corollaire. (*Quotient par un compact*)

Soit  $X$  un espace topologique séparé et  $A$  une partie compacte de  $X$ . Alors  $X/A$  est séparé.

▷ Si  $x \notin A$ , alors  $q^{-1}(q(x)) = \{x\}$  est compact. Si  $x \in A$ ,  $q^{-1}(q(x)) = A$  est compact par hypothèse. L'autre hypothèse se vérifie facilement. ■

### Proposition. (*Condition suffisante de séparation par compacts et fermés*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un fermé ou un ouvert de  $X$ . Alors la restriction  $\tilde{q} : X \setminus A \longrightarrow X/A$  est un homéomorphisme sur son image.

▷ On sait déjà que  $\tilde{q}$  est continue par restriction et elle est clairement bijective. Supposons  $A$  fermé. Alors un ouvert de  $X \setminus A$  est un ouvert de  $X$  qui est inclus dans  $X \setminus A$ . Pour un tel ouvert  $U$ ,  $\tilde{q}(U) = U$  est ouvert donc  $\tilde{q}^{-1}$  est continue. Le cas où  $A$  est ouvert est identique par caractérisation de la continuité par images réciproques de fermés. ■

*Remarque.* Soient  $f : X \longrightarrow Y$  continue et  $Y$  séparé. On définit  $r$  sur  $X$  par  $x \sim y$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$ . Alors  $\tilde{f} : X/r \longrightarrow Y$  est injective et  $X/r$  est séparé.

### Exemple. (*Recollement du segment en un cercle*)

Soit  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  et  $f : [0,1] \longrightarrow S^1$  qui à  $t \mapsto e^{2\pi it}$ . Alors  $[0,1]/r = [0,1]/(0 \sim 1)$  et  $\tilde{f}$  est un homéomorphisme de  $[0,1]/(0 \sim 1) \longrightarrow S^1$ .

### Propriété. (*Condition suffisante de séparation du quotient*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $R$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Si  $X'$  est un espace séparé et  $f : X \longrightarrow X'$  une application continue vérifiant  $x \sim y \iff \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ , alors

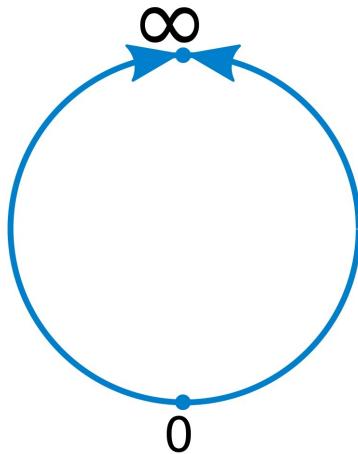


FIGURE 3.2.1 : Recollement d'un seul segment isomorphe au cercle. —

$X/R$  est séparé.

▷ En effet,  $f$  passe au quotient en  $\tilde{f} : X/R \longrightarrow X'$  et cette application est injective par hypothèse. Ainsi  $X/R$  s'identifie à un sous-espace de  $X'$  séparé. Puisque tout sous-espace d'un séparé est séparé,  $X'$  est séparé. ■

#### Exemple. (*Séparation du tore*)

Le tore  $\mathbb{T}^2$  est séparé.

En vertu donc de l'exponentielle complexe produit, qui permet de le définir.

#### 3.2.8.3 Autres propriétés des quotients

Les propriétés du type image continue se préservent par passage au quotient par continuité de la projection canonique. Ainsi :

- ★ tout quotient séparé de compact est compact ;
- ★ tout quotient d'espace connexe, connexe par arcs, est connexe par arcs.

#### 3.2.9 Quotient d'une topologie par une action de groupes

Tout un pan de la recherche mathématique étudie ces quotients : c'est un exemple fondamental pour lequel le quotient hérite encore une fois, a priori, d'une structure minable.

On étudie cette notion plus en détail dans la section de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

## 3.3 Espaces topologiques classiques

### 3.3.1 Peignes

#### Définition. (*Peigne*)

On appelle *peigne*, sans autre précision, un espace topologique de la forme suivante : le sous-espace topologique du plan euclidien :

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0,1].$$

Cet exemple se généralise à de nombreuses autres réalisations, y compris en dimensions supérieures. C'est la *philosophie du peigne* qui importe ici.

### 3.3.2 Boules, sphères

#### Définition. (*Boule*)

On appelle *boule* de dimension  $n$ , la boule unité de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , définie par  $\mathbb{B}^n = B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ .

#### Définition. (*Sphère*)

On appelle *sphère* de dimension  $n$ , ou  $n$ -*sphère*, la boule unité de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , définie par  $\mathbb{S}^{n-1} = S_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ .

→ *Convention.* On pose  $S-1 = \emptyset$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Proposition. (*Passer de la boule à la sphère*)

$\mathbb{S}^{n-1}$  est la frontière de  $\mathbb{B}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Proposition. (*Inclusions relatives des sphères*)

$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{S}^n$ .

▷ En effet,  $\{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1\} \subseteq \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \cap \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ . ■

#### Proposition. (*Inclusions relatives des boules*)

$\mathbb{B}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ .

**Proposition.** (*Quotient d'une boule par une sphère*)

$$\mathbb{B}^n / \mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n.$$

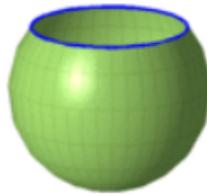


FIGURE 3.3.1 : *Quotient d'un disque par sa frontière sphérique.* —

**Proposition.** (*Écrasement d'une demi-sphère sur un disque*)

La demi-sphère large  $\mathbb{S}_+^n \simeq \mathbb{B}^2$ .

**Proposition.** (*Recollement d'une sphère aplatie le long d'un bord*)

$$\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1] / \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \simeq B^n.$$

**Proposition.** (*Compacité de la boule*)

$\mathbb{B}^n$  est compact.

▷ Fermé borné en dimension finie. ■

**Proposition.** (*Connexité de la sphère*)

$\mathbb{S}^{n-1}$  est connexe par arcs pour  $n \geq 2$ .

▷ Première méthode : on le déduit de la convexité de  $\mathbb{B}^n$ . ■

▷ On peut raisonner par récurrence en montrant que tout point est reliable à l'équateur, en considérant un chemin donné par projection pour la première coordonnée et en ajustant avec la deuxième coordonnée : ceci est possible dès que  $n \geq 2$ . ■

▷ Le plus simple reste de considérer  $\frac{(1-t)x+tx}{\|(1-t)x+ty\|}$ . C'est possible seulement pour deux points non antipodaux. On en déduit le résultat en remarquant qu'un espace de dimension  $n \geq 2$  connaît toujours au moins deux vecteurs colinéaires ou anticolinéaires. ■

**Proposition. (*Suspension de la sphère*)**

$$S(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq \mathbb{S}^n.$$

**Proposition. (*Élasticité de la boule*)**

$$S(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq C(\mathbb{B}^{n-1}) \simeq \mathbb{B}^n.$$

### 3.3.3 Cylindre (absolu)

**Définition. (*Ruban de Möbius*)**

Le *cylindre* est l'espace  $B^2 \times I$  où  $B^2$  est le disque de dimension 2 et  $I$  le segment  $[0,1]$ .

### 3.3.4 Ruban de Möbius

**Définition. (*Ruban de Möbius*)**

On appelle *ruban de Möbius* le quotient  $M = [0,1] \times [0,1]/\sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(0,s) \sim (1,1-s)$  (*voir schéma*).



FIGURE 3.3.2 : Un ruban de Möbius dans notre monde. —

*Remarque.* Le ruban de Möbius est l'unique espace topologique parmi les quatre « classiques » issues du recollement d'un carré qui forme une variété à bord.

**Curiosité. (*Réalisation coprojective du ruban de Möbius*)**

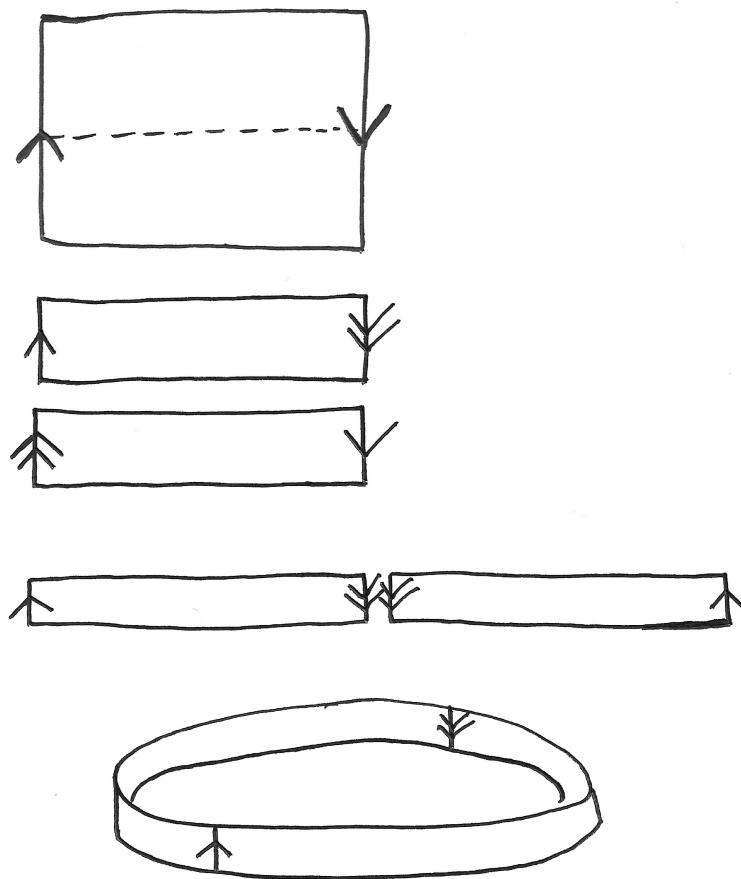
Le ruban de Möbius est le complémentaire d'un disque ouvert dans le plan projectif réel.

**Exercice 9 (*Couper et recoller... le ruban de Möbius*)**

1. Que se passe-t-il lorsqu'on coupe un ruban de Möbius en son milieu dans la longueur ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. On peut essayer chez soi et l'on se rend compte que l'on obtient un unique ruban cylindrique, de longueur double au Möbius initial.



Si on ne connaît pas la réponse, le plus simple est de raisonner grâce à un diagramme topologique, comme ci-dessus.

### 3.3.4.1 Variantes du ruban de Möbius

## 3.3.5 Tore

### Définition. (*Tore*)

On appelle *tore de dimension n*, le quotient d'espaces topologiques  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ .

### Proposition. (*Séparation du tore*)

Tout tore est séparé.

▷ Le tore se décrit comme quotient de l'application  $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2it_1\pi}, \dots, e^{2it_n\pi})$ . ■

### Proposition. (*Description alternative du tore*)

$\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{S}^1)^n$ . Ce n'est pas  $\mathbb{S}^n$ .

### Propriété

Le tore de dimension 1 est la sphère.

### Proposition. (*Obtention du tore par le carré unité*)

Le tore  $\mathbb{T}^2$  est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité  $K = [0,1] \times [0,1]$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$  (*voir schéma*).

Le tore qu'on connaît est le tore de première dimension.

### Heuristique

Le tore est sans coutures et de frontière vide.

### Usage du tore dans les jeux vidéos

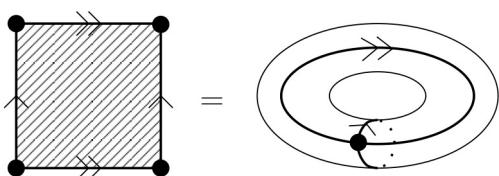
Dans le jeu vidéo Pacman,

### 3.3.6 Bouteille de Klein

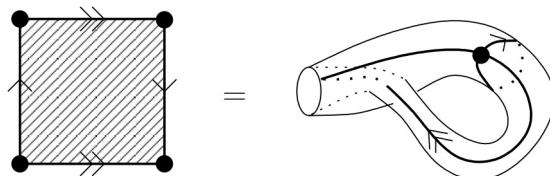
#### Définition. (*Bouteille de Klein*)

La bouteille de Klein  $\mathbb{K}_2$  est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,1-t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$  (*voir schéma*).

**Mnémonik :** la bouteille de Klein est le tore de Möbius.



(a) *Le tore simple.* —



(b) *La bouteille de Klein.* —

FIGURE 3.3.3 : *Quelques espaces quotients classiques réalisés comme CW-complexes.* —

### 3.3.7 Plans projectifs

#### 3.3.7.1 Droite projective réelle

#### 3.3.7.2 Plan projectif réel

#### 3.3.7.3 Sphère de Riemann

#### 3.3.7.4 $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$

#### 3.3.7.5 Espaces projectifs généraux

**Définition. (*Espace projectif réel*)**

Soit  $n$  un entier naturel. L'*espace projectif réel de dimension n* est  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = P_n(\mathbb{R})$  est le quotient de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la relation d'équivalence de colinéarité.

Puisque deux vecteur sont colinéaires s'ils dirigent la même droite,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  peut être vu comme l'ensemble des droites vectorielles, c'est-à-dire des *directions*, de l'espace euclidien de dimension  $n + 1$ .

▷ En effet, si l'on supprime zéro, la relation de colinéarité est une équivalence. ■

**Proposition. (*L'espace projectif réel est un quotient*)**

$P_n(\mathbb{R})$  est le quotient  $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$  où le groupe  $\mathbb{R}^\times$  agit sur cet espace par homothétie  $\lambda \cdot x \mapsto \lambda x$ . C'est l'ensemble des orbites sous cette action.

On retrouve que  $P_n(\mathbb{R})$  est en bijection avec l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$  passant par zéro.

→ *Notation.* On note souvent  $\mathbb{P}^n\mathbb{R} = S^{n+1}/\{\pm 1_{n+1}\}$ .

Dans les premières dimensions, on a :

**Exemples. (*Espaces projectifs de petites dimensions*)**

1. L'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est l'ensemble des directions du plan. Grâce au demi-cercle unité supérieur (car deux points antipodaux du cercle définissent la même droite), cet espace s'y identifie, pour toute droite non horizontale. Par le même argument, les deux points d'ordonnée nulle s'identifient ; par conséquent,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  s'identifie à  $\mathbb{S}^1$  sous espace de  $\mathbb{R}^2$ . **C'est faux en dimension supérieure !**

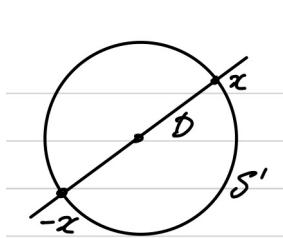
Plus précisément (*voir la suite*), l'homéomorphisme  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1(\pm 1)$  envoie une droite vectorielle sur la classe de ses intersections avec  $S^1$ . Identifions le demi cercle  $B' = \{e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  avec l'intervalle  $[-1, 1]$  par projection sur l'axe des abscisses. Alors l'homéomorphisme  $B^1/x \sim -x \longrightarrow S^1/\pm 1$  est induit par l'inclusion  $B' \hookrightarrow S^1$ . Finalement,  $P^1$  est obtenu en attachant à  $P^0 = \{\pm 1\}$  une cellule  $B'$  le long de  $\partial B' = S^0$ .

De façon calculatoire, si  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y \neq 0$ , on définit la relation d'équivalence engendrée par  $(x,y) \sim (\frac{x}{y}, 1)$  : c'est la *projection stéréographique*. Elle permet de définir des points à l'infini. Dans le cas de la dimension 2, mais celui-là seul encore, les deux points à l'infini coïncident.

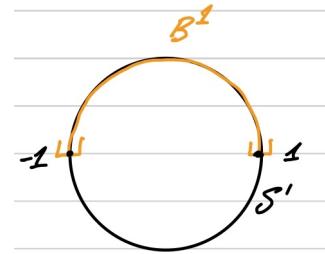
2. Dans le cas  $n = 2$ , l'homéomorphisme  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2(/ \{\pm I_3\})$  envoie une droite sur la classe d'équivalence de ses deux points d'intersection avec la sphère de dimension 3  $S^2$ .

Identifions la demi-sphère supérieure  $\{(x,y,z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  avec le disque  $B'' \subseteq \mathbb{R}^2$  par  $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ . Alors l'homéomorphisme  $B''/(x \sim -x, x \in S' \subseteq B^2)$  est induit par l'inclusion  $B'' \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Notons d'ailleurs qu'on a une inclusion  $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$ . Si on attache  $B''$  à  $P^1$  le long de la projection  $S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , on obtient un espace homéomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

On peut enfin montrer que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ne se plonge pas dans le plan, dans un sens que l'on précisera pas ici. En effet, intuitivement, en prenant la demi-sphère supérieure, on ne peut pas recoller dans l'espace euclidien usuel la circonférence de sa base.

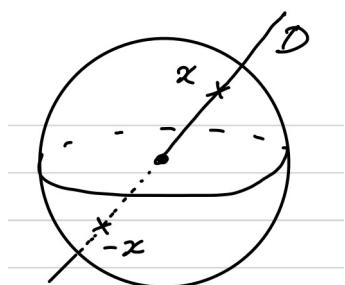


(a) Une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^2$ . —

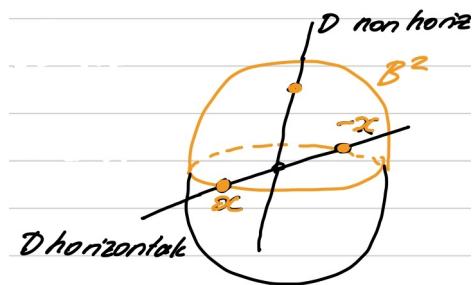


(b) Identification de  $\mathbb{P}^1$ . —

FIGURE 3.3.4 : Espace projectif de dimension 1. —



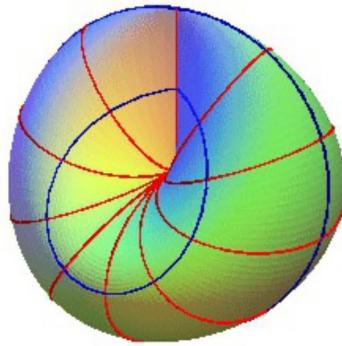
(a) Une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^3$ . —



(b) Identification de  $\mathbb{P}^2$ . —

FIGURE 3.3.5 : Espace projectif de dimension 2. —

On peut identifier les espaces projectifs de proche en proche de la manière suivante :

FIGURE 3.3.6 : Vue de  $\mathbb{P}^2$ . —

L'espace  $\mathbb{P}^2$  ne se plonge pas dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  (difficile). Puisque c'est une variété différentielle compacte, il reste simple de le plonger dans un espace euclidien, mais nécessairement plus grand.

**Proposition. (*Identification des espaces projectifs*)**

On a les homéomorphismes suivants :

$$P_n(\mathbb{R}) \xleftarrow[\textcircled{1}]{\sim} S^n / \{\pm 1_{n+1}\} \xleftarrow[\textcircled{2}]{\sim} B^n / (x \sim -x, x \in S^{n-1}) \xleftarrow[\textcircled{3}]{\sim} P_{n-1}(\mathbb{R}) \bigcup_{q^{n-1}} e_n,$$

où  $q^{n-1} : S^{n-1} \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$ , qui donnent donc inductivement la structure de *CW-complexes finis*.

▷ L'injection canonique  $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  induit  $S_n / \{\pm id\} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$  qui est clairement bijectif et continu, quotient possible à gauche, car deux points antipodaux définissent la même droite. On a une application continue  $\alpha_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$  qui induit la bijection réciproque. Comme cette application qui l'induit est continue, on a le premier homéomorphisme.

On a l'application continue  $f : B^n \rightarrow S^n$  et  $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ . Par suite, elle induit une application continue bijective  $B^n / (\{x \sim -x\}) \rightarrow S^n / \{\pm I_{n+1}\}$  qui est un homéomorphisme. En effet, on a  $q \circ f(x) = q \circ f(y)$  si et seulement si  $x = y$  ou ( $y = -x$  et  $\|x\| = \|y\|$ ). En outre, l'espace  $B^n / (\dots)$  est quasi compact et  $S^n / \{\pm I_{n+1}\}$  est séparé, le graphe de l'action de  $\{\pm I_{n+1}\}$  étant fermé. D'où le résultat.

Soit  $Y = B_n / (x \sim -x \text{ si } x \in S^{n-1})$ , espace qui d'après le deuxième homéo égale  $P_n(\mathbb{R})$ . On a l'application composée  $S^{n-1} \hookrightarrow B^n \rightarrow Y$  continue qui en passant au quotient induit une application continue  $j_2 : P_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow Y$ . Soit  $j_1 : B^n \rightarrow Y$  l'application quotient canonique. On montre que  $Y$

avec ces applications est universel pour le diagramme ci-dessous, d'où  $Y = P_{n-1}(\mathbb{R}) \coprod_{q^{n-1}} B^n$ .

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{q_{n-1}} & P^{n-1}(\mathbb{R}) \\
 i_n \downarrow & & \downarrow j_2 \\
 B^n & \xrightarrow{j_1} & Y \\
 & \searrow \scriptstyle{\forall \alpha_1 \text{ cont.}} & \swarrow \scriptstyle{\exists h \text{ cont.}} \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad t.q. \alpha_2 \circ q_{n-1} = \alpha_1 \circ i_n$$

Comme  $j_1$  est surjectif, l'application  $h$  est unique si elle existe. Dans ce cas, on a  $h \circ j_1 = \alpha_1$  qui est continue, donc  $h$  est continue. Si on se donne  $\alpha_1, \alpha_2$  telle que demandées, alors pour  $x \in S^{n-1}$ , on a  $\alpha_1(x) = \alpha_1 \circ i_n(x) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(-x) = \alpha_1 \circ i_n(-x) = \alpha_1(-x)$ . Par la propriété universelle de  $j_1 : B \longrightarrow Y$ , on obtient  $h : Y \longrightarrow Z$  telle que  $h \circ j_1 = \alpha_1$  et pour  $u = q_{n-1}(v) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ , on a :

$$h \circ j_2(u) = h \circ j_2 \circ q_{n-1}(v) = h \circ j_1 \circ i_n(v) = \alpha_1 \circ i_n(v) = \alpha_2 \circ q_{n-1}(v) = \alpha_2(u),$$

et c'est fini. ■

### Corollaire

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est compact.

### Corollaire

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est connexe.

### Heuristique

Il faut penser aux tentes Décathlon, qui sont des ronds, et que l'on le replie en huit jusqu'à en faire un point.

### Proposition. (*Projectivité complexe*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ .



$\mathbb{P}^n \mathbb{C} \not\simeq \mathbb{P}^{2n} \mathbb{R} !$

### À propos. (*Surfaces recollées à partir d'un carré fondamental*)

- ★ On peut obtenir six surfaces, *i.e.* variété topologique de dimension 2, en recollant un carré : le disque, le cylindre, le ruban de Möbius, le tore, la bouteille de Klein, le plan projectif réel.
- ★ Le disque est obtenu par recollement d'aucun côté. Le cylindre et le ruban de Möbius

sont obtenus par recollement de deux côtés. Les trois autres surfaces sont obtenues par recollement des quatre côtés deux à deux.

- ★ Trois sont orientables (le disque, le cylindre et le tore) et trois sont non orientables (le ruban de Möbius, le plan projectif et la bouteille de Klein).
- ★ Trois sont à bord (le disque, le cylindre et le ruban de Möbius) et trois sont sans bord (le tore, la bouteille de Klein et le plan projectif).
- ★ Le disque et le cylindre sont de genre 0, le tore, le ruban de Möbius et le plan projectif sont de genre 1, et la bouteille de Klein est de genre 2.
- ★ Ces six surfaces sont deux à deux non homéomorphes, mais le cylindre et le ruban de Möbius sont homotopiquement équivalentes. C'est la seule identification possible parmi toutes.

### 3.3.7.6 Sphère de Riemann

### 3.3.8 Simplexes

#### Définition. (*Simplexe*)

Soit  $E = \mathbb{R}^N$  où  $N \in \mathbb{N}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle *n-simplexe géométrique* l'enveloppe convexe  $\sigma$  d'un ensemble de  $n + 1$  points  $\{V_0, \dots, V_n\}$  de  $\mathbb{R}^N$ , appelés *sommets* de  $\sigma$ , affinement indépendants. Le nombre  $n$  est la *dimension* du simplexe considéré.

→ *Convention.* Soit  $k$  un entier naturel. On appelle donc *k-simplexe* tout  $k$ -gone régulier dans  $\mathbb{R}^{k+1}$ .



A priori  $n \neq N$ .

#### Fait. (*Fermeture des simplexes*)

Tout simplexe est fermé.

En effet, c'est une enveloppe convexe d'un fermé borné en dimension finie.

→ *Notation.* Comme seule la donnée combinatoire des  $n + 1$  points  $V_0, \dots, V_n$  nous intéresse, nous noterons souvent un simplexe géométrique par  $\langle V_0, \dots, V_n \rangle$ .

#### Définition. (*Face d'un simplexe*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\sigma = \langle V_0, \dots, V_n \rangle$  un  $n$ -simplexe géométrique. La  $i$ -ième *face* de  $\sigma$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  est le simplexe  $[V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]$  avec la notation habituelle d'omission. Plus généralement, si  $I \subseteq \llbracket 0, n \rrbracket$ , la  $I^e$  face du simplexe  $\sigma$  est le *sous-k-simplexe* de  $\sigma$  engendré par  $(V_i)_{i \in I}$  où

$k = \text{card}(I)$ . Le  $j^e$  sommet de  $\sigma$  est la  $\{j\}^e$  face  $\langle V_j \rangle$  pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Une *face propre* de  $\sigma$  est un simplexe engendré par un sous-ensemble strict de  $\{V_0, \dots, V_n\}$ .

### Proposition. (*Bord d'un simplexe*)

Le bord d'un simplexe est la réunion de toutes ses faces propres.

▷ Voici une propriété évidente pour n'importe quel topologue mais qu'il faut prendre avec des pinces pour démontrer avec rigueur. Notons  $b$  la réunion des faces propres du simplexe  $\sigma$ . Soit  $x \in \sigma \setminus b$ . Notons  $d = d(x, \sigma)$ . Par convexité,  $B(x, d) \subseteq \sigma$ . Ainsi,  $x \in \partial \sigma$ . Soit maintenant  $x \in b$ . On a que  $x \in [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]$  pour un  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Supposons qu'une boule  $B(x, r)$  soit incluse dans  $\sigma$ . En particulier, en notant  $u$  un vecteur directeur unitaire de la droite portant  $[V_i, x]$ ,  $y = x + \frac{r}{2}u$  est dans  $B(x, r)$ . Il est donc dans  $\sigma$ . Cependant,  $\text{Conv}([V_i, x] \cup [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]) = \sigma$  ne contient pas  $y$ ; en effet,  $y \in \text{Conv}([V_i, y] \cup [V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]) \supsetneq \text{sig}$  puisque  $[V_i, y] = [V_i, x] \sqcup [x, y]$ . Absurde, donc il n'existe pas de telle boule, donc  $x \in \partial \sigma$ . ■

#### 3.3.8.1 Simplexes standard

##### Définition. (*Simplexe standard*)

Soit  $k$  un entier naturel. Le  $k$ -simplexe (*géométrique*) *standard* est

$$T^k := \{(x_0, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{k+1} \mid x_0 + \dots + x_k := \|x\|_1 = 1\}.$$

Autrement dit, c'est le  $k$ -simplexe associé à la base canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

→ *Notation.* On note aussi  $\Delta_n$ ,  $\Delta^n$ ,  $|\Delta^n|$  le  $n$ -ième simplexe standard pour  $n \in \mathbb{N}$ . On note alors  $\delta|\Delta^n|$  sa frontière, souvent appelée *bord* à cause de son application en homologie simpliciale.

##### Fait. (*Bord du simplexe standard*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans le cas du  $n$ -simplexe standard, son bord est  $\bigcup_i \partial_i \Delta_n$  où  $\partial_i \Delta_n$  est la  $i$ -ième face de  $\Delta_n$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . L'intérieur du  $n$ -simplexe standard est alors  $\Delta_n \setminus \partial \Delta_n$ .

##### Exemples. (*Simplexes standard*)

1. Pour  $k = 0$ , le 0-simplexe standard est le point.  
Il est réalisé par le point  $(1)$  dans  $\mathbb{R}^1$ .
2. Pour  $k = 1$ , le 1-simplexe standard est le segment.  
Il est réalisé par  $[(0,1), (1,0)]$  dans  $\mathbb{R}^2$ .
3. Pour  $k = 2$ , le 2-simplexe standard est le triangle (plein).  
Il est réalisé par  $[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]$  dans  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ .

4. Pour  $k = 3$ , le 3-simplexe standard est le tétraèdre (plein).

Il est réalisé par  $[(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$  dans  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{2+1}$ .

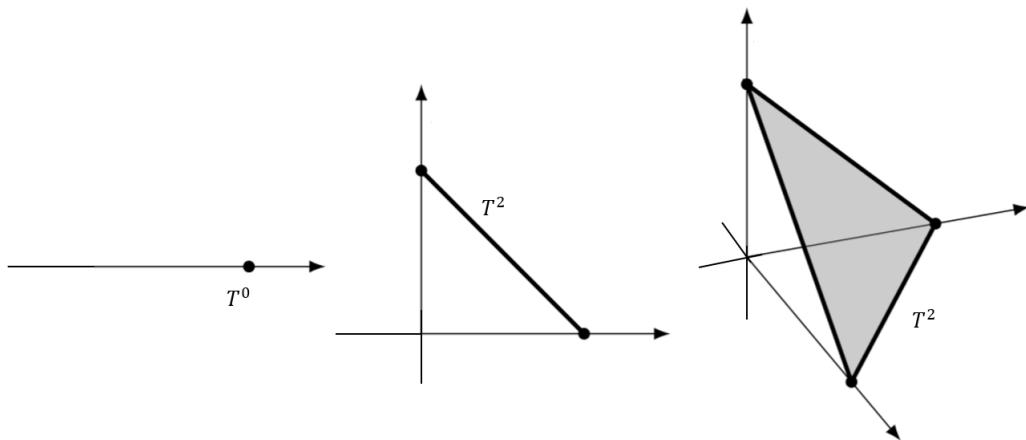


FIGURE 3.3.7 : *Les trois premiers simplexes standards.* —

**Exercice 10** (*Volume du tétraèdre dans  $\mathbb{R}^4$* )

Quelle est la mesure de Lebesgue de  $\Delta_3$  ?

*Remarque.* Les simplexes standards sont souvent orientés comme un graphe muni d'un unique cycle et leurs sommets sont alors caractéristiquement nommés.

### 3.3.8.2 Géométrie des simplexes

### 3.3.8.3 Subdivisions barycentriques

**Définition.** (*Subdivision barycentrique*)

Soit  $T^k$  un  $k$ -simplexe,  $k \in \mathbb{N}$ . Pour toute permutation  $\tau \in \mathfrak{S}_{k+1}$ , on considère le  $k$ -simplexe  $\{(x_0, \dots, x_k) \in T^k \mid x_{\tau(0)} \leq x_{\tau(1)} \leq \dots \leq x_{\tau(k)}\}$ .

## 3.4 Constructions d'espaces topologiques

### 3.4.1 Cylindres

**Définition.** (*Cylindre d'un espace*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *cylindre de/sur/de base*  $X$  est l'espace produit

$$\mathfrak{C}(X) = \text{Cyl}(X) = X \times I$$

où  $I = [0,1]$  est muni de la topologie usuelle issue de  $\mathbb{R}$ .

### 3.4.2 Cônes

**Définition.** (*Cône d'un espace*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *cône* de  $X$  est l'espace quotient

$$C(X) = \text{Cone}(X) = \mathfrak{C}(X)/(X \times \{1\}).$$

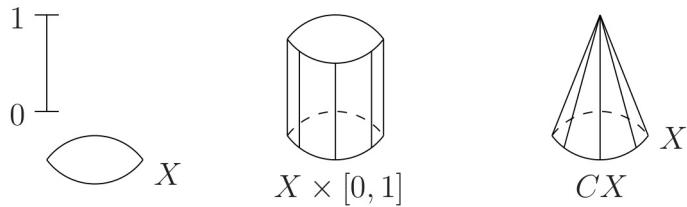


FIGURE 3.4.1 : Construction pas à pas du cône d'un espace  $X$ . —

**Proposition.** (*Isotropie des cônes*)

Soit  $X$  un espace topologique. On a aussi  $CX \simeq \mathfrak{C}/(X \times \{0\})$ .

▷ Il suffit d'exhiber un automorphisme au sens topologique de  $[0,1]$  qui envoie 0 sur 1, par exemple  $t \mapsto 1 - t$ . ■

**Proposition.** (*Plongement d'un espace dans son cône*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors l'application  $X \longrightarrow CX$  qui à  $x \mapsto \overline{(x,0)}$  est continue et un homéomorphisme sur son image.

▷ Cette application est continue par composition d'application continues. Elle est clairement injective. Or  $X \hookrightarrow X \times I \longrightarrow CX$  est une application quotient par  $X \times \{1\}$ , qui est fermé dans  $X \times I$  :

en notant  $i$  l'injection canonique,  $i(X) \subseteq X \times I \setminus X \times \{1\}$ . Ainsi  $X$  est un homéomorphisme sur son image. ■

*Remarque.* Pour tout  $s \in [0,1[$  en fait, l'application  $X \longrightarrow CX$  qui à  $x \mapsto \overline{(x,s)}$  est un homéomorphisme sur son image.

### Définition. (*Sommet d'un cône*)

Le *sommet* d'un cône est le point  $\overline{(x,1)}$  de  $CX$  pour n'importe quel  $x \in X$ . Il est bien défini par construction.

### Proposition. (*Fonctorialité du cône*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application continue, alors il existe une unique application continue  $CX \longrightarrow CY$ ,  $Cid_X = id_{CX}$  et  $C(f \circ g) = Cf \circ Cg$ .

▷ On a  $f(X \times \{1\}) \subseteq Y \times \{1\}$ . On en déduit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{f \times id} & Y \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ CX & \xrightarrow{Cf} & CY \end{array}$$

par propriété universelle du quotient. ■

### Proposition. (*Séparation du cône*)

Le cône d'un espace séparé est séparé.

▷ Soit  $R$  la relation  $R_{X \times \{1\}}$ , c'est-à-dire,  $xRy \iff x = y$  ou  $x \neq y \in X \times \{1\}$ . Si  $F \subseteq X \times I$ , alors  $RF = F$  si  $F \cap (X \times \{1\}) = \emptyset$  ou  $= F \cup (X \times \{1\})$  sinon. Soient  $a = (x,s)$  et  $b = (y,t)$  deux points de  $X \times I$  tels que  $\overline{(x,s)} \neq \overline{(y,t)}$ . On disjoint les cas.

Si  $s = 1$ , alors  $t \neq 1$ . Soient  $U, V$  des ouverts disjoints de  $[0,1]$  qui contiennent  $s = 1$  et  $t$  (c'est possible!). Alors  $X \times U$  et  $X \times V$  sont des ouverts saturés disjoints qui séparent  $a$  et  $b$ , et c'est fait.

Si  $t = 1$ , c'est pareil.

Si  $s, t \neq 1$  et  $s \neq t$ , soient  $U, V$  des ouverts disjoints de  $[0,1]$  qui séparent  $s$  et  $t$ . Alors  $X \times U$  et  $X \times V$  conviennent encore.

Si  $s, t \neq 1$  et  $s = t$ . Alors  $x \neq y$ . Soient  $V_x, V_y$  des ouverts de  $X$  qui séparent  $x$  et  $y$ ,  $X$  étant séparé. Alors  $V_x \times [0,1[$  et  $V_y \times [0,1[$  sont des ouverts saturés qui séparent  $x$  et  $y$ . Tous les cas sont traités. ■

### Exemple. (*Cône d'une sphère*)

On a  $CS^{n-1} = B^n$ .

En effet, le cylindre d'une sphère est un cylindre, et son cône est homéomorphe à une boule.

### 3.4.3 Suspensions, doubles cônes

**Définition. (Suspension d'un espace)**

Soit  $X$  un espace topologique. La *suspension* de  $X$  est l'espace quotient  $S(X) = \Sigma(X) = X \times [-1,1]/R$  où :

$$(x,s)R(y,t) \iff (x,s) = (y,t), \quad s = t = 1, \quad s = t = -1.$$

Autrement dit :  $S(X) = X \times [-1,1]/X \times \{-1,1\}$ .

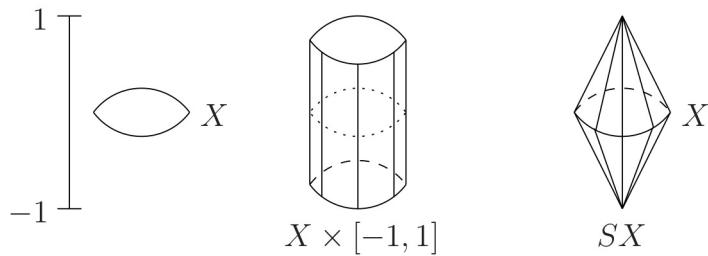


FIGURE 3.4.2 : Construction pas à pas de la suspension d'un espace  $X$ . —

**Proposition. (Plongement d'un espace dans sa suspension)**

Soit  $X$  un espace topologique. Alors l'application de  $X$  dans  $SX$  qui à  $x$  fait correspondre  $\overline{(x,0)}$  est un homéomorphisme sur son image.

*Remarque.* Même remarque que pour le cône avec  $s \in ]-1,1[$ .

**Proposition. (Fonctorialité de la suspension)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue, alors il existe une unique application continue  $SX \rightarrow SY$ ,  $Sid_X = id_{SX}$  et  $S(f \circ g) = Sf \circ Sg$ .

**Proposition. (Séparation de la suspension)**

La suspension d'un espace séparé est séparée.

**Proposition. (La suspension est un double cône)**

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $S(X) \simeq CX/X \times \{0\}$ .

**Exemple.** (*Suspension de la sphère*)

On a  $SS^{n-1} = S^n$ .

**Exercice 11** (*Homéomorphisme de renversement d'orientation*)

Montrer que  $(x,t) \mapsto (x,1-t)$  est un automorphisme de toute suspension.

### 3.4.4 Écrasements

Exemple très simple déjà rencontré en exemple dans la topologie quotient, on revient sur cette construction extrêmement classique.

**Définition.** (*Écrasement d'un espace sur une partie*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subseteq X$ . On appelle *écrasement de  $X$  sur  $A$*  l'espace topologique quotient  $X/A := X/\langle A \rangle$  où  $X$  est quotient par la relation d'équivalence :

$$x \sim_A y \iff x = y \text{ OU } (x,y) \in A^2.$$

C'est la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim y$  pour tous  $x,y \in A$ .



FIGURE 3.4.3 : *Écrasement de la base d'une demi-boule pour former une boule.* —  
En vérité, les deux espaces étaient déjà homéomorphes...

#### Proposition

Si  $A$  est ouverte ou fermé, la restriction de la projection canonique à  $X \setminus A$  est un homéomorphisme sur son image.

**Proposition.** (*Suspension par écrasement*)

Le cône, la suspension sont des écrasements.

### 3.4.5 Recollements, bouquets

Une généralisation (la dernière propriété va vous surprendre!).

**Définition. (*Recollement le long d'un espace*)**

Soient  $X, Y$  et  $A$  des espaces topologiques. On prend des applications  $f : A \rightarrow X$  et  $g : A \rightarrow Y$  des applications continues. On note  $X \coprod_A Y$  le *recollement le long de A*, par abus de notation (le recollement dépend d'une certaine application en fait, d'ailleurs non nécessairement injective), le quotient  $X \coprod_A Y / \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence engendrée par les  $\{f(a) \mathcal{R} g(a), a \in A\}$ .

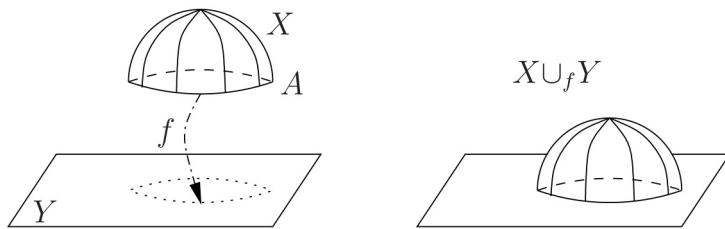


FIGURE 3.4.4 : *Recollement d'une demi-boule sur un plan tangent.* —

Une autre façon de voir les choses est la suivante :

**Propriété. (*Propriété universelle du recollement le long d'un espace*)**

On reprend les notations précédentes. Alors  $\iota_X : X \rightarrow X \coprod_A Y$  est continue, de même pour  $\iota_Y$ . On a  $\iota_X \circ f = \iota_Y \circ g$ . De plus, pour tout espace  $Z$ , pour toutes  $j_X : X \rightarrow Z$  et  $j_Y : Y \rightarrow Z$ ,  $j_X \circ f = j_Y \circ g$  alors il existe une unique flèche continue  $h : X \coprod_A Y \rightarrow Z$  telle que le diagramme suivant commute, i.e.  $h \circ \iota_Y = j_Y$  et  $h \circ \iota_X = j_X$ .

▷ Propriété universelle du quotient :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & X & & \\
 g \downarrow & & \downarrow \iota_X & & \\
 Y & \xrightarrow{\iota_Y} & X \coprod_A Y & \xrightarrow{j_X} & Z \\
 & \searrow & \nearrow h & & \\
 & & j_X & \nearrow & \\
 & & & & Z
 \end{array}$$

Il y a donc au moins trois façons pratiques de recoller des espaces :

- exhiber un recollement (une application  $f$ )
- vérifier la propriété universelle
- reconnaître un recollement usuel.



Il faut bien que les deux ensembles d'images coïncident !

Heuristiquement, on va utiliser le recollement dans le cas où les  $\iota$  sont injectives, où l'image de  $A$  est dans la frontière de l'espace et donc  $A$  pris comme sous-espace de  $X$  ou de  $Y$ . L'idée est de recoller des morceaux d'espaces le long de leurs bords.

### Exemples. (*Recollements*)

1. Soit  $X = Y = [0,1]$  et  $A = \{\star, \cdot\}$  muni de la topologie discrète. On prend  $f(\star) = 0 = g(\cdot)$  et  $f(\cdot) = 1 = g(\star)$ . Alors  $X \coprod_A Y \cong S^1$ .
2. (*Espace pointé, bouquets*) Un espace topologique pointé<sup>a</sup> est une paire  $(X, x_0)$  où  $x_0 \in X$  est appelé *point base (identifié)* ou *IB* (pour *identified basepoint*). Soient  $(Y, y_0)$  un deuxième espace topologique pointé. Prenons le singleton  $A = \{\star\}$ . Pour  $f : A \rightarrow X$  constante  $x_0$  et  $g$  de même, le *bouquet* de  $(X, x_0), (Y, y_0)$  est l'espace  $X \coprod_A Y$  dit *pointé par l'image de  $x_0 \neq y_0$* . On le note  $X \vee Y$  mais on dit souvent «  $X$  wedge  $Y$  » selon l'usage anglais, bien que ce ne soit pas un symbole de wedge en informatique. Intuitivement, on prend un point de chaque espace, on les identifie tous et on tient ce point au bout des doigts. Un bouquet est aussi appelé *rose* et chacun de ses termes *pétales*.

Formellement, on l'appelle également *somme pointée* et l'on note  $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left( \coprod_{i \in I} X_i \right) / R$  où  $R$  est engendrée par  $x_i \sim x_j$  pour tous  $i, j$ .

3. (*Attachement cellulaire*) Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant. Soit  $S^n$  la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $B^n$  la boule de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\partial B^n = S^{n-1}$  (pour se rappeler le décalage, écrire  $\text{Fr}(B^2) = S^1$ ).

Puisque  $B^n$  est fermé, on a une inclusion canonique de la  $(n-1)$ -sphère dans la  $n$ -boule  $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$ . Si  $X$  est un espace topologique, et  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$  est continue, on note  $X \cup_\varphi e^n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$  au moyen de  $\varphi$ ; dans le recollement, les applications  $f, g$  n'étaient pas les plus importantes; ici, c'est le contraire, l'espace  $A$  est toujours le même, c'est l'application  $\varphi$  qui est importante. On dit alors qu'on a *recollé une  $n$ -ellule à  $X$*  et qu'on obtient  *$X \cup_\varphi e^n$  en attachant une  $n$ -cellule le long de  $\varphi$* .

<sup>a</sup> Il existe une vraie dichotomie entre les espaces topologiques et les espaces topologiques pointés.

**Remarque importante.** On signale une définition alternative du recollement, ne faisant intervenir qu'une seule application.

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $A$  est une partie de  $X$  et  $f : A \rightarrow Y$  une application continue. Le *recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$*  est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \coprod Y) / \mathcal{R}$$

où  $\mathcal{R}$  et la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim f(x)$  pour tout  $x \in A$ .

### Proposition

On vérifie que si  $A$  est ouvert ou fermé, la projection canonique  $X \coprod Y \longrightarrow X \cup_f Y$  induit sur  $Y$  un homéomorphisme sur son image qui est de même nature.

Autrement, ce n'est pas clair.

### Curiosité. (*L'écrasement est un recollement*)

Si  $Y$  est réduit au point  $\star$  (notation homotopique), alors  $f$  est l'application constante la seule qui existe et l'inclusion de  $X$  dans  $X \coprod \star$  induit un homéomorphisme  $X / \langle A \rangle \simeq X \cup_f \{\star\}$ .

### Proposition

Si  $A$  est non vide, le recollement de deux connexes ou connexe par arcs est de même nature.

On verra d'autres exemples de recollements dans la partie sur les espaces cellulaires, tels que l'attachement cellulaire.

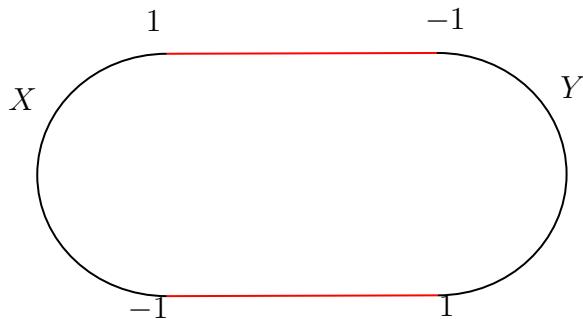


FIGURE 3.4.5 : Premier exemple : recollement d'un double segment isomorphe au cercle. —

### 3.4.6 Joints

#### Définition. (*Joint*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Le *joint (topologique)* de  $X$  et  $Y$ , noté  $X * Y$ , est le quotient du cylindre  $X \times Y \times I$  par la relation engendrée par  $(x,y,1) \sim (x',y,1)$  pour tout  $y \in Y$  et  $(x,y,0) \sim (x,y',0)$  pour tout  $x \in X$ , i.e.  $X \times Y \times \{0\} \rightsquigarrow X$  et  $X \times Y \times \{1\} \rightsquigarrow Y$ .

**Mnémonik :** le joint de deux espaces est l'ensemble des segments entre  $X$  et  $Y$ .

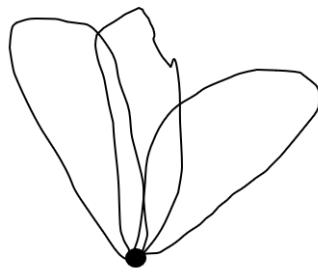


FIGURE 3.4.6 : *Bouquet à trois fleurs.* —  
Toutes les formes sont à prévoir à homéomorphie près.

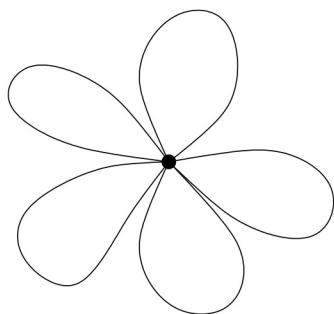


FIGURE 3.4.7 : *Bouquet à cinq cercles.* —  
C'est la vision la plus proche de l'intuition.

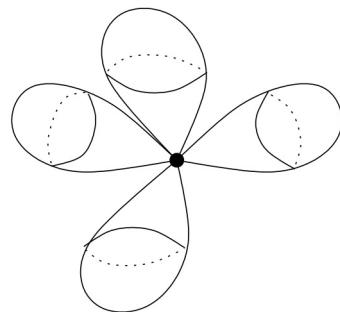


FIGURE 3.4.8 : *Bouquet à quatre sphères.* —  
Noter qu'il est impossible de le représenter correctement en trois dimensions.

### Définition. (*Joint réduit*)

Soient  $(X,x_0), (Y,y_0)$  deux espaces topologiques pointé. Le *joint (topologique) réduit* de  $X$  et  $Y$ , noté toujours  $X * Y$ , est le quotient du cylindre  $X \times Y \times I$  par la relation engendrée par  $(x,y,1) \sim (x',y,1)$  pour tout  $y \in Y$ ,  $(x,y,0) \sim (x,y',0)$  pour tout  $x \in X$  et  $(x_0,y_0,t) = (x_0,y_0,t')$ , i.e.  $X \times Y \times \{0\} \rightsquigarrow X$ ,  $X \times Y \times \{1\} \rightsquigarrow Y$  et  $\{(x_0,y_0)\} \times I \rightsquigarrow \{(x_0,y_0)\}$ .

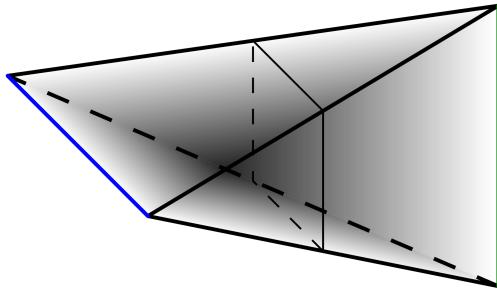


FIGURE 3.4.9 : *Joint topologique de deux segments.* —  
Le joint des deux segments bleu et vert est le polyèdre en gris.

### Propriétés. (*Cône et suspension via le joint*)

1. Le cône est le joint à un point.
2. La suspension est le joint à deux points.

### Exercice 12 (*Cône à trois sommets*)

Soit  $X$  un espace topologique. Décrire  $X * \{0,1,2\}$  où  $\{0,1,2\}$  est muni de la topologie discrète.

## 3.5 Propriétés topologiques classiques

### 3.5.1 Le caddie de contre-exemples

#### 3.5.1.1 Droite de Sorgenfrey

#### 3.5.1.2 Plan de Sorgenfrey

#### 3.5.1.3 Droite de Michael

### 3.5.2 Séparation

#### Définition. (*Espace séparé*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $X$  est séparé si pour tous  $x \neq y$  dans  $X$ , il existe deux ouverts (ou, de façon équivalente, deux voisinages) disjoints qui contiennent  $x, y$  respectivement.

▷ Immédiat. ■

#### Remarques.

1. La topologie discrète est toujours séparée.

**2.** La topologie grossière n'est jamais séparée.

**Exemple. (*Dédoublement du segment unité*)**

Soient  $0_-$  et  $0_+$  deux ensembles distincts n'appartenant pas à  $[0,1]$ . On considère  $X = ]0,1] \cup \{0_+\} \cup \{0_-\}$ . On note  $\mathcal{B}(x) = \{[x - 1/n, x + 1/n] \cap [0,1], n \in \mathbb{N}^*\}$  pour  $x \in ]0,1]$ ,  $\mathcal{B}(0_+) = \{\{0_+\} \cap ]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\mathcal{B}(0_-) = \{\{0_-\} \cap ]0,1/n[, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Alors  $\mathcal{B}(x)$  est une base d'ouverts d'une topologie sur  $X$ . Autrement dit, on considère  $[0,1]$  muni de sa topologie induite auquel on adjoint une copie  $c$  du point 0 tel que  $c \cup ]0,1]$  ait la même topologie que  $[0,1]$ .

Alors  $X$  n'est pas séparé pour cette topologie.

En effet,  $0_+$  et  $0_-$  n'admettent pas de voisinages disjoints.

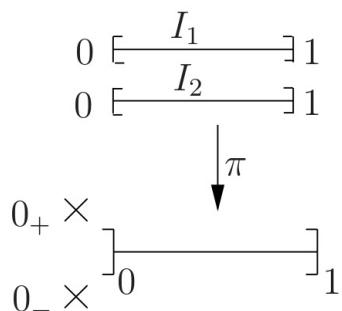


FIGURE 3.5.1 : *La suspension du segment unité, non séparée. —*  
On parle de *segment à deux origines*.

**Propriété. (*Fermeture des singletons*)**

Soit  $X$  un espace séparé. Alors les singletons sont fermés.

**Contre-exemple. (*Topologie non séparée donc les singletons sont fermés*)**

Soit  $X = \mathbb{C}$  que l'on munit de la topologie de Zariski  $\mathcal{O} = \{U \subseteq \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{C}[X] \quad U = \{x \in \mathbb{C}, P(x) \neq 0\}\}$ . Alors les points du plan complexe sont Zariski-fermés mais la topologie de Zariski n'est pas séparée.  $\square$

**Propriété. (*Stabilité de la séparation par induction*)**

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

On montre qu'un produit d'espaces séparés est séparé. La preuve dans le cas fini est extrêmement élémentaire ; dans le cas infini, c'est plus dur.

### Propriété. (*Produit fini d'espaces séparés*)

Le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

▷ Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2) \in X \times Y$  distincts. On peut, sans perte de généralité, supposer  $x_1 \neq x_2$ . Puisque  $X$  est séparé, on peut trouver deux ouverts  $U_1, U_2$  tels que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  et  $x_i \in U_i$ . Ainsi  $U_1 \times Y$  et  $U_2 \times Y$  sont des ouverts disjoints qui contiennent  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  respectivement. Ainsi  $X \times Y$  est séparé. ■

### Théorème. (*Produit d'espaces séparés*)

Soit  $I$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques non vides munis de leurs topologies respectives. Alors  $\prod_{i \in I} X_i$ , muni de la topologie produit, est séparé, si et seulement si, chaque terme  $X_i$  est séparé.

▷ Nous montrons le sens direct. Supposons les  $X_i$  séparés. Soient  $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$  tels que  $x \neq y$ . Par définition, il existe un certain  $i \in I$  tel que  $x_i \neq y_i$ . Puisque  $X_i$  est séparé, il existe  $U, V$  deux ouverts disjoints de  $X_i$  qui séparent  $x_i$  et  $y_i$ . Alors  $X \times X \times \dots \times U \times \dots \times X$  et  $X \times X \times \dots \times V \times \dots \times X$  sont deux ouverts disjoints de  $\prod_{i \in I} X_i$  contenant respectivement  $x$  et  $y$ .

Les injections canoniques forment des homéomorphismes sur leurs images. Ainsi les  $X_i$  s'identifient à des sous-espaces de  $\prod_{i \in I} X_i$ , qui sont donc séparés comme sous-espaces d'espaces séparés. ■

#### 3.5.2.1 Autres axiomes de séparation

### Propriété. (*Caractérisation pratique des $T_0$* )

Un espace topologique  $X$  est  $T_0$  si et seulement si pour tous  $x, y \in X$ , si  $x \in \overline{\{y\}}$  et si  $y \in \overline{\{x\}}$ , alors  $x = y$ .

▷ Notons  $(*)$  cette propriété.

$(*) \implies T_0$  : supposons  $x \neq y$ . Alors quitte à renommer,  $x$  n'est pas dans l'adhérence de  $\{y\}$ . Ainsi,  $\{y\}^c$  est un voisinage ouvert de  $x$  qui ne contient pas  $y$ .

$T_0 \implies (*)$  : supposons  $x \neq y$ . Alors quitte à renommer, il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  qui ne contient pas  $y$ . Ainsi,  $V^c \ni y$ , donc  $\{y\} \subseteq V^c$  qui est fermé, d'où  $\overline{\{y\}} \subseteq V^c$  et donc  $\overline{\{y\}} \not\ni x$ . ■

#### 3.5.2.1.1 Régularité

### Définition. (*Espace régulier*)

Un espace topologique est *régulier* s'il est simultanément  $T_2$  et  $T_3$ , autrement dit, s'il est séparé et que les points se séparent d'avec les fermés.

**Exemples. (*Espaces réguliers*)**

1. Tout espace grossier est régulier.

**Lemme. (*Proposition T<sub>3</sub>*)**

Un espace est  $T_3$  si et seulement si les ponts se séparent d'avec les fermés par des ouverts relativement disjoints.

**3.5.2.1.2 Régularité complète****Lemme**

Tout espace localement compact est complètement régulier, en particulier régulier.

▷ Tout espace localement compact  $X$  étant séparé par définition, vérifions que  $X$  vérifie  $T_{3\frac{1}{2}}$ . Soient  $x \in X$  et  $F$  un fermé de  $x$  ne contenant pas  $x$ , de complémentaire  $U$ . Notons  $X^*$  le compactifié de  $X$ . Alors  $U$  est un ouvert de  $X^*$ , donc de  $C = X^* \setminus U$  est un fermé de  $X^*$  qui contient  $F$ . D'autre part,  $X^*$  est normal, car compact. Puisque  $\{x\}$  est fermé dans  $X^*$  par séparation de  $X^*$ , le lemme d'Urysohn donne une fonction continue  $X^* \rightarrow [0,1]$  telle que  $f(x) = 0$  et  $f(C) = 1$ . En considérant  $f|_X$ , le tour est joué. ■

**3.5.2.1.3 Régularité****Définition. (*Espace normal*)**

Un espace topologique est *régulier* s'il est simultanément  $T_2$  et  $T_4$ , autrement dit, s'il est séparé et que les fermés sont disjoints sont séparés.

**Exemples. (*Espaces normaux*)**

1. Tout espace métrisable est normal.
2. Tout espace compact est normal.

**Proposition. (*Normal  $\implies$  (complètement) régulier*)**

Tout espace normal est complètement régulier, en particulier régulier.

**Corollaire. (*Métrisable  $\implies$  (complètement) régulier*)**

Tout espace métrisable est complètement régulier, en particulier régulier.

On retrouve aussi :

**Corollaire.** (*Compact  $\implies$  (complètement) régulier*)

Tout espace compact est complètement régulier, en particulier régulier.

**Lemme.** (*Lemme d'Urysohn*)

Un espace topologique  $X$  est  $T_4$  si et seulement si pour tous fermés disjoints  $F, G$  de  $X$ , il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  dite plateau telle que  $f|_F = 0$  et  $f|_G = 1$ .

**Théorème.** (*Théorème de prolongement de Tietze*)

Pour un espace topologique  $X$ , on a l'équivalence entre :

- (i)  $X$  est  $T_4$ ;
- (ii) pour tout fermé  $F$  de  $X$  et toute application continue  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  se prolonge à tout  $X$  en une application continue ;
- (iii) (*un peu redondant*) pour tout fermé  $F$  de  $X$  et toute application continue  $f : F \rightarrow I$  où  $I$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , il existe une application continue de  $X$  dans  $I$  qui prolonge  $f$ .

### 3.5.3 Dénombrabilité

Voir la première section : AXIOMES DE DÉNOMBRABILITÉ, SÉPARABILITÉ.

### 3.5.4 Métrisabilité

**Mnémonik :** un espace est métrisable s'il est maîtrisable.

**Lemme**

Tout espace topologique plongé dans un espace métrique est métrisable.

**Propriété**

Tout espace métrisable est séparé.

Réciproquement :

**Théorème.** (*Théorème de métrisation d'Urysohn*)

Tout espace topologique régulier à base dénombrable est métrisable.

#### 3.5.4.1 Produits d'espaces métrisables

Tout produit fini d'espaces métrisables est métrisable grâce à la distance produit. Dans le cas dénombrable, c'est encore possible grâce à un procédé diagonal. Dans le cas infini quelconque,

c'est encore possible, grâce à l'axiome du choix ! Mais la métrique obtenue est bien loin des métriques élémentaires.

### 3.5.5 Compacité

*Remarque.* Il suffit de vérifier, pour montrer qu'une partie est compacte, que de tout recouvrement éventuellement dépassant, on peut extraire un recouvrement fini.

#### Méthode. (*Travailler un compact en topologie générale*)

Pour tout point  $x \in \text{truc}$ , il existe un ouvert  $U_x$  et la collection des  $U_x$  recouvre  $X$ . Souvent, par séparation, on a en fait un ouvert  $V_{f(x)}$  dual. Il en existe donc un nombre fini qui recouvre  $X$ . Alors l'intersection de leurs duals est encore un ouvert vérifiant la propriété voulue.

#### Propriété. (*Sous-espace compacts*)

Les sous-espaces (quasi-)compacts d'un espace séparé sont ses fermés.

▷ En effet, si  $X$  est compact et  $A \subseteq X$  est fermé, alors  $A$  est compact. D'autre part, si  $X$  est séparé et  $K \subseteq X$  est compact, alors  $K$  est fermé dans  $X$ . ■

Le fait que la notion de compacité soit extrinsèque, confirme que tous les sous-espaces d'un compact ne peuvent être compact.

Ceci d'autant plus que tout espace se plonge dans un espace compact, dans lequel il est n'est donc pas fermé...

On énonce maintenant une propriété qui rend compte du fait qu'un espace compact est en particulier localement compact.

#### Lemme

Tout point d'un espace compact admettant un voisinage ouvert  $U$  admet un voisinage fermé  $V$  contenu dans  $U$ .

▷ Soit  $x$  un tel point et notons  $X$  l'espace compact dont il est question. On sait que  $\text{Fr}(U)$  est un fermé inclus dans  $X$ , donc il est compact. Par séparation, pour tout  $t \in U$ , il existe un voisinage ouvert  $V_t$  de  $t$  et un voisinage  $F_y$  de  $x$  dans  $U$  disjoints. Puisque  $(V_y)_{y \in \text{Fr}(U)}$  recouvre  $\text{Fr}(U)$ , on peut en extraire un sous-recouvrement fini indexé par disons  $t_1, \dots, t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $F_0 = F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_n}$  est un voisinage de  $x$  dans  $U$  ne rencontrant aucun des termes d'un recouvrement de  $\text{Fr}(U)$ , donc  $F := \overline{F_0} \subseteq U = \overline{U} \setminus \text{Fr}(U)$ . ■

### Propriété. (*Raffinement relativement compact d'un recouvrement*)

Soient  $X$  un espace compact et  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  avec  $I$  un ensemble quelconque. Alors il existe un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in J}$  de  $X$  avec  $J \subseteq I$  fini,  $V_i \subseteq U_i$  pour tout  $i \in J$  et  $\overline{V_i} \subseteq U_i$  compact ; on dit que  $V_i$  est *relativement compact dans  $U_i$* . En particulier,  $(\overline{V_i})_{i \in J}$  est un recouvrement fini de  $X$  par des compacts qui est un raffinement de  $(U_i)_{i \in I}$ .

▷ Une façon de raisonner est d'utiliser la compacité locale d'un espace compact. Soit  $x \in X$ . Il existe  $i_x \in I$  tel que  $x \in U_{i_x}$ . D'après le lemme précédent, on peut trouver un voisinage  $F_{i_x}$  de  $x$  avec  $F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$ . Posons  $V_x = \overset{\circ}{F_{i_x}}$  de sorte que  $x \in V_x$  pour tout  $x \in X$ . Alors  $V_x$  est relativement compact, puisque son adhérence est un fermé inclus dans  $X$  qui est compact. La famille  $(V_x)_{x \in X}$  est un recouvrement de  $X$  dont on peut extraire un sous-recouvrement fini qui est bien par construction un raffinement de  $(U_i)_{i \in I}$ , de plus  $\overline{V_x} \subseteq \overline{F_{i_x}} = F_{i_x} \subseteq U_{i_x}$  pour tout  $x$ , et toutes les conditions sont remplies. ■

#### 3.5.5.1 Compacts, quasi-compacts et applications continues

##### Contre-exemple. (*Un quasi-compact non séparé*)

Tout ensemble fini non séparé, par exemple,  $\{a,b\}$  muni de la topologie grossière, est quasi-compact sans être séparé, donc ne peut être dit *compact*. 

##### Propriété. (*Image d'un quasi-compact*)

L'image d'un quasi-compact par une application continue est quasi-compacte.

##### Propriété. (*Image d'un compact*)

L'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compacte.

C'est propriété est très forte, car l'image d'un fermé par une application continue n'a aucune raison d'être fermée, même dans l'image. La compacité permet de rendre les choses bien plus fortes. On en déduit une propriété suivante.

##### Théorème. (*Isomorphisme de compact*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques, et  $f : X \longrightarrow Y$  une application bijective continue. Si  $X$  est quasi-compact et  $Y$  est séparé, alors  $f$  est un homéomorphisme.

▷ Montrons que  $f$  est fermée. Soit  $F$  un fermé de  $X$ , c'est un compact. Ainsi  $f(F)$  est un compact, donc un fermé. ■

### Heuristique

L'idée selon laquelle un compact est petit est trompeuse, tout simplement car la taille est une notion relative. Il est plus intéressant de remarquer qu'un espace n'est pas compact s'il lui manque quelque chose ; de là on déduit qu'un compact ne peut pas « s'étendre à l'infini ».

À méditer, les plongements suivants :

$$B_{\mathbb{C}}(0,1) \hookrightarrow \overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

où les espaces compacts de cette suite sont  $\overline{B_{\mathbb{C}}(0,1)}$  et  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{C}$ .

#### 3.5.5.2 Applications propres

##### Fait

Toute application propre est fermée.

##### Propriété. (*Caractérisation de la propriété par les fibres*)

Soit  $Y$  un espace séparé et localement compact. Soit  $X$  un espace quelconque. Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est propre si et seulement si  $f$  est fermée et les fibres de  $f$  sont fermées au-dessus de chaque élément de  $Y$ .

#### 3.5.5.3 Produit d'espaces compacts

On signale le lemme du tube, parfois utilisé.

##### Lemme. (*Lemme du tube*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $Y$  quasi-compact. Soit  $x \in X$ . Alors tout ouvert contenant  $\{x\} \times Y$  contient un ouvert élémentaire  $U \times Y$  contenant cette partie.

▷ Soit  $O$  un ouvert de  $X \times Y$  contenant  $\{x\} \times Y$ . Par définition, pour tout  $y \in Y$ ,  $(x,y) \in O$ . Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert élémentaire  $U_y \times V_y$  contenant  $(x,y)$  contenu dans  $O$ . En particulier,  $(V_y)_y$  est un recouvrement ouvert du quasi-compact  $Y$ . On peut en extraire un sous-recouvrement fini, indexé par  $Z$ . Posons  $U = \bigcap_{y \in Z} U_y$ . Alors l'ouvert  $U$  contient  $x$  et la réunion des  $V_y$ ,  $y \in Z$  vaut  $Y$  donc  $U \times Y \subseteq O$ . ■

##### Remarques.

1. C'est faux dans le cas général ! L'hypographe avec l'axe des abscisses de la fonction inverse, contient la droite des ordonnées ; elle ne contient aucun tube contenant la droite des ordonnées.

2. On peut montrer que le lemme du tube équivaut à la quasi-compacité de  $Y$  : pour tout  $Y$  non quasi-compact, on peut trouver un  $x$  ne vérifiant pas la propriété du lemme.

### Propriété. (*Produit fini d'espaces compacts*)

Le produit de deux espaces quasi-compacts est quasi-compact.

▷ (*Preuve sans le lemme du tube (explicitement).*) Soient  $X, Y$  deux espaces quasi-compacts. Soit  $(O_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X \times Y$ . Pour tous  $(x, y) \in X \times Y$ , je choisis  $i(x, y) \in I$  tel que  $(x, y) \in O_{i(x, y)}$  et des ouverts  $U_{(x, y)}$  et  $V_{(x, y)}$  de  $X$  et  $Y$  contenant  $x$  et  $y$  tels que  $U_{(x, y)} \times V_{(x, y)} \subseteq O_{i(x, y)}$ . Si on fixe  $x$ , les  $V_{i(x, y)}$ ,  $y \in Y$  recouvrement ouvert de  $Y$ . Puisque  $Y$  est quasi-compact, il existe un sous-ensemble fini  $Y_x \subseteq Y$  tel que les  $V_{i(x, y)}$ ,  $y \in Y_x$  recouvrent  $Y$ . Or, pour  $U_x = \bigcap U_{i(x, y)}$ ,  $y \in Y_x$  forment un recouvrement de  $X$  par des ouverts, car  $Y_x$  est fini. Donc il existe  $X_0 \subseteq X$  tel que  $(U_x)_{x \in X_0}$  est un recouvrement fini de  $X$ . Ainsi, les  $O_{i(x, y)}$ ,  $y \in Y_x$ ,  $x \in X_0$  forment un recouvrement ouvert fini de  $X \times Y$ . ■

Dans le cas général (assez surprenant par ailleurs!), on a besoin de l'axiome du choix.

On montre d'abord un lemme technique.

### Théorème. (*Théorème de compacité d'Alexander*)

On dit qu'un mauvais recouvrement d'un espace topologique  $X$  est un recouvrement dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini. Clairement, un espace séparé est compact si et seulement s'il n'admet aucun mauvais recouvrement ouvert.

Soit  $A$  une prébase d'ouverts de  $X$ . On prétend que si  $X$  admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de  $A$ .

▷ En effet : soit  $M$  l'ensemble des mauvais recouvrements ouverts de  $X$  ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit  $(U_j)_{j \in J}$  une famille totalement ordonnée d'éléments de  $M$ . Soit  $U = \bigcap_{j \in J} U_j$ . Alors  $U$  majore les  $U_j$ . C'est un mauvais recouvrement ouvert de  $X$ , sinon, il contiendrait un sous-recouvrement fini  $V_1, \dots, V_n$ . En prenant  $V_i \in U_{j_i}$  et si  $\beta \in J$  vérifie  $U_{j_i} \subseteq U_\beta$  pour chacun, alors  $U_\beta$  aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction. Donc  $M$  est inductif. Par le théorème de Zorn, soit  $U^*$  un élément maximal de  $M$ . En particulier, pour tout ouvert  $V \notin U^*$ , le recouvrement  $U^* \cup V$  n'est pas mauvais, donc il existe  $U_1, \dots, U_n$  dans  $U^*$  tel que  $\{V, U_1, \dots, U_n\}$  recouvre  $X$ .

Pour terminer la preuve du lemme, remarquons deux choses. D'abord, pour tous ouverts  $V, V'$  de  $X$ , si  $V \notin U^*$  et  $V' \notin U^*$ , alors  $V \cap V' \notin U^*$ . En effet, soient  $U_1, \dots, U_n$  et  $U'_1, \dots, U'_n$  comme dans la remarque précédente. Alors  $V \cap V', U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_n$  recouvre  $X$ , et comme  $U^*$  est mauvais,  $V \cap V' \notin U^*$ . Remarquons également que pour tous ouverts  $V, V'$  de  $X$ , alors si  $V \notin U^*$  et  $V \subseteq V'$ , alors  $V' \notin U^*$ , puisque si  $V, U_1, \dots, U_n$  recouvre  $X$ , alors  $V', U_1, \dots, U_n$  recouvrirait  $X$  aussi. Montrons enfin que  $A \cap U^*$

recouvre  $X$ . Soit  $x_0 \in X$ . Comme  $U^*$  recouvre  $X$ , il existe  $T \in U^*$  tel que  $x_0 \in T$ . Comme  $A$  est une prébase, il existe  $V_1, \dots, V_n$  dans  $A$  tels que  $x_0 \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subseteq T$ . Par les remarques précédentes, il existe  $i$  tel que  $V_i \in U^*$ . Donc  $x_0 \in V_i \in A \cap U^*$ . Enfin, comme  $U^*$  est mauvais,  $A \cap U^*$  l'est aussi. ■

### Théorème. (*Théorème de Tychonov*)

Un produit non vides d'espaces compacts est compact si et seulement si chaque facteur est compact.

▷ Encore une fois le sens direct se déduit de la continuité des projections et de l'image continue d'un compact. Montrons donc le sens réciproque.

Revenons à la preuve. Alors le produit des espaces compacts, donc séparés,  $X_i, i \in I$ , est séparé, par produit quelconque de séparés. S'il n'était pas compact, alors par le lemme technique, il existerait un mauvais recouvrement de ce produit  $X$  par des éléments de la prébase  $A = \{p_j^{-1}(V), j \in I, V$  ouvert de  $X_j\}$ . Pour  $j \in J$ , soit  $\mathcal{A}_j$  l'ensemble des ouverts  $V$  de  $X_j$  tels que  $p_j^{-1}(V) \in U$ . Si  $\mathcal{A}_j$  recouvre  $X_j$ , par compacité de  $X_j$ , il existe  $V_1, \dots, V_n$  dans  $\mathcal{A}_j$  recouvrant  $X_j$ . Mais alors  $p_j^{-1}(V_1) \cup \dots \cup p_j^{-1}(V_n) = p_j^{-1}(X_j) = X$ , ce qui contredit le fait que  $U$  est mauvais. Soit donc  $x_j \in X_j$  tel que  $x_j \notin \mathcal{A}_j$ . On pose  $x = (x_j)_{j \in J} \in X$ . Comme  $U$  recouvre  $X$ , il existe  $j \in I$  et  $V$  ouvert de  $X_j$  tel que  $x \in p_j^{-1}(V) \in U$ . Ceci est une contradiction. Donc  $\prod_{i \in I} E_i$  est un espace compact, ce qu'il fallait montrer. ■

#### 3.5.5.4 Locale compacité

### Définition. (*Espace localement compact*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement compact* s'il est séparé et tout point admet un voisinage compact.

### Théorème. (*Riesz*)

Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.

▷ Le sens direct vient du théorème Bolzano-Weierstrass. Montrons en quoi le théorème de Riesz implique la réciproque. Supposons que 0 admette voisinage compact, alors soit une boule fermée non triviale inclus dans ce voisinage. C'est un fermé d'un compact donc compact. Il existe donc une boule fermé non triviale compacte. Par homéomorphisme, la boule unité fermée est compacte, donc  $E$  est de dimension finie. ■

### Propriété. (*Système de voisinages compacts*)

Un espace séparé  $X$  est localement compact si et seulement si tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

▷ La réciproque est claire. Soit  $X$  localement compact. Soit  $x \in X$  et  $F$  un voisinage compact de  $x$ . Pour tout ouvert  $U$  avec  $x \subseteq U \subseteq F$ , il suffit de montrer qu'il existe un voisinage  $W$  de  $x$  fermé, contenu dans  $U$ ; il est alors automatiquement compact.

Comme  $X$  est séparé, si  $y \neq x$ , soient  $V$  et  $V'$  des voisinages de  $x$  et  $y$  respectivement les séparant. Alors  $y \notin \overline{V}$ : en effet, sinon, pour tout voisinage de  $y$ , en particulier  $V'$ ,  $V \cap V' \neq \emptyset$ . Ainsi  $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V}$ . Par conséquent,  $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$ . Par compacité de  $F$ , il existe des voisinages  $V_1, \dots, V_n$  de  $x$  tels que  $(X - U) \cap \overline{V_1} \cap \dots \cap \overline{V_n} \cap F = \emptyset$ . Alors  $\overline{V_1} \cap \dots \cap \overline{V_n} \cap F$  convient. ■

### Corollaire. (*Ouvert dans un localement compact*)

Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact.

Plus généralement :

### Proposition. (*Sous-espace d'un espace localement compact*)

Un sous-espace topologique d'un espace topologique localement compact est localement compact si et seulement si on peut l'écrire comme différence de deux fermés.

#### 3.5.5.5 Compactification d'Alexandrov

**VOC** On appelle *point à l'infini* d'un espace topologique, l'unique élément de  $\tilde{X} \setminus X$  relatif à une construction d'un compactifié.

### Propriété. (*Compactifié de l'espace*)

Le compactifié de l'espace  $\mathbb{R}^n$  est la  $n$ -sphère.

### Fait. (*Topologie de l'espace dans son compactifié*)

Les ouverts de  $X$  sont tous des ouverts de  $\tilde{X}$ .

Les fermés de  $X$  qui sont des fermés de  $\tilde{X}$  sont les compacts inclus dans  $X$ .

Ces deux faits découlent directement de la construction de la topologie sur  $\tilde{X}$ .

### Contre-exemple

$\mathbb{R}^2$  est un fermé du plan... mais pas son image dans son compactifié  $S^2$ , qui est justement la sphère privée d'un pôle! □

#### 3.5.5.6 Séquentielle compacité

##### 3.5.5.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

On l'énonce.

**Exercice 13**

Un espace compact peut-il contenir un infini discret ?

▷ Éléments de réponse.

Oui : l'image de  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dans  $[0,1]$ .

**3.5.5.6.2 Généralisations**

On fait ce qu'on peut.

**Exercice 14**

Montrer qu'il existe un espace compact non séquentiellement compact.

▷ Éléments de réponse.

Soit  $I = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . Soit  $X = \{0,1\}$ . Pour  $i \in I$ , on note  $i_n$  sa  $n$ -ième composante. Considérons la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $X$  définie par  $f_n(i) = i_n$ . Soit  $(f_{n_k})_k$  une suite extraite de  $f$  qui converge dans  $X$ . Notons  $K$  l'image dans  $\mathbb{N}$  de la suite  $(n_k)_k$ . Soit  $j \in I$  tel que  $j_m = 0$  si  $m \in 2K$ , et  $j_m = 1$  sinon. On détermine l'image de  $(f_{n_k})(j)$  et on montre qu'elle ne converge pas dans  $X$ .

**3.5.5.7 Dénombrabilité à l'infini**

**Définition. (*Espace dénombrable à l'infini,  $\sigma$ -compact*)**

Un espace topologique  $X$  est *dénombrable à l'infini* ou  *$\sigma$ -compact* s'il existe une suite  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de compacts tels que  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

**Exercice 15 (Dénombrabilité à l'infini vs  $\sigma$ -compacité)**

Parfois, on réserve le terme de *dénombrabilité à l'infini* au cas où il existe une suite exhaustive de compacts  $(K_i)_{i \in I}$  tels que  $K_i \subseteq K_{i+1}^\circ$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Montrer que dans le cas où  $X$  est séparé, ces deux notions sont les mêmes. Contre-exemple sinon ?

**Lemme**

Un espace dénombrable à l'infini et localement compact admet un recouvrement dénombrable d'ouverts relativement compacts  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de sorte que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{U_i} \subseteq U_{i+1}$ .

▷ Soit  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un recouvrement dénombrable de  $X$  par des compacts. On construit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  par récurrence. On pose  $U_0 = \emptyset$ . Supposons qu'on ait construit  $U_1, \dots, U_n$  comme demandé. En particulier,  $Q_n = \overline{U_n} \cup K_{n-1} \subseteq X$  est compact. Pour tout  $x \in Q_n$ , soit  $U_x$  un voisinage ouvert de  $x$ . Par compacité

locale, on peut le remplacer par  $V_x$  d'adhérence compacte  $\overline{V_x} \subseteq U_x$  et l'on a encore un recouvrement de  $Q_n$ . Comme  $Q_n$  est compacte, il existe  $J$  fini tel que  $(V_x)_{x \in J}$  recouvre encore  $Q_n$ , et la réunion  $U_{n+1} = \bigcup_{x \in J} V_x$  est donc un voisinage ouvert de  $Q_n$ , en particulier de  $\overline{U_n}$ . De plus,  $\overline{U_{n+1}}$  est bien compact, car  $\overline{\bigcup_{x \in J} V_x} = \bigcup_{x \in J} \overline{V_x}$ . Il reste à voir que  $(U_i)_{i \in I}$  ainsi obtenue est un recouvrement de  $X$ . Or par construction, les  $U_{i+1}$  contiennent les  $Q_i$  et donc les  $K_i$  qui forment eux-mêmes un recouvrement, donc c'est bon. ■

### Propriété. ( $\sigma$ -compact $\implies$ Lindelöf)

Dans un espace dénombrable à l'infini, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable.

### Curiosité

Un espace séparé à la fois de Baire et  $\sigma$ -compact est localement compact en au moins un point.

En particulier, dans le cas d'un groupe topologique, il est localement compact.

### Propriété. (Produit d'espaces $\sigma$ -compacts)

Tout produit fini d'espaces  $\sigma$ -compacts est  $\sigma$ -compacts.

### Contre-exemple. (Produit de $\sigma$ -compacts pas $\sigma$ -compact)

L'espace  $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1]$  est  $\sigma$ -compact. Cependant, on montre que  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  n'est pas  $\sigma$ -compact. □

#### 3.5.5.8 Paracompacité

### Définition. (Espace paracompact)

Un espace topologique  $X$  est *paracompact* si et seulement si tout recouvrement ouvert admet un raffinement « localement fini », i.e. étant donné  $(V_i)_{i \in I}$ , pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U \ni x$  tel que  $\{i \in I \mid V_i \cap U \neq \emptyset\}$  est fini.

*Remarque.* Un compact est bien sûr paracompact.



Si  $(V_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$ , soit  $\bigcup_{i \in I} V_i = X$ , un *raffinement* est un recouvrement  $(V'_j)_{j \in J}$  tel que pour tout  $j$ , il existe  $\varphi(j) \in I$  tel que  $V'_j \subseteq V_{\varphi(j)}$ . Un sous-recouvrement est un raffinement particulier.

Si l'on remplace *localemement fini* par *fini* dans la définition, on retombe clairement sur la notion de compacité. Plus étonnant, si l'on remplace *raffinement* par *sous-recouvrement* dans la définition précédente, on retombe également sur la notion de compacité !

▷ Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Soit  $V \in \mathcal{U}$  non vide contenant  $x$  et posons  $\mathcal{V} = \{G \cup V, G \in \mathcal{U}\}$ . Alors  $\mathcal{V}$  est clairement un recouvrement ouvert de  $X$ , mais puisque chacun de ses membres contient  $V$ , aucun sous-recouvrement ne peut être localement fini en  $x$  à moins qu'il soit lui-même fini. Par suite,  $\mathcal{U}$  admet un sous-recouvrement non seulement localement fini (par hypothèse) mais fini (par ce que l'on vient de dire). Ainsi,  $X$  est compact. ■

Tous les espaces familiers sont paracompacts. En effet :

#### Théorème. (*Théorème de Stone*)

Toute espace métrique est paracompact.

On dispose de plusieurs théorèmes pour montrer que certains espaces plus tordus le sont également.

#### Fait. (*Réunion disjointe de paracompacts*)

Toute réunion disjointe d'espaces paracompacts est paracompacte. Il suffit de l'écrire.

#### Lemme. (*Localemement compact + $\sigma$ -compact $\Rightarrow$ paracompact*)

Un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact.

▷ Soit  $X$  un tel espace. Par un lemme sur la dénombrabilité à l'infini, on sait que  $X$  possède un recouvrement dénombrable  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'ouverts relativement compacts avec  $\overline{V_i} \subseteq V_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Remarquons en particulier que  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  est compact quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$  quelconque. En tant que recouvrement de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ , ce recouvrement admet un sous-recouvrement fini de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  indexé par  $J_n \subseteq I$ . On considère  $\mathcal{U}_n = \{U_i \cap (V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}})\}$ , qui est bien un recouvrement ouvert de  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$ . Posons  $\mathcal{U}$  la famille des  $\mathcal{U}_n$ , pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ . C'est un raffinement de  $(U_i)_{i \in I}$ . En effet, tout  $\mathcal{U}_n$  est contenu dans l'un des  $U_i$  par construction. C'est encore un recouvrement, car elle recouvre  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et par construction de  $(V_i)_i$ ,  $\overline{V_{n+1}} \setminus V_n$  recouvre  $X$ . Enfin, elle est localement finie, car tout point  $x \in X$  admet un voisinage ouvert de la forme  $V_{n+2} \setminus \overline{V_{n-1}}$  et puisque par construction ce recouvrement a une intersection triviale avec les points de  $\mathcal{U}$  pour  $i \geq n+3$  et comme tous les  $\mathcal{U}_n$  sont finis, de sorte que  $\bigcup_{k < n+3} U_k$  est fini. ■

### Reformulation pratique. (*Paracompacité dans le cas lclc*)

Soit  $X$  un espace topologique localement compact et localement connexe. Alors  $X$  est paracompact, si et seulement si, chaque composante connexe est dénombrable à l'infini.

▷ Il s'agit d'abord de remarquer qu'un espace localement compact et dénombrable à l'infini est paracompact. Oh, mais on vient de le faire. Le sens réciproque du théorème vient donc facilement. En effet, chaque composante connexe est fermée. Elle est donc localement compacte. Puisqu'elle est dénombrable à l'infini par hypothèse, elle est donc paracompacte. Par réunion disjointe de paracompacts, elle est paracompacte.

Le sens direct est plus complexe. On a besoin d'une propriété additionnelle : un espace est dit *fortement paracompact*, si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un raffinement  $*$ -fini, autrement dit tel que chaque membre n'intersecte qu'un nombre fini de membres de la collection. On peut vérifier en exercice qu'un espace paracompact et localement compact est fortement paracompact. Par suite, les composantes connexes de  $X$  sont fortement paracompactes pour les mêmes arguments que dans la preuve de la réciproque. De plus,  $C$  étant connexe, il a la propriété de Lindelöf, et donc par compacité local,  $C$  est  $\sigma$ -compact. ■

### Exercice 16

Un espace paracompact est-il nécessairement à base dénombrable de voisinages ?

### Théorème. (*Théorème de Dieudonné*)

Tout espace paracompact est normal.

### Lemme. (*Théorème de Morita*)

Un espace régulier qui est réunion dénombrable de sous-espaces compacts est paracompact.

#### 3.5.5.9 Théorème de la cornemuse

#### 3.5.6 Complétude

#### 3.5.7 Convexité

### Propriété. (*Produit de convexes*)

Tout produit de convexes est convexe.

▷ Car tout produit de segment fait l'affaire. ■

### 3.5.8 Connexité par arcs

Les notions de connexité s'énonce tout aussi bien dans un espace topologique que dans un espace métrique ou vectoriel normé. On impose directement le formalisme général.

La notion de connexité par arcs, contrairement à celle de connexité, s'introduit au moyen de celle de composante connexe (par arcs) : dans cette section, on parlera de composante connexe pour, en toute rigueur, *composante connexe par arcs*.

#### Définition-propriété. (*Composantes connexes (par arcs)*, *connexité par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $C$  une partie de  $X$ . On définit la relation sur  $C$  : *être connecté par un chemin*, ou *il existe un chemin continu entre*, s'il existe  $a < b \in \mathbb{R}$ , et l'on peut sans perte de généralité fixer  $[0,1]$  à cette étape, et un arc paramétré  $\gamma : [a,b] \rightarrow C$  (!) de classe continue tel que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ .

Cette relation est d'équivalence ; ses classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes (par arcs)* de  $C$ . On dit que  $C$  est *connexe par arcs*, ou connexe s'il n'y a pas d'ambiguïté, s'il y a une unique composante connexe : lui-même dans ce cas.

Ainsi,  $X$  est connexe par arcs si deux points quelconques de  $X$  sont toujours reliés par un chemin continu.

On montrera avec la propriété de réunion de connexe par arcs que les composantes connexes par arcs sont les parties connexes par arcs maximales pour l'inclusion.

▷ Trouver les bonnes transformations d'application pour montrer la transitivité. ■

#### Heuristique

La connexité par arcs est une notion extrinsèque.

#### Exemples. (*Connexes par arcs*)

1. L'ensemble vide, les singletons sont connexes par arcs.
2. Tout espace vectoriel normé, tout espace affine est connexe par arcs.
3. Tout convexe, toute partie étoilée est connexe par arcs.

On a des propriétés analogues à celles générales sur les connexes. Elles se démontrent toutefois bien plus facilement.

#### Propriété. (*Connexité par arcs des réunions*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $(C_i)_{i \in I}$  des connexes par arcs de  $X$ .

1. Si les  $C_i$  se rencontrent deux à deux, leur réunion est connexe par arcs.
2. Si l'intersection des  $C_i$  est non vide, même conclusion.
3. Si  $I$  est dénombrable et  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ , même conclusion.

**4.** Si  $I$  est fini et même hypothèse, même conclusion.

▷ Dans le cas dénombrable ou fini, il s'agit d'appliquer un nombre fini de fois la transitivité de la relation d'équivalence définissant la connexité par arcs. Dans le premier cas, il suffit de l'appliquer... une seule fois. ■

**Contre-exemple. (*Complémentaire d'un connexe*)**

Le complémentaire d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs.

Par exemple, le complémentaire de l'axe des abscisses, connexe par arcs puisqu'espace affine, dans le plan a exactement deux composantes connexes : les deux demi-plans supérieur et inférieur. □



L'intersection de deux connexes par arcs, même non disjoints (hi hi), n'a aucune raison de l'être !



L'adhérence d'un connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs : le sinus du topologue le démontre.

**Propriété. (*Produit de connexes par arcs*)**

Un produit non vide d'espaces topologiques non vides est connexe par arcs si et seulement chaque composante est connexe par arcs.

▷ C'est très rapide ! L'inclusion directe n'est pas dure par image continue d'un connexe par arcs par les projections ; la réciproque vient de la caractérisation de la continuité des applications à valeurs dans un produit, et il suffit alors de considérer l'application produit. ■

**Propriété. (*Image d'un connexe par une application continue*)**

L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

▷ Découle directement de la définition. ■

**Corollaire. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)**

Soit  $X$  une espace topologique connexe par arcs et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors l'image de  $f$  est un intervalle.

▷ Découle du TVI version connexe. ■

**Corollaire. (*Somme de deux connexes par arcs*)**

Soient  $A, B$  deux connexes par arcs de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $A + B$  est connexe par arcs.

▷ C'est l'image de  $A \times B$  par la somme, continue. ■

*Remarque.* On a donc une propriété similaire pour les connexes.

**Corollaire. (*Connexité par arcs dans  $\mathbb{R}$* )**

Les connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont exactement les intervalles de  $\mathbb{R}$ .

▷ Soit  $C$  un connexe par arcs de  $\mathbb{R}$ . Alors c'est un connexe, comme on le verra plus tard, donc un intervalle.

Réciproquement, montrons qu'un intervalle est connexe par arcs. Soit  $I$  cet intervalle et  $a < b \in I$ . Par définition,  $[a,b] \subseteq I$ . Alors le chemin affine  $\gamma : [0,1] \rightarrow [a,b] \subseteq I$ ,  $t \mapsto (1-t)a + tb$  convient. ■

**Corollaire**

En dimension 1, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident (en dimension 2, non plus).

On énonce le théorème suivant, valable dans les espaces vectoriels normés.

**Définition. (*Connexité par lignes brisées*)**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est *connexe par lignes brisées* ou *polygonales* si pour tous  $x,y \in A$ , il existe  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $[x,a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, y]$  soient tous inclus dans  $A$ .

**Propriété. (*Connexité par lignes brisées des ouverts d'un evn*)**

Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace vectoriel normé  $X$ . Alors  $\Omega$  est connexe si et seulement s'il est connexe par lignes brisées. Il est alors connexe par arcs affines par morceaux, donc  $C_{pm}^1$ .

▷ Il suffit d'observer la preuve du résultat suivant, donné dans la partie de la Connexité sur le lien entre connexité et connexité par arcs. Il est clair sinon que la connexité par lignes brisées implique la connexité par arcs et donc la connexité. ■

Dans un espace vectoriel normé, les boules sont convexes, donc connexes par lignes brisées et simplement connexes, donc connexes par arcs, et même connexes. En revanche, **une boule d'un espace métrique n'a aucune raison d'être connexe par arcs !**



**Exercice 17 (Co-connexité des hyperplans)**

Montrer que dans un evn  $E$ , pour tout hyperplan  $H$ ,  $H$  est fermé si et seulement si  $E \setminus H$  n'est pas connexe par arcs.

## ▷ Éléments de réponse.

Soit  $H$  un hyperplan fermé de  $E$ . C'est le noyau de  $\phi$ , forme linéaire continue non nulle. Posons  $U = \{x \in E, \phi(x) > 0\}$  et  $V = \{x \in E, \phi(x) < 0\}$ . Alors  $U, V$  sont clairement des ouverts disjoints, non vides par non nullité. Ils sont connexes, car images réciproques de connexes par des applications continues : non, non et non ! Comment m'avez-vous cru ? Ils sont connexes puisque convexes donc connexes par arcs. Ainsi  $E \setminus H$  a deux composantes connexes non triviales, donc n'est pas connexe, donc n'est pas connexe par arcs.

Réciproquement, soit  $H$  un hyperplan non fermé. Soient  $x, y \in E, x, y \notin H$ . On peut supposer  $x \neq y$ . Quitte à multiplier par un scalaire et invoquer un argument de convexité le long d'une droite, on peut supposer  $|x - y| = 1$ . On construit par récurrence une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E \setminus H$  qui vérifie  $x_0 = y$ ,  $|x - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$  et  $x_{n+1} - x_n \in H$ . L'initialisation est déjà faite. On suppose les  $k$  premiers termes construits.  $H$  est dense dans  $E$ , donc il existe  $v \in H$  tel que  $|(x - x_k) - v| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ . On pose alors  $x_{k+1} = x_k + v$  qui n'est pas dans  $H$ , autrement,  $x_k \in H$ , et cela vérifie toutes les conditions. On définit enfin  $f(0) = x$ ,  $f(\frac{1}{2^n}) = x_n$  et  $f$  affine entre deux de ces points. Alors  $f(1) = y$  et  $f$  relie  $x$  à  $y$  dans  $E \setminus H$ .

**3.5.9 Connexité****3.5.9.1 Définition****Définition. (*Espace connexe*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *connexe* ou, si le contexte n'est pas clair, *connexe général*, si les seuls ouverts fermés de  $X$  sont  $\emptyset$  et  $X$ .

**Reformulation pas pratique. (*Connexité par les frontières*)**

Un espace topologique est connexe si et seulement si la frontière de toute partie non vide ou étendue à l'espace tout entier est non vide.

**Propriété. (*Caractérisations de la connexité*)**

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est connexe,
2. il n'existe pas de partitions de  $X$  en ouverts disjoints non triviaux,
3. il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux ouverts disjoints non triviaux,
4. il n'existe pas de partitions de  $X$  en deux fermés disjoints non triviaux,
5. toute application continue de  $X \rightarrow Y$  est constante où  $Y$  est un espace discret fixé,
6. toute application continue de  $X \rightarrow D$  est constante où  $D$  est un ensemble dénombrable, muni de la topologie discrète, fixé,

**7.** toute application continue de  $X \rightarrow \{0,1\}$  est constante.

▷ Supposons qu'il existe une partition de  $X$  en ouverts disjoints non triviaux. On en choisit un  $O_1$  et on note  $O_2$  la réunion de tous les autres ; on a alors une partition en deux ouverts disjoints non triviaux. Alors  $O_1$  est un ouvert de  $X$  et un fermé de  $X$ , car son complémentaire est un ouvert ( $O_2$ ) de  $X$ . Puisque ni  $O_1$  ni  $O_2$  ne sont vides,  $O_1$  n'est pas égal à  $\emptyset$  et  $X$ .

Une partition en deux ouverts disjoints non triviaux est une partition en deux fermés disjoints non triviaux, puisque que le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue non constante où  $Y$  est un espace discret donné. Soit  $x$  une valeur prise par  $f$ . Alors  $f^{-1}(x)$  est un fermé, car  $f$  est continue. Soit  $Y'$  le complémentaire de  $\{x\}$  dans  $Y$ . Puisque  $Y$  est discret,  $Y'$  est fermé. Ainsi  $f^{-1}(Y')$  est un fermé, et c'est le complémentaire de  $f^{-1}(x)$ . Donc  $f^{-1}(x)$  est un ouvert fermé non trivial, car  $f^{-1}(Y')$  contient au moins un point par non-constance, de  $X$ .

Les implications suivantes sont immédiates.

Soit  $A$  un ouvert fermé non trivial de  $X$ . Alors  $f = \mathbb{1}_A$  est une application non constante de  $X$  dans  $\{0,1\}$ . En plus, elle est continue : en effet,  $f^{-1}(1) = A$  est un ouvert et  $f^{-1}(0) = \complement A$  est un ouvert en tant que complémentaire d'un fermé. ■

▷ **Éléments de réponse.**

On s'intéressera notamment aux parties d'un espace topologique connexe ; il n'y a aucune raison qu'elles soient connexes. **On dit que  $A \subseteq X$  est connexe si elle l'est pour la topologie induite. En particulier, la connexité est une notion extrinsèque.**

Intuitivement, les connexes sont les parties d'un seul tenant (de même que les parties connexes par arcs, bien que les deux notions ne coïncident pas...). On se représente aisément les propriétés générales sur les connexes par des dessins de patatoïdes dans le plan.

**Contre-exemple. (*Un ensemble non connexe pas trivial*)**

$\mathbb{Q}$  est non connexe.

En effet,  $\sqrt{2}$  n'est pas dans  $\mathbb{Q}$ . Ainsi  $\mathbb{Q} = (]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}) \cup (]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q})$  partition en deux ouverts disjoints non vides de  $\mathbb{Q}$  : ils contiennent respectivement 1 et 2. □

**Méthode. (*Montrer qu'une partie n'est pas connexe*)**

Cette technique est fondamentale, car il est plus simple d'exhiber des ouverts disjoints non vides d'un espace général plutôt que des ouverts relatifs.

Pour montrer que  $A \subseteq X$  est non connexe, il faut et il suffit d'exhiber deux ouverts de  $X$  non vides, disjoints  $O_1, O_2$  tels que  $O_1 \cap A, O_2 \cap A \neq \emptyset$  et  $A \subseteq O_1 \cup O_2$ .

Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles. La preuve n'est absolument pas triviale.

**Théorème. (*Connexes de  $\mathbb{R}$* )**

Les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

▷ Soit  $C$  un connexe de  $\mathbb{R}$ . Alors  $C$  est un intervalle. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait  $a, b \in C$  et  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $a < x < b$  et  $x \notin C$ . Ainsi  $C \subseteq ]-\infty, x] \cup ]x, +\infty[$ , donc  $C$  se partitionne en  $C \cap ]-\infty, x[$  et  $C \cap ]x, +\infty[$  qui sont deux ouverts de  $C$ , donc  $C$  ne serait pas connexe.

Réciproquement, montrons que les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont connexes : ce n'est pas évident. Si  $I$  intervalle est un singleton, c'est déjà fait. D'autre part,  $I^\circ \subseteq I \subseteq \overline{I^\circ} = \overline{I}$ , donc il suffit de montrer que tout intervalle ouvert  $]a, b[$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  est connexe. Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \{0, 1\}$  une application continue. Si  $f$  n'était pas constante, il existerait  $x, y \in I$  vérifiant  $a < x < y < b$  tels que  $f(x) \neq f(y)$ . Pour fixer les idées, prenons  $f(x) = 0$  et  $f(y) = 1$ . On pose :

$$A = \{z \in I, z \geq x \text{ et } \forall t \in [x, z] \quad f(t) = 0\}.$$

L'ensemble  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , car elle contient  $x$ , majorée par  $y$ . Soit  $c$  sa borne supérieure. Par continuité de  $f$ ,  $f(c) = 0$ . Mais  $f$  étant continue à droite en  $c$ , il existe  $\eta$  tel que pour tout  $t \in [c, c + \eta[, |f(t) - f(c)| < \frac{1}{2}$ . Par conséquent pour tout  $t \in [c, c + \eta[, f(t) = 0$ , d'où  $f(c + \eta/2) = 0$ , ce qui contredit la maximalité de  $c$ . Ainsi,  $f$  est constante, donc par caractérisation,  $I$  est connexe, ce qu'il fallait montrer. ■

**Propriété. (*Connexité de  $\emptyset$* )**

L'ensemble vide est connexe.

**Propriété. (*Connexité des singletons*)**

Tout singleton est connexe.

**3.5.9.2 Opérations sur les connexes**

La connexité est stable par quelques opérations bien choisies.

**Propriété. (*Réunion de connexes qui s'entendent bien*)**

Toute réunion (quelconque) de connexes dont les intersections deux à deux sont non vides est connexe.

▷ Soient  $X$  un espace topologique et  $(C_i)_{i \in I}$  une famille de connexes de  $I$  dont on suppose que  $\forall i, j \in I \quad i \neq j \implies C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . Soit  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts disjoints non vides de  $X$  tels que  $R = \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Si  $I$  est vide,  $R$  est vide et  $R$  est connexe. Sinon, soit  $i_0 \in I$ . Alors  $C_{i_0} \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2$ . Par connexité de  $C_{i_0}$ , et sans perte de généralité, on a  $C_{i_0} \subseteq \Omega_1$ . Soit  $i \in I$ . Puisque  $C_i$  est connexe, on a  $C_i \subseteq \Omega_1$  ou  $C_i \subseteq \Omega_2$ . Or  $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ , donc on ne peut avoir  $C_i \subseteq \Omega_2$ , puisque  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont disjoints ; ainsi  $C_i \subseteq \Omega_1$ . En passant à la réunion,  $R \subseteq \Omega_1$ . ■

**Corollaire. (*Réunion de connexes qui piquent-niquent*)**

Toute réunion de connexes d'intersection non vide est connexe.

- ▷ Elle vérifie en particulier les hypothèses de la propriété précédente. ■

Dans le cas d'un ensemble dénombrable, on peut faire mieux.

**Propriété. (*Réunion dénombrable de connexes à la queue leu leu*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties de  $X$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$  est connexe.

- ▷ Pour tout  $i \in I$ , étant donnée une application constante  $f : \bigcup_{i \in I} C_i \longrightarrow \{0\}$ , on a  $f|_{C_i} = f|_{C_{i+1}}$  au sens de son unique valeur comme fonction continue sur un connexe. Par récurrence, pour tout  $i \in I$ , la valeur de  $f$  sur  $C_i$  est celle sur  $C_0$ . Donc  $f$  est constante. ■

**Propriété. (*Réunion finie de connexes non disjoints*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C_1, \dots, C_n$ ,  $n$  un entier naturel, des connexes de  $X$  tels que  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ . Alors  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  est connexe.

- ▷ Il suffit d'adapter un peu la preuve générale. ■



Attention ! L'intersection de deux connexes n'a aucune raison d'être connexe.

**Propriété. (*Connexité des parties intercalées entre la fermeture*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie connexe de  $X$ . Alors toute partie  $B$  telle que  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  est connexe.

- ▷ Soit  $f : B \longrightarrow \{0,1\}$  une application continue. Elle se restreint en une application continue sur  $A$ . Puisque  $A$  est connexe,  $f$  est constante sur  $A$  ; sans perte de généralité, supposons  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in A$ . Par continuité,  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in \overline{A}$  : en effet,  $f^{-1}(\{0\})$  est un fermé contenant  $A$ , donc contient  $\overline{A}$ . En particulier,  $f$  est constante sur  $B$ , ce qu'il fallait montrer. ■

- ▷ On peut également donner une preuve calculatoire de ce fait. ■

**Corollaire. (*Connexité de l'adhérence d'un connexe*)**

L'adhérence d'un connexe est connexe.

Attention, on verra qu'on n'a pas de propriétés semblables pour l'adhérence d'un simple connexe par arcs.

**Contre-exemple. (*Partie non connexe dont l'adhérence est connexe*)**

Deux boules ouvertes tangentées conviennent. □

**Propriété. (*Produit d'espaces connexes*)**

Un produit fini non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes sont connexes.

▷ On donne donc d'abord la preuve dans le cas fini, plus simple. Notons que le sens direct est direct par image continue d'un connexe par les projections.

On fixe  $(x,y) \in X \times Y$ , ce produit étant non vide par hypothèse. Alors  $\{x\} \times Y$  est connexe. En effet, il est homéomorphe à  $X$  ! Ainsi, pour tous  $b,b' \in Y$ ,  $(x,b)$  et  $(x,b')$  sont dans la même composante connexe. De même, puisque  $X \times \{y\}$  est connexe, pour tous  $a,a' \in X$ ,  $(a,y),(a',y)$  sont dans la même composante connexe. Soient donc en général  $(a,b),(a',b') \in X \times Y$ . Alors  $(a,b) \sim (a,b') \sim (a',b')$  pour la relation être dans la même composante connexe. Ainsi  $X \times Y$  n'a qu'une composante connexe. ■

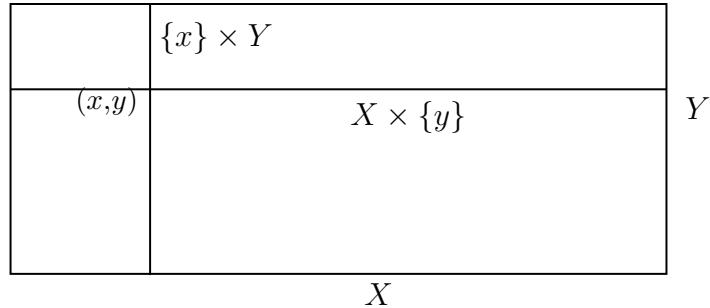


FIGURE 3.5.2 : Modélisation de la preuve du produit de deux espaces connexes. —

On considère l'espace produit  $X \times Y$ , un point  $(x,y)$  et les deux fibres convoquées par lui.

**Théorème. (*Produit d'espaces connexes*)**

Un produit non vide d'espaces topologiques est connexe, si et seulement si, toutes ses composantes le sont.

▷ De même, le sens direct est donné par la continuité des projections. Réciproquement, supposons que pour tout  $i \in I$ ,  $E_i$  soit un espace topologique connexe. Montrons que le produit est connexe. Soient  $a,b \in \prod_{i \in I} E_i$  avec  $J = \{j \in I, a_j \neq b_j\}$  fini. Alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \prod_{j \in J} E_j &\longrightarrow \prod_{i \in I} E_i \\ x &\longmapsto a_i \text{ si } i \in I \setminus J, x_i \text{ sinon} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image. Son image est donc connexe. Comme elle contient  $a$  et  $b$ , on en déduit que la composante connexe de  $a$  contient l'ensemble  $A = \{b, J \text{ est fini}\}$ . Or par hypothèse le produit est non vide. Montrons simplement maintenant que  $\overline{A} = \prod_{i \in I} E_i$ , dont on déduira que  $\prod_{i \in I} E_i$  est connexe. Soit  $x$  un élément du produit. Soit  $R(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$  un rectangle contenant  $x$ . Alors  $R \cap A$  contient au moins  $x'$  qui vaut  $x_i$  si  $i = i_1, \dots, i_k$  et  $a_i$  sinon. ■

On termine par un résultat rigolo appelé *théorème du passage à la douane*.

#### Théorème. (*Théorème du passage des douanes*)

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie  $A$  et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de  $A$ .

▷ Soit  $C$  un connexe de l'espace topologique  $X$ . On suppose que  $C \cap A \neq \emptyset$  et que  $C \cap \mathbb{C}_X A \neq \emptyset$  pour une partie quelconque  $A$  de  $X$ . Alors  $\emptyset \neq \overline{C \cap A} \subseteq \overline{C} \cap \overline{A}$  et de même  $\emptyset \neq \overline{C} \cap \overline{\mathbb{C}_X A} = \mathbb{C}_X \overline{A}$ . On rappelle que  $\overline{C}$  est connexe. Si  $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}_X A}$  est tel que  $C \cap Fr(A) = \emptyset$ , alors encore  $\overline{C} \cap Fr(A) \neq \emptyset$ , car une frontière est fermé. Par suite, comme  $\overline{A}, Fr(A), \mathbb{C}_X \overline{A}$  est une partition de  $X$ ,  $\overline{C} \cap \overline{A}, \overline{C} \cap \mathbb{C}_X \overline{A}$  est une partition de  $\overline{C}$  en deux ouverts non vides disjoints, contradiction. ■

#### 3.5.9.3 Connexes et applications

#### Propriété. (*Image d'un connexe par une application continue, théorème de Bolzano*)

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces topologiques  $X, Y$ . On suppose  $X$  connexe. Montrons  $f(X)$  connexe. Soit  $g : f(X) \rightarrow \{0,1\}$  une application continue. Alors  $g \circ f : X \rightarrow \{0,1\}$  est bien définie, continue par composition et donc constante, car  $X$  est connexe. Alors  $g$  est constante : en effet, si  $y \in f(X)$ ,  $y = f(x)$  d'où  $g(y) = g \circ f(x) = C$ . C'est démontré. ■

*Remarque.* On retrouve les caractérisations 5 à 7 de la connexité. En effet, *les composantes connexes d'un espace discret sont les singletons*.

#### Corollaire. (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit  $X$  une espace topologique connexe et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Alors l'image de  $f$  est un intervalle.

La notion de connexité, parmi d'autres, est l'une des notions fondamentales qui permet de passer du global au local. Un premier exemple.

**Théorème. (*Applications localement constantes*)**

Soit  $X$  un espace connexe. Soit  $f$  une application localement constante sur  $X$ , alors  $f$  est constante.

▷ On remarque d'abord qu'une telle application  $f : X \rightarrow Y$  est continue. Soit en effet  $x \in X$ . Soit  $W$  un voisinage de  $f(x)$  dans  $Y$ . On choisit  $V$  un voisinage de  $x$  sur lequel  $f$  est constante. Alors  $f(V) \subseteq W$  trivialement.

Par définition des applications non vides  $X$  est non vide. Sinon, soit  $x_0$  un point de  $X$  et  $c = f(x_0)$ . On note  $A = \{x \in X, f(x) = c\}$ . Alors  $A$  est non vide et c'est un fermé par continuité de  $f$ . Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $x \in A$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $t \in V$ ,  $f(t) = c$ , soit  $V \subseteq A$ . Ce qui termine la preuve. ■

**3.5.9.4 Composantes connexes****Lemme. (*Composante connexe*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $x \in X$ . Alors il existe une plus grande partie connexe  $C_x$  contenant  $x$ . C'est la réunion de tous les parties connexes de  $X$  contenant  $x$ . On dit parfois que  $C_x$  est *maximamente connexe*.

▷ Découle de la propriété sur les réunions de connexes ayant tous un point en commun. ■

**Lemme**

Toute partie non vide ouverte fermée et connexe d'un espace topologique en est une composante connexe.

▷ Par maximalité. ■

Ce lemme n'est pas utile.

**Définition-propriété. (*Composantes connexes*)**

Soit  $x \in X$ ; l'ensemble  $C_x$  est appelé *composante connexe* de  $x$ . Les  $C_x$  sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence  $x \sim y$  si  $x \in C_y$ , aussi définissable par : il existe  $C$  connexe tel que  $x, y \in C$ . En particulier, les composantes connexes de  $X$  forment une partition de  $X$ .

▷ Rapide. ■

Ainsi, un espace se décompose toujours en réunion de connexes.

On peut se demander la structure topologique (ouverte, fermée) des composantes connexes dans l'espace.

**Propriété. (*Fermeture des composantes connexes*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Alors  $C$  est fermée dans  $X$ .

▷ Vient de ce que l'adhérence d'un connexe est connexe. ■

**Propriété. (*Ouverture des composantes connexes en nombre fini*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Si  $X$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ Puisqu'une réunion finie de fermée est fermée. ■

**Propriété. (*Ouverture des composantes connexes si localement connexe*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe de  $X$ . Si  $X$  est localement connexe, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ C'est évident : soit  $x \in C$ . Alors  $X$  est trivialement voisinage de  $x$ ; soit un voisinage ouvert connexe de  $x$ . Par maximalité, ce voisinage est tout entier contenu dans  $C$ , donc  $C$  est voisinage de chacun de ces points. ■

En particulier, **dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.**

On verra d'autres résultats sur les composantes connexes d'un ouvert dans le cas localement connexe.

**Propriété. (*Composantes connexes du produit*)**

Dans un produit d'espaces topologiques  $\prod_{i \in I} E_i$  la composante connexe du point  $x$  est le produit des composantes connexes de  $x_i$  dans  $E_i$ .

▷ Par continuité des projections. ■

**3.5.9.5 Totale discontinuité**

On introduit une notion qui traduit un défaut puissant de connexité.

**Définition. (*Espace totalement discontinu*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons (ou « points », légèrement improprement).

Un espace totalement discontinu ayant au moins deux éléments n'est jamais connexe, ni connexe par arcs.

Tout espace discret est totalement discontinu. Cette condition n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

### Exemple fondamental. ( $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu)

En effet, soient  $x \leq y \in \mathbb{Q}$ . On suppose que  $x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe  $C$ . Alors tout connexe contenant  $x$  et  $y$  est inclus dans  $C \subseteq \mathbb{Q}$ . En particulier,  $[x,y] \subseteq C \subseteq \mathbb{Q}$ . Ceci n'est pas possible dès que si  $x < y$ .

Un autre exemple, un peu moins évident :  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$  est totalement discontinu.

### Exercice 18

Montrer que  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$  est totalement discontinu.

### Exercice 19 (Un connexe dénombrable)

On souhaite montrer qu'il existe un espace topologique connexe non discret, non grossier, séparé et dénombrable. Pour cela, soient  $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+$  et  $Y = \mathbb{Q} \times \{0\}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $y = (q,0) \in Y$ , posons  $B(y,\varepsilon) = \{(p,0) \in Y, |p - q| < \varepsilon\}$ . Pour  $x = (p,q) \in X - Y$ , notons  $T_x$  le triangle équilatéral du plan dont les trois sommets sont  $x(p,q)$ ,  $(d(x),0) = p+q/\sqrt{3},0$ ,  $(g(x),0) = (p-q/\sqrt{3},0)$ . On pose alors  $B(x,\varepsilon) = \{x\} \cup \{(s,0) \in Y, |s - d(x)| < \varepsilon\} \cup \{(s,0) \in Y, |s - g(x)| < \varepsilon\}$ . On munit donc  $X$  de la topologie engendrée par ces boules. Montrer que  $X$  est connexe.

#### 3.5.9.6 Lien avec la connexité par arcs

### Propriété. (*Connexe par arcs $\implies$ connexe*)

Tout espace connexe par arcs est connexe.

▷ Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs. Si  $X$  est vide, c'est terminé. Sinon, soit  $x \in X$ . On écrit  $X$  comme la réunion  $X = \bigcup_{y \in X} \gamma_y([0,1])$  où pour tout  $y$ ,  $\gamma_y \in C^0([0,1],X)$  est tel que  $\gamma_y(0) = x$  et  $\gamma_y(1) = y$ , cette existence étant garantie par la connexité par arcs. Or les  $\gamma_y([0,1])$  sont connexes comme images continues (démontré) d'intervalle donc connexe (démontré). De plus, ils ont tous le point  $x$  en commun. Ainsi,  $X$  est connexe. ■

La réciproque est fausse, mais, conformément à l'intuition, les exemples que l'on peut trouver sont gravement pathologiques.

### Exemple fondamental. (*Sinus du topologue*)

On considère le graphe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $f : x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ . On peut sans problème se restreindre au graphe sur  $]0,1]$ . On peut facilement vérifier que son adhérence est  $\Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$ .

En effet, pour un point  $(0,y)$ , on pose  $t_n = \frac{1}{2\pi n + c}$ ; alors  $(t_n, f(t_n)) = (t_n, y) \rightarrow (0, y)$  est une suite d'éléments de  $A$ . Enfin, il est clair que pour tout autre point, il existe une boule centrée en ce point qui sort de  $A$ .

Soit donc  $A = \Gamma \cup \{(0,0)\}$ . On remarque que  $\Gamma \subseteq A \subseteq \overline{\Gamma}^a$ . Alors  $A$  est connexe mais non connexe par arcs.

$\Gamma$  est connexe par arcs, par image continue  $x \mapsto (x, f(x))$  du connexe par arcs  $]0,1]$ . Il est donc connexe. Ainsi,  $A$  est connexe puisque contenu entre lui et son adhérence.

Cependant,  $A$  n'est pas connexe par arcs. Soit  $x$  le point  $(0,0)$  et  $y = (1, \sin(1))$ . Supposons qu'il existe un arc continu  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$ . Alors  $\gamma(t) = (u(t), \sin(1/u(t)))$  dès que  $u(t) \neq 0$ . On note  $t_0 = \sup\{t \geq 0, u(t) = 0\}$  le dernier instant où le chemin passe en zéro. Alors par continuité de  $\gamma$ ,  $u(t_0) = 0$ , d'où  $v(t_0) = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$ . Alors par le TVI, il existe  $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  avec  $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$  et  $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ . Remarquons simplement qu'alors  $v(t_1) = -1$  et  $v(t_2) = 1$ . Soit donc  $b \in [-1,1]$  tel que  $|b| > \frac{1}{2}$ . Par le TVI encore, il existe  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  tel que  $v(t) = b$  et donc  $|v(t)| > \frac{1}{2}$ . Ceci valant pour tout  $\varepsilon$ , il y a une grosse contradiction. Intuitivement, le graphe d'une fonction continue par morceaux est connexe parcs si et seulement si elle est prolongeable par continuité.

On vérifie maintenant que  $A$  n'est pas localement connexe. En effet, le point  $(0,0)$  n'a pas de voisinage ouvert connexe dans  $A$  contenu dans  $B(0, \frac{1}{2})$ . On voit très distinctement sur un dessin que l'intersection de toute boule de rayon  $< 1$  avec  $A$  contient une branche de  $A$  qui ne se relie à rien d'autre.

<sup>a</sup> L'ensemble  $\overline{\Gamma}$  est parfois appelée *courbe fermée du topologue*, est compacte, mais elle vérifie des propriétés semblables à la nôtre.

### Exemple. (*Le cercle polonais*)

On ajoute à la courbe sinus fermée du topologue un arc continu joignant le point  $(1, \sin(1))$  au point  $(0, -1)$ . Alors cet espace est connexe par arcs, donc connexe, mais pas localement connexe, ni donc localement connexe par arcs.

On a quand même une certaine régularité sur la topologie propre aux espaces normés :

### Propriété. (*Ouverts connexes*)

Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

▷ On peut en fait montrer exactement de la même manière (en changeant l'expression de  $A$ ) que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs par lignes brisées. On laisse le lecteur adapter la rédaction.

Soit  $X$  un espace vectoriel normé et  $C$  un ouvert connexe. Si  $C$  est vide, c'est terminé. Sinon, soit  $x \in C$ . On note  $A = \{y \in C, x \sim y\}$  où  $\sim$  est la relation « il existe un chemin continu... ». Montrons

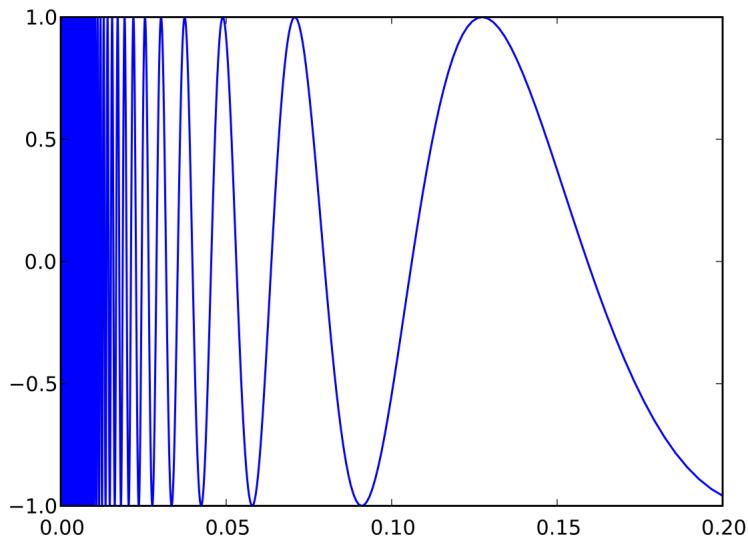


FIGURE 3.5.3 : *Le sinus fermé du topologue.* —

Un espace topologique connexe, mais ni localement connexe, ni connexe par arcs.

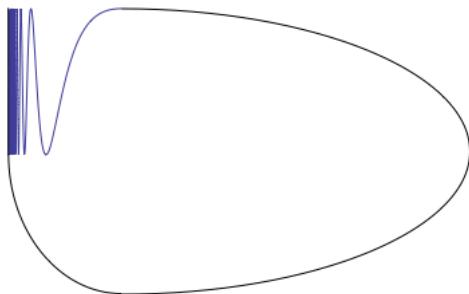


FIGURE 3.5.4 : *Le cercle polonais.* —

Un espace topologique connexe par arcs mais non localement connexe.

que  $A$  est un ouvert fermé de  $C$  : puisqu'il est non vide, cela suffira. Soit  $y \in A$ . Alors puisque  $C$  est ouvert, il existe une boule  $B$  centrée en  $y$  incluse dans  $C$ . Soit  $t \in B$ . Puisqu'une boule est connexe par arcs,  $t \sim y$ . Or  $y \sim x$ , donc  $t \sim x$ . Ainsi  $t \in A$ , donc  $B$  est incluse dans  $A$ . Ainsi  $A$  est ouverte. Montrons qu'elle est fermée. Soit  $y \in C \setminus A$ . Comme  $C$  est ouvert, il existe une boule  $B$  dans  $C$  centrée en  $y$ . S'il existait  $t \in B$  tel que  $t \in A$ , soit  $t \sim x$ , alors puisque  $B$  est connexe,  $t \sim y$ , donc  $y \sim x$ , contradiction, donc  $B$  est dans  $C \setminus A$ . Donc  $C \setminus A$  est ouverte, donc  $A$  est bien fermée. ■

▷ (*Autre méthode.*) On montre directement que si  $x \in \overline{A}$  dans  $C$ , alors par définition de l'adhérence par des voisinages,  $x \in A$ . ■

Ce constat s'étend assez peu aux autres structures.

En fait :

**Fait.** (*Lien entre les composantes connexes et connexes par arcs*)

Les composantes connexes par arcs sont incluses dans les composantes connexes (sans déborder).

Exactement de même que dans le cas connexe, on peut démontrer :

**Propriété.** (*Ouverture des composantes connexes par arcs en milieu localement connexe par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $C$  une composante connexe par arcs de  $X$ . Si  $X$  est localement connexe par arcs, alors  $C$  est ouverte dans  $X$ .

▷ Même que pour le cas connexe tout court. ■

**Les composantes connexes par arcs n'ont aucune raison d'être fermées**, la branche principale du sinus du topologue nous le montre.

**3.5.9.7 Locale connexité et locale connexité par arcs****Définition.** (*Espace localement connexe*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement connexe* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes.

**Contre-exemple.** (*Tout point admet un voisinage connexe*)

Dans un espace localement connexe, assez facilement, *tout point admet un voisinage ouvert connexe*.

La réciproque ne suffit pas à caractériser les espaces localement connexes. Prenons le peigne :  $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ . Cet espace est connexe car connexe par arcs, mais pas localement connexe<sup>a</sup> : on citera également le sinus du topologue ci-dessous qui vérifie cette propriété cheloue. Pourtant, tout point de  $A$  possède un voisinage ouvert connexe, à savoir  $A$  lui-même. □

<sup>a</sup> En effet,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  n'admet pas de bases de voisinages connexes. Soit  $V$  un voisinage de ce point dans le peigne induit par une boule ne rencontrant par l'axe des ordonnées, par exemple, une boule de rayon  $\frac{1}{4}$ . Alors l'application  $(x,y) \in V \mapsto y$  est continue sur  $V$  à valeurs rationnelles, donc constante. Ainsi  $V$  est contenu dans une seule dent du peigne, ce qui est absurde, car  $V$  est induit par une boule qui contient une infinité de points d'ordonnées rationnelles de même abscisse que  $\frac{1}{2}$ .

**Exemple**

$\mathbb{Q}$  n'est pas localement connexe. En fait, ce n'est pas une conséquence d'autre chose comme on pourrait s'y attendre.

Même un espace métrique, même une partie d'un espace vectoriel normé peut n'être pas localement connexe.

### Propriété. (*Locale connexité des evn*)

Tout espace vectoriel normé est localement connexe (par arcs).

▷ Puisque les boules sont connexes (par arcs). ■



Les notions de connexité et de locale connexité n'ont rien à se dire. Bien évidemment, un espace localement connexe n'a aucune raison d'être connexe (exemple : le plan privé d'une droite). Réciproquement, le sinus du topologue est connexe mais pas localement connexe ! Ainsi, connexe n'implique pas localement connexe.

### Propriété. (*Composantes connexes d'un ouvert en milieu lc*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $X$  est localement connexe, si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , les composantes connexes de  $U$  sont ouvertes.

▷ Elles sont alors fermées (pourquoi?). Cependant cette condition ne suffirait pas. ■

#### Preuve.

▷ Soit  $X$  un espace topologique localement connexe et  $U$  un ouvert de  $X$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $U$ . Soit  $x \in C$ . Puisque  $U$  est ouverte, il existe un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $U$  inclus dans  $U$ . Par locale connexité, il existe  $V'$  un voisinage connexe de  $x$  tel que  $x \in V' \subseteq V$ . Par maximalité de la composante connexe contenant  $x$ ,  $V' \subseteq C$ , donc  $C$  est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert (on a déjà montré cela dans la partie précédente).

Réciproquement, soit  $x \in X$ . Soit  $V$  un voisinage de  $x$  que l'on peut prendre ouvert. Alors les composantes connexes de  $V$  sont ouvertes et partitionnent  $V \ni x$ . Soit  $C$  une composante connexe dans laquelle se trouve  $x$ . Alors  $C$  est un voisinage de  $x$  connexe et contenu dans  $V$ . ■

On se servira évidemment davantage du sens direct de ce théorème.

### Théorème. (*Connexion des fermés par une unique branche*)

Soit  $X$  un espace topologique connexe et localement connexe. Soient  $A, B$  deux fermés disjoints non vides de  $X$ . Alors il existe une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence intersecte à la fois  $A$  et  $B$ .

▷ On montre ce lemme : si  $Y$  est un espace localement connexe,  $F$  un fermé de  $Y$ , et  $U$  un ouvert connexe de  $Y$  disjoint de  $F$ . Alors pour toute composante connexe  $V$  de  $U \setminus F$ ,  $\emptyset \neq F \cap \partial_U V \subseteq F \cap \partial_Y V$ . En effet, puisque  $Y$  est localement connexe, les composantes de  $U \setminus F$  sont connexes. Puisque  $U$  est connexe, et  $U \cap F \neq \emptyset$ , une composante  $V$  de  $U \setminus F$  ne peut être ouverte dans  $U$ , d'où  $\partial_U V = (\partial V) \cap U \neq \emptyset$ . Mais en tant que composante connexe,  $V$  est fermée dans  $U \setminus F$ , donc, puisque  $V$  est également ouverte,  $\emptyset = \partial_{U \setminus F} V = (\partial V) \cap (U \setminus F)$ . Ainsi,  $\emptyset \neq \partial_U V = (\partial V) \cap U =$

$$(\partial V \cap U \setminus F) \cup (\partial V \cap (U \cap F)) = (\partial V) \cap (U \cap F).$$

Appliquons le lemme à notre situation. Soit  $M$  l'union de  $A$  avec toutes les composantes connexes de  $X \setminus (A \cup B)$  qui intersectent  $A$ . Alors  $M$  est ouverte. Il est clair que tout point de  $M$  qui appartient à l'une des composantes connexes de  $X \setminus (A \cup B)$  est un point intérieur de  $M$ , puisque ces composantes sont ouvertes. Il reste à voir que  $A \subseteq \overset{\circ}{M}$ . Soit  $a \in A$ , et soit  $U$  un voisinage ouvert connexe de  $a$  qui ne rencontre pas  $B$ . Alors  $U \subseteq M$ . Si  $C$  est une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  rencontrant  $U$ , soit  $W$  une composante connexe de  $U \cap C$ , et  $V$  la composante connexe de  $U \setminus A$  contenant  $W$ . Alors  $C \cup V$  est connexe, et  $(C \cup V) \cap (A \cup B) = \emptyset$ , donc  $V \subseteq C$ . Par le lemme,  $\emptyset \neq A \cap \partial V = A \cap \overline{V} \subseteq A \cap \overline{C}$ , donc  $C \subseteq M$ . Avec le même argument,  $N \cup B$  et toute composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence rencontre  $B$  est ouverte. Puisque  $X = M \cup N$ , et ni  $M$  ni  $N$  n'est vide, il suit que  $M \cap N \neq \emptyset$ . Cela signifie qu'il existe une composante connexe de  $X \setminus (A \cup B)$  dont l'adhérence rencontre à la fois,  $A$  et  $B$ . ■

### Définition. (*Espace localement connexe par arcs*)

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *localement connexe par arcs* si tout point admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

### Exercice 20 (*Un contre-exemple type sinus du topologue pour la connexité par arcs*)

Montrer que l'ensemble  $\{(x, rx), x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$  est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

#### ▷ Éléments de réponse.

La partie  $A$  considérée est étoilée en  $(0,0)$  donc en particulier connexe par arcs. Montrons pourtant qu'il existe un voisinage de  $(1,1) = (x, rx)$  où  $x = r = 1$  qui ne contient aucun voisinage connexe par arcs. Prenons simplement un voisinage  $V$  ne contenant pas  $(0,0)$ , par exemple, induit par une boule centré en  $(1,1)$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . Alors l'application continue  $(x,y) \mapsto y/x$  est continue sur  $V$ , à valeurs rationnelles, donc constante. Le voisinage  $V$  est donc inclus dans la droite de pente  $r$ , absurde, car le voisinage choisi est induit par une boule non vide qui contient des points d'autres pentes.

### Propriété. (*Composantes CPA d'un ouvert en milieu lcpa*)

Soit  $X$  un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $X$  est localement connexe par arcs,
2. pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , les composantes connexes par arcs de  $U$  sont ouvertes.

### Lemme

Toute partie ouverte d'un espace localement connexe est un espace localement connexe.

▷ Il suffit de prendre la trace d'une base de voisinages disjoints. ■

▷ Pour montrer l'équivalence entre les deux points, il suffit de copier la preuve précédente en remplaçant connexe par connexe par arcs, en remarquant que les composantes par arcs sont également les parties maximales connexes par arcs ■

### Propriété. (*Ouvert connexe en milieu lcpa*)

Soit  $X$  un espace topologique localement connexe par arcs. Alors tout ouvert connexe de  $X$  est connexe par arcs.

▷ On reprend la preuve dans les evn. ■



Localement connexe ne suffit pas !

### Théorème. (*Connexe + lcpa $\Rightarrow$ connexe par arcs*)

Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

▷ Si  $X$  est connexe et localement connexe par arcs, prenons  $x \in X$ . Alors la composante connexe par arcs contenant  $x$  est ouverte, en milieu lcpa. Comme elles partitionnent l'espace, elles sont fermées. Comme  $X$  est connexe, il n'y en a qu'une, donc  $X$  est connexe par arcs. ■

#### Exercice 21

Donner un exemple d'espace connexe, localement connexe mais non connexe par arcs.  
Remarquer qu'un tel exemple fournit également un exemple d'espace localement connexe non localement connexe par arcs.

▷ **Éléments de réponse.**

Parce que moi je cherche encore.

### Propriété. (*Composantes connexes dans un espace lcpa*)

Soit  $X$  un espace topologique localement connexe par arcs. Alors les composantes connexes et connexes par arcs coïncident (on dit que l'espace est à bonnes composantes connexes).

▷ On applique : la deuxième caractérisation, le lemme, le théorème précédent. Ou, plus explicitement : pour tout  $x \in X$ ,  $C_x^{cpa}$  est connexe par arcs donc connexe donc  $C_x^{cpa} \subseteq C_x^c$ . Réciproquement,  $C_x^c$  est connexe et ouvert, car composante connexe d'un espace localement connexe (car localement connexe par arcs). Or d'après le théorème un connexe lcpa est connexe par arcs, donc de même que précédemment, par maximalité,  $C_x^c \subseteq C_x^{cpa}$ . ■

*Remarque.* Cette propriété est très pratique. On en fait souvent l'hypothèse dans l'étude des groupes de Lie.

On termine avec une propriété à retenir dans le coin de sa tête :

**Corollaire. (*Quotient d'espace localement connexe*)**

Tout quotient d'un espace localement connexe est localement connexe.

### Ce qu'il faut retenir

→ Tout espace se décompose comme la réunion disjointe de ses composantes connexes.

### 3.5.10 Connexité simple

**Définition. (*Espace simplement connexe*)**

Soit  $X$  un espace topologique. On dit que  $X$  est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si tout lacet tracé sur  $X$  est homotope à un point. De façon équivalente,  $X$  est connexe par arcs et pour tous points  $x,y \in X$ , deux chemins de  $x$  à  $y$  sont toujours homotopes.

Intuitivement, un connexe par arcs est simplement connexes s'il est *sans trou, ni poignée*.

### 3.5.11 Discrétion

**Propriété. (*Caractérisation de la discréton*)**

Un espace est discret si et seulement si tous les singletons sont ouverts.

Il existe des espaces dénombrables qui ne sont pas discrets (l'adhérence de la suite harmonique, l'ensemble des rationnels).

**Propriété. (*Produit d'espaces discrets*)**

Tout produit d'espaces discrets est discret.

▷ Définition. Plus précisément : tous les singletons + produit des espaces entiers sont ouverts. Par réunion dénombrable, n'importe quel singleton du produit est un ouvert. ■

## 3.6 Exemples classiques de topologie

### 3.6.1 Topologies cofinies

#### 3.6.1.1 Topologie cofinie sur $\mathbb{N}$

#### 3.6.1.2 Topologie cofinie sur $\mathbb{R}$

### 3.6.2 Topologie de Zariski

#### Définition. (*Topologies de Zariski*)

Soit  $k$  un corps commutatif et  $n \in \mathbb{N}$ . La *topologie de Zariski* sur  $\mathbb{A}^n(k) := k^n$  est définie par l'ensemble de ses fermés, qui sont de la forme :

$$\{x \in \mathbb{A}^n(k) \mid \forall i \in I \quad P_i(x) = 0\}$$

pour une certaine famille  $(P_i)_{i \in I}$ ,  $I$  quelconque, de polynômes de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

▷ L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant égal à 1. La réunion de deux fermés de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille de polynômes indexée par le produit des ensembles d'indexation valant le produit de deux polynômes en chaque couple. L'intersection est évidente. ■

#### Théorème. (*Description simple de la topologie de Zariski*)

Tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'un polynôme de  $k[X_1, \dots, X_n]$ .

▷ Le théorème du Nullstellensatz de Hilbert garantit que tout fermé de Zariski est l'ensemble des zéros d'une famille finie de polynômes. Il suffit ensuite de considérer leur produit. ■

#### Propriété. (*Topologie de Zariski en dimension 1*)

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{C}$  est la topologie cofinie.

▷ Soit  $E$  un ensemble fini d'éléments de  $k$ . Alors  $\prod_{x \in E}^{X-x}$  est un polynôme de  $k[X]$  dont les zéros sont exactement les éléments de  $E$ . ■

On peut s'intéresser aux fermés et ouverts de Zariski de  $\mathbb{R}^n$  lorsqu'on munit  $\mathbb{R}^n$  de la topologie usuelle.

#### Propriété. (*Comparaison des topologies réelle et de Zariski*)

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{R}^n$  est plus grossière que la topologie usuelle, au sens suivant : tout ouvert de Zariski est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  pour la topologie usuelle.

▷ Soit  $F$  un fermé de Zariski. Alors  $F = P^{-1}(\{0, \dots, 0\})$  où  $P$  est un polynôme, donc une application continue de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ . ■

### Propriété. (*Densité des ouverts de Zariski*)

Tout ouvert de Zariski non vide est dense dans  $\mathbb{R}^n$  pour sa topologie usuelle. En particulier, tout ouvert de Zariski non vide est dense dans  $\mathbb{R}^n$  pour la topologie de Zariski même.

▷ On montre que tout fermé non trivial de Zariski est d'intérieur vide pour la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  s'annule sur une boule ouverte. D'après le lemme d'annulation des polynômes à plusieurs variables, si  $P$  s'annule sur  $A_1 \times \dots \times A_n$  où chaque  $A_i$  est de cardinal  $> \deg_i(P)$ , alors  $P$  est nul. En particulier, si  $A_1 \times \dots \times A_n$  est un hypercube non trivial, alors  $P$  est nul. Or toute boule de  $\mathbb{R}^n$  contient un hypercube. Donc  $P$  est nul, donc le fermé considéré est égal à  $\mathbb{R}^n$ . Pour montrer que notre ouvert non vide de Zariski est également dense pour la topologie de Zariski, on suppose que sa Zariski-adhérence ne soit pas  $\mathbb{R}^n$ . Par comparaison, c'est également un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui contredit la minimalité de la  $\mathbb{R}^n$  adhérence. ■

### Corollaire

La topologie de Zariski sur  $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$  n'est pas séparée pour  $n > 0$ .

▷ On montre plus fortement que deux ouverts disjoints non vides de Zariski s'interceptent toujours. Soient  $U, V$  tels. Montrons  $U \cap V \neq \emptyset$ , donc montrons  $U^c \cup V^c \neq \mathbb{R}^n$ . Supposons que ce soit le cas.  $U^c \cup V^c$  n'est jamais que l'ensemble des zéros communs à un polynôme  $PQ$  où  $P$  a pour lieu d'annulation  $U^c$  et  $Q$   $V^c$ . Ainsi  $PQ$  s'annule sur  $\mathbb{R}^n$ . Puisque  $\mathbb{R}$  est infini, le morphisme fonction polynomiale est injectif, donc on peut dire que  $PQ = 0$ , d'où  $P = Q = 0$  par intégrité. Donc  $U^c$  et  $V^c$  sont égaux à  $\mathbb{R}^n$ , donc  $U$  et  $V$  sont vides, ce qui était pourtant exclu, d'où le résultat.

On aurait aussi pu utiliser le résultat précédent pour avoir immédiatement, car  $U$  dense et  $V$  ouvert,  $U \cap V \neq \emptyset$ . ■

## 3.6.3 Topologie compacte-ouverte

### 3.6.3.1 Définition et premières propriétés

#### Définition-propriété. (*Topologie compacte-ouverte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. La *topologie compacte-ouverte* sur  $\mathcal{C}(X, Y)$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$  est définie comme suit : pour tout  $K \subseteq X$  compact et  $U \subseteq Y$  ouvert, on note  $W(K, U) := \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subseteq U\}$ . Les  $W(K, U)$  sont alors la prébase d'une topologie constituée des intersections finies de  $W(K, U)$ ,  $K$  compact de  $X$ ,  $U$  ouverts de  $U$ .

▷ D'après la caractérisation des bases, il suffit de montrer que les  $W(K,U)$  recouvrent  $\mathcal{C}(X,Y)$ . C'est immédiat, car il contiennent  $\mathcal{C}(X,Y) = W(\emptyset, Y)$ . ■

### Remarques.

1. On rappelle bien évidemment que,  $Y$  n'étant pas inclus a priori dans un espace plus grand, un *ouvert de  $Y$*  n'est autre qu'un élément de la topologie de  $Y$  et un *compact de  $X$*  n'est autre qu'un compact inclus dans  $X$ , car la compacité est une notion intrinsèque.
2. Le fait que la topologie compacte-ouverte soit définie par la donnée d'une base, permet de ne vérifier des propriétés relatives à cette topologique que sur une classe réduite d'ouverts.
3. La topologie compacte-ouverte est agréable : elle contrôle les images de ses points (qui sont des fonctions), car un point (de l'espace de départ) est un fini donc un compact.
4. Cette topologie qui paraît un peu bizarre vérifie une propriété universelle relative à la continuité de l'évaluation, que nous énoncerons plus tard.
5. En général, la topologie compacte-ouverte n'est pas si pure que ça. On supposera souvent que l'on travaille sur des espaces localement compacts, ce qui est très souvent le cas en topologie utile.

### Proposition

Soient  $Y$  un espace topologique et  $\{\star\}$  le singleton standard. Alors  $\mathcal{C}(\{\star\}, Y)$  muni de la topologie compacte-ouverte est  $\simeq Y$ .

▷ Considérons  $\Phi: \mathcal{C}(\{\star\}, Y) \longrightarrow Y$  et  $\Psi: Y \longrightarrow \mathcal{C}(\{\star\}, Y)$ . Clairement,  $\Phi$  et  $\Psi$

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f(\star) \\ & & y & \longmapsto & \star \mapsto y \end{array}$$

sont bijections réciproques l'une de l'autres. Soit maintenant  $U$  un ouvert de  $Y$ . Alors  $\Phi^{-1}(U)$  n'est autre que  $W(\{\star\}, U)$  où  $\{\star\}$  est fini, donc compact, donc  $\Phi^{-1}(U)$  est bien un ouvert de  $\mathcal{C}(\{\star\}, Y)$ , donc  $\Phi$  est continue. Réciproquement, soit  $W(K, U)$  un ouvert de  $\mathcal{C}(\{\star\}, U)$ , ce qui impose en particulier  $K = \emptyset$  ou  $\{\star\}$ . Dans le premier cas,  $\Psi^{-1}(W(\emptyset, U)) = Y$  et dans le second cas,  $\Psi^{-1}(W(\{\star\}, U)) = U$ , un ouvert dans tous les cas, donc  $\Psi$  est continue. ■

### Propriété. (*Continuité de la composition*)

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces avec  $Y$  localement compact. L'application de composition

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

est continue.

▷ On munit donc  $\mathcal{C}(Y,Z)$ ,  $\mathcal{C}(X,Y)$  et  $\mathcal{C}(X,Z)$  des topologies compactes-ouvertes et  $\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y)$  de la topologie produit. Soient  $K$  un compact de  $X$  et  $W$  un ouvert de  $Z$  afin de considérer l'ouvert  $W(K,W)$  de  $\mathcal{C}(X,Z)$ . Soit  $(f,g)$  dans l'image réciproque de cet ouvert, notée  $\Omega$ . Notons que puisque  $f$  et  $g$  sont continues,  $f^{-1}(W)$  est un ouvert de  $Y$  et  $g(K)$  est compact. De plus, par hypothèse,  $g(K) \subseteq f^{-1}(W)$ . Notons que  $f^{-1}(W)$  est localement compact en tant qu'ouvert de  $Y$  localement compact. Pour tout  $x \in g(K)$ , il existe un voisinage compact  $C_x$  de  $x$  dans  $f^{-1}(W)$ , donc compact tout court, avec donc ouvert  $x \in U_x \subseteq C_x$  où  $U_x$  est ouvert de  $f^{-1}(W)$ , mais aussi donc de  $Y$ . Les  $U_x$  recouvrent  $g(K)$ , donc par compacité, il existe une famille finie  $F$  de  $x \in g(K)$  avec :

$$g(K) \subseteq U_{f,g} = U := \bigcup_{x \in F} U_x \subseteq C_{f,g} = C := \bigcup_{x \in F} C_x \subseteq f^{-1}(W).$$

Considérons l'ouvert  $W(C,W) \times W(K,U)$ . Alors par construction,  $(f,g) \in W(C,W) \times W(K,U)$ . Réciproquement, si  $(f',g') \in W(C,W) \times W(K,U)$ , alors  $g' \in W(K,U)$  d'où  $g'(K) \subseteq U \subseteq C \subseteq f'^{-1}(W)$ , car  $f' \in W(C,W)$ . Autrement dit,  $\Omega = \bigcup_{(f,g) \in \Omega} W(C,W) \times W(K,U)$  qui est bien un ouvert de  $\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y)$ . Donc  $\circ$  est continue. ■

### Exercice 22 (*Continuité du pullback et du pushout*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On note, comme souvent en topologie, exponentiellement les espaces de fonctions continues.

1. Montrer que le pullback  $f^* : Z^Y \rightarrow Z^X$  est continu pour les topologies compactes-ouvertes.
2. Montrer que le pushout  $f_* : X^Z \rightarrow Y^Z$  est continu pour les topologies compactes-ouvertes.

#### ▷ Éléments de réponse.

1. On rappelle que  $f^* : g \mapsto g \circ f$ . Si  $K$  est un compact de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $Z$ ,  $f^{*-1}(W(K,U)) = \{g : Y \rightarrow Z \mid g \circ f(K) \subseteq U\} = W(f(K),U)$  et  $f(K)$  est bien un compact de  $Y$ , car  $f$  est continue.
2. On rappelle que  $f_* : g \mapsto f \circ g$ . Si  $K$  est un compact de  $Z$  et  $U$  un ouvert de  $Y$ ,  $(f_*)^{-1}(W(K,U)) = \{g : Z \rightarrow Y \mid f \circ g(K) \subseteq U\} = W(K,f^{-1}(U))$  et  $f^{-1}(U)$  est bien un ouvert de  $X$ , car  $f$  est continue.

### Propriété. (*Continuité de l'évaluation*)

Soit  $X$  un espace localement compact. Soit  $Y$  un espace topologique. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev: \quad \mathcal{C}(X,Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f,x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue.

▷ L'œil aiguisé aura vu que c'est une conséquence des deux propriétés précédentes. Mais on peut le redémontrer indépendamment pour se la ppter un peu.

On munit donc  $\mathcal{C}(X,Y)$  de la topologie compacte-ouverte et  $\mathcal{C}(X,Y) \times X$  de la topologie produit. Soit  $U$  un ouvert de  $Y$ . Alors  $ev^{-1}(U) = \{(f,x) \mid f(x) \in U\} = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times \{x\}$ , où  $f(x) \in U \iff f \in W(\{x\},U)$ . Or  $X$  est localement compact, donc pour tout  $x \in X$ , pour toute  $f \in W(\{x\},U)$ , i.e.  $f(x) \in U$ ,  $x \in f^{-1}(U)$  qui est ouvert, car  $f$  est continue, donc il existe un compact  $K_x$  de  $X$  tel que  $x \in K_x \subseteq K_x \subseteq f^{-1}(U)$ . Alors  $ev^{-1}(U) \subseteq \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times K_x \subseteq ev^{-1}(U)$ , car si  $f(x) \in U$ , pour tout  $t \in K_x$ ,  $f(t) \in U$  par construction. D'où  $ev^{-1}(U) = \bigcup_{x \in X} W(\{x\},U) \times \overset{\circ}{K}_x$  qui est un ouvert de  $\mathcal{C}(X,Y) \times X$ , car  $\{x\}$  est un compact de  $X$ . ■

### Propriété. (*Propriété universelle de la topologie compacte-ouverte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $Y$  localement compact. On note  $Y^X$  l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$ . On note  $\mathcal{C} - \mathcal{O}$  la topologie compacte-ouverte sur  $Y^X$ . Alors l'application d'évaluation  $ev : (Y^X \mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X \rightarrow Y$  est continue et pour toute topologie  $\mathcal{T}$  sur  $Y^X$  telle que  $ev' : Y^X \times X \rightarrow Y$  soit continue,  $Y^X \times X$  étant munie de la topologie  $\mathcal{T} \times \mathcal{O}_X$ , il existe une unique application continue  $\psi : (Y^X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O})$  telle que  $ev \circ (\psi \circ id_X) = ev'$ , autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} (Y^X, \mathcal{T}) \times X & \xrightarrow{ev} & Y \\ \downarrow \psi \times id_X & & \\ (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O}) \times X & \xrightarrow{ev} & Y \end{array}$$

commute.

▷ Montrons-le par analyse-synthèse. Il est clair que si  $\psi$  existe, ce n'est autre que l'identité, car  $ev = ev'$  ensemblistement. Il n'y a plus qu'à vérifier que l'identité  $(Y^X, \mathcal{T}) \xrightarrow{id_{Y^X}} (Y^X, \mathcal{C} - \mathcal{O})$  est continue. ■

### Proposition. (*Topologie compacte-ouverte dans le cas métrisable*)

Soient  $X$  un espace topologique compact et  $(Y, d)$  un espace métrique. Alors la topologie compacte-ouverte sur  $\mathcal{C}(X, Y)$  est métrisable et sa métrique est donnée par  $e(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$  pour tous  $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ .

▷ Par symétrie de  $d$ ,  $d$  est symétrique. De plus si  $e(f, g) = 0$ , alors par supremum  $d(f(x), g(x)) = 0$  pour tous  $x \in X$ , d'où  $f = g$  sur  $X$  par séparation de  $d$  et donc  $e$  est séparée. L'inégalité triangulaire est une manipulation archi-classique de passage à la borne supérieure dans une inégalité, qu'il serait un affront de reproduire ici. ■

### 3.6.3.2 Enrichissement de Top

On essaie maintenant d'« enrichir » les espaces topologiques sur eux-mêmes. Cette notion catégorique signifie grossièrement que l'on peut rester dans la catégorie en considérant les espaces de morphismes. On rappelle que dans le cas des ensembles, on a, pour tout ensemble  $Y$ , une adjonction  $? \times Y \dashv (-)^Y$  grâce à des bijections naturelles  $\text{Hom}_{\text{Ens}}(X \times Y, Z) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}}(X, Z^Y := \text{Hom}_{\text{Ens}}(Y, Z))$  qui correspondent ni plus ni moins à une opération de curryfication. Autrement dit, Ens est une catégorie monoïdale cartésienne fermée (et donc enrichie au-dessus d'elle-même). On souhaite remplacer Ens par Top dans cette identité, ce qui n'est pas immédiat, même si l'on peut la prendre pour base puisque Top est localement petite.

**Fait. (Adjonction produit-fonctionnelle dans Top)**

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction  $? \times Y : \text{Top} \rightleftarrows \text{Top} : (-)^Y$  grâce à des bijections naturelles  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z))$ .

Les techniques sont classiques, alors on les explicite. On vérifie qu'une application  $f : X \times Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si sa curryfiée  $\check{f} : X \rightarrow Z^Y$  l'est, en munissant  $Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z)$  de la topologie compacte-ouverte. Cela suffira à montrer que l'adjonction de curryfication vaut dans Top, et c'est bien une adjonction à partir de ce que l'on en sait dans Ens. Soit  $f$  une telle application continue. Soit  $W(K, U)$  un ouvert de la base de  $Z^Y$ ,  $K$  compact de  $Y$  et  $U$  ouvert de  $Z$ . Alors  $\check{f}^{-1}(W(K, U)) = \{x \in X \mid f(x, K) \subseteq U\}$ , ce qui signifie que  $\{x\} \times K \subseteq f^{-1}(U)$  qui est ouvert dans  $X$ , puisque  $f$  est continue. Par définition de la topologie produit, il existe un ouvert  $V$  contenant  $x$  tel que  $V \times K \subseteq f^{-1}(U)$ , d'où  $V \subseteq \check{f}^{-1}(W(K, U))$ , qui est donc ouvert, donc  $\check{f}$  est continue. Réciproquement, soit  $\check{f} : X \rightarrow Z^Y$  continue pour la topologie compacte-ouverte. Alors on peut décomposer

$$\tilde{f} : X \times Y \xrightarrow{f \times id_Y} Z^Y \times Y \xrightarrow{ev} Z$$

où  $ev$  est continue, car  $Y$  est localement compact, donc par composition,  $\tilde{f}$  l'est également.

On en déduit le théorème suivant, qui précise le précédent : les bijections d'adjonction sont en fait bicontinues.

**Théorème. (Loi d'exponentiation topologique)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques localement compacts. Alors pour tout espace topologique  $Z$ , en notant exponentiellement les espaces de fonctions continues,

$$Z^{X \times Y} \simeq (Z^Y)^X$$

pour les topologies compactes-ouvertes, ce qui signifie  $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, Z^Y)$ . Plus précisément, dans l'adjonction produit-fonctionnelle dans Top, les bijections naturelles de curryfication sont des homéomorphismes, autrement dit, sont bicontinues.

▷ Montrons que la curryfication dans le sens  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  est continue. On sait que, puisque  $X \times Y$  est localement compact, l'évaluation  $Z^{X \times Y} \times (X \times Y) \rightarrow Z$  est continue. En la voyant

sous la forme  $(Z^{X \times Y} \times X) \times Y \rightarrow Z$ , par adjonction produit-exponentielle dans Top, l'application adjointe induite  $Z^{X \times Y} \times X \rightarrow Z^Y$  est continue. En recommençant pour  $X$ , on a  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  continue, et c'est bien l'application de curryfication en explicitant sur les éléments les étapes précédentes.

Montrons maintenant que la curryfication dans le sens  $(Z^Y)^X \rightarrow Z^{X \times Y}$  est une application continue. Partons de l'évaluation  $(Z^Y)^X \times X \rightarrow Z^Y$ . En multipliant par l'application  $id_Y$ ,  $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \rightarrow Z^Y \times Y$  est continue et quitte à la composer par l'évaluation  $Z^Y \times Y$ , c'est une application  $(Z^Y)^X \times (X \times Y) \rightarrow Z$  continue, donc  $(Z^Y)^X \rightarrow Z^{X \times Y}$  est continue. De même, en explicitant ce que sont ces fonctions, on trouve bien que c'est la curryfication inverse. Vérifions-le cette fois pour les sceptiques. La première application est  $(f : X \rightarrow Z, x) \mapsto f(x) : Y \rightarrow Z$ , qui devient  $(f, x, y) \mapsto (f(x), y) \mapsto f(x)(y)$ . Par curryfication directe, on obtient  $f \mapsto [(x, y) \mapsto f(x)(y)]$ . ■



On avait prouvé que les curryfiées et les curryfiées inverses étaient continues ; là, on a prouvé que la curryfication et la curryfication inverse sont continues.

### Preuve.

▷ (*Une autre preuve catégorique*) Illustrons comment le lemme de Yoneda permet aussi de conclure ; il n'est pas gênant en effet de fournir une preuve de nature catégorique, car il signifie dans toute catégorie monoïdale fermée, les bijections naturelles sont internes.

En appliquant l'adjonction produit-fonctionnelle de Top pour tout espace topologique  $A$ , on obtient, toujours en ne considérant que des morphismes continus,  $\mathcal{C}(A, Z^{X \times Y}) \simeq \mathcal{C}(A \times X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(A \times X, Z^Y) \simeq \mathcal{C}(A, (Z^Y)^X)$ . Or Top étant localement petite, le foncteur de  $\text{Top} \rightarrow \text{Fun}(\text{Top}^{\text{op}}, \text{Ens})$ ,  $W \mapsto (A \mapsto \mathcal{C}(A, W))$  est pleinement fidèle, ainsi l'application continue  $Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$  est bien un homéomorphisme. ■

# Chapitre 4

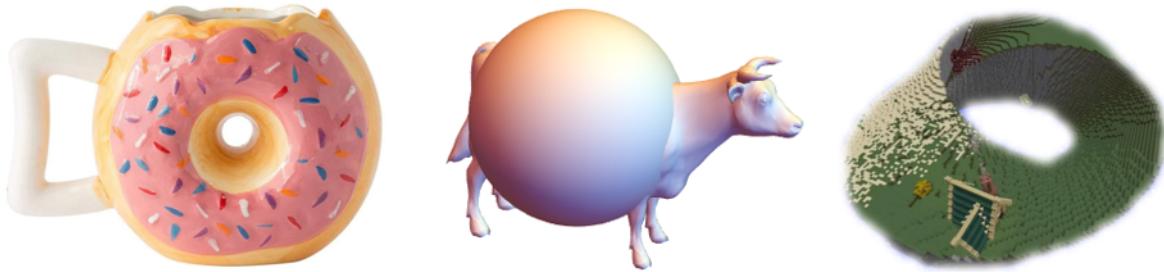
## Topologie algébrique élémentaire

### Résumé

Contrairement à la topologie analytique qui s'intéresse aux notions de convergence, la topologie algébrique prend un point de vue extérieur tout à fait distinct où l'on étudie les espaces topologiques pour eux-mêmes. Typiquement,

$$\text{ensembles} \subseteq \text{topologie} \subseteq \text{géométrie}$$

et l'on se situe au centre de cet emboîtement. Grâce à la notion d'homotopie, on peut définir le groupe fondamental qui associe des invariants algébriques à la catégorie Top. Dans un second temps, grâce à la notion d'homologie, on peut définir toute une suite d'invariants, beaucoup plus abstraits, mais extrêmement pratiques.



## 4.1 Invariants simples en topologie algébrique

Définition. (*Invariant d'homéomorphie*)

### 4.1.1 Le $\pi_0$

## 4.2 Construction et opérations d'espaces topologiques

## 4.3 Groupes topologiques

**L**a théorie des groupes topologiques permet notamment d'obtenir des résultats (propriétés, structures) sur des objets de base de façon simple.

### 4.3.1 Définition

#### Définition. (*Groupe topologique*)

Un *groupe topologique* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une topologie, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continues.

#### Méthode. (*Montrer qu'un groupe est un groupe topologique*)

Cela revient seulement à montrer la continuité d'opérations dans un certain espace topologique (voir l'exemple 3 ci-dessous).

#### Définition. (*Groupe de Lie*)

Un *groupe de Lie* est un groupe au sens algébrique du terme, muni d'une structure de variété différentiable réelle, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient différentiables.

#### Propriété. (*Continuité des translations dans un groupe topologique*)

Dans un groupe topologique, les translations

$$x \mapsto a * x \text{ et } x \mapsto x * a$$

sont des homéomorphismes.

▷ Les applications partielles d'une application continue sont continues. Or ce sont des bijections qui ont la même forme que leurs réciproques. ■

On en déduit :

#### Fait

La topologie d'un groupe topologique est déterminée par la donnée des voisinages de l'élément neutre  $e$ .

#### Propriété. (*Séparation d'un groupe topologique*)

Un groupe topologique  $G$  est séparé si et seulement si  $\{e_G\}$  est fermé dans  $G$ .

▷ Si  $G$  est séparé, le singleton  $\{e\}$  est fermé. Réciproquement, si  $\{e\}$  est fermé, alors la diagonale de  $G$  est l'image réciproque de ce fermé par l'application continue  $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ . Elle est

donc fermée, donc  $G$  est séparé. ■

### Exemples. (*Groupes topologiques*)

1. **Tout groupe est un groupe topologique pour la topologie discrète.**
  2. Heureusement, il y a d'autres exemples intéressants. Dans la section suivante, on étudiera l'action de la sphère unité du plan complexe sur la sphère de l'espace par rotation.
  3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe topologique pour la topologie induite de  $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ; c'en est d'ailleurs un ouvert, ses ouverts sont donc les ouverts de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  inclus dans  $GL_n(\mathbb{R})$ . Il a deux composantes connexes (par arcs)  $GL_n^{\pm 1}(\mathbb{R})$ <sup>a</sup>. Il agit continûment (**on omettra cette précision régulièrement dans la suite**) sur  $\mathbb{R}^n$ , on note simplement  $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ , et transitivement sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Dans ce cas sur  $\mathbb{R}^n$  il y a deux orbites :  $\{0\}$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .
  4. Tout groupe de Lie est en particulier un groupe topologique.
- Le cinquième problème de Hilbert pose la question suivante : pour une variété topologique munie d'une structure de groupe topologique, existe-t-il une structure différentiable telle que ce groupe soit de Lie ? La réponse est oui, ce qui a été démontré au début des années 1950.
5. Si  $Y$  est compact,  $(\text{Aut}(Y), \circ)$  est un groupe topologique muni de la topologie compacte-ouverte.

<sup>a</sup> On peut redémontrer ce résultat grâce à la théorie des groupes topologiques.

#### Lemme

Soit  $G$  un groupe topologique et  $(H_i)_{i \in I}$  une famille de sous-groupes connexes par arcs. Alors  $H = \langle H_i, i \in I \rangle$  est connexe par arcs.

▷ Soit  $J \subseteq I$  fini. Alors  $H_J = \langle H_i, i \in J \rangle = \text{Im}(\prod_{i \in J} H_i \longrightarrow G)$  qui à  $(h_1, \dots, h_j) \mapsto h_1 \dots h_j$ .

Puisque  $\prod_{i \in J} H_i$  est connexe par arcs et que la multiplication est continue par axiome, alors  $H_J$  est connexe par arcs. Or  $H$  est l'union des  $H_J$  qui ont tous le neutre en commun, donc  $H$  est connexe par arcs. ■

Clairement, il y a au moins deux composantes connexes par arcs, car  $\mathbb{R}^*$  c'est pas connexe. Cela ne nous apporte rien. Montrons que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  et  $GL_n^-(\mathbb{R})$  est connexe par arcs. On remarque que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  engendré par  $D = \text{Diag}(\mathbb{R}_+, 1, \dots, 1)$  et  $T_{ij} = \{id + tE_{ij}, t \in \mathbb{R}\}$ . Il est donc connexe par arcs, puisque  $D \simeq \mathbb{R}_+$  et  $T_{ij}$  est clairement homéomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ , donc ils sont tous deux connexes par arcs. De même,  $GL_n^-$  est connexe par arcs, puisqu'il est homéomorphe à  $GL_n^+$  en tant qu'espace topologique, via la multiplication par  $\text{Diag}(-1, 1, \dots, 1)$ .

### Contre-exemple. (*Groupe topologique qui n'est pas de Lie*)

Au sens : naturellement pour les mêmes lois.

□

**Mnémonik :** Les groupes topologiques, c'est fait pour les grands groupes.

### Heuristique

Foncièrement, pour un groupe fini, seule la topologie discrète peut être appliquée pour en faire un groupe topologique.

### Définition. (*Action continue sur un G-espace*)

Soit  $G$  un groupe topologique et  $X$  un espace topologique. Une action continue de  $G$  sur  $X$  est une action de groupe de  $G$  sur  $X$  telle que l'application :

$$G \times X \longrightarrow X$$

soit continue.

Un *G-espace* est un espace topologique muni d'une action continue de  $G$ .

### Exemple. (*Action du cercle sur la sphère*)

On voit immédiatement que  $U(1) := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  (notation physicienne) est un groupe topologique pour la multiplication de  $\mathbb{C}$ . Il agit continûment sur la 2-sphère :

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}.$$

par rotation autour de l'axe  $Oy$ .

Cette action est fidèle, mais pas transitive.

### Propriété. (*Continuité de l'action discrète*)

Soit  $G$  un groupe muni de la topologie discrète agissant sur un ensemble  $X$ . Alors l'action considérée est continue si et seulement si pour tout  $g \in G$ ,  $x \mapsto g \cdot x$  est continue.

### Définition. (*Isomorphisme de groupes topologiques*)

Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'ils sont isomorphes en tant que groupes par une application bicontinue.

## 4.3.2 Quotient d'une topologie par une action de groupe

### Définition. (*Quotient par une action de groupe*)

Soit  $G$  un groupe topologique et  $X$  un espace topologique telle que  $G$  agisse sur  $X$ . On définit le *quotient de  $X$  par l'action de  $G$* , et on note  $X/G = X/R_G$ , où :

$$xR_Gy \iff \exists g \in G \quad x = g \cdot y.$$

C'est l'ensemble des orbites de  $X$  sous l'action de  $G$ , dépendant de  $G$ , muni de la topologie quotient sur  $X$ , indépendante de  $G$  dans sa construction.

### Propriété. (*Quotient par une action transitive*)

Si l'action de  $G$  sur  $X$  est transitive, alors  $X/G$  est réduit à un point.

▷ Il n'y a rien à faire. ■

### Exemples. (*Actions topologiques*)

1.  $\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R}) = \{\{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$  n'est pas séparé. Il est même grossier non trivial.
2. La plupart des actions de groupes matriciels sont topologiques. Par exemples :
  -

### Propriété

Soit  $X$  un  $G$ -espace séparé et  $G$  un groupe quasi-compact où l'action de  $G$  est transitive. Alors pour tout  $x \in X$  la bijection canonique  $G/G_x \simeq X$  est un homéomorphisme.

▷ On a  $G/G_x \longrightarrow X$  continue par propriété universelle. Puisque  $G/G_x$  est quasi-compact (on le verra plus tard) et  $X$  est séparé, la bijection est un homéomorphisme. ■

### Corollaire

Soit  $X$  un  $G$ -espace séparé et  $G$  un groupe quasi-compact agissant sur  $X$ . Alors pour tout  $x \in X$  la bijection canonique  $G/G_x \simeq \Omega_x$  est un homéomorphisme.

### Exemple fondamental. (*La sphère est quotient de groupes spéciaux orthogonaux*)

On a  $SO(n+1)$  le sous-groupe spécial orthogonal d'ordre  $n+1$  agit sur  $S^n$  la sphère (unité) de  $\mathbb{R}^n$ ; par exemple,  $SO(2) \curvearrowright S^1$  par rotation.

Cette action est transitive.

C'est clair, mais une autre façon de le voir est de dire que pour  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x = A \cdot e_1$  si  $x$  est la première colonne de  $A$  et  $A$  est prise dans  $SO(n+1)$  en complétant les autres colonnes; réciproquement,

le stabilisateur de  $1$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  où  $B \in SO(n)$ .

En appliquant le théorème précédent, on obtient l'homéomorphisme très important :

$$S^n \simeq SO(n+1)/SO(n).$$

### 4.3.3 Propriétés des groupes topologiques

#### 4.3.3.1 Groupes compacts

##### Définition. (*Groupe compact*)

Un *groupe compact* est un groupe topologique compact.

##### Exemples. (*Groupes compacts*)

1. Les groupes finis discrets (ce sont les seuls parmi eux!).
2.  $U(n)$  l'ensemble des matrices unitaires  $n \times n$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ , telles que  $M\bar{M}^T = id$ .  
On remarque que  $U(1) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Ce sont des groupes compacts.

##### Propriété

Soient  $G$  un groupe topologique,  $X$  un  $G$ -espace.

- (a) Si  $X$  est quasi-compact,  $X/G$  aussi.
- (b) La surjection canonique est ouverte.
- (c) Si  $X, G$  sont compacts,  $X/G$  aussi.

▷ La première affirmation est vraie pour tous les quotients, puisque la projection canonique  $q$  est surjective et continue.

Soit  $V \subseteq X$  un ouvert. Alors  $q^{-1}(q(V)) = \sum_{g \in G} g \cdot V$  est ouvert par réunion d'ouverts : en effet, les translations sont des homéomorphismes.

Il suffit de montrer que  $X/G$  est séparé. Montrons que  $\Gamma_G \subseteq X \times X$  est fermé. Puisque  $X \times X$  est compact, en fait il est équivalent de dire que  $\Gamma_G$  est compact. Or ce graphe est l'image par  $(g, x, y) \mapsto (x, gy)$  de  $G \times \Delta_X$ . Comme  $X$  est séparé,  $\Delta_X$  est séparé donc compact donc  $G \times \Delta_X$  est compact. D'où le résultat. ■

##### Propriété. (*Compacité du groupe quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H \subseteq G$  un sous-groupe de  $G$ . Si  $G$  est compact et  $H$  est fermé,  $G/H$  est compact.

▷ Découle directement de la proposition précédente. ■

### 4.3.4 Groupes séparés

**Propriété.** (*Séparation du groupe quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H \subseteq G$  un sous-groupe de  $G$ . Alors  $G/H$  est séparé si et seulement si  $H$  est fermé.

▷ Si  $G/H$  est séparé, alors pour tout  $x \in G$ ,  $q(x)$  est fermé dans  $G/H$  par ouverture, donc  $q^{-1}(q(1_G)) = H$  est fermé. Si  $H$  est fermé maintenant, soit  $\beta : (x,y) \mapsto yx^{-1}$ . Alors  $\beta^{-1}(H) = \Gamma_H$  ! d'où le résultat. ■

**Théorème.** (*Groupe topologique quotient*)

Soient  $G$  un groupe topologique et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . Alors  $G/H$  est un groupe topologique.

▷ L'inverse est continue, induite par le diagramme suivant où la flèche horizontale du bas est continue.

$$(\cdot)^{-1} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow q \\ G/H & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

Pour la multiplication, c'est un peu moins trivial : on utilise les deux diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \downarrow & & \downarrow q \\ (G \times G)/(H \times H) & \xrightarrow{\quad} & G/H \\ \downarrow f & & \nearrow m_{G/H} \\ G/H \times G/H & & \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G/H \times G/H \\ \downarrow & & \nearrow f \\ (G \times G)/(H \times H) & & \end{array}$$

et le théorème est démontré. ■

### 4.3.5 Groupes topologiques distingués

**Proposition**

Tout sous-groupe distingué d'un groupe connexe est commutatif.

Soient  $G$  un groupe topologique.

Soit  $X$  un  $G$ -espace.

On considère  $X/G$  l'espace topologique (ensemble des orbites).

Soit  $H$  un sous-groupe (topologique) de  $G$ .

On considère  $G/H$  l'espace topologique (ensemble des classes à gauche).

### TROIS FAITS GÉNÉRAUX :

- La surjection canonique est toujours ouverte de  $X \rightarrow X/G$ .
- Si  $H$  est distingué,  $G/H$  est un groupe topologique.
- $G$  est séparé ssi  $\{e\}$  est fermé.

<i>Hypothèse sur <math>X</math></i>	<i>Hypothèse sur <math>G</math></i>	<i>Conséquence sur le quotient</i>
$X$ séparé	$G$ compact	?
$X$ q-compact	$G$ quelconque	$X/G$ q-compact
$X$ compact	$G$ compact	$X/G$ compact
<i>Hypothèse sur <math>G</math></i>	<i>Hypothèse sur <math>H</math></i>	<i>Conséquence sur le quotient</i>
$G$ quelconque	$H$ fermé	$G/H$ séparé
$G$ q-compact	$H$ quelconque	$G/H$ q-compact
$G$ compact	$H$ fermé	$G/H$ compact

TABLE 4.1 : *Récapitulatif sur les groupes topologiques.* —  
Liens entre compacité et séparation.

## 4.4 Espaces cellulaires

La philosophie des espaces cellulaires est d'obtenir des espaces topologiques grands par recollements de certaines de leurs parties.

On introduit en particulier une classe d'espaces topologiques comprenant la plupart des espaces topologiques rencontrés dans ce cours, à homéomorphisme près.

### 4.4.1 Attachements cellulaires

On conseille au lecteur de revoir la partie sur la topologie somme disjointe et sur les recollements le long d'un espace ou d'une partie. En particulier :

- ★ la somme disjointe de deux espaces topologiques  $X, Y$  a pour ouverts les sommes (= unions disjointes) d'ouverts ;
- ★ pour des applications continues  $f, g : A \rightarrow X$ , le recollement  $X \cup_{f,g} Y = X \coprod Y/R$  consiste à quotienter la somme disjointe par la relation d'équivalence vérifiant  $f(a)R(g(a))$  pour tout  $a \in A$ . Intuitivement,  $A$  est une copie de parties de  $X, Y$  et l'on identifie ces copies entre elles. Formellement, on peut se passer d'une des deux applications et prendre la relation engendrée par  $x \sim g(a)$  : cela revient au même ;

- ★ si  $A$  est fermé dans  $X$ , l'application canonique  $Y \longrightarrow X \cup_g Y$  est un homéomorphisme sur son image, fermée dans  $Y$  ;
- ★ si  $X$  est un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  un ensemble de parties topologiques, on définit la topologie faible par :  $F \subseteq X$  est fermé dans  $X$  si et seulement si  $F \cap X_i$  est fermé dans  $X_i$  pour tout  $i$ , de même pour les ouverts. Une application est continue ssi toutes les restrictions aux  $X_i$  sont continues.

Dans cette section, on étudiera l'exemple fondamental suivant : l'attachement cellulaire, déjà rencontré dans le section CONSTRUCTION D'ESPACES TOPOLOGIQUES, paragraphe RECOLLEMENTS. Soit  $S^n = \mathbb{S}_n$  la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $B^n = \mathbb{B}_n$  la boule de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\partial B^n = S^{n-1}$  (pour se rappeler du décalage, écrire  $\text{Fr}(B^2) = S^1$ ).

Puisque  $B^n$  est fermé, on a une inclusion canonique de la  $(n-1)$ -sphère dans la  $n$ -boule  $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$ .

### Définition. (*n-cellule*)

Une *cellule de dimension n*, ou *n-cellule*, est un espace topologique homéomorphe à la boule unité fermée de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note souvent  $e_n$  une *n-cellule*.

Une *n-cellule ouverte* ou encore *cellule ouverte de dimension n* est un espace homéomorphe à  $\mathbb{B}_n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ .

D'après le théorème d'invariance du domaine (admis), tout homéomorphisme de la boule préserve son bord. On peut définir ainsi :

### Définition. (*Bord d'une n-cellule*)

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Si  $e$  est une cellule, notons  $\partial e$  son *bord*, c'est-à-dire l'image de la frontière de  $\mathbb{B}_n$ , si  $e$  est une *n-cellule*, par n'importe quel homéomorphisme de  $e$  dans  $\mathbb{B}_n$ .

On note également  $\mathring{e} = e - \partial e$ .

Si  $f : e \longrightarrow X$  est une application continue, on note  $\partial f$  la restriction  $f|_{\partial e}$  de  $f$  au bord de  $e$ .

On définit maintenant la notion la plus importante de cette section.

### Définition. (*Attachement cellulaire, recollement d'une n-cellule le long d'une application*)

Si  $X$  est un espace topologique, et  $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$  est continue, on note

$$X \bigcup_{\varphi} e_n = X \coprod_{S^{n-1}} B_n$$

le recollement au moyen de  $\varphi$ .

On dit alors qu'on a *recollé une n-cellule à X* et qu'on obtient  $X \cup_{\varphi} e^n$  en *attachant une n-cellule le long de  $\varphi$* .

On a en particulier  $X \underset{\varphi}{\cup} e^n = X \coprod B^n / R$ , où  $R$  est la relation d'équivalence engendrée par les  $\varphi(a)Ri_n(a)$ ,  $a \in S^{n-1}$ .

▷ En effet, c'est la définition du recollement. ■

Dans le recollement général, les applications  $f, g$  n'étaient pas les plus importantes, car souvent des inclusions canoniques ; ici, c'est le contraire, l'espace  $A$  où l'on applique le recollement est toujours le même, c'est la sphère, et c'est l'application  $\varphi$  qui joue un rôle important.

Encore par définition du recollement :

**Fait.** (*Classes des points remarquables d'un recollement cellulaire*)

Ainsi,

1. pour  $x \in X$ , sa classe d'équivalence est  $cl(x) = \{x\} \coprod i_n(\varphi^{-1}(x))$
2. et pour  $b \in \mathring{B}^n$ , on a  $cl(b) = \{b\} \coprod \emptyset$  (on touche pas au dedans).

Plus précisément, on a la propriété de base suivante.

**Proposition.** (*Plongement de  $X$  et de la boule ouverte dans leur attachement cellulaire*)

Les applications  $X \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$  et  $\mathring{B}^n \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$  sont des homéomorphismes sur leurs images.

▷ On note  $q : X \coprod B^n \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$  la projection canonique. Alors sa restriction  $\mathring{B}^n \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$  est continue et injective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit  $U \subseteq \mathring{B}^n$  un ouvert. Par ouverture de l'intérieur, cela revient à prendre un ouvert de  $B^n$ . Comme on a  $\varphi = q \circ i_{B^n}$ , on remarque que  $i_{B^n}(U) = \emptyset \coprod U$  est un ouvert de  $X \coprod B^n$ , qui de plus est saturé. On a donc  $\phi(U) = q(\emptyset \coprod U)$  ouvert car  $\phi = q \circ \iota(B^n) : B^n \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$ .

Maintenant, montrons que  $\alpha_X : X \longrightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e_n$  est injective. Si  $cl(x) = cl(y)$ , alors  $\{x\} \cup i_n(\varphi^{-1}(x)) = cl(x) = cl(y) = \{y\} \cup i_n(\varphi^{-1}(\{y\}))$ . Il suffit de montrer que  $j_X : X \longrightarrow j_X(X)$  est fermée. Soit  $F$  un fermé de  $X$ . On a  $j_X = q \circ i_X(F) = F \coprod \emptyset$ . De plus,  $q^{-1}(q(F \coprod \emptyset)) = F \coprod \varphi^{-1}(F)$  est un fermé de  $X \coprod B^n$ . Donc  $j_X(F) \subseteq j_X(X)$  est un fermé de  $j_X(X)$ . ■

### Proposition

Si  $X$  est pointé par  $x_0$  et  $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X$  est constante de valeurs  $x_0$ , alors on a un homéomorphisme  $X \cup_{\varphi} e^n \simeq X \vee S^n$ , où  $S^n \simeq B^n / S^{n-1}$  est pointé par  $q(S^{n-1})$ .

On précise cette notion en généralisant et itérant le processus un nombre quelconque de fois.

**Définition.** (*Espace topologique obtenu par recollement de cellules*)

On dit qu'un espace topologique est *obtenu par recollement de cellules* de dimension  $n$  sur un espace topologique  $Y$  s'il existe une famille  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille quelconque de cellules de dimension  $n$ , munie d'une famille d'applications continues  $g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow Y$ , telle qu'il existe un homéomorphisme :

$$X \simeq (\coprod_\alpha e_\alpha) \cup \coprod_\alpha g_\alpha Y.$$

(Notons que les  $g_\alpha$  ne sont pas supposés injectifs.)

**Remarques.**

1. La donnée de  $(e_\alpha, g_\alpha)$  est de l'homéomorphisme liant  $X$  et l'espace est appelée *décomposition cellulaire* de  $X$  relative à  $Y$ . Elle est le plus souvent sous-entendue.
2. Si  $f_\alpha : e_\alpha \longrightarrow X$  est l'application induite, alors  $f_\alpha$  est continue et on l'appelle *application caractéristique* de  $e_\alpha$ . (De même, ce ne sont pas toujours des homéomorphismes sur leurs images.)
3. En revanche, sa restriction  $f_{\alpha|e_\alpha}$  est un homéomorphisme sur son image qui est donc un ouvert de  $X$ .
4. Si  $Y$  est séparé, l'image de  $g_\alpha$  est un compact de  $Y$ , donc un fermé de  $Y$ .
5. Si  $Y$  est séparé, la topologie de  $X$  est la topologie faible définie par la famille  $\{Y\} \cup \{f_\alpha(e_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ .
6. Les  $e_\alpha$ , par abus avec  $f_\alpha(e_\alpha)$ , s'appellent les *cellules* de  $X$  relativement à  $Y$ . De même, en identifiant son intérieur avec son image dans  $X$ , on l'appelle *cellule ouverte* de  $X$  relative à  $Y$ . Les cellules ouvertes sont les composantes connexes de  $X \setminus Y$ .
7. L'application  $\partial f_\alpha = g_\alpha : \partial e_\alpha \longrightarrow Y \subseteq X$  est appelée *application d'attachement* de la cellule  $e_\alpha$  de  $X$  sur  $Y$ .

Si par exemple  $n = 0$ , alors  $X$  est homéomorphe à la somme disjointe de  $Y$  et de l'ensemble d'indices  $A$  muni de la topologie discrète.

On énonce un lemme de construction. On rappelle que dans un bouquet de sphères, la restriction de projection canonique à chaque sphère  $S_i$  est un homéomorphisme sur son image, et qu'à homéomorphisme près, le bouquet de sphères ne dépend pas des points bases choisis.

**Lemme**

Si un espace topologique  $X$  est obtenu par recollement de cellules de dimension  $n$  sur un espace topologique  $Y$ , alors le quotient  $X/\langle Y \rangle$  de  $X$  par la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim y$  pour tous  $x, y \in Y$  est un espace topologique discret si  $Y$  est vide, et un bouquet de sphères de dimension  $n$  sinon.

▷ C'est immédiat sur  $Y$  est vide, auquel cas  $n = 0$ ,  $X$  est discret et  $X/\langle Y \rangle \simeq X$ . Sinon, soit  $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$  une décomposition cellulaire de  $X$  relative à  $Y$ . Soit  $\sim_\alpha$  la relation d'équivalence sur la  $\alpha$ -ième

cellule engendrée par  $x \sim y$  si  $x$  et  $y$  sont tous deux dans le bord. Alors  $S_\alpha := e_\alpha / \sim_\alpha$  est homéomorphe à une sphère, que nous munissons du point base image de  $\partial e_\alpha$ . L'inclusion  $\coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \longrightarrow \left( \coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \right) \cup \coprod_{\alpha \in A} Y$  induit clairement par passage au quotient un homéomorphisme ( $\sim$  étant engendrée par l'identification des points bases) :

$$\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha := \left( \coprod_{\alpha \in A} S_\alpha \right) / \sim \simeq \left( \coprod_{\alpha \in A} e_\alpha \right) \cup \coprod_{\alpha \in A} g_\alpha Y / \langle Y \rangle.$$

Ceci conclut. ■

## 4.4.2 CW-complexe, espace cellulaire

### 4.4.2.1 Définition générale

#### Définition. (CW-complexe, espace cellulaire)

Un *espace cellulaire*, *complexe cellulaire* ou *CW-complexe* (pour *closure-finite weak-topology*), est un espace topologique  $X$  muni d'une famille  $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces, en utilisant la convention  $X^{(-1)} = \emptyset$ , si :

1.  $X^{(n)}$  est obtenu par recollement de cellules de dimension  $n$  sur  $X^{(n-1)}$ , par des applications appelées *applications d'attachement* ou *de recollement* ;
2.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$  et la topologie de  $X$  coïncide avec la topologie faible définie par la famille  $(X^{(n)})_n$ .

Voici quelques définitions et propriétés générales des *CW-complexes*.

#### Remarques.

1. Le sous-espace  $X^{(n)}$  s'appelle le *n-squelette* de  $X$ . Il est fermé dans  $X$ . Le 0-squelette  $X^{(0)}$  est un espace discret.
2. Nous appellerons *partition* ou *décomposition cellulaire* ou encore *cellularisation* de  $X$  la donnée pour tout  $n \in \mathbb{N}$  d'une décomposition cellulaire de  $X^{(n)}$  relative à  $X^{(n-1)}$ . Elle est le plus souvent sous-entendue, les propriétés qui suivent des *CW-complexes* n'en dépendent pas. Les cellules, cellules ouvertes, applications caractéristiques, applications d'attachement de (la décomposition cellulaire fixée de)  $X$  sont celles de  $X^{(n)}$  relativement au précédent. L'ensemble  $X$  est donc réunion disjointe de ses cellules ouvertes, qui sont les composantes connexes de  $X^{(n)} - X^{(n-1)}$ .  
Attention, les (images par les applications caractéristiques des) cellules de  $X$  sont fermés de  $X$ , mais les cellules ouvertes n'en sont pas forcément des ouverts.
3. Une cellule de dimension 0 est appelé un *sommets* de  $X$ . Une cellule ou cellule ouverte de  $X$  de dimension 1 est appelée *arête* ou *arête ouverte* de  $X$ . La frontière d'une arête ouverte est fermée d'un ou deux sommets de  $X$ , appelés les *extrémités* de l'arête.
4. La topologie de  $X$  est la topologie faible définie par la famille de ses cellules.

5. La *dimension* de  $X$  est la borne supérieure des dimensions de ses cellules ouvertes, ce qui est bien définir par le théorème d'invariance du domaine. Un *graphe topologique* est un *CW-complexe* de dimension  $\leq 1$ .

### Méthode. (*Montrer qu'un truc est un CW-complexe*)

Première étape, on identifie grâce à l'intuition géométrique la structure cellulaire de notre espace : pour une surface, son polygone fondamental ; pour un simplexe, son graphe avec des faces... etc.

Ensute, il faut justifier sur le papier. C'est tractable si et seulement si le *CW-complexe* est fini (*voir la définition suivante*).

Pour attacher une cellule à un truc, on écrit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow i_1 \\ B^n & \xrightarrow{i_2} & X' \end{array}$$

où  $\iota$  est toujours l'inclusion canonique,  $i_1, i_2$  ne sont pas importantes et sont données par construction du pushout ; il suffit donc d'expliciter  $f$ , qui correspond grossièrement aux applications d'attachement ou aux applications caractéristiques, ou plutôt à leur composante  $\varphi_k$  sur la cellule que l'on attache. Cette application correspond au plongement de  $S^n$  dans notre espace cellulaire. Par définition, on a alors  $X' = X \sqcup B^n/f(x) \sim x \in \tilde{B}^n = X \cup_f B^n$ .

Pour chaque cellule de dimension  $n$  on fait cela indépendemment les unes des autres et l'espace obtenu en intégrant formellement cette opération (*i.e.* en les ordonnant) et le squelette de dimension  $n$ . On commence par  $n = 0$  et on fait ça pour chaque dimension dans l'ordre.

### Théorème. (*CW-complexe, formulation simplifiée pour l'homologie cellulaire*)

Un *CW-complexe* séparé est exactement un espace topologique  $X$  séparé, non vide, muni d'une partition dont les éléments s'appellent *cellules (ouvertes)* vérifiant les conditions suivantes :

- (i) pour toute cellule  $C$ , il existe un entier  $n \geq 0$  appelé la *dimension* de  $C$  et une application  $\varphi_C = \varphi : D^n \rightarrow X$  appelée *application caractéristique* de  $X$  tels que  $\varphi|_{\partial D^n}$  fournit un homéomorphisme entre  $\partial D^n$  et  $C$  ( $n$  est alors nécessairement unique et  $\varphi : D^n \rightarrow \overline{C}$ , parfois appelée abusivement *cellule fermée*, ce que nous ferons librement, est bien définie) et que de plus l'image du bord  $S^{n-1}$  de  $D^n$  soit contenue dans une réunion finie de cellules de dimension  $\leq n - 1$  ; en outre  $\varphi : D^n \rightarrow \overline{C}$  est alors automatiquement une surjection continue, autrement dit les cellules fermées

sont les images des applications caractéristiques ; de plus  $\varphi(S^{n-1}) \subseteq \partial C$  ;

- (ii)  $A \subseteq X$  est fermé si et seulement si pour toute cellule  $C$ , l'intersection  $A \cap \overline{C}$  est une ferme dans  $\overline{C}$ , autrement dit les fermés de la topologie de  $X$  sont les parties rencontrant toute cellule fermée en un fermé (de  $X$ ), c'est donc la topologie faible relative à toutes les cellules fermées.

L'ensemble des cellules de  $X$  est alors la décomposition cellulaire  $X$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la réunion de toutes les cellules de dimension  $\leq k$  est le  $k$ -squelette du  $CW$ -complexe  $X$ .

▷ L'unicité de  $n$  découle de l'invariance du domaine. Par continuité de  $\varphi$ ,  $\varphi(\overline{\mathring{D}^n} = D^n) \subseteq \overline{C}$  d'où la viabilité de cette corestriction.

Soit  $C$  une cellule. On sait que  $C \subseteq \varphi_C(D^n)$  qui est compacte par image séparée d'un compact dans un séparé donc fermée donc  $\overline{C} \subseteq \varphi_C(D^n)$ . Par suite,  $\varphi_C(D^n) = \varphi_C(\overline{\mathring{D}^n}) = \overline{\varphi_C(\mathring{D}^n)} = \overline{C}$ . ■

### Heuristique

Les  $CW$ -complexes sont des objets combinatoires et c'est comme ça qu'il faut les appréhender pour être utile.

Le théorème précédent énonce qu'on est pas obligé de recoller les cellules dans l'ordre des dimensions et que l'on obtient la même notion.

### Exercice 1

Montrer que, dans un  $CW$ -complexe séparé, toute cellule fermée (*i.e.* toute adhérence de cellule) est compacte.

▷ **Éléments de réponse.**

La séparation du  $CW$ -complexe  $X$  est cruciale. En effet, toute cellule fermée  $C_0$  est l'image d'une application caractéristique  $\varphi : D^n \rightarrow X$ . Puisque  $D^n$  est compacte et  $X$  est séparée,  $C_0$  est compacte.

### Exercice 2

Montrer que, dans un  $CW$ -complexe séparé, toute cellule  $C$  qui n'est pas un sommet est non fermée, en particulier  $C \subsetneq \overline{C}$ , mais les sommets le sont.

▷ **Éléments de réponse.**

$C \simeq \mathring{D}^n$  pour  $n > 0$  n'est pas compact, mais si  $C$  était fermée, elle serait compacte, car dans le compact  $\varphi_C(D^n)$ . D'autre part, les 0-cellules sont des points, donc fermés en milieu séparé.

**Fait. (*Écrasement des applications caractéristiques*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $\varphi_i : D^k \rightarrow X$  l'application caractéristique d'une cellule  $c_i$ . On a un homéomorphisme

$$\tilde{\varphi}_i : D^k / S^{k-1} \rightarrow \overline{e_i} / (\overline{e_i} \setminus e_i).$$

En effet, les applications caractéristiques passent au quotient par hypothèse dans la définition des  $CW$ -complexes. L'application quotient est une bijection continue d'un quasi-compact sur un séparé, donc c'est un homéomorphisme.

**Définition. (*Sous-CW-complexe*)**

Un sous- $CW$ -complexe de  $X$  est un sous-espace topologique  $Y$  de  $X$ , tel que si  $Y^{(n)} = X^{(n)} \cap Y$ , alors  $(Y^{(n)})_n$  est un  $CW$ -complexe.

*Remarque.* Il faut et il suffit pour cela que  $Y$  soit union de cellules ouvertes de  $X$  dont l'adhérence est contenue dans  $Y$ .

**Exemple fondamental. (*Sous-CW-complexe squelettique*)**

Par exemple,  $X^{(k)}$  est un  $CW$ -complexe de dimension  $\leq k$ .

**Exemple. (*Toy model : surface de Boy*)**

$\mathbb{P}^0\mathbb{R} = \{*\}$ , puis  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = S^1$  et  $\mathbb{P}^0\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ . Ensuite,  $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ , etc.

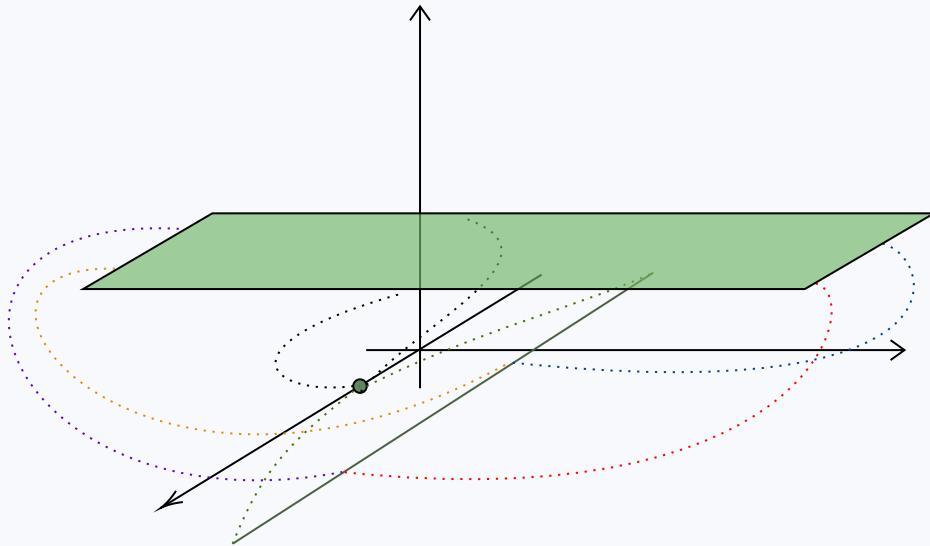


FIGURE 4.4.1 : *Structure cellulaire du plan projectif.* —  
Structure cellulaire du plan projectif

Ainsi,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{R}^1$ , avec chacun des termes donnés deux à deux disjoints. Les applications caractéristiques ne sont pas explicitées, mais il est clair qu'on a là une décomposition cellulaire de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ , puisque tout espace euclidien est homéomorphe à une boule ouverte.

Pour expliciter les attachements, il faut procéder par récurrence.  $\mathbb{P}^0\mathbb{R}$  est clairement un point. Au rang  $n$ ,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  peut être obtenu en prenant (c'est classique)  $D^n$  fermé et identifiant les points diamétralement opposés de son bord  $S^{n-1}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  est l'union disjointe d'une cellule  $\mathring{D}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ . Par suite l'application caractéristique est donnée par celles de  $\mathbb{P}^{n-1}$  et la projection quotient  $D^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ . Ainsi la structure cellulaire de  $\mathbb{P}^{\mathbb{C}}$  possède une unique cellule en chaque dimension.

**Mnémonik :** les espaces projectifs sont tordus.

On dit que le *CW-complexe* est fini s'il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Il est alors de dimension finie. La seconde condition des *CW-complexes* est automatiquement vérifiée si le *CW-complexe* est fini, comme ce sera le cas dans la plupart des exemples. Ceci permet d'énoncer la définition suivante :

#### 4.4.2.2 *CW-complexe fini, espace cellulaire fini*

##### Définition. (*Espace cellulaire fini, CW-complexe fini*)

Un *espace cellulaire fini*, ou *CW-complexe fini*, est un espace obtenu à partir d'un nombre fini de points, les 0-cellules, en recollant par ajout itératif un nombre fini de cellules.

Autrement dit, un espace cellulaire est fini si et seulement s'il est de dimension finie et que chaque  $n$ -squelette résulte du recollement de seulement un nombre fini de  $n$ -cellules.

##### Exemples. (*Espaces cellulaires finis*)

1. Tout graphe combinatoire est un espace cellulaire de dimension 1.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^n$  est muni d'une structure de *CW-complexe*. En particulier la droite réelle est un *CW-complexe*.

$\mathbb{R}$  est muni d'une structure cellulaire de dimension 1 avec pour 0-cellules les points de  $\mathbb{Z}$  et l'on recolle une infinité dénombrable de segments  $\simeq B^1$ , chacun en le recollant le long de ses extrémités sur  $n$  et  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . On peut raisonner alors par récurrence : pour  $R^2$ , on recolle des cellules  $B^2$  le long de chaque maille du réseau  $\mathbb{Z}^2$ , etc.

Plus théoriquement, pour construire la structure cellulaire de  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $X_{-1} = \emptyset$ ,  $X_0 = \mathbb{Z}^n$ , puis un recolle une 1-cellule  $\simeq I = [0,1] \simeq B^1$  le long de tout  $A = (i_1, \dots, i_n)$  et  $B = (i_1, \dots, i_i \pm 1, \dots, i_n)$  pour  $i$  parcourant  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $i_1, \dots, i_n$  parcourant  $\mathbb{Z}^n$ . L'application d'attachement  $\varphi : \{0,1\} = \partial I \rightarrow X_0$  est donnée par  $0 \mapsto A$  et  $1 \mapsto B$ . On obtient alors  $X_1$ . Pour obtenir le 2-squelette (en s'arrêtant après cela, on aurait que le plan), on attache des 2-cellules à tous  $A, B, C = (i_1, \dots, i_j \mp 1, \dots, i_n)$  et  $D = (i_1, \dots, i_j \overline{pm} 1, \dots, i_i \pm 1, \dots, i_n)$  où  $j \neq i$  parcourant  $\llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\mp$  est un signe choisi indépendamment de  $\pm$ . L'attachement est alors  $\varphi : \partial I^2 \longrightarrow X_1$ . Pour

$$(t_1, t_2) \longmapsto (i_1, \dots, i_j \mp t_1, \dots, i_i \pm t_2, \dots, i_n)$$

obtenir le  $k$ -squelette, plus généralement, à partir du  $k-1$ -squelette, on utilise les attachements

$$\begin{aligned} \partial I^k &\longrightarrow X^{(k-1)} & \text{pour } (i_1, \dots, i_k) \text{ parcourant } \mathbb{Z}^k \text{ et } (\pm_k) \\ (t_1, \dots, t_k) &\longmapsto i_1, \dots, i_1 \pm_1 t_1, \dots, i_2 + t_2, \dots, i_k \pm_k t_k, \dots, i_n \end{aligned}$$

parcourant  $\{0,1\}^k$ . **Remarquons que les points choisis de recollement sont automatiquement donnés par les applications d'attachement !** C'est un bon exercice d'inférence de décrire soi-même les applications d'attachement dans le cas général. Décrivons la solution. Notons au passage qu'il est possible en s'accrochant un peu plus de décrire la structure cellulaire d'un espace euclidien tronqué, avec des cellules manquantes, etc. ce qui sera facilité la notion d'opérations sur *CW-complexes*.

Cependant,  $\mathbb{R}^n$  n'est pas *CW-complexe fini*.

3. Toute sphère est un espace cellulaire (fini, *i.e.* avec un nombre fini d'attachements et de cellules). Pour  $n \geq 1$ , l'application d'attachement  $\pi : S^{n-1} \longrightarrow pt$ ,  $S^n = B^n \coprod_{\pi} \{N\}$  confère à  $S^n$  une structure de *CW-complexe fini* ayant un sommet  $N$  et une et une seule  $n$ -cellule ; si  $n = 0$ , on considère simplement l'application vide. Heuristiquement, il suffit de recoller le bord de la boule sur un point pour obtenir la sphère. C'est d'ailleurs un *CW-complexe de dimension  $n$* .

(Décomposition équatoriale) Ce n'est pas la seule manière naturelle de mettre une structure cellulaire sur la sphère  $S^n$ . On pourrait aussi recoller deux  $n$ -cellules le long de leurs bords  $S^{n-1}$  qui constituerait alors l'équateur de la sphère. On peut alors raisonner par récurrence :  $S^{n-1}$  étant un espace cellulaire  $X$ , on considère l'application d'attachement du bord de la  $n$ -cellule  $S^{n-1}$  vers  $X$  comme l'identité. On refait la même chose une deuxième fois avec même l'attachement inclusion canonique  $S^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1} \cup_i dB^n$ . On a la sphère, qui est un double tambour disjoint bien que formellement sans épaisseur !

4. Les bouquets de sphère sont donc des espaces cellulaires complexes. En effet, un bouquet de sphères pointées de dimension  $n$ , indexées par un ensemble  $S$ , admet une structure de  $CW$ -complexe, avec un seul sommet et  $\text{card}(S)$  cellules de dimension  $n$ , dont les applications d'attachements sont les applications constantes sur le sommet.
5. Le tore  $\mathbb{T}^2$  admet une structure de  $CW$ -complexe fini ayant une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule. Il est donc de dimension 2. En effet, le tore  $\mathbb{T}^2$  est par définition homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité  $K = [0,1] \times [0,1]$  par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$ . La 0-cellule est l'image de  $(0,0)$ , les deux 1-cellules sont les applications de  $[0,1]$  dans  $\mathbb{T}^2$  obtenues par passage au quotient des applications  $t \mapsto (t,0)$  et  $t \mapsto (0,t)$ . La 2-cellule est la projection canonique de  $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{T}^1$ .
6. La bouteille de Klein  $\mathbb{K}_2$  admet une structure de  $CW$ -complexe fini ayant aussi un sommet, deux arêtes et une cellule de dimension 2. En effet, par définition, elle est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité par la relation d'équivalence engendrée par  $(1,t) \sim (0,1-t)$  et  $(t,1) \sim (t,0)$ . Les cellules sont données par les mêmes opérations.

Les 1-squelettes de  $\mathbb{K}_2$  et de  $\mathbb{T}^2$  sont naturellement homéomorphes, mais l'application d'attachement de la 2-cellule de  $\mathbb{K}_2$  n'est pas homotope à l'application d'attachement de la 2-cellule de  $\mathbb{T}^2$ .

7. Un autre exemple est l'espace projectif réel. On l'étudie en détail dans la section consacrée, dans la section ESPACES PROJECTIFS GÉNÉRAUX mais on en a donné déjà au moins deux modèles fondamentaux ci-dessus.

L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est obtenu par quotient de  $S^{2n+1}$  par l'action naturelle de rotation de  $S^1$  où  $S^{2n+1} \subseteq C^{n+1}$  et de même c'est classique mais il peut être vu comme la boule  $D^{2n}$  fermée dont on a identifié les points de la frontière  $S^{2n-1}$  sous l'action de  $S^1$  (en effet,  $A \subseteq S^{2n+1}$  de points de dernière coordonnée  $z_{n+1} \in \mathbb{R}_+$  est homéomorphe à  $\overline{D^{2n}}$  graphe de  $z \mapsto \sqrt{1 - |z|^2}$  est équivalent sous  $S^1$  à l'ensemble des points de coordonnée  $z_{n+1} = 0$ , et tout point de  $S^{2n+1}$  de dernière coordonnée non nulle équivaut sous  $S^1$  à un unique point de dernière coordonnée dans  $\mathbb{R}_+^*$ ). Ainsi  $\mathbb{P}^n\mathbb{C} = D^{2n} \sqcup \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$  et on attache par l'application quotient  $D^{2n} \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  et par récurrence :  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  a une structure de  $CW$ -complexe avec une unique cellule en

dimension paire et aucune cellule en dimension impaire.

### Corollaire

Tout espace cellulaire fini est séparé. En particulier, c'est un espace cellulaire.

### Corollaire

Tout espace cellulaire fini est compact.

### Contre-exemple

$\mathbb{R}^n$  n'est pas un *CW-complexe fini*. □

### Exercice 3

Montrer que tout sous-espace compact d'un *CW-complexe* n'intersecte qu'un nombre fini de cellules.

### Propriété. (*Plongement des CW-complexes finis*)

Tout *CW-complexe fini* se plonge dans un espace euclidien.

#### 4.4.2.3 Applications cellulaires

##### Définition. (*Application cellulaire*)

Soient  $X, Y$  deux *CW-complexes*. Une application continue de  $X$  dans  $Y$  est dite *cellulaire* si elle envoie le  $n$ -squelette de  $X$  dans le  $n$ -squelette de  $Y$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit aussi que c'est un *morphisme de CW-complexes*. On en déduit même la *catégorie des CW-complexes*.

#### 4.4.2.4 Opérations sur les *CW-complexes*

Les opérations autorisées sur les *CW-complexes* sont les suivantes :

- ★ produit de *CW-complexes* ;
- ★ réunion de *CW-complexes* ;
- ★ somme directe = coproduit de *CW-complexes* en particulier ;
- ★ sous-*CW-complexe* ;
- ★ quotient de *CW-complexe* = écrasement d'un *CW-complexe* sur un sous-*CW-complexe* ;
- ★ revêtement d'un *CW-complexe* ;
- ★ quotient d'un *CW-complexe* par une relation d'équivalence cellulaire ;
- ★ recollement de *CW-complexes* le long d'une application cellulaire ; en particulier :
- ★ cylindre, cône, suspension d'un *CW-complexe* ;

★ attention pas de passage au  $\mathfrak{hom}$  en  $CW$ -complexes.

#### 4.4.2.5 Orientation de cellules (hors-programme)

Pour comprendre la construction suivante, on a besoin de connaître l'homologie (singulière) des sphères afin de définir le DEGRÉ d'une application continue  $S^n \rightarrow S^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pourra sans problème admettre qu'une telle quantité est définie au signe près dans  $\mathbb{Z}$ .

##### Définition-propriété. (*Orientation d'une cellule*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , pour chaque  $k$ -cellule de  $X$ , il y a deux classes d'équivalence d'application caractéristiques  $\varphi, \psi : D^k \rightarrow X$  pour  $\deg(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}) = 1$ .

En effet,  $\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} : D^k / S^{k-1} \rightarrow D^k / S^{k-1}$  est un homéomorphisme et  $D^k / S^{k-1} \simeq S^k$  par un homéomorphisme fixé uniquement, donc son degré est  $\pm 1$  défini absolument.

Une *orientation* d'une  $k$ -cellule de  $X$  est un choix d'une des deux classes d'équivalence d'application caractéristiques de cette cellule. Sous couvert d'un choix d'orientation, on dit qu'une  $k$ -cellule est *orientée* ou *non orientée* si l'on ne précise pas d'orientation.

#### 4.4.2.6 Boucle d'oreille hawaïenne

##### Contre-exemple. (*Homotopiquement équivalent mais pas homéomorphe à un CW-complexe*)

Le *hérisson* est homotope à un  $CW$ -complexe mais n'a pas de décomposition cellulaire puisqu'il n'est pas localement contractile.  $\square$

#### 4.4.2.7 Point de vue catégorie des $CW$ -complexes

On conseille maintenant au lecteur de se référer au cours sur les  $CW$ -COMPLEXES en THÉORIE DE L'HOMOTOPIE. On y apprendra notamment à construire les espaces cellulaires par pushout, ce qui formalise la notion d'attachement de façon plus systématique (et un peu imbuvable)

## 4.5 Homotopie

*Motivation.* En topologie, contrairement à la géométrie, on s'intéresse peu à la taille des objets mais à leurs possibilités de déformation. Ainsi, deux espaces homéomorphes sont les mêmes, mais on voudrait maintenant décrire des applications donnant que deux espaces sont *presque* homéomorphes (c'est l'homotopie), mais les mêmes à déformation près. Par exemple, un plongement de la sphère dans le plan ne peut être homéomorphe, mais quitte à agrandir son image jusqu'à l'infini, on dira que la sphère et le plan sont les mêmes, à déformation près. On définit ainsi une relation plus faible que l'homéomorphie et bien utile au topologue.

### 4.5.1 Point de vue catégorique de la topologie

**Définition.** (*Catégorie des espaces topologiques*)

On note  $\mathcal{C} = \text{Top}$ , la catégorie de tous les espaces topologiques. Dans ce cas, pour tous objets  $X, Y$ ,  $\text{Hom}(X, Y)$  sont les applications continues  $= C(X, Y)$ .

### 4.5.2 Notion d'homotopie

#### 4.5.2.1 Applications homotopes

→ *Notation.* Si  $X$  est un espace topologique, on note  $\star_X$  *n'importe quel point* arbitrairement fixé de  $X$ . Si  $X$  est évident, en particulier si  $X$  est le seul espace mis en jeu, on note simplement l'étoile  $\star$ .

**Définition.** (*Homotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \longrightarrow Y$  deux applications continues (cela va de soi dans la catégories des espaces topologiques). Une *homotopie* entre  $f$  et  $g$  est une application continue :

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

où  $I = [0,1]$ , telle que  $H(x,0) = f(x)$  et  $H(x,1) = g(x)$  pour tout  $x \in X$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes* s'il existe une homotopie entre  $f$  et  $g$ , et l'on écrit  $f \cong g$ , ou, si le contexte est clair (ce qui arrive souvent, puisqu'on parle d'applications maintenant),  $f \simeq g$ .

Le paramètre  $t$  peut, mais ce n'est pas fondamental, représenter le temps. On dit parfois *au premier instant* et *au dernier instant* pour parler des temps  $t = 0$  et  $t = 1$ , conformément au formalisme de la MÉCANIQUE.

Intuitivement,  $H$  est une application continue qui « interpole » entre  $f$  et  $g$ . Aussi,  $f$  et  $g$  ne sont pas les mêmes, mais il existe une collection de chemins continus qui ramène continûment le

chemin  $f$  au chemin  $g$ .

Remarque : avec la phrase précédente, on a traduit que les deux applications partielles doivent être continues. Mais, d'après la définition, cela ne suffit pas tout à fait.

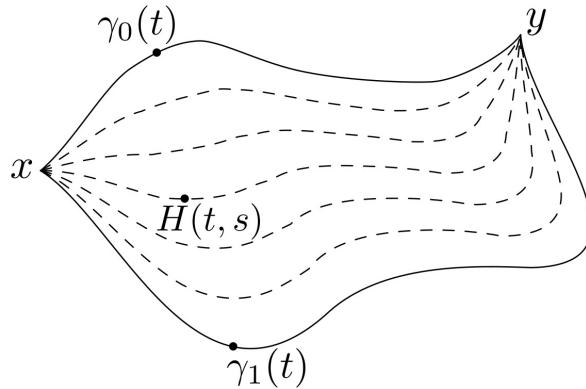


FIGURE 4.5.1 : Deux applications homotopes. —

On reprend les notations de l'énoncé. Ici, l'homotopie est prise relativement à deux points  $\{x,y\}$ . L'idée est de déformer continûment  $f$  en  $g$ . **Non seulement je peux le faire sur tous les points, j'ai peux le faire de manière simultanément cohérente pour tous les points** ( $H$  est continue).



L'homotopie entre deux applications n'est pas équivalente avec l'existence d'un chemin continu de  $f$  à  $g$  dans  $C(X,Y)$ , mais presque (mais quelle topologie donner à cet espace?). C'est vrai si l'on suppose  $X$  localement compact (raisonnable) et si l'on munit  $C(X,Y)$  de la topologie compacte-ouverte (raisonnable également).

Clairement :

### Proposition. (*Relation d'homotopie*)

L'homotopie est une relation d'équivalence.

▷ Bah, pour la réflexivité, il suffit de prendre  $H(x,t) = f(x)$  (là on voit qu'il faut  $f$  continue sinon ça déconne). Pour la symétrie, considérer  $H'(x,t) = H(x,1-t)$  continue par composition. Pour la transitivité, faire appel à une ruse de fouine semblable à la connexité par arcs. ■

*Remarque.* L'homotopie s'énonce également avec  $[a,b]$  au lieu de  $I$ . Il y a bien sûr équivalence entre les deux définitions.

### Exemples. (*Homotopies*)

1.  $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est homotope à l'application constante  $0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Pour voir, la structure topologique de  $\mathbb{R}^n$  est tellement basique que  $\mathbb{R}^n$  est homotope à un point (pour l'équivalence d'homotopie, que nous définirons plus bas). On peut *réaliser*

*l'homotopie* par  $H : \mathbb{R}^n \times I : (x,t) \mapsto xt$ .

2. Deux segments d'un espace vectoriel normé sont toujours homotopes (le faire). On peut même imposer que les chemins interpolateurs soient également des segments.
3. On verra que dans des espaces gentils tels que  $\mathbb{R}^n$  où l'application identité est homotope à une application constante, on parlera d'espace *contractile*, tout lacet est homotope à un lacet constant. C'est le cas du plan complexe, où l'on retrouve un théorème sur l'intégration des fonctions holomorphes.

Ce n'est plus vrai dans certains autres espaces. Par exemple, dans le cercle  $S^1$  réalisé dans le plan complexe, la situation n'est pas équivalente à la précédente. Si un fil parcourt une boucle autour d'un cercle, il n'est pas possible de modifier le nombre de tours compté algébriquement sans que le fil ne se brise ou quitte la surface de la sphère. Ce *nombre de tours* est formellement défini de la manière suivante : l'application de  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2i\pi t}$  étant un homéomorphisme local, tout lacet  $\gamma : [0,1] \rightarrow S^1$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$  possède un unique relèvement continu  $\bar{\gamma} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\bar{\gamma}(0) = 0$ . Le degré du lacet est alors  $\bar{\gamma}(1)$ . Si deux tels lacets sont homotopes, on démontre, en relevant de même cette homotopie, qu'ils ont le même degré.

Ainsi, deux applications homotopes ne sont pas égales, mais interchangeables, en un point à préciser.

#### Exercice 4 (*L'homotopie n'est pas une notion ensembliste*)

1. Une bijection peut-elle être homotope à une application constante ?
2. (*Très difficile*) Montrer que toute application est homotope à une injection, respectivement à une surjection. En particulier, les notions de cardinal, d'injection et de surjection, ne font pas sens à homotopie près.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Oui. On dira bientôt qu'un espace  $X$  où  $id_X \sim cst_{x_0}$  pour un  $x_0 \in X$  est contractile.
2. C'est une conséquence du théorème de factorisation en cofibration, respectivement en fibration, en théorie avancée de l'homotopie des espaces topologiques, traitée dans le chapitre HOMOTOPIES.

#### Définition. (*Homotopie relative*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \rightarrow Y$ . Soit  $A \subseteq X$ , telles que  $f|_A = g|_A$ . On dit que  $f$  est homotope à  $g$  relativement à  $A$ , et l'on note  $f \cong_A g$  ou  $f \simeq_A g$ , si il existe une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(x,0) = f(x)$  et  $H(x,1) = g(x)$ , et  $H(a,t) = f(a) = g(a)$  pour tous  $a \in A$ ,  $t \in [0,1]$ .

**Proposition. (*Relation d'homotopie relative*)**

Avec les notations précédentes, l'homotopie relativement à  $A$  est une relation d'équivalence.

▷ La réflexion vient de ce qu'on peut prendre  $H(x,t) = f(x)$ . Pour la symétrie, si  $H$  est une homotopie (relativement à  $A$ )  $f \simeq g$ , alors  $H(x,1-t)$  convient. On définit  $H'(x,t) = H(x,2t)$  si  $t \in [0, \frac{1}{2}[$ ,  $H'(x,t) = H(x,2(t - \frac{1}{2}))$  sinon. C'est une homotopie de  $f$  à  $h$ . C'est déjà pas mal! ■

**Définition. (*Candidats d'homotopie relative*)**

Soit  $\psi : A \longrightarrow X$ . On note alors  $C(X,Y)_\psi$  l'ensemble des applications continues de  $f : X \longrightarrow Y$  telles que  $f|_A = \psi$ , c'est-à-dire l'ensemble des applications pour laquelle l'homotopie relative à  $A$  avec  $\psi$  fait sens.

**Définition. (*Quotient d'homotopie relative*)**

On note  $[X,Y]_\psi$  le quotient de  $C(X,Y)_\psi$  par la relation d'homotopie relative à  $A$ .

**Exemple. (*Quotient d'homotopie trivial*)**

Cherchons  $[\star, X]$  dans le cas  $C(\star, X) = X$ . Une homotopie dans ce cas est un chemin comme on connaît : on note  $\pi_0(X) = [\star, X]$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . Et, héhé, on touche du doigt la suite des événements...



L'homotopie n'est pas une notion extrinsèque (on n'en doutait pas)! Un cercle du plan est homotope à un point ; un cercle embrassant le tore, non.

**Lemme. (*Conservation de l'homotopie par compositions*)**

Soient,  $T, X, Y, Z$  des espaces topologiques et

$$T \xrightarrow{k} X \xrightarrow{\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}} Y \xrightarrow{h} Z$$

Si  $f \simeq g$ , alors  $h \circ f \circ k \simeq h \circ g \circ k$ .

▷ Soit  $H$  une homotopie de  $f$  à  $g$ . Alors  $h \circ H \circ (id \times h)$  est une homotopie de  $h \circ f \circ k$  sur  $h \circ g \circ k$ . ■

On cite aussi.

**Lemme. (*Composition d'homotopies*)**

Si  $f \simeq g$  et  $h \simeq k$ ,  $h$  est composable à  $f$  et  $k$  à  $g$ , alors  $h \circ f \simeq k \circ g$ .

▷ La preuve est sans malice : pour composer deux homotopies  $H$  et  $K$ , on considère  $\Theta(t,x) = K(t,H(t,x))$ . ■

**Exercice 5** (*Homotopie et cylindre, cône et suspension*)

1. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  est équivalente à la donnée d'une application continue  $\mathfrak{C}(X) \rightarrow Y$ .
2. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  dont la première est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue  $C(X) \rightarrow Y$ .
3. Montrer que la donnée d'une homotopie entre deux fonctions continues  $X \rightarrow Y$  dont la seconde est une application constante est équivalente à la donnée d'une application continue  $\Sigma(X) \rightarrow Y$ .

#### 4.5.2.2 Équivalence d'homotopie

On peut maintenant, à la mode catégorique, transformer les notions que l'on connaît en notions vraies à homotopies près. Le lecteur se convaincra qu'en topologie, c'est la bonne manière de considérer les choses.

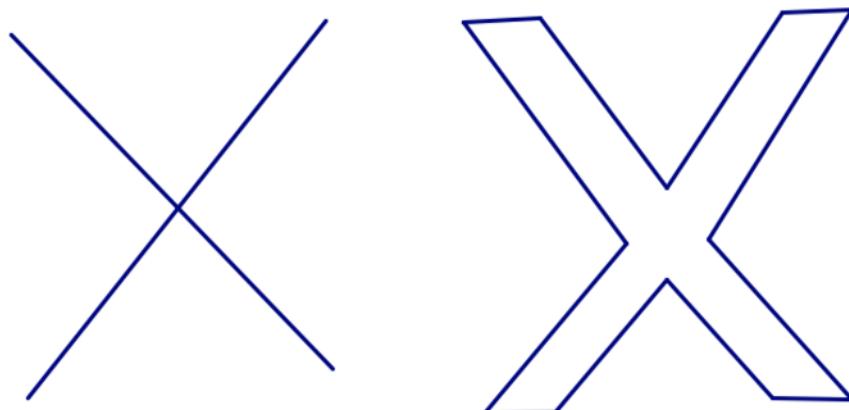


FIGURE 4.5.2 : Deux espaces homotopiquement équivalents non homéomorphes. —

Si l'on enlève le point central de l'espace de gauche, on obtient quatre composantes connexes. Cependant, si l'on enlève un point quelconque à l'espace de droite, on garde un espace connexe par arcs.

**Définition.** (*Équivalence d'homotopie*)

On dit qu'une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est une *équivalence d'homotopie*, s'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \simeq id_Y$  et  $g \circ f \simeq id_X$ .

Moins formellement, une équivalence d'homotopie est une application continue inversible à homotopie près.

Deux espaces topologiques  $A, B$  sont dits *homotiquement équivalents* ou *homotopes* s'il existe une équivalence d'homotopie entre eux. On note  $A \cong B$  et nous proscrivons l'usage  $\simeq$  similaire à l'homéomorphie.

### Fait. (*Homotopie et homéomorphie*)

Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie.

### Fait. (*Relation d'équivalence d'homotopie*)

L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence.

### Lemme

La composée de deux équivalences d'homotopie est une équivalence d'homotopie.

### Principe

L'équivalence d'homotopie ne voit pas les largeurs.

Les notions de convergence, internes, ne sont pas conservées par l'équivalence d'homotopie. En revanche, les considérations extérieures (trous, composantes connexes, etc.), le sont : c'est un peu la « morale de l'équivalence d'homotopie ». La compacité n'est pas préservée par l'homotopie. Ainsi, il convient de penser à l'homotopie comme une notion un peu plus faible que topologique à proprement parler.

### Exemples. (*Équivalences d'homotopie*)

1. Comme on a vu,  $\star \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une équivalence d'homotopie pour tout point  $\star \longmapsto a$   
 $a \in \mathbb{R}^n$ . L'homotopie représente donc bien cette idée topologique de géométrie du caoutchouc : peu importe la taille, des choses très petites, atomiques, sont homotopes à des choses très grandes, infinies.
2. Tout convexe de  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  est homotiquement équivalent à un point, mais n'est pas homotiquement équivalent au vide. Une boule ouverte et une boule fermée, deux boules ouvertes ou fermées de n'importe quelle dimension, sont homotiquement équivalentes.
3. (*Homotiquement équivalent  $\not\Rightarrow$  homéomorphes*)  $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est une équivalence d'homotopie. On pose  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow S^1$ , qui à  $x$  fait correspondre  $\frac{x}{\|x\|}$ . Alors  $g \circ f = id$  et  $f \circ g \neq id$ . On pose  $H : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  qui à  $(x,t) \longmapsto (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$ . Alors  $f \circ g$  est homotope à l'identité. Pourtant, il est clair

que  $S^1$  et  $\mathbb{R}^2$  ne sont pas homéomorphes ; en effet, le premier, privé de deux points, n'est plus connexe par arcs ; le second, si.

### Exercice 6

Un sous-espace d'un espace topologique est-il toujours homotopiquement à son adhérence et à son intérieur ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non :  $\overset{\circ}{S^1} = \emptyset \not\cong S^1.s$

### Définition. (*Catégorie des espaces topologiques homotopique*)

On raffine la catégorie des espaces topologiques en la *catégorie d'homotopie*  $C = \text{Top}_H$  dont les objets sont encore les espaces topologiques et pour tous objets  $X, Y$ ,  $\text{Hom}_C(X, Y) = [X, Y] := [X, Y]_\emptyset$  : les morphismes sont les applications continues définies à homotopie près.

Les isomorphismes de la catégorie  $C$  sont les équivalences d'homotopie.

### Heuristique

L'homotopie est une sorte de *morphisme entre les morphismes*, ce qui fait gagner un troisième cran d'abstraction dans les catégories.

On donne quelques propriétés pratiques pour établir des homotopies.

### Propriété. (*Cas trivial dans $\mathbb{R}^n$* )

Toute application continue d'un convexe dans lui-même est homotope à l'identité.

▷ Soit  $X$  un convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une application continue  $X \rightarrow X$ . Alors l'homotopie  $(1-t)x + tf(x)$  convient. ■

### Propriété. (*Type d'homotopie par changement de point de vue*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $g : Y \rightarrow X$ . On ne parvient pas à construire  $f : X \rightarrow Y$  directement de façon continue. On choisit un isomorphisme  $\varphi : X \rightarrow X'$  et l'on pose  $f : X' \rightarrow Y$ . On suppose  $(f \circ \varphi) \circ g = id_Y$ . Alors il suffit de montrer  $g \circ f \simeq \varphi^{-1}$  pour en déduire que  $X, Y$  sont homotopiquement équivalents.

▷ En effet, il suffit de montrer  $(g \circ f) \circ \varphi \simeq id_X$  et l'on conclut par relation d'équivalence. ■

### 4.5.2.3 Isotopie

#### Définition. (*Isotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. On dit que deux homéomorphismes  $f, g$  sont *isotopes* s'ils sont homotopes par  $H$  de façon que pour tout  $t \in [0,1]$ ,  $H(-,t)$  soit un homéomorphisme.

#### Définition. (*Isotopie ambiante*)

Deux plongements  $\alpha, \beta$  d'un espace  $Z$  dans un espace  $X$  sont *isotopes (de manière ambiante)* s'ils se prolongent en deux homéomorphismes  $f, g$  de  $X$  isotopes.

#### Proposition

Deux plongements  $\alpha, \beta$  d'un espace  $Z$  dans un espace  $X$  sont *isotopes* si et seulement s'ils diffèrent d'un isotopiquement nul, *i.e.* s'il existe  $h$  un autohoméomorphisme de  $X$  isotope à  $id_X$  et tel que  $h \circ \alpha = \beta$ .

### 4.5.3 Espaces contractiles

#### Définition. (*Espace contractile*)

On dit qu'un espace topologique  $X$  est *contractile* s'il est homotope (= homotiquement équivalent) à un point, c'est-à-dire si  $X \simeq \star$  dans  $\text{Top}_H$ .

#### Heuristique

Le seul espace topologique homéomorphe à un point est le point, qui est d'ailleurs unique à homéomorphisme près : il est discret, grossier, compact, connexe, séparé, à base dénombrable.

On se rappelle donc que l'équivalence d'homotopie est bien plus faible que l'homéomorphie ; en particulier, elle ne restreint pas le cardinal.

#### Exemples. (*Contractiles*)

1. Il s'agit de montrer :  $X \cong \{\emptyset\}$ .
2. Tout cône d'une espace topologique est contractile (l'écrire. En fait, par définition, **le cône est le paradigme d'espace contractile**).
3. Tout espace affine est contractile.
4. Tout convexe de  $\mathbb{R}^n$  est contractile.
5. Toute boule est donc contractile.
6. Toute sphère privée d'un point est contractile.

**Propriété. (*Caractérisation de la contractibilité*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $X$  est contractile ;
- (ii)  $\text{id}_X \sim \text{cst}_{x_0}$  pour un  $x_0 \in X$  ; on dit que  $\text{id}_X$  est *homotopiquement nulle* ;
- (iii)  $\text{id}_X \sim \text{cst}_{x_0}$  pour chaque  $x_0 \in X$  ;
- (iv)  $X$  se rétracte par déformation sur n'importe lequel de ses points.
- (v)  $C(X)$  se rétracte par déformation sur  $X$  ;
- (vi) toute fonction continue dans  $X$  est homotopiquement nulle ;
- (vii) toutes les fonctions continues dans  $X$  sont homotopes.

**4.5.3.1 Rétractions****Définition. (*Paire topologique*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$  avec  $A \subseteq X$ . Alors on dit que  $(X, A)$  est exactement une *paire topologique*. Une *application continue* entre deux paires topologiques  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(A) \subseteq B$ .

**Définition. (*Rétract*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$ , on dit que  $A$  est un *rétract* de  $X$ , ou que  $A$  est *rétracte*, ou que  $X$  se *rétracte* sur  $A$  si l'inclusion a une *rétraction topologique stricte*, i.e. s'il existe  $\tau : X \rightarrow A$  continue telle que  $\tau \circ i = \text{id}_A$ , ce qui signifie aussi exactement qu'il existe une application continue  $r : X \rightarrow A$  avec  $r|_A = \text{id}_A$ , ce qui peut sembler bizarre, mais

**Définition. (*Rétract absolu*)****Définition. (*Rétracts par déformation (forte)*)**

Soit  $X$  un espace topologique et  $i : A \hookrightarrow X$  continue, ce qui revient à prendre un sous-espace  $A$  de  $X$ , on dit que  $A$  est un *rétract* de  $X$ , ou que  $A$  est un *rétract par déformation* si c'est une rétract et sa rétraction  $\tau : X \rightarrow A$  est une section telle que  $i \circ \tau \simeq \text{id}_X$ .

On dit encore que  $A$  est un *rétract par déformation fort* si de plus  $i \circ \tau \simeq_A \text{id}_X$ .

**Fait**

Ainsi rétract par déformation fort  $\implies$  rétract par déformation  $\implies$  rétract.

*Remarque.* Pour ne pas avoir l'homéomorphisme, on comprend bien que c'est la condition la plus forte que l'on peut demander.

**Remarque importante.** Dans le cas du rétract par déformation,  $i$  et  $\tau$  sont des équivalences d'homotopie. Ainsi, une **rétraction par déformation est un cas particulier d'identité du type d'homotopie**, et même assez courant : il correspond grossièrement au cas où l'une des  $f \circ g \sim id$  est une égalité.

### Exercice 7

L'équateur de la sphère usuelle en est-il un rétract par déformation ? Un rétract ?

#### Exemples. (*Rétracts*)

1. Tout point est un rétract de son milieu de vie.
2.  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est un rétract par déformation.
3.  $S^1$  est un rétract par déformation du ruban de Möbius.
4. Pour tout  $x \in S^1$ ,  $\{x\} \times S^1$  est un rétract de  $\mathbb{T}^2$ . De même,  $S^1 \times \{x\}$  est un rétract de  $\mathbb{T}^2$ . Cependant, aucun des deux n'est un rétract par déformation.
5. (*Rétraction sur le cône*) Tout espace topologique  $X$  est un rétract par déformation forte de son cylindre  $X \times I$ .

En effet, en considérant  $i : X \hookrightarrow X \times I$ ,  $x \mapsto (x,0)$ , on a une rétraction  $r : (x,t) \mapsto x$  telle donc que  $ri = id_X$  et continue sur  $X \times I$ . C'est un rétract, car  $ir : X \times I \rightarrow X \times I$ ,  $(x,t) \mapsto (x,0)$  est  $\sim id_X$  par  $H : (X \times I) \times I \longrightarrow X \times I$ . La rétraction par déformation est même forte puisque pour  $((x,t),t') \mapsto (x,tt')$

$t = 0$  i.e. sur  $X$ ,  $H((x,t),t') = (x,0) = id_X(x,t) = ir(x,t)$  pour tout  $t' \in [0,1]$ .

Il n'est pas difficile de constater que  $X$  est également un rétract par déformation de son cône  $C(X)$  écrasé au temps  $t = 1$ . Toutes les applications mises en jeu passent au quotient sur  $X \times \{1\}$  y compris l'homotopie, qui reste relative. Semblablement,  $X$  est un rétract par déformation de sa suspension  $\Sigma(X)$ .

6.  $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$  est un rétract par déformation de  $S^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$ .

On note  $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$ . Considérons  $r : (x_1, \dots, x_4) \mapsto (0,0, \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}})$ . Elle est bien définie par hypothèse d'exclusion sur  $B$  et bien à valeurs dans  $S^1 = \{(0,0,x_3,x_4), x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ . On a presque par construction  $ri = 0$  en notant  $i : (0,0,x_3,x_4) \hookrightarrow (0,0,x_3,x_4)$ . D'autre part,  $ir(x) = (0,0, \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}, \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}})$ . Considérons  $H(x,t) = \frac{(tx_1, tx_2, x_3, x_4)}{\|(tx_1, tx_2, x_3, x_4)\|}$  qui est une homotopie de  $id_{S^3 \setminus B}$  à  $ri$ . La rétraction par déformation est forte, car sur  $S^1$ , cette homotopie vaut bien  $id$ .

### Proposition

Soit  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  continue,  $X$  un espace topologique. Alors  $f$  se prolonge en une application continue  $g : \mathbb{B}^{n+1} \rightarrow X$  si et seulement si  $f \simeq \star$  l'application constante.

▷ Si un tel  $g$  existe, on pose :

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{B}^{n+1} \times I &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto g(tx) \end{aligned}$$

qui est une homotopie entre  $g$  et l'application constante  $x \mapsto g(0)$ . Par restriction, on en déduit une homotopie entre  $f$  et  $g(0)$ .

Réiproquement, si  $f \simeq x_0$ , soit  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$  cette homotopie. On pose :

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{B}^{n+1} &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \begin{cases} H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right) \text{ si } \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ x_0 \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et voilà. ■

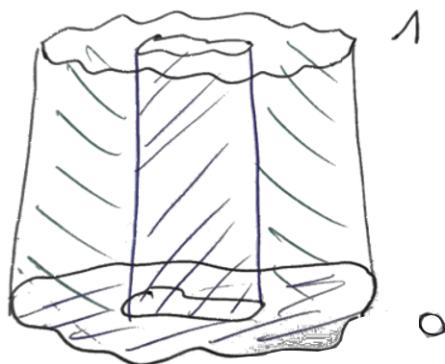


FIGURE 4.5.3 : Illustration de la notion de rétraction. —

### 4.5.4 Propriété d'extension des homotopies

**Définition.** (*Propriété d'extension des homotopies, peh*)

Soient  $Y$  un espace topologique et  $X \subseteq Y$  un sous-espace. On dit que  $(Y, X)$  a la *propriété d'extension des homotopies* ou de *prolongement des homotopies* si pour tout  $g : Y \rightarrow Z$  (continue) et pour toute application continue  $H : X \times I \rightarrow Z$  telle que  $H(-, 0) = g|_X$ , alors il existe une homotopie  $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow Z$  vérifiant :  $\tilde{H}|_{X \times I} = H$  et  $\tilde{H}(-, 0) = g$ . On

dit alors que  $\tilde{H}$  étend  $H$  avec conditions initiales.

Si  $Z$  est fixé, on dit que  $(Y, X)$  a la PEH relativement à  $Z$ . Une paire topologique a donc la PEH si et seulement si elle a la PEH relativement à tout espace.

On dit parfois que  $(X, A)$  est une *cofibration*. Elle est *stricte* si  $A$  est fermée dans  $X$ . On parle aussi de *paire de Borsuk* et de *bonne paire topologique*. Si  $A$  est un point, on parle d'espace topologique *bien pointé*.

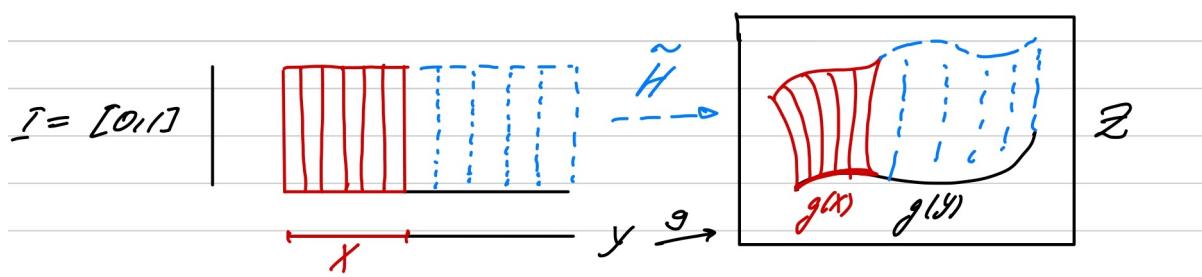


FIGURE 4.5.4 : Propriété d'extension des homotopies. —

### Remarques.

1. Si  $X$  est fermé dans  $Y$ , par recollement de continues sur un recouvrement de deux fermés,  $g$  et  $H$  donnent une application continue

$$(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z.$$

Autrement, ce n'est pas clair (contre-exemple : prendre  $X = \mathbb{Q}, Y = \mathbb{R}$ ).

2. Si  $(Y, X)$  a cette propriété, alors l'inclusion canonique  $i$  de  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \hookrightarrow Y \times I$  s'étend (en effet, on a une application continue  $g = i|_{Y \times \{0\}}$  et une homotopie  $H = i|_{X \times I}$  qui vérifient les hypothèses) en une application continue qui est par construction une rétraction de  $i$  donc par définition  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  est un rétract de  $Y \times I$ . Réciproquement, s'il existe une rétraction  $\tau : Y \times I \longrightarrow (X \times I) \cup (Y \times \{0\})$ , en composant avec  $\tau$ , toute application continue  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) & \xrightarrow{\quad} & Z \\ \uparrow & & \nearrow \\ Y \times I & & \end{array}$$

s'étend en une application continue sur  $Y \times I$  donnée par  $f \circ \tau$ . Or d'après la remarque précédente la donnée d'une application continue  $g$  et d'une homotopie  $H$  vérifiant les hypothèses de la définition est équivalente à la donnée d'une application continue  $f$  de  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  dans le cas  $A$  fermé. On peut donner une preuve dans le cas

général, mais c'est nettement plus laborieux. On le fait dans le chapitre HOMOTOPIES. Ainsi,

$(Y, X)$  a la PEH si et seulement si  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\})$  est un rétract de  $Y \times I$ .

Le cas échéant, c'est même un rétract par déformation.

3. Schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\tilde{f}_0} & X \\ p_0 \uparrow & \swarrow f & \uparrow i \\ Y^I & \xleftarrow{f} & A. \end{array}$$

4. (*Passage au produit dans la PEH*) En exercice : si  $(Y, X)$  a la propriété d'extension des homotopies, alors  $(Y \times Z, X \times Z)$  aussi.

### Proposition

Si  $Y$  est séparé et  $(Y, X)$  a la peh, alors  $X$  est fermé dans  $Y$ .

▷  $Y$  est séparé si et seulement si  $\Delta_Y$  est fermée dans  $Y \times Y$ . On a une rétraction donné par la figure ci-dessous. Soit  $F : Y \times I \longrightarrow (Y \times I) \times (Y \times I)$  qui  $x \mapsto (x, \tau(x))$ . On a  $(X \times I) \cup (Y \times \{0\}) = F^{-1}(\Delta_{Y \times I})$  fermé.

$$Y \times I \xrightarrow[p]{} (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \xrightarrow{} Y \times I$$

En prenant l'intersection avec le fermé  $Y \times \{1\}$ , on obtient que  $X$  est fermé. ■

*Remarque.* Dans ce cas, une application  $f : (X \times I) \cup (Y \times \{0\}) \longrightarrow Z$  est continue ssi  $f|_{X \times I}$  et  $f|_{Y \times \{0\}}$  le sont.

### Proposition

$(B^n, S^{n-1})$  a la P.E.H.

▷ On a une rétraction par déformation  $\tau : \underbrace{B^n \times I}_{\text{gobelet plein}} \longrightarrow \underbrace{(S^{n-1} \times I) \cup (B^n \times \{0\})}_{\text{gobelet}}$  en utilisant la projection radiale. ■

### Exercice 8

$(B^n, \mathring{B}^n)$  a-t-il la P.E.H. ?

En faisant le quotient d'un espace par une partie, on identifie cette dernière à un point. Intuitivement, si cette partie est contractile, on obtiendrait un espace homotopiquement équivalent au précédent. C'est faux ! On a besoin de la propriété d'extension pour énoncer proprement cette propriété.

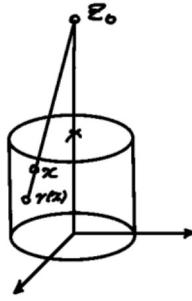


FIGURE 4.5.5 : La projection radiale du gobelet plein sur le gobelet. —

### Propriété

Si  $(Y,X)$  a la PEH et  $X$  est contractile, alors  $Y$  et  $Y/X$  sont homotopiquement équivalents.

▷ On montre que  $q : Y \rightarrow Y/X$  est une équivalence d'homotopie. Soit  $i : X \rightarrow Y$  et puisque  $X$  est contractile,  $H : X \times I \rightarrow X$  entre  $id_X$  et l'application constante  $c_{x_0}$ . On a donc  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $i$  et  $c_{x_0}$ . Par extension, il existe  $K : Y \times I \rightarrow Y$  qui satisfait en particulier  $K(x,1) = x_0$  pour tout  $x \in X$ . On pose  $g : y \mapsto K(y,1)$  de  $Y$  dans  $Y$ .  $g$  est constante sur  $X$  donc elle passe au quotient en  $\tilde{g} : Y/X \rightarrow Y$  et  $\tilde{g} \circ q = g$ . Donc  $\tilde{g} \circ q$  est homotope via  $K$  et  $id_Y$ . De plus, pour tous  $(x,t) \in X \times I$ , on a  $q \circ K(x,t) = q(x_0) \in Y/X$ . Ainsi par extension,  $Y \times I \rightarrow (Y/X \times I)$  et  $Y \times Y \rightarrow Y/X$  permet la factorisation  $\tilde{g} \circ K$  qui est une homotopie entre  $id_{Y/X}$  et  $q \circ \tilde{g}$ . ■

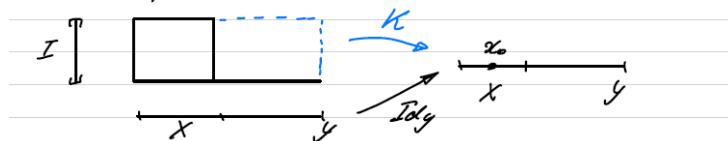


FIGURE 4.5.6 : Sous la PEH, on peut écraser un contractile de façon bénigne. —

### Propriété. (Transitivité de la PEH)

Si  $(Y,X)$  et  $(Z,Y)$  ont la PEH alors  $(Z,X)$  aussi.

### Lemme. (PEH d'un recollement)

Supposons que  $(B,A)$  a la PEH et  $f : A \rightarrow X$ . On pose  $Y = X \coprod_A B$ . Alors  $(Y,X)$  a la PEH.

▷ La donnée de  $H : B \times I \rightarrow Z$  donne  $H^\# : B \rightarrow C(I,Z)$  qui à  $b \mapsto (t \mapsto H(b,t))$ . Par la PEH,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\forall H^\#} & C(I, Z) \\ \downarrow K^\# & \nearrow & \downarrow ev_0 \\ B & \xrightarrow{\forall g} & Z \end{array}$$

tel que  $\forall H^\# \forall g : ev_0 \circ H^\# = g \circ i \exists K^\# \quad ev_0 K^\# = g$  et  $K^\# \circ i = H^\#$ . Alors :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{H^\#} & C(I, Z) \\ i \downarrow & & K^\# \downarrow j_X & \nearrow L^\# & \downarrow \\ B & \xrightarrow{j_B} & B \coprod_A X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

car  $K$  a la PEH par  $(B, A)$ , et  $L^\#$  est obtenue par propriété universelle du quotient. Donc  $(B \coprod_A X, X)$  a la PEH. ■

### Conséquence. (*Propriété d'écrasement des CW-complexes*)

Si  $Y$  est obtenu à partir de  $X$  en attachant des cellules, et si  $X$  est contractile, alors  $Y/X \cong Y$ .

### Propriété. (*Homotopie des recollements par des homotopes*)

Soient  $A \subseteq B$  des espaces topologiques ; on suppose que  $(B, A)$  a la propriété d'extension des homotopies et que  $f, g : A \longrightarrow X$  sont homotopes. Alors il existe une équivalence d'homotopie

$$X \coprod_f B \cong X \coprod_g B.$$

▷ Soit  $H$  une homotopie de  $f$  vers  $g$ . Avec  $Z = (B \times I) \coprod_H X$ , on a

$$\begin{array}{ccc} X \coprod_f B & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow & \swarrow & \\ X \coprod_g B & & \end{array}$$

On a une rétraction par déformation  $\tau : B \times I \longrightarrow B \times \{0\} \cup (A \times I)$  qui induit une rétraction par déformation,  $(B \times I) \coprod_H X \longrightarrow (B \times \{0\}) \cup (A \times I) \coprod_H X = B \coprod_f X$ . On a donc  $B \coprod_f X \cong Z \simeq B \coprod_g X$ . La propriété est démontrée. ■

Parlons enfin des espaces bien pointés.

*Remarque.* La condition un peu bizarre que  $(X, x)$  soit une paire de Borsuk, signifie que pour toutes applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  telles que  $f(x), g(x)$  soient reliés par un chemin  $\gamma$ ,  $f$  et  $g$  sont homotopes et il existe une homotopie  $H$  entre elles telle que  $H(x, -) = \gamma$ .

**Contre-exemple. (*Espace pointé qui n'est pas bien pointé*)**

Pour  $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ , la paire  $(X, \{0\})$  n'a pas la propriété d'extension des homotopies.

Soit une rétraction  $r$  de l'inclusion  $i : (\{0\} \times X) \cup (I \times \{0\}) \hookrightarrow I \times X$ . Alors  $r(t, \frac{1}{n}) = (0, \frac{1}{n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$  mais en considérant  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $r$  ne peut être continue.  $\square$

**Exercice 9 (*Caractérisation des espaces pointés qui sont des bonnes paires*)**

Montrer qu'un espace pointé en  $x$  est bien pointés si et seulement s'il est localement contractile en  $x$ . En particulier, les  $CW$ -complexes sont toujours bien pointés.

## 4.6 Groupe fondamental

### 4.6.1 Le groupe fondamental

#### 4.6.1.1 Homotopie entre chemins, lacets et boucles

**Définition.** (*Homotopie entre chemins*)

Soit  $X$  une espace topologiques. Deux chemins (continus)  $\gamma, \gamma' : [0,1] \longrightarrow X$  sont dit *homotopes* si

$$\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma',$$

autrement dit, s'il existe une homotopie de  $\gamma$  vers  $\gamma'$  qui fixe leurs extrémités.

En particulier, l'homotopie entre deux chemins n'a de sens que s'ils ont (déjà) les mêmes extrémités.

On note  $[\gamma]$  la classe d'homotopie d'un chemin.

Le premier dessin illustrant l'homotopie dans ce polycopié illustre en fait déjà ce cas.

**Définition.** (*Lacet, boucle*)

Soit  $X$  une espace topologiques et  $\gamma$  un chemin de  $X$ . On dit que  $\gamma$  est un *lacet* ou une *boucle* si  $\gamma(0) = \gamma(1)$ .

Attention ! On peut imaginer une homotopie entre deux lacets fixant les extrémités de ces deux là, mais ne fixant par celles des lacets intermédiaires. Cette notion ne nous intéressera pas.

**Exercice 10** (*Les lacets sont les applications continues  $S^1 \rightarrow X$* )

Montrer qu'un lacet en  $x_0$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée d'une application continue pointée de  $S^1 \rightarrow (X, x_0)$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Soit  $f : [0,1] \rightarrow X$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ . Par propriété universelle de la somme topologique écrasée, on en déduit une application continue  $f : [0,1]/\{0,1\} \simeq S^1 \rightarrow X$  où  $\simeq$  est l'homéomorphie. En pointant  $S^1$  par  $\bar{1} = \bar{0}$ ,  $f$  est pointée de  $(S^1, \bar{0}) \rightarrow (X, x_0)$ . Réciproquement, si  $f : (S^1, t_0) \rightarrow (X, x_0)$  est pointée, en composant par une paramétrisation exponentielle de  $S^1$  autour de  $t_0$  bien choisie, disons  $t \mapsto t_0 e^{2\pi i t}$ , on obtient une application continue de  $[0,1]$  dans  $X$  telle que  $f(0) = f(1) = x_0$ .

#### 4.6.1.2 Bagage théorique pour la construction du GF

Faire des dessins !

**Définition. (*Inverse d'un chemin, opposé d'un chemin*)**

Soit  $X$  une espace topologiques et  $\alpha$  un chemin dans  $X$ . On note  $\bar{\alpha} : t \mapsto \alpha(-t)$  qui est un chemin de  $\alpha(1) \rightarrow \alpha(0)$ .

**Définition. (*Chemin constant*)**

Soit  $X$  une espace topologique. On note  $c_\star : t \mapsto \star$  un chemin constant en  $\star \in X$ .

**Définition. (*Composition des chemins*)**

Si  $\beta$  est une chemin avec  $\beta(0) = \alpha(1)$ , on note  $(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2(t - \frac{1}{2})) & \text{sinon.} \end{cases}$  On pose

$[\alpha] \star [\beta] = [\alpha \star \beta]$  s'il existe bien défini, où  $[\cdot]$  est la classe d'homotopie d'un chemin (qui est clairement une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins continus dans  $X$ ).

Cette formule n'est pas canonique, mais c'est la plus simple que l'on puisse trouver dans le commerce.

Le lemme suivant assure en particulier la bonne définition de la composition. Elle montre que les classes d'homotopie de chemins ne dépendent pas de leur paramétrage, ce qui est très puissant.

**Lemme**

Soit  $\varphi : I \longrightarrow I$  telle que  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi(1) = 1$ , alors  $\varphi$  est homotope à  $id_I$  relativement à  $\{0,1\}$ .

▷ Prenons  $H : I \times I \longrightarrow X$  qui à  $(t,s) \longmapsto st + (1-s)\varphi(t)$ . ■

*Remarque.* Si  $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$  est un chemin  $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma \circ \varphi$ , on dit que  $\gamma \circ \varphi$  est un *reparamétrage de  $\gamma$  par précomposition*.



La composition des chemins n'est pas associative par raison de reparamétrisation ; intuitivement, on a bien le même dessin, mais on ne parcourt pas les mêmes sections à la même vitesse, ce qui fait que, rigoureusement, les fonctions ne sont pas les mêmes.

**Lemme**

Avec les notations précédentes,  $([\alpha] \star [\beta]) \star [\gamma] = [\alpha] \star ([\beta] \star [\gamma])$ .

▷ On obtient  $(\alpha \star \beta) \star \gamma$  à partir de  $\alpha \star (\beta \star \gamma)$  par reparamétrage. ■

**Lemme**

$[\alpha] \circ [\bar{\alpha}] = [c_{x_0}]$  avec  $x_0 = \alpha(0)$  et  $c_{x_0}$  l'application constante en  $x_0$ .

**4.6.1.3 Définition du groupe fondamental et du groupoïde fondamental****Définition. (*Groupoïde*)**

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

**Définition. (*Automorphismes*)**

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $x \in \mathcal{C}$ . On note  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x)$  l'ensemble des isomorphismes de  $x \rightarrow x$ . Alors en particulier, dans un groupoïde,  $\text{Hom}(x,x) = \text{Aut}(x,x)$  pour tout  $x \in X$  (condition non suffisante bien sûr pour avoir un groupoïde).

**Exemple fondamental. (*Groupoïde d'un groupe*)**

Si  $G$  est un groupe, on définit une catégorie  $C_G$  telle que  $\text{Ob}(C_G) = \{\star\}$  et  $\text{Hom}(\star, \star) = G$  est un groupoïde.

**Définition. (*Groupoïde fondamental*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *groupoïde fondamental* d'un espace  $X$ , est un groupoïde  $\Pi(X)$  dont les objets sont les éléments de  $X$   $\text{Ob}(\Pi(X)) = X$ , les morphismes entre deux points  $\text{Hom}(x,y)$  sont les classes d'homotopie des chemins de  $x$  vers  $y$  basés aux extrémités, la composition est  $\star$  comme définie dans la section précédente et l'identité d'un point  $x$  est  $\text{id}_x = [c_x]$ .

**Définition. (*Groupe fondamental*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Le *groupe fondamental*, ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie* basé en  $x_0 \in X$  dit *point base* de  $X$ , noté  $\pi_1(X, x_0)$ , est  $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x_0) = \text{Aut}_{\Pi(X)}(x_0)$  (puisque c'est un groupoïde).

Autrement dit, c'est l'ensemble, qui forme un groupe, des classes d'homotopie (de chemins) de lacets autour de  $x_0$ .



Ainsi on définit le groupe fondamental à travers les classes d'homotopie basées aux extrémités. On parle alors d'*homotopie libre* pour ce que nous appelons homotopie simplement. Certains auteurs peu scrupuleux oublient de fixer les lacets intermédiaires  $H(x,1) = x_0 = H(x,1) \quad \forall x$ , mais c'est mal : dans ce cas, tout espace connexe par arcs aurait un groupe fondamental trivial.

*Remarque.* Si  $x, y \in C$ ,  $f$  un isomorphisme de  $x \rightarrow y$ , alors il existe un isomorphisme de groupe  $\text{Aut}(x) \simeq \text{Aut}(y)$ ,  $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$ . Dans  $\mathcal{C} = \Pi(X)$ , un isomorphisme de  $x$  vers  $y$  n'est

autre un chemin de  $x$  vers  $y$  puisqu'il est clair que tout chemin est inversible pour la loi de composition définie dans la section précédente. On en déduit le fait suivant.

**Fait. (*Groupe fondamental et composantes connexes par arcs*)**

$x$  et  $y$  sont isomorphes dans  $\Pi(X)$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont dans la même composante par arcs.

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\Pi_1(X,x) &\simeq \Pi_1(X,y) \\ [\alpha] &\longmapsto [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}],\end{aligned}$$

ceci n'étant pas canonique (car dépend de la conjugaison, c'est-à-dire du chemin  $\gamma : x \longrightarrow y$ ).

→ *Notation.* Si  $X$  est connexe par arcs et non vide, si  $x_0 \in X$ , on peut donc noter  $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$ .

Parfois, les cours introduisent seulement le groupe fondamental et montre qu'il ne dépend pas du point base sur une même composante par arcs, à isomorphisme près. C'est dommage, car le groupoïde fondamental est plus canonique, ne dépendant que de l'espace  $X$  absolument, et a toutes les informations puisque cette catégorie contient toutes les informations des catégories des groupes de Poincaré dans ses morphismes.

Par exemple, on ne devrait pas dire que le groupe fondamental du cercle (voir ci-dessous) est  $\mathbb{Z}$ . On devrait dire que le groupe fondamental du cercle, basé en 0, est  $\mathbb{Z}$ , mais c'est un peu redondant, car ils sont tous isomorphes (et encore plus canoniquement puisque dans le cas de  $\mathbb{Z}$ , la conjugaison n'agit pas par abélianité).

**Exemples. (*Groupes fondamentaux*)**

1. On pose  $X = \mathbb{S}^1$ . On prend la base  $x_0 = 0$ . On montrera plus tard l'isomorphisme

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \Pi_1(S^1, 0).$$

$$k \longmapsto [t \mapsto e^{2ik\pi t}]$$

Intuitivement, le groupe fondamental détecte (en ce qu'il est non trivial) la non-trivialité des topologies : ici, la non-contractilité : on peut tourner avec un lacet autour du trou.

**À propos. (*Interprétation du groupe fondamental*)**

- ★ Le groupe fondamental est nul si l'espace est sans trous.
- ★ Le groupe fondamental a de la torsion (en particulier fini) s'il existe une zone que

l'on peut parcourir un certain nombre de fois dans un seul sens... de sorte que l'on retombe au point de départ.

- ★ Lorsque le groupe fondamental est indénombrable, il y a des chances pour qu'il y ait de la totale discontinuité.
- ★ Le groupe fondamental est abélien... c'est plus difficile à voir.

#### 4.6.1.4 Comportement du GF vis-à-vis des applications continues

**Définition-propriété.** (*Application induite sur les groupes fondamentaux*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $x_0 \in X$  et  $\varphi(x_0) = y_0$ , on définit une *application induite (par postcomposition)* sur les groupes fondamentaux par  $\varphi_*(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ .

$$[\gamma] \longmapsto [\varphi \circ \gamma]$$

On note parfois  $\varphi_*(f) = \pi_1(f)$ .

On en déduit également une application induite sur les groupoïdes fondamentaux.

▷ Il est clair que l'opération de postcomposition transforme un lacet en un lacet. Pour montrer qu'elle envoie deux lacets homotopes sur deux lacets homotopes, rien de bien compliqué non plus. ■

**Fait.** (*Fonctorialité du groupe fondamental*)

$$\pi_1(id_X) = id_{\pi_1(x)} \text{ et } (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$

Si  $f$  est injective, respectivement surjective, respectivement bijective, l'application induite n'est pas nécessairement injective, respectivement surjective, respectivement bijective.



Cependant, on verra que si  $A$  est un rétract de  $X$  et  $a \in A$  l'application induite  $\pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  est injective.

→ *Notation.* Si  $X$  est connexe par arcs, on s'autorise à noter  $\pi(X) = \pi(X, x)$  pour tout  $x \in X$ .

**Lemme**

Soient  $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$  deux applications homotopes entre deux espaces topologiques. Pour tout  $x \in X$ , il existe un isomorphisme de groupes  $\chi : \pi_1(Y, \varphi(x)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, \psi(x))$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, \varphi(x)) & \xrightarrow{\chi} & \pi_1(Y, \psi(x)) \\ \varphi_* \swarrow & & \searrow \psi_* \\ \pi_1(X, x). & & \end{array}$$

En particulier, si  $\varphi \equiv_{\{x\}}$ , alors  $\varphi_* = \psi_*$ .

**Propriété. (Groupes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents)**

Si  $f$  est une équivalence d'homotopie entre deux espaces topologiques,  $f_*$  est un isomorphisme entre leurs groupes fondamentaux basés respectivement en n'importe quel point et son image par  $f$ .

▷ Plus tard. ■

**Corollaire. (Groupe fondamental d'un espace contractile)**

Un espace topologique est contractile si et seulement s'il est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial.

**Exemples. (Groupes fondamentaux)**

1.  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ .
2.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{star}\} \cong S^{n-1}$ . En particulier  $\mathbb{S}^n \setminus \{\star, *\} \cong S^{n-1}$ , car  $\mathbb{S}^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$  (homéomorphisme fort!).

**4.6.1.5 Premières propriétés obtenues grâce à l'analogie catégorique**

Dans une optique toute moderne, les catégories peuvent être vues en toute généralité comme des espaces topologiques dont les objets sont des points. Ainsi, les morphismes sont les classes des chemins. Nous voulons généraliser cette analogie en définissant dans la théorie des catégories, la notion d'application continue et d'homotopie.

**Définition. (Foncteur)**

Soit  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  des catégories. Un foncteur  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  est une chose qui à tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , associe un objet  $F(x) \in \mathcal{D}$ , et à tout morphisme  $f : x \rightarrow y$ , associe un morphisme  $F(f) : F(x) \rightarrow F(y)$ . On impose également que pour tous morphismes  $f, g$ ,  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

et  $\forall x \in \mathcal{C}, F(id_X) = id_{F(x)}$ . Rappelons que dans notre cas des petites catégories, toutes ces choses sont des applications.

On peut également définir la composition entre foncteurs pour  $F : C \rightarrow D$  et  $G : D \rightarrow E$ , on définit  $GF$  de façon évidente. De plus pour toute catégorie  $C$ , il existe un foncteur identité  $id_C$  qui ne touche à rien. Ainsi, un isomorphisme de catégories est un foncteur bi-inversible<sup>a</sup>.

Les foncteurs sont l'analogue des applications continues dans l'analogie ci-haut.

---

<sup>a</sup> Ainsi dans le cas petit deux catégories isomorphes induisent par oubli une bijection  $\text{Ob}(C) \simeq \text{Ob}(D)$ . De même que l'homéomorphie ce n'est pas une bonne définition...

On a pour tout  $(x,y) \in \mathcal{C}$ , une application de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x),F(y))$ . En particulier,  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{D}}(F(x))$  est un morphisme de groupes.

### Remarques.

1. On considérera particulièrement le foncteur d'oubli  $\text{Top} \longrightarrow \text{Ens}$ . On considérera également le foncteur de  $\text{Top}$  dans  $\text{Top}_h$  qui à  $x \mapsto x$  et à  $f \mapsto [f]$ .
2. Le groupe fondamental est un foncteur partant de la catégorie des espaces topologiques pointés :  $\text{Top}^* \longrightarrow \text{Grp}$ .
3. (*Hors-programme*) Le groupoïde fondamental  $\Pi(\cdot) : \text{Top} \longrightarrow \text{Groupoid}$  (où, attention, les objets sont des catégories). Ainsi si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application continue,  $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$  est un foncteur défini par  $X \ni x \mapsto f(x) \in Y$  définie par  $(x \rightarrow y) \mapsto f(x) \xrightarrow{[f \circ \gamma]} f(y)$ . En particulier,  $\Pi_1(X, x_0) = \text{Aut}_{\Pi(X)}(x_0) \longrightarrow \text{Aut}_{\Pi(Y)}(f(x)) = \Pi_1(Y, f(x_0))$ .

### Définition. (*Produit de catégories*)

Le produit  $C \times D$  de deux catégories, est défini par  $\text{Ob}(C \times D) = \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$  et  $\text{Hom}((x,x'),(y,y')) = \text{Hom}(x,y) \times \text{Hom}(x',y')$ .

### Lemme. (*Groupoïde fondamental du produit*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors :

$$\Pi(X \times Y) \simeq \Pi(X) \times \Pi(Y).$$

Comme dans beaucoup d'autres cas, l'isomorphisme proposé est tellement tautologique qu'en pratique, on écrit souvent l'égalité.

### Lemme. (*Groupoïde fondamental de deux espaces homéomorphes*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes par  $f$ . Alors  $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$  est un isomorphisme de groupes.

### Définition. (*Transformation naturelle*)

Soient  $F, G : C \longrightarrow D$  deux foncteurs. Une transformation naturelle  $\eta : F \longrightarrow G$  est telle que pour tout  $x \in C$ , on ait un morphisme dans  $D$ ,  $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$  tel que  $\forall f : x \longrightarrow y (\in \text{Hom}_C(x,y))$ ,

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ \eta_x \downarrow & & \downarrow \eta_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(f)} & G(y) \end{array}$$

Si  $C, D$  sont petites, alors il existe une catégorie  $\text{Fun}(C,D)$  dont les objets sont les foncteurs  $C \longrightarrow D$ , et les morphismes sont les transformations. De même qu'avec les foncteurs, on peut parler d'isomorphismes naturels, etc.

Les transformations naturelles sont l'analogue des homotopies continues dans l'analogie ci-haut.

### Propriété

Une transformation naturelle  $\eta : F \longrightarrow G$  est inversible si et seulement si pour tout  $x \in C$ ,  $\eta_x \in \text{Hom}(F(x), G(x))$  est un isomorphisme.

### Heuristique

En introduisant la théories des catégories, EILENBERG et MACLANE poursuivaient des questions de topologie algébrique. On se rappelle d'ailleurs qu'ils leur tenait à cœur de définir la notion de naturalité. Voyons comment elle apparaît naturellement en théorie de l'homotopie.

En topologie algébrique, on associe à un espace topologique un invariant algébrique. On dispose donc d'un foncteur (ici on a rencontré  $\pi_0, \pi_1, \Pi_1$ , et il y en a d'autres : les  $\pi_n$  et  $\Pi_n$ , les groupes d'homologie  $H_n$ , de cohomologie de de Rham  $H^n$ , etc.). Ce qui nous intéresse est en fait de comparer les invariants. On a donc des transformations naturelles entre foncteurs, par exemple

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{F(f)} & \pi_1(Y) \\ \eta_X \uparrow & & \uparrow \eta_Y \\ H_1(X) & \xrightarrow{G(f)} & H_1(Y) \end{array}$$

compare le groupe fondamental et le premier groupe d'homologie. (On verra plus tard que  $\eta$  est ici l'abélianisation !)

### Théorème

Soit  $f, g : X \rightarrow Y$  continues et soit  $H : X \times I \rightarrow Y$  une homotopie entre  $f$  et  $g$ . Pour tout  $x \in X$ , on note  $\eta_x$  le chemin de  $f(x)$  vers  $g(x)$ , défini par  $t \mapsto H(x, t)$ . Alors  $\eta$  est un isomorphisme naturel de  $\Pi(f)$  vers  $\Pi(g)$ .

▷ Soit  $\gamma$  un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $X$ . On veut montrer que<sup>1</sup>

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{f(\gamma)} & f(y) \\ \downarrow \eta_x & & \downarrow \eta_y \\ g(x) & \xrightarrow{g(\gamma)} & g(y) \end{array}$$

commute (homotopie d'applications et non relative/de chemins, qui ne préservent pas les extrémités). Voir le dessin. Les chemins  $f(\gamma) \times \eta_y$  et  $\eta_x \times g(\gamma)$  sont homotopes par  $I \times I \rightarrow Y$  qui à  $(s, t) \mapsto H(\gamma(s), t)$  (puisque l'isomorphie naturelle est donnée par les coordonnées). Remarque : on a dit, grâce à  $\eta$  qui recolle les bouts, que  $f(\gamma)$  et  $g(\gamma)$  sont homotopes en partant de ce que  $f$  et  $g$  sont homotopes. ■

Cette équivalence entre diagrammes et schémas d'homotopie est fondamentale.

### Définition. (*Équivalence de catégories*)

Soient  $C, D$  de catégories. Une équivalence de catégorie est un foncteur  $F : C \rightarrow D$  s'il existe  $G : D \rightarrow C$  tel que  $FG \simeq id_D$  et  $DG \simeq id_C$  par des isomorphismes naturels.

On dit que  $G$  est un quasi-inverse. Le quasi-inverse, de même que l'homotopie est unique à homotopie près mais pas à unique homotopie près (il est donc essentiellement unique, mais pas canonique). Plus précisément, deux quasi-inverses ne sont pas les mêmes, mais toujours isomorphes ; et même le quasi-inverse fixé, l'homotopie de la composition à l'identité n'est pas unique.

La proposition suivante est une conséquence de la propriété rappelée en dessous dont on incite les étudiants à refaire la preuve catégorique.

### Corollaire. (*Fonctorialité du groupe fondamental*)

Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Si  $f$  est une équivalence d'homotopie, alors  $\Pi(f)$  est une équivalence  $\Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$  ; autrement dit, le groupoïde fondamental est aussi fonctoriel.

<sup>1</sup> Ce diagramme est en fait tout à fait visuel ! On peut le voir comme pris dans un l'espace  $Y$ , « l'image par la transformation naturelle (globale) » du chemin  $\gamma$  entre  $x$  et  $y$  vu dans l'espace  $X$ . Dans le carré qu'il forme, parallèlement aux lignes verticales, on dispose d'une infinité de chemins continus.

Car : si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie,  $\Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_2(Y, f(x_0))$  est un isomorphisme.

▷ Par le théorème, si  $H$  est une homotopie entre  $f \circ g$  et  $id_Y$ ,  $g : Y \rightarrow Y$ , par le théorème,  $H : \text{Fun}(\Pi(Y), \Pi(Y)) \ni \Pi(f \circ g) \simeq \Pi(id_Y) \in \text{Fun}(\Pi(Y), \Pi(Y))$  par  $H$ , donc  $\Pi(f) \circ \Pi(g) \simeq id_{\Pi(Y)}$ . Donc  $\Pi(f)$  est une équivalence, car elle est pleinement fidèle et  $\text{Hom}_{\Pi(X)}(x_0, x_0) \simeq \text{Hom}_{\Pi(Y)}(f(x_0), f(x_0))$ . ■

### Théorème

Un foncteur  $F : C \rightarrow D$  est une équivalence ssi  $F$  est pleinement fidèle :  $\forall x, y \in C \quad \text{Hom}_C(x, y) \xrightarrow{f} \text{Hom}_D(F(x), F(y))$  est bijectif; et essentiellement surjectif :  $\forall y \in D \exists c \in C \quad F(c) \simeq y$ .

Tout ce dictionnaire entre catégories et topologie permet de coder des relations plus riches entre espace, l'équivalence (d'homotopie), et notamment le groupe fondamental capture ces notions sur le type d'homotopie, et d'après le corollaire, il suffit que des groupes fondamentaux soient équivalents pour qu'ils soient isomorphes, au sens suivant : **si deux espaces connexes par arcs sont homotiquement équivalents, alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.** En particulier, on a déjà un critère : si deux groupes fondamentaux d'espaces ne sont pas isomorphes, alors les espaces ne sont pas homotiquement équivalents.

### Définition. (*Sous-catégorie pleine*)

Soit  $C$  une (petite) catégorie, et  $S \subseteq \text{Ob}(C)$ . La *sous-catégorie pleine*  $C_S$  de  $X$  est telle que  $\text{Ob}(C_S) = S$  et pour tous  $x, y \in S$ ,  $\text{Hom}(x, y) = \text{Hom}_C(x, y)$ .

*Remarque.* Il y a une foncteur évident  $C_S \rightarrow C$  qui est pleinement fidèle.

Par exemple, si  $A \subseteq X$  un espace topologique, on pose  $\Pi(X, A)$  la sous-catégorie pleine  $\Pi(X)_A$ . En particulier, si l'on prend  $A$  un point, on retombe sur le groupe fondamental, et c'est cool.

### Propriété

Si  $A$  est un rétract de  $X$ , alors  $\Pi_1(A, a_0) \rightarrow \Pi_1(X, a_0)$  est injectif.

Si  $A$  est un rétract par déformation, il est de plus un isomorphisme.

### Exemple

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1) = \mathbb{Z}.$$

### Exemple. (*Tore vide et tore plein*)

$\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ , mais le groupe fondamental du tore plein est  $\mathbb{Z}$ , car  $S^1 \cong$  à cet espace !

Cette propriété n'a rien de vrai si  $A$  n'est pas un rétract mais si l'on a seulement une injection (même canonique). En effet,  $S^1$  se plonge dans  $\mathbb{Z}$  mais le groupe fondamental du cercle ne se plonge pas dans celui de  $\mathbb{C}$ , qui est trivial !

▷ Si  $\tau : X \longrightarrow A$  est un retract de  $i : A \longrightarrow X$ , alors  $\tau \circ i = id_A$ . Donc  $\Pi(\tau \circ i) = id_{\Pi_A}$ . Dans le cas du retract par déformation, on a une équivalence d'homotopie par la propriété précédente. ■

Le fait que deux espaces aient groupe d'homotopie isomorphes, ne garantit pas l'équivalence d'homotopie. Il faut d'abord trouver une application entre les deux qui induit ces isomorphismes, et alors, c'est automatiquement une équivalence.

#### Corollaire. (*Groupoïdes fondamentaux d'espaces homotopiquement équivalents*)

Soient  $X, Y$  du même type d'homotopie. Alors  $\Pi(X), \Pi(Y)$  sont des catégories équivalentes.

#### 4.6.1.6 Lien avec la connexité simple

##### Reformulation pratique. (*Connexité simple*)

On dit qu'un espace topologique  $X$  est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si  $\Pi_1(X, x_0)$  est trivial pour tout  $x_0 \in I$ .

Une remarque pas très intéressante :

##### Propriété. (*Contractile $\implies$ simplement connexe*)

Si  $X$  est contractile, alors  $X$  est simplement connexe.

##### Contre-exemple. (*Espace simplement connexe non contractile*)

La sphère  $S^2$  convient. □

##### Contractilité et groupe fondamental

On peut définir  $\Pi_2$  comme le groupe des classes d'homotopie d'un chemin dans lui-même. De proche en proche, on peut définir les groupes d'homotopie supérieurs (qui, d'ailleurs, sont abéliens). Alors si  $X$  est contractile, tous les  $\Pi_n$  sont triviaux. La réciproque est vraie pour les CW-complexes selon un théorème de WHITEHEAD mais fausse en général, ce que montre par exemple le cercle polonais.

Être contractile, en topologie algébrique, revient à être trivial, alors qu'il y a toute une littérature sur les espaces simplement connexes, qui peuvent être très intéressants. Ces deux notions n'ont donc pas grand-chose à voir.

En général, les groupes fondamentaux non triviaux, même d'espaces simplement connexes, ne se calculent pas comme ça. On va devoir introduire le concept suivant pour espérer décrire des groupes fondamentaux simples.

#### 4.6.1.6.1 Espace localement simplement connexe

#### 4.6.1.7 Théorème du cône

Tout cône est simplement connexe, car contractile. Affinons.

##### Définition. (*Conifié d'une paire topologique*)

Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On note

$$X \cup CA = (X \coprod C(A)) / \sim$$

où  $C(A)$  est le cône de  $A$ ,  $\sim$  est l'équivalence identifiant tout point  $a \in A \subseteq X$  avec le point  $(a, 0) \in C(A)$ . Ce n'est autre que le cône de l'application  $A \hookrightarrow X$  défini en théorie de l'homotopie.

On note  $CA$  l'image de  $C(A)$  dans  $X \cup CA$ .

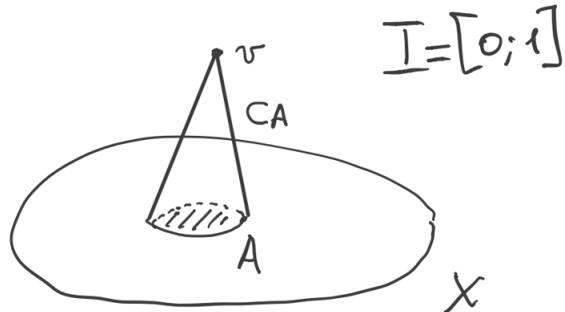


FIGURE 4.6.1 : *Conification d'une partie d'un espace.. —*

##### Théorème. (*Théorème du cône*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $A$  une partie de  $X$  connexe par arcs, non nécessairement une composante connexe par arcs. On note  $i : A \hookrightarrow X$  canonique et  $i_*$  le morphisme  $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)$  induit. Alors  $\pi_1(X \coprod CA) = \pi_1(X) / \langle\langle i_* \rangle\rangle$ .

### 4.6.2 Groupes d'homotopie supérieurs

Définition. (*Équivalence faible d'homotopie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  deux espaces topologiques et une application pointée  $f(x) = y$ . On dit que  $f$  est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes induits  $f_n : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$  sont des isomorphismes.

Fait. (*Équivalence d'homotopie  $\implies$  équivalence faible d'homotopie*)

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

## 4.7 Premiers pas en topologie algébrique

### 4.7.1 Définitions élémentaires sur les revêtements

La théorie des revêtements est véritablement une théorie de Galois pour les espaces topologiques : il existe comme un dictionnaire entre les sous-groupes du groupe fondamental et les *revêtements* de l'espace topologique.

#### Définition. (*Revêtement général*)

Soit  $X$  un espace topologique. Un revêtement de  $X$  (par  $Y$ ) est une application continue  $P : Y \rightarrow X$  qui est localement triviale. Autrement dit, pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $P^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  où les  $U_i$ ,  $i \in I$  ensemble, sont ouverts, dits *feuilles*, et  $P|_{U_i}$  est un homéomorphisme sur  $U$ .  $P : U_i \simeq U$ . On dit alors que  $U$  est un *ouvert trivialisant* (de  $x$ ), et que les  $U_i$  sont bien revêtus.

Une telle application est nécessairement surjective et ouverte, et même un homéomorphisme local. Les  $U_i$  sont les composantes connexes de l'image réciproque de  $U$ .

Le cardinal du revêtement est le cardinal de l'ensemble de ses feuilles, en particulier *fini*, *dénombrable*...

On appelle  $Y$  l'*espace total* du revêtement et  $X$  la *base* du revêtement. Pour tout  $b \in X$ , on note  $F_n := P^{-1}(b)$  la *fibre* en/au-dessus de  $b$  du revêtement.

Intuitivement, il faut que la fibre au-dessus d'un point soit discrète, ou plutôt indexée par un ensemble (qui n'a pas de topologie) : on ne doit pas pouvoir sauter d'un point à un autre comme ça.

En fait, un espace vérifiant à peu près cette propriété est un *espace fibré*. Dans le cas du revêtement, on impose que les fibres soient discrètes, heu... pour que ça marche.

#### Propriété. (*Caractérisation des revêtements finis en milieu séparé*)

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un homéomorphisme local avec  $Y$  séparé. Si les fibres des éléments de  $X$  par  $f$  sont toutes finies = compactes ici et  $f$  est fermée, alors  $f$  est un revêtement. En particulier, si les fibres des éléments de  $X$  par  $f$  ont toutes le même cardinal fini, alors  $f$  est un revêtement.

Ainsi, si  $Y$  est séparé, un homéomorphisme local est un recouvrement fini si et seulement si c'est une application propre.

#### Contre-exemple. (*Pas un revêtement*)

Soit  $\Delta$  le disque unité strict. L'application  $\Delta \setminus (\{0\} \cup \{\frac{1}{2}\}) \rightarrow \Delta \setminus \{0\}$  est un homéomorphisme local, surjective mais n'est pas un revêtement.

En effet, le cardinal des fibres devrait être constant, car la base est connexe.

On peut aussi le voir ainsi : pour  $z = \frac{1}{4}$ , si  $U = D(\frac{1}{4}, r)$ ,  $p^{-1}(U) = f(U) \setminus \{\frac{1}{2}\} \sqcup -f(U)$  pour  $r$  assez petit et qui existe bien, où  $f : z \mapsto e^{\frac{1}{2}\text{Log}(p(z))}$  où  $\text{Log}$  est une détermination sur  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  et tout cela a un sens pour  $r$  encore assez petit. Le problème est que  $p$  n'induit pas d'homéomorphisme de  $U_1 = f(U) \setminus \{\frac{1}{2}\}$  sur  $U$ .  $\square$

### Exemple. (*Toy-model des revêtements*)

Si  $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ , alors  $P$  est un revêtement. Elle induit un homéomorphisme déjà rencontré  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S^1$ .

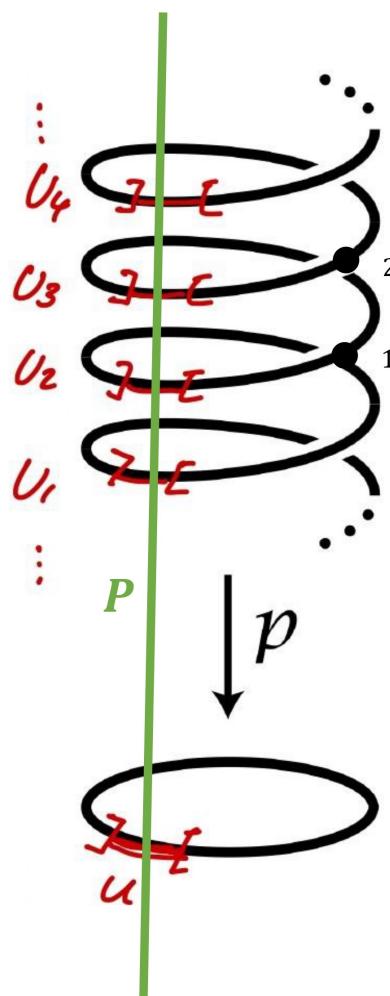


FIGURE 4.7.1 : *Revêtement canonique du cercle.* —

Le cercle est revêtu par la droite réelle ici représentée en tire-bouchon.

Les revêtements vérifient la propriété d'équivalence des homotopies.

### Propriété

Soit  $P : Y \rightarrow X$  une revêtement, et  $H : Z \times I \rightarrow X$  une application continue et on pose  $g : H(-,0) : Z \rightarrow X$ . Si  $g$  se relève en  $\tilde{g} : Z \rightarrow Y$ ,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \\ & \searrow g & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

alors  $H$  aussi :  $\tilde{H} : Z \times I \rightarrow Y$ .

▷ Soit  $z_0 \in Z$ . Comme  $H$  est continue, il existe pour tout  $t$  un ouvert  $V_t \times W_t \subseteq Z \times I$  qui contient  $(z_0, t)$  et tel que  $H(V_t, W_t)$  soit contenu dans un ouvert trivialisant de  $X$  de  $H(z_0, t) = x_0$ , c'est-à-dire un ouvert  $U$  tel que  $P^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$  et  $P|_{U_i} \simeq U$ . Comme  $\{z_0\} \times I$  est compact, on peut trouver un voisinage ouvert de  $z_0$  dans  $Z$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  une subdivision telle que  $H(V \times [t_i, t_{i+1}])$  est contenue dans un seul des  $W_i$ . Supposons qu'on a étendu  $H$  à  $Z \times [0, t_i]$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} : Z \times [0, t_i] & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow P \\ & & X \end{array}$$

et  $H(Z \times [t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$  est un ouvert trivialisant et  $P^{-1}(U_i) = \bigsqcup_{j \in J} \tilde{U}_j$  et  $\tilde{H}(z_0, t_i) \in \tilde{U}_j$  pour un certain  $j$ . Mais  $P|_{U_j} \simeq U_i$ , et l'on définit  $\tilde{H}$  sur  $Z \times [t_i, t_{i+1}]$  en tirant  $H$  en ouvert via  $p$ .

On montre de la même façon que  $\tilde{H}$  est unique. ■

### Propriété. (*Restriction d'un revêtement*)

Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement : si  $A \subseteq X$  est un sous-espace,  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  est aussi un revêtement.

Notons aussi que l'espace total est toujours plus gros que la base.

### Fait

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement.

1.  $\text{card}(E) \geq \text{card}(B)$ .
2. Si  $E$  est compact,  $B$  l'est.
3. Si  $E$  est dénombrable à l'infini,  $B$  l'est.

Voilà enfin la propriété fondamentale de relèvement selon un revêtement, qui permet de faire le lien entre revêtements et groupe fondamental.

**Corollaire. (*Décomposition selon une projection continue*)**

Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement et  $\gamma : I \rightarrow X$  un chemin. Soit  $x_0 = \gamma(0)$ . Alors pour tout  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma}$  qui relève  $\gamma$  et tel que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ .

De plus, pour toute homotopie relativement à  $\{0,1\}$ ,  $\gamma \simeq \gamma'$ , chemins de source  $x_0$ , il existe une unique homotopie relative  $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\gamma}'$  qui la relève en notant  $\tilde{\cdot}$  le relèvement sur  $\tilde{x}_0$ . (On démontrera cela plus tard.)

▷ C'est un corollaire du théorème précédent si  $Z = *$ , avec le diagramme  $* \times I \rightarrow Y \rightarrow X$  et  $* \times I \rightarrow X$ . Pour le deuxième point, on prend  $Z = I$ . ■

On peut le réénoncer autrement :

**Proposition. (*Propriété universelle des revêtements : relèvement unique des chemins*)**

Tout revêtement  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété universelle suivante : pour tout chemin  $\varphi : I \rightarrow B$  où  $I = [0,1]$  dans  $B$ , pour tout  $x \in E$  tel que  $\varphi(0) = p(x)$ , i.e.  $x \in p^{-1}(\varphi(0))$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\varphi} : I \rightarrow E$  dans  $E$  de départ  $x$ , i.e.  $\tilde{\varphi}(0) = x$ , et relevant  $\varphi$ , c'est-à-dire tel que  $p\tilde{\varphi} = \varphi$ .

**Lemme. (*Nombre de Lebesgue*)**

Pour tout espace métrique compact  $(E,d)$ , pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $E$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ , il existe  $i \in \tilde{I}$  avec  $B(x,\varepsilon) \subseteq U_i$ . Autrement dit, tout recouvrement d'un espace métrique compact admet un *nombre de Lebesgue* qui vaut  $\varepsilon$ .

**Preuve.**

▷ Puisque  $\varphi$  est continue,  $(\varphi^{-1}(U_{\varphi(t)}))_{t \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $I$ . Or  $I$  est un espace métrique compact ; soit  $\varepsilon$  le nombre de Lebesgue associé à ce recouvrement. On divise  $I = [0,1]$  en  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  tel que  $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrons par récurrence sur  $k$  qu'il existe une unique  $\psi_k : [0, t_k] \rightarrow E$  telle que  $\psi_k(0) = x$  et  $p\psi_k = \varphi|_{[0, t_k]}$ . Pour  $k = 0$ , c'est trivial. Supposons  $\psi_k$  construite. Il existe  $t \in I$  tel que  $]t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon[ \subseteq \varphi^{-1}(U_{\varphi(t)}) \iff \varphi([t_k, \varepsilon, t_k + \varepsilon]) \subseteq U_{\varphi(t)}$ . Notons  $C$  la composante connexe contenant  $\psi_k(t_k)$ . Puisque  $p|_C : C \rightarrow U_{\varphi(t)}$  est un homéomorphisme, il y a une unique manière d'étendre  $\psi_k$  en  $\psi_{k+1}$ , en posant pour  $t_k \leq s \leq t_{k+1}$  :  $\psi_{k+1}(s) = (p_k)^{-1}(\varphi(s))$  et pour  $0 \leq s \leq t_k$  :  $\psi_{k+1}(s) = \psi_k(s)$ . ■

### 4.7.2 Le groupe fondamental du cercle

Cet exemple n'a rien de trivial.

**Théorème. (*Groupe fondamental du cercle*)**

On a<sup>a</sup> :  $\Pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ .

<sup>a</sup> L'égalité est prise au sens d'un représentant dans la classe d'isomorphie.

▷ On montre ça à partir du revêtement canonique  $P : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ . Si  $\gamma$  est une boucle basée en 1, remarquons que  $P(0) = 1$ . D'après le théorème, il existe un relèvement  $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{\gamma}(0_{(I)}) = 0_{(\mathbb{R})}$ . Soit  $n = \tilde{\gamma}(1) \in P^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ . Le chemin  $\omega_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$  est un chemin de 0 à  $n$

$$t \longmapsto nt$$

dans  $\mathbb{R}$  et il est homotope à  $\tilde{\gamma}$ , de façon immédiate car  $\mathbb{R}$  est simplement connexe. Ainsi  $w_n = P \circ \tilde{\omega}_n$  et  $[w_n] = [\gamma]$ . Il reste à montrer que  $[w_n] = [w_m] \implies m = n$ . Or il est clair que  $[w_n][w_m] = [w_{n+m}]$ . Donc  $\mathbb{Z} \longrightarrow P_1(S^1, 1)$  est un morphisme surjectif bien défini. Ainsi, il suffit de montrer que ce morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans le groupe fondamental du cercle est un objet injectif, autrement dit, qu'à deux chemins homotopes de cette forme correspondent le même entier, et c'est la partie difficile.

Soit  $H$  une homotopie entre  $w_n$  et  $w_m$ . Alors d'après le théorème précédent, il existe une homotopie  $\tilde{H}$  entre  $\tilde{\omega}_n$  et  $\tilde{\omega}_m$ . Ainsi  $m = n$ , car si non, ils n'ont même pas les extrémités, donc ne peuvent être homotopes. ■

### 4.7.3 Relèvement

Intuitivement, on a des points d'un espace topologique en bas, et on essaie de les *relever* en des points d'un espace topologique en haut.

### 4.7.4 Degré d'une application

### 4.7.5 Applications et conséquences en Analyse

#### 4.7.5.1 Préservation des bords

#### Exercice 11 (Un exemple : bords d'une couronne)

Pour  $r > 0$ , on note  $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < r\}$ . Soient  $r' > r > 1$  et  $f : C_r \rightarrow C_{r'}$  un homéomorphisme. Le but est de montrer que  $f$  envoie  $\partial C_r$  dans  $\partial C_{r'}$ .

1. Soient  $D_n = C_{1+2^{-n}(r-1)}$  et  $E_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 + 2^n(r' - 1) \leq |z| \leq r'(1 - 2^{-n})\}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n$  est une partie compacte de  $C_{r'}$  et que pour  $n$  assez grand,  $C_{r'} \setminus E_n$  a deux composantes connexes.
2. Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $k \geq n$ ,  $f(D_k) \subseteq C_{r'} \setminus E_N$ .
3. Conclure en utilisant la connexité de  $D_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4.7.5.2 Théorème de Brouwer et théorème de l'invariance du domaine

4.7.5.3 Théorème de Borsak-Ulam, partage de la sphère, partage discret du collier, théorème de la boule chevelue

4.7.5.4 Théorème de Jordan et théorème du sandwich au jambon

#### 4.7.6 Théorie générale des revêtements

On aura besoin du THÉORÈME DE VAN KAMPEN pour cette description.

## 4.8 Théorème de van Kampen

On calcule du groupe fondamental par une méthode diviser pour régner. L'idée générale est, pour calculer le groupe fondamental d'un espace topologique, de découper celui-ci en petits sous-espaces, calculer les groupes fondamentaux de ces espaces pour le recoller ensuite.

On démontre plusieurs versions, de différentes forces, du théorème de van Kampen.

### 4.8.1 Version faible du théorème de Van Kampen

#### Théorème. (*Théorème de van Kampen faible*)

Soit  $X$  une espace topologique et on suppose que  $U, V$  sont deux ouverts connexes par arcs de  $X$  d'intersection non vide et connexe par arcs qui recouvrent  $X$ . Soit  $x_0 \in U \cap V$ . Par fonctorialité du groupe fondamental, on a des morphismes  $\Pi_1(U, x_0), \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ .

Alors  $\Pi_1(X, x_0)$  est engendré par les images de ces morphismes.

▷ Soit  $\gamma : I \rightarrow X$  une boucle basée en  $x_0$ . On a  $I = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$  et, en notant  $I_i$ ,  $I_j$  des intervalles ouverts,  $\gamma^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} I_i$  et  $\gamma^{-1}(V) = \bigsqcup_{j \in J} I_j$ , donc l'union des  $I_i$  avec l'union des  $I_j$  est un recouvrement de  $I$ . Par compacité de  $I$  (subtilité qui n'apparaissait pas dans le schéma, qui n'a donc pas tout à fait valeur de preuve... loin de là), on extrait un recouvrement fini de la forme  $[0,1] = [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cup \dots \cup [s_n, 1]$  où les  $s_i$  sont ordonnés et  $s_i < s_{i-1} \quad \forall i \geq 1$ ; en choisissant  $t_i \in ]s_i, s_{i+1}[$ , on obtient un recouvrement de la forme suivante :  $I = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_n, 1]$  tel que  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U$  ou  $V$  par connexité, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , pour des  $t_i \in I$ . On peut de plus supposer que  $\gamma(t_i) \in U \cap V$ . Comme  $U \cap V$  est connexe par arcs par hypothèse, il existe un chemin  $\alpha_i$  dans  $U \cap V$  reliant  $x_0$  à  $\gamma(t_i)$ . Alors puisque  $[0,1] \simeq [0, t_1]$ , en notant  $\gamma([0, t_1])$ ,  $\gamma$  restreint à  $U$  ou  $V$ , la composition étant licite car  $[\alpha_1 \alpha_1^{-1}] \circ c_{x_0}$ , on a  $\gamma = \gamma([0, t_1]) * \gamma([t_1, t_2]) * \dots * \gamma([t_n, 1])$ . Ainsi  $[\gamma_1 \times \alpha_1^{-1} \times \alpha_1 \times \gamma_2 \dots \times \gamma_n] = [\gamma]$ . On peut supposer  $\gamma_1 \subseteq U$  où  $\alpha_1 \subseteq U$ , donc  $\gamma_1 \alpha_1^{-1} \subseteq U$ . Et  $[\gamma_1 \alpha_1^{-1}] \in \Pi_1(U, x_0)$  pour une boucle basée en  $x_0$ . De même,  $\alpha_i \gamma_{i+1} \alpha_{i+1}^{-1} \in \Pi_1(V, x_0)$  donc  $A = U$  ou  $A = V$ . ■

*Remarque.* Ce théorème faible ne s'applique pas dans le cas du cercle! On aura besoin des groupoïdes ici.

#### Corollaire. (*Corollaire faible de van Kampen faible*)

Avec les hypothèses précédentes, si  $X = U_1 \cup U_2$  et  $U_1 \cap U_2$  est connexe par arcs et si  $\Pi_1(U_1, x_0)$  et  $\Pi_1(U_2, x_0)$  sont triviaux, alors  $\Pi_1(X, x_0)$  aussi.

Autrement dit, un espace réunion de deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe par arcs est simplement connexe.

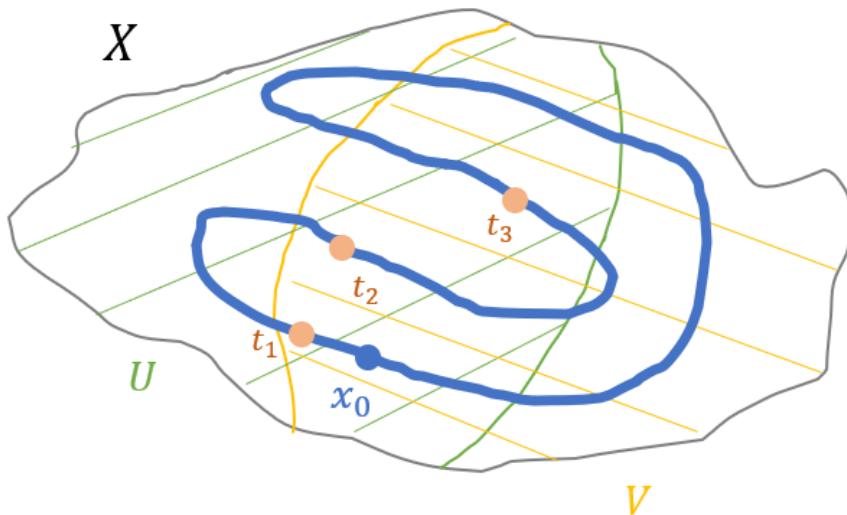


FIGURE 4.8.1 : *Démonstration du théorème de van Kampen, version faible.* —  
L’intersection des deux ouverts est supposée connexe.

Ceci a pour conséquence :

On peut toutefois appliquer le théorème à la *sphère* en dimension supérieure ou égale à 3.

**Théorème. (*Simple connexité de la sphère*)**

Pour  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^n$  est simplement connexe.

▷ On prend pour ouverts, la sphère privée du pôle Nord, respectivement du pôle Sud. Alors ces ouverts sont contractiles car homéomorphes au plan par projection stéréographique et leur intersection est bien connexe par arcs (exercice). D'où le résultat. ■

On obtient donc un des plus simples exemples du fait suivant :

**Contre-exemple. (*Le GF ne caractérise pas le type d’homotopie*)**

$\mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{S}^3$  ont le même groupe fondamental. Pourtant, elles n’ont pas le même type d’homotopie.

La façon la plus simple de le voir est d’en calculer les groupes d’homologie supérieurs. (Il est possible de calculer des groupes d’homotopie supérieure en petites dimensions, mais c’est difficile, et c’est encore ouvert pour le cas général.) On a  $H_2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$  tandis que  $H_2(\mathbb{S}^3) = 0 \neq \mathbb{Z}$ . □

Cette asymétrie avec le cercle n’est pas sans surprise : le cercle privé de deux points n’est plus connexe par arcs, la sphère, si. Plus topalgébriquement, on ne peut plus tourner autour du cercle privé d’un point, mais on peut autour de la sphère privé d’un point. Remarque : pourtant, on peut toutes les deux les déformer en un point !

**Théorème. (*Théorème faible de van Kampen pour les groupoïdes*)**

Soient  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1, U_2$  deux ouverts et  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Alors  $\Pi(X)$  est engendré au sens des catégories par les images au sens des catégories de  $\Pi(U_1)$  et  $\Pi(U_2)$  par les foncteurs  $\Pi(\iota_i) : \Pi(U_i) \rightarrow \Pi(X)$  induits par les inclusions  $U_i \rightarrow X$ .

▷ Même preuve, et même un peu plus simple, que dans le cas des groupes fondamentaux. ■

*Remarque.* On peut déduire le théorème classique par passage à des sous-groupoïdes pleins.



Un espace de groupe fondamental non trivial peut être engendré par des groupes triviaux ! C'est ce qui se passe pour le cercle

### 4.8.2 Théorème de van Kampen général

On aura besoin de quelques notions catégoriques.

*Remarque.* Même si le groupe fondamental était un invariant complet (ce qui arrive pour les noeuds), c'est inutile, car on est incapable de dire si deux groupes définis par présentation et relations sont les mêmes, ou même nul.

#### 4.8.2.1 Somme amalgamée dans une catégorie

**Définition. (*Somme amalgamée de catégories, pushout*)**

Soient  $C$  une catégorie et supposons qu'on ait entre objets et morphismes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

et bien la somme amalgamée, si elle existe, est dans ce cas un objet noté  $Y \cup_X Z$ , et la donnée des morphismes :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & & \\ g \downarrow & & \downarrow g' & & \\ Z & \xrightarrow{f'} & Y \cup_X Z & \xrightarrow{h_1} & W \\ & & \searrow h_2 & \nearrow \dots & \\ & & & & W \end{array}$$

tels que tout le diagramme commute (soit quatre identités).

*Remarque.* Si ça existe, c'est unique à unique isomorphisme près.

### Exemples

- Si  $X$  est l'union de deux ouverts  $U_1, U_2$ , alors

$$\begin{array}{ccc} U_1 \cap U_2 & \longrightarrow & U_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

est une somme amalgamée où  $X = U_1 \cup_{U_1 \cap U_2} U_2$ .

Ici  $f : U_1 \longrightarrow Y$  et  $g : U_2 \longrightarrow Y$ . On définit  $h : X \longrightarrow Y$  par recollement de  $U_1$  et  $U_2$  où par hypothèse  $f$  et  $g$  coïncident sur  $U_1 \cap U_2$  d'où la bonne définition.

Dans la catégorie des espaces topologiques pointés  $\text{Top}^*$ , si  $(X, x_0)$  est un objet avec  $X = U_1 \cup U_2$ ,  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ , soit  $(X, x_0) = (U_1, x_0) \cup (U_2, x_0)$  par abus, alors  $X = (U_1, x_0) \cup_{(U_1 \cap U_2, x_0)} (U_2, x_0)$ .

### Théorème. (*Produit amalgamé de groupes*)

Dans la catégorie des groupes, les sommes amalgamées existent toujours (et on l'appelle plutôt *produit amalgamé*).

▷ On définit le produit libre  $G \star H = G \star_1 H$  via le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G \star H \end{array}$$

où  $G \star H$  est l'ensemble des mots dits alternés, de la forme  $g_1 h_1 g_2 \dots$  finie ou  $h_1 g_1 h_2 \dots$  finie, avec aucune interaction entre les  $g$  et les  $h$ , mais bien sûr les règles de calcul au sein de  $H$  et de  $G$ . Autrement dit, si  $G = \langle S \mid R \rangle$ ,  $H = \langle S' \mid R' \rangle$  où  $G \star H = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle$ . Il est clair que l'une ou l'autre de ces descriptions vérifie bien la propriété universelle demandée. Il faut maintenant vérifier le reste de la propriété universelle. Si  $f : K \longrightarrow G$  et  $g : K \longrightarrow H$ , on pose le produit amalgamé au-dessus de  $K$  :  $G \star_K H = G \star H / \langle f(h) = g(h), h \in K \rangle$ , i.e.  $G \star_K H = \langle S \cup S', R \cup R' \cup \{f(k)g(k)^{-1}, k \in K\} \rangle$ . (Si  $K$  est trivial, on retombe bien sur le groupe libre.) ■

*Remarque.* Le produit libre est le coproduit = libre dans  $\text{Grp}$ .

### Exemples. (*Produits libres, produits libres amalgamés de groupes*)

- $\star_{\{0\}} = \star$  : le produit libre amalgamé sur le groupe nul est le produit libre.
- $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2$ .
- Plus généralement,  $\star_n \mathbb{Z} = F_n$ .

4.  $\{0\} = 1$  est neutre pour le produit libre, mais pas pour le produit libre amalgamé. En général,  $G$  n'est pas forcément neutre du produit amalgamé sur  $G$ . Contre-exemple :  $1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . En effet, compter deux éléments : le mot vide et le neutre.
5.  $1 \star_{\mathbb{Z}} 1 = 1$ . Preuve :  $\pi_1(S^2) = 0$ . Plus généralement,  $1 \star_G 1 = 1$ .
6.  $\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ . Preuve :  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Attitude pas idiote à généraliser !
7.  $\mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2 = 1 \rangle$ . En effet, par exemple,  $abb^{-1}aaaba^{-1} = aaba^{-1} = ba^{-1}$ . Ainsi un mot s'écrit toujours (sous forme *normale* ou *canonique*) comme  $b^{k_1}ab^{k_2}a...b^{k_n}$  avec  $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{Z}$ ,  $h_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .
8. Seuls les produits libres (tout court) de groupes finis par des groupes triviaux sont finis. Même  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est infini.
9.  $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \star_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

#### 4.8.2.2 Le théorème de van Kampen fort

**Théorème. (Théorème de van Kampen)**

Soit  $X$  une espace topologique et on suppose que  $U_1, U_2$  sont deux ouverts quelconques de  $X$  qui le recouvrent, tels que  $U_1 \cap U_2$  soit connexe par arc. Soit  $x_0 \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Alors  $\Pi_1(X, x_0) \simeq \Pi_1(U_1) \star_{\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \Pi_1(U_2, x_0)$ .

▷ Conséquence du théorème pour les groupoïdes (plus tard). ■

#### Exemples

1. (*Groupe fondamental d'un espace multiplement pointé*) On prend  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0), (1,0)\}$ , alors  $\Pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} = F_2 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \emptyset \rangle$ .
2. (*Groupe fondamental d'un bouquet*)  $\pi_1(X \wedge Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$ .
3. (*Groupe fondamental du plan projectif réel*) Soit  $X = \mathbb{RP}^2 = D^2 / (x \sim -x, x \in S^1)$ .  $\Pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) = 1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .  
Alors avec les ensembles évidents  $\Pi_1(U_2, x_0) = 1$  et  $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \mathbb{Z}$ . Or  $U_1$  est un rétract par déformation de  $S^1 / (x \sim -x)$ , mais  $S^1 / (x \sim -x) \cong S^1$  par  $z \mapsto z^2$ . Ainsi  $\Pi_1(U_1, x_0) = \Pi_1(U_1, x_1) = \mathbb{Z}$ . On a donc  $\Pi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \Pi_1(U_1)$ , soit  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ , qui à  $1 \mapsto z$ .
4.  $\pi_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est infini.

Intuitivement, il sera beaucoup plus difficile de trouver des espaces non simplement connexes dont le groupe fondamental est fini, ou même de torsion ; cela signifierait, par définition du GF, qu'il existe des boucles non homotopes à un point qui, parcourues plusieurs fois, le deviendraient.

*Remarque.* Ce théorème ne s'applique toujours pas au cercle.

**Théorème. (*Produit amalgamé de groupoïdes*)**

Les produits amalgamés existent aussi dans la catégorie des groupoïdes.

▷ Voir la preuve du théorème suivant. ■

**Théorème. (*Théorème de van Kampen pour les groupoïdes*)**

Si  $X = U_1 \cup U_2$  un espace topologique,  $U_i$  deux ouverts. Alors

$$\Pi(X) \simeq \Pi(U_1) \star_{\Pi(U_1 \cap U_2)} \Pi(U_2).$$

▷ On reprend les notations de l'énoncé. Pour  $f : U_1 \rightarrow Y$ ,  $g : U_2 \rightarrow Y$ , on veut faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \Pi(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(U_2) & \xrightarrow{\quad} & \Pi(X) \\ & \searrow f^* & \swarrow g^* \\ & & \Pi(Y) \end{array}$$

Soient  $x, y \in X$ , un *chemin généralisé* est un objet de la forme  $\alpha : [0, l] \rightarrow X$ ,  $l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que  $\alpha(l) = y$ . Alors par reparamétrage  $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \alpha(tl)$  est un chemin au sens usuel. On note  $l_x$  le chemin constant,  $[0, l] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x$ . Soit  $P(X)$  ( $P$  pour *path*) la *catégorie des chemins* de  $X$ , dont les objets sont les éléments de  $X$  et les morphismes  $x \rightarrow y$  les chemins généralisés. La composition est définie pour  $\alpha : [0, l_1] \rightarrow X$  un chemin de  $x \rightarrow y$  et  $\beta : [0, l_2] \rightarrow X$  un chemin de  $y \rightarrow z$ , avec  $\alpha * \beta : [0, l_1 + l_2] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \in [0, l_1] \\ \beta(t - l_1) & \text{si } t \in [l_1, l_1 + l_2] \end{cases}$ , et l'on définit l'identité par  $id_x = 0_x$ . Dans ce cas,  $P(X)$  est une catégorie, mais pas un groupoïde. On a cependant un foncteur  $P(X) \rightarrow \Pi(X)$ , et  $\Pi(X)$  est le quotient par la relation :  $\alpha \sim \beta$ , s'il existe des chemins constants  $l_y, l'_y$  tels que  $l_y \circ \alpha$  et  $l'_y$  soient homotopes. On a :

$$\begin{array}{ccc} P(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & P(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(U_2) & \xrightarrow{\quad} & P(X) \\ & \searrow F_1 = P(g) & \swarrow F_2 = P(f) \\ & & P(Y) \end{array}$$

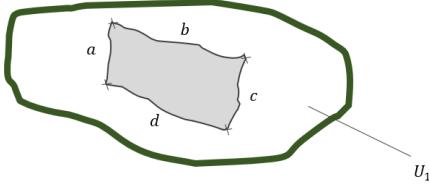
et l'on pose donc  $G(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x \in U_1 \\ F_2(x) & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$  bien définie par hypothèse du théorème. Comme dans

les preuves précédentes, si  $\gamma : x \rightarrow y$  est généralisé, on peut trouver une subdivision  $0 < t_1 < \dots < t_n = l$  telle que  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_1$  ou  $U_2$ . On pose  $\gamma_i(t) = \gamma(t_i + t)$ . On a  $\gamma = \Gamma_{n-1} \times \dots \times \gamma_1$ . On pose donc  $G(\gamma) = F_{j_n}(\gamma_n) \dots F_{j_1}(\gamma_1)$  où  $j_h = 1$  ou  $2$ .

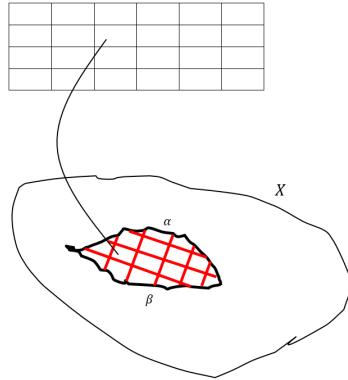
Il reste à montrer que  $G$  passe au quotient.

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \longrightarrow & \Pi(Y) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Pi(X) & & \end{array}$$

Primo,  $G$  envoie les chemins constants sur les identités. Secundo, soit  $H : I \times I \longrightarrow U_j$ . Puisque  $I \times I$  est un carré, soit  $a, c, d, b$  ses côtés. Alors  $F_i(a)F_i(b) = F_i(c)F_i(d)$ .



Tertio, si  $\alpha, \beta : [0, l] \longrightarrow X$  et  $H : [0, l] \times I \longrightarrow X$  est une homotopie de  $\alpha \rightarrow \beta$ ,



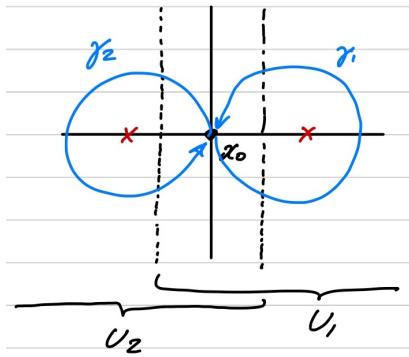
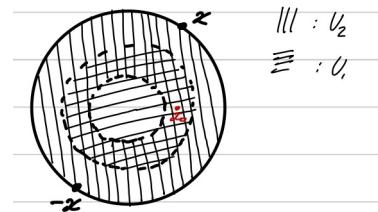
où l'on découpe  $[0, l] \times I$  comme sur la figure de telle sorte que l'un d'eux s'écrive comme  $\in H^{-1}(U_1)$  ou  $H^{-1}(U_2)$ . En utilisant le deuxième point sur chaque petit carré, on déduit  $G(\alpha\alpha') = G(\beta'\beta)$ , si  $\alpha$  et  $\beta$  son thomotopes à extrémité fixés,  $G(\alpha) = G(\beta)$  puis  $G$  descend à  $\Pi(X)$ .

Par suite,  $\Pi(X)$  satisfait la propriété universelle de  $\Pi(U_1) * \Pi(U_2)$  sur  $\Pi(U_1 \cap U_2)$ .

En particulier, ce produit amalgamé existe comme on l'avait prétendu. ■

### Application

Retrouvons le groupe fondamental du cercle. Soit  $X = S^1$ . Alors  $\Pi_1(S^1) = \Pi_1(U_1) *_{\Pi_1(I) * \Pi_1(J)} \Pi_1(U_2) \simeq \Pi_1(U_1, x_0, x_1)$  où  $I, J$  sont dans l'intersection  $U_1 \cap U_2$ , sur les côtés opposés du cercle. Or en notant  $c_1, c_2$  les chemins (quelconques) sur les demi-arcs respectifs, on a  $\text{Hom}_{\Pi(U_1)}(I, J) = \{[c_1]\}$  et  $\text{Hom}_{\Pi(U_2)}(I, J) = \{[c_2]\}$ . Par suite,  $\text{Hom}_{\Pi(S^1)}(I, J) = \langle [c_1][c_2] \rangle \simeq \mathbb{Z}$ .

(a) *Le plan doublement pointé.* —(b) *Le plan projectif réel.* —FIGURE 4.8.2 : *Applications du théorème de van Kampen.* —**Reformulation pratique. (*van Kampen formulé avec un groupe présenté*)**

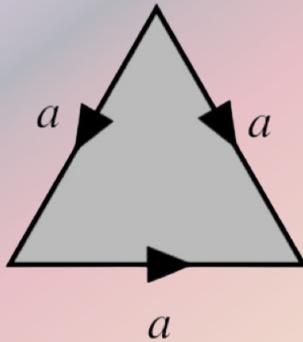
Soit  $M = M_1 \cup M_2$  la réunion de deux espaces topologiques connexes par arcs ouverts dans l'espace  $M$  et tels que  $I = M_1 \cap M_2$  soit connexe par arcs. On suppose que  $\pi_1(M_1) = \langle \gamma_1, \dots | r_1, \dots \rangle$  et  $\pi_1(M_2) = \langle \delta_1, \dots | s_1, \dots \rangle$ . On suppose que  $\pi_1(I)$  est engendré par les  $\eta_i$ . On écrit chaque  $\eta_i$  comme  $\varphi_{i,1}$  en utilisant les générateurs de  $\pi_1(M_1)$  et  $\varphi_{i,2}$  en utilisant ceux de  $\pi_1(M_2)$ . Alors

$$\pi_1(M) = \left\langle \gamma_1, \dots, \delta_1, \dots \mid r_1, \dots, s_1, \dots, \varphi_{i,1} \varphi_{i,2}^{-1} \right\rangle$$

### 4.8.2.3 Applications au théorème de Van Kampen

**Méthode.** (*Calcul du groupe fondamental à partir d'un polygone fondamental*)

Considérons par exemple le *CW-complexe*  $X$  obtenu par recollement du polygone fondamental



représenté ci-dessus. On peut appliquer le théorème de Van Kampen de la façon suivante : on prend pour premier ouvert  $U$  l'unique cellule dimension 2 de  $X$  et pour deuxième ouvert  $V = X \setminus \{x\}$  où  $x \in U$ , de sorte que  $V$  se rétracte par déformation sur le 2-squelette de  $X$ . De plus,  $U \cap V$  est homotopiquement équivalent à un cercle par construction. On a que  $U$  est contractile et par analyse des recollements à faire, le contour de  $X$ , i.e.  $V$  à équivalence d'homotopie près, est un cercle. Ainsi,  $\pi_1(X) = \pi_1(U) \star_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \simeq 1 \star_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq 1$ , donc ici  $X$  est simplement connexe.

## 4.9 Théorie générale des revêtements

### 4.9.1 Conséquence sur la théorie générale des revêtements

Une bonne référence complémentaire (à lire absolument) est TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE de Frédéric Paulin.

Soit  $X$  un espace topologique ; on s'intéresse aux revêtements de  $X$ .

#### Définition. (*Revêtement CALCA*)

Soit  $P : E \rightarrow X$  une application continue surjective,  $E$  un espace topologique. On rappelle que  $P$  est un *revêtement*, si tout point  $x \in X$  a un voisinage ouvert  $U$  tel que  $P^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$ ,  $P|_{U_i} \simeq U$ .

On dit que ce revêtement est *CALCA* (connexe par arcs localement connexe par arcs) si  $E$  et  $X$  sont connexes par arcs et localement connexe par arcs. **On suppose toujours cela à partir de maintenant.**

On appelle  $P$  la *projection*,  $P^{-1}(x)$  la *fibre au-dessus de  $x$* ,  $U$  un *ouvert trivialisant*, car localement au voisinage de  $x$ ,  $P|_{U_i} \simeq U_i \times X \rightarrow X$ . Les  $U_i$  s'appellent les *feuilles* au-dessus de  $U$ .

On conseille au lecteur de revoir cette partie avant de continuer.

#### 4.9.1.1 Morphismes de revêtements

#### Définition. (*Morphisme de revêtements*)

Soit  $P_1 : E_1 \rightarrow X$  et  $P_2 : E_2 \rightarrow X$  deux revêtements d'un même espace  $X$ . Un *morphisme de revêtements* ou *transformation de Deck* est un diagramme commutatif (d'applications continues) comme suit.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ P_1 \searrow & & \swarrow P_2 \\ & X & \end{array}$$

On note  $\text{Hom}(P_1, P_2)$  ces morphismes.

Si  $P$  est un revêtement, on a  $\text{Aut}(P)$  le groupe des automorphismes. Un automorphisme de revêtement  $P$  est exactement une bijection bicontinue  $f$  de  $E$  dans  $E$  telle que  $P = P \circ f$ . En effet, il faudrait aussi imposer  $P \circ f^{-1} = P$ , mais c'est conséquence de  $P = P \circ f$ .

On a donc la *catégorie des revêtements* à base fixée.

**Remarque importante.**  $\text{Aut}(P) := \text{Deck}(p)$  agit sur  $P^{-1}(x)$  pour tout  $x \in X$

#### 4.9.1.2 Relèvement des chemins, relèvement des homotopies, relèvement des applications

**VOC** Un revêtement pointé est un revêtement pointé. Tout revêtement est canoniquement un revêtement pointé en choisissant un point base de l'espace total (pas de la base).

**Définition.** (*Propriété de relèvement des homotopies*)

(PHR)

On dit alors que  $\tilde{H}$  relève  $h$  avec conditions initiales.

**Remarques.**

1. Schématiquement,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & E \\ id_X \times \{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ X \times I & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

Par suite, le relèvement des homotopies est la propriété duale de leur extension.

Il existe une généralisation

**Définition.** (*Propriété d'extension de relèvement des homotopies*)

**Théorème.** (*Propriété de relèvement des homotopies*)

Toute boucle dans  $X$  basée en  $x$  se relève de façon unique en un chemin dans  $E$  basé en n'importe quel point de  $P^{-1}(x)$ .

Les homotopies se relèvent aussi.



Les lacets se relèvent en des chemins a priori ! (Il suffit de penser au cercle pour ne pas stresser.)

**Corollaire.** (*Plongement des groupes fondamentaux*)

Soient  $x \in X$ ,  $x_0 \in P^{-1}(x)$ . Alors le morphisme  $\Pi_1(E, x_0) \xrightarrow{P^*} \Pi_1(X, x)$  est injectif.

Autrement dit, dans le cas d'un revêtement, le groupe fondamental de l'espace total est un sous-groupe du groupe fondamental de la base.

▷ Soit  $\gamma$  une boucle de  $E$  basée en  $x_0$ , sa projection  $P(\gamma)$  est une boucle basée en  $x$ , et il existe un unique chemin qui relève cette boucle d'extrémité donnée. Soit  $\tilde{\gamma}$  l'unique chemin qui relève  $P(\gamma)$  basé en  $x_0$ . On a  $P(\tilde{\gamma}) = P(\gamma)$ , donc ils sont homotopes. Donc  $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ , donc c'est une boucle. ■

Si  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement, on cherche enfin à savoir si  $f : Y \rightarrow X$  se relève en une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ , i.e. telle que  $p\tilde{f} = f$ .

### Fait

Si  $Y$  est connexe, deux relèvements de  $f$  qui coïncident en au moins un point sont égaux.

Et oui.

*Remarque.*  $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  est injective.

### Corollaire. (*Relèvement des applications*)

Soit  $f : Y \rightarrow X$  ( $Y$  CALCA) une application continue avec  $x_0 = f(y_0)$  et  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Alors  $f$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  (de façon unique avec  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ ) ssi  $f^*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p^*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$  le *sous-groupe définitif du recouvrement*, inclus dans  $\pi_1(X, x_0)$ . Soit :

$$\begin{array}{ccc} y_0 \in Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \ni \tilde{x}_0 \\ & \searrow & \downarrow P \\ & & X \ni x_0 \end{array}$$

▷ **Preuve complètement brouillon** Si  $y \in Y$ ,  $\alpha : y_0 \rightarrow y$ ,  $f^*(\alpha)$  est un chemin dans  $X$  de  $x_0$  vers  $x$ . On peut le relever en un chemin basé en  $x_0$ . On voudrait que  $\tilde{f}(y) = x$ . On cherche  $F_x$ . Par exemple, l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  ssi  $f^*(\Pi_1(Y, y_0)) = 1$ .

Dans  $Y$ , soient  $y_0, y$  et deux chemins  $\gamma'$  et  $\gamma$  les reliant chacun. Dans le relèvement (penser à  $\mathbb{R}$ ),  $x = f(y)$  et  $\tilde{x}_0$  est dans la fibre, tout comme  $\tilde{f}(y)$ . Il existe  $\alpha \in \Pi_1(Y, y_0)$  tel que  $\gamma' = \alpha \times \gamma$ , car tout isomorphisme entre deux objets est obtenu par précomposition par un automorphisme du premier à un isomorphisme fixé (résultat élémentaire valable dans toute catégorie). Si l'image de  $[\alpha]$  dans  $\Pi_1(X, x)$  est inclus dans  $P^*(\Pi_1(E, \tilde{x}_0))$ . Si  $x$  est l'image de  $y$  obtenue en utilisant  $\gamma$  et  $x'$  par  $\gamma'$ , alors l'unique relèvement  $\tilde{\alpha}$  de  $f^*([\alpha])$  est un chemin de  $x$  vers  $x'$ , or  $x = x'$  équivaut à  $\tilde{\alpha}$  est une boucle, lui-même équivalant à  $\alpha \in P^*(\Pi_1(E, \tilde{x}_0))$ . ■

*Remarque.* Pour un autre point base  $\tilde{x}'_0$ , les sous-groupes définitifs sont conjugués. En toute bonne fois, le sous-groupe définitif est donc la donnée d'une classe de conjugaison (l'espace étant supposé connexe).

### Corollaire

Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $f : Z \rightarrow X$  une application continue. On suppose que  $Z$  est simplement connexe. Alors  $f$  se relève en  $Z \rightarrow Y$ .

**Application. (*Relèvement sur le cercle*)**

Si  $Y$  est connexe, une application continue  $f : Y \rightarrow S^1$  se relève en  $\tilde{f} : Y \rightarrow R$  si et seulement si  $f$  est simplement homotope à une application constante, autrement dit si elle ne fait pas le tour du cercle.

Remarque : toute application  $Y \rightarrow S^n$ ,  $n \geq 2$ , admet un relèvement.

**Propriété. (*Équivalence des revêtements*)**

Soient  $X_1, X_2, Y$  trois espaces où  $Y$  est connexe par arcs. Soient  $p_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $p_2 : X_2 \rightarrow Y$  deux revêtements tels que  $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ ,  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ . Alors il existe un homéomorphisme  $F : X_1 \rightarrow X_2$  tel que  $p_2 F = p_1$  et  $F(x_1) = x_2$  si et seulement si  $p_{1*}(\pi_1(X_1, x_1)) = p_{2*}(\pi_1(X_2, x_2))$ .

On énonce des corollaires du théorème de relèvement.

**Corollaire**

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, pour toute application continue  $f : Y \rightarrow B$  telle que  $Y$  soit localement connexe par arcs et simplement connexe, pour tous les  $x \in X$  et  $y \in Y$  tels que  $p(x) = f(y)$ , il existe un et un seul relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  de  $f$  tel que  $\tilde{f}(y) = x$ .

**Corollaire. (*Unicité du revêtement universel*)**

Deux revêtements  $p : X \rightarrow B'$  et  $p' : X' \rightarrow B$  tels que  $X$  et  $X'$  soient simplement connexes et localement connexes par arcs, sont isomorphes. Soient  $x \in X$  et  $x' \in X'$  tels que  $p(x) = p'(x')$ . Il existe un unique isomorphisme de revêtements  $\phi : X \rightarrow X'$  avec  $\phi(x) = x'$ .

**4.9.1.3 Monodromie****Théorème. (*Action de monodromie*)**

On a une action à droite (c'est-à-dire qui renverse la composition)  $P^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) \rightarrow P^{-1}(x)$ , dite *action de monodromie*, donnée pour  $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ ,  $x_0 \in P^{-1}(x)$ , par  $x_0 \cdot [\alpha]$  : l'extrémité de l'unique chemin relevant  $\alpha$ , basé en  $x_0$ .

▷ Rien à faire. ■

**Théorèmes**

1.  $\text{Stab}(x_0) = P^*(\pi_1(E, x_0)) \subseteq \pi_1(X, x)$ .
2. Cette action est transitive. En particulier  $p^{-1}(x)$  est en bijection avec  $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ .

3. Les groupes  $\{P^*(\pi_1(E, x_0)), x_0 \in P^{-1}(x)\}$ , forment une classe de conjugaison dans  $\pi_1(X, x)$ .

▷ Successivement :

1. Si  $x_0 \cdot [\alpha] = x_0$ , c'est exactement que le relèvement de  $\alpha$  dans  $E$  basé en  $x_0$  est une boucle, soit  $[\alpha] \in P^*(\pi_1(E, x_0))$ .
2. Soient  $x_0, x_1 \in P^{-1}(x)$ .  $E$  est connexe par arcs, donc il existe  $\gamma$  dans  $E$  de  $x_0 \rightarrow x_1$ . Soit  $\alpha = P^*(\gamma)$ , boucle basée en  $x$ . Par définition,  $x_0 \cdot [\alpha] = x_1$ .
3. Soit  $\gamma$  un chemin de  $x_0$  sur  $x_1$  avec  $\alpha = P^*(\gamma)$ . Alors  $P^*(\pi_1(E, x_0))$  et  $P^*(\pi_1(E, x_1))$  sont conjugués par  $[\alpha]$ . Réciproquement, si un tel  $\alpha$  existe, on peut relever ça en un chemin basé en  $x_0$ , en posant  $x_1 = \gamma(1)$ . ■

### Corollaire. (*Validité du revêtement universel*)

Si  $p : E \rightarrow X$  est un revêtement, si  $E$  est CPA et  $X$  simplement connexe, alors  $p$  est un homéomorphisme.

#### 4.9.1.4 Classification des morphismes de revêtements

**Remarque importante.** Tout  $f \in \text{Hom}(p_1, p_2)$  est un relèvement de  $p_1$  au-dessus de  $p_2$ . En effet, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E_2 & \\ f \nearrow & \downarrow p_2 & \\ E_1 & \xrightarrow{p_1} & X \end{array}$$

et en particulier si  $E_1$  est connexe, deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux.

#### Lemme

Soit  $f \in \text{Hom}(P_1, P_2)$ ,  $x \in X$ . Alors  $f_x : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$ ,  $\tilde{x}_1 \mapsto f(\tilde{x}_1)$  est compatible avec  $=$  invariante sous l'action de  $\pi_1(X, x)$ .

▷ Soit  $x_1 \in P_1(x)$  et  $x_2 = f(x_1) \in P_2^{-1}(x)$ . Soit  $\gamma \in P_1(X, x)$ ,  $\tilde{\gamma}_1$  un relèvement dans  $E_1$  de  $\gamma$  basé en  $x_1$ , avec  $x_1 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_1(1)$  et  $\tilde{\gamma}_2$  un relèvement de  $\gamma$  dans  $E_2$ , avec donc  $x_2 \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_2(1)$ . Or  $f$  est un morphisme de revêtements,  $f_X(\tilde{\gamma}_1)$  est un relèvement de  $\gamma$  dans  $E_2$ , et comme  $f(\tilde{\gamma}_2(0)) = x_1 = \tilde{\gamma}_1(0)$ ,  $f^*(\tilde{\gamma}_1)$  est basé en  $x_2$ , c'est même égal à  $f^*(x_1 \cdot [\gamma]) = f^*(x_1) \cdot [\gamma]$ . ■

*Remarque.* On peut le dire ainsi : les actions de  $\text{Aut}(P)$  et de  $\pi_1(X, x)$  sur  $P^{-1}(x)$  commutent.

### Théorème. (*Théorème fondamental de la monodromie*)

L'application

$$\text{Hom}(P_1, P_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\pi_1(X,x)}(P_1^{-1}(x), P_2^{-1}(x))$$

induite par la restriction à  $F = P_1^{-1}(x)$  est une bijection.

En particulier,  $\text{Aut}(P) \simeq \text{Aut}_{\pi_1(X)}(P^{-1}(x_0))$  est un isomorphisme de groupes.

### Lemme

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement, de base  $B$  connexe et localement connexe par arcs. Si  $C$  est une composante connexe de  $X$ , alors  $p|_C : C \rightarrow B$  est un revêtement.

### Preuve.

▷ L'injectivité vient de la connexité de  $E_1$ . Soit  $x_1 \in P_1^{-1}(x)$ . Soit  $h : P_1^{-1}(x) \longrightarrow P_2^{-1}(x)$ . Si  $h$  commute avec l'action de  $\pi_1(X,x)$ , alors elle est déterminée par  $h(x_1)$ . Soit  $x'_1 \in P_1^{-1}(x)$ , il existe  $\gamma \in \pi_1(X,x)$  tel que  $x'_1 = x_1 \cdot [\gamma]$ . On a  $h(x'_1) = h(x_1) \cdot [\gamma]$ . Fabriquons un morphisme de revêtements. On a donc nos revêtements  $P_1 : E_1 \longrightarrow X$  et  $P_2 : E_2 \longrightarrow X$ . Or on a vu qu'un morphisme  $\tilde{P} : E_1 \longrightarrow E_2$  existe si et seulement si  $P_1^*(\pi_1(E_1, x_1)) \subseteq P_2^*(\pi_1(E_2, x_2))$  en tant que cas particulier de relèvement d'applications. Soit  $\gamma_1$  un lacet dans  $E_1$  basé en  $x_1$ . On a  $x_1 \cdot [P_1\gamma_1] = x_1$ . Ainsi  $h(x_1 \cdot [P_1\gamma_1]) = P_2^*(\Pi(E_2, x_2)) = x_2$ . ■

### Corollaire

Sous ces hypothèses, la restriction à la fibre induit une bijection de l'ensemble des isomorphismes de revêtements de  $p$  sur  $p'$  à valeurs dans des bijections  $\pi_1(B,b)$ -équivariantes de la fibre  $F$  sur la fibre  $F'$ .

### Corollaire

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, de base  $B$  connexe et localement connexe par arcs, s'il existe  $b \in B$  tel que l'action de  $\pi_1(B,b)$  sur  $F = \pi^{-1}(b)$  soit triviale, alors  $p$  est un revêtement trivial.

### Corollaire. (*Propriété du revêtement universel*)

Tout revêtement d'un espace simplement connexe et localement connexe par arcs est trivial.

D'autre part :

### Corollaire

Si  $p_1, p_2$  sont des revêtements CALCA de base  $X \ni x$ , où  $\tilde{x}_i \in p_i^{-1}(x)$ , il existe un isomorphisme  $f$  de  $p_1$  vers  $p_2$  si et seulement si  $(p_1)_*(\pi_1(E_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2))$ .

### Heuristique

Un automorphisme de revêtements commute avec les projections, donc agit sur les fibres ; le groupe fondamental aussi ; ce que l'on dit, c'est qu'ils agissent de la même façon, en ce qu'ils se déterminent l'un l'autre.

Autrement dit, un automorphisme de revêtements est caractérisé par ce qu'il fait sur la fibre, puisque chaque fibre est reliée, par connexité par arcs (hypothèse CALCA), à tout le revêtement.

Récapitulons : prenons pour exemple en esprit  $X$  le cercle et  $E$  son revêtement canonique par la droite réelle représentée en tire-bouchon. On a vu que pour toute boucle de  $X$ , il y a une unique de façon de la relever dans le revêtement  $E$ , mais alors en un chemin. Intuitivement, les boucles dans  $E$  vont donc constituer le noyau de cette action (si c'est une boucle et non seulement un chemin, c'est que c'était seulement un point).

### Proposition

Soient  $p : X \rightarrow B$  un revêtement,  $b \in B$  et  $F = p^{-1}(b)$  la fibre au-dessus de  $b$ . Pour  $x \in F$  et  $g \in \pi_1(B, b)$  on note  $xg = \tilde{\alpha}(1)$  l'extrémité de l'unique relèvement de  $\alpha$  d'origine  $x$ .

Si  $B$  est connexe par arcs, l'application de  $F$  dans  $\pi_0(X)$  qui à  $x \in F$  associe sa composante connexe par arcs dans  $X$  induit une bijection

$$F/\pi_1(B, b) \simeq \pi_0(X)$$

entre  $\pi_0(X)$  et l'ensemble des orbites de  $\pi_1(B, b)$  dans  $F$ .

### Corollaire

Si  $X$  est connexe par arcs, pour tout  $x \in F$ , l'application de  $\pi_1(B, b)$  dans  $F$  définie par  $g \mapsto xg$  induit une bijection  $p_*\pi_1(X, x) \setminus \pi_1(B, b) \simeq F$ .

En particulier, si  $X$  est connexe par arcs et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $p$  est un revêtement à  $n$  feuillets si et seulement si  $p_*\pi_1(X, x)$  est un sous-groupe d'indice  $n$  de  $\pi_1(B, b)$ .

### Corollaire

Si  $X$  est connexe par arcs, alors  $p$  est un homéomorphisme si et seulement si  $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$  est un isomorphisme de groupes, sa surjectivité suffisant.

### Corollaire. (*Construction du revêtement universel*)

Un revêtement connexe par arcs d'un espace simplement connexe est un homéomorphisme.

### Proposition

Soient  $G$  un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique  $X$  séparé et connexe par arcs par homéomorphismes,  $p : X \rightarrow B = G \setminus X$  la projection canonique,  $b \in B$  et  $x \in F = p^{-1}(b)$ . Pour tout  $\gamma \in \pi_1(B, b)$ , il existe un unique  $g_\gamma \in G$  tel que  $x\gamma = g_\gamma x$ . L'application  $\pi_1(B, b) \rightarrow G$  définie par  $\gamma \mapsto g_\gamma$  est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau  $p_*\pi_1(X, x)$ .

### Corollaire. (*Groupe fondamental par action de groupes*)

Soient  $G$  un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique  $X$  séparé et simplement connexe, et  $B = G \setminus X$ . Alors  $\pi_1(B, b) \simeq G$ .

En particulier, un groupe fini agissant librement sur un espace séparé simplement connexe comme une variété simplement connexe, est le groupe fondamental de son quotient.

### Exemples. (*Groupes fondamentaux par revêtements*)

1.  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . En effet,  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et la projection canonique  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un revêtement. Plus généralement,  $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ .
2.  $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

D'autres corollaires :

### Corollaire

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, d'espace total  $X$  connexe et localement connexe par arcs, si  $x \in X$ , alors  $\text{Aut}(p)$  et  $p_*(\pi_1(X, x)) \curvearrowright N(p_*\pi_1(X, x))$  sont isomorphes.

Voici ce dont nous aurons besoin dans la suite

### Proposition

Soit  $p : X \rightarrow B$  un revêtement, d'espace total  $X$  connexe et séparé et  $B$  localement connexe. Le groupe discret  $\Gamma = \text{Aut}(p)$  des automorphismes de  $p$  agit continument proprement et librement sur  $X$ . Si  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $\Gamma$  et si  $f : \Gamma' \setminus X \rightarrow B$  est l'application induite par  $p$ , alors  $f$  est un revêtement, et la projection canonique  $\pi : X \rightarrow \Gamma' \setminus X$  est un morphisme de revêtements de  $p$  sur  $f$ .

### Proposition

Soient  $p : X \rightarrow B$  et  $p' : X' \rightarrow B$  deux revêtements d'espaces totaux  $X$  et  $X'$  respectivement connexes et de base  $B$  commune localement connexe. Si  $\phi : X \rightarrow X'$  est un morphisme de revêtements  $p \rightarrow p'$ , alors  $\phi$  est un revêtement.

#### 4.9.1.5 Revêtements galoisiens

Une référence : *Topologie algébrique élémentaire* de PAULIN.

##### Théorème. (*Compatibilité de revêtements*)

Soit  $P : E \rightarrow X$  un revêtement (connexe par arcs). Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1.  $\exists x \in E \quad \pi_1(E, x) \subseteq \pi_1(X, P(x))$  est distingué ;
2.  $\forall x \in E \quad \Pi_1(E, x) \subseteq \pi_1(X, P(x))$  est distingué ;
3. Le groupe  $\text{Aut}(P)$  agit transitivement sur  $P^{-1}(x_0)$ .

▷ Les deux premiers points sont équivalents, car on a vu que tous les  $\pi_1(E, x)$  sont conjugués dans  $\pi_1(X, P(x))$ . Le deuxième point équivaut à ce que si  $\tilde{x}, \tilde{y} \in P^{-1}[x_0]$ ,  $P(\pi_1(E, \tilde{x})) = P(\pi_1(E, \tilde{y}))$ , d'où  $\exists f \in \text{Aut}(P)$  tel que  $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . La réciproque est claire. ■

*Remarque.* L'action de  $\text{Aut}(P)$  est en toute généralité libre (elle agit sans point fixe). La transitivité de l'action par monodromie est donc équivalente à sa simple transitivité.

##### Définition. (*Revêtement galoisien*)

On dit qu'un revêtement est *galoisien*, ou *régulier*, ou *normal*, s'il vérifie l'une des propriétés précédentes.

*Remarque.* Si  $P$  est galoisien, on a une bijection  $\text{Aut}(P) = \pi_1(X)/\pi_1(E)$  ensembliste où  $\pi_1(E) = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}))$ .

##### Fait

À un homomorphisme surjectif de groupes  $\pi_1(B, b_0) \rightarrow G$  on associe un revêtement régulier  $\pi : E \rightarrow B$ .

##### Fait. (*Revêtement infini cyclique*)

Si  $X$  est un espace topologique et  $G = \pi_1(X)$ , le *revêtement infini cyclique*  $\hat{X}$  de  $X$  est le revêtement régulier associé à la suite exacte  $1 \rightarrow D(G) \rightarrow G \rightarrow G^{ab} \simeq \mathbb{Z} \rightarrow 1$ .

##### Exercice 12

Que se passe-t-il s'il est abélien ?

*Remarque.* Ce revêtement permet de définir le polynôme d'Alexander d'un noeud. Remarquons que si le noeud est différent du trivial, son groupe *i.e.* le groupe fondamental du complémentaire est non commutatif.

**Théorème. (*Revêtements galoisiens et monodromie : théorème fondamental qui font de ces revêtements des objets « normaux »*)**

Si  $P$  est galoisien, l'action par monodromie induit un isomorphisme de groupe  $\text{Aut}(P) \simeq \pi_1(X,x)/P^{-1}(\pi_1(E,\tilde{x}))$ , où  $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$ .

▷  $\text{Aut}(P) = \text{Aut}_{P_1(X)}(P^{-1}(x))$ . On veut un morphisme  $\pi_1(X,x) \longrightarrow \text{Aut}_{\pi_1(X,x)}(P^{-1}(x))$ . Si  $\gamma \in \pi_1(X,x)$ ,  $\tilde{x} \in P^{-1}(x)$ , on relève  $\gamma$  en un chemin  $\tilde{\gamma}$  dans  $E$  basé en  $\tilde{x}$ , et soit  $\tilde{y}$  son extrémité. Puisque  $P$  est galoisien, il existe (par transitivité simple) un unique  $f_\gamma \in \text{Aut}(P)$  tel que  $f_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Comme tous les  $\pi_1(E,\tilde{x})$  sont égaux (dans  $\pi_1(X,x)$ ). Ainsi,  $f_\gamma$  ne dépend que de  $[\gamma] \in \pi_1(X,x)$ . On a donc construit une application  $\pi_1(X,x) \longrightarrow \text{Aut}(P)$ . Par construction, c'est un morphisme de groupe. Or  $f_\gamma = id$  si et seulement si  $\tilde{\gamma}$  est une boucle, si et seulement si  $\gamma \in \pi_1(E,\tilde{x})$ . Par le théorème d'isomorphisme, on a alors  $\pi_1(X,x)/\pi_1(E,\tilde{x}) \simeq \text{Aut}(P)$ . ■

Le théorème suivant conclut cette section.

**Définition. (*Action totalement discontinue*)**

Soit  $G$  un groupe discret. L'action de  $G$  sur un espace  $X$  est continue si et seulement si pour tout  $g \in G$ ,  $g$  agit par homéomorphisme.

On dit que l'action de  $G$  est *totalement discontinue* si  $\forall x \in X \ \exists U \in \gamma(x) \quad U \cap g \cdot U \neq \emptyset, \ g = id$ .

*Remarque.* Dans ce cas, l'action de  $G$  est libre, mais c'est encore plus fort.

**Théorème. (*Les revêtements galoisiens CALCA sont des quotients de trucs connexes par des groupes discrets*)**

Soit  $G$  agissant sur  $E$  CALCA de façon totalement discontinue. Alors  $P : E \longrightarrow E/G$  est un revêtement galoisien, et  $\text{Aut}(P) = G$ .

▷ On avait vu que  $P$  est une application ouverte. Soit  $x \in E$ . Soit  $U \in \gamma(x)$ ; pour tout  $g \neq id$ ,  $g \cdot U \cap U = \emptyset$ . Or  $U$  est ouvert, donc  $P(U)$  est ouvert. Par construction,  $P^{-1}(P(U)) = \coprod_{g \in G} g \cdot U$  et  $g \cdot U \simeq U$ .

Secundo, on a un morphisme de  $G \longrightarrow \text{Aut}(G)$ ,  $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ . Par construction, c'est un élément de  $\text{Aut}(P)$ , c'est-à-dire  $P(x) = P(g \cdot x)$ . Comme l'action de  $G$  libre, ce morphisme est injectif. Montrons qu'il est surjectif. Soit  $f \in \text{Aut}(P)$  et soit  $\tilde{x}_0 \in E$  et  $x_0 = P(\tilde{x}_0)$ . Comme  $f(\tilde{x}_0) \in P^{-1}(x_0)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $f(\tilde{x}_0) = g \cdot \tilde{x}_0$ . L'action de  $f$  sur  $P^{-1}(x_0)$  coïncide avec l'action de  $g$ . Comme  $E/G$  est connexe, alors l'action de  $f$  et de  $g$  coïncident partout. ■

*Remarque.* On a  $G \simeq \pi_1(X,x)/\pi_1(E,\tilde{x}) = \pi_1(E/G,q(x))/q_*(\pi_1(E,x))$  où  $q : E \rightarrow E/G$  par le théorème précédent.

L'analogie à la théorie de Galois des extensions de corps apparaît ici : cette remarque, en tant que réciproque du théorème précédent, dit que tous les revêtements de Galois sont précisément de cette forme. Ainsi :

$$\{\text{revêtements galoisiens}\} \longleftrightarrow \{\text{sous-groupes distingués de } \Pi(X, x)\}.$$

### Exemples

1. Si  $E$  est simplement connexe,  $\pi_1(E/G) = G$ .
2.  $\mathbb{Z}^n$  agit sur  $\mathbb{R}^n$  par translation. On a  $(S^1) = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  le  $n$ -tore, d'où  $\pi_1((S^1)^n) = \mathbb{Z}^n$ . On retrouve aussi le groupe fondamental du cercle (ce qui n'était pas trivial).
3. Le théorème nous dit autre chose, dont avec la précédente, deux propositions qui ont l'air bien différentes et dont aucune n'est triviale. Les revêtements fermés de  $S^1$  sont donnés par  $P_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ . Le groupe d'automorphisme est  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On a  $P_n^* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ,  $k \longmapsto nk$ . Grâce au théorème, à équivalence près, ce sont les seuls.

### Corollaire

Soit  $P : E \longrightarrow X$  un revêtement galoisien. Alors  $\text{Aut}(P) := A(P)$  agit de façon totalement discontinue et  $P : E/A(P) \longrightarrow X$  est un homéomorphisme.

#### 4.9.1.6 Revêtements universels

##### Fait. (*Transitivité des revêtements*)

Tout revêtement d'un revêtement est un revêtement.

Tout produit de deux discrets est un discret.

##### Définition. (*Revêtement universel*)

Soit  $X$  un espace topologique CALCA. Un *revêtement universel* de  $X$  est un revêtement  $P : E \longrightarrow X$  avec un espace total  $E$  simplement connexe. Autrement dit, c'est le recouvrement de groupe définitif trivial.

##### Lemme

Un revêtement universel est galoisien.

On peut réénoncer un corollaire précédent par :

##### Proposition

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement d'espace total  $X$  simplement connexe, alors  $p$  est universel, au sens suivant : soit  $B$  un espace connexe et localement connexe par arcs. Un revêtement universel de  $B$  est un revêtement  $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$  d'espace total  $\tilde{B}$  connexe et tel que pour tout revêtement  $p : X \rightarrow B$  d'espace total  $X$  connexe, pour tout  $\tilde{b} \in \tilde{B}$  et  $x \in X$  tels que

$\pi(\tilde{b}) = p(x)$ , il existe un morphisme de revêtements  $\phi : \tilde{B} \rightarrow X$  de  $\pi$  sur  $p$  tel que  $\phi(\tilde{b}) = x$ . (S'il existe, il est unique, puis unique à isomorphisme près, isomorphisme unique une fois effectué un choix de point base dans la fibre au-dessus d'un point base de  $B$ .)

Justifions l'usage de l'article défini ci-dessus.

### Proposition

Soit  $p_u : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement universel et  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in E$ ,  $\tilde{y}_0 \in \tilde{X}$ . Il existe un unique  $f \in \text{Hom}(p_u, p)$  tel que  $f(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$ .

### Corollaire

Si  $X$  admet un revêtement universel  $E$ , alors

$$\{\text{classes d'isomorphismes de revêtements}\} \longleftrightarrow$$

$$\{\text{classes de conjugaison dans l'ensemble des sous-groupes de } \pi_1(X, x)\},$$

soit  $G \subseteq \Pi(X, x) \rightsquigarrow E/G$ .

*Remarque.* De plus, les classes d'isomorphismes de revêtements finis sont en bijection avec les classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini du  $\pi_1$ .

### Heuristique

Soit  $\Gamma$  le GF. Si  $H \leq G$  est d'indice  $d$ ,  $\Gamma$  agit sur l'ensemble des coensembles  $\Gamma/H$  qui sont finis de cardinal  $d$ . On obtient donc une représentation de  $\Gamma$  à travers  $\mathfrak{S}(\Gamma/H)$ , notée  $\rho_H$ . Changer  $H$  par un conjugué  $H' = zHz^{-1}$  induit une bijection  $c_z : \mathfrak{S}_d(\Gamma/H) \rightarrow \mathfrak{S}_d(\Gamma/H')$ . On note  $C_z$  la conjugaison par  $z$ . On a donc un opérateur d'entrelacement entre représentations :

$$c_z \circ \rho_H = \rho_{H'} \circ C_z$$

et l'on peut aussi observer que le stabilisateur du coensemble  $H$  est le sous-groupe  $H$  lui-même, et que  $\text{Stab}(gH) = C_g(H)$ .

### Conséquence. (*Unicité du revêtement universel*)

Un revêtement universel est unique à isomorphisme près.

### Corollaire

Tout recouvrement d'un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe lui est homéomorphe.

Plus généralement :

**Théorème**

Le groupe des automorphismes de revêtements de  $\tilde{X} \rightarrow X$  est isomorphe à  $\langle\langle p_*(\pi_1(\tilde{X})) \rangle\rangle / p_*(\pi_1(\tilde{X}))$ .

**VOC** Un revêtement dont le sous-groupe définitif est normal est appelé *revêtement régulier* ou *normal*. En particulier le revêtement universel est normal et son groupe d'automorphismes est  $\pi_1(X)$ .

**Exemple. (*Revêtement normal*)**

Le disque unité épointé  $D^*$  est recouvert par le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  qui est son revêtement universel, via  $t \mapsto e^{2\pi it}$ . Le groupe fondamental  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{H}$  par translations entières. Le revêtement régulier correspondant au sous-groupe engendré par  $e^{2\pi im}$  est encore le disque, avec un groupe de revêtement isomorphe à  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Ainsi, les revêtements finis de  $D^*$  sont équivalents aux  $z \mapsto z^m, m \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13**

Trouver les revêtements réguliers du tore recouvert par le plan.

**Définition. (*Espace des chemins*)**

Soit  $X$  un espace topologique CALCA et séparé, et  $x_0 \in X$ . On appelle *espace des chemins*  $P(X, x_0)$  l'ensemble des chemins de  $x$  basé en  $x_0$  (c'est une pieuvre).

On a  $P : P(X, x_0) \rightarrow X, \gamma \mapsto \gamma(1)$  surjectif, car  $X$  est CALCA, et un revêtement. C'est simplement connexe.

**Exemples**

1.  $P(S^1, 1) = \mathbb{R}$ . Classification des revêtements de  $S^1$ .
2. Classification des revêtements à deux feuillets d'un bouquet de cercle.

**Proposition. (*Description du revêtement universel à l'aide de lacets*)**

Voir sur le site <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/Revetement-universel-56.html>.

Voilà une illustration des considérations précédentes qui démontre au passage la supériorité définitive de la topologie sur l'algèbre. Il existe une preuve algébrique imbuvable du résultat suivant, qui ne peut que pâlir devant la concision apportée par la preuve de la topologie algébrique.

**Théorème. (*Nielsen-Schreier*)**

Tout sous-groupe de  $F_2$  est libre.

▷ On fait une preuve sans détail.  $F_2$  est le groupe fondamental du bouquet de sphères  $S^1 \vee S^1$  pointées en 1, par le théorème de van Kampen. Cet espace admet bien un revêtement universel : en effet, on peut le représenter comme un graphe infini sur le réseau  $\mathbb{Z}^2$ , avec  $b$  l'axe des abscisses ( $\bar{b} = b^{-1}$ ) dans le sens opposé, et  $a$  dans l'axe des abscisses ; la donnée d'un mot sur  $F_2$  correspond exactement à un chemin partant de l'origine et fini sur ce revêtement, que nous notons  $\Gamma$  (il faudrait en fait définir la topologie sur des arbres). Ainsi, d'après le théorème précédent, prendre un revêtement de  $S^1 \vee S^1$  revient à prendre des sommets de ce graphe et à les attacher (quotient par l'action d'un sous-groupe  $G \subseteq F_2$ ). Par exemple,  $abaab \in G$  peut se refermer en une boucle par un autre chemin, d'ailleurs très arbitraire. Donc  $\Gamma/G$  est un bouquet de cercle, éventuellement un nombre infini. Si on a  $n$  cercles,  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , c'est facile (puis il faut généraliser au cas dénombrable). Ainsi,  $\pi_1(\Gamma/G, x_0) = \star_n \mathbb{Z} = F_n$ . Ainsi  $G \simeq F_n$  est donc libre. ■



Contrairement aux cas des groupes abéliens libres =  $\mathbb{Z}$ -modules libres, un sous-groupe d'un groupe libre n'est pas forcément engendré par un ensemble de plus petit cardinal ! Contre-exemple :

### Proposition

Soit  $X$  séparé CALCA. Alors  $X$  admet un revêtement universel si et seulement s'il est *semi-localement simplement connexe* si pour tout  $x \in X$ , il existe  $U \in \mathcal{V}(X)$  tel que  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  soit triviale.

### Corollaire

Tout espace topologique séparé, connexe et localement contractile admet un revêtement universel.

### Exercice 14

Soient  $M_1, M_2$  deux variétés ayant le même revêtement universel  $\tilde{M}$  avec des projections  $p_1 : \tilde{M} \rightarrow M_1$  et  $p_2 : \tilde{M} \rightarrow M_2$ . On note  $G_1 = \text{Aut}(p_1)$  et  $G_2 = \text{Aut}(p_2)$ . Montrer que si  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$  est un homéomorphisme, on peut le relever en un automorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $\tilde{M}$  de sorte que  $G_2 = \tilde{\varphi} \circ G_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ .

### Théorème

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement simplement connexe et localement connexe par arcs. Alors  $\pi_1(B) \simeq \text{Aut}(p)$ .

### Application

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

**4.9.1.7 Revêtements images réciproques****4.9.1.8 Classification des revêtements**

## 4.10 Fibrés

**L**a notion de fibré aussi appelée fibration, ainsi que celles de revêtement (différentiel) et de fibré vectoriel qui en sont issues, sont fondamentales en topologie algébrique des variétés, lorsque celles-ci peuvent s'écrire comme opérations sur des fibrés fondamentaux.

### Heuristique

Un fibré est un espace qui est localement un produit.

Le formalisme des fibrés est principalement issu, dans le cursus d'un étudiant lambda, de celui de la géométrie différentielle. C'est donc une bonne idée d'appréhender cette section en étant déjà passé par là. De plus, le langage différentiel attaché à la notion de fibré permet d'énoncer nombre de résultats analytiques sur la géométrie des variétés loin d'être triviaux.

### 4.10.1 Faisceau géométrique

La notion de faisceau, chère à la géométrie algébrique, vient en fait d'une idée géométrique très commune.

#### Principe. (*Faisceau*)

Un *faisceau (géométrique)* est une famille d'objets géométriques partageant une propriété commune, par exemple l'ensemble des droites passant par un même point dans le plan, ou encore l'ensemble des cercles passant par deux points dans le plan.



La terminologie française est trompeuse, car cette notion de faisceau géométrique (en anglais *pencil*) n'a que peu à voir avec celle de faisceau topologique (en anglais *sheaf*). Remarquons que ces mots sont tous synonymes de *bundle*, qui signifie paquet, gerbe, liasse.

#### Fait

Un faisceau est complètement déterminé par deux de ses éléments.

*Remarque.* Selon une terminologie archaïque, de façon analogue, un ensemble d'objets géométriques déterminés par trois éléments quelconques est appelé un *paquet*, ou encore... *fibré*.

À partir de là, c'est un jeu d'enfants de paramétriser les faisceaux.

#### Exercice 15

Déterminer le faisceau de droites passant par un point à partir de deux éléments  $d_1, d_2$  de ce faisceau.

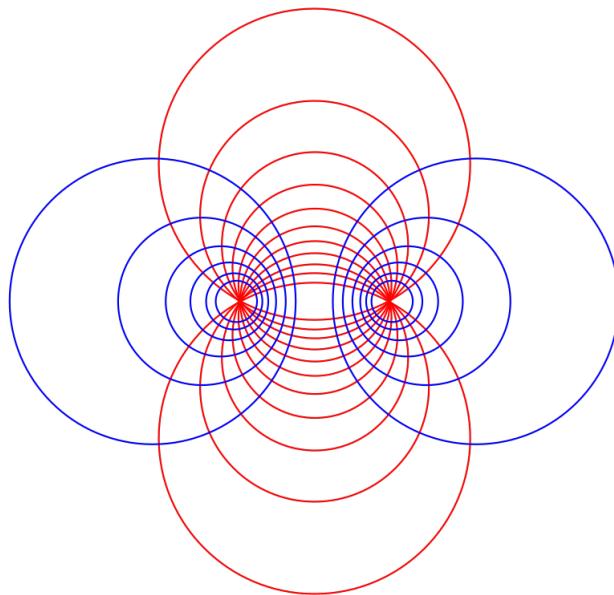


FIGURE 4.10.1 : *Cercles d'Apollonius.* —  
Deux faisceaux de cercles orthogonaux.

### Définition. (*Faisceau de plans*)

L'ensemble des plans passant par une droite de l'espace donnée, dite *axe* du faisceau, est appelé un *faisceau de plans* ou *faisceau axial* ou *éventail de plans* ou *gerbe de plans*.

Plus généralement, en dimensions supérieures, un *faisceau d'hyperplans* est l'ensemble des hyperplans passant par un même cohypérplan.

### Définition. (*Faisceau de sphères*)

Si  $f(x,y,z) = 0$  et  $g(x,y,z) = 0$  sont les équations de deux sphères distinctes qui s'intersectent, alors l'ensemble des sphères pour  $\lambda, \mu$  parcourant tous deux  $\mathbb{R}$  qui vérifient l'équation

$$\lambda f + \mu g = 0$$

d'inconnues  $x, y, z$ , est un *faisceau de sphères* déterminé par les deux sphères originales.

Comme les deux sphères originales se croisent le long d'un cercle, le plan contenant ce cercle existe et est appelé *plan radical* du faisceau sphérique.

### Propriété

Un élément d'un faisceau de sphères est une sphère.

▷ En effet, l'équation proposée s'écrit

$$\lambda(x - x_0)^2 + \mu(x - x_1)^2 + \lambda(y - y_0)^2 + \mu(y - y_1)^2 + \lambda(z - z_0)^2 + \mu(z - z_1)^2 = \lambda R^2 + \mu R' p^2$$

où  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)$  et  $R, R'$  sont respectivement les centres et les rayons respectifs de  $f, g$ . Chaque terme à gauche se développe, par exemple sur  $x$ , en  $(\lambda + \mu)x^2 - 2x(\lambda x_0 + \mu x_1) + \lambda x_0^2 + \mu x_1^2$  qui se factorise en  $(x - \lambda x_0 + \mu x_1)^2 + [\lambda x_0^2 + \mu x_1^2 - (\lambda x_0 + \mu x_1)^2]$ . En passant ces termes correctifs à droite, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} (x - (\lambda x_0 + \mu x_1))^2 + (y - (\lambda y_0 + \mu y_1))^2 + (z - (\lambda z_0 + \mu z_1))^2 &= \lambda R^2 + \mu R'^2 \\ &\quad - (\lambda x_0^2 + \mu x_1^2) + (\lambda x_0 + \mu x_1)^2 \\ &\quad - (\lambda y_0^2 + \mu y_1^2) + (\lambda y_0 + \mu y_1)^2 \\ &\quad - (\lambda z_0^2 + \mu z_1^2) + (\lambda z_0 + \mu z_1)^2. \end{aligned}$$

Puisque  $(x_0, y_0, z_0)$  vérifie  $f$  et  $(x_1, y_1, z_1)$  vérifie  $g$ , le terme de gauche se simplifie par  $(\lambda x_0 + \mu x_1)^2 + (\lambda y_0 + \mu y_1)^2 + (\lambda z_0 + \mu z_1)^2 := R''^2$  qui est bien positif. ■

### Définition. (*Faisceau de courbes*)

Soient  $C, C'$  deux courbes planes, éventuellement projectives au sens de la géométrie projective. Les *faisceaux de courbes* sont écrits sous la forme :

$$\lambda C + \mu C' = 0$$

où l'espace du paramètre de ce système de diviseurs linéaires est une droite projective.

## 4.10.2 Fibrations ou fibrés généraux

On aura besoin de la notion de VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE et de FIBRÉ TANGENT pour comprendre les notions suivantes dans leur contexte.

### 4.10.2.1 Définition et premières propriétés

À mi-chemin du faisceau (topologie ensembliste) et du revêtement (topologie algébrique), la langue mathématique à la fibration.

### Définition. (*Fibration, base d'une fibration, espace total et fibre type*)

Soient  $E, B, F$  des variétés topologiques.  $E$  et  $F$  peuvent être seulement des espaces topologiques, sans même adapter les hypothèses ci-dessous, ou en particulier être des variétés différentielles de classe  $C^p, p \in \mathbb{N}$ .

Une *fibration (localement triviale)* ou *fibré* ou *espace fibré* ou encore *paquet* (conformément à l'anglais *fibre bundle*) de *base/sur/au-dessus de*  $B$ , *espace total*<sup>a</sup>  $E$ , et *fibre ((de) type)*<sup>b</sup>  $F$ , est la donnée d'une application parfois dite *de projection*  $p : E \rightarrow B$  telle que (*condition de trivialisation locale*) pour tout  $b \in B$ , il existe un ouvert  $U = U_b \ni b$ , parfois dit

*trivialisant*, et un homéomorphisme  $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F, \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ U & & \end{array}$$

commute, c'est-à-dire  $pr_1 \circ \varphi = p$  où  $pr_1$  est la projection sur le premier facteur, autrement dit,  $p$  coïncide toujours avec la première coordonnée de  $\varphi$ , *i.e.*  $\varphi(x) = (p(x), \psi(x))$ . On dit donc aussi que  $p$  est une application *localement triviale*, au sens que  $F$  est localement un produit, ou encore que  $\varphi$  commute aux projections  $p$  et  $pr_1$ .

Pour être un fibré au sens propre, on impose que  $F \neq \emptyset$ , sinon on n'a pas un fibré, par définition.

<sup>a</sup> Qui est vraiment l'espace important, souvent identifié au fibré. Mieux, parfois, le fibré est identifié au couple  $(p, E)$ , ce qui donne accès à la base par  $B = p(E)$ .

<sup>b</sup> Car seul son type d'homéomorphie importe.

→ *Notation.* On convient d'écrire pour dire que  $p$ ,  $E$  ou  $(p, E, B, F)$  (selon les conventions exactes) est une fibration :  $p : E \xrightarrow{F} B$  ou plus couramment  $F \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$ , notation purement formelle au demeurant.

→ *Notation.* Parfois, on considère qu'un fibré est une donnée abstraite, souvent notée alors par les lettres  $\xi, \eta, \dots$  et dans ce cas, on note  $E = E(\xi)$  l'espace total,  $B = B(\xi)$  la base et  $F = F(\xi)$  la fibre.



FIGURE 4.10.2 : Brosse fibrée. —

Une brosse à cheveux cylindrique symbolise l'intuition derrière le terme de fibré « paquet ». Cette brosse est un fibré dont la base est un cylindre et les fibres sont des segments. La fibration enverrait un point de chaque fibre sur sa racine sur le manche du cylindre.

**Fait. (*Les fibrations sont continues, surjectives et ouvertes*)**

Toute fibration est une application continue.

En effet, elle est continue en tout point  $x$ , car en écrivant la trivialisation locale sur un voisinage  $U$  de  $p(x)$ ,  $p$  sur  $p^{-1}(U) \ni x$  s'écrit comme la composée de deux applications continues par hypothèse.

Toute fibration est une application surjective.

En effet, pour tout  $b \in B$  et tout ouvert trivialisation  $U \ni b$ ,  $p^{-1}(U) \simeq U \times F$  mais correspond à  $p$  sur la première projection, d'où  $p^{-1}(\{b\}) \simeq \{b\} \times F \neq \emptyset$ .

Toute fibration est une application ouverte.

En effet, c'est la composée d'un homéomorphisme est d'une projection, qui est ouverte en présence de la topologie produit.

Le toy-model des fibrés non triviaux est donné par le ruban de Möbius :

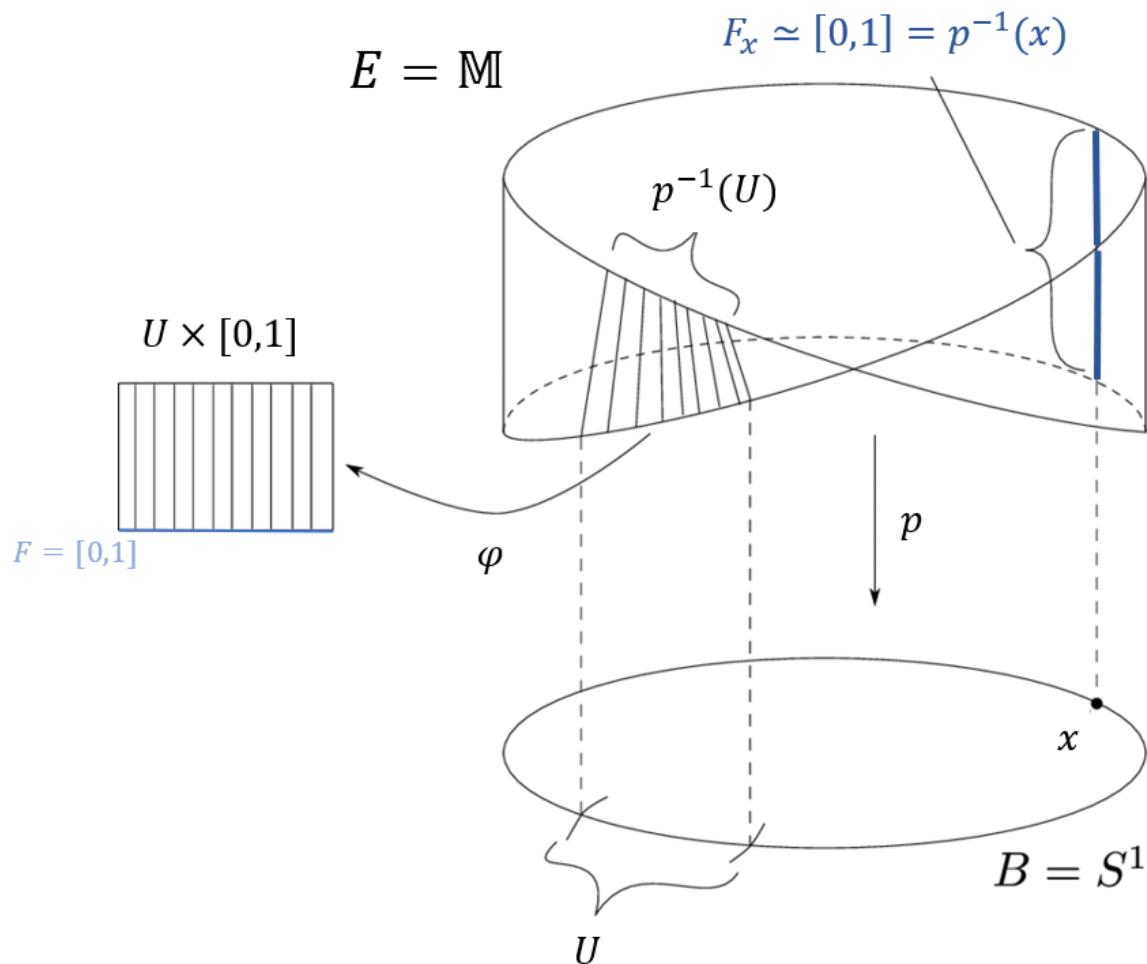
**Exemple. (*Toy-model des fibrés : le fibré de Möbius*)**

On peut définir le ruban de Möbius par  $\mathbb{M} = \frac{I \times [0,1]}{((0,x) \sim (1,1-x))}$ . Ceci étant dit, on peut définir une application  $p : \mathbb{M} \rightarrow S^1$  définie par  $(t,x) \mapsto t \hat{=} e^{2i\pi t}$ , qui est continue et surjective. C'est une fibration de fibre type un segment, notée alors  $(p, \mathbb{M}, S^1, [0,1])$ .

Il y a deux choses à vérifier : que la première projection sur  $\mathbb{M}$  envoie bien dans  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{M}$ , et la condition de trivialisation locale. Le premier fait est connu des topologues généraux : l'âme d'un ruban de Möbius est un cercle. Pour le second point, on considère les deux ouverts suivants :  $U_1 = S^1 \setminus \{\ast\}$  et  $U_2 = S^1 \setminus \{\star\}$  où  $\ast \neq \star$ . Alors quitte à translater la construction quotient du ruban de Möbius, un point de l'un de ces ouverts est par construction contenu dans un segment fondamental ouvert de la droite  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Par définition du ruban de Möbius, l'image réciproque par  $p$  d'un tel segment ouvert est le ruban de Möbius privé d'un segment et ceci vérifie la condition de trivialisation locale.

**Méthode. (*Montrer qu'un truc est un fibré*)**

Il suffit de montrer qu'il existe une partition de la base en ouverts trivialisants.

FIGURE 4.10.3 : *Fibration de Möbius.* —

Les bandes verticales signifient exactement que les trivialisations locales coïncident avec la fibration sur la première coordonnée.

#### Reformulation pratique. (*Terminologie catégorique des fibrés*)

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. On peut définir la notion de *fibré/fibration* dans  $\mathcal{C}$  de la manière suivante :

Typiquement, on utilisera la notion de fibrés dans les cas suivants :

1.  $\mathcal{C} = \text{Top}$  (cas traité initialement dans notre définition) ;
2.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés topologiques, qui n'est autre que la sous-catégorie pleine de  $\text{Top}$  constituée des espaces séparés à base dénombrable localement euclidiens ;
3.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés différentielles et certains parlent alors de *fibré différentiel/différentiable* ;
4.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés de classe  $C^p$  et certains parlent alors de *fibré de classe  $C^p$*  ;
5.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés lisses et certains parlent alors de *fibrés lisses* ;

6.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés complexes où les morphismes sont les fonction sholomorphes et certains parlent alors de *fibrés complexes*;
7.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés analytiques réelles et certains parlent alors de *fibrés analytiques*;
8.  $\mathcal{C}$  est la catégorie des variétés algébriques et certains parlent alors de *fibrés algébriques*.

### Remarques.

1. Pour tout  $b \in B$ , la fibre  $F_b = F_b(\xi) := p^{-1}(b)$  (qui parfois partage son nom, avec malheur, avec la fibre type) est homéomorphe/difféomorphe à  $F$ . En effet, immédiatement,  $h := \phi|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \simeq \{b\} \times F \simeq F$  (par un homéomorphisme/difféomorphisme). Le même homéomorphisme  $h$  peut être utilisé dans un voisinage trivialisant  $U$  de  $b$ , et alors le couple  $(U, h)$  est appelé *système de coordonnées locales en b pour  $\xi$* .

Autrement vu, pour tout  $e \in E$ ,  $p(e) = pr_1(\phi(e))$  et  $e \in p^{-1}(b) \iff \phi(e) \in pr_1^{-1}(b) \simeq F$ .

2. Remarquons que l'on peut parfois définir la fibration avec une fibre type variant selon l'ouvert trivialisant. Dans ce cas, la remarque précédente n'est pas invalidée (avec  $F = F(b)$ ), et l'on a de plus :  $F(b) \simeq F(b')$  au sens des difféomorphismes dès que  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ , et formulé en topologie, le type d'homéomorphisme des fibres est localement constant sur la base. Dans tous les cas, le cardinal des fibres est localement constant sur la base.

En effet, notons d'abord que  $F(b)$  ne dépend que d'un ouvert trivialisant  $U \ni b$ , d'où la notation  $F(b) = F(U)$ . Remarquons maintenant que si  $U, V$  sont deux ouverts trivialisants d'intersection non vide,  $F(U) \simeq F(V)$ , car pour un  $b'' \in U \cap V$ ,  $p^{-1}(b'') \simeq F(U)$  et  $p^{-1}(b'') \simeq F(V)$  par la remarque précédente.

Pour conclure, soit  $\gamma : b \rightarrow b'$  un chemin continu entre deux  $b, b'$  dans la même composante connexe dans  $B$ . Le support de  $\gamma$  est un compact connexe, que l'on peut donc recouvrir par une famille finie d'ouverts trivialisants  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, s, n \in \mathbb{N}$ . Alors on peut aller de  $U_i \ni b$  à  $U_j \ni b'$  de proche en proche, autrement il existerait une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en deux parties  $A, A'$  tel que  $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$  pour tous  $a \in A, a' \in A'$ , ce qui ne peut, car  $\text{supp}(\gamma)$  est connexe.

3. Dans le cas où  $\mathcal{C}$  est une catégorie de variétés différentiables, l'application  $p$  est toujours une submersion.

On rappelle que le fait d'être une submersion est une propriété locale, disons en  $x$ ; restreignons donc  $p$  au-dessus d'un ouvert trivialisant contenant  $b = p(x)$ . Or, en notant  $\varphi(x) = (b, u)$ , le foncteur « tangent » transforme la condition de trivialisation locale en :

$$\begin{array}{ccc} T_x p^{-1}(U) & \xrightarrow{T_x \psi} & T_b U \times T_u F \\ T_x p \downarrow & \nearrow T_{(b,u)} pr_1 & \\ T_b U & & \end{array}$$

puisque une projection est une submersion, donc  $T_x p$  est surjective.

4. (*Fibrés & revêtements*) Les revêtements sont les fibrations à fibres discrètes.

En effet, soit  $\pi : E \rightarrow B$  un revêtement. Pour tout  $b \in B$ ,  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in \pi^{-1}(b)} V_\alpha$  tel que

$\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \simeq U_b$  et  $\pi^{-1}(b) = F$  a la topologie discrète. Ainsi  $\phi : \pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  par  $x \in V_\alpha \mapsto (\pi|_{V_\alpha}, \alpha)$  qui fournit clairement un fibré. Réciproquement, si l'on a  $E \rightarrow B \supseteq U_b \ni b$  et  $\pi^{-1}(U_b) \simeq U_b \times F$  via  $\phi$  où  $F$  est discret, alors  $F = \bigsqcup_{f \in F} \{f\}$  donc  $\pi^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{f \in F} \pi^{-1}(U_b \times \{f\})$  et  $\pi|_{\pi^{-1}(U_b \times \{f\})} : \pi^{-1}(U_b \times \{f\}) \xrightarrow{\sim} U_b$ .

### 5. La projection d'un fibré a toujours des sections locales.

En effet, soit  $\xi$  un fibré de projection  $\pi$ . Soit  $b \in B(\xi)$  et soit  $U$  un ouvert de trivialisation

$$\text{locale en } b. \text{ On peut alors écrire } \begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow (id_U, h) & & \\ \pi_1^{-1}(U) & \xrightarrow[\varphi=(\pi_1, f)]{} & U \times F \end{array} \text{ où } f \text{ est une certaine fonction, } \varphi \text{ ayant}$$

cette forme par condition de trivialisation locale simplement. Soit  $h : U \rightarrow F$  une application continue/différentiable/lisse quelconque de  $U$  dans  $F$ , qui existe toujours, car  $F \neq \text{vide}$ . Posons alors  $s = \varphi^{-1} \circ (id_U, h)$ . Soit  $x \in \pi^{-1}(U)$  tel que  $\pi(x) = b$ . Alors  $s(b) = x$ , puisque  $\varphi$  est une bijection : l'écrire si ce n'est pas clair ! Ainsi,  $\pi \circ s(b) = \pi(x) = b$  et  $s$  est une section sur  $U$ . De plus, les sections locales associées à la trivialisation  $(U, \varphi)$  sont en bijection avec les fonctions continues/différentiables/lisses  $h : U \rightarrow F(\xi)$ .

Cependant, un fibré peut n'avoir aucune section globale.

Par exemple, le fibré  $S^1 \rightarrow S^1$  de projection  $z \mapsto z^2$ , qui est un revêtement, n'a pas de section globale continue, car l'argument n'a pas de détermination à 360 degrés.

Dans le cas important d'un fibré vectoriel, le fibré a toujours au moins une section, la section nulle.

### 6. Parfois, on impose que $B$ soit paracompacte. L'intérêt principal de cette contrainte est de rendre automatique le théorème selon lequel un fibré est une fibration au sens de la théorie de l'homotopie, *i.e.* il possède la propriété de relèvement des homotopies. (On rappelle qu'on savait que les fibres en deux points connectés d'une fibration sont homotopiquement équivalentes.)

#### Exercice 16

Montrer que la projection d'un fibré est un homéomorphisme local si et seulement si c'est un revêtement.

**VOC** Si la fibre d'une fibration  $F = S^1$ , on parle de *fibré en cercles*. Si  $F = S^2$  maintenant, on parle *fibré en sphères* (typiquement : le tore, la bouteille de Klein, (*comme on le verra dans la section suivante*)) ; si  $F = D^2$ , de *fibré en disques*, etc.

#### Heuristique

Un fibré est déterminé par trois de ses éléments clés : la base, l'espace total et l'application de projection.

\* La base  $B$  est un espace topologique sur lequel le fibré est défini. Chaque point de

cette base est associé à une fibre, qui est un espace typiquement de même structure (comme une droite, un plan, une sphère, etc.).

- ★ L'espace total  $E$  est l'ensemble de tous les points appartenant aux fibres au-dessus des points de  $B$ . On peut voir  $E$  comme une sorte de glue qui relie toutes les fibres ensemble.
- ★ L'application  $\pi$  associe chaque point de l'espace total  $E$  à un point de la base  $B$ . Elle définit comment les fibres sont positionnées au-dessus de chaque point de la base.
- ★ L'espace des fibres est implicite : À chaque point  $b \in B$ , la fibre  $F_b$  est donnée par  $\pi^{-1}(b)$ . **Si toutes les fibres sont homéomorphes à un même espace typique  $F$ , c'est là qu'on parle précisément de fibré localement trivial<sup>a</sup>.** Les relations entre  $E$ ,  $B$  et  $\pi$  permettent de reconstruire les propriétés géométriques et topologiques du fibré. Par exemple, dans le cas d'un fibré vectoriel, chaque fibre est un espace vectoriel.

En résumé, la base donne la géométrie globale, l'espace total regroupe toutes les données nécessaires, et l'application de projection organise ces données de manière cohérente au-dessus de la base.

<sup>a</sup> Ce qui explique que certains exercices de livres un peu datés présentent : montrer que ce fibré est localement trivial, un fibré désignant alors seulement une surjection continue !

#### 4.10.2.2 Morphismes de fibrations

##### Définition. (*Morphisme de fibrations*)

Soient  $(E, B, F)$  et  $(E', B, F')$  des fibrations de même base. Un *morphisme de fibrations* ou *morphisme de fibrés* (de base  $B$ ) est<sup>a</sup> une application continue/différentiable/lisse :

$$\begin{array}{ccc} f : E & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

faisant commuter ce diagramme, i.e. telle que  $p' \circ f = p$ .

<sup>a</sup> Ce qui confirme que l'espace total est l'objet important.

##### Fait

Soit  $f : (p, E, B, F) \rightarrow (p', E', B, F')$  un morphisme de fibrés. Alors pour tout  $b \in B$ ,  $f$  envoie  $F_b$  dans  $F'_b$ .

Pour tout  $x \in E$ , si  $x \in F_b = p^{-1}(b)$ , i.e.  $p(x) = b$ ,  $f(p(x)) = p'(x) = b$ .

*Remarque.* Ainsi, une catégorie intéressante à considérer est celle des fibrés sur une même base.

Cependant, il n'est pas ridicule non plus de considérer la notion suivant. Un *morphisme entre deux fibrés*  $(p_1, E_1, B_1, F_1), (p_2, E_2, B_2, F_2)$  est une application continue/différentiable/lisse  $f : E_1 \rightarrow E_2$  qui envoie fibre sur fibre : on dit qu'elle *préserve les fibres*, ce qui signifie qu'il existe  $g : B_1 \rightarrow B_2$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

commutatif. L'application  $g$  est appelée *application induite sur les bases* par  $f$  et l'on dit aussi que  $f$  *recouvre*  $g$ .

L'existence d'un tel diagramme implique que  $f$  envoie la fibre de  $b$  sur celle de  $g(b)$ , il suffit de l'écrire en un ligne. Montrons la réciproque, car il faut que l'application  $g$  construite soit continue/différentiable/lisse. Soit  $b \in B$ . Alors  $p_1^{-1}(b) \neq \emptyset$ , soit donc  $x \in p_1^{-1}(b)$ . Posons  $g(b) = p_2 f(x)$ .

Alors  $g$  est bien définie, vérifie la commutation du diagramme et est continue/différentiable/lisse. En effet, si  $x' \in p_1^{-1}(b)$ , par hypothèse  $f$  envoie la fibre  $p_1^{-1}(b)$  sur une certaine fibre  $p_2^{-1}(b')$  où  $b' \in B_2$ , donc  $p_2 f(x') = b' = p_2 f(x)$  donc  $g$  est bien définie. De plus,  $gp_1 = p_2 f$ , par construction : si  $x \in E$ ,  $p_1(x) = b \in B$  d'où  $x \in p_1^{-1}(b)$  et  $g(b) = gp_1(x) = p_2 f(x)$ . Enfin, continuité, différentiabilité ou lissité sont, même la lissité, des notions locales, donc il suffit de considérer une section locale  $s$  de  $p_1$  en un point  $b \in B$ , et au voisinage de  $b$ ,  $gp_1 = p_2 f$  donne  $g = p_2 f s$  qui a la lissité demandée.

### Propriété. (*Isomorphisme de fibrés*)

Un morphisme de fibrations est un isomorphisme si et seulement si l'application définie entre les espaces totaux est un isomorphisme.

Ainsi, deux fibrés sont isomorphes/homéomorphes/difféomorphes si et seulement s'ils sont isomorphes/homéomorphes/difféomorphes dans leur catégorie sous-jacente et les deux inverses commutent aux fibrations.

▷ Il n'y a rien à faire, il suffit de faire abstraction de la partie basse du diagramme. ■

#### 4.10.2.3 Exemples fondamentaux de fibrations

##### Exemples. (*Fibrations = fibrés*)

1. (*Fibration triviale = fibré trivial*) Soient  $B, F$  deux variétés et  $E = B \times F$ . Alors pour  $p = pr_1 : E \longrightarrow B$ ,  $(p, E, B, F)$  est un fibré. De plus, pour tout  $b \in B$ ,  $pr_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$ .

Dans ce cas, il suffit d'un ouvert trivialisant  $U = B$  et l'on prend l'identité comme homéomorphismes/difféomorphismes trivialisant.

**Par définition, une fibration quelconque est localement isomorphe à une fibration triviale.**

2. On a déjà rencontré l'exemple de la *fibration de Möbius*.  
 3. L'application de projection  $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est une fibration de fibre de type  $\mathbb{R}^*$ .

En effet, on a introduit les ouverts  $V_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  donnés par  $\{v_i \neq 0\}$  et tels que les  $U_i = p(V_i)$  formant un atlas du  $n$ -ième plan projectif réel. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 (v_1, \dots, v_{n+1}) = \underline{v} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & (p(\underline{v}), v_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 [(v_1, \dots, v_{n+1})] = [(\frac{v_1}{v_i}, \dots, 1, \dots, \frac{v_{n+1}}{v_i})] \in & V_i = p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\varphi} U_i \times \mathbb{R}^* \\
 & & \downarrow pr_1 &
 \end{array}$$

commute, et  $\varphi$  admet pour inverse lisse  $(w, \lambda) \mapsto \lambda w$ , ce qui donne directement que  $(p, \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbb{P}^n \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$  est un fibré.

Avec la notion introduite dans la prochaine section, on voit que c'est un exemple de fibration qui n'est pas un fibré vectoriel.

Remarquons que cette fibration n'est pas celle qui nous intéressera le plus sur l'espace projectif. On rencontrera d'abord l'exemple de la fibration de Hopf, plus subtil, mais c'est véritablement le fibré vectoriel tautologique sur  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  qui nous occupera par la suite. Remarquons également que dans le contexte des fibrés, on préférera parfois noter  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{P}^n(R)$  à  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  et  $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = \mathbb{P}^n(C)$  à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , ou plus simplement  $\mathbb{P}^n$  si le contexte est clair, mais ce n'est pas systématique.

4. Les revêtements étant des fibrations, on a les fibrés différentiels discrets suivants que l'on peut invoquer dans toute la théorie des fibrations :

- ★ (*Rappel : le revêtement trivial*) Soit  $B$  un variété et  $I$  un ensemble discret. Soit  $pr_1 : B \times I \longrightarrow B$ . Alors pour  $F = I$ ,  $(pr_1, B \times F, B, F)$  est un revêtement, et donc une fibration.
- ★ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto z^n$  est un revêtement à  $n$  feuillets.
- ★  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$  est un fibré (en fait, toujours un revêtement, ce que l'on peut donc observer en ce que le premier terme est infini dénombrable). L'application  $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it}$  est une fibration de type  $2\pi\mathbb{Z}$  ou encore l'application  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2i\pi t}$  est une fibration de type  $\mathbb{Z}$  homéomorphe à  $2\pi\mathbb{Z}$ .
- ★ De même, la projection canonique  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexée par  $\mathbb{Z}^2$ . Plus généralement, la projection canonique  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  fournit un revêtement différentiel, à fibres dénombrables et de trivialisations indexées par le réseau  $\mathbb{Z}^n$ .
- ★ Si  $K$  est la bouteille de Klein, on a un revêtement  $\mathbb{T}^2 \rightarrow K$  à deux feuillets. On en déduit un revêtement  $\mathbb{R}^2 \rightarrow K$  à fibre dénombrable.
- ★ L'application exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$  définit un revêtement

holomorphe. Chaque fibre ici est infinie dénombrable :  $\pi^{-1}(p(x)) = x + 2i\pi\mathbb{Z}$  pour tout  $x \in \mathbb{C}$ .

- ★ (*Fibration de Hopf réelle*) La projection canonique  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  fournit un revêtement à deux feuillets pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En effet, pour  $M = S^n$  et  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  agissant par  $x \mapsto -x$ , donc librement, continûment car par homéomorphismes,  $G$  étant discret et proprement discontinûment, puisque  $G$  est fini, par le théorème de la variété quotient,  $M/G = \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  est une variété et  $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un revêtement à deux feuillets de classe  $C^\infty$ , et donc

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$$

est un fibré.



Les revêtements sont des fibrations mais les revêtements de fibre non nulle ne sont jamais des fibrés vectoriels, puisque qu'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel n'est jamais discret.

#### Méthode. (*Pour montrer qu'un ouvert est trivialisant*)

Il suffit de trouver un isomorphisme de trivialisation. Comme le terme sur l'ouvert est imposé par commutation de la condition de trivialisation, il suffit de trouver le terme sur la fibre, qui doit simultanément :

- ★ dépendre continûment de la variable,
- ★ induire une bijection.

Et l'on a de grandes chances d'avoir alors un homéomorphisme/difféomorphisme.

#### Exercice 17

Montrer que le fibré de Möbius n'est pas trivial.

##### ▷ Éléments de réponse.

Remarquons que ceci impliquerait que  $\mathbb{M}$  est homéomorphe au cylindre  $S^1 \times [0,1]$ , ce qui est faux, car le bord de  $S^1 \times [0,1]$  en tant que variété topologique est une réunion disjointe de deux cercles, tandis que celui de  $\mathbb{M}$  est un cercle.

#### 4.10.2.4 Fibrations de Hopf

La fibration de Hopf est un exemple assez canonique de fibré, qu'il serait futile d'ignorer.

##### 4.10.2.4.1 Fibration de Hopf classique

La fibration de Hopf est le premier exemple de fibration qui n'est pas globalement un produit. Voyons la sphère  $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$  dans le plan complexe :

$$S^3 = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 + |v|^2 = 1\}.$$

Prenons l'axe  $v = 0$ , c'est une droite complexe, c'est-à-dire un plan réel. Il rencontre la sphère  $S^3$  sur  $\{(0,v) \in \mathbb{C}^2, |v|^2 = 1\}$ , c'est-à-dire un cercle  $S^1$ . On peut faire la même chose pour toutes les droites de la forme  $v = au$  avec  $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

En effet, l'intersection entre la droite complexe  $v = au$  et l'hypersphère est

$$\{(u,au) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 + |a|^2|u|^2 = 1\} = \{(u,au) \in \mathbb{C}^2, |u|^2 = \frac{1}{1+|a|^2}\}.$$

On voit donc, en identifiant  $S^2$  à  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , qu'à chaque point de  $S^2$ , on associe un cercle sur  $S^3$ . La sphère  $S^3$  est donc remplie par ces cercles. Nous verrons plus loin que ces cercles ne se rencontrent pas pour des valeurs de  $a$  différentes.

C'est cette partition que l'on appelle la fibration de Hopf. On dit qu'on fait un feuilletage de  $S^3$  en grands cercles.

### Définition. (*Fibration de Hopf*)

On appelle *fibration de Hopf* l'application suivante :

$$\begin{aligned} f: \quad S^3 &\simeq \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow S^2 \simeq \hat{\mathbb{C}} \\ (u,v) &\longmapsto \frac{v}{u} \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} h: \quad S^3 &\simeq \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow S^2 = \mathbb{S}(\mathbb{R}^3) \\ (u,v) &\longmapsto (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2). \end{aligned}$$

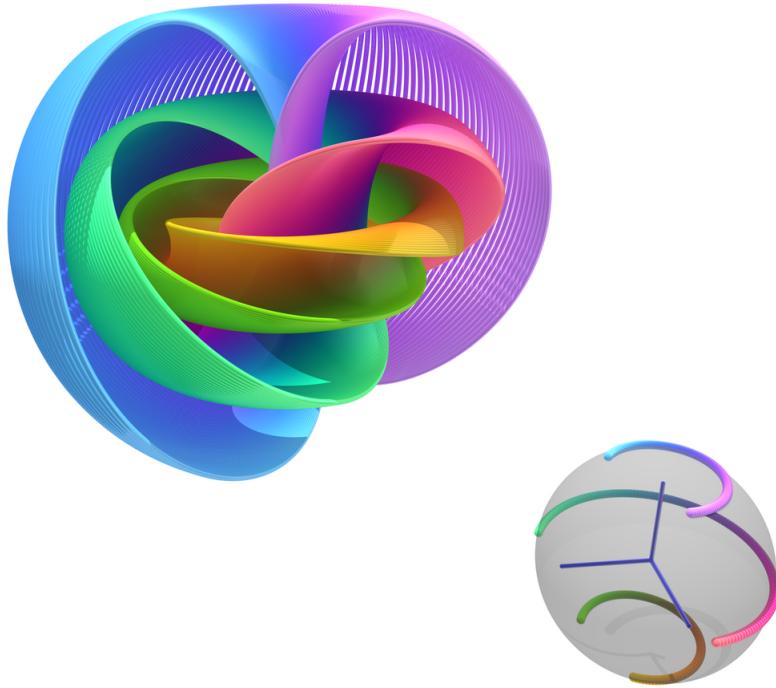
On passe de  $f$  à  $h$  par projection stéréographique. L'application  $h$  est une fibration de  $S^3$  sur  $S^2$  de fibre  $S^1$ .

Si l'on sait passer de  $f$  à  $h$ , il est évident que la fibration de Hopf est bien définie, car :

### Fait

En voyant  $S^2$  comme  $\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + |t|^2 = 1\}$ , il est immédiat que  $h$  envoie  $S^3$  dans  $S^2$  :

$$|2u\bar{v}|^2 + (|u|^2 - |v|^2)^2 = (|u|^2 + |v|^2)^2 = 1$$

FIGURE 4.10.4 : *Fibration de Hopf classique.* —**Propriété. (*Fibre de la fibration de Hopf*)**

La fibre au dessus de chaque point de  $S^2$  est un grand cercle.

▷ Soit  $a \in S^2$ . Soit  $(u,v) \in f^{-1}(a)$ . Alors

$$|u|^2 + |v|^2 = 1$$

$$u = av.$$

La fibre au dessus de  $a$  est donc l'intersection d'un plan passant par l'origine et de l'hypersphère, c'est donc bien un grand cercle. ■

Citons :

**Théorème. (*Tores de Hopf*)**

L'image réciproque de toute courbe fermée de  $S^2$  par la fibration de Hopf est un tore de  $S^3$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Traitons le cas où la courbe fermée est un parallèle de  $\mathbb{S}^2$ . Soit  $a \in S^2$ , il s'écrit  $a = \rho e^{it}$ . Soit  $(u,v) \in S^3$ , tels que  $f(u,v) = a$  alors  $u = re^{i\theta}$  et  $v = pe^{i(\theta+t)}$  avec  $\rho, r \in \mathbb{R}_+$  et

$\theta, t \in [0, 2\pi[$ . Or on sait que  $|u|^2 + |v|^2 = 1$ , d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = re^{i\theta} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \rho r e^{i(\theta+t)} \\ r^2 + \rho^2 r^2 = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u = re^{i\theta} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \rho r e^{i(\theta+t)} \\ r = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\rho^2}} \\ a = \rho e^{it} \\ v = \frac{\rho e^{i(\theta+t)}}{\sqrt{1+\rho^2}} \\ r = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}. \end{array} \right.$$

On remarque qu'en faisant varier  $\theta$  et  $t$ , le cercle  $(u, v)$  décrit un tore de  $S^3$ , il est caractérisé par deux coordonnées angulaires. Par rotation tout grand cercle de  $S^2$  est équivalent à l'équateur. ■

*Remarque.* En faisant varier  $\rho$ , on obtient différents tores sur  $S^3$ .

En réalité, on peut passer d'une fibre à l'autre par rotation : si  $a \in S^3$ ,  $f^{-1}(a) \cap S^3$ . Soit  $A \in SU(2)$  une matrice de rotation. Alors  $Af^{-1}(a) = \mathbb{C}Aa \cap S^3$ . C'est un autre grand cercle de  $S^3$ .

### Propriété

Deux fibres sont enlacées, au sens connu par projection sur  $\mathbb{R}^3$ . En particulier, deux fibres différentes ne se rencontrent pas.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La figure

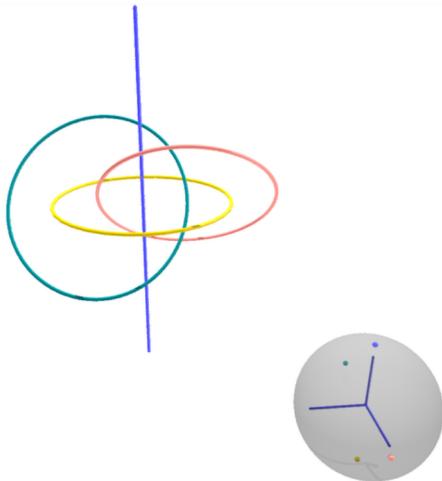


FIGURE 4.10.5 : Enlacement des fibres de la fibration de Hopf. —

est assez convaincante. ■

La fibration de Hopf n'est pas triviale, autrement dit

### Propriété

La fibration de Hopf n'est pas globalement un produit.

▷ En effet, on aurait en particulier un homéomorphisme  $S^3 = S^2 \times S^1$ , ce qui ne peut, car  $\pi_1(S^3) = 0 \neq \pi_1(S^2 \times S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . ■

#### 4.10.2.4.2 Fibration de Hopf complexe généralisée

Le revêtement = fibration à fibre discrète  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^d \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{R}$  admet un analogue complexe qui n'est plus un revêtement mais un fibré.

#### Proposition. (*Fibration de Hopf complexe*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  est un fibré.

▷ On exhibe l'application où  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ , définie par  $(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) \mapsto [x_0 + iy_0 : \dots : x_n + iy_n]$ . ■

*Remarque.* Dans le cas  $n = 1$ , c'est la fibration de Hopf classique, qui s'écrit bien  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ .

### 4.10.3 Fibrés vectoriels

Parlons de topologie algébrique... avec l'algèbre linéaire.

#### 4.10.3.1 Définition et premiers exemples. Fibrés particuliers

##### Définition. (*Fibré vectoriel*)

Un *fibré vectoriel* (*réel*) tout court/différentiable/de classe  $C^p, p \in \mathbb{N}$ /lisse est une fibration respectivement chacun de ses qualificatifs  $(p, E, B, F)$  telle que  $F$  et les fibres  $F_b := p^{-1}(b), b \in B$  sont toutes des espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et les applications de trivialisation locale induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels entre les  $F_b$  et  $F$ , autrement induisent des applications linéaires<sup>a</sup>.

Le *rang* ou la *dimension*<sup>b</sup> du fibré vectoriel est la dimension de  $F$ . Un fibré réel de rang  $n$  est aussi appelé  $\mathbb{R}^n$ -*fibré*<sup>c</sup>.

<sup>a</sup> Puisqu'elles induisent déjà des bijections.

<sup>b</sup> Avec cette définition, bien commode, du fibré vectoriel, le rang d'un fibré vectoriel est constant, et l'on s'y cantonne.

<sup>c</sup> Sans problème, car seul le type d'homéomorphie de la fibre importe.

### Heuristique

Un fibré vectoriel est une collection d'espaces vectoriels variant de façon géométrique.



En général, il n'y a pas une façon canonique de choisir la structure vectorielle, ni l'élément nul, dans chaque fibre.

**VOC** Si le rang d'un fibré vectoriel est 1, on parle de *fibré en droites*. Si le rang est 2, on parle de *fibré en plans*, etc. Plus généralement, on parle parfois de *fibré en  $n$ -plans* pour désigner un  $\mathbb{R}^n$ -fibré.

### Fait. (*Cocycles de transition*)

Étant donné un fibré vectoriel  $\pi : E \rightarrow B$  de rang  $n$  et des trivialisations  $h_{U_i} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$  pour les fibrés vectoriels complexes, (*introduits plus tard*)) définies sur un recouvrement  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ , on peut définir les

$$h_{U_i} \circ h_{U_j}^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

qui par condition de trivialisation locale ont la forme

$$h_U \circ h_U^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$$

où  $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  (ou  $GL_n(\mathbb{C})$ ) dit *groupe de structure* sont appelées les *fonctions de transition* du fibré vectoriel associées au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ . Si le fibré vectoriel est lisse, alors les fonctions de transition également.

Les fonctions de transition satisfont une *condition de cocycle*, à savoir que, pour tous  $i, j, k \in \mathbb{N}$ , sur  $U_i \cap U_j \cap U_k$ , on a

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$$

et en particulier  $g_{ii} = I_n$ . Réciproquement, étant donné une famille de fonctions de transition satisfaisant à la condition de cocycle sur un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ , on peut construire un fibré vectoriel.

Pour voir cela, on construit l'union disjointe  $\tilde{E} = \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^n$  avec la projection  $\tilde{\pi}(x, v) = x$  où  $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n$ . Pour obtenir le fibré vectoriel, on quotient cet espace par la relation d'équivalence  $(x, v_i) = (y, v_j)$  si et seulement si  $x = y$  et  $v_j = g_{ij}v_i$ . Soit  $\varphi : E \rightarrow \tilde{E}$  un isomorphisme dont la projection sur la base est l'identité. Pour tout ouvert  $U$  du recouvrement, choisissons des trivialisations de fibrés  $h_U$  et  $\tilde{h}_U$  respectivement à la source et à la cible. Nous pouvons alors écrire

$$\tilde{h}_U \circ \varphi \circ h_U^{-1}(x, v) = (x, \varphi_i(x)v)$$

où  $\varphi_i(x) \in GL_n(\mathbb{C})$ . Sur  $U_i \cap U_j, i, j \in I$ , on obtient d'une part

$$\tilde{h}_U \circ h_U^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}v)$$

et d'autre part

$$\tilde{h}_U \circ h_U^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ h_U^{-1}(x, v) = \tilde{h}_U \circ \varphi \circ h_U^{-1} \circ h_U \circ h_U^{-1}(x, v).$$

Ainsi, on a

$$g'_{ij} = \Phi_i g_{ij} \Phi_j^{-1}.$$

En particulier, si  $E = F$ , on obtient la description de toutes les fonctions de transition possibles sur un recouvrement donné.

En remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par une fibre quelconque  $F$ , on définit de même un *groupe de structure* ou *groupe structural* associé à n'importe quel fibré. On a alors qu'un fibré vectoriel a pour groupe structure  $GL_n(\mathbb{R})$ , et que l'on peut construire un fibré de groupe structural  $G$  pour tout groupe  $G$ .

On peut alors définir :

### Définition. (*G-fibré*)

Soit  $G$  un groupe. Un *G-fibré* est un fibré de groupe de structure  $G$ .

Reprendons le cours des fibrés vectoriels.

### Définition. (*Morphisme de fibrés vectoriels*)

Un *morphisme de fibrés vectoriels* est un morphisme de fibrations entre fibrés vectoriels induisant des applications linéaires sur les fibres.

### Reformulation pratique. (*Morphisme de fibrés vectoriels*)

Un *morphisme entre deux fibrés vectoriels*  $(p_1, E_1, B_1, F_1), (p_2, E_2, B_2, F_2)$  est une application continue/différentiable/lisse  $f : E_1 \rightarrow E_2$  qui envoie fibre sur fibre : on dit qu'elle *préserve les fibres*, ce qui signifie qu'il existe  $g : B_1 \rightarrow B_2$  rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

commutatif, et dont de plus la restriction à chaque fibre  $(E_1)_b = p_1^{-1}(b)$  est une application linéaire à valeurs dans  $(E_2)_{g(b)}$  pour tout  $b \in B_1$ . L'application  $g$  est encore appelée *application induite sur les bases* par  $f$  et l'on dit que  $f$  *recouvre*  $g$ .

Remarquons que pour prouver l'équivalence entre l'existence d'un tel diagramme et la préservation des fibres, c'est encore plus simple que dans le cas d'un fibré tout court, car il y a toujours une section globale, la section nulle, comme on le redira un peu plus tard.

Dans le cas plus courant où  $B_1 = B_2$ , on impose que la flèche  $g$  soit l'identité (autrement dit on remplace le carré par un triangle).

Le lemme suivant est fondamental :

### Exercice 18 (Condition suffisante pour que deux fibrés de même base soient isomorphes)

Soit  $B$  un espace topologique/une variété différentiable et soient  $\xi : E \rightarrow B, \xi' : E' \rightarrow B$  deux fibrés. On suppose qu'il existe  $f : E \rightarrow E'$  continue/lisse qui pour tout point  $b \in B$  envoie  $F_b$  sur  $F'_b$  isomorphiquement. Montrer que  $f$  est un homéomorphisme/difféomorphisme, et en particulier, que  $\xi, \xi'$  sont isomorphes par  $f$  et qu'ils ont donc le même rang.

▷ Éléments de réponse.

On fait l'hypothèse que  $f$  est continue/lisse et envoie fibre sur fibre, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} F_b \in E(\xi) & \xrightarrow{f} & E(\eta) \ni F'_b \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ B \ni b & & \end{array}$$

commute. On sait aussi déjà que  $f$  est bijective, car si  $f(x) = f(y)$  pour  $x, y \in E(\xi)$ , alors  $\pi' f(x) = \pi(x) = \pi(y) = \pi' f(y)$ , donc  $x, y \in \pi^{-1}(b)$  où  $b = \pi(x)$ . Mais  $f$  restreint à  $\pi^{-1}(b)$  est un isomorphisme, donc injective, donc  $x = y$ ; quant à la surjectivité, si  $y \in E(\eta)$ ,  $y \in F'_b$  où  $b = \pi'(y)$ , mais  $f$  envoie  $F_b$  sur  $F'_b$  par un isomorphisme, donc il existe  $x \in F_b \subseteq E(\xi)$  tel que  $f(x) = y$ . Il reste à montrer que  $f^{-1}$  est continue. On considère les trivialisations  $f, g$  :

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \pi^{-1}(U) \xrightarrow{f} \pi'^{-1}(U) \xleftarrow{h} U \times \mathbb{R}^n$$

où  $h^{-1}fg$  est continue/lisse et envoie  $(b, v) \mapsto (b, M(b)v)$  par simple calcul. La matrice de transition  $M^{-1}(b)$  existe et dépend continûment/lissemement de  $b$ , donc son inverse  $g^{-1}f^{-1}h$  est continue/lisse, puisque c'est un polynôme en les coefficients de  $M(b)$ , donc  $f^{-1}$  est continue/lisse.

Attention, il n'est valable que si l'on travaille sur deux fibrés de même base.

### Exemples. (Fibrés vectoriels)

1. Tout espace vectoriel  $V$  est un fibré vectoriel sur un point, de fibre lui-même.
2. (*Fibré trivial*) Pour tout espace  $B$ , le fibré trivial sur  $F = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  est la fibration triviale  $B \times \mathbb{R}^n$  qui est la première projection  $pr_1$ , et la structure vectorielle est donnée par

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1 x_1 + t_2 x_2)$$

(tiens, on fait les opérations fibre par fibre). On note systématiquement  $\xi = \varepsilon_B^n$  un tel fibré vectoriel.

3. Le fibré de Möbius est en fait un fibré vectoriel sous le bon formalisme, et c'est

même un fibré en droites.

On définit une action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}^2$  par  $n \cdot (x,y) = (x+n, (-1)^n y)$ . Alors cette action est continue, libre et proprement discontinûment et donne donc lieu à une variété quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  qui est un fibré sur  $S^1$  de rang 1.

4. (*Fibré tangent*) Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^p, p \in \mathbb{N}^*$ , de dimension  $n = \dim(M)$ . On appelle *fibré tangent* de  $M$  l'ensemble  $TM = \{(m,v), m \in M, v \in T_m M\} = \bigsqcup_{m \in M} T_m M$  où  $T_m M$  désigne l'*espace tangent* de  $M$  en  $m$ , constitué des vecteurs tangents à  $m \in M$  en  $M$ . Alors  $TM$  est une variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $2n$ .

A priori  $TM$  est la somme ensembliste des différents espaces vectoriels tangents à  $M$ . Pour chaque carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ , l'application  $\Phi : (x, \xi) \rightarrow (\varphi(x), d\varphi_x(\xi))$  est une bijection de  $TU$  sur  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ . Un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $M$  étant donné, on munit donc  $TM$  d'une topologie en imposant les conditions que les  $TU_i$  sont des ouverts de  $TM$  et les applications  $\Phi_i$  sont des homéomorphismes, autrement dit,  $\Omega \subset TM$  est ouvert si et seulement si  $\Phi_i(\Omega \cap TU_i)$  est pour tout  $i$  un ouvert de  $\varphi(U_i) \times \mathbb{R}^n$ . Pour voir que ces conditions sont cohérentes, on remarque que, d'après la définition même de l'espace tangent, si pour  $i, j \in I$ ,  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , l'application

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : & \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ & (y, v) \longmapsto (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y), d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_y(v)). \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, et même un difféomorphisme. On a donc défini une topologie sur  $TM$  qui en fait une variété topologique munie de l'atlas  $(TU_i, \Phi_i)_{i \in I}$ . Cet atlas étant lisse,  $TM$  est une variété lisse de dimension  $2n$  et si  $M$  est une variété  $C^p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , alors  $TM$  est une variété de classe  $C^{p-1}$  et toujours de dimension  $2n$ .

De plus, la projection  $\pi : TM \longrightarrow M, (m, v) \mapsto m$  est un fibré vectoriel de classe  $C^{p-1}$  et de rang  $n$  sur  $M$ , à savoir que  $\pi^{-1}(x) = T_x M, x \in M$  est un espace vectoriel et si  $U$  est une carte, alors  $U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$  est une localisation triviale de  $TM$ , de sorte que :  $(\pi, TM, M)$  est un  $\mathbb{R}^n$ -fibré et c'est moralement le plus simple non dégénéré que l'on peut construire sur une variété.

En effet, on considère l'atlas de  $TM$  construit à partir d'un atlas  $(U_i, \Phi_i)_{i \in I}$  de  $M$  comme précédemment avec  $\Phi_i : TU_i \xrightarrow{\sim} \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ . On prend alors naturellement pour trivialisations locales les  $(\Phi_i^{-1} \times id_{\mathbb{R}^n}) \circ \Phi_i$  qui sont telles que

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{R}^k \\ p \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U_i & & \end{array}$$

commute.

Citons dès maintenant :

**Fait.** (*Foncteur fibré tangent*)

On a un foncteur  $T$  de la catégorie des variétés lisses dans elle-même, avec :

- (i) si  $M$  est une variété lisse,  $TM$  aussi ;
- (ii) si  $f$  est une fonction lisse entre deux variétés  $M$  et  $N$ , alors  $Tf := df$  :  
 $(x,v) \mapsto (f(x), df_x(v))$  est une fonction lisse entre  $TM$  et  $TN$  ;
- (iii)  $Tid_M = id_{TM}$  ;
- (iv) si  $f \circ g$  est bien définie,  $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$  ;
- (v) si  $M$  et  $N$  sont lissement difféomorphes, alors  $TM$  et  $TN$  sont lissement difféomorphes ;
- (vi) de plus,  $T$  respecte la structure monoïdale induite par le produit : si  $M_1, M_2$  sont deux variétés lisses, alors  $T(M_1 \times M_2) = TM_1 \times TM_2$ .

5. (*Fibré cotangent*) Le fibré cotangent est construit de la même manière que le fibré tangent, en remplaçant les espaces tangents par leurs duals  $T_x M \rightsquigarrow T_x M^* := T_x^* M$  l'espace cotangent à  $M$  au point  $m$ . Puisqu'ils sont isomorphes, même si non canoniquement, cela ne change rien : on appelle *fibré tangent* de  $M$  l'ensemble  $T^* M = \{(m,v), m \in M, v \in T_m^* M\} = \bigsqcup_{m \in M} T_m^* M$ . Alors  $T^* M$  est une variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $2n$ . De plus, la projection  $\pi : T^* M \rightarrow M, (m, \varphi) \mapsto m$  est un fibré vectoriel de classe  $C^{p-1}$  et de rang  $n$  sur  $M$ .

On munit  $T^* M$  d'un atlas topologique différentiel à partir d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $M$  en posant  $\tilde{\varphi}_i(x, e) = (\varphi_i(x), {}^t d\varphi_i^{-1}(e))$ . Alors  ${}^t d\varphi_i^{-1}(e)(v) = e({}^t d\varphi_i^{-1}(v))$  d'où  $[{}^t d\varphi_i^{-1}] : T_x^* M \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$ , donc on a bien un atlas sur  $M$ . La condition de trivialisation est obtenue de la même manière que celle de  $TM$  en remplaçant les  $\Phi_i$  par nos  $\tilde{\varphi}_i$ .

Une telle construction se généralisera dans le contexte des fibrés dits duals.

Dans le cas des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , on a deux autres types de fibrés, donnés par la possibilité d'orthogonaliser les vecteurs.

6. (*Fibré normal*) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne standard. Soit  $M$  une sous-variété de dimension  $k \in \mathbb{N}$  et de classe  $C^p, p \in \mathbb{N}^*$  de  $E$ . On appelle *espace normal* à  $M$  en  $m \in M$  le sous-espace vectoriel  $N_m M$  de  $E$  donné par  $N_m M = (T_m M)^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $T_m M$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Alors si dans un voisinage  $U$  de  $m$ ,  $M$  est donnée par  $f^{-1}(\{0\})$ , où  $f = (f_1, \dots, f_{n-k}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est une submersion, on a :

$$N_m M = \text{Vect}(\nabla f_1(m), \dots, \nabla f_{n-k}(m))$$

où  $\nabla f_i(m)$  est le gradient de la fonction  $f_i$  au point  $m$ .

Avec les notations de l'énoncé, on sait que dans ce cas  $T_m M = \text{Ker}(df_m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(f_1)_m(x) =$

$\dots = d(f_{n-k})_m(x) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{n-k} \text{Ker}(d(f_k)_m)$ . Ainsi,  $N_m M = (T_m M)^\perp = \sum_{k=1}^{n-k} (\text{Ker}(d(f_k)_m))^\perp$ . Or par définition du gradient au moyen du théorème de Riesz,  $h \in \text{Ker}(d(f_k)_m) \implies h \in \nabla_m f_k^\perp = \text{Vect}(\nabla_m f_k)^\perp$ , et en dimension finie l'orthogonal est involutif sur les sous-espaces vectoriels, d'où le résultat.

On appelle *fibré normal* de  $M$  l'ensemble  $NM = \{(m,v) \in E \times E \mid m \in M, v \in N_m M\}$ . Alors  $NM$  est une sous-variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $n$  de  $E \times E$ . Soit  $(m,v) \in NM$ . On utilise la caractérisation par graphe. D'après ce qui précède, il existe  $a_1, \dots, a_{n-k} \in \mathbb{R}$  tels que  $v = a_1 \nabla(f_1)_m + \dots + a_{n-k} \nabla(f_{n-k})_m = \varphi(m)$  sur  $U$  où  $\varphi$  est de classe  $C^{k-1}$  par définition vectorielle du gradient. On a bien une décomposition linéaire  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , car  $v \in \mathbb{R}^n$ . En prenant  $V = \mathbb{R}^n$  comme ouvert, on a  $M \cap (U \times V) = \Gamma(\varphi)$ .

De plus, la projection  $p : NM \rightarrow M, (m,v) \mapsto m$  est un fibré vectoriel de classe  $C^{p-1}$  et de rang  $n - k$  sur  $M$ .

En effet, c'est d'abord une fibration, car  $p$  est un morphisme surjectif de classe  $C^\infty$  par restriction immédiate. Soit  $m \in M$ . Soit  $U$  donné comme dans ce qui précède. Alors  $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^{n-p}$  par  $\varphi$  de classe  $C^{p-1}$  donnée par  $\varphi(m, a_1, \dots, a_{n-p}) = (m, \varphi(m))$  où l'on a bien  $pr_1 \circ \varphi = p$ . C'est bien une bijection si les  $d(f_1)_m, \dots, d(f_{n-p})_m$  sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire si  $M$  est de dimension  $p$  en  $m$ , car alors les  $\nabla(f_i)_m$  forment une famille libre, et c'est un difféomorphisme, car on trouve les  $a_i$  selon une dépendance  $C^{p-1}$  de  $m$  : par les  $\nabla(f_i)_m$  au moins  $C^{p-1}$  et des projections sur eux qui sont  $C^\infty$ . (On a utilisé la définition de fibration où la fibre type dépend de l'ouvert trivialisant.) Enfin, les fibres au-dessus des  $m$  s'identifient à des espaces vectoriels (ce sont les  $\{m\} \times N_m M \simeq T_m M^\perp$ ) et les difféomorphismes de trivialisation locale induisent des isomorphismes d'espaces vectoriels (car ils définissent des applications linéaires à  $m$  fixé).

Un telle construction se généralisera dans le contexte des fibrés dits orthogonaux, dans le contexte des fibrés euclidiens.

7. (*Fibré conormal*) Par définition, le fibré conormal d'une variété différentiable est le fibré dual de son fibré normal. Autrement dit, on appelle *fibré conormal* de  $M$  l'ensemble  $N^* M = \{(m,\psi) \in E \times E \mid m \in M, \psi \in N_m^* M := N_m M^* = (T_m M)^\perp\}$ . Alors  $N^* M$  est une sous-variété de classe  $C^{p-1}$  et de dimension  $n$  de  $E \times E$ . De plus, la projection  $p : N^* M \rightarrow M, (m,\psi) \mapsto m$  est un fibré vectoriel de classe  $C^{p-1}$  et de rang  $n - k$  sur  $M$ .

→ **Notations.** On note parfois  $\tau_M$  le fibré tangent d'une variété différentielle  $M$ . On note aussi parfois  $\nu_M$  le fibré normal d'une variété différentielle.

**Exercice 19 (Fibrés en droites sur le cercle)**

Soit  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le cercle ; on dénote par  $[t]$  la classe de  $t \in \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Considérons dans  $C \times \mathbb{R}^2$  l'ensemble

$$E_n = \{([t],(x,y)) \in C \times \mathbb{R}^2 \mid y \cos(n\pi t) = x \sin(n\pi t)\}.$$

1. Montrer que  $E_n$  définit une sous-variété de  $C \times \mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que la projection  $C \times \mathbb{R}^2 \rightarrow C$  au premier facteur induit une structure de fibré vectoriel  $(E_n, \pi, C)$  sur  $C$ , de rang 1.
3. **Pour ceux qui connaissent le théorème sur les sections :** montrer que le fibré tangent de  $C$  est isomorphe au fibré trivial  $(E_0, \pi, C)$ , i.e. le cercle  $C$  est parallélisable.
4. Montrer que  $(E_n, \pi, C)$  et  $(E_m, \pi, C)$  sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels si et seulement si  $n$  et  $m$  ont même parité.

## ▷ Éléments de réponse.

1. On considère  $\overline{E_n}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par les mêmes équations que  $E_n$ . L'application  $f(t,x,y) = y \cos(n\pi t) - x \sin(n\pi t)$  est une submersion, car sa différentielle s'écrit  $-n\pi y \sin(n\pi t) - n\pi x \cos(n\pi t)$ , qui ne s'annule jamais. L'application  $pr \times id : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow C \times \mathbb{R}^2$  est un revêtement, et  $E_n = pr \times id(\overline{E_n})$  est donc une variété.
2. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on considère  $I_a = ]a, a+1[$ , et  $I'_a = I_a/\mathbb{Z}$ . On pose aussi  $x_a = \cos(n\pi a)$  et  $y_a = -\sin(n\pi a)$ . Sur la tranche  $\pi^{-1}(I'_a)$ , on considère l'application  $\Phi_a([t],(r \cos(n\pi t), r \sin(n\pi t))) = ([t], rx_a, ry_a)$ . Si on a deux intervalles qui s'intersectent, l'application induite sur les fibres est soit l'identité, soit  $-id$ , donc on obtient un bien fibré en droites.
3. Il suffit de montrer qu'il existe un champ de vecteurs jamais nul sur  $M$ . Il suffit prendre la projection du champ de vecteurs horizontal  $\partial_t$ .
4. Le fait que  $E_0$  et  $E_1$  ne sont pas isomorphes équivaut à montrer que  $E_1$  n'est pas trivial. Pour cela, il suffit de montrer que toute section globale de  $E_1$  s'annule. L'idée est de travailler sur le revêtement, au-dessus de  $[0,1]$ , et prendre une trivialisation du fibré trivial dessus. La section doit valoir une valeur positive en 0, et négative en 1, donc elle doit s'annuler quelque part. Pour montrer l'autre implication, il suffit montrer que l'isomorphisme naturel en haut entre  $\overline{E_n}$  et  $\overline{E_0}$  passe au quotient.

**Corollaire**

Il n'y a que deux fibrés en droites sur le cercle, le fibré trivial  $S^1 \times \mathbb{R}$  et le fibré de Möbius.

**Heuristique**

Un ruban tordu  $n \in 2\mathbb{Z}$  fois est homéomorphe à un ruban non tordu et un ruban tordu  $n \in 2\mathbb{Z} + 1$  fois est homéomorphe au ruban de Möbius.

**Définition. (Fibré trivialisable)**

Un fibré vectoriel est *trivialisable* s'il est isomorphe à un fibré trivial.

**Exemple. (*Le fibré tangent d'un groupe de Lie est trivialisable*)**

Soit  $G$  un groupe de Lie, par exemple  $GL_n(\mathbb{R})$  ou  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$  ou  $SL_n(\mathbb{C})$  ou  $\mathcal{O}(n), SO_n(\mathbb{R})$  ou  $U(n), SU_n(\mathbb{C})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , ou encore  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$  dont  $S^1$  pour  $n = 1$ . Alors le fibré tangent  $TG$  est trivialisable, car  $TG \xrightarrow{\sim} G \times T_e G$  via  $(g, v) \mapsto (g, g^{-1}v)$ . On a là une application continue qui, restreinte à  $\pi^{-1}(g) = \{g\} \times T_g G$  est une application différentiable qui est un difféomorphisme sur  $\{g\} \times T_e G$ , d'inverse  $(g, v) \mapsto (g, gv)$ . En effet, par axiome des groupes de Lie, cette bijection différentiable d'inverse notre fonction également différentiable, induit par inversion globale un isomorphisme  $T_e G \rightarrow T_g G$  qui est lisse.

**Définition. (*Variété parallélisable*)**

Une variété différentielle est *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable.

**Exemples. (*Variétés parallélisables*)**

1. Un ouvert de  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  est toujours parallélisable.

En effet, pour un tel ouvert  $U$ ,  $TU = U \times \mathbb{R}^n$  par définition de la tangence donc  $TU$  est trivial.

2. Le cercle est parallélisable, comme le montre bien 4.10.6.

3. Tout groupe de Lie est parallélisable.

L'argument a été donné précédemment.

4. Par contre, la sphère n'est pas parallélisable. On le verra grâce à l'outil fondamental introduit dans la section suivante.

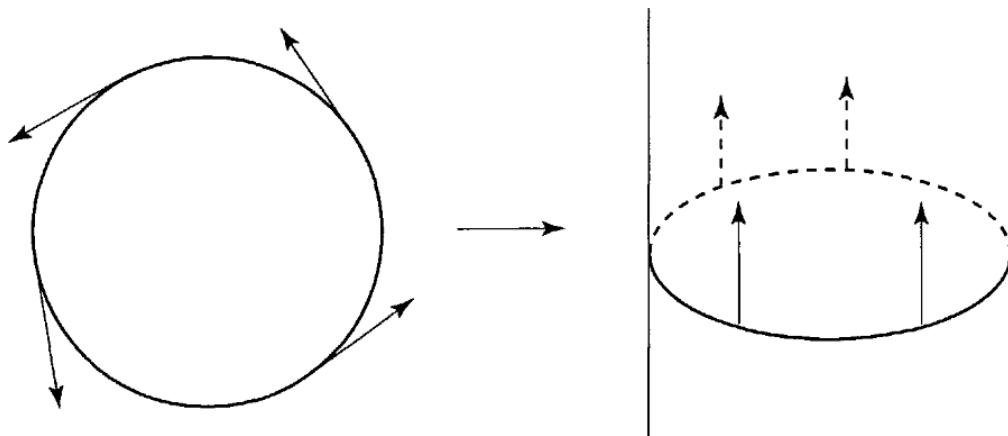


FIGURE 4.10.6 : *Le fibré tangent du cercle est parallélisable.* —

### Exemple. (Le fibré vectoriel tautologique sur l'espace projectif)



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $E = E(\gamma_n^1) = \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in [x]\}$  l'ensemble des couples  $(\{\pm x\}, v)$  tel que le vecteur  $v$  est un multiple de  $x$  et  $\Pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  la restriction de la première projection, *i.e.* l'application  $([x], v) \mapsto [x]$ . Alors  $E$  est une sous-variété de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\Pi : E \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est un fibré vectoriel en droites de fibre type  $\mathbb{R}$ , ou plus précisément chaque fibre  $\Pi^{-1}([x])$  s'identifie à la droite passant par  $x$  et  $-x$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'atlas canonique  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  donne un atlas  $U_i \times \mathbb{R}^{n+1}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$  donné par les  $\varphi_i \times id$  pour  $i$  parcourant  $I$ . On veut voir que pour tout  $i \in I$ ,  $(\varphi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  est une sous-variété. Prenons  $[y] = [y_1; \dots; y_{n+1}] \in U_i$ , avec  $y_i \neq 0$ . Alors  $\varphi_i([y]) = (\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$  sans le  $i$ -ième terme. Alors

$$(\varphi_i \times id)((U_i \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap E) = \{(z, v) \mid v_k = v_i z_k, k \leq i+1, v_k = v_i z_{k-1}, k \geq i+1\}$$

avec  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ . C'est donné par  $n$  équations, *i.e.* par une application  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Comme les différentielles de ces  $n$  équations sont linéairement indépendantes,  $F$  est une submersion et l'on a donc une sous-variété. Ainsi  $E$  est une sous-variété de dimension  $n+1$ .

Pour tout  $[x]$ ,  $\Pi^{-1}([x]) = \mathbb{R}x$  une droite vectorielle. On utilise pour système de trivialisations locales de  $E$  l'atlas canonique de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . On a pour tout  $i \in I$  une trivialisation locale sur  $\Pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}$  donnée sur  $U_i \times \mathbb{R}$  par  $([u_1; \dots; u_{i-1}; 1; u_{i+1}; \dots; u_{n+1}], t) \mapsto ([u], (tu_1, \dots, t, \dots, tu_{n+1}))$ , puisque ce difféomorphisme évident commute aux projections.

→ *Notation.* On appelle ce fibré *fibré tautologique* de  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ , ou encore *fibré en droites canoniques* sur  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ . On le note très souvent  $\gamma_n^1$ . Notons que le fibré  $\gamma_0^1$  est le  $\mathbb{R}$ -fibré trivial sur le point, *i.e.*  $\gamma_0^1 = \varepsilon_{\{\ast\}}^1$ .

L'appellation de « fibré tautologique » est standard pour des fibrés construits sous la forme

$$\{(x, v) \in B \times F \mid v \in x\}$$

et on l'utilisera peut-être sans autre forme de procès.

L'outil suivant va nous permettre de caractériser les fibrés triviaux, et d'autres choses encore.

#### 4.10.3.2 Sections d'un fibré

##### Définition. (*Section d'un fibré vectoriel*)

Une *section (globale) (croisée)*  $s$  d'un fibré quelconque  $\xi$  est une application continue/différentiable/lisse  $s : B(\xi) \rightarrow E(\xi)$  qui envoie  $b \mapsto s(b) \cong (b, s(b)) \in F_b(\xi) \cong \{b\} \times F_b(\xi)$ . Autrement dit,  $s : B \rightarrow E$  vérifie simplement  $p \circ s = id_B$ .

→ *Notation.* On note en généralement  $\Gamma(\xi)$  l'ensemble des sections d'un fibré  $\xi$ , ou pour le moins avec des notations spécifiques mais faisant intervenir un  $\Gamma$ .

**Définition.** (*Section nulle part nulle*)

Une section d'un fibré vectoriel  $\xi$  est *nulle part nulle* si  $s(b) \neq 0 \in F_b(\xi)$  pour tout  $b \in B(\xi)$ .

*Remarque.* Un fibré vectoriel a toujours des sections locales en sa qualité de fibré. Puisqu'elles sont en bijection avec les applications continues d'un ouvert trivialisant dans la fibre, il admet toujours des sections locales non identiquement nulles.

**VOC** Une section du fibré tangent est un *champ de vecteurs (tangents)*. Pour plus d'informations à ce sujet, on renvoie au cours de géométrie différentielle. Il n'est pas nécessaire de s'y connaître en champs de vecteurs pour lire ce paragraphe. D'autre part, une section du fibré normal est un *champ de vecteurs normaux/normal*.



Il est possible de considérer des sections moins lisses que la classe de lissité du fibré, par exemple, des sections  $C^1$  dans un fibré  $C^\infty$ , ou, ce qui est très courant, des sections continues dans un fibré vectoriel lisse. C'est pour cette raison qu'on accentuera parfois, **de façon non superficielle**, certaines expressions telles que *champ de vecteurs continu* pour parler d'une section continue d'un fibré différentiable.

**Remarque importante.** Tout fibré a une section globale, au moins la *section nulle* partout nulle.

**Exemple.** (*Section d'un fibré trivialisable*)

Un fibré trivial a toujours une section nulle part nulle :

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \xi \\ s(b)=(b,(1,\dots,1)) \cong (1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n & \curvearrowleft & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

$\tilde{s}=hos$

qui est constante en  $(1,\dots,1)$ . Ainsi, un fibré trivialisable, ici  $\xi \simeq \varepsilon_B^n = B \times \mathbb{R}^n$  où  $h$  est un isomorphisme de fibrés, a également une section  $\tilde{s}$  qui est également nulle part nulle.

**Corollaire.** (*Condition suffisante pour qu'un fibré soit non trivial*)

Un fibré sans section sans nulle part nulle n'est pas trivialisable, en particulier une variété sur laquelle tout champ de vecteurs s'annule en au moins un point n'est pas parallélisable.

**Corollaire**

Le fibré tautologique projectif  $\gamma_n^1$  n'est pas trivial pour tout entier  $n \geq 1$ .

▷ Soit  $s : \mathbb{P}^n \mathbb{R} \rightarrow \gamma_n^1$  une section du fibré tautologique sur  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ . Considérons la composée  $f : S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \mathbb{P}^n \xrightarrow{s} \gamma_n^1, x \mapsto (\{\pm x\}, t(x)x)$  où  $t$  est une fonction continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

$t(-x) = -t(x)$  pour tout  $x$ , puisque  $t(x)x = t(-x).(-x)$  et  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Prenons un chemin dans  $S^n$  entre  $x$  et  $-x$ , ce qui est possible, car pour  $n \geq 1$ ,  $S^n$  est connexe par arcs. Puisque  $t(x)$  et  $t(-x)$  ont des signes opposés, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x_0$  sur le chemin tel que  $t(x_0) = 0$ , donc  $s(x_0) = (x_0, 0)$  qui correspond au point nul sur la fibre, qu'on lit sur la deuxième coordonnée, dont  $s$  n'est pas nulle part nulle. ■

*Remarque.* En particulier, pour  $n = 1$ , on retrouve que le fibré de Möbius est non trivial. En effet, un point  $e = ([x], v)$  de  $E(\gamma_n^1)$  peut s'écrire  $e = (\{\pm(\cos \theta, \sin \theta)\}, t(\cos \theta, \sin \theta))$  avec  $\theta \in [0, \pi]$  et  $t \in \mathbb{R}$  et cette représentation est unique excepté aux points  $\theta = 0$  et  $\pi$  qui sont égaux en chaque  $t$  fixé, ce qui revient à identifier dans la bande  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$  le côté  $\{0\} \times \mathbb{R}$  avec  $\{\pi\} \times \mathbb{R}$  sous la correspondance  $(0, t) \mapsto (\pi, -t)$ , ce qui correspond au ruban de Möbius.

### Définition. (*Sections nulle part dépendantes*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une collection  $(s_1, \dots, s_n)$  de sections d'un fibré vectoriel  $\xi$  est *nulle part (inter)dépendante* ou plus simplement, on dit qu'elles sont *linéairement indépendantes* (ce qui pourrait être piégeux) si

$$\forall b \in B \quad s_1(b), \dots, s_n(b) \text{ sont linéairement indépendants.}$$

Autrement dit, si  $\xi$  est de rang  $n$ ,  $s_1, \dots, s_n$  sont linéairement indépendantes si et seulement si en tout point  $b$  de la base,  $(s_1(b), \dots, s_n(b))$  est une base de  $B$ .

### Théorème. (*Caractérisation des fibrés triviaux de rang fini*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un  $\mathbb{R}^n$ -fibré  $\xi$  est trivial si et seulement s'il admet  $n$  sections nulle part dépendantes.

▷ Si tel est le cas, définissons  $f: B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E$  qui est continue/-  
 $(b, x) \longmapsto x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b)$

différentiable/lisse et envoie chaque fibre de  $\varepsilon_B^n$  isomorphiquement sur la fibre correspondante de  $\xi$ . Réciproquement, si  $h: B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} E$  est un isomorphisme, les  $s_i(b) = h(b, (0, \dots, 1, \dots, 0))$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  sont nulle part interdépendantes, car  $h$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels restreint sur les fibres et les  $(0, \dots, 1, \dots, 0), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  forment une famille libre. ■

### Corollaire

Une variété différentielle  $M$  de dimension  $n$  est parallélisable si et seulement si elle admet  $n$  champs de vecteurs linéairement indépendants.

**Exemple. (*Le cercle est parallélisable*)**

On a donc une preuve que  $S^1$  est une variété parallélisable.

En effet, elle admet une section nulle part nulle et pas seulement non nulle donnée par  $s(x) = (x, v) = ((x_1, x_2), (-x_2, x_1))$ .

**Exercice 20 (Fibrés sphériques)**

1. (*Fibrés tangents des sphères euclidiennes*) Montrer que le fibré tangent  $TS^n$  est difféomorphe à la sous-variété de  $\mathbb{C}^{n+1}$  décrise par l'équation  $\sum_{j=0}^n z_j^2 = 1$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que le fibré normal de  $S^n$  est trivial.
3. Soit  $m \in \mathbb{N}$  impair. Montrer que  $S^m$  admet un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.
4. (*Non-parallélisabilité des sphères paires, théorème de la boule chevelue généralisé*) Soit  $k \geq 2$  un entier **pair**. Montrer que  $S^k$  n'est pas parallélisable.

**INDICATION** On pourra utiliser la THÉORIE DU DEGRÉ.

▷ **Éléments de réponse.**

1. On écrit  $w = x + iy$ , avec  $x = (x_0, \dots, x_n)$  et  $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .  $TS^n$  est donc donné par le lieu

$$TS^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

La sous-variété qu'on considère est

$$M = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 1, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

On note que  $M$  est l'analogue en dimension  $n$  d'un hyperbololoïde à une nappe au-dessus de  $S^n$ . On va le redresser sur le cylindre. En calculant l'inverse, on obtient l'application  $(x, y) \mapsto (x\sqrt{1+|y|^2}, y)$ , qui est un difféomorphisme de  $TS^n$  à  $M$ , comme souhaité.

2. Soit  $m \in S^n$ . Alors  $T_m S^n = \text{Vect}(x)^\perp$ , donc  $N_m S^n = \text{Vect}(x)$ . Ainsi,  $NS^n = \{(x, \lambda x), x \in S^n, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . On a un isomorphisme de  $NS^n$  sur le fibré produit  $S^n \times \mathbb{R}$  donné par  $(m, v) \mapsto (m, (m|v))$  de réciproque  $(x, \lambda) \mapsto (x, \lambda x)$ , qui sont clairement lisses.
3. En dimension impaire  $m = 2k+1$ , il existe des champs de vecteurs continus et mieux encore, analytiques, qui ne s'annulent en aucun point : pour tout vecteur  $v = (s_0, t_0, \dots, s_k, t_k)$  de  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{2(k+1)}$ , le vecteur  $X(v) := (-t_0, s_0, \dots, -t_k, s_k)$  est orthogonal à  $v$  ; donc si  $v$  est unitaire,  $X(v)$  est tangent en  $v$  à la sphère, ce qui définit bien un champ de vecteurs  $X$  sur  $S^{2k+1}$ , continu et jamais nul.
4. Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $S^{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Il suffit de montrer que  $X$  s'annule en au moins un point. On pose l'application  $f : S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto \frac{x+X(x)}{\|x+X(x)\|}$ . Par hypothèse, elle est sans point fixe : en effet, si  $\frac{x+X(x)}{\|x+X(x)\|} = x$ ,  $X(x) = [\|x+X(x)\| - 1]x$  d'où par produit scalaire à  $x$ ,  $\|x+X(x)\| = 1$ , puis  $X(x) = 0$ . Ainsi,  $f$  est homotope à  $A_n$  l'application antipodale par  $H(x, t) = \frac{tf(x)+(1-t)A(x)}{\|tf(x)+(1-t)A(x)\|}$ , qui est définie partout, car si  $tf(x) + (1-t)A(x)$ ,  $tf(x) = (1-t)x$ , d'où  $t = 1-t$  en norme puis  $f(x) = x$  ce qui est exclu. De plus,  $f \sim id_{S^n}$  par  $(x, t) \mapsto \frac{x+tX(x)}{\|x+tX(x)\|}$ , ce qui est absurde, car  $\deg(id_{S^n}) = 1$  mais  $\deg(A_n) = -1$ .

**Corollaire. (*Théorème de la boule chevelue (formulation en termes de fibrés)*)**

$S^2$  n'est pas parallélisable, i.e.  $TS^2$  n'est pas trivial. Autrement dit, il n'existe pas de couple de champs de vecteurs partout linéairement indépendants sur la sphère.

**Parallélisation et caractéristique d'Euler**

Un corollaire du théorème d'Hopf-Poincaré, démontré en **TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE DES VARIÉTÉS**, énonce que :

**Théorème**

Une variété compacte orientable admet un champ de vecteurs ne s'annulant jamais si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle.

Or il n'est pas très difficile de montrer en utilisant la dualité de Poincaré que toute variété de dimension impaire a une caractéristique d'Euler nulle, et donc qu'une variété compacte orientable de dimension  $2k+1, k \in \mathbb{N}$  admet un champ de vecteurs ne s'annulant jamais.

En particulier, sur une variété compacte orientable de caractéristique d'Euler non nulle, tous les champs de vecteurs s'annulent en au moins un point, et donc aucune famille de champs de vecteurs ne peut être nulle part interdépendante. Ainsi, **une variété compacte orientable de caractéristique d'Euler  $\neq 0$  n'est pas parallélisable**. On peut appliquer ce résultat un peu martau-pilon à l'exemple précédent, puisque  $\chi(S^2) = 2$ .

**Exemple. (*Parallélisabilité de  $S^3$* )**

$S^3$  est parallélisable.

Il suffit de trouver trois champs de vecteurs qui forment une base de  $T_p S^3$  en tout point  $p \in S^3$ . On rappelle que  $T_p S^3 = p^\perp$  pour tout  $p$ . On considère les champs de vecteurs :

$$X_1(x, y, z, w) = -y\partial_x + x\partial_y - w\partial_z + z\partial_w.$$

$$X_2(x, y, z, w) = -z\partial_x + w\partial_y + x\partial_z - y\partial_w.$$

$$X_3(x, y, z, w) = -w\partial_x - z\partial_y + y\partial_z + x\partial_w.$$

Interprétation : on utilise les formules de multiplication des quaternions, avec le champ de vecteur radial  $X_0 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w$ , qu'on multiple par  $I, J$  et  $K$ . Clairement, ces trois champs sont tangents à  $S^3$  et jamais nuls. De plus, on peut calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & z & -w & z \\ -z & w & x & -y \\ -w & -z & y & x \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\det A = & x(x^3 + xz^2 + xw^2 + xy^3) - y(-x^2y - y^3 - yz^2 - yw^2) \\ & + z(-x^2z + xw^2 + z^3 + zy^2) - w(-yw^2 - xw^2 - w^3 - wz^2) \\ & (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \neq 0.\end{aligned}$$

En particulier,  $X_1, X_2, X_3$  forment une base de  $T_p S^3$  pour tout  $p \in S^3$ , et on déduit que  $S^3$  est parallélisable.

### Astuce !

$S^3$  est difféomorphe au groupe de Lie  $SU(2)$ ... et est donc parallélisable !

#### Exercice 21 (*Orientation des fibrés*)

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . Montrer que  $M$  est orientable si et seulement si  $\Lambda^n T^* M$  est trivialisable.

▷ **Éléments de réponse.**

On sait que  $M$  est orientable si et seulement si elle admet une  $n$ -forme ne s'annulant pas, ce qui est équivalent à ce que  $\Lambda^n T^* M$ , qui est de rang 1, a une section nulle part nulle, et c'est la même chose.

Notons avant de partir :

#### Fait. (*Plongement déterminé par une section*)

Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $B$  de projection  $p$ . Alors toute section continue/lisse/différentiable  $s$  de  $p$  détermine un plongement de  $B$  dans  $E$  en tant qu'espace topologique/variété topologique/différentiable/lisse.

On rappelle qu'une section d'une surjection est toujours injective. Le seul fait non trivial est alors que  $\text{Im}(s)$  est bien une sous-variété dans le cas différentiable, ce qui est laissé au calcul différentiel.

C'est pourquoi on parlera souvent de « la section  $s$  », ce qui peut être troublant au départ, pour parler du plongement  $B \simeq \text{Im}(s) \subseteq E$ . Dans le cas de la section nulle, on notera souvent  $E_0 = \mathbb{C}_E \text{Im}(s)$ .

#### Propriété. (*Type d'homotopie d'un fibré vectoriel*)

Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Alors  $E$  se rétracte par déformation sur la section nulle. En particulier,  $E$  et  $B$  sont homotopiquement équivalents.

▷ On considère  $H: E \times [0,1] \longrightarrow E$  où  $x$  est une coordonnée locale sur la

$$(x, v, t) \longmapsto (x, (1-t)v)$$

base et  $v$  un coordonnée locale sur la fibre, expression indépendante de la trivialisation choisie, puisque la multiplication scalaire  $v \mapsto (1-t)v$  commute avec toute transformation linéaire, en particulier avec

les fonctions de transition. ■



Ce n'est pas le cas pour un fibré quelconque, la fibration de Hopf permet de s'en convaincre.

#### 4.10.3.3 Opérations sur les fibrés vectoriels

##### Principe. (*Opérations sur les fibrés*)

Les opérations sur les fibrés se font fibre par fibre.

De plus, les projections des fibrés construits s'obtiennent par la projection sur la première coordonnée et les ouverts trivialisants sont les mêmes que ceux du fibré de base.

Les constructions suivantes, énoncées dans le cadre général des fibrés topologiques, se prolongent naturellement à celui des variétés topologiques, différentiables ou lisses lorsque les constructions existent au sein de la catégorie considérée, ce qui est souvent le cas.

##### 4.10.3.3.1 Produit cartésien de fibrés

##### Définition-propriété. (*Produit direct de fibrés*)

Soient  $\pi_1 : E_1 \rightarrow B_1$  et  $\pi_2 : E_2 \rightarrow B_2$  deux fibrés vectoriels. Alors le *produit direct de fibrés*  $\pi = \pi_1 \times \pi_2 : E = E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$  est aussi un fibré vectoriel. De plus, la fibre au-dessus d'un point  $(p_1, p_2)$  est  $F_{(p_1, p_2)} = F_{p_1} \times F_{p_2}$ .

▷ Si  $U_1, U_2$  sont des ouverts de trivialisation des fibrés  $E_1$  et  $E_2$ , alors on considère  $U = U_1 \times U_2$ , et  $\pi^{-1}(U) = \pi_1^{-1}(U_1) \times \pi_2^{-1}(U_2)$ , qui est isomorphe à  $U \times \mathbb{R}^n$ . ■

##### Exercice 22

Retrouver que si  $M, M'$  sont deux variétés différentiables, alors le fibré tangent  $\tau_{M \times M'}$  est isomorphe au fibré produit  $\tau_M \times \tau_{M'}$ .

##### 4.10.3.3.2 Fibrés duals

##### Définition-propriété. (*Fibré dual*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang fini. Pour tout  $b \in B$ , soit  $F_b^* = \text{Hom}(F_b, \mathbb{R})$  l'espace dual de la fibre. Soit  $E^* := \bigsqcup_{b \in B} F_b^*$ . Alors l'application  $\pi^* : E^* \rightarrow N$  définie par  $\pi^*(B_b^*) = b$  définit sur  $E^*$  la structure de fibré vectoriel sur  $B$ , appelé *fibré dual* de  $\pi$ .

▷ Soit  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  une trivialisation de  $E$ . Alors sur  $\pi^{*-1}(U)$  on considère l'application  $\Phi^* : \pi^{*-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbb{R}^r)^*$  qui à  $v_b \in F_p^*$  associe  $(b, \ell_b)$ , où  $\ell_b$  est l'application bien linéaire

qui à  $x \in \mathbb{R}^r$  associe  $v_b(\Phi_b^{-1}(x))$ , où  $\Phi_b : F_b \rightarrow \mathbb{R}^r$  est la restriction de  $\Phi$  à  $F_b$ , composée avec la projection sur la deuxième coordonnée, et qui est linéaire puisque  $\pi$  est une fibration vectorielle. ■

*Remarque.* Le fibré cotangent est, par définition, le dual du fibré tangent de  $M$ .

#### 4.10.3.3.3 Fibrés orthogonaux

On introduira plutôt ce type de fibré dans le cadre des **FIBRÉS VECTORIELS EUCLIDIENS**.

#### 4.10.3.3.4 Pullback de fibrés

##### Définition-propriété. (*Pullback d'un fibré*)

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue/différentiable/lisse entre deux espaces, et soit  $\pi : F \rightarrow N$  un fibré vectoriel sur  $N$  noté  $\xi$ . Pour tout  $p \in M$ , on désigne  $E_p := F_{f(p)}$ , et l'on pose  $E' = \bigcup_{p \in E} E_p$ . Alors  $E'$  coïncide avec le produit fibré  $E := M \times_N F := \{(p, w) \in M \times F \mid f(p) = \pi(w)\}$  et la projection  $\pi_1 : E \rightarrow M$  définit un fibré sur  $M$ , dit *fibré pullback* ou *fibré tiré en arrière* ou bien *fibré induit (par pull-back)* de  $F$  par  $f$ , et noté  $f^*F$  ou  $f^*\xi$ , de sorte que

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\xi) & \xrightarrow{\hat{f}(b,e)=e} & F \\ \pi_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commute. On rappelle également que  $E$  est munie de la structure de la variété topologique/différentielle/lisse par pullback si  $M, N, F$  le sont.

▷ Soit  $\Phi : \pi_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  une trivialisation du fibré  $F$ . Soit  $V = f^{-1}(U)$ , et  $\Psi : \pi_1^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^r$  défini par  $\Psi(p, v) = (p, \Psi(f(p), v))$ . Alors  $\Psi$  est continue/différentiable/lisse, bijective, et la première coordonnée coïncide avec  $\pi_1$ , et il n'est pas dûr de montrer que c'est un homéomorphisme/difféomorphisme. ■

##### Exercice 23

Montrer que si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fibrés équivalents sur  $N$ , alors leur pullbacks  $f^*F_1$  et  $f^*F_2$  sont des fibrés équivalents sur  $M$ .

##### ▷ Éléments de réponse.

Soit  $g$  un isomorphisme de fibrés vectoriels sur  $N$ , c'est à dire, une application lisse  $g : F_1 \rightarrow F_2$  telle que  $\pi_2 \circ g_F = \pi_1$ . Alors  $h$  défini par  $h|_{E_p} = g|_{F_{1(f(p))}}$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre  $E_1$  et  $E_2$ .

Notons que si la base change, alors cette construction ne marche pas, sauf si  $f$  est aussi un difféomorphisme. Notons aussi  $E_1$  et  $E_2$  peuvent être isomorphes même si  $F_1$  et  $F_2$  ne le sont pas. On peut considérer par exemple  $f$  une fonction constante, ou dans  $S^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  l'application  $x \mapsto 2x$ . Dans ce dernier cas,  $f^*E_n \simeq E_{2n}$  qui sont

tous isomorphes, bien que la classe de  $E_n$  dépende de la parité de  $n$ , où  $E_n$  désigne le fibré en droites sur le cercle défini par  $E_n = \{([t],(x,y)) \in C \times \mathbb{R}^2 \mid y \cos(n\pi t) = x \sin(n\pi t)\}$ .

### Lemme

Si  $\xi$  est un fibré trivial, tout pullback de  $\xi$  est trivial.

#### 4.10.3.3.5 Restriction de fibrés

##### Définition-propriété. (*Restriction d'un fibré*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $r$  sur  $B$ , et soit  $B'$  un sous-ensemble de  $B$ . Alors  $\pi_{B'} : E_{B'} \rightarrow B'$ , où  $E_{B'} = \pi^{-1}(B')$  et  $\pi_{B'} = \pi|_{E_{B'}}$ , est un fibré vectoriel de rang  $r$  sur  $B'$ , dit *fibré restreint* de  $(E,\pi)$  à  $B'$ .

▷ Soit  $U$  un ouvert de  $B$  admettant une trivialisation  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ . Alors sur  $U \cap B'$ , on a la carte  $\pi$  restreinte à  $\pi^{-1}(U \cap B')$ . Les applications sur les fibres coïncident à celles de  $E$ , donc elles sont clairement linéaires. ■

##### Exemple. (*Fibré tangent restreint*)

Si  $M' \subseteq M$  sont deux variétés différentiables, le *fibré tangent restreint* de  $M$  à  $M'$   $TM|_{M'}$  est bien définie.

##### Fait. (*Le fibré restreint est un pullback*)

$i^* E = E_S$  où  $i : S \hookrightarrow M$  est l'inclusion naturelle.

Immédiat à partir de la définition.

#### 4.10.3.3.6 Sous-fibrés

##### Définition-propriété. (*Sous-fibré*)

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de rang  $r$  sur la variété  $M$ . S'il existe un fibré  $\pi_F : F \rightarrow M$  et un morphisme  $i : F \rightarrow E$  de fibrés sur  $M$  qui est injectif sur toute fibre, i.e.,  $i_p : F_p \rightarrow E_p$  est une application linéaire injective pour tout  $p \in M$ , on dit que  $i(F)$  est un *sous-fibré* de  $E$ , et ce fibré existe toujours.

▷ Montrons qu'il existe un système de trivialisations locales du fibré  $E$  formé de trivialisations  $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  telles que la restriction à  $i(F) \cap \pi^{-1}(U)$  est un difféomorphisme avec  $U \times (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ , où  $k$  est le rang de  $F$ .

Soient  $\Phi_E : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  une carte de  $E$ , et  $\Phi_F : \pi_F^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  une carte de  $F$ , où  $\pi_F = \pi \circ i$ . On considère les sections locales  $e_1, \dots, e_k$  de  $U \times \mathbb{R}^k$  données par les bases canoniques, et  $v_1, \dots, v_k$  les tirées en arrière de ces sections via  $\Phi_F$ . On dénote par  $w_1, \dots, w_r$  les poussées en avant

par  $i$ , et par  $u_1, \dots, u_k$  les poussées en avant par  $\Phi_E$ . Fixons un point  $p_0 \in U$ . Quitte à permuter les coordonnées de  $\mathbb{R}^r$ , on peut supposer que  $(u_1(p_0), \dots, u_k(p_0), e_{k+1}(p_0), \dots, e_r(p_0))$  forment une base de  $\mathbb{R}^r$ . Par continuité du déterminant, le même reste vrai sur tout  $p_0$ . Si on tire en arrière les sections associées à  $e_{k+1}, \dots, e_r$  par  $\Phi_E$ , on obtient  $u_{k+1}, \dots, u_r$  sections locales de  $E$  sur  $U$ . Mais alors  $(u_1, \dots, u_r)$  sont une base de sections locales linéairement indépendantes en tout point  $p \in V$ , qui définissent une trivialisation locale, avec la propriété que l'image de  $i_p(F_p)$  est  $\{p\} \times (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ . ■

### Reformulation pratique. (*Sous-fibré*)

Si  $\xi, \eta$  sont deux fibrés de base  $B$  avec  $E(\xi) \subseteq E(\eta)$ , on dit que  $\xi$  est un sous-fibré de  $\eta$  si toute fibre  $F_b(\xi)$  est un sous-espace vectoriel de  $F_b(\eta)$  pour  $b$  parcourant  $B$ .

*Remarque.* Tout fibré vectoriel réel de base compacte est sous-fibré d'un fibré trivial de rang suffisamment grand.

#### 4.10.3.3.7 Fibrés quotients

##### Définition-propriété. (*Fibré quotient*)

Soit  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de rang  $r$  sur la variété  $M$ . S'il existe un fibré  $\pi_F : F \rightarrow M$  et un morphisme  $i : F \rightarrow E$  de fibrés sur  $M$  qui est injectif sur toute fibre, i.e.,  $i_p : F_p \rightarrow E_p$  est une application linéaire injective pour tout  $p \in M$ , on dit que  $E/F := \bigcup_{p \in M} E_p/i_p(F_p)$  est un *fibré quotient* de  $E$ , et ce fibré existe toujours.

▷ On choisit un atlas formé de cartes  $(U, \Phi)$  comme dans le point précédent. Alors on définit  $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r / \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^{r-k}$  par  $\Psi(p, v) = (p, [(P_{G_2} \circ \Phi(p, v))])$ .

Notons que les applications de transition du fibré quotient ont la forme  $(p, x) \mapsto (p, M(p)(x))$  où  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ . Mais alors les applications de transition de  $\Psi$  sont données par  $(p, D(p)(y))$ , qui sont de la forme souhaitée. ■

*Remarque.* Si  $S$  est une sous-variété de  $M$ , le fibré normal de  $S$  dans  $M$  est le fibré quotient de la restriction de  $TM$  sur  $S$  par le fibré  $TS$ .

#### 4.10.3.3.8 Sommes de fibrés

##### Définition-propriété. (*Somme directe (de Whitney) de fibrés*)

Soient  $\pi_1 : E_1 \rightarrow B$  et  $\pi_2 : E_2 \rightarrow B$  deux fibrés de même base  $B$ . Leur *somme directe* ou *somme de Whitney*  $E = E_1 \oplus E_2$  est le fibré  $\Delta^*(E_1 \times E_2)$  de base  $B$  où  $E_1 \times E_2$  est le fibré produit de  $E_1$  et  $E_2$  sur  $B \times B$ , et  $\Delta$  est l'application diagonale de  $B$ . De plus, pour tout  $b \in B$ , on a  $F_b(E_1 \oplus E_2) \simeq F_b(E_1) \oplus F_b(E_2)$ .

▷ Il suffit de montrer la propriété énoncée sur les fibres. En déroulant les définitions, le fibré somme s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \Delta^*(E_1 \times E_2) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & E_1 \times E_2 \\ \pi \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_1 \times \pi_2 \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B \end{array}$$

c'est-à-dire que c'est l'ensemble des couples  $(b, (x_1, x_2))$  avec  $b \in B$  et  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  tels que  $(b, b) = (\pi_1(x_1), \pi_2(x_2))$  et la fibration est donnée par la projection  $(b, (x_1, x_2)) \mapsto b$ . Ainsi la fibre au-dessus de  $b \in B$  est l'ensemble des couples  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  tels que  $x_1 \in \pi_1^{-1}(b)$  et  $x_2 \in \pi_2^{-1}(b)$ , i.e. c'est  $\pi_1^{-1}(b) \oplus \pi_2^{-1}(b)$ .

Remarquons aussi que pour les applications de transition, ce sont les  $(p, x) \mapsto (p, M(p)(x))$ , où  $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$ . ■

### Exercice 24

Soit  $M = \mathbb{R}^n$ , et  $S$  une sous-variété de  $M$ . Montrer que la somme directe du fibré tangent  $TS$  de  $S$  et du fibré normal  $N_{M/S}$  de  $S$  dans  $M$  est isomorphe au fibré tangent  $TM$  restreint à  $S$  (c'est-à-dire, le fibré trivial).

▷ Éléments de réponse.

Le fibré normal est isomorphe au fibré orthogonal. Les applications de transition par rapport aux cartes de la forme de l'exercice précédent sont de la forme  $(p, x) \mapsto (p, M(p)(x))$ , avec  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ . Cela sont exactement les mêmes que dans le cas de la somme directe, par le point précédent.

### Lemme. (*Caractérisation de la somme de Whitney de deux sous-fibrés*)

Si  $\xi_1, \xi_2$  sont deux sous-fibrés d'un fibré  $\eta$  tels que toute fibre  $F_b(\eta), b \in B(\eta)$  est la somme directe de  $F_b(\xi)$  et  $F_b(\eta)$ , alors  $\eta \simeq \xi_1 \oplus \xi_2$ .

▷ On considère  $f(b, e_1, e_1) = e_1 + e_2$ . C'est continu et ça préserve isomorphiquement la structure d'espace vectoriel des fibres. Par le lemme fondamental, c'est un isomorphisme de fibrés. ■

Ceci pose une question naturelle : étant donné un sous-fibré d'un fibré vectoriel, est-il possible de trouver un fibré complémentaire ? C'est possible dans le cas euclidien grâce au fibré orthogonal.

#### 4.10.3.3.9 Produits tensoriels de fibrés

### Définition-propriété. (*Produit tensoriel de fibrés*)

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux espaces vectoriels de dimension finie. On rappelle que le produit tensoriel  $V_1 \otimes V_2$  peut être identifié avec l'espace vectoriel des formes bilinéaires  $b : V_1^* \times V_2^* \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient maintenant  $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$  et  $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$  deux fibrés sur la même base  $B$ . Alors  $E := E_1 \otimes E_2$  défini par  $E = \bigsqcup_{b \in B} (F_{1b} \otimes F_{2b})$  admet une structure de fibré vectoriel sur  $B$  muni de la première projection, dit *produit tensoriel* de  $E_1$  et  $E_2$ , de sorte que la fibre de  $E$  au-dessus de tout point  $b \in B$  est le produit tensoriel des fibres de  $E_1$  et  $E_2$  au-dessus de  $B$ .

▷ Si  $\Phi_j : \pi_j^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  sont cartes de fibrés pour  $j = 1, 2$ , on considère l'application  $\Phi$  qui à  $(p, b_p)$  associe  $\Phi(p, b_p) := B$  la forme bilinéaire  $B : (\mathbb{R}^r)^* \times (\mathbb{R}^r)^* \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $B(\ell_1, \ell_2) = b_p(L_1, L_2)$ , avec  $L_j = \Phi_j^*(\ell_j)$ , c'est-à-dire,  $L_j(v) = \ell_j(\Phi_j(p, v))$ . Pour comprendre ce qu'on est en train de faire ici, il vaut mieux fixer une fois pour toutes le point  $p$  au dessus duquel on prend les fibrés, et regarder ce qu'il se passe au niveau d'algèbre linéaire. Quand on fixe une trivialisation, on est en train de considérer l'application qui à un vecteur  $v \in V$  associe ses coordonnées  $x = (x^j)$  dans une base  $\mathcal{B} = (e_j)_j$ . On a alors  $v = x^j e_j$ , où les indices en haut sont de ligne, et en bas de colonne. En particulier  $x$  est un vecteur colonne. Si on a une deuxième carte  $\mathcal{C} = (f_j)_j$ , alors on peut écrire  $v = y^j f_j$ .

- On peut écrire  $f_j = p_j^i e_i$ , où  $P$  est la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(id)$ , c'est-à-dire la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  où l'on utilise la convention d'Einstein.
- On remarque alors que  $v = x^i e_i = y^j f_j = y^j p_j^i e_i$ , d'où  $x^i = p_j^i y^j$ , ou autrement dit  $x = Py$ .
- Dans  $E^*$  le dual de  $E$ , on a les bases duales  $\mathcal{B}^* = (e^i)$  et  $\mathcal{C}^\vee = (f^j)$ , qui ont la propriété que  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ . Alors  $e^i(f_j) = e^i(p_j^k e_k) = p_j^k e^i(e_k) = p_j^i$ . On en déduit que  $e^i = p_j^i f^j$ .
- On peut écrire un élément  $\varphi \in E^*$  en coordonnées comme  $\varphi = \ell_i e^i = m_j f^j$ . On obtient alors  $m_j = \varphi(f_j) = \ell_i e^i f_j = \ell_i p_j^k f^k(f_j) = \ell_i p_j^i \delta_j^k$ , d'où  $m = \ell P$ . Attention que  $\ell$  et  $m$  sont des vecteurs ligne dans ce cas.
- Soit enfin  $b : E_1^* \times E_2^* \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire. A priori les deux espaces  $E_1$  et  $E_2$  sont différents, mais on utilise les mêmes notations par manque de lettres...  $b$  peut être écrite en coordonnées comme  $b = b^{ij} e_i \times e_j = c^{hk} f_h \otimes f_k$ , où le produit tensoriel de deux vecteurs  $v_1, v_2$  (vus comme applications linéaires de  $E_n^* \rightarrow \mathbb{R}$ , quitte à isomorphisme canonique de  $E_n$  avec son bidual,  $n = 1, 2$ ) est défini comme  $v_1 \otimes v_2(\ell^1, \ell^2) = v_1(\ell^1)v_2(\ell^2) = \ell^1(v_1)\ell^2(v_2)$  (le dernier passage est dû à l'isomorphisme canonique, omis dans les notations). On a alors que

$$b^{ij} = b(e^i, e^j) = b(p_h^i f^h, p_k^j f^k) = p_h^i p_k^j b(f^h, f^k) = p_h^i p_k^j c^{hk}.$$

Ainsi le fibré tenseur existe. ■

*Remarque.* Dans le cas des fibrés tensoriels, l'application de transition d'une carte  $\Phi_1$  à une autre  $\Phi_2$  agit comme une application linéaire associée à une matrice (inverse)  $M(p)$  dont les coefficients varient de façon  $C^\infty$  au varié de  $p$ . Par le deuxième point ci-dessus, on a que  $M = P^{-1}$ . Si on dénote par  $M_1 = P_1^{-1} = (m_i^h)$  et  $M_2 = P_2^{-1} = (n_j^k)$  les deux matrices associées à  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , alors l'application linéaire qui correspond à  $\Phi$  est décrite par le dernier point ci-dessus. Si on veut écrire de façon matricielle, on ordonne les coordonnées  $(b^{ij})$  en ordre lexicographique :

$(b^{11}, b^{12}, \dots, b^{1r_2}, b^{21}, \dots, b^{2r_2}, \dots, b^{r_11}, \dots, b^{r_1r_2})$ , et de façon analogue pour  $(c^{hk})$ . Alors  $c^{hk} = m_h^i n_k^j b^{ij}$ . La matrice  $(a^{hk;ij})$  ainsi décrite est dite le produit de Kronecker de  $M_1$  et  $M_2$ , noté  $M_1 \otimes M_2$ . Il est bien linéaire, d'inverse la chose analogue associée à  $P_1$  et  $P_2$  à la place de  $M_1$  et  $M_2$ , et varie de façon  $C^\infty$  car tout coefficient est le produit de deux fonctions  $C^\infty$ .

### Exercice 25

Comparer la somme directe, le produit direct et le produit tenseur de deux fibrés vectoriels.

▷ Éléments de réponse.

Concernant la dimension des fibres de dimension respectives  $r_1$  et  $r_2$ , la somme directe et le produit directe ont dimension  $r_1 + r_2$ , et le produit tenseur  $r_1 r_2$ . Le produit direct est un fibré sur  $B \times B$ , bien que les autres deux sont sur  $M$ .

### Exercice 26

Montrer que le produit tenseur d'un fibré et de son dual admet toujours une section non nulle. En déduire que, si  $E$  est un fibré en droites sur  $M$ , alors  $E \otimes E^*$  est isomorphe au fibré trivial.

▷ Éléments de réponse.

Dans ce cas on a comme fibre en  $p$  l'espace des applications bilinéaires  $E_p^* \times E_p^\vee \rightarrow \mathbb{R}$ . Or  $E_p^\vee$  est canoniquement isomorphe à  $E_p$ , donc on peut travailler avec les applications bilinéaires  $E_p^* \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$ . La section qu'on considère est l'application  $b(\ell, v) = \ell(v)$ . Clairement elle est non-nulle : on fixe une base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $E_p$ , et on considère la base duale  $(e^1, \dots, e^r)$  de  $E_p^*$ . Alors  $b(e^i, e_j) = 1$  si  $i = j$ , donc  $b \neq 0$ . Il reste à vérifier que cette section est lisse. Cela est donné par le fait qu'une fois qu'on a fixé ces bases, et par force des trivialisations locales, on a  $b$  est représentée par  $b^{ij} = b(\ell_i e^i, x_j e_j) = \ell_i x_j e^i(x_j) = \ell_i x^j$ . En coordonnées, le tenseur  $b$  est représenté par  $b^{ij} = \delta_j^i$  le delta de Kronecker qui est bien  $C^\infty$  dans ces cartes. Si  $r_1 = r_2 = 1$ , alors  $r = r_1 r_2 = 1$ , et avoir une section non-nulle équivaut à être le fibré trivial.

### Exemples. (*D'autres fibrés différentiels*)

1. (*Fibré double dual*) Étant donnés deux fibrés vectoriels  $E_1, E_2$  de même base  $B$  et d'espaces totaux des espaces vectoriels, l'espace vectoriel des applications linéaires  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  est muni d'une structure de fibré vectoriel où chaque fibre sur  $b \in B$  est donnée par  $\text{Hom}(F_b(E_1), F_b(E_2))$ .

Si  $E_2 = \mathbb{R}$ , on le retrouve le fibré dual déjà construit précédemment.

2. (*Fibré alterné = fibré puissance extérieure*) Étant donné un fibré vectoriel  $E$  qui est un espace vectoriel, le *fibré alterné* ou *fibré puissance extérieure*  $\Lambda^k E = A^k E$  à l'ordre  $k \in \mathbb{N}$  est l'espace des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $E$  où chaque fibre est

l'espace des formes  $k$ -linéaires alternées sur les fibres.

3. (*Fibré puissance symétrique*) Étant donné un fibré vectoriel  $E$  qui est un espace vectoriel, le *fibré  $k$ -ième puissance symétrique*  $\text{Sym}^k E$ ,  $k$  un entier naturel, est construit de même, à savoir que c'est l'espace des formes  $k$ -linéaires symétriques sur  $E$  où chaque fibre est l'espace des formes  $k$ -linéaires symétriques sur les fibres.

### Définition. (*Tenseurs*)

Soient  $r, s \in \mathbb{N}$ . Soit  $M$  une variété différentielle. On note  $E = TM$  et  $E^* = T^*M$ . Le *fibré (des) tenseur(s) de type  $(r,s)$*  est le fibré noté

$$T_s^r E := \bigotimes^r E \otimes \bigotimes^s E^*.$$

Une section lisse de  $T_s^r E$  est un *tenseur  $s$ -covariant  $r$ -contravariant* sur  $E$ . On note  $\Gamma_s^r$  leur ensemble.

Par exemple :

- ★ les éléments de  $\Gamma_0^0$ , *i.e.* les sections du fibré trivial, sont les *fonctions lisses* ;
- ★ les éléments de  $\Gamma_0^1$  sont les champs de vecteurs, *i.e.* les sections lisses du fibré tangent ;
- ★ les éléments de  $\Gamma_1^0$  sont les *formes différentielles*, *i.e.* les sections lisses du fibré cotangent ;
- ★ les éléments de  $\Lambda^k(T^*M) \subseteq \Gamma_k^0$  sont les  *$k$ -formes différentielles* pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé ;
- ★ les éléments de  $\Gamma_2^0$  sont les *métriques*, *i.e.* les sections lisses du fibré des *métriques*  $T^*M \times T^*M$ . Celles qui sont symétriques et définies positives sont les *métriques riemannianes*.

### Exercice 27 (*Applications de transition des constructions fibrées*)

Dans chacun des exemples des contructions de fibrés des paragraphes précédents, décrire les applications de transition sur le nouveau fibré à partir des applications de transition des anciens.

#### 4.10.3.3.10 Foncteurs continus sur les catégories de fibrés

### Définition. (*Foncteur continu*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un *foncteur continu* est un foncteur  $T : \underbrace{\theta \times \dots \times \theta}_{n \text{ fois}} \rightarrow \theta$  où  $\theta$  est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie dont les morphismes sont les **isomorphismes** d'espaces vectoriels, et qui dépende continûment en ses  $n$  variables, ce qui fait sens, puisque l'ensemble des isomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vers un autre est muni d'une topologie naturelle.

### Exemples. (*Foncteurs continus*)

1. Le foncteur tangent induit un foncteur continu  $\theta \rightarrow \theta$  grâce au théorème d'inversion locale et un autre  $\theta \times \theta \rightarrow \theta$  grâce au fibré tangent d'un produit de variétés.
2. D'autres exemples seront étudiés après le théorème suivant.

### Théorème. (*Fibré induit par un foncteur continu*)

Si  $T$  est un foncteur continu en  $n$  variables, si  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sont des fibrés vectoriels de base  $B$ , un nouveau fibré sur  $B$  est construit en posant  $E = \bigcup_{b \in B} T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_n))$ ,  $\pi$  la projection sur la première coordonnée en  $B$  et la fibre sur  $b \in B$  est alors  $T(F_b(\xi_1), \dots, F_b(\xi_n))$ .

▷ Il faut en fait munir  $E$  d'une topologie, et même d'une structure de variété topologique, différentiable ou lisse si l'on se place dans ce cadre, cas que nous laisserons au lecteur, puisqu'il suit par retranscription<sup>1</sup>. Prenons  $(U_1, h_1), \dots, (U_k, h_k)$  des trivialisations locales pour  $\xi_1, \dots, \xi_k$ . Pour tout  $b \in U$ , on définit  $h_{i,b} : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \Gamma_b(\xi_i)$  donnée par  $h_{i,n}(x) = h_i(b, x), i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors on a un isomorphisme  $T(h_{1,b}, \dots, h_{k,b}) : T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow F_b$ . La correspondance  $(b, x) \mapsto T(h_{1,b}, \dots, h_{k,b})(x)$  définit une correspondance bijective  $h : U \rightarrow T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \rightarrow \pi^{-1}(U)$ . On utilise la topologie induite par la condition que  $\pi^{-1}(U)$  soit ouvert pour tout ouvert  $U$  et  $h$  soit un homéomorphisme.  $U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k}) \xrightarrow{h_1} \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) \xleftarrow{h_2} U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k})$  et  $h_1 \circ h_2^{-1} : U_1 \cap U_2 \times T(\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_k})$  doit être continue, ce qui suit. ■

### Application. (*Fibrés induits par des foncteurs continus*)

1. Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre variétés. Alors  $\text{Hom}(\tau_M, f^*\tau_N)$  est un fibré vectoriel lisse sur  $M$ . De plus,  $df$  est une section lisse de ce fibré.
2. Si  $M \subseteq N$  est une sous-variété d'une variété riemannienne dont on note  $\nu$  le fibré normal, la seconde forme fondamentale est une section symétrique lisse de  $\text{Hom}(\tau_M \otimes \tau_N, \nu)$ .

#### 4.10.3.4 Constructions classiques de fibrés

On construira principalement des fibrés en TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS. Mentionnons que la variété grassmannienne permettra de définir un fibré universel, noté  $\gamma_n$ .

---

<sup>1</sup> Cependant, on indique qu'il y a un point à ne pas manquer : il faut utiliser le fait qu'un isomorphisme  $T(f_1, \dots, f_k)$  est lisse si  $f_1, \dots, f_k$  le sont, ce qui n'est pas trivial.

#### 4.10.3.5 Applications fibrées

##### Définition. (*Application fibrée*)

Une *application fibrée* entre deux fibrés  $\eta$  et  $\xi$  est une application continue/différentiable/lisse  $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$  qui envoie chaque fibre  $F_b(\xi)$  isomorphiquement sur un  $F_{b'}(\xi)$  pour tout point  $b$  de la base et un certain  $b'(b) \in B(\xi)$ .

*Remarque.* Tout isomorphisme de fibrés est une application fibrée. Réciproquement :

##### Proposition

Une application fibrée entre deux fibrés de même base est un homéomorphisme/difféomorphisme, et donc un isomorphisme de fibrés.

▷ On l'a montré en exercice, mais attention, c'est seulement ce cas particulier où les bases sont identiques que l'on a vu et qui tient. En général, une application fibrée est un objet plus faible qu'un isomorphisme de fibrés. ■

##### Fait. (*Application fibrée induite (sur les bases)*)

Une application fibrée induit une application continue/différentiable/lisse sur les bases

$$\begin{aligned}\bar{g} : B(\eta) &\longrightarrow B(\xi) \\ b &\longmapsto b'.\end{aligned}$$

Une application fibrée est en particulier un morphisme de fibrés, de bases a priori distinctes, et donc induit une application sur les bases comme tout morphisme, et on a démontré grâce aux sections locales dans le cas des fibrés qu'elle avait la même lissité que  $g$ .

##### Lemme. (*On peut retrouver les fibrés grâce à une application fibrée*)

Si  $g : E(\eta) \rightarrow E(\xi)$  est une application fibrée entre les espaces totaux de deux fibrés et  $\bar{g}$  est l'application induite par  $g$  correspondante sur les espaces de base, alors  $\eta \simeq \bar{g}^*\xi$ .

En particulier, on retrouve la proposition précédente puisqu'alors  $g = id_B$ .

▷ On considère  $h : E(\eta) \longrightarrow E(\bar{g}^*\xi)$  où  $\pi$  est la projection du fibré  $\eta$ . Sur chaque

$$e \longmapsto (\pi(e), g(e))$$

fibre  $F_b(\eta) = \pi^{-1}(b)$ , on a  $h(F_b(\eta)) = (b, g(F_b(\eta))) = (b, F_{\bar{g}(b)}(\xi))$  donc l'application continue/différentiable/lisse  $h$  envoie chaque fibre isomorphiquement sur une autre,  $\eta$  and  $\bar{g}^*\xi$  sont isomorphes par la proposition rappelée. ■

#### 4.10.3.6 Fibrés euclidiens

##### Définition. (*Fibré vectoriel euclidien*)

Un *fibré vectoriel euclidien* est un fibré vectoriel réel  $\xi$  muni d'une fonction continue/différentiable/lisse  $\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$  qui induit sur chaque fibre la structure d'espace vectoriel euclidien, à savoir qu'elle y est quadratique, *i.e.*  $\mu = \sum_i l_i l'_i$  où les  $l_i, l'_i$  sont linéaires et définie positive, *i.e.*  $\mu(v) > 0$  dès que  $v \neq 0$ .

La fonction  $\mu$  et alors appelée *métrique euclidienne* sur  $\xi$  est si  $\xi = \tau_M$  où  $M$  est différentiable, on l'appelle *métrique riemannienne* et le couple  $(M, \mu)$  est une variété riemannienne.

##### Remarques.

1. Ceci définit un produit interne bilinéaire et symétrique

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w))$$

à l'intérieur de chaque fibre  $\exists v, w$  qui varie de plus continûment/lissemement avec le point base.

2.  $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$  a la métrique standard  $ds^2(n, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$  sur  $\varepsilon_B^n$  pour tout base  $B$  qui puisque le fibré tangent de  $\mathbb{R}^n$  est trivial donne une métrique riemannienne standard. Elle se restreint alors à une métrique sur toute sous-variété  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ .
3. Dans le cas d'un fibré vectoriel euclidien de rang  $n$ , le groupe de structure  $GL_n(\mathbb{R})$  se restreint à  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

##### Fait

Sur un fibré vectoriel réel sur une base paracompacte, on peut définir une métrique euclidienne.

Ceci grâce à une partition de l'unité.

On aurait a priori deux concepts de trivialisation d'un fibré vectoriel euclidien, en prenant en compte la métrique ou non, *i.e.*, un fibré vectoreil euclidien de rang  $n$  serait trivialisable au sens euclidien si l'on pouvait trouver  $n$  sections indépendantes deux à deux orthogonales et normées. En fait, qu'on le veuille ou non, la trivialisation euclidienne est automatique :

**Lemme**

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel trivial de dimension  $n$  sur  $B$  et soit  $\mu$  une métrique euclidienne sur  $\xi$ . Alors il existe  $n$  sections  $s_1, \dots, s_n$  orthonormales au sens que

$$s_i(b) \cdot s_j(b) = \delta_i^j$$

pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et pour tout  $b \in B$ , et donc  $\xi$  est un fibré vectoriel euclidien trivial en tant que fibré euclidien.

▷ Soient  $s'_1, \dots, s'_n$   $n$  sections nulle part dépendantes. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, qui est lisse, en chaque point  $b \in B$  à  $(s'_1(b), \dots, s'_n(b))$ , on obtient une base orthonormale de  $F_b(\xi)$  et les fonctions  $s_1, \dots, s_n$  que l'on en déduit sont bien lisses par la remarque. ■

**Définition-propriété. (*Fibré orthogonal, cas de  $\mathbb{R}^r$* )**

Soit  $F$  un sous-fibré du fibré trivial  $B \times \mathbb{R}^r$  de rang  $r$  sur une base  $B$ . Pour tout  $b \in B$ , on considère  $G_b = F_b^\perp$  l'orthogonal de la fibre  $F_b$  sur  $b$  dans  $\mathbb{R}^r$  par rapport au produit scalaire standard. Soit  $G = \bigcup_{b \in B} G_b$ , et  $\pi : G \rightarrow B$  la projection qui envoie  $G_b$  en  $b$ . Alors  $(\pi, G, B)$  admet une structure de fibré, dit *fibré orthogonal* de  $F$ , et noté  $F^\perp$ .

▷ Comme dans le cas des sous-fibrés et des fibrés quotients, on peut considérer les sections  $w_1, \dots, w_k$  qui engendrent localement  $i(F_p)$  pour tout  $p \in U$  ouvert suffisamment petit. On fixe  $p_0 \in U$  et on complète  $(w_1(p_0), \dots, w_k(p_0))$  à une base  $(w_1(p_0), \dots, w_r(p_0))$  de  $\mathbb{R}^r$ . Par processus de Gram-Schmidt, on peut trouver une base orthonormée  $(u_1(p_0), \dots, u_r(p_0))$ , telle que  $F_{p_0}$  est l'espace vectoriel engendré par les premiers  $k$  vecteurs, et  $G_{p_0}$  par les autres  $r - k$ . Par continuité des formules qui définissent l'algorithme de Gram-Schmidt, la même propriété est vérifiée en un petit voisinage  $U'$  de  $p_0$ . Les sections ainsi définies donnent une carte du fibré trivial telle que l'image de  $F_p$  est  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ , et celle de  $G_p$  est  $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-k}$ . Par invariance de ces deux sous-espaces vectoriels, les applications de transition ont la forme  $(p, x) \mapsto (p, M(p)(x))$  où  $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ . Alors pour  $G$  on peut considérer  $\Phi|_G$ , composé avec la projection sur les dernières  $r - k$  coordonnées, et dans ce cas les applications de transition ont la forme  $(p, y) \mapsto (p, D(p)y)$ , qui sont de la forme souhaitée. ■

**Exercice 28 (Théorème du supplémentaire orthogonal pour les fibrés, cas facile)**

Soit  $F$  un sous-fibré du fibré trivial  $B \times \mathbb{R}^r$  de rang  $r$  sur une base  $B$ . Alors  $F^\perp$  est isomorphe au fibré quotient de  $B \times \mathbb{R}^r$  par  $F$ .

▷ **Éléments de réponse.**

on remarque que les mêmes applications de transition, et donc ils définissent deux fibrés isomorphes. Le morphisme de fibrés qu'on considère explicitement envoie chaque point de  $G_b$  dans sa classe en  $\mathbb{R}^r/F_b$ . Dans les

cartes cette application agit comme l'identité.

Passons au cas général.

### Définition-propriété. (*Orthogonal d'un sous-fibré d'un fibré euclidien*)

Si  $\xi \subseteq \eta$  est un sous-fibré d'un fibré euclidien sur  $B$ , alors on définit le *fibré supplémentaire orthogonal*  $\chi^\perp \subseteq \eta$  dont l'espace total est la réunion disjointe des  $F_b(\xi)^\perp \subseteq F_b(\eta)$  pour  $b \in B$  où l'orthogonal est défini par la métrique de  $\eta$ . C'est un fibré.

▷ Le seul problème de ce paragraphe est de prouver que  $\xi^\perp$  satisfait la condition de trivialité locale. Étant donné un point  $b_0 \in B$ , soit  $U$  un voisinage de  $b_0$  suffisamment petit pour que  $\xi|_U$  et  $\eta|_U$  soient triviaux. Soient  $s_1, \dots, s_m$  des sections orthonormales de  $\xi|_U$  et soient  $s'_1, \dots, s'_n$  des sections orthonormales de  $\eta|_U$  où  $m$  et  $n$  sont les dimensions respectives des fibres. Ainsi, la matrice  $(s_i(b_0) \cdot s'_j(b_0))_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$  est de rang  $m$ . En réordonnant les  $s'_j$  si nécessaire, nous pouvons supposer que les  $m$  premières colonnes sont linéairement indépendantes. Soit  $V \subseteq U$  l'ensemble ouvert des points  $b$  pour lesquels les  $m$  premières colonnes de la matrice  $(s_i(b) \cdot s'_j(b))$  sont linéairement indépendantes. Les  $n$  sections  $s_1, s_2, \dots, s_m, s'_{m+1}, \dots, s'_n$  de  $\eta|_U$  ne sont linéairement dépendantes en aucun point de  $V$ . En effet, une relation linéaire impliquerait qu'une combinaison linéaire non nulle de  $s_1(b), \dots, s_m(b)$  serait également une combinaison linéaire de  $s'_{m+1}(b), \dots, s'_n(b)$ , donc orthogonale à  $s'_1(b), \dots, s'_m(b)$ . En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à cette séquence de sections transversales, nous obtenons des sections orthonormales  $s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n$  de  $\eta|_V$ . À présent, un système de coordonnées locales  $h : V \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow E(\xi^\perp)$  pour  $\xi^\perp$ , est donné par la formule  $h(b, x) = x_1 s_{m+1}(b) + \dots + x_{n-m} s_n(b)$ . L'identité  $h^{-1}(e) = (\pi e, (e \cdot s_{m+1}(\pi e), \dots, e \cdot s_n(\pi e)))$  montre que  $h$  est un homéomorphisme. ■

### Théorème. (*Théorème du supplémentaire orthogonal pour les fibrés*)

Soit  $\xi \subseteq \eta$  un sous-fibré d'un fibré euclidien. Alors  $\chi \oplus \chi^\perp \simeq \eta$ .

▷ Chaque  $F_b(\eta), b \in B$  la base de  $\eta$  est la somme directe des  $F_b(\xi)$  et  $F_b(\xi^\perp)$  par le théorème du supplémentaire orthogonal classique, d'où le résultat directement. ■

### Exemple. (*Fibré normal, cas général*)

Si  $M \subseteq N$  sont des variétés lisses et  $N$  est riemannienne, alors  $TM$  est un sous-fibré de la restriction  $TN|_M$ . Le *fibré normal* de  $M$  dans  $N$  est alors  $(TM)^\perp = \nu$  et  $TN|_M \simeq TM \oplus \nu$ .

### Définition-propriété. (*Fibré normal d'une immersion*)

Pour toute immersion  $f : M \rightarrow N$  entre variétés lisses où  $N$  est riemannienne, il existe une décomposition en somme de Whitney  $f^*TN \simeq TM \oplus \nu_f$  et  $\nu_f$  est appelée le *fibré normal de l'immersion*  $f$  et ses fibres sont les complémentaires orthogonaux des  $df_x(T_x M)$ .

pour  $x \in M$ .

### Proposition. (*Dualité des fibrés vectoriels*)

Si  $\xi$  est euclidien de base  $B$ , en particulier, si  $\xi$  est un fibré de base paracompacte, alors  $\xi$  est isomorphe à son fibré dual par  $\xi \simeq \xi^* = \text{Hom}(\xi, \mathbb{R}) = \text{Hom}(\xi, \varepsilon_B^1)$ .

▷ Notons  $m_b$  la métrique du fibré. Alors  $\xi_b \ni (b, v) = (b, m_b(v, \cdot)) \in \xi_b^*$  d'où  $\xi_b \simeq \xi_b^*$ . ■



Ce n'est pas le cas pour les fibrés vectoriels complexes !

### Contre-exemple. (*Fibré complexe non isomorphe à son dual*)

Considérons la situation

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & & g^*(E(\xi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xleftarrow{g} & B \end{array}$$

où  $g$  est différentiable. Alors en général  $g^*\xi$  n'est pas isomorphe à  $\xi$ . Contre-exemple : on prend le cylindre qui est un fibré sur tore, et considérons  $g$  qui échange les deux cercles génératrices du tore.

C'est un exercice très formateur. □

#### 4.10.3.7 Fibrés complexes

### Définition. (*Fibré vectoriel complexe*)

Un fibré (vectoriel) complexe (holomorphe) est une fibration  $(p, E, B, F)$  telle que  $F$  et les fibres  $F_b := p^{-1}(b), b \in B$  sont toutes des espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$  et les applications de trivialisation locale induisent des isomorphismes de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels entre les  $F_b$  et  $F$ , autrement induisent des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires.

Le *rang* du fibré vectoriel complexe est la dimension sur  $\mathbb{C}$  de  $F$ . Un fibré complexe de rang  $n$  est aussi appelé  $\mathbb{C}^n$ -fibré<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> Sans problème de nouveau, car seul le type d'homéomorphie de la fibre importe.

### Remarques.

- On voit que si  $\xi$  est un fibré vectoriel complexe de base  $B$  et de rang  $n$ , c'est un *fibré vectoriel réel sous-jacent* de base  $B$  et de rang  $2n$ .  
Un fibré vectoriel complexe est toujours canoniquement orienté.
- Réiproquement, si  $E$  est un fibré vectoriel réel de base  $B$  et de rang pair  $2k, k \in \mathbb{N}$ , il existe une *structure complexe*  $J : E \rightarrow E$ , i.e. une application  $\mathbb{R}$ -linéaire sur chaque

fibre satisfaisant  $J \circ J : v \mapsto -v$  pour tout  $v \in E^1$  et  $E$  est alors munie d'une structure de fibré vectoriel complexe sur  $B$  de rang  $n$  en posant<sup>2</sup>  $(a + ib) \cdot v = av + \underbrace{J(bv)}_{= bJ(v)}$  sur chaque fibre, qui devient alors un espace vectoriel complexe.

On laisse en exercice de vérifier la condition de trivialisation locale, qui est assez immédiate.

Pour toute structure complexe  $J$  sur un fibré  $\xi$ , l'application  $-J$  définit une autre structure complexe sur  $\xi$ , que l'on note alors  $\bar{\xi}$  ou  $-\xi$  et que l'on appelle *fibré (d'orientation) opposé*.

Une variété complexe est alors une variété munie d'une structure complexe  $J$  sur son fibré tangent vérifiant la condition restrictive de cartes locales holomorphe, sachant que  $\mathbb{C}^n$  est muni d'une structure complexe canonique  $J_0(u,v) = (u,iv)$ , et une fonction lisse  $f : M \rightarrow N$  entre variétés complexes est holomorphe si  $df \circ J = J \circ df$  en faisant quelques notations assez courantes.

3. On rappelle (vraiment ?) qu'une métrique hermitienne sur un fibré vectoriel complexe  $E$  est une métrique euclidienne sur  $E$  en tant que fibré vectoriel réel, tel que  $|v| = |i.v|$  pour tout  $v$ . Cela définit encore un produit interne  $\langle u, v \rangle$  sur les fibrés, sesquelinéaire et hermitien, où par définition  $u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0$ .
4. Pour  $L \leqslant E$  un sous-fibré complexe d'un fibré complexe et donnée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  une métrique hermitienne sur  $E$ , on définit de même que dans le cas euclidien le *fibré orthogonal complexe*  $L^\perp$  qui est de sorte que  $L \oplus L^\perp \simeq E$ .

### Définition. (*Fibré complexifié*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Étant donné un fibré en  $n$ -plans réel  $\xi$ , on définit un fibré en  $n$ -plans complexe en considérant  $\xi \otimes \mathbb{C}$ , appelé *complexification* ou *complexifié* de  $\xi$ .

#### Fait

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel complexe. En temps que fibrés réels sous-jacents, on a  $\xi \otimes \mathbb{C} \simeq \xi \oplus \bar{\xi}$  muni de la structure complexe canonique  $(x,y) \mapsto (-y,x)$ .

C'est sans mystère.

#### Lemme

Tout fibré complexifié est isomorphe à son fibré opposé.

<sup>1</sup> Ce qui heuristiquement correspond à  $J^2 = -id$ , i.e.  $J$  doit être interprété comme la multiplication scalaire par  $i$

<sup>2</sup> Ce qui s'écrit matriciellement pour  $v = (x,y) : (a+ib) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

▷ On a

$$\begin{array}{ccc} \xi \otimes \mathbb{C} & \simeq & \overline{\xi \otimes \mathbb{C}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \xi \oplus \xi & \xrightarrow{\quad} & \xi \oplus \xi \end{array}$$

$$(x,y) \xmapsto{J_1} (-y,x) \quad (x,y) \xmapsto{J_2} (y,-x).$$

Il suffit donc de considérer  $f : x + iy \mapsto x - iy$  de  $E$  dans lui-même, qui vérifie sur les fibres  $f(i(x + iy)) = -if(x + iy)$ . Moins directement,  $\overline{\xi \oplus \bar{\xi}} \simeq \bar{\xi} \oplus \bar{\bar{\xi}} \simeq \bar{\xi} \oplus \xi \simeq \xi \oplus \bar{\xi}$ . ■

*Remarque.* Si  $J$  est une structure complexe sur un fibré  $E$ , alors sur  $E \oplus E$ ,  $(x,y) \mapsto (\frac{1}{2}(x+Jy), \frac{1}{2}(x-Jy))$  et  $(-y,x) \mapsto (\frac{1}{2}(-y+Jx), \frac{1}{2}(-y-Jx)) = (J(\frac{1}{2}(x+Jy)), -J(\frac{1}{2}(x-Jy)))$ .

### Définition. (*Structure presque complexe*)

On dit qu'une variété différentielle réelle a une structure *presque complexe* si son fibré tangent a une structure complexe et cette structure est celle-ci.

### Exercice 29 (*Exemples de sections holomorphes d'un fibré complexe*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\gamma_n^1$  le fibré complexe tautologique de base  $\mathbb{CP}^n$ .

1. Montrer que  $\gamma_n^1$  n'a pas d'autre section holomorphe que la section nulle.
2. Montrer que le fibré dual  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_n^1, \mathbb{C})$  a au moins  $n + 1$  sections holomorphes linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$ ; on n'affirme pas que ces sections le sont en chaque point.

Par conséquent :

### Contre-exemple. (*Fibré complexe non isomorphe à son dual, re*)

Le fibré tautologique sur la sphère de Riemann n'est pas isomorphe à son dual.

On vient de le voir. □

## 4.10.4 Fibrés principaux

Un fibré principal est une structure mathématique qui généralise la notion de symétrie et d'actions de groupes dans des espaces fibrés. C'est un objet fondamental en géométrie différentielle, topologie et physique théorique, notamment en théorie des champs et en relativité générale.

#### 4.10.4.1 Notion de fibré principal

##### Définition. (*Fibré principal*)

Soit  $G$  un groupe topologique. Un *fibré  $G$ -principal* est un  $G$ -fibré au sens topologique de fibre  $G$  de sorte que le groupe de structure  $G$  agisse continûment et librement à droite sur la fibre  $G$  par simple multiplication à droite.

Un *fibré principal* est un fibré  $G$ -principal pour un certain groupe  $G$ .

On peut montrer que :

##### Reformulation pratique. (*Fibré principal*)

Soit  $G$  un groupe topologique. Un fibré  $G$ -principal est un fibré  $\pi : P \rightarrow X$  muni d'une action continue à droite de  $G$  sur  $P$ , libre, transitive et telle que  $G$  préserve les fibres de  $P$ , i.e. pour tout  $x \in X$ , si  $y \in \pi^{-1}(x)$ ,  $y \cdot g \in \pi^{-1}(x)$  pour tout  $g \in G$ , ce qui signifie grossso modo que l'action de  $G$  commute à la projection du fibré. On impose de plus que pour tous  $x \in X, y \in \pi^{-1}(x)$ , l'application  $G \rightarrow F_x, y \mapsto y \cdot g$  soit un homéomorphisme.

En effet, la dernière condition implique que les fibres sont toutes homéomorphes à  $G$ .

##### Fait

Si  $G$  est un groupe topologique et  $\xi : P \rightarrow X$  un fibré  $G$ -principal, alors les orbites de  $G$  sont les fibres de  $\xi$  et  $X \simeq P/G$ .

En effet, l'action de groupe préserve les fibres de  $\pi : P \rightarrow X$  et agit transitivement.

##### Exemples. (*Fibrés principaux*)

1. (*Fibré des repères*) Il associe à chaque point d'une variété différentielle la base choisie dans l'espace tangent. On détaillera cet exemple plus amplement dans la suite.
2. (*Fibré en cercles*) Fibré principal de groupe de structure de  $G = S^1$ , utilisé notamment en électromagnétisme avec la théorie de jauge  $U(1)$ .

##### Heuristique

Penser à un fibré principal comme un espace de symétries locales : à chaque point de la base  $B$ , tu as un "espace" qui représente les configurations possibles d'une structure géométrique, comme les directions possibles d'un repère.

#### 4.10.4.2 Espaces classifiants

##### Définition. (*Espace classifiant*)

Étant donné un groupe topologique  $G$  et un espace faiblement contractile  $EG$  sur lequel  $G$  agit librement, le quotient  $BG = EG/G$  est appelé *espace classifiant* de  $G$ .

##### Proposition

Tout groupe topologique admet un espace classifiant et tous sont homéomorphes.

##### Fait. (*Les espaces classifiants sont d'Eilenberg-MacLane*)

Soit  $G$  un groupe discret. Alors  $BG$  est un  $K(G,1)$ .

*Remarque.* Si  $G$  est un groupe topologique, le fibré  $EG \rightarrow BG$  est un  $G$ -fibré principal, de plus universel au sens suivant.

##### Théorème. (*Propriété universelle des espaces classifiants*)

Soit  $G$  un groupe topologique. Soit  $X$  un espace paracompact. Si  $P \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal, alors il est isomorphe à un pullback de  $EG \rightarrow BG$ , c'est-à-dire qu'il existe une application continue  $f : X \rightarrow BG$ , dite *application classifiante* telle que  $P \simeq f^*EG$ , en image :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & BG. \end{array}$$

✳ (Idée de la preuve.) Remarquons que  $G$  agit proprement. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \pi^*P & & & & f^*EG \\ \searrow & & & & \swarrow \\ P & \xrightarrow{\quad} & P \times EG & \xrightarrow{\quad} & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xleftarrow[p]{\quad} & P \times_G EG & \xrightarrow[f]{\quad} & BG \end{array}$$

qui permet la preuve. ■

#### 4.10.4.3 Fibré des repères

L'exemple suivant est fondamental.

### Définition-propriété. (*Fibré des repères d'un fibré*)

Soit  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel réel de rang  $k$  sur un espace topologique  $X$ . On définit un *repère* comme un point  $x \in X$  est une base ordonnée de l'espace vectoriel  $E_x$ . L'ensemble de tous les repères en  $x$  est alors noté  $F_x$ . Le *fibré des repères* de  $E$ , noté  $F(E)$  ou  $F_{GL}(E)$ , est la réunion disjointe de tous les  $F_x : F(E) = \bigoplus_{x \in X} F_x$ . Chaque point dans  $F(E)$  est donc une paire  $(x,p)$  où  $x$  est un point de  $X$  et  $p$  est un repère en  $x$ . C'est un fibré pour la projection naturelle  $\pi : F(E) \rightarrow X$  qui envoie  $(x,p)$  sur  $x$ .

▷ Le fibré des repères  $F(E)$  d'un fibré vectoriel  $E$  peut être muni d'une topologie naturelle et d'une structure de fibré déterminées par celles de  $E$ . Soit  $(U_i, \varphi_i)$  une trivialisation locale de  $E$ . Alors, pour chaque  $x \in U_i$ , on dispose d'un isomorphisme linéaire  $\varphi_{i,x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Ces données déterminent une bijection  $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times GL_k(\mathbb{R})$  définie par  $\psi_i(x,p) = (x, \varphi_{i,x} \circ p)$ . Avec ces bijections, chaque  $\pi^{-1}(U_i)$  peut être muni de la topologie de  $U_i \times GL_k(\mathbb{R})$ . La topologie sur  $F(E)$  est la topologie finale coinduite par les applications d'inclusion  $\pi^{-1}(U_i) \rightarrow F(E)$ . ■

*Remarque.* Pour tout fibré vectoriel réel de rang  $n$ , son fibré de repères est donc un  $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré principal.

De manière équivalente, un repère peut être vu comme un isomorphisme linéaire  $p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ . Alors pour tout  $x \in X$ ,  $F_x$  possède une action à droite naturelle par le  $GL_k(\mathbb{R})$  : un élément  $g \in GL_k(\mathbb{R})$  agit sur le repère  $p$  par composition pour donner un nouveau repère  $p \circ g : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ . Cette action de  $GL_k(\mathbb{R})$  sur  $F_x$  est à la fois libre et transitive : cela découle du résultat standard d'algèbre linéaire selon lequel il existe une transformation linéaire inversible unique envoyant une base dans une autre. En tant qu'espace topologique,  $F_x$  est homéomorphe à  $GL_k(\mathbb{R})$  bien qu'il lui manque une structure de groupe, puisqu'il n'y a pas de repère préféré. L'espace  $F_x$  est un  $GL_k(\mathbb{R})$ -torseur. Le groupe  $GL_k(\mathbb{R})$  agit sur  $F(E)$  à droite comme ci-dessus. Cette action est clairement libre et les orbites sont simplement les fibres de  $\pi$ .

### Proposition

Les fibrés euclidiens de rang  $n$  sont en correspondance biunivoque avec les fibrés de repères orthonormés qui sont des  $O_n(\mathbb{R})$ -fibrés principaux.

▷ Grâce encore à messieurs Gram et Schmidt. ■

## 4.11 Notions introductives d'algèbre homologique

### 4.11.1 Complexes associés à un espace topologique

Soit  $R$  un anneau commutatif. Pour une suite exacte donnée, l'image est facile à construire, le noyau facile à tester ; l'égalité entre les deux revient à construire les solutions d'une équation de la forme  $f(x) = 0$ . L'algèbre homologique va permettre de quantifier la connaissance de ces solutions.

On rappelle qu'un groupe abélien correspond exactement à la notion de  $\mathbb{Z}$ -module.

Un *complexe de  $R$ -module* est une suite de  $R$ -modules :

$$C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} \dots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

où les  $d_i$  indexés par  $\mathbb{N}$  sont des morphismes de modules tels que  $d_i d_{i+1}$ , soit  $\text{Im}(d_{i+1}) \subseteq \text{Ker}(d_i)$ . On note  $(C, d)$  (parfois, par convention, on utilise  $(M_0, d_0)$ ) et l'on indexe la chaîne par  $\mathbb{Z}$ .

On définit pour  $n = i$  l'*espace des cycles*  $Z_n(C, d) = Z_n = \text{Ker}(d_n)$  et on appelle les *bords*  $B_n(M_0, d_0) = \text{Im}(d_{n+1})$ . On a  $B_n \subseteq Z_n$  et on appelle *homologie* de  $(C, d)$  les quotients  $H_n = H_n(C, d) = Z_n / B_n$ , le  $n$ -ième groupe d'*homologie*. On appelle  $d$  en général la *différentielle*.

On dit que le complexe est *exact* en  $C_n$  si et seulement si  $H_n = 0$ .

On dit que  $(C, d)$  est *exact*, ou *acyclique*, si  $H_n = 0$  pour tout  $n$ , c'est-à-dire s'il est exact en chacun de ses termes.

Un *morphisme de complexes* avec la définition précédente, noté  $f : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ , est une collection de morphismes  $f_i : C_i \longrightarrow C'_i$  qui commute avec la différentielle :

$$\begin{array}{ccc} C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i-1} \\ C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} \end{array}$$

commutatif. Un tel morphisme induit  $[f_i] : H_i \longrightarrow H'_i$ .

On dit que le morphisme de complexe de modules  $f$  est un *quasi-isomorphisme* si les  $[f_i]$  sont des isomorphismes.

### 4.11.2 Homologie simpliciale

#### 4.11.2.1 $\Delta$ -complexe

On utilise la notion de **SIMPLEXE**, qui permet de former de manière combinatoire des espaces topologiques.



Un « simplexe » qui n'a pas la bonne orientation, n'en est pas un.

### Définition. ( $\Delta$ -complexe)

Une structure de  $\Delta$ -complexe sur  $X$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{A}$ , d'applications continues  $\sigma_\alpha : \Delta_{n_\alpha} \longrightarrow X$ ,  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tels que :

1.  $\sigma_{\alpha|_{\Delta_{n_\alpha}^+}}$  soit injective,
2.  $\forall x \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad x \in \text{Im}(\sigma_\alpha)$ ,
3.  $\forall i \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \sigma_{\alpha|_{\partial_i \Delta_{n_\alpha}}} = \sigma_\beta$  pour un certain  $\beta \in \mathcal{A}$ ,
4.  $A \subseteq X$  est ouvert ssi  $\sigma_\alpha^{-1}(A)$  sont tous ouverts, autrement dit, la topologie sur  $X$  est la topologie finale associée à  $(\sigma_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ .

$\mathcal{A}$  est un ensemble d'indices.

On dit :  $e_{n_\alpha}$  est un simplexe dans  $E$  si on le plonge naturellement dans un espace  $E$ .

### Fait

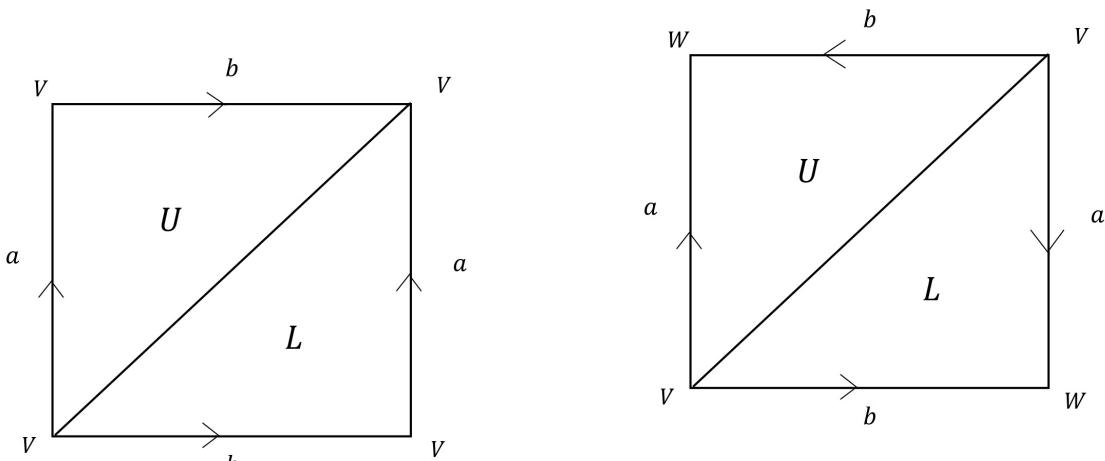
La quatrième condition est automatiquement vérifiée dans le cas d'une famille  $\mathcal{A}$  finie.

### Exemples. ( $\Delta$ -complexe)

1. La sphère  $S^1$  est un  $\Delta$ -complexe : elle est composée d'un 0-simplexe, un point, et d'un 1-simplexe, le segment, dont les deux extrémités sont jointes sur ce point.
2. Le tore admet une structure de  $\Delta$ -complexe, composée d'un 0-simplexe, de 3 1-simplexes et de 2 2-simplexes.

En effet, il suffit de recoller deux triangles égaux sur leurs hypoténuses respectives, et l'on obtient un carré. Il suffit enfin de prendre les segments des côtés, qui vont être deux à deux égaux, et la diagonale pour 1-complexes, et l'on peut faire le même artifice de recollement d'un carré que pour la structure de  $CW$ -complexe du tore.

3. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^2$  est un  $\Delta$ -complexe (*voir le schéma ci-dessous*).

(a) Structure de  $\Delta$ -complexe du tore usuel. —(b) Structure de  $\Delta$ -complexe de l'espace projectif de dimension 2. —FIGURE 4.11.1 : Exemples de  $\Delta$ -complexes classiques. —**Propriété. (Lien CW-complexe et  $\Delta$ -complexe)**

Tout  $\Delta$ -complexe est en particulier un CW-complexe.

**Remarque importante.** Tout ce dont on va parler ne dépend pas vraiment des  $\sigma_\alpha$ , mais seulement de leurs images + des informations combinatoires concernant la position des sommets + l'ordre des sommets/l'orientation des arêtes.

**Définition. (*Complexe de chaîne simplicial*)**

Étant donnée une structure de  $\Delta$ -complexe sur  $X$ , on définit un *complexe de chaînes* :

$$C_n^\Delta(X) = \left\{ \sum_{\text{finies}} n_i \underbrace{e_n^\alpha}_{=\sigma_\alpha(\Delta_n), \alpha \in \mathcal{A}, \text{ tel que } n_\alpha = n} \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

et on définit la différentielle sur ce simplexe de chaînes  $\delta_n$  par :

$$\partial_n \sigma(\Delta_n) = \sum_i (-1)^n \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n]).$$

**Exemples. (*Complexes de chaîne, différentielles*)**

1. On considère le 1-simplexe (segment) de sommets  $V_0, V_1$ , orienté de  $V_0$  à  $V_1$ . Sa différentielle est  $[V_1] - [V_0]$ .
2. On considère le 2-simplexe (triangle) de sommets  $V_0, V_1, V_2$ , orienté de  $V_0$  à  $V_1$ , de  $V_1$  à  $V_2$  et de  $V_0$  à  $V_2$ . Alors sa différentielle s'exprime :  $[V_0V_1] + [V_1V_2] - [V_0V_2]$ .

**Lemme**

C'est bien un complexe de modules, i.e.  $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ .

▷ Soit  $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ . Alors  $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, V_n])$ , puis  $\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{i,j} (-1)^i (-1)^j \sigma([V_0, \dots, \hat{V}_i, \dots, \hat{V}_j, \dots, V_n])$ . ■

**VOC** On appelle et l'on note  $H_n^\Delta$  le  $n$ -ième groupe d'homologie simpliciale de  $(X, \Delta)$ , le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $(X, \Delta)$ .

**Exemples. (Groupes d'homologie simpliciaux)**

1. Dans le premier cas, la différentielle vaut  $b - a + d - c + f - d$ .
2. Dans le deuxième cas, la différentielle vaut  $[ab] + [bc] + [cd] + [de] + [ea] = 0$ .
3. La concaténation cyclique de trois 1-simplexe ne donne pas un 2 simplexe, faute d'orientation. L'alternance dans la somme de la différentielle permet de rectifier cette construction.

Plus explicitement, dans le troisième cas présenté, les 1-cycles sont les cycles dans  $X$ . La différentielle vaut  $[ab] + [bc] + [ca] = [ab] + [bc] - [ac]$ . On remarque que  $[ab]$  correspond au 1-simplexe de sommets  $a, b$  orienté de  $a$  à  $b$ , et  $[ba]$  au 1-simplexe d'orientation opposée.

Généralement, en homologie singulière, la plaie est le choix des signes...

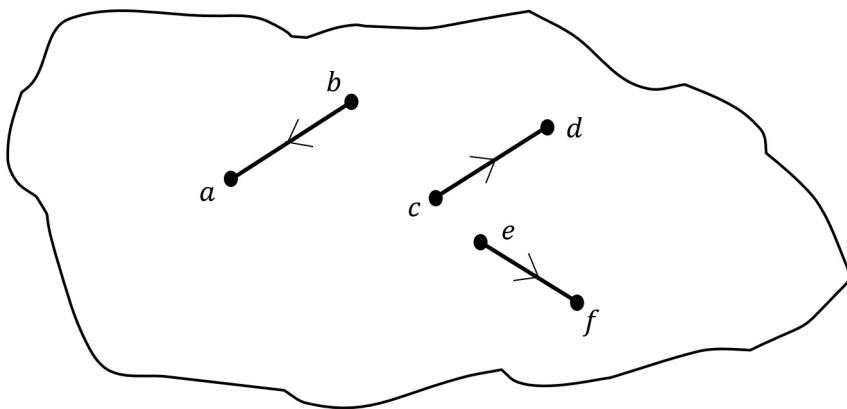


FIGURE 4.11.2 : Différentielle simpliciale sur trois branches. — Un premier exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

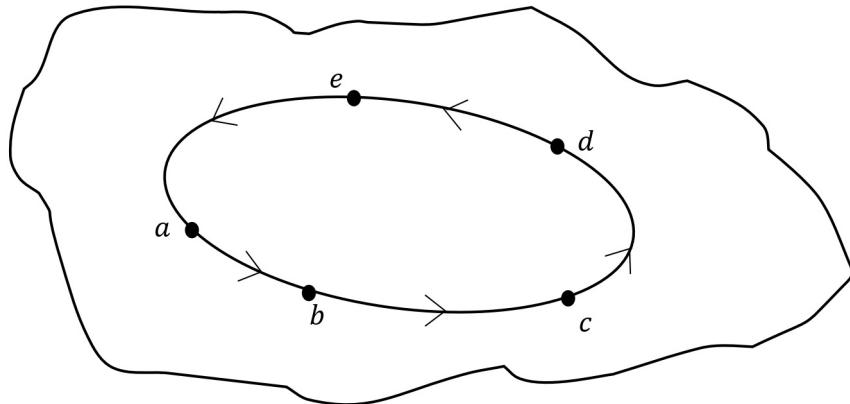


FIGURE 4.11.3 : Différentielle simpliciale sur le pentagone. —  
Un deuxième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

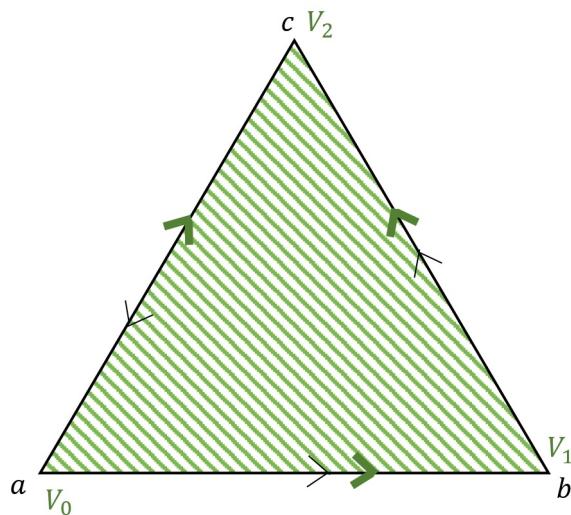


FIGURE 4.11.4 : Différentielle simpliciale sur le triangle. —  
Un troisième exemple de différentielle d'un complexe de chaîne.

**Exemples. (Toy-models : homologie de la sphère, du tore et du plan projectif)**

1. (*Homologie de la sphère*) Prenons la sphère de sommet  $V$  selon le 1-simplexe  $a$ , orientée dans le sens anti-horaire. Alors  $\partial(a) = [V] - [V] = 0$ . On a  $C_0^\Delta = \mathbb{Z}$ ,  $C_1^\Delta = \mathbb{Z}$ , d'où la chaîne  $\dots 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow 0$ . Ainsi,  $H_0^\Delta = \mathbb{Z} = H_1^\Delta$ .
2. (*Homologie du tore*) Dans le cas du tore (on reprend les notations de la figure précédente),  $\partial_1(a) = [U] - [U] = 0$ ,  $\partial_1(b) = 0$ , puis  $\partial_2(U) = \partial_2(V) = a + b - c$ . On en déduit la chaîne  $\dots \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \longrightarrow 0$ . Ainsi,  $H_0 = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \mathbb{Z}^2$  et  $H_2 = \mathbb{Z}$ .
3. (*Homologie du ruban de Möbius*)

4. (*Homologie du plan projectif*) Dans le cas du plan projectif (on reprend les notations de la figure précédente),  $\partial_1(a) = [W] - [V] = \partial_1(b)$ ,  $\partial_1(c) = 0$ , puis  $\partial_2(U) = c + b - a$  et  $\partial_2(L) = c + a - b$ , ces deux derniers étant linéaires indépendants. D'où la chaîne  $0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} 0$ . Ainsi  $\text{Im}(\partial_1) = \langle [W] - [V] \rangle$ ,  $\text{Ker}(\partial_2) = 0 = \text{Im}(0)$ . Ainsi  $H_2 = 0$ . De plus,  $\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}^2 = \langle c, a - b + c \rangle$  et  $\text{Im}(\partial_2) = 2c$  d'où  $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . C'est le premier exemple de groupe d'homologie qui n'est pas un groupe libre. D'ailleurs,  $H_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ .

#### 4.11.2.2 Complexes simpliciaux

On généralise les  $\Delta$ -complexes en ne prenant plus, plus que des simplexes standards.

##### Définition. (*Complexe simpliciel*)

Un *complexe simpliciel*  $K$  de  $\mathbb{R}^N$  est une collection de simplexes dans  $\mathbb{R}^N$  tel que toute face de  $K$  est aussi dans  $K$  et l'intersection de deux simplexes est une face de chacun d'eux.

##### Propriété. (*Lien $\Delta$ -complexe et complexe simplicial*)

Tout  $\Delta$ -complexe est en particulier un complexe simplicial. Réciproquement, tout complexe simplicial est homéomorphe à un  $\Delta$ -complexe.

▷ Il s'agit de trianguler des polygones, tétraédriser des polyèdres, etc. On utilise ensuite que tous les convexes compacts sont homéomorphes dans  $\mathbb{R}^N$ . ■

##### Définition. (*Structure de complexe sur un complexe simpliciel*)

Soit  $X$  un espace topologique et  $K$  un complexe simpliciel. Une structure de  $K$ -complexe sur  $X$  est la donnée d'application  $\Delta \longrightarrow X$ ,  $\Delta \in K$  injectives. Pour tout  $x \in X$ , il existe  $\Delta \in K$  tel que  $x$  est dans l'image de  $\Delta$ .

Soyons plus formels :

##### Définition. (*Complexe simplicial géométrique*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Un *complexe simplicial géométrique* dans  $\mathbb{R}^n$  est une collection  $\mathcal{K}$  de simplexes dans  $\mathbb{R}^n$  telle que :

- ★ toute face d'un simplexe dans  $\mathcal{K}$  est dans  $\mathcal{K}$  ;
- ★ l'intersection de deux simplexes dans  $\mathcal{K}$  est toujours leur face commune ;
- ★ la collection  $\mathcal{K}$  est localement finie.

Le *support*  $\mathcal{K}$  d'un complexe simplicial géométrique  $\mathcal{K}$  est la réunion dans  $\mathbb{R}^n$  de tous les simplexes de  $\mathcal{K}$ . Un *sommet* de  $\mathcal{K}$  est un 0-simplexe de  $\mathcal{K}$ .

**Définition. (*Complexe simplicial*)**

Un *complexe simplicial* est un espace topologique homéomorphe au support d'un complexe simplicial géométrique.

**4.11.3 Vers l'homologie singulière**

On définit  $C_n(X)$ , le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par toutes les applications continues  $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ . On définit la différentielle  $\partial$  de la même façon.

**Théorème**

L'application évidente

$$(C^\Delta(X), \partial) \longrightarrow (C(X), \partial)$$

est un quasi-isomorphisme.

Ce théorème, dont l'application calculatoire est éminemment intéressante, ne connaît pas de preuve élémentaire.

**Théorème. (*Hurewicz*)****Exercice 30**

Montrer que l'abélianisé de  $F_n \star_n \mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}^n$ .



# Chapitre 5

## Homologie

### Résumé

En mathématiques, l'homologie est une manière générale d'associer une séquence d'objets algébriques tels que des groupes abéliens ou des modules à d'autres objets mathématiques tels que des espaces topologiques. Les groupes d'homologie ont été définis à l'origine dans la topologie algébrique. Des constructions similaires sont disponibles dans beaucoup d'autres contextes, tels que l'algèbre abstraite, les groupes, les algèbres de Lie, la théorie de Galois et la géométrie algébrique, mais c'est chez nous qu'il convient le mieux de l'introduire. La motivation initiale pour définir les groupes d'homologie était l'observation que deux formes peuvent être distinguées en examinant leurs trous. Par exemple, un cercle n'est pas un disque car le cercle est perforé alors que le disque est solide et la sphère n'est pas un cercle car la sphère renferme un trou bidimensionnel alors que le cercle renferme un trou unidimensionnel. Cependant, étant donné qu'un trou n'est « pas là », définir un trou et distinguer différents types de trous n'est pas évident. L'homologie était à l'origine une méthode mathématique rigoureuse pour définir et classer les trous dans une variété. Sommairement, un cycle est dans ce formalisme une sous-variété fermée, une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété et une classe d'homologie, qui représente un trou, est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite. Une classe d'homologie est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété : le cycle représente un trou, à savoir une variété hypothétique dont la limite serait ce cycle, mais qui « n'est pas là ». Il existe de nombreuses théories d'homologie. Un type particulier d'objet mathématique, tel qu'un espace topologique ou un groupe, peut avoir une ou plusieurs théories d'homologie associées. Lorsque l'objet sous-jacent a une interprétation géométrique, à l'instar des espaces topologiques, le  $n$ -ième groupe d'homologie représente le comportement dans la dimension  $n$ . La plupart des groupes d'homologie ou des modules peuvent être formulés en tant que foncteurs dérivés sur des catégories abéliennes appropriées, en mesurant l'incapacité d'un foncteur à être exact. Dans cette perspective abstraite, les groupes d'homologie sont déterminés par des objets d'une catégorie dérivée.

## 5.1 Idée

**L**'homologie quantifie l'inexactitude des suites de morphismes.

### Exercice 1

- Soit  $G$  un groupe de Lie. Notons  $\Delta$  la projection diagonale  $G \times G, x \mapsto (x,x)$ . Montrer que l'on peut compléter la suite

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{?} ? \longrightarrow 0$$

de sorte qu'elle soit exacte scindée.

- Est-ce vrai pour un groupe topologique en général ?

▷ **Éléments de réponse.**

- Le problème revient à trouver un automorphisme (difféomorphique) de  $G \times G$  tel que pour un certain  $x_0 \in G$ , on ait  $(x,x_0) = (x,x)$  pour tout  $x \in G$ . On pose  $(x,y) \mapsto (x,x+y)$  et  $x_0 = 0$ .
- Non. On peut considérer  $G = S^2$ .

## 5.2 Homologie simpliciale

**O**n a développé en détail cette théorie simplifiée de l'HOMOLOGIE SINGULIÈRE dans l'introduction à l'homologie du chapitre TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE.

On aura l'occasion de préciser en quoi elle est un cas particulier de l'homologie générale des espaces topologiques, dite homologie singulière, après l'étude de l'homologie cellulaire qui en est elle-même un cas particulier.

## 5.3 Homologie singulière

### 5.3.1 Groupes d'homologie

**Mnémonik :** les groupes d'homotopie sont faciles à introduire, les groupes d'homologie sont faciles à calculer. Personne n'est parfait...

#### 5.3.1.1 Définition de l'homologie singulière

L'homologie singulière est l'*homologie générale des espaces topologiques*. De même que l'homotopie au sens du groupe fondamental, elle est définie sans aucune hypothèse sur l'espace, en particulier, on n'a pas besoin de prendre un espace séparé. Cela dit, on étudiera en premier lieu la topologie des variétés qui sont des espaces séparés, à base dénombrable de voisinages, localement compacts et localement connexes par arcs.

→ *Notation.* Soit  $k$  un entier naturel. On note  $T^k$  le  $k$ -simplexe standard, notion introduite dans la section sur les SIMPLEXES de la TOPOLOGIE GÉNÉRALE. Dans ce contexte, on note souvent  $(v_0, \dots, v_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Définition. (*Simplexe singulier*)

Soit  $k$  un entier naturel. Soit  $\sigma : T^k \rightarrow X$  une application continue, où  $X$  est un espace topologique. On dit que c'est un  $k$ -simplexe singulier de  $X$ .

**VOC** Le terme *singulier* marque le fait que, contrairement à l'homologie simpliciale, on n'a pas besoin que le plongement de  $T^k$  dans  $X$  ait aucune régularité : il peut être non injectif, avoir des singularités, en un mot, il est quelconque.

### Heuristique

Si  $k = 2$ , on a affaire à une *quasi-triangulation*.

### Définition. (*Chaîne singulière dans un espace*)

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -chaîne singulière dans un espace topologique  $X$  est une somme finie formelle

$$n_1\sigma_1 + \dots + n_m\sigma_m$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des  $k$ -simplexes singuliers de  $X$ . L'ensemble des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  forme donc un groupe abélien libre de base  $X^{T^k}$ , que l'on peut aussi voir comme un  $\mathbb{Z}$ -module, et que l'on note  $C_k(X)$ .

Le *support* d'une chaîne singulière est la réunion de la réunion des images des simplexes singuliers apparaissant dans sa décomposition.

### Définition-propriété. (*Complexe de chaînes singulières*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\mathcal{C}(X)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  et pour tout  $\sigma$   $i$ -simplexe singulier de  $X$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\partial_i(\sigma) := \sum_{j=0}^i (-1)^j \sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i)}$$

où l'application parfois appelé  $j$ -ième face  $\Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i)}$  décrit un plongement affine de  $T^{i-1} \rightarrow T^i$  en omettant le sommet  $v_j$ . Le morphisme différentiel ou bord  $\partial_i$  est alors défini sur tout  $C_i(X)$  par linéarité<sup>a</sup>. On note  $\partial$  ou  $\partial^X$  la donnée des  $(\partial_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_k(X) = \begin{cases} \text{Ker}(\partial_k) & \text{si } k \geq 1 \\ C_0(X) & \text{sinon}^b \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien des cycles de ce complexe dit *k-cycles* de  $X$ ,  $B_k(X) = \text{Im}(\partial_{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des bords de ce complexe *k-bords* ou *k-limites* de  $X$  et  $H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$  le  $k$ -ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle *k-ième groupe d'homologie (singulière) de  $X$* . Ses éléments sont les *classes d'homologie (singulière)* de  $X$ . C'est un quotient d'un sous-groupe de  $C_k(X)$ . Bien sûr,  $\mathcal{C}(X)$  est exact en  $k \in \mathbb{N}$  si et seulement si  $H_k(X) = 0$ .

Deux cycles, qui sont des chaînes singulières, sont *homologues* si leur différence est un bord. Un cycle est *homologue à zéro* si c'est un bord.

<sup>a</sup> Dans toute la suite, on utilisera librement que, tous les objets en jeu étant encore des sous-groupes (noyau, image, quotients, etc.), il suffit de vérifier les inclusions sur une famille génératrice, à savoir les simplexes singuliers qui engendent les chaînes singulières.

<sup>b</sup> Ce qui revient à compléter le complexe à droite par  $C_0(X) \xrightarrow{\partial_0=0} 0$ , procédé classique en homologie lorsqu'on a affaire à un complexe arrêté.

▷ Pour affirmer que  $\mathcal{C}(X)$  est un complexe, ce qui permet la construction des groupes d'homologie, puisqu'il faut avoir  $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$  pour parler du quotient, il faut vérifier que  $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$  pour tout entier  $i \geq 0$ . C'est un calcul classique de différentielle par somme alternée. ■



Les groupes de  $C(X)$  sont abéliens libres à bases grossièrement indénombrables pour n'importe quel espace non trivial, et pourtant, les quotients seront en général des groupes abéliens de type fini. Une fois passé ce hoquet mental perturbant, l'homologie singulière est une douce croisière.

→ *Notation.* En général, pour un espace  $X$ , on note  $C_*(X)$  le  $*$ -ième groupe de chaînes singulières de  $X$ , sans fixation nécessaire à un rang. Cette notation s'étend aux groupes  $H_*(X)$  d'homologie et aux complexes relatifs.

### Remarques.

1. L'image d'un simplexe standard de  $X$  est toujours incluse dans l'une des composantes connexes de  $X$ . C'est ce fait qui permet de voir le complexe de chaînes de  $X$  comme une somme de complexes sur chaque composante connexe, ce qui permet grosso modo de se ramener au cas  $X$  connexe.
2. Le groupe des 0-chaînes singulières  $C_0(X)$  est donc le groupe abélien libre engendré par les points de  $X$ . On l'appelle parfois *groupe des diviseurs de  $X$* . Par définition, tous les 0-simplexes singuliers de  $X$ , i.e. tous les points de  $X$ , sont des 0-cycles. Un 0-simplexe singulier n'est jamais un 0-bord. En effet, une 0-chaîne singulière est un 0-bord si et seulement si on peut l'écrire comme la différence de deux points dans la même composante connexe (*voir le calcul de l'homologie en degré nul*).
3. L'ensemble des 1-simplexes singuliers peut-être vu sans problème comme l'ensemble des chemins (continus)  $\gamma : [0,1] \rightarrow X$  grâce à l'identification  $[v_0, v_1] \simeq [0,1]$ . C'est

un 1-cycle si et seulement si  $\gamma$  est un lacet (continu) de  $X$ , car  $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$ . Il n'existe pas de caractérisation évidente des 1-bords parmi les 1-simplexes singuliers, mais remarquons qu'un chemin constant dans  $X$  en  $c_0 \in X$  est toujours un bord : il suffit de considérer la 2-chaîne singulière constituée seulement du 2-simplexe singulier constant en  $c_0$  (*voir les lemmes du théorème d'Hurewicz*). On dit par extension que chemins dans  $X$  sont *homologues* si leur différence en tant que chaînes est un 1-bord. En particulier, on dit qu'un chemin est *homologue à zéro* si elle est homologue à un chemin constant, lui-même homologue à 0. Une condition suffisante est qu'il soit contractile, *i.e.* homotopie à un chemin constant, car on verra que l'homotopie entraîne l'homologie.

4. Le groupe  $C_2(X)$  est engendré par les 2-simplexes singuliers de  $X$  qui sont des applications définies sur des triangles.

### 5.3.1.2 Homologie singulière en basses dimensions

**Lemme.** (*Homologie d'une décomposition en composantes connexes*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  l'ensemble de ses composantes connexes.

Alors on a un isomorphisme de  $H_n(X)$  sur  $\bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisqu'un simplexe standard a toujours une image connexe par arcs donc connexe,  $C_n(X)$  se décompose comme la somme directe des sous-groupes  $C_n(X_\alpha)$  en séparant la base  $X^{T^k}$  selon la composante dans laquelle se trouve l'image de chaque simplexe singulier. Il est évident par sa définition que la différentielle préserve cette décomposition, autrement dit que  $\partial_n|_{C_n(X_\alpha)}$  est bien définie et à valeurs dans  $C_{n-1}(X_\alpha)$ , puis alors que les bords et les limites se scindent également, et donc que les groupes d'homologies se décomposent :  $H_n(X) \simeq \bigoplus_{\alpha} Z_n(X_\alpha) / \bigoplus_{\alpha} B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus_{\alpha} Z_n(X_\alpha) / B_n(X_\alpha) \simeq \bigoplus_{\alpha} H_n(X_\alpha)$  en remarquant que l'ensemble des simplexes singuliers de  $X_\alpha$  est exactement l'ensemble des simplexes singuliers de  $X$  à valeurs dans  $X_\alpha$ . Dans le cas  $n = 0$ , il y a encore moins à faire puisque les 0-cycles sont tous les points de  $X$ . ■

**Propriété.** (*Calcul de l'homologie au rang nul*)

Si  $X$  est un espace topologique connexe par arcs non vide,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .

Plus généralement, si  $X$  est un espace non vide quelconque,

$$H_0(X) = \mathbb{Z}^c$$

où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ . Autrement dit, c'est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes de  $X$ , ensemble de cardinal  $c$  a priori quelconque.

▷ Par définition,  $H_0(X) = C_0(X)/\text{Im}(\partial_1)$ . Posons  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  le degré comme on le définira systématiquement ci-après, défini par  $\varepsilon(\sigma) = 1$  sur toute chaîne singulière. Puisque  $X$  est non vide,  $\varepsilon$  est surjective. Montrons que  $\text{Ker}(\varepsilon) = \text{Im}(\partial_1)$  pour conclure par théorème d'isomorphisme. Or si l'on a une application  $\sigma : T^1 = [v, v'] \rightarrow X$ ,  $\partial_1(\sigma) = [v_0] - [v_1]$  d'où  $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = 1 - 1 = 0$ . Réciproquement, soit  $x = \sum_{i=1}^n n_i \sigma_i \in \text{Ker}(\varepsilon)$ . On a donc  $\sum_{i=1}^n n_i = 0$ . Notons que les  $\sigma_i$  sont des 0-simplexes, i.e. des points de  $X$ . Pour tout  $i$ , soit  $\tau_i : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin continu de  $x_0$  à  $\sigma_i(v_0)$  par connexité pour  $x_0$  fixé définitivement dans  $X \neq \emptyset$ . Soit  $\sigma_0$  le 0-simplexe standard d'image  $x_0$ . On peut voir  $\tau_i$  comme un 1-simplexe standard qui n'est autre qu'une application continue  $[v_0, v_1] \rightarrow X$ . Alors  $\partial\tau_i = \sigma_i - \sigma_0$ . Ainsi  $\partial(x) = \sum_i n_i \sigma_i - \underbrace{\sum_i n_i \sigma_0}_{= 0. \sigma_0} = x$ , donc  $x \in \text{Im}(\partial_1)$ .

On généralise en utilisant le lemme précédent permettant de casser l'homologie sur les composantes connexes par arcs. ■

### Exemples. (*Homologies triviales*)

1. (*Homologie singulière du vide*)  $H_n(\emptyset) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\emptyset^{T^k} = \emptyset$ ,  $C_n(\emptyset) = \langle \emptyset \rangle = 0$  à tout rang.

2. (*Groupes d'homologie singulière d'un point*) Soit  $X = \{\star\}$  le singleton standard de

la catégorie des espaces topologiques. Alors  $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$

Si  $n = 0$ ,  $H_n(X) = \mathbb{Z}$ , car un point est connexe par arcs. Soit  $n \geq 1$ . Notons  $\sigma_n$  l'unique application de  $\{\star\}^{T^n}$ . Alors  $\partial_n(\sigma_n) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \sigma_{n-1}$ . Par suite,  $\text{Im}(\partial_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$  et

$\text{Ker}(\partial_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$  En particulier,  $H_n(\{\star\}) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1}) = 0 = 0/0 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  dans tous les cas.

3. (*Groupes d'homologie d'un discret*) Soit  $X$  un espace topologique discret, ou plus généralement un espace totalement discontinu, en particulier un espace fini séparé.

Alors  $\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{card}(X)} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$

En conjuguant le lemme précédent et le calcul des groupes d'homologie ponctuels.

On peut d'ores et déjà aller plus loin et élaborer un premier lien, assez fondamental, entre homologie et homotopie.

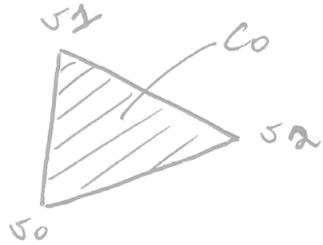
### Théorème. (*Théorème d'Hurewicz*)

Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs non vide. Soit  $x_0 \in X$ . Alors le *morphisme de Hurewicz* :

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto \bar{\gamma} \end{aligned}$$

envoyant la classe d'homotopie d'un lacet basé en  $x_0$  sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant est bien défini, un morphisme de groupes est induit un isomorphisme entre  $H_1(X)$  et l'abélianisé  $\pi_1(X, x_0)^{ab}$  du groupe fondamental de  $X$ , autrement dit,  $H_1(X) = \pi_1(X)/D(\pi_1(X))$ .

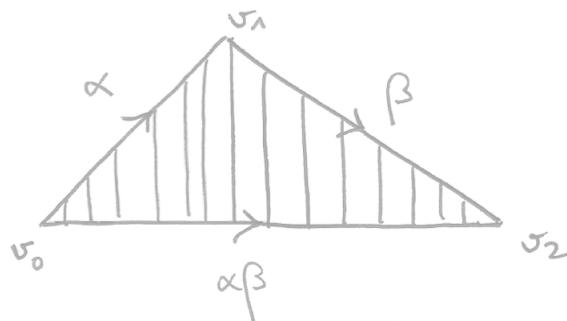
▷ On identifie librement les chemins dans  $X$  aux 1-simplexes singuliers. On rappelle qu'un chemin constant est toujours homologue à zéro, grâce à l'illustration suivante.



### Lemme

Soient  $\alpha, \beta$  deux chemins composables dans  $X$ , i.e. tels que  $\beta(0) = \alpha(1)$ . On rappelle que  $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta$  désigne alors le chemin parcourant  $\alpha$  jusqu'au temps moitié puis  $\beta$  dans le temps restant. Alors il existe une 2-chaîne singulière  $c \in C_2(X)$  telle que  $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$ .

▷ En effet, considérons une application de  $\Delta^2$  dans  $X$  donnée par  $\alpha$  sur  $[v_0, v_1]$ , par  $\beta$  sur  $[v_1, v_2]$  et  $\alpha\beta$  sur  $[v_0, v_2]$ , les chemins pris dans cet ordre. À l'intérieur du 2-simplexe, on la définit constante sur chaque segment parallèle à  $[v_1, \frac{v_0+v_2}{2}]$ , étant donné que ses extrémités ont même image par construction. Alors ce simplexe  $c$  est bien une application continue et immédiatement  $\partial c = \beta - \alpha\beta + \alpha$ , ce qu'il fallait montrer. ■

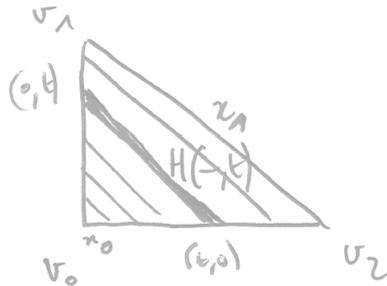


Enfin,

### Lemme

Enfin, soient  $\alpha, \beta$  deux chemins homotopes par  $H : [0,1]^2 \rightarrow X$ , avec donc  $H(0,-) = \alpha$ ,  $H(1,-) = \beta$ ,  $H(-,0) = x_0$  et  $H(-,1) = x_1$  les extrémités de ces chemins. Alors il existe une 2-chaîne singulière  $c$  telle que  $\alpha = \beta + \partial c$ .

▷ Considérons  $\sigma$  définie sur le triangle  $T^2$  par  $H(-,t)$  sur le segment  $([t,0],[0,t])$  et a fortiori constante en  $x_1$  sur  $[v_1, v_2]$  et vaut  $x_0$  en  $v_0$ . Alors  $\partial\sigma = \beta + cste_{x_1} - \alpha$  où  $cste_{x_1} = \partial\tau$  car un chemin constant est toujours homologue à zéro, d'où  $\beta - \alpha = \partial(\sigma - \tau)$ . Ainsi  $\alpha - \beta$  est un bord en prenant  $c = \sigma - \tau$ . ■



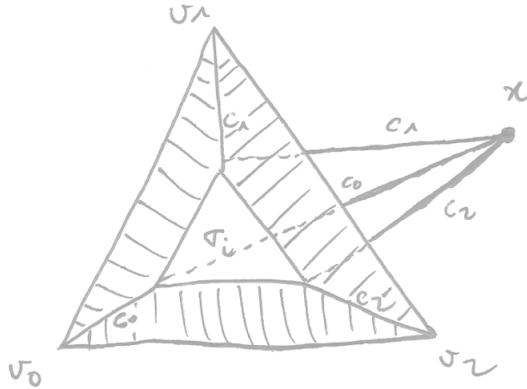
Posons donc  $[\gamma] \mapsto \bar{\gamma}$  comme dans l'énoncé. Par le lemme précédent, cette application est bien définie, car deux chemins homotopes sont dans la même classe d'homologie, puisqu'ils diffèrent à un bord près et  $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X)$ . D'après le lemme surprécédent, c'est même un morphisme de groupes.

Concluons. Montrons que  $\varphi$  est surjectif. Soit  $n_1\sigma_1 + \dots + n_k\sigma_k$  un 1-cycle singulier quelconque, et montrons qu'il est homologue à un lacet. Quitte à multiplier chacun des termes et comme  $-[\sigma]$  est homologue à  $[\sigma^{-1}]$ , on peut supposer que  $n_i = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Comme par hypothèse  $\partial(\sigma_1 + \dots + \sigma_k) = 0$ , si  $\sigma_i$  n'est pas un lacet, il existe  $j$  tel que  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  soient composables, et comme  $\sigma_i + \sigma_j$  est homologue à  $\overline{\sigma_i \sigma_j}$ , par récurrence immédiate, on peut prendre tous les  $\sigma_i$  des lacets ; enfin, si l'on fixe  $x \in X$ , pour tout  $i$ , soit  $\alpha_i$  un chemin dans  $X$  de  $x$  à l'origine de  $\sigma_i$  ;  $\overline{\alpha_i \sigma_i \alpha_i}$  étant homologue à  $\alpha_i$ , on peut supposer que  $\sigma_i$  est un lacet en  $x$ . Alors à homologie près  $\sigma_1 + \dots + \sigma_k$  est un lacet en  $x$ , évidemment maintenant.

Pour appliquer le théorème d'isomorphisme, il suffit de montrer que  $\text{Ker}(\varphi) = D(\pi_1(X, x_0))$ . Puisque  $H_1(X)$  est abélien, tout commutateur est dans le noyau de  $\varphi$ . Réciproquement, soit  $\alpha$  un lacet de  $X$  tel que  $\overline{\alpha}$  soit nul, i.e.  $\alpha$  un lacet homologue à 0. Soit également  $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$  un 2-cycle singulier tel que

$\partial(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i) = \alpha$ , qui existe donc par cette hypothèse. Chaque  $\sigma_i$  est homotope à un 2-simplexe singulier dont les trois sommets sont égaux à  $x \in X$  fixé pour tous. En effet, en notant  $\lambda_t$  l'homotopie de rapport  $t$  et de centre le barycentre de  $\Delta_2$ , on considère  $c_0, c_1, c_2$  les chemins joignant  $x$  à  $\sigma_i(v_0), \sigma_i(v_1), \sigma_i(v_2)$ . Pour  $s \in [0,1]$ , considérons l'application continue  $h_s$  de  $\Delta_2$  dans  $X$  valant  $\sigma_i \circ \lambda_{\frac{1+s}{2}}^{-1}$  sur  $\lambda_{\frac{1+s}{2}}(\Delta_2)$ ,  $c_j(t)$  sur  $[\lambda_{\frac{1+s}{2}}(e_j), e_j]$  pour  $j = 0, 1, 2$  et sur chaque composante connexe  $C$  du complémentaire dans  $\Delta_2$  de la réunion de ces ensembles, constant sur les segments perpendiculaires aux côtés de  $\Delta_2 \subseteq \overline{C}$ , ce

qui montre ceci. En particulier,  $\sigma_i$  est homologue à un tel simplexe singulier (*car homotopie implique homologie, ce que nous verrons indépendamment mais plus tard*), et l'on peut supposer que les sommets des  $\sigma_i$  sont égaux à  $x$ . Supposons que  $\alpha = \partial(\sigma_i)$  c'est-à-dire que la somme soit réduite à un unique  $\sigma_i$ . On a  $\alpha = \partial\sigma_i = \sigma_{i,0} - \sigma_{i,1} + \sigma_{i,2}$  qui sont trois lacets en  $x$ . Par unicité de la décomposition selon une base,  $\alpha = \sigma_{i,0}$  ou  $\sigma_{i,2}$ , prenons  $\sigma_{i,0}$  sans perte de généralité. Alors  $\sigma_{i,0}$  est homotope à zéro : en effet,  $\sigma_i$  fournit une réalisation par  $\Delta_2 \simeq [0,1]^2$  d'une homotope entre  $\sigma_{i,0}$  pris sur son bord du simplexe et le chemin constant en  $x$  pris sur le sommet opposé. Ainsi  $\alpha$  est homotope à zéro, et c'est fini.



Traitons maintenant le cas général où  $\alpha$  est la différentielle d'une somme de simplexes. On peut supposer que tous les  $n_i = 1$  comme précédemment. Notons systématiquement  $\sigma_{i,j}$  la  $j$ -ième face propre de  $\sigma_i$ , de sorte que  $\partial\sigma_i = \sigma_{i,0} - \sigma_{i,1} + \sigma_{i,2}$ . On a alors  $\alpha = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \sigma_{i,j} = \sum_{i,j} (-1)^j \sigma_{i,j}$ . Notons  $\tilde{\alpha}$  l'image dans le groupe abélianisé et utilisons la notation multiplicative, bien que ce groupe soit commutatif. On a  $\tilde{\alpha} = \prod_i \sigma_{i,0} \sigma_{i,1}^{-1} \sigma_{i,2}$ . Dans  $\alpha$ , toutes les faces des  $\sigma_i$  s'annulent par regroupement deux à deux, ne venant, a priori, pas du même simplexe, par unicité de la décomposition. Mais puisque les termes du produit précédent commute, ce qui est crucial, on peut donc les réordonner pour réaliser ces annulations et il ne reste plus que  $\tilde{\alpha}$  égal à un des  $\sigma_{i,j}$ , qui est homotope au chemin constant par le même argument que précédemment, d'où  $\tilde{\alpha} = 0_{\pi_1(X)^{ab}}$ . ■

### Corollaire

Soit  $X$  un espace topologique connexe par arcs, non vide et de groupe fondamental abélien. Alors  $\pi_1(X) = H_1(X)$ .

**VOC** On parle parfois de *théorème de Hurewicz en degré 0* pour désigner le résultat déjà démontré :  $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{card}(\pi_0(X))}$ .

### Exercice 2 (Naturalité du morphisme de Hurewicz)

Montrer que si  $X, Y$  sont deux espaces topologiques pointés en  $x$  et  $y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée, alors en notant  $\varphi_X, \varphi_Y$  respectivement les morphismes de

Hurewicz de  $X$  et  $Y$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{\varphi_X} & H_1(X) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f_{*,1} \\ \pi_1(Y,x) & \xrightarrow{\varphi_Y} & H_1(Y) \end{array}$$

commute, en notant  $f^*$  l'application induite sur les groupes fondamentaux et  $f_{*,1}$  l'application induite en homologie au degré 1.

### Exemples. (*Calcul des homologies en basses dimensions*)

1. (*Premiers groupes d'homologie du cercle*) On retrouve  $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .
2. (*Premiers groupes d'homologie des sphères*) On a  $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_1(S^n) = 0$  pour  $n \geq 2$  et pour  $n = 0$ ,  $H_0(S^0) = H_1(S^0) = 0$ .
3. Si  $X$  est simplement connexe, alors  $H_1(X) = 0$ .  
En effet,  $\pi_1(X) = 0$  lui-même.
4. (*Premiers groupes d'homologie du ruban de Möbius*) De même,  $H_0(\mathbb{M}) = H_1(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$ .
5. (*Premiers groupes d'homologie du tore*) De même,  $H_0(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
6. Plus généralement, si  $G$  est un groupe topologique connexe par arcs, son groupe fondamental est abélien, donc  $H_0(G) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(G) = \pi_1(X)$ .
7. (*Premiers groupes d'homologie des espaces projectifs*) En outre,  $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour tout entier  $n \geq 2$ . De même,  $H_0(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .
8. Si  $X$  est un bouquet de  $n \in \mathbb{N}$  cercles,  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  et  $\pi_1(X) = F_n$  donc  $H_1(X) = F_n^{ab} = \mathbb{Z}^n$ .



Les groupes d'homotopie supérieurs en ordre à 2 sont tous abéliens... mais ils n'ont en général rien à voir avec les  $H_n$  (enfin... affaire à suivre).

#### 5.3.1.3 Applications induites en homologie

##### Fait. (*Applications induites dans le complexe de chaînes singulières*)

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme  $f_\# : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$  « en homologie singulière » donné pour  $\sigma$  simplexe singulière de  $X$ , par  $f_\#(\sigma) = f \circ \sigma$ .

Il faut vérifier que la collection de morphismes  $f_\#$  est bien un morphisme de complexes, *i.e.* qu'on ait la

commutation du diagramme rectangulaire infini suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(X) \\ & & f_{\#, k+1} \downarrow & & f_{\#, k} \downarrow & & \dots \downarrow & & f_{\#, 0} \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(Y) & \longrightarrow & C_k(Y) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(Y). \end{array}$$

On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_{*,k} \circ \partial_{k+1} = \partial'_{k+1} \circ f_{*,k+1}$  : il suffit de l'écrire, et l'on trouve que ces deux quantités sont égales, en tout  $\sigma \in C_{k+1}(X)$ , à  $\sum_{j=0}^k f \circ \sigma \circ \Delta_{v_0, \dots, v_j, \dots, v_n}$ .

Ce morphisme induit donc pour tout entier  $k \geq 0$  un morphisme  $f_{*,k} : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  dont on note la donnée  $f_* = (f_{*,k})_{k \in \mathbb{N}}$  dite *application induite en homologie (singulière)*. En effet, ce morphisme passe donc au quotient simultanément : si  $\sigma \in B_k(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = \partial_{k+1}(\sigma_0)$  où  $\sigma_0 \in C_{k+1}(X)$ . Alors avec les notations non indiquées, menteuses mais pas tant que ça,  $\partial' f_*(\sigma) = f_* \partial(\sigma) = f_*(0) = 0_{Z_k(Y)}$ , soit  $f_*(\sigma) \in B_k(Y)$ .



À partir d'ici, il est conseillé de connaître les bases d'**HOMOLOGIE** dans les **CATÉGORIES ABÉLIENNES**.



### Propriétés. (*Fonctorialité de l'application induite en homologie singulière*)

Soient  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  deux applications continues entre trois espaces topologiques.

1. On a  $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(g \circ f)_{\#,k} = g_{\#,k} \circ f_{\#,k}$ .
2. On a  $id_{X\#} = id_{C(X)}$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(id_X)_{\#,k} = id_{C_k(X)}$ .

De plus :

1. On a  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ , i.e. pour tout  $k \geq 0$ ,  $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k}$ .
2. Pour tout  $k \geq 0$ ,  $(id_X)_{*,k} = id_{H_k(X)}$ .

▷ Successivement :

1. Par covariance de la post-composition.
2. Immédiat.
3. Corollaire du premier point en passant au quotient.
4. Immédiat. ■

### Corollaire

Tout diagramme commutatif entre espaces topologiques induit un diagramme commutatif en homologie singulière.

### Corollaire. (*Application induite en homologie par une rétraction*)

Soit  $i : A \rightarrow X$  un rétract topologique. Alors  $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  est injective pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ En effet, s'il existe  $r : X \rightarrow A$  continue telle que  $ri = id_A$ , alors  $r_*i_* = id_{A_*}$  et un morphisme rétractable, même ensemblistement soit dit en passant, est toujours injectif. ■

### Corollaire

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  n'est pas un rétract de  $D^{n+1}$ .

▷ Il faut connaître l'homologie des sphères, qui vaut  $\mathbb{Z}$  au rang  $n$ , et celle d'un convexe, qui est contractile, donc est nulle aux rangs non nuls. Si l'on sait ceci, l'implication induite par l'inclusion canonique au rang  $n$  est un morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans 0, qui ne peut être injectif. ■

Le théorème suivant est fondamental, en ce qu'il fait le lien entre topologie (homotopie) et algèbre (homologie).

### Propriété. (*Propagation de l'homotopie dans le complexe de chaînes singulières*)

Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications continues entre deux espaces topologiques. Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors  $f_\#$  et  $g_\#$  sont homotopes en tant que morphismes de complexes de chaînes.

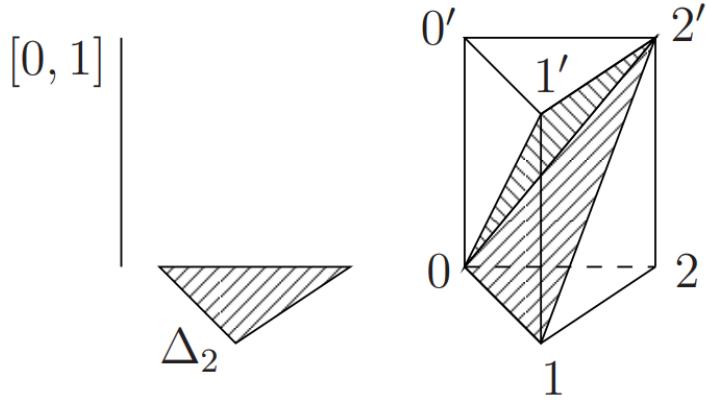
En particulier, ils induisent les mêmes morphismes en homologie, i.e.  $f_* = g_*$ .

▷ Il y a quelque chose à faire dans :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow C_0(X) \\ & & f_{\#, k+1} \downarrow & & g_{\#, k+1} \downarrow & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \\ \dots & \longleftarrow & C_{k+1}(Y) & \longrightarrow & C_k(Y) & \longrightarrow & \dots \longleftarrow C_0(Y). \end{array}$$

Par hypothèse, il existe une homotopie  $H$  de  $f$  à  $g$ . On veut construire des applications  $h_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  de sorte que  $f_{\#, k} - g_{\#, k} = \partial_{k+1}^Y h_k + h_{k-1} \partial_k^X$ . Il suffit de la définir sur un simplexe  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ . Remarquons que  $H$  induit une application  $P : \Delta^k \times I \rightarrow Y$ , en notant  $I$  le segment  $[0,1]$  définie par  $(x,t) \mapsto H(\sigma(x),t)$  du *prisme*  $\Delta^k \times I$  dans  $Y$ , avec  $P(-,0) = f_{\#, k}(\sigma)$  et  $P(-,1) = g_{\#, k}(\sigma)$ . On peut voir  $f_{\#, k}(\sigma)$  comme la face du bas du prisme et  $g_{\#, k}(\sigma)$  sa face du haut ; cela dit, ce vocabulaire est impropre, car le prisme n'est pas un simplexe.

Nous allons donc décomposer le prisme en simplexes, dont on pourra calculer algébriquement la frontière. Notons  $a_0, \dots, a_k$  les sommets du simplexe  $\Delta^k \times \{0\}$  et  $b_0, \dots, b_k$  ceux de  $\Delta^k \times \{1\}$ , dans le

FIGURE 5.3.1 : *Décomposition du prisme.* —

Par exemple, la décomposition de  $\Delta_2 \times [0,1]$  est en trois tétraèdres de sommets  $(0,0',1',2'), (0,1,1',2'), (0,1,2,2')$ .

même ordre. Pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , on définit un  $n+1$ -simplexe par

$$\sigma^i = P \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] : \Delta^{k+1} \rightarrow Y$$

où  $[a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] : \Delta^k \rightarrow \Delta^k \times I$  désigne l'unique application linéaire qui envoie les sommets de  $\Delta^k$  sur  $a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k$  dans cet ordre. On peut alors poser

$$h_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i P \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k].$$

Ceci s'étend en un morphisme  $h_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$  par linéarité, en prenant conventionnellement  $h_{-1} = 0$ . Il reste à prouver la relation d'homotopie voulue. On la montre sur les simplexes  $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ , ce qui suffit.

On a :

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{k+1}^Y (H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k]) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] \circ [v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_{k+1}] \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, \hat{a_j^k}, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b_{j-1}^k}, \dots, b_k^k] \\ \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\sigma) &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, \hat{a_j^k}, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] - \sum_{0 \leq i \leq j \leq k} (-1)^{i+j} P \circ [a_0, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b_j^k}, \dots, b_k^k] \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
 h_{k-1} \circ \partial_k^X(\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j h_{k-1}(\sigma \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k]) \\
 &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+j} H \circ (\sigma \circ [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k-1} (-1)^{i+j} P \circ ([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\
 &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ ([v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k] \times id) \circ [a_0^{k-1}, \dots, a_i^{k-1}, b_i^{k-1}, \dots, b_{k-1}^{k-1}] \\
 &= \sum_{0 \leq j \leq i \leq k-1} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_{i+1}^k, b_{i+1}^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_j^k, \dots, b_k^k] \\
 h_{k-1} \circ \partial_k^X(\sigma) &= - \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, \hat{a}_j^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, b_k^k] + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_i^k, \dots, \hat{b}_j^k, \dots, b_k^k].
 \end{aligned}$$

En sommant ces deux relations, les termes où  $i \neq j$  s'annulent, et il vient :

$$\begin{aligned}
 (\partial_{k+1}^Y \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k^X)(\sigma) &= \sum_{i=0}^k P \circ [a_0^k, \dots, a_{i-1}^k, b_i^k, \dots, b_k^k] - \sum_{i=0}^k P \circ [a_0^k, \dots, a_i^k, b_{i+1}^k, \dots, b_k^k] \\
 &= P \circ [b_0^k, \dots, b_k^k] - P \circ [a_0^k, \dots, a_k^k] \\
 &= H \circ (\sigma \times id) \circ [b_0^k, \dots, b_k^k] - H \circ (\sigma \times id) \circ [a_0^k, \dots, a_k^k] \\
 (\partial_{k+1}^Y \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k^X)(\sigma) &= H \circ (\sigma \times 1) - H \circ (\sigma \times 0) = g \circ \sigma - f \circ \sigma.
 \end{aligned}$$

Rejustifions enfin dans ce cas particulier que deux morphismes de complexes de chaînes homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie. Prenons  $\sigma = \partial_{k+1}^Y(\sigma_0)$ . Alors  $f_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) - g_{\#,k}(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = \partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) + h_{k-1} \circ \partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$  où  $h_{k-1} \circ \partial_k^X(\partial_{k+1}(\sigma_0))$  est nul par structure de complexe et  $\partial_{k+1}^Y \circ h_k(\partial_{k+1}(\sigma_0)) = 0$  dans  $Z_k^Y / \text{Im}(\partial_{k+1}^Y)$ , d'où  $f_{\#,k}(\sigma) = g_{\#,k}(\sigma) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ . ■

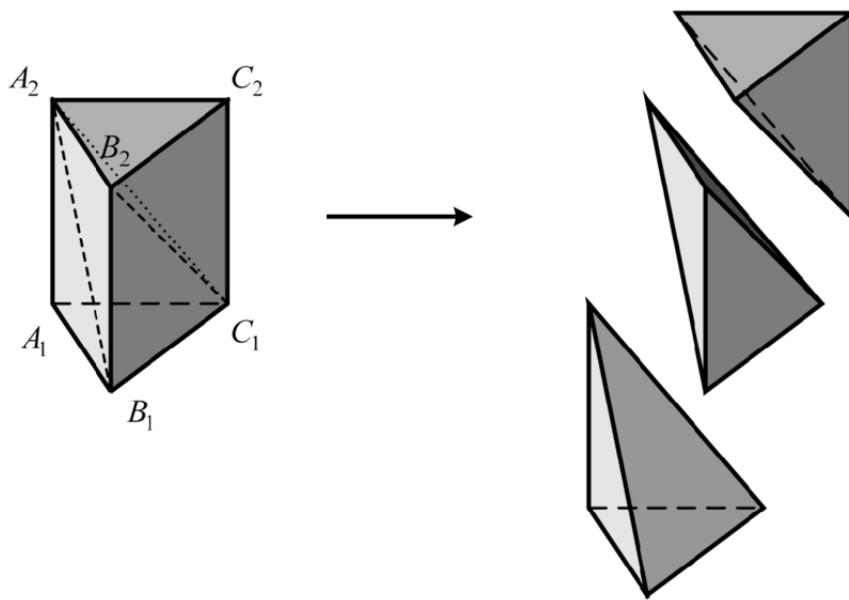
Cette preuve utilise une méthode qui sera utilisée plusieurs fois dans des preuves importantes de les théories topologico-algébriques.

### Méthode. (*Triangulation du prisme*)

Le cylindre sur le  $k$ -simplexe  $T^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , appelé *prisme*, se *triangule* au sens clair des complexes simpliciaux en  $k+1$  simplexes de dimension  $k+1$ . Ce sont les  $\langle v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_k \rangle$  pour  $i$  parcourant  $\llbracket 0, k \rrbracket$  où la base du prisme est  $T^k \times \{0\} = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  et la base opposée est  $T^k \times \{1\} = \langle w_0, \dots, w_k \rangle$ . Remarquons que deux de ces simplexes de la triangulation sont les cônes de sommets un point de la base, sur la base opposée : l'autre étant le contraire. On conseille au lecteur de faire le dessin.

### Corollaire. (*Simplexes homotopes et classes d'homologie*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma, \sigma'$  deux  $n$ -simplexes singuliers d'un espace  $X$  homotopes en tant qu'applications continues. On suppose que ce sont des cycles en tant que chaînes singulières. Alors  $[\sigma] = [\sigma']$  dans  $H_n(X)$ , i.e.  $\sigma, \sigma'$  sont homologues.

FIGURE 5.3.2 : *Triangulation du prisme sur le triangle.* —

**Mnémonik :** homotope  $\implies$  homologue.

**Corollaire. (Type d'homotopie et isomorphisme de complexes)**

Deux espaces homotopiquement équivalents  $X \cong Y$ , en particulier deux espaces homéomorphes, ont des complexes de chaînes singulières isomorphes dans la catégorie homotopique des complexes de chaînes singulières. En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$H_k(X) \simeq H_k(Y).$$

Ainsi, l'homologie du complexe de chaînes singulières est un invariant d'homotopie (de la catégorie des) des espaces topologiques.

▷ En effet, soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  une paire d'équivalence d'homotopie. On a  $f \circ g \cong id_Y$  et  $g \circ f \cong id_X$ . Par la proposition précédente,  $(f \circ g)_{*,k} = f_{*,k} \circ g_{*,k} = id_{H_k(Y)}$  et  $(g \circ f)_{*,k} = g_{*,k} \circ f_{*,k} = id_{H_k(X)}$ , autrement dit  $f_{*,k} = g_{*,k}$  sont une paire d'isomorphie de groupes, d'où  $H_k(X) \simeq H_k(Y)$ . ■

— Notation. Dans le cadre de l'homologie singulième, on identifie deux groupes d'homologie isomorphes par un signe  $=$ .

**Corollaire. (*Homologie d'un espace contractile*)**

Soit  $X$  un espace contractile. Alors

$$\begin{cases} H_0(X) = \mathbb{Z} \\ H_k(X) = 0 \text{ si } k \geq 1. \end{cases}$$

▷ C'est l'homologie singulière d'un point. ■

**Exemple**

En particulier  $H_k(\Delta^n)$ ,  $H_k(I^n)$  et  $H_k(B^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  sont nuls dès que  $k > 0$ .

Cette propriété nous donne envie de définir :

**5.3.1.4 Quasi-isomorphie****Définition. (*Quasi-isomorphisme*)**

Un *quasi-isomorphisme* est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques qui induit pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , elle induise un isomorphisme  $f_{*,k} : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ .

Cette définition ne coïncide qu'en apparence avec celle donnée pour des complexes de chaînes dans les catégories abéliennes. En effet, ici  $f$  n'est pas un morphisme de complexes *i.e.* dans  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  mais un morphisme de  $\mathcal{A}$  qui en induit un sur le complexe grâce à la première remarque de cette section, ce qui n'a rien d'automatique en théorie générale de l'homologie.



On rappelle également qu'un *isomorphisme de complexes de chaînes singulières*, *i.e.* la donnée d'isomorphismes réciproques entre les complexes de chaînes singulières à tout degré et commutant avec les différentielles, est un quasi-isomorphisme au sens des complexes de chaînes mais que la réciproque est fausse.

D'après ce qui précède, donc :

**Fait. (*Équivalence d'homotopie  $\Rightarrow$  quasi-isomorphisme*)**

Toute équivalence d'homotopie, en particulier tout homéomorphisme est un quasi-isomorphisme.

C'est le corollaire suprécédent.

**Contre-exemple. (*Équivalences d'homotopie, quasi-isomorphismes, réciproques en homotopie*)**

La réciproque est fausse : un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie.

Montrons le fait suivant : soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux espaces connexes par arcs. Alors  $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$  est un isomorphisme induit, i.e.  $f$  est un quasi-isomorphisme. On écrit  $H_0(X) = \mathbb{Z}[x]$  où  $[x]$  est la classe d'homologie de n'importe quel point vu comme un 1-simplexe standard  $\Delta^1 \rightarrow X, t \mapsto x$ . Alors l'application induite  $f_* := f_{*,0}$  envoie  $k[x]$  sur  $k[f(x)]$ . On a aussi  $H_0(Y) = \mathbb{Z}[y]$  de même que pour  $X$ , et puisque  $f(x)$  est également un point de  $Y$ ,  $[f(x)] = [y] \dots$  donc  $f(k[x]) = k[y]$ . Ainsi,  $f$  est « l'identité » si l'on identifie  $H_0(X) = H_0(Y) = \mathbb{Z}$ , mais il est moins cavalier de simplement dire que  $f$  est un isomorphisme de groupes, car elle envoie une base sur une base.

Et même, l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque.

Le contre-exemple précédent convient également d'après la remarque qui suit directement.

De plus, ces deux énoncés étaient équivalents !

Notons  $P$  : « un quasi-isomorphisme ne provient pas nécessairement d'une équivalence d'homotopie » et  $Q$  : « l'existence d'un quasi-isomorphisme entre deux espaces n'implique pas l'existence d'un quasi-isomorphismisme réciproque ». Il est clair que  $Q \implies P$ . Réciproquement, soit  $f$  un quasi-isomorphisme qui ne soit pas une équivalence d'homotopie. Alors montrons qu'il n'a pas de quasi-isomorphismisme réciproque. En effet, si  $fg = gf = id$  en homologie, cela signifie que  $f$  et  $g$  sont équivalences d'homotopie réciproques, en particulier que  $f$  est une équivalence d'homotopie.  $\square$

### Proposition

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Cette assertion sera démontrée dans le cours d'HOMOTOPIE. ■

On retrouve donc :

### Corollaire

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

*Remarque.* La réciproque est vraie pour des espaces qui se comportent bien, tels les CW-complexes, comme le précise un théorème de WHITEHEAD.

#### 5.3.1.5 Groupes d'homologie réduits

Définition-propriété. (*Complexe de chaînes singulières augmenté*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\tilde{\mathcal{C}}(X)$  ou encore  $\mathcal{C}(X)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  et  $\varepsilon$  est la somme

des coefficients.

En considérant les groupes d'homologie de ce nouveau complexe de chaînes, on obtient par définition les *groupes d'homologie réduits*  $\tilde{H}_k(X)$  de  $X$ .

▷ Il est clair que  $\varepsilon$  est un morphisme de groupes car de type degré. Il suffit de vérifier que  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ , ce qui est immédiat : si  $\sigma = \partial_1(\sigma_0)$ ,  $\sigma = \sigma_0(1) - \sigma_0(0)$  d'où  $\varepsilon(\sigma) = 1 - 1 = 0$ . ■

Ce formalisme se justifie en fait plus naturellement que celui du complexe non augmenté : l'ensemble des simplexes de degré  $-1$  est vide, donc le groupe abélien libre engendré par leur ensemble est égal à  $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ .

*Remarque.* On a en particulier  $\tilde{H}_k(X) = H_k(X)$  si  $k \geq 1$ , mais a priori  $\tilde{H}_0(X) \neq H_0(X)$ . Ainsi, l'homologie réduite ne concerne que l'homologie en degré nul, qui se restreint aux 0-chaînes de « degré  $\varepsilon$  » nul, à savoir  $\boxed{\tilde{H}_0(X) = \text{Ker}(\varepsilon)/\text{Im}(\partial_1)}$ .

**Fait.** (*L'homologie réduite est plus petite que l'homologie singulière*)

Pour tout espace topologique  $X$ ,  $\tilde{H}_0(X) \subseteq H_0(X)$ .

Tout est en fait réglé par :

**Proposition.** (*Lien homologie réduite-homologie singulière*)

Pour tout espace topologique non vide  $X$ ,  $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ .

En particulier,  $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}^{\text{nombre de composantes connexes par arcs de } X - 1}$ .

▷ Technique classique : soit  $x_0 \in X$ . On la suite exacte courte  $0 \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{\tilde{i}} H_0(X) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ , puisque  $\tilde{i} : \text{Ker}(\partial_0)/\text{Im}(\partial_1) \rightarrow C_0(X)/\text{Im}(\partial_1)$  descend injectivement évidemment,  $\tilde{\varepsilon}$  est a fortiori surjective évidemment et par construction  $\text{Ker}(\tilde{\varepsilon}) = \text{Im}(\tilde{i})$ . Elle scinde par  $n \mapsto n[x_0]$ ,  $n[x_0]$  n'étant pas un 1-cycle, d'où le résultat. ■

**Exemples.** (*Groupes d'homologie réduits triviaux*)

1. Si  $X$  est connexe par arcs,  $\tilde{H}_0(X) = 0$ .
2. (*Homologie réduite du point*) Soit  $X$  un espace contractile. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{H}_k(X) = 0$ . C'est pour eux que l'on a inventé l'homologie réduite !

### 5.3.1.6 Groupes d'homologie relatifs

On constate que l'inclusion d'une partie  $A$  dans un espace  $X$  induit une suite exacte courte de complexes de chaînes  $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A) \longrightarrow 0$ . Elle induit donc une suite exacte en homologie. Ce nouveau complexe singulier prenant en compte l'influence d'une partie

choisie est l'homologie de  $X$  relative à  $A$ .

Soit  $(X, A)$  une paire topologique, et notons  $\iota$  l'inclusion canonique. Il n'est pas difficile de voir que les colonnes de

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(A) & \longrightarrow & C_0(A) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) \end{array}$$

sont exactes, autrement dit que les morphismes induits par l'inclusion canonique sont injectifs, ce qui est sans détour. En définissant  $C_k(X, A) = C_k(X)/C_k(A)$  pour tout  $k \geq 0$ , on peut alors compléter grâce aux projections canoniques  $\pi_k : C_k(X) \rightarrow C_k(X, A)$  le diagramme précédent en

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(A) & \longrightarrow & C_k(A) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(A) & \longrightarrow & C_0(A) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \longrightarrow & C_k(X) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_{k+1}(X, A) & & C_k(X, A) & & & C_1(X, A) & & C_0(X, A) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & & 0 & & 0 \end{array}$$

où les colonnes sont encore exactes. De plus, la suite  $(C_k(X, A))_{k \in \mathbb{N}}$  est naturellement munie d'une structure de complexe notée  $\mathcal{C}(X, A)$  en posant pour différentielle d'ordre  $k \in \mathbb{N}$   $\partial_{k\mathcal{C}(X, A)}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$  où  $\sigma'$  est un représentant de la classe  $\sigma$  (voir la preuve suivante), autrement dit en notant  $\pi_k^{-1}$  une section ensembliste de  $\pi_k$ ,  $\partial_{k\mathcal{C}(X, A)} = \pi_k \circ \partial_{kX} \circ \pi_{k+1}^{-1}$ .

Vérifions que l'application bord sur  $C(X, A)$  est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour  $\sigma, \sigma'$  dans  $C_{k+1}(X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que  $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$ , i.e.  $\sigma = \sigma' + c$  où  $c \in C_{k+1}(A)$ , on a  $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$ . C'est en fait immédiat, car  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$  étant  $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$  et alors  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$  où  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$ .

D'autre part, montrons que  $\pi_{k-1}\partial_{k-1}^X\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X\pi_{k+1}^{-1}$  est nulle. On ne peut dire que  $\pi_k^{-1}\pi_k = id_{C_k(X, A)}$ , car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute  $k+1$ -chaîne  $\sigma$  de  $X$ ,  $\pi_k^{-1}\pi_k\partial_k^X(\sigma) = \partial_k^X(\sigma) + c$  où  $c \in C_k(A)$ . En passant la différentielle  $\partial_{k-1}^X$ , le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne  $\partial_{k-1}^X(c)$  qui est dans  $C_{k-1}(A)$ , donc est tuée par  $\pi_{k-1}$ .

Ainsi le grand diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & 0 \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \downarrow 0 \\
 \dots & \longrightarrow C_{k+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(A)}} & C_k(A) & \longrightarrow \dots & \longrightarrow C_1(A) & \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(A)}} C_0(A) \\
 & \downarrow \iota_{*,k+1} & & \downarrow \iota_{*,k} & & \downarrow \iota_{*,1} & \downarrow \iota_{*,0} \\
 \dots & \longrightarrow C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(X)}} & C_k(X) & \longrightarrow \dots & \longrightarrow C_1(X) & \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(X)}} C_0(X) \\
 & \downarrow \pi_{k+1} & & \downarrow \pi_k & & \downarrow \pi_1 & \downarrow \pi_0 \\
 \dots & \longrightarrow C_{k+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_{k\mathcal{C}(X,A)}} & C_k(X,A) & \longrightarrow \dots & \longrightarrow C_1(X,A) & \xrightarrow{\partial_{0\mathcal{C}(X,A)}} C_0(X,A) \\
 & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & \downarrow 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

est commutatif, par construction.

▷ Vérifions que l'application bord sur  $C(X,A)$  est bien définie et que son carré fait zéro.

Il suffit de vérifier d'abord que pour  $\sigma, \sigma'$  dans  $C_{k+1}(X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tels que  $\pi_{k+1}(\sigma) = \pi_{k+1}(\sigma')$ , i.e.  $\sigma = \sigma' + c$  où  $c \in C_{k+1}(A)$ , on a  $\pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma) = \pi_k \circ \partial_{kX}(\sigma')$ . C'est en fait immédiat, car  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}$  étant  $\partial_{k\mathcal{C}(A)}$  et alors  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma) = \partial_{k\mathcal{C}(X)}(\sigma') + \partial_{k\mathcal{C}(X)}(c)$  où  $\partial_{k\mathcal{C}(X)}(c) \in C_k(A)$ .

D'autre part, montrons que  $\pi_{k-1} \partial_{k-1}^X \pi_k^{-1} \pi_k \partial_k^X \pi_{k+1}^{-1}$  est nulle. On ne peut dire que  $\pi_k^{-1} \pi_k = id_{C_k(X,A)}$ , car même ensemblistement, c'est faux. En revanche, pour toute  $k+1$ -chaîne  $\sigma$  de  $X$ ,  $\pi_k^{-1} \pi_k \partial_k^X(\sigma) = \partial_k^X(\sigma) + c$  où  $c \in C_k(A)$ . En passant la différentielle  $\partial_{k-1}^X$ , le premier s'annule, donc il ne reste plus qu'une chaîne  $\partial_{k-1}^X(c)$  qui est dans  $C_{k-1}(A)$ , donc est tuée par  $\pi_{k-1}$ . ■

### Définition-propriété. (*Groupes d'homologie relatifs*)

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs* de  $(X,A)$  sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative*  $\mathcal{C}(X,A)$  défini comme dans le laïus précédent. On note  $H_k(X,A)$  le  $k$ -ième *groupe d'homologie relatif de X par rapport à A*.

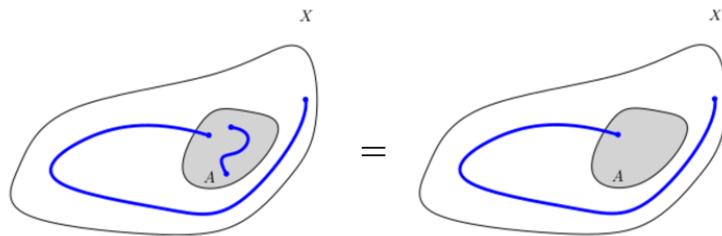
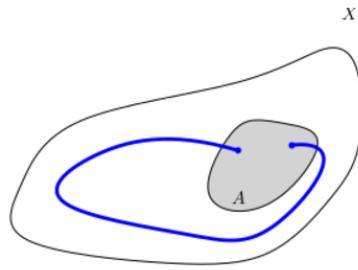


FIGURE 5.3.3 : Une seule et même 1-chaîne de  $\mathcal{C}(X,A)$ . —

FIGURE 5.3.4 : Un 1-cycle de  $\mathcal{C}(X,A)$ . —

On peut en même temps appliquer le théorème fondamental de l'homologie qui nous donne la

**Propriété. (Suite exacte homologique de la paire  $(X,A)$ )**

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie, terminée par  $H_0(A) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$ . De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre paires.

▷ On conseille au lecteur de redémontrer le théorème fondamental de l'algèbre homologique, pour l'hygiène. Quant à nous, explicitons les flèches, ce qui est bien important.

La discussion faite a donc exhibé un morphisme de complexes  $0 \longrightarrow \mathcal{C}(A) \xrightarrow{i_\#} \mathcal{C}(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(X,A) \longrightarrow 0$ , car les différentielles commutent avec  $i_\#$  et  $\pi$ . Les applications  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  ne sont autre que les applications induites en homologie par le morphisme de chaînes  $i_\#$ , donc a fortiori ce sont celles induites par l'inclusion  $i \in \mathbb{N}$ ; à une classe d'homologie de cycle dans  $A$ , on associe celle induite dans  $X$ .

Pour  $H_{k+1}(X) \rightarrow H_{k+1}(X,A)$ , ce sont les applications induites en homologie  $H(\pi)$  par le morphisme de complexes de chaînes  $\pi$ : autrement dit, à une classe d'homologie de cycle dans  $A$ , on associe celle induite dans  $C(X)/C(A)$  modulo (attention!) la différentielle induite.

Construisons enfin le connectant  $\delta_{k+1} : H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_k(A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $x \in Z_{k+1}(X,A)$ , par surjectivité de  $\pi_{k+1}$ , il existe  $y \in C_{k+1}(X)$  tel que  $\pi_{k+1}(y) = x$ . On a alors  $\pi_k(\partial_{k+1}(y)) = \partial_{k+1}\pi_{k+1}(y) = \partial_{k+1}x = 0$  par hypothèse. Donc  $\partial_{k+1}(y)$  est dans  $\text{Ker}(\pi_k)$ . Par exactitude de la suite courte de complexes, il est dans  $\text{Im}(\iota_{*,k})$ . Soit donc  $z \in C_k(A)$  tel que  $\iota_{*,k}(z) = \partial_{k+1}(y)$ . On peut montrer que l'élément  $z$  est bien un cycle, que deux homologues ont la même image et que l'on définit bien là un morphisme. ■

Si  $(X,A)$  est une paire topologique, on a un morphisme  $H_k(X) \rightarrow H_k(X,A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $H_{k-1}(A) = 0$ , c'est une inclusion, et si  $A$  est quasi-isomorphe à un contractile, c'est un

¶ isomorphisme.

*Remarque.* En particulier,  $H_0(X,A)$  est un sous- $\mathbb{Z}$ -module de  $\mathbb{Z}^c$  où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ .



Si  $(X,A)$  est un paire topologique, en général,  $H_k(A)$  n'est pas un sous-groupe de  $X$ , sauf si par exemple si  $A$  est une composante connexe de  $X$ , ou encore si  $(X,A)$  est un rétract, ce que l'on a déjà vu. Il est donc délivrant d'espérer écrire en toute généralité  $H_k(X,A) \simeq H_k(X)/H_k(A)$ .

### Exercice 3 (Propriétés de l'homologie relative)

Soit  $(X,A)$  une paire topologique.

1. (*Homologie relative en degré nul*) Montrer que  $H_0(X,A) = 0$  si et seulement si  $A$  rencontre toutes les composantes connexes par arcs de  $X$ .
2. (*Homologie relative de degré 1*) Montrer que  $H_1(X,A) = 0$  si et seulement si l'application homologique induite par l'inclusion  $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$  est surjective et toute composante connexe par arcs de  $X$  contient au plus une composante connexe par arcs de  $A$ .
3. Montrer que l'inclusion canonique est un quasi-isomorphisme si et seulement si l'homologie relative est identiquement nulle.

▷ Éléments de réponse.

1. Par définition,  $H_0(X,A) = C_0(X,A)/\text{Im}(\partial_{0C(X,A)})$ . Ainsi,  $H_0(X,A) = 0 \iff \text{Im}(\partial_{0C(X,A)}) = C_0(X)/C_0(A)$ . En déroulant la définition de  $\partial_{0C(X,A)}$ , cela signifie exactement pour tout  $\sigma' \in C_0(X)$ , en fait il suffit de prendre  $\Sigma'$  un 0-simplexe singulier dans  $X$ , i.e. un point, il existe  $\sigma \in C_1(X)$ ,  $c' \in C_0(A)$  et  $c \in C_1(A)$  tels que  $\partial_0(\sigma + c) = \sigma' + c$ . Il est immédiat de voir qu'il est inutile de considérer  $c \in C_1(A)$  en plus, car  $C_1(A) \subseteq C_1(X)$ .

Ceci étant vu, supposons que  $A$  rencontre toutes les composantes connexes par arcs de  $X$ . Soit donc  $\sigma' \in X$ . Soit  $a$  un point de l'intersection de  $A$  avec la composante connexe par arcs de  $\sigma'$ . Soit  $\gamma: \sigma' \rightarrow a$  un chemin. Alors  $\partial_0(\gamma) = \sigma' - a = \sigma' + (-a)$  où  $-a \in C_0(A)$ . Réciproquement, soit  $C$  une composante connexe par arcs de  $X$ . Puisque par construction  $X \neq \emptyset$ , soit  $\sigma' \in X$ . Alors il existe toute cette ribambelle de trucs avec  $\partial_0(\sigma) = \sigma' + c'$ . Or  $\sigma$  est une somme de chemins, dont les images sont des différences de points. Puisque  $\sigma' + c'$  est une somme contenant un seul point de  $X \setminus A$  a priori et ensuite des points à coup sûr dans  $A$ , il existe un chemin dans la somme  $\sigma$  dont l'image est une différence d'un point de  $A$  avec  $\sigma'$ , autrement dit par unicité de la décomposition selon une base, c'est un chemin continu de  $\sigma'$  à un point de  $A$ , ce qu'il fallait montrer.

2. Si  $H_1(X,A) = 0$ , par la suite exacte en homologie de la paire  $(X,A)$ , l'application  $H_1(A) \rightarrow H_1(X)$  est surjective, puisque suivie par l'application nulle. Considérons la suite  $0 \xrightarrow{f} H_0(A_i) \xrightarrow{g} H_0(X_i) \xrightarrow{h} H_0(X_i, A_i) \xrightarrow{0} 0$  pour toute composante connexe  $X_i$  de  $X$  et composante connexe  $A_i$  de  $A$  contenue dans  $X_i$ , de sorte que  $(X_i, A_i)$  soit une *sous-paire connexe* de  $(X, A)$ ; le premier terme est bien nul, car assez clairement  $H_1(X, A) = 0 = \sum_{i \in I, j \in J_i} H_1(X_i, A_j)$  où  $I$  indexe les composantes connexes de  $X$  et  $J_i$  les composantes connexes de  $A_i$  contenues dans  $X$ , sachant qu'une composante connexe de  $A$  est toujours incluse dans une de  $X$ , d'où  $H_1(X_i, A_i) = 0$ . Puisque  $f = 0$ ,  $g$  est surjective. Puisque  $X_i$  est connexe par arcs,  $H_0(X_i) = \mathbb{Z}$ . Si  $X_i$  contient plus d'une composante  $A_i$ , disons  $n > 1$ , alors

$\text{Im}(g) \simeq \mathbb{Z}^n$  d'après le théorème de Hurewicz, ce qui contredit  $\text{Im}(g) = H_0(X_i) = \mathbb{Z}$ .

Réiproquement, considérons la suite exacte :  $H_1(A) \xrightarrow{f} H_1(X) \xrightarrow{g} H_1(X,A) \xrightarrow{h} H_0(A) \xrightarrow{i} H_0(X)$  où  $H_0(A) = \sum_{j \in J_i, i \in I} H_0(A_j)$  et  $H_0(X) = \sum_{i \in I} H_0(X_i)$ . Puisque  $X_i$  contient au plus une  $A_i$ ,  $i$  est injective, d'où  $\text{Ker}(i) = 0$  : en effet, si  $x,y \in A$  et  $x - y = 0$  dans  $H_1(X)$ , il existe un chemin continu dans  $X$  joignant  $x$  et  $y$ , et comme  $x,y \in A$ , ce chemin continu est inclus dans l'unique composante connexe de  $A$  contenue dans  $X$ , donc  $x = y$  dans  $H_1(A)$ . Puisqu'aussi par hypothèse  $f$  est surjective,  $\text{Im}(g) = H_1(X) = \text{Ker}(g) = H_1(X)$ , d'où  $g = 0$  et  $\text{Im}(g) = 0 = \text{Ker}(h)$ . Ainsi,  $H_1(X,A) = H_1(X,A)/\text{Ker}(h) = \text{Im}(h) = \text{Ker}(i) = 0$ .

3. Si  $H_k(X,A) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par caractérisation des isomorphismes par exactitude, on a  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  un isomorphisme en tout  $k \in \mathbb{N}$ . Or c'est le morphisme induit par l'inclusion canonique, qui est donc un quasi-isomorphisme par définition. Réiproquement, supposons que ce soit le cas. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Im}(H_k(A) \rightarrow H_k(X)) = H_k(X) = \text{Ker}(H_k(X) \rightarrow H_k(X,A))$  qui est donc l'application nulle. De même de l'autre côté,  $\text{Ker}(H_k(A) \rightarrow H_k(X)) = 0 = \text{Im}(H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_k(A))$  qui est donc l'application nulle. On a donc  $\star \xrightarrow{0} H_k(X,A) \xrightarrow{0} \star$  et l'exactitude de cette suite donne  $H_k(X,A) = 0$ .

### Corollaire. (*Homologie relative d'un rétract*)

Si  $(X,A)$  est un rétract, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X) = H_k(X,A) \oplus H_k(A)$ .

▷ En effet, on a vu que  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  était injective pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . De plus,  $H_k(X) \rightarrow H_k(X,A)$  est surjective, puisque  $H_{k+1}(X,A) \rightarrow H_k(A)$  est alors nulle. On a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(X,A) \longrightarrow 0$$

qui est scindée à gauche par  $r_*$  l'application induite en homologie par une rétraction  $r : X \rightarrow A$ . Comme on parle de  $\mathbb{Z}$ -modules, la suite est tout simplement scindée, d'où  $H_k(X) = H_k(X,A) \oplus H_k(A)$ . ■

L'homologie relative englobe grossièrement l'homologie tout court, par la remarque suivant :

### Corollaire. (*Récupération des groupes réduits par l'homologie relative*)

Considérons  $X$  un espace topologique. Soit  $x_0 \in X$ . Alors

$$H_k(X,x_0) := H_k(X,\{x_0\}) \simeq \tilde{H}_k(X)$$

pour tout  $k \geq 0$ .

▷ En effet, on prend  $A = \{x_0\}$  dans la preuve précédente, ce qui donne grâce  $H_k(A) = 0$  pour tout  $k \geq 1$  des suites exactes  $H_{k+1}(A) = 0 \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,x_0) \longrightarrow H_k(A) = 0$ . Autrement dit, la flèche du milieu est injective et surjective ; c'est un isomorphisme, d'où  $H_{k+1}(X) \simeq H_{k+1}(X,x_0)$ . Reste à traiter le cas  $k = 0$ . D'après le point précédent,  $\{x_0\}$  étant un rétract de  $X$ ,  $H_0(X,\{x_0\}) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$  puisque  $H_0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ , et puisque en degré 0 ce n'est que du calcul de  $\mathbb{Z}^d$ , on a bien  $H_0(X,\{x_0\}) = \tilde{H}_0(X)$ . ■

*Remarque.* On peut même récupérer l'homologie singulière non réduite en considérant  $A = \emptyset$ .

En effet, le raisonnement pour  $k \in \mathbb{N}^*$  dans la preuve précédente tient également pour  $k = 0$ , car la suite exacte longue en homologie de  $(X, A)$  se prolonge à droite par des applications nulles.

Ainsi, l'**homologie relative est le type le plus général d'homologie topologique**.

### Fait. (*Application induite en homologie relative*)

Toute application continue  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , i.e.  $f : X \rightarrow Y$  continue et telle que  $f(A) \subseteq B$ , induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(A) & \longrightarrow & H_{k+1}(X) & \longrightarrow & H_{k+1}(X, A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow \dots \\ & & f|_{A_{*, k+1}} \downarrow & & f_{*, k+1} \downarrow & & \downarrow & & f|_{A_{*, k}} \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_{k+1}(B) & \longrightarrow & H_{k+1}(Y) & \longrightarrow & H_{k+1}(Y, B) \longrightarrow H_k(B) \longrightarrow \dots \end{array}$$

où la flèche manquante est construite à partir du diagramme à deux entrées de l'homologie relative. On la note encore  $f_{*, k}$  et l'on dit que c'est l'application induit (sur les groupes) d'homologie (singulière) relative. On note bien sûr  $f_*$  la donnée entière des  $f_{*, k}$ .

En effet, on a en trois dimensions entre les deux diagrammes à deux entrées de  $(X, A)$  et  $(Y, B)$ , des applications  $f'_\# : C_k(A) \rightarrow C_k(B)$  et  $f_\# : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$  en tout  $k \in \mathbb{N}$ , qui passe au quotient et ce de manière commutative automatiquement. En effet si  $\sigma = \sigma' + \tau$  où  $\sigma, \sigma' \in C_k(X)$  et  $\tau \in C_k(b)$ ,  $f_\#(\sigma) = f_\#(\sigma') + f_\#(\tau)$  où  $f_\#(\tau) \in C_k(B)$ .

On a donc un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes. Il donne naissance à un morphisme en homologie  $H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_{k+1}(Y, B)$  et celui-ci fait commuter automatiquement le diagramme donné s'il existe.

À ce stade, il est peut-être plus sage d'utiliser les notations non indicées. Pour  $[x] \in H(X, A)$  dans  $\text{Ker}(\partial) \subseteq C(X, A)$ , il existe  $y \in C(X)$  tel que  $x = \pi(y)$ . Alors  $f_\#(y) \in C(Y)$ . Prenons  $\pi f_\#(x) \in C(Y)/C(B)$ . Alors  $\pi f_\# \in \text{Ker}(\partial)$ , car  $\partial \pi f_\#(x) = \pi f_\# \partial(x) = 0$ , car  $\partial(x) = 0$ . On peut donc prendre la classe dans  $H(Y, B)$ . Ceci est alors muni de la structure de morphisme. Reste à vérifier qu'il est bien défini. Si  $x = x' + \partial(c)$ , prenons des antécédants  $y, y'$  respectivement de  $x, x'$  et notons  $d = y - y'$ . Alors  $y = y' + d$  avec chacun des termes antécédant de  $x = x' + \partial(c)$ . On suppose  $y, y' \in \text{Ker}(\partial)$ . Alors  $f_\#(y) = f_\#(y') + f_\#(d)$  puis  $\pi f_\#(y) = \pi f_\#(y') + \pi f_\#(d)$ . Mais  $\pi f_\#(d)$  est dans le noyau de la différentielle relative de  $C(Y, B)$ , car  $d$  dans celle de la différentielle relative de  $C(X, A)$ , en vertu de la commutation de la strate la plus basse du rectangle commutatif.

### Propriété. (*Type d'homotopie et isomorphisme de complexes relatifs*)

Si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  est une application continue entre paires topologiques qui est une équivalence d'homotopie et telle que  $f|_{A \rightarrow B}$  est aussi une équivalence d'homotopie, alors  $f_* : H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$  induit un isomorphisme

$$H_k(X, A) \simeq H_k(Y, B)$$

pour tout  $k \geq 0$ .

▷ Application directe du lemme des cinq dans le diagramme de l'application induite en homologie relative (en écrivant dans notre représentation une colonne de plus à droite). ■

### Définition. (*Triplet topologique*)

Un *triplet topologique* est un triplet  $(X,A)$  tel que  $(X,A)$  et  $(A,B)$  soient des paires topologiques, i.e.  $X, A, B$  sont trois espaces topologiques tels que  $X \supseteq A \supseteq B$ .

### Propriété. (*Suite exacte homologique associée au triplet $(X,A,B)$* )

Soit  $(X,A,B)$  un triplet topologique. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(A,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,B) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A,B) \longrightarrow \dots$$

longue en homologie relative, terminée par  $H_0(A,B) \longrightarrow H_0(X,B) \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0$ . De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre triplets.

▷ Explicitons simplement les flèches. La première flèche représentée est induite par l'inclusion  $(A,B) \hookrightarrow (X,B)$ . La seconde est induite quant à elle par  $(X,B) \hookrightarrow (X,A)$ . La troisième est la composée  $H_{k+1}(X,A) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A,B)$ . On peut montrer qu'elles forment une suite exacte. ■

### Corollaire. (*Suite exacte d'homologie réduite associée à la paire $(X,A)$* )

On obtient la suite exacte associée à une paire topologique  $(X,A)$  où  $A \neq \emptyset$  pour les groupes d'homologie réduits :

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_{k+1}(A) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_{k+1}(X,A) \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \longrightarrow \dots$$

où seuls les  $H_i(X,A)$  n'ont pas de tildes. De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues entre paires.

▷ Puisque  $A \neq \emptyset$ , on peut prendre  $B \subseteq A$  ponctuel et le résultat s'ensuit par le corollaire de récupération de l'homologie réduite par la relative. ■

### 5.3.2 Calcul pratique de l'homologie singulière

#### 5.3.2.1 Théorèmes d'excision

**Définition-propriété.** (*Complexe de chaînes subordonné*)

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  tel que  $(\tilde{U}_i)_{i \in I}$  soit un recouvrement ouvert de  $X$ . On peut considérer le complexe de chaînes, parfois dit *complexe subordonné au recouvrement  $\mathcal{U}$* , noté  $\mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X)$  où l'on se restreint dans chaque groupe abélien libre aux simplexes singuliers dont l'image est contenue dans au moins l'un des  $U_i$ , sachant qu'au même au même ordre, nul besoin pour additionner deux simplexes qu'ils soient contenus dans un même ouvert.

▷ Il est évident que la différentielle est encore bien définie, car un simplexe inclus dans un ouvert à toutes ses faces encore dedans. On a encore une différentielle par simple descente (nul quotient ici). ■

→ *Notation.* On note  $H_k^{\mathcal{U}}(X)$  où  $H_k(X^{\mathcal{U}})$  les groupes d'homologie pour  $k \in \mathbb{N}$  du complexe de chaînes subordonné au recouvrement  $\mathcal{U}$  de l'espace  $X$ .

**Théorème.** (*Théorème des petites chaînes*)

Soient  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $X$  dont les intérieurs forment un recouvrement de  $X$ . Alors l'inclusion canonique  $\text{inc} : \mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}(X)$  est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. En particulier, ce morphisme induit des isomorphismes sur leurs groupes d'homologie.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La preuve repose sur la notion de subdivision barycentrique. ■

On peut le récrire sous la forme plus pratique :

**Reformulation pratique.** (*Théorème d'excision*)

On considère un triplet  $(X, A, V)$  où  $V$  est fortement inclus dans  $A$ , i.e.  $\overline{V} \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Alors l'inclusion  $i : (X \setminus V, A \setminus V) \hookrightarrow (X, A)$  induit pour tout entier  $k \geq 0$  un isomorphisme  $i_* : H_k(X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow H_k(X, A)$ , et l'on dit ici que  $U$  peut être *excisé*, c'est-à-dire qu'un tel isomorphisme a lieu.

**Méthode.** (*Comment exciser un non-excisable*)

Supposons que  $(X, A, V)$  ne soit pas tel que  $V$  soit fortement inclus dans  $A$ . Alors si  $(X, A', V')$  est une paire topologique avec  $V'$  fortement inclus dans  $A'$  et  $V' \subseteq V$  est un rétract par déformation de  $V$  et  $A' \subseteq A$  un rétract par déformation de  $A$ , on a un isomorphisme pour tout  $k \in \mathbb{N}$  de  $H_k(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_k(X, A)$ .

▷ En effet, l'homologie et l'homologie relative se comportent bien vis-à-vis de l'équivalence d'homotopie en raison la suite exacte longue en homologie relative qui ne varie alors que d'un terme et il suffit de lui appliquer un petit lemme des cinq. ■

### Corollaire. (*Homologie d'un conifié*)

Soit  $(X,A)$  une paire topologique. On rappelle que le conifié  $X \cup CA$  est  $(X \coprod C(A))/\sim$  où  $C(A)$  est le cône de  $A$  et  $\sim$  est l'équivalence identifiant tout point  $a \in A \subseteq X$  avec le point  $(a,0) \in C(A)$ .

L'inclusion  $(X,A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$  induit pour tout entier naturel  $k$  un isomorphisme entre les groupes d'homologie  $H_k(X,A) \rightarrow H_k(X \cup CA, CA)$ .

▷ En effet, les hypothèses du théorème d'excision sont vérifiées :  $\{v\}$  où  $v$  est le sommet du cône  $CA$  est un fermé inclus dans l'intérieur de  $CA$ . ■

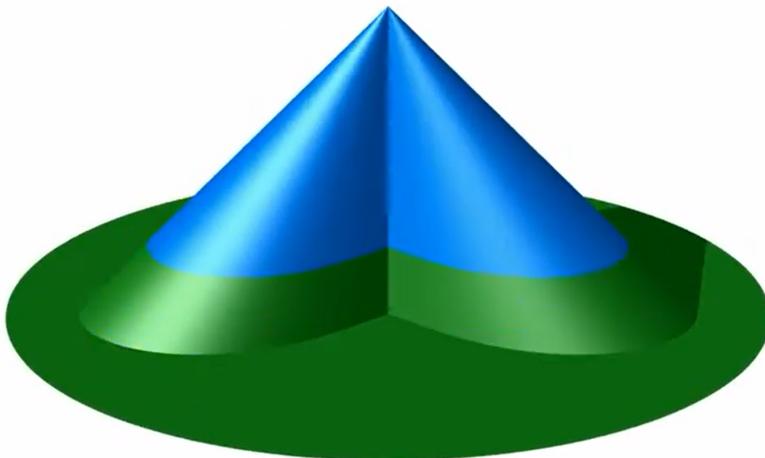


FIGURE 5.3.5 : *Homologie d'un conifié par l'excision.* —

On rappelle que si  $(Y,X)$  a la PEH et  $X$  est contractile, alors  $Y$  et  $Y/X$  sont homotopiquement équivalents. Plus généralement :

### Proposition. (*Théorème d'écrasement*)

Soit  $(X,A)$  une paire de Borsuk, i.e.  $(X,A)$  a la propriété d'extension des homotopies et éventuellement  $A$  est fermée dans  $X$ . Alors la projection  $p : X \rightarrow X/A$  induit un isomorphisme

$$H_k(X,A) \simeq \tilde{H}_k(X/A)$$

pour tout entier naturel  $k$ .

Ainsi, le théorème d'excision a pour conséquence que dans le cas d'une bonne paire

topologique, on peut retrouver à partir de l'homologie relative l'homologie absolue, quoique réduite.

▷ On montre qu'elle induit plus précisément un isomorphisme  $H_k(X, A) \rightarrow H_k(X/A, A/A)$ . ■

#### Exercice 4

Retrouver la propriété rappelée au-dessus : si  $(Y, X)$  est une paire de Borsuk avec  $X$  contractile,  $Y \cong Y/X$ , grâce au théorème d'excision.

Une application importante du théorème d'excision est le calcul des groupes d'homologie singulière des sphères que nous verrons avant la fin du chapitre.

##### 5.3.2.2 Suite de Mayer-Vietoris

###### Définition. (*Somme directe de complexes de chaînes*)

La somme directe de complexes de chaînes est définie terme à terme par la somme directe en tant que  $\mathbb{Z}$ -modules de chaque terme.

Généralisons ce que nous avons vu pour la décomposition en composantes connexes.

###### Propriété. (*Homologie d'une somme disjointe*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X \sqcup Y) = H_k(X) \oplus H_k(Y)$ .

Plus généralement, si  $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$  est une somme topologique d'espaces  $(X_i)_{i \in I}$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(X) = \bigoplus_{i \in I} H_k(X_i)$ .

###### Propriété. (*Suite de Mayer-Vietoris*)

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ , en particulier deux ouverts recouvrant  $X$ . On pose  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . La suite exacte courte suivante de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(A \cap B) \longrightarrow \mathcal{C}(A) \oplus \mathcal{C}(B) \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

produit une suite exacte longue de groupes d'homologie :

$$\dots \longrightarrow H_k(A \cap B) \longrightarrow H_k(A) \oplus H_k(B) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0$  dite *suite de Mayer-Vietoris*. De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues.

▷ C'est un corollaire du théorème d'excision. ■

### Heuristique

La suite de Mayer-Vietoris est l'analogue homologique du théorème de van Kampen.

### Méthode. (*Calcul d'homologie par la suite de Mayer-Vietoris*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- ★ Le morphisme  $H_k(A) \oplus H_k(B) \rightarrow H_k(X)$  envoie  $\iota_*(\alpha) \oplus \iota'_*(\beta)$  sur  $\alpha + \beta$  en notant  $\iota : A \rightarrow X$  et  $\iota' : B \rightarrow X$  sont les inclusions.
- ★ Le morphisme  $H_k(A \cap B) \rightarrow H_k(A) \oplus H_k(B)$  envoie  $\alpha$  sur  $\iota_*(\alpha) \oplus (-\iota'_*(\alpha))$ .
- ★ Si  $k \geq 1$ , le morphisme  $H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(A \cap B)$  est la composée du morphisme naturel  $H_k(X) \rightarrow H_k(X, B)$ , de l'isomorphisme  $H_k(X, B) \simeq H_k(X^{\{A, B\}}, B) = H_k(A, A \cap B)$  du théorème des petites chaînes puis le morphisme de bord  $\delta : H_k(A, A \cap B) \rightarrow H_{k-1}(A \cap V)$  de la suite exacte longue homologique de  $(A, A \cap B)$ .

### Application. (*Homologie singulière du tore*)

Calculons l'homologie du tore  $\mathbb{T}^2$ . On le recouvre par deux ouverts qui sont des tubes qui ne se refendent pas sur eux-mêmes, un rouge et un bleu disons pour concorder avec la figure suivante. Ils se rencontrent en l'union disjointe de deux tels tubes. Le procédé est semblable à la décomposition d'un cercle, mais ici avec un tore.

On a donc un recouvrement de Mayer-Vietoris par deux ouverts cylindriques qui se rétractent par déformation sur des cercles ; de plus, l'intersection est la réunion disjointe de deux cylindres, donc homotopiquement équivalente à  $S^1 \sqcup S^1$ .

On écrit

$$\begin{array}{c} \cdots \\ 0 = 0 \oplus 0 \xleftarrow{\quad} 0 = 0 \oplus 0 \xrightarrow{\quad} H_2(\mathbb{T}^2) \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\quad} H_1(\mathbb{T}^2) \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \end{array}$$

la suite exacte longue homologique de ce recouvrement, où la colonne gauche est l'homologie de  $S^1 \sqcup S^1$  et la colonne du milieu est la somme de deux homologies de  $S^1$ . Bon, c'est pareil, mais peu importe. On a clairement  $H_{\geq 3}(\mathbb{T}^2) = 0$  puisque ces groupes sont isolés

dans des termes nuls dans la suite. On a  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  par connexité et  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$  par le théorème d'Hurewicz. Reste à déterminer  $H_2(\mathbb{T}^2)$ . Puisque le terme précédent est nul,  $H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  est injective donc  $H_2(\mathbb{T}^2)$  s'identifie à son image dans l'homologie en degré 1 de  $S^1 \sqcup S^1 \simeq \pi_1(S^1 \sqcup S^1)$  par commutativité, écriture un peu impropre puisque  $S^1 \sqcup S^1$  n'est pas connexe par arcs. Or par exactitude cette image est encore le noyau de  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  la somme des homologie en degré 1 des deux tubes du recouvrement. Or cette application envoie un lacet  $\gamma$  d'un petit tube de l'intersection sur  $\gamma \oplus -\gamma$  son image dans chacun des grands tubes du recouvrement. Il se passe exactement la même chose pour l'autre petit tube de l'intersection. Matriciellement, cette application s'écrit donc  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Son noyau est donc  $\mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , d'où  $H_2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ pour } k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 \text{ pour } k = 1 \\ \mathbb{Z} \text{ pour } k = 2 \\ 0 \text{ pour } k \geq 3. \end{cases}$$

Remarquons que la dualité de Poincaré (*voir ce chapitre en ANALYSIS SITUS pour la découvrir*) est respectée :  $\mathbb{T}^2$  est une variété compacte orientable de dimension 2 et son homologie est sans torsion, d'où  $H_{2-p}(\mathbb{T}^2) = H_p(\mathbb{T}^2)$  pour chaque  $p \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ .

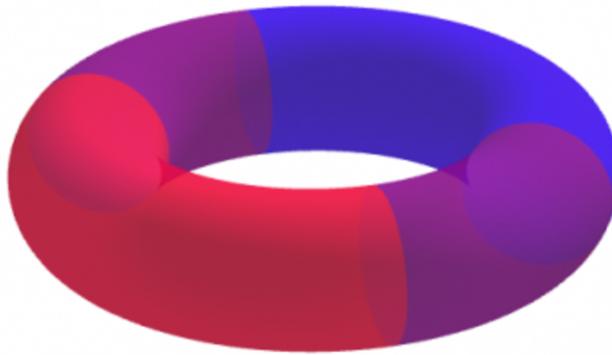


FIGURE 5.3.6 : Homologie du tore par Mayer-Vietoris. —

#### Application. (*Homologie du plan projectif réel*)

On considère que  $\mathbb{RP}^2 = M \cup D^2$  où  $M \cap D^2$  dans  $\mathbb{RP}^2$  est une bande qui se rétracte par déformation sur  $S^1 = \partial M$  que l'on appelle sans surprise *âme* comme pour un matelas, et l'âme de  $M$  est alors son intérieur en tant que variété à bord. Alors :  $H_i(M \cap D^2) = H_i(S^1)$  qui est nul pour  $i \geq 2$  et  $H_i(D^2)$  est nul pour  $i \geq 1$ . De plus,  $H_i(M) = H_i(S^1)$  car  $M \cong S^1$ .

La suite de Mayer-Vietoris prend la forme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_3(X) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & H_1(S^1) & \xleftarrow{\quad} & H_1(S^1) \oplus H_1(D^2) \xrightarrow{\quad} H_1(\mathbb{RP}^2) \\ & & & & & \swarrow & \\ & & & & H_0(S^1) & \xleftarrow{\quad} & H_0(S^1) \oplus H_0(D^2) \xrightarrow{\quad} H_0(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où donc  $H_i(\mathbb{RP}^2) = 0$  dès que  $i \geq 3$ ,  $H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$  par connexité par arcs et  $H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par le théorème de Hurewicz. On cherche  $H_2(\mathbb{RP}^2)$  pour conclure. On se ramène à la sous-suite exacte

$$0 \longrightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où par la méthode précédente,  $\beta : \bar{1} \mapsto \iota_*(\bar{1}) \oplus 0$  envoie le générateur positif de  $H_1(S^1)$  groupe d'homologie au premier ordre de  $\mathbb{M} \cap D^2$  sur le lacet parcourant deux fois l'âme de  $\mathbb{M}$ , i.e.  $\beta = \times 2$ . Elle est en particulier injective, donc  $H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$  est nulle, d'où l'exactitude de  $0 \longrightarrow H_2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow \mathbb{Z}$  et  $H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Remarquons que la dualité de Poincaré, même en retirant les parties de torsion, n'est pas respectée :  $\mathbb{RP}^2$  est une variété compacte de dimension 2 mais n'est pas orientable et la dualité ne s'applique pas.

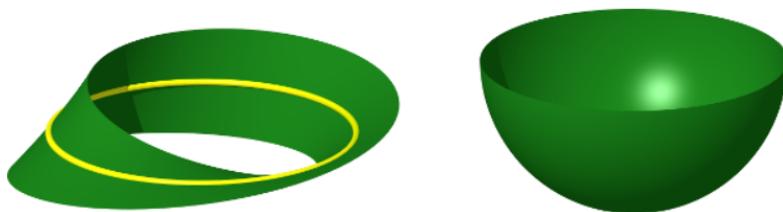


FIGURE 5.3.7 : Plan projectif et ruban de Möbius. —

**Proposition. (*Suite de Mayer-Vietoris réduite*)**

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $A \cap B \neq \emptyset$  et  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ . Alors on a une suite exacte longue de groupes d'homologie :

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_k(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B) \longrightarrow \tilde{H}_k(X) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $\tilde{H}_0(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$ .

**Application. (*Homologie d'un bouquet de sphères*)**

On cherche l'homologie de  $X = S^2 \vee S^2$ . On utilise une décomposition  $A, B$  donnée à la van Kampen en dépassant de chaque côté. Peu importe, car  $A$  et  $B$  seront homotopiquement à une sphère, ce qui est attendu puisque les calottes rajoutées se rétractent par déformation sur leur sommet. On dresse alors la suite de Mayer-Vietoris où la colonne de gauche est l'homologie de  $A \cap B$  le point base identifié et la colonne du milieu est la somme des homologie de deux 2-sphères :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \cdots & \\ & & & & & & \\ 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 & & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_2(X) & & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & 0 & \xleftarrow{\quad} & 0 & \xrightarrow{\quad} & H_1(X) \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

On obtient que  $H_{\geq 3}(X) = 0$ . De plus, la suite donne par exactitude  $H_2(X) = \mathbb{Z}^2$ . Enfin,  $H_1(X) = \pi_1(X)^{ab} = (0 \star 0)^{ab} = 0^{ab} = 0$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(S^2 \vee S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

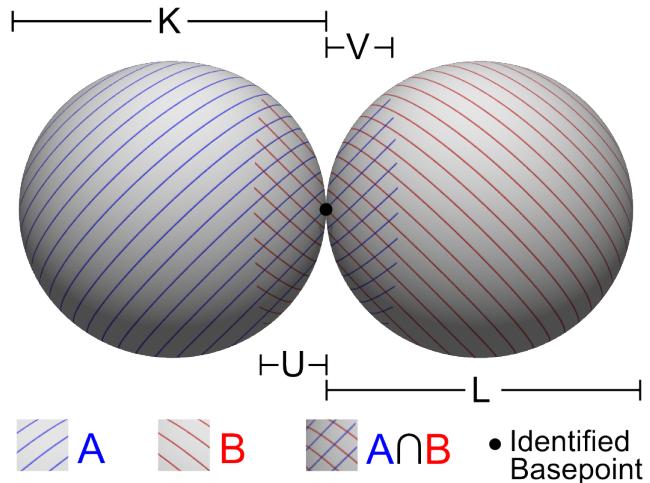


FIGURE 5.3.8 : Homologie d'un bouquet de deux sphères par Mayer-Vietoris. —

#### Application. (*Homologie de la suspension*)

Soit  $X$  un espace topologique. On décompose sa suspens  $\Sigma X$  de la manière suivante : un ouvert  $A$  où  $\Sigma X$  est privé de son sommet de temps 1 et  $\Sigma X$  est privé de son sommet de temps 0, comme représenté ci-dessous dans le cas  $X = S^0$  ce qui est un peu bizarre aussi. Alors  $A$  et  $B$  se rétractent par déformation sur leur unique sommet et sont donc contractiles tandis que  $A \cap B$  se rétracte par déformation sur sa base et donc  $A \cap B \cong X$ . Envahis par des contractils, on dresse plutôt la suite de Mayer-Vietoris réduite :

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdots & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \tilde{H}_2(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_2(\Sigma X) \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \tilde{H}_1(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_1(\Sigma X) \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \tilde{H}_0(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(\Sigma X) \end{array}$$

où la colonne du milieu et la somme de deux homologies réduites de contractiles. On obtient directement que pour tout entier  $k \geq 2$ ,  $\tilde{H}_k(\Sigma X) = \tilde{H}_{k-1}(X)$ . Enfin, puisque  $\Sigma X$  a autant de composantes connexes de  $X$ , comme  $[0,1]$  est connexe,  $\tilde{H}_0(\Sigma X) = \tilde{H}_0(X)$ .

Pour résumer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\tilde{H}_k(\Sigma X) = \begin{cases} \tilde{H}_{k-1}(X) & \text{pour } k \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) & \text{pour } k = 0. \end{cases}$$

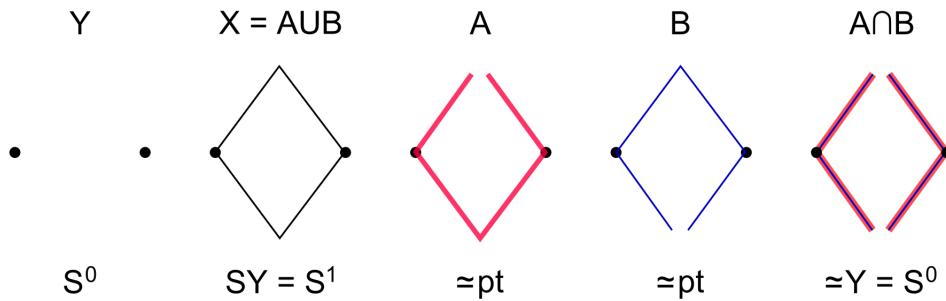


FIGURE 5.3.9 : Homologie de la suspension par Mayer-Vietoris. —

On donne un autre exemple où il faut raisonner sur les applications non triviales de la suite exacte longue en homologie et ce n'est pas simple.

#### Application. (*Homologie de la bouteille de Klein*)

On décompose la bouteille de Klein comme recollement de deux rubans de Möbius  $A, B$  représentés respectivement en bleu et rouge sur la figure ci-dessous, le long de leur bord qui est un cercle. Alors  $A, B$  et  $A \cap B$  sont homotopiquement équivalents à des cercles, d'où la suite de Mayer-Vietoris pour  $\mathcal{K}$  :

$$\begin{array}{ccc} \dots & \longrightarrow & H_3(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \swarrow \\ 0 & \longleftrightarrow & 0 = 0 \oplus 0 \longrightarrow H_2(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \swarrow \\ \mathbb{Z} & \longleftrightarrow & \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathcal{K}) \\ & \searrow & \swarrow \\ \mathbb{Z} & \longleftrightarrow & \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathcal{K}) \end{array}$$

où la colonne de gauche est l'homologie d'un cercle et celle du milieu la somme de deux homologies de cercle. Or  $H_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$  par connexité. Décrivons l'application  $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  à la ligne de dimension 1. On peut identifier les  $H_1$  aux  $\pi_1$  puisque les cercles ont des groupes fondamentaux commutatifs. Cette application envoie 1 sur  $(2, -2)$  par le simple

fait que le bord d'un ruban de Möbius s'enroule deux fois autour du cercle médian sur lequel on l'a rétracté. En particulier,  $\alpha$  est injective, donc l'image de  $H_2(X)$  dans  $\mathbb{Z}$  est nulle. Or le terme précédent  $H_2(X)$  étant nul,  $H_2(X)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ , qui est donc le groupe nul.

De l'autre côté, l'application  $\beta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_1(X)$  est surjective donc  $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^2 / \text{Ker}(\beta)$ . Or  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ . En prenant  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (1, -1)$  pour base de  $\mathbb{Z}^2$ , l'image de  $\alpha$  s'écrit  $2e_2\mathbb{Z}$ , d'où  $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}^2 / (0 \oplus 2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathcal{K}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

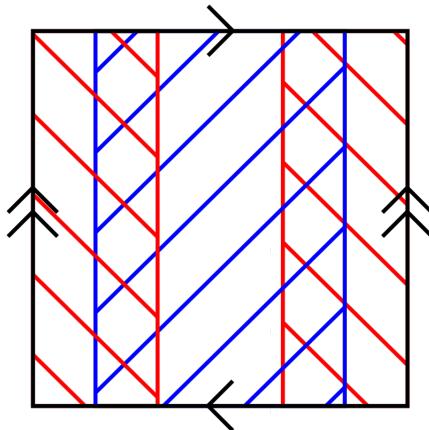


FIGURE 5.3.10 : Homologie de la bouteille de Klein par Mayer-Vietoris. —

### 5.3.2.3 Homologie d'une limite inductive

**Propriété. (*Homologie d'une limite inductive*)**

Soit  $X$  un espace topologique séparé. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille inductive<sup>a</sup> complète de parties de  $X$ , i.e. telle que tout compact de  $X$  est inclus dans l'une d'elles. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\varinjlim H_n(X_i) \simeq H_n(X).$$

<sup>a</sup> i.e. telle que l'ordre induit par l'inclusion  $i \leq j \iff X_i \subseteq X_j$  soit inductif au sens des ensembles ordonnés inductifs.

▷ On considère donc la famille inductive  $(X_i, f_{ij})_{i \in I, i \leq j}$  où  $f_{ji} : X_i \rightarrow X_j$  est l'inclusion. Alors il n'est pas difficile de voir que  $(H_n(X_i), (f_{ij})_*)_i$  est une famille inductive de modules et de morphismes de modules, en prenant des  $\mathbb{Z}$ -modules si l'on travaille encore sur les groupes abéliens. Si  $f_i : X_i \rightarrow X$

est l'inclusion, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ji}} & X_j \\ & \searrow f_i & \swarrow f_j \\ & X & \end{array}$$

est commutatif donc induit un commutatif en homologie. En particulier,  $\phi = \sum_{i \in I} (f_i)_* : \sum_{i \in I} H_n(X_i) \rightarrow H_n(X)$  passe au quotient en un morphisme  $\tilde{\phi} : \varinjlim H_n(X_i) \rightarrow H_n(X)$  où l'on rappelle que la limite inductive d'une famille inductive de modules, *i.e.* une famille  $(E_i, g_{ij})$  indexée par un ensemble inductif  $I$  avec une famille de morphismes  $(g_{ji} : X_i \rightarrow X_j)_{i \leq j}$  tels que  $g_{ii} = id_{X_i}$  et pour tous  $i \leq j \leq k$ ,  $g_{ki} = g_{kj} \circ g_{ji}$ , est le quotient des sommes presque nulles par le sous-module engendré par les  $g - g_{ij}(x)$  dès que  $i \leq j$  et  $x \in E_i$ .

Vérifions que  $\tilde{\phi}$  est un isomorphisme. Comme  $X$  est séparé, toute chaîne singulière de  $X$  est à support dans un compact de  $X$  par réunion finie d'images compactes, donc par complétude de  $(X_i)_i$ , dans un certain  $X_i$ , et ceci implique que  $\tilde{\phi}$  est surjective après passage au quotient. Soit maintenant  $c = \sum_{i \in I} c_i$  une somme presque nulle de chaînes singulières avec  $c_i$  à valeurs dans  $X_i$  dès que non nulle. Supposons que  $\tilde{\phi}(c) = 0$ , *i.e.*  $c = \partial b$  est un bord dans  $X$ . On utilise qu'il existe  $k \in I$  par inductivité tel que  $X_k$  contienne le support de  $b$  c'est-à-dire les  $X_i$  tels que  $c_i$  soit non nulle. Donc  $c$  est une chaîne singulière dans  $X_k$  qui est un bord dans  $X_k$ . Donc  $\tilde{\phi}$  est injective. ■

#### 5.3.2.4 Groupes d'homologie des sphères

##### 5.3.2.4.1 Calcul de l'homologie des sphères $S^n, n \in \mathbb{N}$

**Théorème. (*Groupes d'homologie des sphères*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{De plus, } H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

En termes de groupes réduits, on a pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

▷ Utilisons la suite de Mayer-Vietoris. De même qu'avec le théorème de van Kampen, la sphère de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  est la réunion de deux ouverts :  $U = S^n \setminus \{N\}$  et  $V = S^n \setminus \{S\}$  où  $N, S$  sont respectivement les pôles Nord et Sud de  $S^n$ . Ces deux ouverts sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$  qui est contractile. De plus, leur intersection  $U \cap V$  est une couronne homotopiquement équivalente à  $S^{n-1}$ .

La suite de Mayer-Vietoris version réduite donne

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & \\
 & \tilde{H}_k(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_k(S^n) & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_{k-1}(S^n) & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \\
 & \tilde{H}_0(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(S^n) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

exacte. Pour  $n = 1$ ,  $\tilde{H}_0(S^1) = 0$ ,  $\tilde{H}_1(S^1) = \mathbb{Z}$  par le théorème de Hurewicz. Ensuite,  $\tilde{H}_1(S^0) = 0$  d'où l'exactitude  $0 \longrightarrow \tilde{H}_2(S^1) \longrightarrow 0$  qui donne  $\tilde{H}_2(S^1) = 0$ . Pour  $\tilde{H}_3(S^1)$ , on utilise  $\tilde{H}_2(S^0) = 0$  et cetera puisque  $S^0$  est soi-disant contractile. Supposons que  $\tilde{H}_k(S^n) = \delta_k^n \mathbb{Z}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Calculons  $\tilde{H}_k(S^{n+1})$ . En lisant un peu en diagonale la suite, on a  $0 \longrightarrow \tilde{H}_k(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(S^n) \longrightarrow 0$  en tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'où  $\tilde{H}_{k+1}(S^{n+1}) \simeq \tilde{H}_k(S^n) = \delta_k^n \mathbb{Z} = \delta_{k+1}^{n+1} \mathbb{Z}$ , ce que l'on voulait. Par récurrence, on a la résultat pour toutes les sphères et à tout rang. ■

### Preuve.

▷ (*Autre preuve*) On peut utiliser aussi le théorème d'écrasement. On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $D^n/S^{n-1} \simeq S^n$ . Ainsi, on a une suite exacte courte en homologie relative

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_k(D^n) & \longrightarrow & H_k(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{k-1}(D^n) \longrightarrow \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & 0 & & \tilde{H}_k(D^n/S^{n-1}) & & 0 \\
 & & & & \parallel & & \\
 & & & & \tilde{H}_k(S^n) & &
 \end{array}$$

dont le résultat découle facilement par la même récurrence que dans la preuve précédente. ■

### Application. (*Homologie du ruban de Möbius*)

Le ruban de Möbius  $\mathbb{M}$  est rétract par déformation de son bord le cercle, d'où  $\mathbb{M} \cong S^1$ . En particulier, on a

$$H_k(\mathbb{M}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ pour } k = 0, 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

#### 5.3.2.4.2 Degré d'une application entre sphères

### Définition-propriété. (*Degré d'un endomorphisme de la sphère*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. L'application induite  $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$  est à isomorphisme près un morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Les générateurs de  $\tilde{H}_n(S^n)$  sont simultanément fixés à celui dont l'image par l'isomorphisme  $\tilde{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  choisi est  $1_{\mathbb{Z}}$ , ce morphisme s'écrit de manière unique sous la forme  $n \mapsto dn$  avec  $d \in \mathbb{Z}$ . On appelle  $d$  le *degré* de  $f$  et l'on note  $d = \deg(f)$ .

Si l'on ne fixe pas les générateurs simultanément, le degré n'est pas défini qu'au signe près, et souvent, on le prend alors positif.

### Heuristique

Le degré d'une application de la sphère calcule le nombre de fois qu'elle s'enroule sur elle-même sous l'action de cette application.

### Fait. (*Constance du degré sur les classes d'homotopie*)

Deux applications homotopes entre sphères de même dimension ont le même degré.

Elles induisent exactement la même application en homologie, et c'est de là que l'on part pour définir le degré de l'application.

### Proposition. (*Degré d'une composée*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f, g : S^n \rightarrow S^m$  deux applications continues. Alors  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$ .

▷ Découle immédiatement de la définition du degré ■

### Corollaire. (*Degré d'un automorphisme*)

Soit  $f : S^n \rightarrow S^n, n \in \mathbb{N}$  un automorphisme, ou plus généralement une équivalence d'homotopie. Alors  $\deg(f) = \pm 1$ .

▷ En effet, le degré de l'identité est 1, car  $\text{id}_{S^n}, n \in \mathbb{N} = \text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

### Propriété. (*Degré d'une surjection*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une surjection continue. Alors  $\deg(f) \neq 0$ .

▷ Par contraposée, si  $f$  n'atteint pas le point  $x$ ,  $f : S^n \rightarrow S^n \setminus \{x\}$  reste alors bien définie. Or  $S^n \setminus \{x\}$  est contractile, donc  $f$  est homotope à zéro, donc de degré nul. ■

### Contre-exemple. (*Applications surjectives de degré nul*)

Une application de degré nul entre sphères de même dimension peut être surjective.

Rien que dans  $S^1$ , un lacet peut faire plusieurs fois le tour du cercle et se renrouler avant la fin du temps.  $\square$

### Lemme. (*Degré d'une suspension*)

Soit  $f$  une application de la sphère  $S^n$  sur elle-même. On sait que  $\Sigma S^n = S^{n+1}$  à homéomorphisme près. Alors  $\deg(f) = \deg(\Sigma f)$ .

▷ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ ,  $H_{n+1}(\Sigma S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  est un isomorphisme donné par la suite de Mayer-Vietoris associée à la sphère  $S^{n+1}$ . Par fonctorialité des suites exactes homologiques, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \\ \times \deg(\Sigma f) = \Sigma f_* \downarrow & & \downarrow f_* = \times \deg(f) \\ \mathbb{Z} \simeq H_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

commute. Alors  $f_*$  et  $\Sigma f_*$  ne diffèrent que par un isomorphisme de  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , i.e. l'identité, d'où l'identité des degrés. ■

### Exemples

1. (*Degré de l'identité*) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\deg(id_{S^n}) = 1$ .
2. (*Degré des contractiles*) Soit une application contractile de  $S^n$  dans elle-même,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\deg(f) = 0$ .

En effet, le morphisme induit par l'application constante est constant, donc nul.

3. Dans le cas  $n = 1$ , c'est la notion de (*dégré d'enroulement*) d'un lacet sur  $S^1$ . Car  $S^1 \rightarrow S^1$  n'est autre qu'un lacet  $S^1 \rightarrow S^1$ .
4. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . En identifiant  $S^1 \simeq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^k$  restreinte et corestreinte à  $\mathbb{U}$  est continue et a degré  $k$ .

En effet, dans ce cas, c'est un revêtement et  $H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ .

5. Le degré d'une réflexion à travers un hyperplan vectoriel  $(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$  est  $-1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Cela peut se faire par récurrence : le degré de  $z \mapsto -z = \frac{1}{z}$  dans  $\mathbb{U}$  est  $-1$ , puisqu'au lacet générateur antihoraire de  $S^1$ , elle fait correspondre le lacet générateur horaire. On peut ensuite passer  $S^n$  à  $S^{n+1}$  grâce à l'identité du degré d'une application avec celle de sa suspension, en remarquant qu'une réflexion à travers un hyperplan suspendue est encore une réflexion par rapport à la coordonnée de même indice dans la suspension.

Par suite, l'application antipodale  $A : S^n \rightarrow S^n$ ,  $x \mapsto -x$  a degré  $(-1)^{n+1}$ .

On a en effet  $A = f_1 \circ \dots \circ f_{n+1}$  où les  $f_i$  représentent les réflexions par rapport à  $\{x_i = 0\}$  pour  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .

Plus généralement, toute application sans point fixe est de degré  $(-1)^{\dim(S^n)+1}$ .

En effet, soit  $f$  sans point fixe. Elle est alors homotope à l'antipodale par  $H(x,t) = \frac{tf(x)+(1-t)A(x)}{\|tf(x)+(1-t)A(x)\|}$ , qui est définie partout, car si  $tf(x) + (1-t)A(x)$ ,  $tf(x) = (1-t)x$ , d'où  $t = 1 - t$  en norme puis  $f(x) = x$  ce qui est exclu.

### Exercice 5 (*Applications entre sphères avec ou sans points antipodaux*)

1. Montrer que si  $f : S^n \rightarrow S^n$  vérifie  $f(x) \neq -x$  pour tout  $x$ , alors  $f$  est homotope à l'identité.
2. Montrer que si  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  est sans point fixe alors il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) = -x_0$ .

▷ Éléments de réponse.

1. Recopier à un signe près la preuve de ce que toute application sans point fixe est homotope à l'antipodale.
2. Soit  $f$  une fonction sans point fixe et telle que  $f(x) \neq -x$  pour tout  $x \in S^{2n}$ . Alors  $f$  est à la fois homotope à l'identité et à l'antipodale, qui sont alors homotopes. Mais l'antipodale a pour degré  $(-1)^{2n+1} = -1 \neq 1 = \deg(id_{S^{2n}})$ , contradiction.

### Exercice 6 (*Théorème de la boule chevelue*)

1. Soit  $n$  un entier naturel impair. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs (tangents) sur  $S^n$  continu et ne s'annulant pas.
2. Soit  $n$  un entier naturel pair. Montrer que tout champ de vecteurs tangents continu sur  $S^n$  s'annule en au moins un point.
3. En déduire que l'on ne peut peigner la boule  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$  sans lui faire d'épi.

▷ Éléments de réponse.

1. Puisque  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  où donc  $n+1$  est pair, on considère le champ qui à  $v = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1}) \mapsto (-s_2, s_1, -s_4, s_3, \dots, -s_{n+1}, s_n)$ . Il est bien tangent à  $S^n$ .
2. Soit  $V \in \Gamma(S^n, TS^n)$  ne s'annulant pas. On pose l'application  $f : S^n \rightarrow S^n, x \mapsto \frac{x+V(x)}{\|x+V(x)\|}$ . Par hypothèse, elle est sans point fixe : en effet, si  $\frac{x+V(x)}{\|x+V(x)\|} = x$ ,  $V(x) = [\|x+V(x)\| - 1]x$  d'où par produit scalaire à  $x$ ,  $\|x+V(x)\| = 1$ , puis  $V(x) = 0$  : donc  $f \sim A_n$  l'antipodale. De plus,  $f \sim id_{S^n}$  par  $(x, t) \mapsto \frac{x+tV(x)}{\|x+tV(x)\|}$ , absurde par signe de leurs degrés.
3. C'est simplement un habillage plaisant du cas  $n=2$ .

#### 5.3.2.4.3 Degrés locaux

##### Définition-propriété. (*Degré local d'une application entre sphères*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. Soit  $x \in S^n$ . Alors  $f$  induit une application  $f_* : H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{f(x)\})$ . On identifie  $H_n(S^d, S^d \setminus \{\star\}) \simeq H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  par l'isomorphisme donné par la suite exacte longue en homologie relative.

Alors  $f_*$  est donnée par la multiplication par une constante  $d$  appelée *degré local* de  $f$  en  $x$  et l'on note  $d = \deg(f)_*$ .

▷  $f$  induit bien une telle application de paire sans aucun argument nécessaire. Les identifications suivantes viennent de ce que  $S^n \setminus \{\star\}$  est contractile, donc la suite exacte longue en homologie relative est une suite de  $0 \longrightarrow H_n(S^d, S^d \setminus \{\star\}) \simeq H_n(S^n) \longrightarrow 0$ . On choisit pour isomorphismes ces inclusions comme dit souvent quoique induites par la projection canonique, et l'on fixe un unique isomorphisme  $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$  qui détermine ainsi univoquement le degré local. ■

### Théorème. (*Somme des degrés locaux*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $f : S^n \rightarrow S^n$  une application continue. Soit  $y \in S^n$  tel que  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  soit fini de cardinal  $k \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{x_i}.$$

▷ Notons que par l'excision, au lieu de calculer le degré local en  $x_i$  par  $H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\})$ , on peut choisir un voisinage  $U_i$  de  $x_i$  et un voisinage  $V$  de  $x_i$  tels que  $f(U_i) \subseteq V$ , et s'intéresser à l'application

$$f_* : H_d(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{y\})$$

à la place. En outre, puisque  $S^n$  est séparé, on peut prendre les  $U_i$  disjoints. Considérons le grand diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\
 \downarrow & & \downarrow \sim \\
 H_n(S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n \setminus \{y\}) \\
 \uparrow e & & \uparrow \sim \\
 H_n(\coprod_{i=1}^k U_i, \coprod_{i=1}^k (U_i \setminus \{x_i\})) & & \\
 \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\
 \bigoplus_{i=1}^k H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{\bigoplus f_*} & H_n(V, V \setminus \{y\})
 \end{array}$$

où  $e$  est donnée par l'excision. Les isomorphismes fournis sont clairs et les applications non notées encore plus. On regarde le générateur positif de  $H_n(S^n)$  : par définition, son image dans  $H_n(S^n)$  est le degré de  $f$ , mais aussi son image dans  $\bigoplus H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  est  $(1, \dots, 1)$ . L'application du bas envoie ce vecteur sur  $\sum \deg(f)_{x_i}$ , de sorte que par les isomorphismes, il suit  $\deg(f) = \sum_{i=1}^k \deg(f)_{x_i}$ . ■

#### 5.3.2.4.4 Sphères d'homologie

**Définition. (*Sphère d'homologie*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une *sphère d'homologie* de dimension  $n$  est une variété topologique connexe ayant la même homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  que  $S^n$ , explicitement, pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  :

$$H_i(X) = \delta_i^n H_n(X).$$

**5.3.2.5 Comparaison entre homologie et homotopie****Définition. (*Homologie*)**

Deux espaces topologiques sont *homologues* s'ils ont même homologie (singulière).

Le lien fondamental entre algèbre et homotopie dit que :

**Propriété. (*Homotopie  $\Rightarrow$  homologie*)**

Deux espaces topologiques homotopiquement équivalents ont même homologie singulière.

**Exercice 7 (Incomplétude de l'homologie singulière)**

Montrer que l'on peut avoir même homologie sans être homotopiquement équivalents.

▷ **Éléments de réponse.**

Considérons  $X = S^2 \vee \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{2g \text{ fois}}$  et  $Y$  l'unique surface topologique orientable de genre  $g$ , qui pour par

exemple  $g = 1$  donne  $Y = \mathbb{T}^2$  le tore et  $X = S^2 \vee S^1$  le bouquet d'une sphère et d'un cercle. Alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas homotopiquement équivalents puisqu'ils n'ont pas le même groupe fondamental, mais ils ont des groupes d'homologie isomorphes, ce que l'on peut montrer en admettant des résultats ultérieurs : en tant que CW-complexes de dimension 2, l'homologie est nulle aux rangs  $\geq 3$ . L'homologie au rang nul coïncide par connexité par arcs. Au rang 1, l'abélianisé de  $\{\ast\} \times_{\{\ast\}} \mathbb{Z}$  est bien  $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2) = H_1(\mathbb{T}^2)$ . Enfin,  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  en tant que surface orientable et l'homologie du bouquet  $S^2 \wedge S^1$  est  $0 \oplus \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$  comme une sphère bointée est une sphère de Borsuk, d'où l'identité des suites d'homologie singulière.

Cet exemple montre au passage que les invariants homotopiques et homologiques ne sont que très peu liés et l'un n'est pas vraiment plus fort que l'autre.



Ainsi, contrairement à ce que l'on peut entendre de prêcheurs peu scrupuleux, l'homologie ne comprend pas la théorie de l'homotopie (ce n'est pas ce que dit le diagramme suivant!). Cependant, le théorème de Hurewicz en capture l'essence.

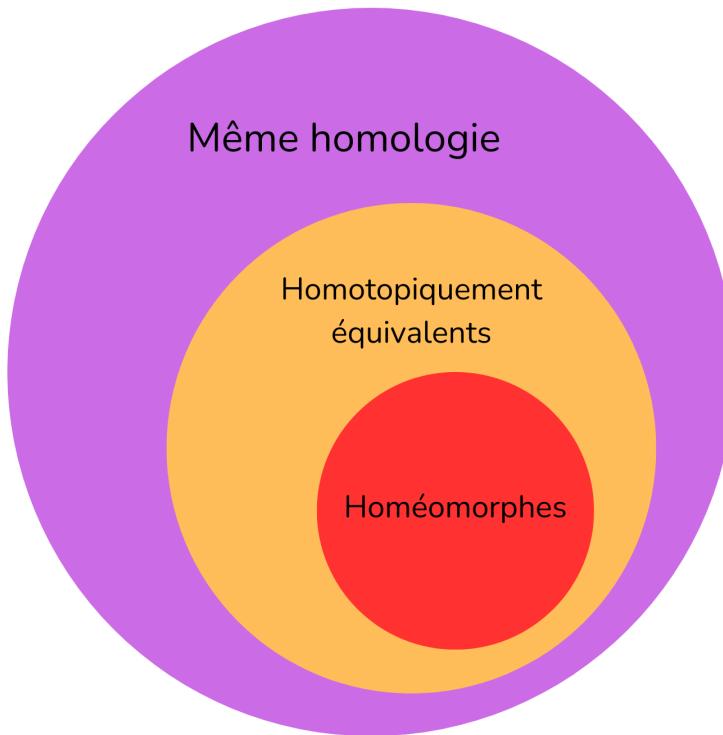


TABLE 5.1 : Diagramme de Venn : topologie générale, homotopie et homologie. — Les inclusions sont strictes, comme finit de le montrer l'exemple précédent.

### 5.3.3 Quelques invariants numériques de l'homologie singulière

#### Définition. (*Nombres de Betti*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On suppose que le groupe  $H_i(X)$  est de type fini. En particulier,  $H_i(X) \simeq \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{= H_i(X)^{\text{libre}}} \oplus \underbrace{A}_{= H_i(X)^{\text{tor}}}$  où  $A$  est un groupe abélien fini. On appelle  $i$ -ième *nombre de Betti* de  $X$  l'entier  $r = \text{rg}(H_i(X))$  et l'on note  $r = \beta_i(X)$  où  $\beta_i$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Cette définition se généralise naturellement aux coefficients quelconques au cas où  $\mathbb{Z}$  devient un anneau principal en utilisant le théorème de Krönecker.

#### Exemple. (*Plus petit nombre de Betti*)

Pour tout espace topologique  $X$  ayant un nombre fini de composantes connexes,  $\beta_0(X) = \text{card}(\pi_0(X))$ .

#### Définition. (*Caractéristique d'Euler-Poincaré*)

Soit  $X$  un espace topologique. On suppose que les groupes d'homologie de  $X$  sont de type fini et presque tous nuls, autrement dit que  $X$  est d'*homologie finiment engendrée*. La

somme alternée  $\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \beta_i(X)$  s'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de  $X$ . On la note  $\chi(X)$  où  $\chi$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

#### Fait. (*Caractéristique d'Euler dans le cas des espaces vectoriels*)

Si l'homologie singulière d'un espace  $X$  est incluse dans  $F\text{-Vect}$ ,  $F$  un corps, et s'annule à partir d'un certain rang, alors  $\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim_F(H_i(X; F))$ .

Le seul point à vérifier est que l'on peut remplacer l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  par l'homologie à coefficients dans  $F$ . On remarque simplement que le futur théorème des coefficients universel pour l'homologie donne  $H_i(X; F) \simeq H_i(X; \mathbb{Z})$ , car  $F$  est un module libre, donc la torsion  $(H_{i-1}(X), F)$  est nulle. Autrement dit, l'homologie étant par hypothèse libre, donc sans torsion, **les coefficients de Betti sont indépendants du corps de base, donc sont toujours ceux sur  $\mathbb{Q}$  et coïncident avec ceux à coefficients dans  $\mathbb{Z}$** .

#### Exemple fondamental. (*Caractéristique d'Euler des sphères*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$ ,  $\chi(S^0) = 2$  et si  $n \geq 1$ ,  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ .

Car  $H_0(\S^0) = S^2$  et son unique homologie non nulle et pour  $n \geq 1$ ,  $H_k(S^n) = (\delta_k^0 + \delta_k^n)\mathbb{Z}$ .

## 5.4 Homologie cellulaire

### 5.4.1 Complexe de chaînes cellulaire

On conseille vivement de relire le cours introductif sur les *CW-COMPLEXES* pour apprécier cette introduction.

#### Lemme. (*Homologie d'un bouquet agréable*)

Soit  $(X_i, x_i)_{i \in I}$  une collection d'espaces bien pointés. Alors

$$\tilde{H}_k(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigoplus_{i \in I} \tilde{H}_k(X_i)$$

en tout entier naturel  $k$ .

▷ On note  $\bigvee_{i \in I} X_i = \coprod_{i \in I} X_i / \coprod_{i \in I} \{x_i\}$ . On utilise la suite exacte de  $(\coprod_{i \in I} X_i, \coprod_{i \in I} \{x_i\})$  et la relation  $\tilde{H}_k(\bigvee_{i \in I} X_i) = H_k(\coprod_{i \in I} X_i, \coprod_{i \in I} \{x_i\})$  venant du théorème d'écrasement. Le petit problème aux rangs 0,1 est réglé par la réduction. ■

*Remarque.* On rappelle qu'un *CW-complexe* est toujours bien pointé.

**Lemme**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(B^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ C'est le théorème d'écrasement avec  $B^n/S^{n-1} \simeq S^n$  et l'homologie des sphères. Cela fonctionne encore bien pour  $n = 0$ . ■

**Corollaire. (*Homologie relative d'un squelette*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Définition-propriété. (*Complexe de chaînes cellulaires*)**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. On considère la suite

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \underbrace{H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})}_{= \begin{cases} \bigoplus_{n\text{-cellules}} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}} \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}) \longrightarrow \dots$$

terminée par  $\dots H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$  où, pour tout entier  $k \geq 1$ , le morphisme  $\partial_k$  provient de la suite exacte du triplet  $(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$ . C'est un complexe de chaînes dont les groupes d'homologie s'appellent *groupes d'homologie cellulaires* de  $X$ . On note encore  $H_k(X)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie cellulaire de  $X$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, sinon  $H_k^{\text{cellulaire}}(X)$ . On a  $H_k^{\text{cellulaire}}(X) = \text{Ker}(\partial_k^{\text{cellulaire}})/\text{Im}(\partial_{k+1}^{\text{cellulaire}})$ .

De plus, ce complexe est fonctoriel dans la catégorie des  $CW$ -complexes dont les morphismes sont les applications cellulaires.

*Remarque.* L'identité  $H_0(X^{(0)}) = H_0(X^{(0)}, X^{(-1)})$  où  $X^{(-1)} = \emptyset$  par convention justifie la définition concise du complexe cellulaire.



Le complexe cellulaire d'un espace (cellulaire) est constitué... de groupes d'homologie. Son homologie est donc une homologie quotient de groupes d'homologie, quoique relatifs. De plus, attention ! Le morphisme  $\partial_k$  vient d'une suite exacte longue différente en chaque termes, le triplet considéré changeant ; il n'est donc pas évident même qu'on ait un complexe. Et a fortiori, on n'aura pas toujours une suite exacte, ce qui est plus intéressant que si l'homologie cellulaire était toujours acyclique, c'est-à-dire nulle.

### Preuve.

▷ En effet, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ . On rappelle ici que l'application  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$  issue de la suite exacte longue homologique associée au triplet est la composée  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\delta'_k} H_{k-1}(X^{(k-1)}) \xrightarrow{i_{k-1,*}} H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)})$  où le premier est la différentielle de la suite exacte longue homologique associée à la paire et le second est induit par l'inclusion. Il suffit donc d'observer la commutation de

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{k+1}(X^{(k+1)}, X^{(k)}) & & \\ & \searrow \partial_{k+1} & & & \\ H_k(X^{(k)}) & \xrightarrow{i_{k,*}} & H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & & \\ & & \downarrow \partial'_k & & \\ & & & \searrow \partial_k & \\ & & H_{k-1}(X^{(k-1)}) & \xrightarrow{i_{k-1,*}} & H_{k-1}(X^{(k-1)}, X^{(k-2)}). \end{array}$$

Or par la suite exacte longue de  $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ ,  $H_k(X^{(k)}) \xrightarrow{i_{k,*}} H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \xrightarrow{\partial'_k} H_{k-1}(X^{(k-1)})$  est exacte, en particulier  $\partial'_k \circ i_{k,*} = 0$ , ce qui correspond aux deux flèches centrales de l'escalier ci-dessus. On a donc bien un complexe. ■

### Corollaire. (*Homologie d'un CW-complexe lacunaire*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  un CW-complexe sans  $k$ -cellules. Alors  $H_k(X) = 0$ .

▷ En effet, le  $k$ -squelette  $X^{(k)}$  est vide, donc  $H_k(X^{(k)}) = 0$ , donc  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = 0$ . ■

### Corollaire. (*Homologie en grand degré des complexes cellulaires*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  un CW-complexe de dimension  $n$ . Alors pour tout  $k > n$ ,  $H_k(X) = 0$ .

On vérifie que l'homologie cellulaire des CW-complexes coïncide avec leur homologie singulièrre.

**Théorème.** (*Homologie cellulaire = homologie singulière*)

Les groupes d'homologie du complexe de chaînes singulières sont isomorphes terme ´a terme aux groupes d'homologie singulière de  $X$ .

En particulier, tous les éventuels complexes cellulaires sont d'un même espace topologique sont quasi-isomorphes.

Cela ne signifie pas que les complexes cellulaires et singuliers coïncident ! Sinon d'ailleurs, la théorie cellulaire n'aurait aucun intérêt en homologie.

Remarquer que les termes du complexe d'homologie singulière sont quasi toujours  base grossièrement indénombrable, tandis que pour un *CW-complexe fini*, ceux du complexe cellulaire sont de type fini.



On vérifiera ce théorème sur deux exemples en calculant l'homologie cellulaire du tore et de la bouteille de Klein.

**Corollaire.** (*Nombres de Betti d'un CW-complexe*)

Soit  $X$  un *CW-complexe*. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $X$  ait un nombre fini  $c_i$  de  $i$ -cellules.

Alors  $H_i(X)$  est de type fini et  $\beta_i(X) \leq c_i$ .

En particulier, tout *CW-complexe fini* admet une caractéristique d'Euler.

▷ En effet, d'après la définition du complexe cellulaire,  $H_i^{\text{cellulaire}}(X)$  est un quotient d'un sous-groupe de  $\mathbb{Z}^{c_i}$ , puisque le complexe cellulaire n'est autre que

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_{i+1}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_i} \longrightarrow \mathbb{Z}^{c_{i-1}} \longrightarrow \dots$$

et ainsi  $H_i^{\text{cell}}(X)$  ne peut donc être de rang  $> i$ . ■



Puisque tout sous-module d'un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $\mathbb{Z}^n$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini  $\simeq \mathbb{Z}^k$ , avec  $k \leq n$ , l'homologie est un quotient d'un sous-modules de la forme  $\mathbb{Z}^u$  donc de la forme  $\mathbb{Z}^v$ . Normalement, le lecteur aura sursaut . En effet, le problème se trouve dans «  $\simeq \mathbb{Z}^k$  » ! Le sous-groupe  $2\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{Z}$  est isomorphe   $\mathbb{Z}$  est pourtant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\simeq 0$ ... En particulier les groupes d'homologie cellulaire peuvent bel et bien avoir de la torsion.

Cependant, notons que l'on dispose du théorème du rang pour les groupes abéliens.

**Exercice 8** (*Caractéristique d'Euler d'un CW-complexe*)

Soit  $X$  un *CW-complexe fini*. On note  $c_i$  le nombre de  $i$ -cellules de  $X$  est fini. Montrer qu'alors

$$\sum_i (-1)^i \beta_i(X) := \chi(X) = \sum_i (-1)^i c_i.$$

En déduire qu'en particulier, la caractéristique d'Euler d'un *CW-complexe* définie par la

deuxième formule, ne dépend pas de la structure cellulaire fixée pour lui. En déduire de plus que, si  $G = (S, A)$  est un graphe,  $\chi(G) = S - A$  (*formule SA*). De même, si  $X$  est un polyèdre à  $F$  faces,  $A$  arêtes et  $S$  sommets,  $\chi(X) = F - A + S = S - A + F$  (*formule sommets-arêtes-faces*). On peut donc voir un  $CW$ -complexe fini comme un polytope.

▷ **Éléments de réponse.**

En effet, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_i(X) = \text{rg}(H_i^{\text{cellulaire}}(X)) = \text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) - \text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))$ . D'autre part,  $c_i = \text{rg}(H_i(X^{(i)}, X^{(i-1)})) = \text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) + \text{rg}(\text{Im}(\partial_i))$ . Ainsi,  $\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) - \text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i))) - \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1}))) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i))) + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^{i+1} (\text{rg}(\text{Im}(\partial_{i+1})))}_{= \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i (\text{rg}(\text{Im}(\partial_i)))} = c_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i (\text{rg}(\text{Ker}(\partial_i)) + \text{rg}(\text{Im}(\partial_i))) = c_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (-1)^i c_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i c_i$ .

*Remarque.* Il est courant de définir dans des cours plus modestes la caractéristique d'Euler d'un  $CW$ -complexe d'abord. L'identité démontrée précédemment permet d'établir alors un résultat non trivial : la caractéristique d'Euler d'un complexe cellulaire ne dépend en fait que de son type d'homotopie, ce qui est remarquable, car elle est calculée à partir des données combinatoires de l'espace !

**Exemples. (*Caractéristiques d'Euler de  $CW$ -complexes*)**

- La sphère est triangulée par quatre triangles de la manière suivante : deux triangles par hémisphère qui se tiennent les mains et se touchent la tête. On a alors une triangulation à 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, d'où  $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ .

Sur cet exemple simple, on peut apprécier la magie de ce que n'importe quelle triangulation aurait donné ce même nombre. De plus, on n'est pas forcé de prendre une triangulation : n'importe quelle décomposition polygonale fonctionne, ou même des choses plus bizarres qui rentrent dans le spectre des décompositions cellulaires.

- On sait si l'on est cultivé que le tore  $T^2$  est triangulé de façon minimale d'ailleurs par 9 sommets, 12 arêtes et 6 faces, d'où une caractéristique de  $\chi(T^2) = 9 - 12 + 6 = 0$ .

- (*Relation de la caractéristique d'Euler des simplexes*) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le  $n$ -simplexe évidé  $\partial T^n$  est homéomorphe à  $S^{n-1}$ . Sa caractéristique est, d'après son homologie,

$$\chi(S^n) = 0 + (-1)^n, \text{ i.e. } \chi(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 2 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} + 1. \end{cases} \quad \text{On pourra retenir } \chi(S^1) = 0$$

et  $\chi(S^3) = 0$ . D'autre part, il a  $n+1$  sommets et  $n+1$  faces de dimension maximales  $n$ . Plus généralement, il a  $\binom{n+1}{k}$  faces de dimension  $k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . On obtient la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} = 1 + (-1)^{n+1}$$

que l'on aurait pu calculer par une simple formule de Pascal.

4. On rappelle que les 5 solides platoniciens ici pris évidés sont le tétraèdre  $\partial T^3$ , le cube  $I^3$ , l'octaèdre  $O$ , le dodécaèdre  $D$  et l'icosaèdre  $\mathbb{I}$ . Ils sont tous homéomorphes à  $S^2$ , donc de caractéristique 2. Vérifions-le manuellement par la formule sommets-arêtes-faces :

$$\begin{aligned} \star \quad & \chi(\partial T^3) = 4 - 6 + 4 = 2; \\ \star \quad & \chi(I^3) = 8 - 12 + 6 = 2; \\ \star \quad & \chi(O) = 6 - 12 + 8 = 2; \\ \star \quad & \chi(D) = 20 - 30 + 12 = 2; \\ \star \quad & \chi(\mathbb{I}) = 12 - 30 + 20 = 2. \end{aligned}$$

Et quelle belle symétrie apparaît.

### Exercice 9 (*Calculs de la caractéristique d'un CW-complexe*)

Soient  $X, Y$  deux CW-complexes finis.

1. (*Caractéristique d'Euler d'une réunion de complexes*) Montrer que  $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$ . En particulier,  $\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$ .
2. (*Caractéristique d'Euler d'un produit de complexes*) Montrer que  $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ .
3. (*Caractéristique d'Euler d'un quotient de complexes*) Si  $X \subseteq Y$  est un sous-complexe, montrer que  $\chi(X) - \chi(Y) + \chi(Y/X) = 1$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On note  $c_i^K$  le nombre de  $i$ -cellules d'un CW-complexe  $K$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Alors  $c_i^{X \cup Y} = c_i^X + c_i^Y - c_i^{X \cap Y}$ , car le nombre de  $i$ -cellules de  $X \cup Y$  est le nombre de  $i$ -cellules de  $A$  ou de  $B$  mais on a alors compté deux fois les  $i$ -cellules de  $A \cap B$ , et donc on les retire une fois. L'égalité ayant lieu terme à terme dans la somme  $\sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i c_i$ , on a l'identité des caractéristiques.
2. Par définition du produit de deux CW-complexes finis, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , les  $i$ -cellules correspondent bijectivement aux paires constituées d'une  $k$ -cellule de  $X$  et d'une  $i-k$ -cellule de  $Y$  pour  $k$  parcourant  $\llbracket 0, i \rrbracket$ , d'où  $c_i^{X \times Y} = \sum_{k=0}^i c_k^X c_{i-k}^Y$ . La formule s'ensuit immédiatement par produit de Cauchy.
3. En exercice, la technique étant semblable aux précédentes.

### Exercice 10 (*Caractéristique d'Euler d'un revêtement entre CW-complexes*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $p : X \rightarrow Y$  un revêtement à  $d$  feuillets. On suppose que  $Y$  est un CW-complexe fini. Montrer que  $X$  est un CW-complexe fini et que  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

▷ Éléments de réponse.

Puisque  $\pi_1(D^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on peut relever les applications caractéristiques  $\varphi_\alpha : D^k \rightarrow Y$  au revêtement  $X \rightarrow Y$ .

Il y a alors exactement  $d$  relèvements de  $\varphi_\alpha$  dans  $X$ . Ainsi, pour toute  $k$ -cellule  $e^k$  de  $Y$ , il correspond  $d$   $k$ -cellules dans la structure de  $X$ , car la restriction d'un revêtement sur la base est un revêtement. Soit  $C_k$  le nombre de  $k$ -cellules de la structure de  $X$  et soit  $C'_k$  celui de  $Y$ . On a donc  $C_k = dC'_k$ . Alors :

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i C_i + \sum_{i=0}^{\dim(X)} (-1)^i dC'_i = d\chi(Y)$$

comme voulu.

Grâce à la notion d'**ORIENTATION DES CELLULES** grâce au **DEGRÉ D'UNE APPLICATION DE  $S^n$**  DANS ELLE-MÊME et celle de coefficient d'incidence, on peut presque exprimer la différentielle de manière close.

### Définition. (*Coefficient d'incidence de cellules*)

Soit  $X$  un *CW-complexe*. Soient  $\sigma$  une  $k$ -cellule et  $\tau$  une  $(k-1)$ -cellule de  $X$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Le *coefficient d'incidence*  $[\sigma : \tau]$  est le degré de l'application

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi|_{S^{k-1}}} X^{(k-1)} \xrightarrow{\pi} X^{(k-1)} / (X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau') \xrightarrow{\sim} \bar{\tau} / (\bar{\tau} \setminus \tau) \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{\tau}^{-1}} D^{k-1} / S^{k-2} \simeq S^{k-1}$$

où  $\varphi : D^k \rightarrow X$  est une application caractéristique de  $\sigma$ .

### Heuristique

Prenons une 2-cellule, c'est-à-dire un disque  $D^2$ , et singularisons une arête. L'application de recollement envoie son bord le cercle  $S^1$  sur le 1-squelette de  $X$ , c'est-à-dire ses arêtes. Écrasons ce dernier relativement à tout le squelette inférieur (ici seulement les points) ainsi que les autres arêtes que celle considérée. Après cet écrasement, il ne reste que l'arête aux extrémités écrasées (puisque on a écrasé les extrémités, qui sont des points). Ce truc n'est autre qu'un cercle, d'où une application de  $S^1 \rightarrow S^1$  en composant tout cela. Le coefficient d'incidence de la 2-cellule par rapport à l'application est alors le degré de cette application autour du cercle.

Ainsi, l'information importante est contenue dans la façon comment  $\varphi$  envoie le bord de  $\sigma$  sur  $\tau$ , i.e.  $S^{k-1} \rightarrow X^{(k-1)} / (X^{(k-2)} \cup \bigcup_{\tau' \neq \tau} \tau')$ .

*Remarque.* Il est défini donc a priori au signe près. Si l'on veut fixer son signe, on oriente  $\sigma$  et  $\tau$  et l'on doit fixer une façon standard de choisir un générateur des groupes  $\tilde{H}_k(S^k)$  où  $S^k$  est le bord de  $D^{k+1}$  et  $\tilde{H}_k(S^k)$  où  $S^k = D^k / S^{k-1}$ , en particulier par le même espace  $S^k$ .

Cette définition permet de calculer l'homologie de *CW-complexes simples*.

**Proposition.** (*Expression floue de la différentielle du complexe cellulaire*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $\sigma$  une  $k$ -cellule orientée de  $X$  où  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $\partial_k \sigma = \sum_{\tau} \pm [\sigma : \tau] \tau$ , somme évidemment indexée sur les  $k - 1$ -cellules de  $X$ .

Souvent, cette expression floue suffit. Mentionnons aussi :

**Propriété.** (*Définition de la différentielle du complexe de chaînes cellulaires*)

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $H_n(X_n, X_{n-1})$  est un groupe abélien libre engendré les  $n$ -cellules de  $X$  par le premier corollaire de cette section, pour une telle  $n$ -cellule  $e_n^\alpha$ , soit  $\chi_n^\alpha : \partial e_n^\alpha \simeq S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$  l'application de recollement et considérons les composées

$$\chi_n^{\alpha\beta} : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}/(X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta) \simeq S^{n-1}$$

où  $e_{n-1}^\beta$  est une  $(n-1)$ -cellule de  $X$  et la deuxième application identifie  $X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta$  à un point y compris s'il est vide. L'application bord  $d_n : H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$  est alors donnée par la formule

$$d_n(e_n^\alpha) = \sum_{\beta} \deg(\chi_n^{\alpha\beta}) e_{n-1}^\beta.$$

**Application.** (*Homologie cellulaire du tore*)

Le tore, d'après son carré fondamental  $ABCD$ , constitué d'une unique 0-cellule  $A = B = C = D$ , de deux 1-cellules  $e_1, e_2$  et d'une 2-cellule  $e$ , de sorte que son complexe cellulaire s'écrive

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}.$$

Attention à cette étape à ne pas le confondre avec l'homologie du tore. Explicitons  $d_1, d_2$  pour en calculer l'homologie.

Remarquons d'abord que  $d_2 = 0$ . En effet,  $e_1$  et  $e_2$  sont recollées sur  $A$  par la même application de recollement  $\varphi_1 = \varphi_2$  constantes en  $A$  l'unique 0-cellule. Ainsi les  $\chi^{\alpha\beta}$  sont constantes, donc de degré nul.

L'application de recollement de  $S^1 \simeq \partial I^2 \rightarrow X^{(1)}(\mathbb{T}^2)$  est donnée par  $(t_1, 0)(t_1, 1) \mapsto t_1 \in e_1$  et  $(0, t_2)(1, t_2) \mapsto t_2 \in e_2$ . Les degrés de  $\chi^{ee_1}$  et  $\chi^{ee_2}$  sont nuls : par symétrie, traitons le cas de  $\chi^{ee_1}$ . Selon l'homéomorphisme  $\partial I^2 \simeq S^1$ , en écrasant sur un point les côtés  $BC$  et  $AD$ ,  $\chi^{ee_1}$  parcourant  $AB = CD$  dans un sens la première moitié du temps, puis revient, donc n'a fait aucun tour autour de la sphère. C'est d'ailleurs un exemple concret de surjection de degré nul. Donc  $d_1$  est nulle. Ainsi, l'homologie cellulaire du tore est nulle, donc elle coïncide avec le complexe de chaînes cellulaires, ce qui nous arrange bien.

**Application. (*Homologie cellulaire de la bouteille de Klein*)**

Soyons malins : suffit de changer un signe dans le raisonnement précédent, le carré fondamental de  $\mathcal{K}$  différant de celui de  $\mathbb{T}^2$  par un unique sens de flèche.

En effet, l'application de recollement de  $S^1 \cong \partial I^2 \rightarrow X^{(1)}(\mathbb{T}^2)$  est donnée par  $(t_1, 0)(t_1, 1) \mapsto t_1 \in e_1$  et  $(0, t_2) \mapsto t_2 \in e_2$  mais  $(1, t_2) \mapsto -t_2 \in e_2$ . L'application caractéristique donne lieu à  $\chi^{ee_1}$  de degré nul pour l'argument exact donné précédemment, mais  $\chi^{ee_2}$  est alors de degré 2 : en effet, au lieu de revenir en arrière à la moitié du temps, le point mobile continue son trajet pour faire un deuxième tour, d'où le doublement du degré. Ainsi  $d_n(e) = 0.e_1 + 2.e_2$ . On en déduit que  $H_1^{cell}(\mathcal{K}) = \text{Ker}(d_1)/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}^2/\text{Im}(d_1) = \mathbb{Z}^2/(0 \oplus 2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , et l'on retrouve encore ce que l'on voulait.

**Exercice 11 (Homologie du plan projectif complexe)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k \in [0, 2n] \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ Éléments de réponse.

On sait qu'il existe une structure cellulaire de  $\mathbb{CP}^n$  constituée d'une unique  $k$ -cellule pour tout  $k \in [0, 2n]$  pair et d'aucune autre cellule. Le complexe de chaînes cellulaire s'écrit donc

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{degré } 2n} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \dots \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

En particulier, toutes les applications de bord sont nulles, car leur domaine ou leur image sont alternativement nulles. Ainsi, l'homologie du complexe coïncide avec terme à terme, ce qu'il fallait montrer.

**Exercice 12 (Homologie du plan projectif réel)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \text{ et } k = n \text{ si } n \text{ est impair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \in [1, n-1], k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ Éléments de réponse.

On connaît, et c'est le toy-model d'espace cellulaire, une décomposition cellulaire de  $\mathbb{RP}^n$  ayant exactement une  $n$ -cellule en toute dimension  $i$  pour  $i$  parcourant  $[0, n]$  et aucune autre. On a donc un complexe cellulaire de la forme :

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{degré } n} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Pour calculer le morphisme de bord  $\partial_i$  où  $i \in \mathbb{N}^*$ , il suffit de calculer le degré de l'application composée

$$\chi : S^{i-1} \xrightarrow{f|_{\partial D^i}} \mathbb{RP}^{i-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{i-1}/\mathbb{RP}^{i-2} \simeq S^{i-1}$$

où l'application  $f$  est induite par l'application de recollement et est donnée sur  $D^i$  par  $(x_0, \dots, x_{i-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - [x_0^2 + \dots + x_{i-1}^2]})$  par restriction au bord  $\partial D^i = S^{i-1}$ , où  $\mathbb{RP}^{i-1} = S^i/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

On peut alors utiliser la formule de somme des degrés. En effet, tout point a exactement deux antécédents par  $q$ , un dans l'hémisphère nord, un dans l'hémisphère sud, car  $q$  est constante sur l'équateur  $S^{i-2}$  de  $S^{i-1}$ . On peut s'être affranchi du cas  $i = 1$  plus tôt si besoin. Ainsi  $\deg(q) = \deg(q|_{U \ni N}) + \deg(q|_{V \ni S})$ . Or très visuellement, dans l'hémisphère nord,  $q$  est homotope à l'identité et dans l'hémisphère sud,  $q$  est homotope à l'antipodale. Ainsi  $\deg(q) = 1 + (-1)^i$  où  $i = (i-1) + 1$ . Autrement dit,  $\deg(q) = 0$  si  $i$  est impair et 2 si  $i$  est pair. Par suite, le complexe de chaînes cellulaires s'écrit :

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Il n'est pas difficile de conclure à partir de là.

### Exercice 13 (*Homologie des espaces projectifs infinis*)

En déduire l'homologie de  $\mathbb{CP}^\infty$  qui est pour ceux qui l'ignorent la colimite topologique de tous les espaces projectifs complexes. De même, en déduire l'homologie de  $\mathbb{RP}^\infty$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On utilise simplement la formule pour l'homologie d'une limite inductive. Il s'agit simplement de « faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  » : on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $H_k(\mathbb{CP}^\infty) = \mathbb{Z}$  si  $k$  est pair et 0 sinon.
2. De même, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $H_k(\mathbb{RP}^\infty) = \mathbb{Z}$  si  $k = 0$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si  $k$  est impair et 0 sinon.

On peut définir aussi dans le cas de l'homologie cellulaire, l'homologie cellulaire à coefficients quelconques, sans aucun problème conceptuel. La même remarque vaut pour l'homologie simpliciale. Quant à la cohomologie cellulaire, on aura une section consacrée.

#### 5.4.2 Lien avec l'homologie simpliciale

##### Fait. (*Orientation cellulaire d'un complexe simplicial*)

Soit  $X$  un complexe simplicial fini. On numérote tous les sommets de  $X$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  de  $X$ , on a un unique homéomorphisme envoyant sommet sur sommet  $\underbrace{T^k}_{\simeq D^k} \rightarrow \sigma^k$  qui préserve les ordres de sommets.

Par suite, canoniquement, un complexe simplicial est un *CW-complexe fini* dont les cellules sont orientées.

**Reformulation pratique. (*Homologie simpliciale d'un complexe simplicial*)**

Les groupes d'homologie cellulaire du *CW-complexe* sous-jacent d'un complexe simplicial s'appellent les *groupes d'homologie simpliciale* du complexe simplicial considéré.

La proposition suivante montre que cette définition est équivalente à celle donnée de l'**HOMOLOGIE SIMPLICIALE** introduite en **TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE**.

**Proposition. (*Lien homologie simpliciale-homologie cellulaire*)**

Pour tout  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  d'un complexe simplicial  $X$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , la différentielle du complexe de chaînes cellulaire de  $X$  s'écrit

$$\partial\sigma^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \Gamma_i(\sigma^k)$$

où  $\Gamma_i(\sigma^k)$  est la  $i$ -ième face de codimension 1 de  $\sigma^k$ .

**Corollaire. (*Lien homologie simpliciale-homologie singulière*)**

Les groupes d'homologie simpliciale d'un complexe simplicial sont isomorphes à ses groupes d'homologie singulière.

## 5.5 Généralisations de l'homologie singulière

### 5.5.1 Homologie à coefficients quelconques

Soit  $G$  un groupe abélien, en particulier un anneau commutatif  $\mathbb{A}$ , un module sur un anneau  $A$  ou un espace vectoriel sur un corps  $K$ .

**Définition. (*Chaîne singulière d'un espace à coefficients dans  $G$* )**

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -chaîne singulière dans un espace topologique  $X$  à coefficients dans  $G$  est une somme finie formelle

$$g_1\sigma_1 + \dots + g_m\sigma_m$$

où  $m \in \mathbb{N}$ ,  $g_1, \dots, g_m \in G$  et  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  sont des  $k$ -simplexes singuliers de  $X$ . L'ensemble des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  est un groupe abélien libre, noté  $C_k(X; G)$ .

**Définition-propriété.** (*Complexe de chaînes singulières à coefficients dans G*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de chaînes singulières* de  $X$  à coefficients dans  $G$  est le complexe  $\mathcal{C}(X; G)$  :

$$\dots \longrightarrow C_{k+1}(X; G) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X; G) \xrightarrow{\partial_k} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; G)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C_k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -chaînes singulières de  $X$  à coefficients dans  $G$  et pour tout  $\sigma$   $i$ -simplexe singulier de  $X$  à coefficients dans  $G$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\partial_i(\sigma)$  est définie comme dans le cas de  $\mathbb{Z}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_k(X; G) = \begin{cases} \text{Ker}(\partial_k) & \text{si } k \geq 1 \\ C_0(X) & \text{sinon} \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien

des cycles de ce complexe,  $B_k(X; G) = \text{Im}(\partial_{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des bords de ce complexe et  $H_k(X; G) := Z_k(X; G)/B_k(X; G)$  le  $k$ -ième groupe abélien d'homologie de ce complexe que l'on appelle  $k$ -ième *groupe d'homologie (singulière) de X à coefficients dans G*.

▷ Rien de nouveau en fait. ■

**Définition.** (*Groupes d'homologie relatifs*)

Soit  $(X, A)$  une paire topologique. Les *groupes d'homologie relatifs à coefficients dans G* de  $(X, A)$  sont les groupes d'homologie du *complexe d'homologie (singulière) relative à coefficients dans G*  $C(X, A; G)$  défini de manière évident. On note  $H_k(X, A; G)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie relatif à coefficients dans  $G$ .

De même, on peut :

- ★ parler d'homologie réduite, reliée tout aussi simplement à l'homologie tout court ;
- ★ calculer l'homologie des contractiles, qui est concentrée en  $G$  en degré nul ;
- ★ induire des applications dans l'homologie à coefficients généraux. Les résultats sont identiques, en copiant les preuves mot pour mot ;
- ★ on dispose de toutes les suites exactes longues que l'on peut imaginer.
- ★ Comme mentionné, les homologies cellulaire et simpliciale s'énoncent sans problème avec des coefficients, où grossièrement, il s'agit de remplacer les occurrences de  $\mathbb{Z}$  par celles de  $G$ . Attention toutefois, les résultats peuvent changer après coup dans les calculs, car  $\mathbb{Z}$  est trop gentil : c'est un anneau principal.

→ *Notation.* L'homologie singulière classique est l'homologie à coefficients dans  $G = \mathbb{Z}$ . Ainsi,  $C_k(X) = C_k(X; \mathbb{Z})$ , notations parfois utilisées dans les calculs, aussi pour  $H_k(X) = H_k(X; \mathbb{Z})$ ,  $\tilde{H}_k(X) = \tilde{H}_k(X; \mathbb{Z})$  et  $H_k(X, A) = H_k(X, A; \mathbb{Z})$ .

Les théorèmes déjà vus se généralisent en traduisant  $Z \rightsquigarrow G$ . Par exemple :

**Propriété. (*Calcul de l'homologie à coefficients au rang nul*)**

Si  $X$  est un espace non vide quelconque,

$$H_0(X) = G^c$$

où  $c$  est le nombre de composantes connexes par arcs de  $X$ .

**Exercice 14 (Quelques homologies généralisées des espaces projectifs)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Soit  $G$  un groupe abélien. Calculer l'homologie à coefficients dans  $G$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .
2. Soit  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Calculer l'homologie à coefficients dans  $G$  de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .

▷ **Éléments de réponse.**

1. On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; G) = \begin{cases} G & \text{si } k \in [0, 2n] \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, il suffit de calculer l'homologie cellulaire à coefficients dans  $G$ . Rien ne change sensiblement, le  $G$ -complexe cellulaire est toujours nul un terme sur deux :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow G \longrightarrow 0 \longrightarrow G$$

d'où le résultat.

2. On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, c'est guère plus difficile : le  $G$ -complexe cellulaire s'écrit :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

mais les morphismes de bord sont tous nuls en réexaminant la preuve du cas  $G = \mathbb{Z}$ , car ce sont des morphismes nous ou des multiplications par 2 qui meurent dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , d'où le résultat.

**Contre-exemple. (*Même homologie dans  $\mathbb{Q}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$* )**

$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  et  $\{\ast\}$  ont homologie singulière dans  $\mathbb{Q}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$ .

En effet, leurs homologies à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  sont semblablement

$$\mathbb{Q}, 0, 0, \dots$$

mais dans  $\mathbb{Z}$ , celle de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \dots$$

et celle de  $\{*\}$  est

$$\mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

qui diffèrent.  $\square$

### Contre-exemple. (*Même homologie dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais pas dans $\mathbb{Z}$* )

$\mathbb{RP}^2$  et  $S^1 \vee S^2$  ont homologie singulière dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  mais pas dans  $\mathbb{Z}$ .

En effet, leurs homologies à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sont semblablement

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

mais dans  $\mathbb{Z}$ , celle de  $\mathbb{RP}^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, \dots$$

et celle de  $S^1 \vee S^2$  est

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, \dots$$

qui diffèrent.  $\square$

Des arguments de cohomologie donnés par le THÉORÈME DES COEFFICIENTS UNIVERSELLEN montrent que la réciproque est vraie : deux espaces homologues dans  $\mathbb{Z}$ , seront homologues en tous coefficients.

### 5.5.2 Cohomologie des espaces topologiques

Pour définir la cohomologie singulière, on utilise l'opérateur de dualisation classique Hom. On considère toujours  $G$  un groupe abélien afin de définir directement la cohomologie en coefficients quelconques.

#### Définition. (*Cochaîne singulière d'un espace à coefficients dans $G$* )

Soit  $k$  un entier naturel. Une  $k$ -cochaîne singulière dans un espace topologique  $X$  à coefficients dans  $G$  est une fonction qui associe à tout  $k$ -simplexe singulier de  $X$  un élément de  $G$ , autrement dit, le groupe des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  est  $C^k(X; G) := \text{Hom}(C_k(X), G)$ .

*Remarque.* Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a la bijection  $\text{Hom}(C_k(X; G), G) \simeq \mathcal{F}(X^{T^k}, G)$  par l'adjonction oubli-libre.

#### Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes singulières à coefficients dans $G$* )

Soit  $X$  un espace topologique. Le complexe de cochaînes singulières de  $X$  à coefficients dans  $G$  est le complexe  $\mathcal{C}^\bullet(X; G)$  :

$$\dots \longleftarrow C^{k+1}(X; G) \xleftarrow{\delta^{k+1}} C^k(X; G) \xleftarrow{\delta^k} \dots \xleftarrow{\delta^1} C^0(X; G)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  à coefficients dans  $G$  et pour toute  $c$   $i$ -cochaîne singulière de  $X$  à coefficients dans  $G$ , pour tout  $\sigma$   $i+1$ -simplexe singulier de  $X$  à coefficients dans  $G$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$(\delta^{i+1}(c))(\sigma) := \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{i+1})}).$$

Le morphisme *différentielle* ou *de cobords*  $\delta^i$  est alors définie sur tout  $C_i(X)$  par linéarité. On note  $\delta$  ou  $\delta_X$  la donnée des  $(\delta^i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $Z^k(X; G) = \begin{cases} \text{Ker}(\delta^k) & \text{si } k \geq 1 \\ C^0(X) & \text{sinon} \end{cases}$  le  $k$ -ième groupe abélien

des *cocycles* de ce complexe,  $B^k(X; G) = \text{Im}(\delta^{k+1})$  le  $k$ -ième groupe abélien des *cobords* de ce complexe et  $H^k(X; G) := Z^k(X; G)/B^k(X; G)$  le  $k$ -ième groupe abélien de cohomologie de ce complexe (de cochaînes) que l'on appelle  $k$ -ième *groupe de cohomologie (singulière) de  $X$  à coefficients dans  $G$* . Ses éléments sont les *classes de cohomologie (singulière)* de  $X$ .

▷ Si  $a \in C_{k+1}(X)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors on obtient directement par double linéarité de  $\partial^{k+1}(c)$  d'une part et de  $c$  d'autre part, que  $\langle \delta^{k+1}c, a \rangle = \langle c, \partial_{k+1}a \rangle$ . En particulier,  $\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$ . ■

Cette formule montre que :

### Proposition

Les morphismes de cobords sont duaux des morphismes de bords, i.e.  $\partial^* = \delta$ .

On a redémontré que le foncteur Hom transforme un complexe de chaînes en complexe de cochaînes.

→ *Notation.* On note parfois encore  $\delta_k = \delta^k$  par commodité le morphisme de cobords.

→ *Convention.* Souvent, la cohomologie se note de gauche à droite, i.e.

$$C^0(X; G) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_k} C^k(X; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} C^{k+1}(X; G) \longrightarrow \dots$$

→ *Notation.* En général, pour un espace  $X$ , on note  $C^*(X)$  le  $*$ -ième groupe de cochaînes singulières de  $X$ , sans fixation nécessaire à un rang. Cette notation s'étend aux groupes  $H^*(X)$  de cohomologie et aux complexes relatifs.

On peut considérer le complexe de cohomologie augmenté afin de définir la cohomologie réduite.

### Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes singulières augmenté*)

Soit  $X$  un espace topologique. Le *complexe de cochaînes singulières* de  $X$  est le complexe  $\tilde{\mathcal{C}}^\bullet(X; G)$  ou encore  $\mathcal{C}^\bullet(X; G)$  :

$$G \xrightarrow{\varepsilon'} C^0(X; G) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_k} C^k(X; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} C^{k+1}(X; G) \longrightarrow \dots$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $C^k(X; G)$  est le groupe des  $k$ -cochaînes singulières de  $X$  et  $\varepsilon'$  associe à tout  $g \in G$  la fonction constante  $g$  définie sur l'ensemble des 0-cochaînes singulières de  $X$ .

En considérant les groupes de cohomologie de ce nouveau complexe de cochaînes, on obtient par définition les *groupes de cohomologie réduits*  $\tilde{H}^k(X)$  de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

On dispose également des groupes de cohomologie relative ainsi que des suites exactes longues associées.

#### Exercice 15 (*Cohomologie en degré nul*)

Soit  $X$  un espace topologique. Montrer que  $H^0(X; G) \simeq G^P$  où  $P$  est l'ensemble des composantes connexes de  $X$ . En particulier, si  $P$  est fini de cardinal,  $H^0(X; G) = G^n$  et  $H^0(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ .

### Propriété. (*Suite de Mayer-Vietoris cohomologique*)

Soient  $A, B$  deux parties d'un espace topologique  $X$  telles que  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$ , en particulier deux ouverts recouvrant  $X$ . On pose  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . On a une suite exacte longue de groupes de cohomologie :

$$\dots \longleftarrow H^k(A \cap B) \longleftarrow H^k(A) \oplus H^k(B) \longleftarrow H^k(X) \longrightarrow H^{k-1}(A \cap B) \longleftarrow \dots$$

terminée par  $H^0(A \cap B) \longleftarrow H^0(A) \oplus H^0(B) \longleftarrow H^0(X) \longleftarrow 0$  dite *suite de Mayer-Vietoris*. De plus, cette suite est fonctorielle en les applications continues.



On ne peut dualiser l'homologie d'un complexe après coup : en général,  $H^n(X; G)$  et  $\text{Hom}(H_n(X), G)$  ne sont pas isomorphes, comme on aura largement l'occasion de l'illustrer. Cependant :

**Fait. (*Morphisme de la cohomologie dans l'homologie duale*)**

Soient  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe abélien. On a un morphisme

$$h : H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X), G).$$

On le définit de la façon suivante : si  $\alpha \in H^n(X; G) = H_n(X)$  est représenté par un morphisme

$\varphi : \underbrace{C_n(X; G)}_{\supseteq Z_n \text{ le sous-groupe des } n\text{-cycles de } X} \rightarrow G$  tel que  $\delta\varphi = 0$ , on a par dualisation des morphismes de cobords

$\varphi \circ \partial = 0$ , donc  $\varphi$  s'annule sur  $\underbrace{B_n(X; G)}_{\text{le sous-groupe des } n\text{-bords de } X} \subseteq C_n(X; G)$ . La restriction  $\varphi_0 = \varphi|_{Z_n(X; G)}$  induit

donc un morphisme  $\overline{\varphi_0} : H_n(X; G) = Z_n(X; G)/B_n(X; G) \rightarrow G$  qui est un élément de  $\text{Hom}(H_n(X; G), G)$ .

Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant  $\varphi$  de  $\alpha$  : si  $\varphi \in \text{Im}(\partial)$ , on a  $\varphi : \partial\psi = \psi\partial$ , donc  $\varphi$  est nul sur  $Z_n(X; G)$ .

**Application. (*Cohomologie cellulaire du tore*)**

**Lemme**

Le morphisme canonique de la cohomologie singulière dans l'homologie duale est surjectif.

▷ En effet, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et espace topologique  $X$ , la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n(X; G) \longrightarrow C_n(X; G) \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0$$

est scindée, donc il existe une projection  $p : C_n(X; G) \rightarrow Z_n(X; G)$ . Par conséquent, on peut étendre les morphismes définis sur  $Z_n(X; G)$  à  $C_n(X; G)$ . Dans le cas d'un morphisme qui s'annule sur  $B_n(X; G)$ , on obtient un élément de  $\text{Ker}(\delta)$ . Ceci donne

$$\text{Hom}(H_n(X; G), G) \longrightarrow \text{Ker}(\delta) \xrightarrow{pr} H^n(X; G).$$

En composant ce morphisme avec  $h$ , on obtient l'identité. ■

**Fait. (*Suite exacte courte scindée du morphisme de la cohomologie*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un espace topologique et  $h$  le morphisme canonique. On a suite exacte courte scindée  $0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0$ .

*Remarque.* Attention : la section de cette suite n'est pas naturelle, au sens de l'universalité.

On continuera cette réflexion à l'aide du théorème des coefficients universels.

**Propriété. ( *$H^1$  est sans torsion*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Alors  $H^1(X; \mathbb{Z})$  est sans torsion.

▷ En effet,  $H^1(X) = \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$  qui est un groupe abélien. Puisque  $\mathbb{Z}$  est sans torsion,  $H^1(X)$  l'est aussi. ■



Ce n'est pas vrai pour l'homologie, car par exemple  $H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

### 5.5.3 Cohomologie cellulaire

### 5.5.4 Théorème des coefficients universels, foncteurs topologiques d'extension et de torsion

On cherche à reconstruire l'homologie à coefficients quelconques à partir de l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . C'est possible au rang  $n$ , si on la connaît aux rangs  $n-1$  et  $n+1$ . Il est un peu surprenant, mais pas pour longtemps, que l'énoncé exacte de cet correspondance passe par la cohomologie.

**Fait. (*Résolution libre de l'homologie singulière*)**

Supposons que le complexe de chaînes singulières de l'espace topologique  $X$  soit un complexe de groupes abéliens libres. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Observons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_{n+1}(X; G) & \longrightarrow & C_{n+1}(X; G) & \longrightarrow & B_n(X; G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow \delta & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & Z_n(X; G) & \longrightarrow & C_n(X; G) & \longrightarrow & B_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les suites horizontales courtes sont scindées. On en déduit par dualisation par  $\text{Hom}(\cdot, G)$  une suite exacte courte de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & Z_{n+1}(X; G)^* & \longleftarrow & C_{n+1}(X; G)^* & \longleftarrow & B_n(X; G)^* \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow 0 & & \uparrow \delta & & \uparrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & Z_n(X; G)^* & \longleftarrow & C_n(X; G)^* & \longleftarrow & B_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow 0 \end{array}$$

d'où la suite exacte longue

$$\dots \longleftarrow B_n(X; G)^* \xleftarrow{i_n^*} Z_n(X; G)^* \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow B_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow Z_{n-1}(X; G)^*$$

où  $i_n : B_n(X; G) \longrightarrow Z_n(X; G)$  est l'inclusion canonique. On obtient

$$0 \longleftarrow \text{Ker}(i_n^*) \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow \text{Coker}(i_{n-1}^*) \longleftarrow 0.$$

On a  $\text{Ker}(i_n^*) \simeq \text{Hom}(H_n(X; G), G)$ , car  $\text{Ker}(i_n^*)$  est formé des morphismes  $Z_n(X; G) \rightarrow G$  qui s'annulent sur  $B_n(X; G)$ . L'application  $H^n(X; G) \rightarrow \text{Ker}(i_n^*)$  s'identifie avec  $h$ .

Par suite, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B_{n-1}(X; G) \xrightarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(X; G) \longrightarrow 0$$

peut être vue comme résolution libre de  $H_{n-1}(X; G)$ . En dualisant, on obtient

$$0 \longleftarrow B_{n-1}(X; G)^* \xleftarrow{i_{n-1}^*} Z_{n-1}(X; G)^* \longleftarrow \text{Hom}(H_{n-1}(C), G) \longleftarrow 0.$$

Cette suite n'est pas forcément exacte au terme  $B_{n-1}(X; G)^*$ . On considère donc<sup>a</sup> le conoyau  $\text{Coker}(i_{n-1}^*) = \text{Ker}(h) = \text{Ext}(H_{n-1}(X; G), G)$  le *groupe d'extension* ( $H, G$ ).

<sup>a</sup> Si  $\mathcal{F} : \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$  est une résolution libre de  $H$ , on obtient  $\dots \longleftarrow F_2^* \longleftarrow F_1^* \longleftarrow F_0^* \longleftarrow H^* \longleftarrow 0$ . Les groupes d'homologie de ce complexe de chaînes ne dépendent pas de la résolution libre choisie et cette résolution est nulle sauf éventuellement en  $F_1^* := \text{Ext}(H, G)$ .

### Exercice 16 (Propriétés calculatoires des groupes d'extension)

Soient  $H, H'$  deux groupes abéliens. Montrer que

1.  $\text{Ext}(H \oplus H', G) \simeq \text{Ext}(H, G) \oplus \text{Ext}(H', G)$  ;
2.  $\text{Ext}(H, G) = 0$  dès que  $H$  est libre ;
3.  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) = G/nG$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Théorème. (Formule des coefficients universels (cohomologique))

Soient  $X$  un espace topologique,  $G$  un groupe abélien. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a une suite exacte courte naturelle mais a priori non canoniquement et scindée :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow G.$$

Ainsi,  $H^n(X; G) \simeq \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G)$ .

### Corollaire. (Formule des coefficients universels en type fini)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini, alors

$$H^n(X) \simeq \left( H_n(X) / H_n(X)^{\text{tor}} \right) \oplus H_{n-1}(X)^{\text{tor}}.$$

**Corollaire. (*Formule des coefficients universels sans torsion*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini et sans torsion, alors  $H^n(X) = H_n(X)$ .

En particulier, si l'homologie singulière d'un espace est de type fini et sans torsion, elle coïncide avec sa cohomologie singulière.

**Corollaire. (*Nombres de Betti cohomologiques*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Si les groupes  $H_n(X)$  et  $H_{n-1}(X)$  sont de type fini, alors les parties libres de  $H_n(X)$  et  $H^n(X)$  sont isomorphes et  $\text{rg}(H^n(X)) = \beta_n(X)$ .

**Exercice 17 (Propriétés calculatoires des produits de torsion)**

Soient  $A, A', B$  trois groupes abéliens. Montrer que

1.  $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(B, A)$  ;
2.  $\text{Tor}(A \oplus A', B) = \text{Tor}(A, B) \oplus \text{Tor}(A', B)$  ;
3.  $\text{Tor}(A, B) = 0$  dès que  $A$  ou  $B$  est libre ;
4.  $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(A^{\text{tor}}, B)$  ;
5.  $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Ker}(A \xrightarrow{\times n} A)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Théorème. (*Formule des coefficients universels pour l'homologie*)**

Soient  $X$  un espace topologique,  $G$  un groupe abélien. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a<sup>a</sup> une suite exacte courte naturelle mais a priori pas canoniquement naturelle et scindée :

$$0 \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0.$$

Ainsi,  $H_n(X; G) \simeq (H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G)$ .

---

<sup>a</sup> Si  $\mathcal{F} : \dots F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H$  est une résolution libre de  $H$ , on a le complexe de chaînes  $\mathcal{F} \otimes G : \dots F_2 \otimes G \longrightarrow F_1 \otimes G \longrightarrow F_0 \otimes G \longrightarrow H \otimes G \longrightarrow 0$  qui est exacte sauf éventuellement en  $\text{Tor}(H, G) := F_1 \otimes G = H_1(\mathcal{F} \otimes G)$  le *produit de torsion*  $(H, G)$ .

Ne pas se précipiter sur la formule des coefficients universels : c'est un marteau-pilon !



Lorsqu'on sait calculer explicitement l'homologie dans  $\mathbb{Z}$ , on sait a priori le faire en tout coefficients : les coefficients universels ne servent que lorsque les groupes d'homologie, et non le complexe singulier, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  sont seulement donnés.

### Corollaire. (*Indépendance des coefficients pour les nombres de Betti*)

Les nombres de Betti à coefficients dans un corps ne dépendent de  $K$  que par sa caractéristique. Si les groupes d'homologie singulière de l'espace sont sans torsion, alors ils sont indépendants de  $K$ .

En particulier, si l'homologie d'un espace  $X$  est de type fini et sans torsion, pour tout corps  $K$ ,  $H^i(X; K) \simeq H_i(X; \mathbb{Z}) \simeq H_i(X; K) \simeq H_i(X; \mathbb{Z})$ . C'est vrai en particulier pour  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Mnémonik :** le lien entre la torsion et les nombres de Betti est donné par le théorème des coefficients universels.

### Corollaire. (*Homologue $\Rightarrow$ G-homologue*)

Si deux espaces ont même homologie singulière (à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ), alors ils ont même homologie à coefficients dans  $G$  pour tout groupe abélien  $G$ .

### Méthode. (*Calcul de l'homologie par la cohomologie*)

Soient  $X$  un espace topologique d'homologie de type finie et  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

- ★  $H^k(X; \mathbb{Z})$  et  $H_k(X; \mathbb{Z})$  ont même rang ;
- ★ si  $k \geq 1$ , le sous-groupe de torsion de  $H^k(X; \mathbb{Z})$  est isomorphe à celui de  $H_{k-1}(X; \mathbb{Z})$ .

### Exemples. (*Cohomologies des espaces classiques*)

1. (*Cohomologie du vide*) La cohomologie du vide est identiquement nulle.

Il s'agit de dualiser de l'identiquement nul.

2. (*Cohomologie des contractiles*) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\{\star\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon..} \end{cases}$

3. (*Cohomologie du tore*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{T}^n) = H_k(\mathbb{T}^n)$ .

En effet, l'homologie du tore est de type fini et sans torsion ! La symétrie dans cette suite traduit l'orientabilité de cette variété compacte : la dualité de Poincaré s'applique.

4. (*Cohomologie de la bouteille de Klein*) On a :  $H^0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ ,  $H^1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$  et  $H^2(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ; au-delà, toute la cohomologie de  $\mathcal{K}$  est nulle.

Le complexe d'homologie cellulaire de la bouteille de Klein est  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$ , quitte à continuer à compléter avec des 0 à gauche. En dualisant, on trouve le complexe de cohomologie

$$(\text{cellulaire}) \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, on retrouve l'homologie de la bouteille :  $H_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H_2(\mathcal{K}) = 0$ .

Il suffit d'appliquer la méthode précédente : la suite des parties libres homologiques est  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 0, 0, 0, \dots$

et celle des parties de torsion homologiques  $0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0, 0, 0, \dots$ , d'où le résultat.

L'asymétrie dans cette suite traduit la non-orientabilité de cette variété : la dualité de Poincaré ne s'applique pas, d'ailleurs, en aucun couple des termes donnés.

- 5.** (*Cohomologie des espaces projectifs complexes*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ .

En effet, le complexe cellulaire de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  est très lacunaire, ce qui ne change pas avec la dualisation.

On aurait aussi pu appliquer la formule des coefficients universels en type fini et sans torsion.

- 6.** (*Cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des espaces projectifs réels*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour

$$\text{tout } k \in \mathbb{N}, H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ pour } 0 \leq k \leq n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le complexe d'homologie cellulaire de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathbb{Z}$  en alternant des nuls et des multiplications par 2, de sorte que le dernier morphisme à droite soit nul. En dualisant dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on obtient le complexe de cohomologie  $0 \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  identiquement nul aux morphismes, d'où le résultat.

Remarque malicieuse : dans ce premier cas, la dualité de Poincaré s'applique ! En effet, toute variété est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientable.

On a déjà calculé l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  des espaces projectifs réels.

- 7.** (*Cohomologie singulière des espaces projectifs réels*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{si } n \text{ est impair : } H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } k \in [1, n-1] \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \text{ ou } n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et si } n \text{ est pair :}$$

$$H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } k \in [1, n] \text{ est pair} \\ \mathbb{Z} \text{ pour } k = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De même, on obtient ces formules en observant l'homologie singulière à coefficients dans  $\mathbb{R}$  des  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  et en appliquant le théorème des coefficients universels pour la cohomologie, le calcul des Ext étant possible grâce à  $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

On observe que la dualité de Poincaré s'applique et est vérifiée si et seulement si  $n$  est impair, i.e.  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  est orientable, ce qui est assez joli.

### Contre-exemple. (*Homologie et cohomologie non isomorphes*)

La cohomologie de la bouteille de Klein ne coïncide pas avec son homologie. En effet,  $H^1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H_1(\mathcal{K})$ .

Ceci s'explique par ce que, même si toute son homologie est de type fini, la bouteille de Klein admet des groupes d'homologie avec de la torsion, à savoir  $H_1(X)$ . □

## 5.5.5 Formule de Künneth

### 5.5.5.1 Théorème de Künneth

**Théorème.** (*Théorème de Künneth*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Pour tout corps  $K$ , en particulier pour  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$H_n(X \times Y; K) \simeq \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i+j=n} H_i(X; K) \otimes_K H_j(Y; K).$$

De plus, cet isomorphisme est donné par le cross-produit défini habituellement en TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS et est naturel en ses termes  $X, Y$ .

**Corollaire.** (*Formule de Künneth pour les nombres de Betti*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soient  $p_X, p_Y, p_{X \times Y}$  les séries génératrices des nombres de Betti respectifs de  $X, Y$  et  $X \times Y$ . Alors

$$p_{X \times Y} = p_X p_Y.$$

En particulier, si les nombres de Betti de  $X$  et de  $Y$  sont respectivement presque tous nuls, alors ceux de  $X \times Y$  aussi et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta_n(X \times Y) = \sum_{i=0}^n \beta_i(X) \beta_{n-i}(Y).$$

**Propriété.** (*Théorème de Künneth sur un anneau principal*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $R$  un anneau principal. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a une suite exacte courte naturelle mais a priori non canoniquement et scindée :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} H_i(X; R) \otimes_R H_j(Y; R) \longrightarrow H_k(X \times Y; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k-1} \text{Tor}_1^R(H_i(X; R), H_j(Y; R)) \longrightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \quad \text{on a } \quad H_k(X \times Y; R) \quad &\simeq \quad \bigoplus_{i+j=k} H_i(X; R) \otimes_R H_j(Y; R) \quad \oplus \\ &\quad \bigoplus_{i+j=k-1} \text{Tor}_1^R(H_i(X; R), H_j(Y; R)). \end{aligned}$$

**Corollaire. (*Formule de Künneth sans torsion*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $R$  un anneau principal. Alors si la cohomologie de  $X$  et de  $Y$  est sans torsion, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$H_k(X \times Y; R) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H_i(X; R) \otimes_R H_j(Y; R).$$

**5.5.5.2 Formule de Künneth pour la cohomologie****Propriété. (*Théorème de Künneth sur un anneau principal*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $R$  un anneau principal. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a une suite exacte courte naturelle mais a priori non canoniquement et scindée :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} H^i(X; R) \otimes_R H^j(Y; R) \longrightarrow H^k(X \times Y; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k+1} \text{Tor}_1^R(H^i(X; R), H^j(Y; R)) \longrightarrow 0.$$

$$\text{Ainsi, on a } H^k(X \times Y; R) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H^i(X; R) \otimes_R H^j(Y; R) \oplus \bigoplus_{i+j=k+1} \text{Tor}_1^R(H^i(X; R), H^j(Y; R)).$$

**Corollaire. (*Formule de Künneth cohomologique sans torsion*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $R$  un anneau principal. Alors si la cohomologie de  $X$  et de  $Y$  est sans torsion, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$H^k(X \times Y; R) \simeq \bigoplus_{i+j=k} H^i(X; R) \otimes_R H^j(Y; R).$$

Cette section est réservée au lecteur connaissant l'ANNEAU DE COHOMOLOGIE.

**Corollaire. (*Formule de Künneth pour la cohomologie*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $p_X, p_Y : X, Y \rightarrow X \times Y$  les projections canoniques respectives. Soit  $R$  un anneau principal. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi : H^*(X \times Y; R) &\xrightarrow{\sim} H^*(X; R) \otimes H^*(Y; R) \\ x &\longmapsto p_X^*(x) \otimes_R p_Y^*(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres commutativement graduées.

## 5.6 Algèbre homologique

### 5.6.1 Complexes de modules



La théorie de l'homologie énoncée dans le cadre général des catégories abéliennes peut être étudiée indépendamment des théories de l'homologie topologiques développées précédemment. On invite le lecteur à s'y référer de temps à autre pour prendre un certain recul sur les notions présentées.



### 5.6.2 Caractéristique d'Euler

#### Définition. (*Caractéristique d'Euler d'un complexe*)

Soit  $C$  un complexe de cochaînes de modules libres, par exemple de groupes abéliens libres ou d'espaces vectoriels. On note  $(H^i)_{i \in \mathbb{N}}$  son homologie. La *caractéristique (d'Euler)(-Poincaré)* de  $C$  est la somme alternée

$$\chi = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim(H^i)$$

en posant  $\chi = \infty$  si  $(\dim(H^i))_i$  n'est pas presque toute nulle.

Si  $C$  est canoniquement associé à un espace topologique  $X$ , typiquement si  $C$  est le complexe d'homologie singulière, on note  $\chi = \chi(X)$ . On peut préciser en indice le type d'homologie considéré.

#### Exemples. (*Caractéristiques d'Euler*)

1. Le vide a caractéristique nulle. Mais le tore aussi... ce n'est donc pas un invariant très puissant.
2. Un contractile a caractéristique d'Euler 1.

Son homologie est réduite au  $H^0$  qui est de dimension 1.

Plus généralement,  $n \in \mathbb{N}$  points forment un espace de caractéristique  $n$ .

**Exercice 18** (*Caractéristiques négatives*)

Construire un espace topologie de caractéristique  $k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

▷ **Éléments de réponse.**

On sait qu'une paire de pantalons est de caractéristique  $-1$  et il n'est pas dur de voir que c'est un  $CW$ -complexe, en décomposant comme bon nous semble simplement sur un dessin. Puisque que la somme disjointe de  $CW$ -complexes est additive sous la caractéristique, il s'ensuit que la somme disjointe de  $k \in \mathbb{N}$  pantalons est de caractéristique  $-k$ .

Généralisons les propriétés montrées pour des  $CW$ -complexes.

**Propriété.** (*Caractéristique d'Euler d'un produit*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $\chi(X \times Y)$ ,  $\chi(X)$  et  $\chi(Y)$  sont finies, alors

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

**Propriété.** (*Caractéristique d'Euler d'une somme directe*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Si  $\chi(X \sqcup Y)$ ,  $\chi(X)$  et  $\chi(Y)$  sont finies, alors

$$\chi(X \sqcup Y) = \chi(X) + \chi(Y).$$

▷ Tout espace topologique est faiblement homotopiquement équivalent à un  $CW$ -complexe. Or la caractéristique d'Euler ne faisant intervenir que les groupes d'homologie, cette identification nous suffit. ■

### 5.6.3 Axiomes d'Eilenberg-Steenrod



# Chapitre 6

## Homotopies

### Résumé

Le but de cette leçon intitulée THÉORIES DE L’HOMOTOPIE est de développer deux premiers exemples de théories de l’homotopie : celle des espaces topologiques et celle des ensembles simpliciaux. L’approche choisie est de les présenter d’une façon uniforme menant à leur généralisation sous la forme de catégorie de modèles. Le second but caché est de donner assez de matière au lecteur à propos des ensembles simpliciaux pour ouvrir la porte à l’étude de la théorie des catégories de plus grandes dimensions, via la notion de  $\infty$ -catégorie. Les théories de cette envergure permettent de classer les espaces topologiques à équivalence d’homotopie près. Toutes ces notions ont, de nos jours, un grand avenir, tant la théorie de l’homotopie irriguent les mathématiques, de sorte que, si au XX<sup>e</sup> siècle, on était convaincu que les mathématiques allaient être fondées sur les bases de la théorie des ensembles, nous pensons que celles du XXI<sup>e</sup> siècle le seront sur celles de la théorie de l’homotopie. En effet : la notion d’ $\infty$ -catégorie stable surpassé aujourd’hui celle de catégorie triangulée ; en ses termes, on peut enfin formuler le but final du programme de Langlands ; la géométrie algébrique qui en dérive pourrait donner un sens à la notion de tangente en un point singulier ; les  $\infty$ -groupoïdes infinis donnent naissance à la théorie de Lie et à la théorie de la déformation, et d’autres choses encore.

### 6.1 Théorie de l’homotopie (supérieure) des espaces topologiques

Un premier problème est qu’il existe des espaces assez différents au niveau du type d’homotopie et qui auront des groupes fondamentaux identiques, autrement dit  $\pi_1$  n’est pas un invariant total. La théorie de l’homotopie supérieure permet d’associer des homotopies entre homotopies et de continuer ce processus à l’infini afin de prendre en compte des paramètres de degré supérieur que le groupe fondamental ne voit pas, typiquement, le  $\pi_n$  pourra détecter des trous « de dimension  $n$  », la sphère  $S^2$  ayant par exemple un « trou de dimension 2 » que le  $\pi_1$  ne voit pas.

### 6.1.1 Prolégomènes : quelques faits sur le segment $[0,1]$ et ses amis les cubes

→ *Notation.* On note  $I = [0,1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle donc  $I^n$  le  $n$ -cube ou *cube de dimension n*.

#### Proposition. (*Décomposition du cube en sous-cubes*)

Pour tous entiers  $0 \leq k \leq n$ ,  $I^n \simeq I^k \times I^{n-k}$ .

▷ Cette identité ensembliste est une identification bénigne, et elle se transmet aux espaces topologiques par associativité de la topologie produit. ■

#### Proposition. (*Propriété différentielle de la frontière*)

Soient  $0 \leq k \leq n$  deux entiers. Alors

$$\partial I^n \simeq (\partial I^k \times I^{n-k}) \cup (I^k \times \partial I^{n-k}).$$

▷ Il est assez visuel (dites cela à  $n = 4$ ) mais en tout cas pas très difficile à vérifier au moyen d'argument de topologie des espaces vectoriels normés, que  $\partial I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\}$ . Le résultat s'ensuit, car  $\llbracket 1, n \rrbracket \simeq \llbracket 1, k \rrbracket \cup \llbracket 1, n - k \rrbracket$  et la réunion traduit bien la disjonction logique. ■

On utilisera aussi :

#### Lemme. (*Le n-cube écrasé sur son bord est la n-sphère*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I^n / \partial I^n$  est un modèle de la sphère de dimension  $n$ , i.e.  $I^n / \partial I^n \cong S^n$ .

▷ En effet,  $S^n = \partial D^{n+1} \simeq \partial I^{n+1} \simeq I^n / \partial I^n$ , la deuxième identité venant de ce qu'un  $n$ -cube est une  $n$ -boule à homéomorphisme près. Montrons le dernier homéomorphisme. Raisonnons par récurrence. La frontière  $\partial I^{n+1}$  du  $(n+1)$ -cube est constituée de  $2(n+1)$  faces homéomorphes à  $I^n$ . On peut choisir l'une d'elles et étendre sa frontière pour couvrir les  $2(n+1) - 1$  autres faces, ce qui donne le dernier homéomorphisme. Explicitement, on considère la face  $F = \{x_{n+1} = 0\}$ . Sa frontière est  $\{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid \exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\}$ . Considérons donc l'arête  $\{x_i = b\}$  contenue dans  $\{x_i = b\}$  face de  $I^{n+1}$ . Il est clair que la face  $\{x_i = b\}$  du cube se rétracte par déformation forte par une simple dilatation orthogonale sur la face opposée à  $F$  définie par  $\{x_{n+1} = 1\}$ . Il reste donc à traiter le cas de la face  $\{x_{n+1} = 1\}$ , car tous les points de la frontière de cette face appartiennent à une autre face, dont on déjà été contractés par le procédé précédent. Par hypothèse de récurrence, cette face est homéomorphe à  $I^n \cong I^{n-1} / \partial I^{n-1}$ , et donc de fil en aiguille à  $I^0 / \partial I^0 = \{*\}$ , autrement dit est contractile. D'où le résultat. ■

**Exercice 1** (*Universalité de l'intervalle [0,1]*)

Un espace topologique bipointé muni d'une duplication est un quintuplet  $(X, \mathcal{T}, x_0, x_1, \delta_X)$  où  $(X, \mathcal{T})$  est un espace topologique,  $x_0, x_1 \in X$  et  $\delta_X$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $(X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0, x_1}$  où  $\mathcal{R}_{x_0, x_1}$  est la relation d'équivalence engendrée par celle qui identifie  $x_0$  dans la première copie de  $X$  à  $x_1$  dans la deuxième copie de  $X$ . Un morphisme d'espaces topologiques bipointés munis d'une duplication entre  $(X, \mathcal{T}, x_0, x_1, \delta_X)$  et  $(Y, \mathcal{T}', y_0, y_1, \delta_Y)$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$  et faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ (X \coprod X)/\mathcal{R}_{x_0, x_1} & \xrightarrow{f \coprod f} & (Y \coprod Y)/\mathcal{R}_{y_0, y_1}, \end{array}$$

i.e.  $\delta_Y \circ f = f \coprod f \circ \delta_X$  où  $f \coprod f$  est l'application canonique  $X \coprod X \rightarrow Y \coprod Y$  passée simultanément au quotient, ce qui est possible par hypothèses de pointage.

1. Vérifier que la collection des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication forme une catégorie concrète.
2. Montrer que l'espace topologique bipointé  $([0,1], 0, 1)$  est naturellement muni d'une duplication.
3. Justifier que l'on a une théorie de l'homotopie en remplaçant  $[0,1]$  par n'importe quel espace topologique bipointé muni d'une duplication.
4. Soit  $(X, x_0, x_1, \delta_X)$  un espace topologique bipointé. Exhiber un morphisme  $(X, x_0, x_1, \delta_X) \rightarrow ([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$ .
5. En déduire que  $([0,1], 0, 1, \delta_{[0,1]})$  est terminal dans la catégorie des espaces topologiques bipointés munis d'une duplication.

**À propos.** (*Choix de  $[0,1]$  par rapport à un intervalle compact*)

- ★ Le choix de  $[0,1]$  plutôt que de n'importe quel intervalle compact de  $\mathbb{R}$  est purement conventionnel, en témoigne les définitions alternatives de chemins choisies avec  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha < \beta$  deux réels qui ne changent rien. En pratique, changer  $[\alpha, \beta]$  en  $[a, b]$  par précomposition avec  $h : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  un homéomorphisme entre les deux,  $a < b$  deux réels avec a priori  $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$ , est une *reparamétrisation*.
- ★ Dans un monde ouvert d'esprit où un lacet est une application  $H : X \times [0, \lambda] \rightarrow Y$  avec  $\lambda > 0$  quelconque, il n'y a pas de problème, mais pour nous, la composition des lacets n'est pas associative stricto sensu (se rappeler un petite diagramme rectangulaire bien connu de ceux qui ont scrupuleusement construit le groupe fondamental).

### 6.1.2 Équivalence d'homotopie et théorie des catégories

On commence par formuler la théorie de l'homotopie connue en topologie algébrique élémentaire grâce au langage des catégories.

#### 6.1.2.1 Homéomorphie

##### Définition. (*Homéomorphie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une flèche de Top. On dit que  $f$  est un *homéomorphisme* si  $f$  est un isomorphisme dans Top, autrement dit s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  dans Top telle que  $g \circ f = id_X$  et  $f \circ g = id_Y$ .

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont *homéomorphes* s'ils sont isomorphes dans Top, autrement dit s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f = id_X$  et  $f \circ g = id_Y$ . On note  $X \simeq Y$ .

#### 6.1.2.2 Homotopie

##### Reformulation pratique. (*Formulation catégorique de la notion d'homotopie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $f, g : X \rightarrow Y$  continues. Alors  $f$  et  $g$  sont homotopes si et seulement si on peut trouver une application continue  $H$ , qui est alors une homotopie entre  $f$  et  $g$ , faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

où  $\iota_0$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 0)$  et  $\iota_1$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 1)$ .

→ *Notation.* On notera systématiquement  $\iota_0, \iota_1$  les applications d'inclusion en 0 et 1 de  $I$ .

On retrouve alors très visuellement :

##### Proposition

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. L'homotopie est une relation d'équivalence sur  $\text{Top}(X, Y)$ . L'ensemble quotient est noté  $[X, Y]$ .

▷ En effet :

\* si  $f = g$ , alors on peut prendre  $H : X \times I \rightarrow Y$  constante :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow \text{cste} & \swarrow f & \\ & & Y & & \end{array}$$

qui est continue et fait commuter trivialement chaque triangle du diagramme.

★ Pour la symétrie, il suffit d'observer que

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \nearrow g & \uparrow & \swarrow f & \\
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\
 & \searrow f & \downarrow & \swarrow g & \\
 & & Y & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 H(?, -\bullet) \\
 \vdash
 \end{array}$$

mais surtout

★ pour montrer que l'homotopie est transitive, on concatène :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I \xleftarrow{\iota_1} X \\
 & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & & \searrow h & \swarrow H' \\
 & & Y & & & & 
 \end{array}$$

dont on déduit à réparamétrisation près

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times [0, \frac{1}{2}] & \xleftarrow{\iota_{\frac{1}{2}}} & X & \xleftarrow{\iota_{\frac{1}{2}}} & X \times [\frac{1}{2}, 1] \xleftarrow{\iota_1} X \\
 & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & & \searrow h & \swarrow \iota_1 \\
 & & Y & & & & 
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c}
 H'' = H \oplus H' \\
 \vdash
 \end{array}$$

où  $X \times I = X \times [0, \frac{1}{2}] \oplus X \times [\frac{1}{2}, 1]$  avec la définition évidente,

ce qui démontre bien que la relation d'homotopie est une équivalence. ■

→ **Notations.** Pour  $X, Y$  deux espaces topologiques, on note  $\text{Top}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ . De même, on notera  $h\text{Top}(X, Y) = \text{Hom}_{h\text{Top}}(X, Y)$  comme on va le définir juste maintenant.

### 6.1.2.3 La catégorie d'homotopie

**Définition.** (*Nouvelle introduction de la catégorie Top modulo homotopie*)

On note  $h\text{Top}$ , ou  $ho\text{Top}$ , et l'on appelle *catégorie homotopique des espaces topologiques*, la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et la classe des morphismes entre  $X$  et  $Y$  est  $[X, Y]$ , i.e. la catégorie  $\text{Top}$  quotientée par la congruence d'homotopie.

En fait, sans cette dernière remarque, on n'a pas là une catégorie a priori (il faut des identités, une associativité, etc.). La proposition précédente éclaire ce point et justifie la construction précédente.

### Proposition

Considérons la projection  $H_0 : \text{Top} \longrightarrow h\text{Top}$  qui à un espace topologique associe ce même espace et parallèlement à une application continue  $f : X \rightarrow Y$  associe  $[f] \in [X, Y]$ . Alors il existe une unique structure de catégorie sur  $h\text{Top}$  telle que  $H_0$  soit un foncteur.

▷ On raisonne par analyse synthèse. Si une telle structure existe, alors  $H_0(id_X) = id_{H_0(X), H_0} = [id_X]$  et

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{H_0} & \downarrow [f] \\ Y & & Y \\ g \downarrow & \xrightarrow{H_0} & \downarrow [g] \\ Z & & Z \end{array}$$

d'où  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$  ce qui définit au plus une structure de catégorie sur la classe des objets et des morphismes  $H_0$ . Réciproquement, la composition est bien définie de cette manière, car si l'on a

$$X \xrightarrow{f \sim f'} Y \xrightarrow{g \sim g'} Z$$

avec  $H(-, 0) = f, H(-, 1) = f', K(-, 0) = g, K(-, 1) = g'$ , alors  $g \circ f \sim g' \circ f'$  par  $N : X \times I \longrightarrow Z$ ; en effet,  $N((-0), 0) = g \circ f$  et  $N((-1), 1) = f$ . ■  
 $(x, t) \longmapsto K(H(x, t), t)$

*Remarque.* La preuve précédente fixe des concepts et des notations, il faut s'y référer sans regimber.

### Définition. (*Diagramme homotopiquement commutatif*)

Un diagramme est dit *homotopiquement commutatif* s'il commute modulo la relation d'homotopie, par exemple dans  $\text{Top}$  :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{k} & Y \end{array}$$

est homotopiquement commutatif si son image dans  $h\text{Top}$  l'est, i.e.  $gf \simeq kh$ .

*Remarque.* La commutativité est plus forte que la commutativité modulo homotopie.

#### 6.1.2.4 Deux types d'isomorphie nouveaux

##### Définition. (*Équivalence d'homotopie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un flèche de Top. On dit que  $f$  est une *équivalence d'homotopie* si  $H_0(f)$  est un isomorphisme dans  $h\text{Top}$ , autrement dit s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  dans Top telle que  $g \circ f \sim id_X$  et  $f \circ g \sim id_Y$ .

Deux espaces  $X$  et  $Y$  sont *homotopiquement équivalents* ou *ont le même type d'homotopie* s'ils sont isomorphes dans  $h\text{Top}$ , autrement dit s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f \sim id_X$  et  $f \circ g \sim id_Y$ . On note  $X \cong Y$  ou plus simplement  $X \sim Y$ .

##### Définition. (*Rétract par déformation*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $X \subseteq Y$  et  $i : X \hookrightarrow Y$  l'inclusion canonique. On dit que  $X$  est un *rétract par déformation* de  $Y$  s'il existe  $r : Y \rightarrow X$  qui soit une rétraction de  $i$  dans Top et une équivalence d'homotopie, *i.e.* soit telle que  $ri = id_X$  et  $ir \sim id_Y$ .

##### Exemple

Tout espace topologique  $X$  est un rétract par déformation de son cylindre  $X \times I$ , identifié à n'importe quelle hauteur de tranche.

#### 6.1.2.5 Notion d'invariant topologique

On souhaite définir la notion d'invariant d'un espace topologique. On veut qu'il envoie non seulement un espace topologique sur un objet d'une certaine catégorie, mais qu'il soit fonctoriel en envoyant une flèche sur une flèche entre deux objets. On souhaite de plus que deux espaces homotopiquement équivalents soient envoyés sur deux objets isomorphes.

##### Définition. (*Invariant topologique*)

On appelle *invariant topologique* un foncteur de  $h\text{Top}$  sur  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

##### Exemples. (*Invariants topologiques*)

1.  $\pi_0$  est un invariant topologique à valeurs dans Ens.
2.  $\pi_1$  est un invariant topologique *pointé* (*voir la section suivante*) dans Grp, donc presque un invariant topologique.  $\Pi_1$  est un invariant topologique dans la catégorie des groupoïdes.
3. Plus généralement,  $\Pi_n$  est un invariant topologique pour  $n \geq 1$ .
4. Les groupes d'homologie et les groupes de cohomologie forment également une classe d'invariants topologiques.

**Propriété. (Propriété universelle de l'homotopie)**

Un invariant est donc un foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  une catégorie donnée qui se factorise par  $h\text{Top}$ , visuellement :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{H_0} & h_0\text{Top} \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

$h\text{Top}$  vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur  $\text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  envoyant une équivalence d'homotopie de  $\text{Top}$  sur un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  se factorise par  $h\text{Top}$  et réciproquement tout foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  se factorisant par  $h\text{Top}$  envoie les équivalences d'homotopie sur des isomorphismes.

▷ Supposons que  $F$  envoie une équivalence d'homotopie sur un isomorphisme. Sur les objets, on a forcément  $F(X) = \tilde{F}(\underbrace{H_0(X)}_{=X})$  et donc on pose  $\tilde{F}(X) = F(X)$  pour tout espace topologique  $X$ .

Soit maintenant  $f : X \rightarrow Y$  une application continue, alors on pose  $\tilde{F}([f]) = F(f)$  par

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\quad} & [f] \\ & \swarrow & \downarrow \tilde{F} \\ & & F(f) \end{array}$$

qui est bien définie, car  $f \xrightarrow{H} g$ , soit  $F(f) = F(g)$ , équivaut à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\iota_0} & X \times I & \xleftarrow{\iota_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow & \swarrow f & \\ & & Y & & \end{array}$$

qui par composition à  $F$  devient

$$\begin{array}{ccccc} & & F(r) & & \\ & \swarrow F(\iota_0) & & \nearrow F(\iota_1) & \\ F(X) & \xleftarrow{\quad} & F(X \times I) & \xleftarrow{\quad} & F(X) \\ & \searrow F(f) & \downarrow F(H) & \swarrow F(g) & \\ & & F(Y) & & \end{array}$$

d'où  $F(f) = F(H) \circ F(\iota_0) = F(H) \circ F(\iota_1) = F(g)$  avec de plus  $r\iota_0 = r\iota_1$ ,  $r$  étant la rétraction par déformation commune  $(x,t) \mapsto x$  et donc  $F(r)$  est un isomorphisme d'où  $F(\iota_0) = F(\iota_1)$ , car  $F(r)F(\iota_0) = F(r)F(\iota_1)$ .

Réciproquement, si  $F = \tilde{F} \circ H_0$ , si  $f$  morphisme de  $\text{Top}$  est une équivalence d'homotopie, par définition  $H_0(f)$  est un isomorphisme, donc  $F(f) = \tilde{F}(H_0(f))$  l'est, simplement parce que  $\tilde{F}$  est un foncteur. ■

Puisque toute catégorie vérifiant cette propriété universelle est isomorphe à  $h\text{Top}$ , on a :

**Fait. (*Identification de hTop*)**

$h\text{Top}$  définie par sa propriété universelle est uniquement à isomorphisme près : c'est la catégorie localisée  $\text{Top}[h - \text{eq}^{-1}]$  de  $\text{Top}$  par rapport à  $h - \text{eq}$  l'ensemble des équivalences d'homotopie.  $h\text{Top}$  est la catégorie dérivée de  $\text{Top}$ .

Rappelons qu'une telle construction est obtenue en considérant les chaînes finies de morphismes de  $h\text{Top}$  et de leurs inverses formels :

$$X \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow Y$$

prises modulo la relation d'équivalence engendrée par la composition des morphismes

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \approx X \xrightarrow{gf} Z,$$

l'inversion formelle à droite

$$X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow[\sim]{f^{-1}} X \approx id_X$$

et l'inversion formelle à gauche

$$Y \xleftarrow[\sim]{f^{-1}} X \xrightarrow{f} Y \approx id_Y.$$

**6.1.2.6 Catégories relatives****Définition. (*Catégorie relative*  $\text{Top}_{(2)}$ )**

La *catégorie relative*  $\text{Top}_{(2)}$  a pour objets les couples d'espaces topologiques  $(X,A)$  où  $A \subseteq X$  et pour morphismes  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  les applications continues  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $f(A) \subseteq B$ .

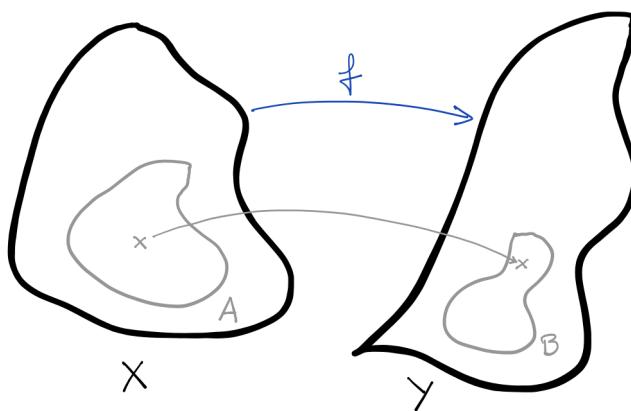


FIGURE 6.1.1 : Illustration de la catégorie relative avec une paire topologique et un morphisme de paires. —

**Remarque importante.**  $\text{Top}_{(2)}$  a la catégorie des espaces topologiques pointés  $\text{Top}_*$  pour sous-catégorie pleine, en prenant comme  $A$  l'ensemble des sous-espaces ponctuels de  $X$ . Un morphisme de  $(X,x_0)$  dans  $(Y,y_0)$  est alors tel que  $f(x_0) = y_0$ . On rappelle au passage que  $\text{Top}_*$  n'est autre que le quotient dual de  $\text{Top}$  par l'objet singleton standard.

### Définition. (*Homotopie dans la catégorie relative*)

Une *homotopie* (encore) entre flèches  $f,g : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  de  $\text{Top}_{(2)}$  est une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  et  $g$  telle que  $H(a,t) \in B$  pour tout  $a \in A$  pour tout  $t \in I$ .

En particulier, on peut définir  $h\text{Top}_{(2)}$  et  $[h\text{Top}_*]$ . On note  $[X,Y]_* = h\text{Top}_*(X,Y)$ .

### Définition. (*Invariant topologique pointé*)

On appelle *invariant topologique pointé* un foncteur de  $h\text{Top}_*$  sur  $\mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une catégorie.

### Propriété. (*Propriété universelle de l'homotopie pointée*)

Un invariant pointé est donc un foncteur  $F : \text{Top}_* \rightarrow \mathcal{C}$  une catégorie donnée qui se factorise par  $h\text{Top}_*$ , visuellement :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_* & \xrightarrow{H_{0*}} & h_0\text{Top}_* \\ & \searrow F & \downarrow \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

$h\text{Top}_*$  vérifie la propriété universelle suivante : tout foncteur  $\text{Top}_* \rightarrow \mathcal{C}$  envoyant une équivalence d'homotopie pointée de  $\text{Top}_*$  sur un isomorphisme de  $\mathcal{C}$  se factorise par  $h\text{Top}_*$  et réciproquement tout foncteur  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  se factorisant par  $h\text{Top}_*$  envoie les équivalences d'homotopie pointées sur des isomorphismes.

▷ À expliciter soi-même. ■

On pourrait même définir plus générale la notion d'*invariant topologique relatif*, mais sans grand intérêt.

Cette notion de *relativité* n'est pas idéale. On lui préfère :

### Définition. (*Homotopie relative à une partie*)

Soient  $X,Y$  deux espaces topologiques et  $f,g : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}$  telles que  $f|_A = g|_A$ . Une *homotopie relative à  $A$*   $H$  entre  $f$  et  $g$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$  telle que  $H(a,t) = f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in A$ , pour tout  $t \in I$ . On note  $f \sim g$  rel  $A$ .



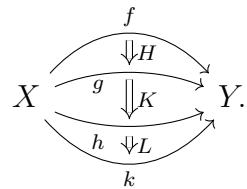
Une homotopie relative n'est pas une homotopie dans la catégorie relative ! Une homotopie relative est en particulier une homotopie dans la catégorie relative, mais c'est une notion strictement plus forte.

### Définition. (*Rétract par déformation forte*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques avec  $X \subseteq Y$  et  $i : X \hookrightarrow Y$  l'inclusion canonique. On dit que  $X$  est un *rétract par déformation forte* de  $Y$  s'il existe  $r : Y \rightarrow X$  qui soit une rétraction de  $i$  dans Top et une équivalence d'homotopie de plus relative à  $X$  à droite, *i.e.* soit telle que  $ri = id_X$  et  $ir \sim id_Y$ , avec de plus  $ir \sim id_Y$  rel  $X$ .

*Remarque.* On souhaiterait aussi définir  $\text{Top}_{(3)}$ ,  $\text{Top}_{(4)}$ , etc. Pour ne pas perdre d'informations cruciales, allons-y doucement.

(*Vers des catégories d'homotopie d'ordre supérieur*) Considérons la suite composable d'homotopies



On peut définir la composition d'homotopies sans problème par reparamétrisation. De même que dans le cas des lacets et du groupe fondamental, dans un monde ouvert d'esprit où une homotopie est une application  $H : X \rightarrow [0, \lambda] \rightarrow Y$  pour un  $\lambda > 0$  quelconque, la composition des homotopies serait associative, mais ce n'est pas le cas a priori sans reparamétrisation. Ainsi, on préfère considérer plutôt que les homotopies, les homotopies modulo l'homotopie relativement à  $X \times \partial I$ . On obtient alors une 2-catégorie  $\Pi(X, Y)$ , dite *2-catégorie d'homotopie des espaces topologiques*, dont les objets sont les espaces topologiques, les 1-morphismes les applications continues et les 2-morphismes sont les classes d'homotopie entre applications continues modulo l'homotopie décrite ci-dessus.

Il est intuitif que continuer ce processus en considérant les homotopies entre homotopies entre homotopies, on peut obtenir une 3-catégorie, puis une  $n$ -catégorie, puis une  $\infty$ -catégorie, en un sens à préciser quand même dans la suite. La donnée d'une telle catégorie permettra de caractériser le type d'homotopie d'espaces gentils comme les *CW-complexes* !

### 6.1.3 Constructions topologiques catégoriques et constructions topologiques pointées

Faisons un pas de côté et voyons quelles constructions catégoriques peuvent être menées à bien dans Top, typiquement, quelles limites et colimites existent.

### 6.1.3.1 Rappels : produits et coproduits topologiques

**Propriétés.** (*Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans Top*)

1. Top admet des produits finis et si  $X, Y \in \text{Top}$ , l'espace topologique produit  $X \times Y$  est l'espace topologique sur  $X \times Y$  dans Ens muni de la topologie produit qui est la topologie la moins fine rendant les projections canoniques continues.
2. Top admet des coproduits finis et si  $X, Y \in \text{Top}$ , l'espace topologique produit  $X \sqcup Y$  est l'espace topologique sur la réunion disjointe  $X \sqcup Y$  dans Ens munie de la topologie somme qui est la topologie la plus fine rendant les inclusions canoniques continues.
3. Top admet des produits fibrés et si  $X, Y, Z, f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z \in \text{Top}$ , le pullback  $X \times_Z Y$  est l'espace topologique sur  $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$  munie de la topologie la moins fine rendant  $f$  et  $g$  continues.
4. Top admet des sommes amalgamées et si  $X, Y, Z, f : Z \rightarrow X, g : Z \rightarrow Y \in \text{Top}$ , le pushout  $X \sqcup_Z Y$  est l'espace topologique sur  $X \sqcup Y \diagup_{f(z) \sim g(z)}, z \in Z$  munie de la topologie la plus fine rendant  $f$  et  $g$  continues.

→ *Notation.* Dans le cours d'homotopie, on ne marque pas systématiquement les pullbacks et les pushouts comme tels pour ne pas alourdir l'écriture des diagrammes.

On va essayer de construire les objets topologiques classiques (cylindre, cône, suspension...) au sein de la catégorie pointée, ce qui est assez bénin, mais permet une reformulation simple des objets de l'homotopie (chemins, lacets, groupe fondamental) qui nécessitent l'existence d'un point base dans leur définition.

**Propriétés.** (*Limites et colimites finies discrètes, le long d'un empan admises dans Top<sub>\*</sub>*)

1. (*Produit pointé*) Dans  $\text{Top}_*$ , le produit de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est donné par :

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0))$$

muni de la topologie produit.

2. (*Bouquet, wedge-produit*) Dans  $\text{Top}_*$ , le coproduit = somme disjointe de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est donnée par :

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y \diagup_{x_0 \sim y_0}, x_0 = y_0).$$

Rappelons le plongement naturel  $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$  par  $x \mapsto (x, y_0)$  et  $y \mapsto (x_0, y)$ .

3. (*Produit fibré pointé*) Dans  $\text{Top}_*$ , le produit fibré de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  le long de  $(Z, z_0)$  est donnée par :

$$(X, x_0) \times_{(Z, z_0)} (Y, y_0) = (X \times_Z Y, (x_0, y_0)).$$

4. (*Somme amalgamée pointée*) Dans  $\text{Top}_*$ , la somme amalgamée de  $(X,x_0)$  et  $(Y,y_0)$  le long de  $(Z,z_0)$  est donnée par :

$$(X,x_0) \sqcup_{(Z,z_0)} (Y,y_0) = (X \sqcup_Z Y, x_0 \sim y_0).$$



En L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, le symbole du wedge-produit est appelé « vee », en anglais. Celui du smash-produit qui lui est lié et que nous allons introduire bientôt, qui est un  $\wedge$ , est appelé « wedge ».

### 6.1.3.2 Adjonctions topologiques pointées : curryfication et $\Sigma$ - $\Omega$

**Lemme.** (*Composition d'applications pointées*)

La composition de deux applications pointées est pointée.

▷ Symboliquement,  $g(f(x_0)) = g(y_0) = z_0$ . ■

On conseille au lecteur de relire la définition de la TOPOLOGIE COMPACTE-OUVERTE ainsi que son rôle dans l'ADJONCTION TOPOLOGIQUE DE CURRYIFICATION.

**Théorème.** (*Adjonction produit-fonctionnelle dans Top*)

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte, alors on a une adjonction

$$? \times Y : \text{Top} \rightleftarrows \text{Top} : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $\text{Top}(X \times Y, Z) \simeq \text{Top}(X, Z^Y := \text{Top}(Y, Z))$ .

Autrement dit, le produit d'espaces localement compacts étant localement compact, la sous-catégorie des espaces topologiques localement compacts est une catégorie monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même.

**Corollaire.** (*Adjonction produit-fonctionnelle dans hTop*)

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \times Y : h\text{Top} \rightleftarrows h\text{Top} : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $h\text{Top}(X \times Y, Z) \simeq h\text{Top}(X, Z^Y := h\text{Top}(Y, Z))$ .

▷ Il est clair que ces foncteurs adjoints sont bien définis : si  $f, g : X \rightarrow X'$  sont homotopes,  $f \times id_Y$  et  $g \times id_Y$  sont homotopes par  $X \times Y \times I \rightarrow X' \times Y \times I, (x, y, t) \mapsto (H(x, t), y)$ . Similairement,  $f_*$

et  $g_*$  sont homotopes par  $X^Y \times I \rightarrow X'^Y, (\varphi, t) \mapsto (y \mapsto H(\varphi(y), t))$ .

Attention, il faut aussi vérifier que les bijections d'adjonction passent à la catégorie quotient. Pour cela, il suffit de voir que  $f, g : X \times Y \rightarrow Y$  sont homotopes si et seulement si leurs curryfiées le sont. Or si  $f \sim g$  par  $H$ , alors  $(x, t) \mapsto H(x, y, t)$  est une homotopie entre  $\check{f}$  et  $\check{g}$ , et réciproquement, si  $K$  est une homotopie entre  $\check{f}$  et  $\check{g}$ , alors  $(x, y, t) \mapsto K(x, t)(y)$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ . Elle est bien continue, car c'est une évaluation sur  $Y$  qui est localement compact. ■

On en déduit au passage un fait très intéressant :

### Propriété. (*Autodualité de l'homotopie*)

On dit que deux applications  $f, g : X \rightarrow Y$  dans Top sont *cohomotopes* si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y \end{array}$$

où  $e_0(y) = y(0)$  et  $e_1(y) = y(1)$ . Alors deux applications sont homotopes si et seulement si elles sont cohomotopes.

▷ C'est la bifonctorialité : fonctorialité dans un sens, puis l'autre fonctorialité pour la condition réciproque, de l'adjonction de curryification dans Top que l'on utilise. ■

→ *Notation.* On notera systématiquement  $e_0, e_1$  les applications d'évaluation en 0 et 1 de  $I$ .

### Corollaire

Les théorie de l'homotopie et de la cohomotopie des espaces topologiques sont équivalentes.

### Exercice 2

1. Soient  $X, Z, A$  trois espaces topologiques. Pour tout  $a \in A$ , soit  $c_a$  l'application constante  $Z \rightarrow A$  en  $a$ . Montrer que l'application  $\psi : X^Z \times A \longrightarrow (X \times A)^Z$   $(\varphi, a) \mapsto (\varphi, c_a)$  est continue.
2. Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $H$  une homotopie entre  $f, g : X \rightarrow Y$  dans cet ordre. Soit  $Z$  un troisième espace. Montrer que  $H^Z$  définie pour tout  $t \in H$  par le pushout  $H^Z(-, t) := H(-, t)_*$  est une homotopie de  $f_*$  à  $g_*$ . De même, montrer que  $Z^H$  définie pour tout  $t \in H$  par le pullback  $Z^H(-, t) := H(-, t)^*$  est une homotopie de  $f^*$  à  $g^*$ .
3. En déduire que le pushout et le pullback d'une équivalence d'homotopie sont aussi des équivalences d'homotopie.

▷ Éléments de réponse.

1. Si  $K$  est un compact de  $Z$  et  $U \times V$  un ouvert de  $X \times A$ , alors  $\psi^{-1}(W(K, U \times V)) = W(K, U) \times V$ .
2. Sans astuce.
3. Conséquence directe.

### Une généralisation bénigne

Ces résultats restent vrai dans une sous-catégorie de Top plus large que celle des espaces localement compacts, qui contient également tous les *CW-complexes*. Il s'agit de considérer les espaces topologiques *X faiblement Hausdorff compactement engendrés (CHWF)*. Ils vérifient les deux conditions suivantes :

- ★ (*faiblement Hausdorff*) toute application continue  $f : E \rightarrow X$  où  $X$  est compact (en particulier séparé) a une image fermée. Tout espace séparé est faiblement Hausdorff et tout espace faiblement Hausdorff est  $T_1$ , i.e. les points y sont fermés ;
- ★ (*compactement engendrés*)  $X$  est un quotient d'une somme topologique d'espaces compacts, ou, ce qui est équivalent, la topologie sur  $X$  est la topologie finale relativement à toutes les applications continues  $f : K \rightarrow X$  pour  $K$  parcourant la catégorie des espaces topologiques compacts.

Dans cette catégorie complète et cocomplète, l'Hom interne existe ce qui rend la catégorie des espaces topologiques faiblement Hausdorff compactement engendrés monoïdale cartésienne fermée, donc enrichie au-dessus d'elle-même.

On se demande maintenant si cela vaut encore dans  $\text{Top}_*$  et alors  $h\text{Top}_*$ . Mais il faut pouvoir construire un certain produit dans cette catégorie vérifiant qu'entre espaces pointés  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ , on a une application continue pointée  $X \times Y \longrightarrow Z$  si et seulement si

$$(x_0, y_0) \longmapsto z_0$$

on en a une  $(X, x_0) \longrightarrow (Z^Y, \text{cste}_{z_0})$ , l'application constante  $y \mapsto z_0$  étant naturellement le point base de  $Z^Y := \mathcal{C}(Y, Z)$ . Or ce n'est pas vrai pour le simple produit. On définit par suite le

#### Définition. (*Smash-produit*)

Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est

$$X \wedge Y := X \times Y / \{(x_0) \times Y \cup X \times (y_0)\},$$

pointé en  $\overline{(x_0, y_0)}$ .

Alors :

**Fait. (*Adjonctions produit-fonctionnelle dans  $\text{Top}_*$  et  $h\text{Top}_*$* )**

Si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : \text{Top}_* \rightleftarrows \text{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq \text{Top}_*(X, Z^Y := \text{Top}_*(Y, Z))$ . De plus, lorsque  $X$  est lui-même localement compact,  $Z^{X \wedge Y} \simeq Z^{Y^X}$  est un homéomorphisme pointé (*loi d'exponentiation pointée*).

De même, si  $Y$  est localement compact et les espaces fonctionnels (sous-entendus d'applications continues) sont munis de la topologie compacte-ouverte quotient, alors on a une adjonction

$$? \wedge Y : h\text{Top}_* \rightleftarrows h\text{Top}_* : (-)^Y$$

grâce à des bijections naturelle  $h\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \simeq h\text{Top}_*(X, Z^Y := h\text{Top}_*(Y, Z))$ .

Par construction du smash-produit, on a des bijections naturelles  $\text{Hom}_{\text{Ens}_*}(X \wedge Y, Z) \simeq \text{Hom}_{\text{Ens}_*}(X, Z^Y)$  qui induisent donc des bijections d'adjonction dans  $\text{Top}_*$ . Plus explicitement, à  $f : X \wedge Y \rightarrow Z$  pointée en  $f(x_0, y_0) = z_0$ , on associe  $g : X \rightarrow Z^Y$  définie sans problème par  $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$ . Elle est bien pointée, car  $g(x_0)$  à  $y$  fait correspondre  $f(x_0, y) = z_0$ , car  $(x_0, y) = (x_0, y_0)$ . Réciproquement, à  $g : X \rightarrow Z^Y$  on associe  $f(x, y) = g(x)(y)$ , qui est bien définie, car  $f(x_0, y) = z_0$  toujours et  $f(x, y_0) = g(x)(y_0) = z_0$  toujours, car  $g(x)$  est pointée par hypothèse ! Enfin,  $f$  est bien pointée elle-même, car  $g(x_0)(y_0) = g(x_0)(y_0) = z_0$ , car  $g(x_0) = \text{cste}_{z_0}$ . Ces applications sont, sans différence avec la curryfication classique, réciproques l'une de l'autre, donc sont bien des bijections d'adjonction, et de même sont fonctorielles.

La loi d'exponentiation se montre mot à mot comme celle du cas non pointé. Enfin, l'adjonction dans  $h\text{Top}_*$  se déduit de celle de  $\text{Top}_*$  par les mêmes arguments donnés pour avoir l'adjonction de  $h\text{Top}$  à partir de celle de  $\text{Top}$ .

**Heuristique**

Le smash-produit est le produit tensoriel de la catégorie des espaces topologiques pointés.

On peut donner d'autres adjonctions, plus restrictives mais qui sont classiques.

**Définition. (*Cylindre d'un espace topologique pointé*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *cylindre* (*pointé*) ou *cylindre réduit* :

$$\text{Cyl}(X, x_0) = \mathfrak{C}(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I}, (x_0, t) \right).$$

*Remarque.* Comme souvent, on note  $t$  pour ne pas trop induire en erreur, même si c'est légèrement dépourvu de sens : on pourrait écrire  $(x_0, 1)$  à la place. Mais on pourrait aussi prendre  $(x_0, 0)$ , et même  $(x_0, \frac{1}{3})$ , et en fait, n'importe quel  $(x_0, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , d'où la notation.

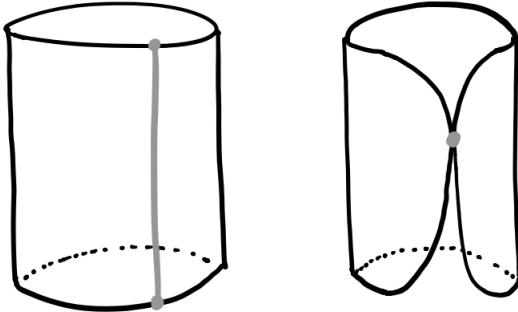


FIGURE 6.1.2 : *Cylindre pointé*. —  
On représente classiquement  $\text{Cyl}(S^1, *)$ .



Ne nous leurrons pas. Nous ne l'appelons cylindre que parce que l'on veut qu'il vérifie des propriétés similaires au cylindre pour les espaces topologiques non pointés. Même remarque pour le cône pointé et la suspension pointée à venir.

### Proposition. (*Le cylindre représente les homotopies pointées*)

On a la bijection  $\text{Top}_*(\text{Cyl}(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \end{array} \right\}$ .

### Définition. (*Cône d'un espace topologique pointé*)

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *cône (pointé)* ou *cône réduit* :

$$\text{Cone}(X, x_0) = C(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\}}, (x_0, t) \right).$$

### Proposition. (*Le cône (co)représente les homotopies pointées depuis une constante*)

On a la bijection  $\text{Top}_*(\text{Cone}(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \quad \forall t \\ H(x, 0) = y_0 \quad \forall x \end{array} \right\}$ .

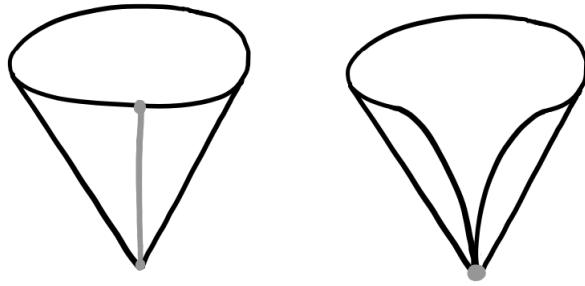


FIGURE 6.1.3 : *Cône pointé.* —  
On représente classiquement  $\text{Cone}(S^1, *)$ .

**Définition. (*Suspension d'un espace topologique pointé*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit sa *suspension (pointée)* ou *suspension réduite* :

$$\Sigma(X, x_0) = \left( \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I}, (x_0, t) \right).$$

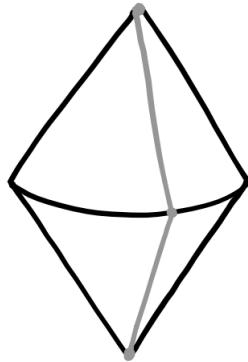


FIGURE 6.1.4 : *Suspension pointée.* —  
On représente classiquement  $\Sigma(S^1, *)$ .

**Proposition. (*La suspension (co)représente les homotopies pointées entre deux constantes*)**

On a la bijection  $\text{Top}_*(\Sigma(X, x_0), Y) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 & \forall t \\ H(x, 0) = y_0 & \forall x \\ H(x, 1) = y_0 & \forall x \end{array} \right\}$ . En effet,  $\partial I = \{0\} \cup \{1\}$ .

Pour énoncer proprement le rôle de ces trois constructions pointées, introduisons deux espaces déjà rencontrés plus haut avec un formalisme systématique.

**Définition. (*Espace des chemins*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *espace des chemins (pointés)* :

$$\text{Path}(X) = \text{Chemins}(X) = (\{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0\}, cste_{x_0}).$$

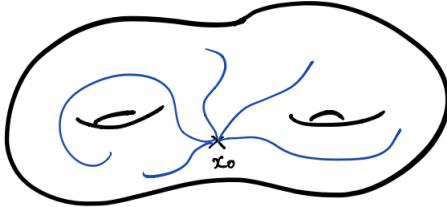


FIGURE 6.1.5 : *Chemin pointé.* —

**Définition. (*Espace des lacets*)**

Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. On définit son *espace des lacets (pointés)* :

$$\text{Loop}(X) = \text{Lacets}(X) = \Omega X = (\{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0 = \varphi(1)\}, cste_{x_0}).$$

*Remarque.* Ces deux dernières constructions sont des sous-objets de  $\text{Top}_*(I, X)$  en considérant un espace  $X$ .

**Exercice 3 (Fonctorialité des cylindres, cônes, suspensions, Hom pointés, chemins et lacets)**

Montrer que les six constructions pointées :  $\text{Cyl}(X)$ ,  $\text{Cone}(X)$ ,  $\Sigma X$ ,  $\text{Top}_*(I, X)$ ,  $\text{Path}(X)$  et  $\text{Loop}(X)$  sont fonctorielles, *i.e.* chacune d'elle, notée ici  $F$ , pour toute application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ , induit  $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$  de façon compatible avec la composition et l'identité.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Soient  $X, Y$  deux espaces pointés par  $x_0, y_0$  respectivement et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée. On pose  $f : \text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cyl}(Y)$  définie par  $f(x, t) = (f(x), t)$ . Elle est bien définie, car pour  $f(x_0, t) = (f(x_0), t) = (f(x_0), t) = f(x_0, t)$  en tous  $t, t' \in I$ . On voit au passage que  $f$  est bien pointée, car  $f(x_0, t) = (y_0, t)$  puisque  $f(x_0) = y_0$ . Il est clair que  $f$  envoie l'identité sur  $\text{id}_{C(X)}$  et commute avec la composition.
2. Même chose, en vérifiant un peu plus mais sans aucune difficulté que  $f$  est bien définie.
3. Encore une fois, c'est la même chose.
4. Il suffit de considérer la postcomposition :  $f : X \rightarrow Y$  continue pointée induit  $f_* : X^I \rightarrow Y^I$  par  $g \mapsto f \circ g$ . On sait déjà que  $\cdot_*$  est un foncteur. Reste à vérifier qu'il est pointé, ce qui est immédiat, car  $f \circ cste_{x_0} = cste_{f(x_0)} = cste_{y_0}$ .
5. Le foncteur précédent se restreint bien aux chemins basés au point base.

6. Et également aux lacets basés au point base.

### Exercice 4

Construire des transformations naturelles  $\text{Cyl} \rightarrow \text{Cone} \rightarrow \Sigma$ . De même, construire des transformations naturelles  $\Omega \rightarrow \text{Path} \rightarrow (-)^I$ .

▷ Éléments de réponse.

Pour tout espace  $X$ , on passe de  $\text{Cyl}(X)$  à  $\text{Cone}(X)$  par un passage au quotient. De même, on passe de  $\text{Cone}(X)$  à  $\Sigma(X)$  par un passage au quotient. Pour l'autre suite de transformations, on considère la suite donnée par  $\Omega X \hookrightarrow \text{Path}(X) \hookrightarrow X^I$ .

On a :

### Proposition

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques, avec  $Y$  localement compact. Alors :

1. (*Adjonction cylindre-applications*) On rappelle que  $Y^I := \text{Top}_*(X, Y)$  est pointé par l'application constante. Alors :

$$\text{Top}_*(\text{Cyl}(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, Y^I)$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une homotopie pointée entre deux applications pointées  $f, g$  équivaut à une application pointée  $\check{H} : (X, x_0) \rightarrow (Y^I, \text{cste})$  satisfait au diagramme commutatif dans  $\text{Top}_*$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y. \end{array}$$

2. (*Adjonction cône-chemins*) On constate que  $\text{Path}(Y, y_0)$  est pointé par l'application constante. Alors

$$\text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, \text{Path}(Y)).$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une homotopie pointée de l'application constante à une application pointée  $f$  équivaut à une application pointée  $\check{H} : (X, x_0) \rightarrow (\text{Path}(X), \text{cste})$  telle que  $e_1(\check{H}) = f$ . On parle aussi d'adjonction Cone-Path.

3. (*Adjonction suspension-lacets* ) On constate que  $\text{Loop}(Y, y_0)$  est pointé par l'application constante. Alors

$$\text{Top}_*(\Sigma(X), Y) \simeq \text{Top}_*(X, \text{Loop}(Y)).$$

fonctoriellement dans  $\text{Top}_*$  en  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$ . En particulier, la donnée d'une

homotopie pointée de l'application constante à elle-même équivaut à une application pointée  $X \rightarrow \Omega Y$ . On parle aussi d'adjonction  $\Sigma\text{-}\Omega$ .

De plus, si  $X$  est localement compact également, les bijections d'adjonction précédentes sont des homéomorphismes en munissant les espaces des topologies compactes-ouvertes.

▷ Il n'y a en fait rien à faire ! Les adjonctions sont toutes vraies ensemblistement, et se déduisent au niveau topologique pointé des considérations générales précédentes sur l'adjonction de curryification topologique. ■

### Corollaire. (*Adjonction homotopique suspension-lacets*)

On a une adjonction

$$\Sigma : h\text{Top}_* \rightleftarrows h\text{Top}_* : \Omega$$

dont les bijections d'adjonction sont internes.

### Exercice 5

Décrire l'unité  $\eta_{\Sigma\text{-}\Omega} : X \rightarrow \Omega\Sigma X$  et la co-unité  $\varepsilon_{\Sigma\text{-}\Omega} : \Sigma\Omega X \rightarrow X$  de l'adjonction  $\Sigma\text{-}\Omega$ .

#### 6.1.3.3 Smash-produit. Lien avec la suspension

##### Définition. (*Smash-produit*)

Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces topologiques pointés. Le *smash-produit* de  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  est

$$X \wedge Y := X \times Y / \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\},$$

pointé en  $\overline{(x_0, y_0)}$ .

*Remarque.* On notera l'analogie formelle avec le bouquet, aussi appelée wedge-produit.

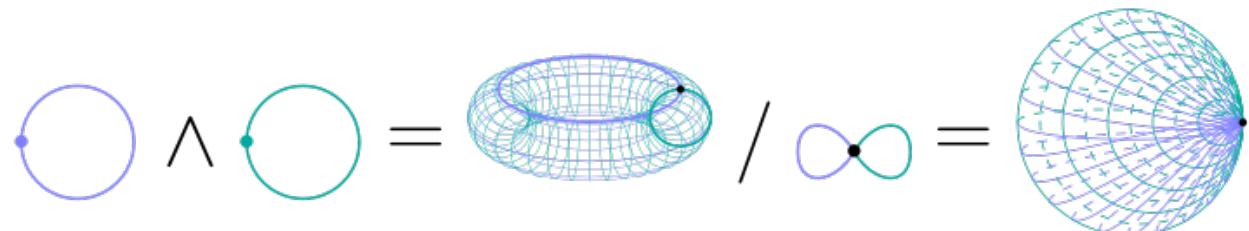


FIGURE 6.1.6 : *Smash-carré du cercle  $S^1$* . —

On considère le produit  $S^1 \times S^1$  qui est un tore, puis on l'écrase selon le protocole proposé. On trouve la sphère  $S^2$ .

**Exemples. (*Smash-produits*)**

1.  $S^1 \wedge S^1 \cong S^2$ .

En effet, il s'agit d'écraser le tore  $S^1 \times S^1$  sur la réunion rencontrée en un unique point deux cercles génératrices.

2. Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Alors  $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ .

**Propriété. (*Lien wedge-produit et smash-produit*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques pointés. Alors

$$X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

▷ Puisque  $X \vee Y = \frac{X \sqcup Y}{x_0 \sim y_0} \hookrightarrow X \times Y$  par  $x \mapsto (x, y_0), y \mapsto (x_0, y)$ , bien défini bien sûr en  $x_0$  et  $y_0$ , on a  $X \vee Y \simeq \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ OU } y = y_0\} = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ , d'où  $X \wedge Y \simeq \frac{X \times Y}{X \vee Y}$ . ■

**Mnémonik :** on a un complément  $(X \vee Y)(X \wedge Y) = X \times Y$ . Attention toutefois, cela ne fait pas sens d'écrire  ${}^*(X \vee Y = \frac{X \times Y}{X \wedge Y})$ .

**Propriétés. (*Propriétés calculatoire du smash-produit*)**

Soient  $X, Y, Z$  trois espaces pointés fixés.

1. (*Commutativité du smash*) Alors  $X \wedge Y \cong Y \wedge X$ .
2. (*Associativité du smash*) Si les espaces sont localement compacts,  $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z$ .
3. (*Neutralité du point double pour le smash*) Le double point  $S^0$  pointé, qui est le *point dans Top<sub>\*</sub>*, est l'élément neutre du smash-produit :  $X \wedge S^0 \cong X$ .

▷ Successivement :

1. Par symétrie dans la définition et l'homéomorphisme  $X \times Y \simeq Y \times X$ .
2. Un peu informellement :  $(X \wedge Y) \wedge Z = \frac{(X \wedge Y) \times Z}{(X \wedge Y) \times \{z_0\} \cup \{(x_0, y_0)\} \times Z} \simeq \frac{X \times Y \times Z}{X \times \{(y_0, z_0)\} \cup \{x_0\} \times Y \times \{z_0\} \cup \{(x_0, y_0)\} \times Z}$  qui est symétrique en  $X, Y, Z$ . Pour le démontrer proprement, il faudrait passer aux Hom en utilisant l'adjonction de curryfication.
3. Montrons que  $X \wedge \underbrace{\{*, *\}}_{= S^0} \simeq X$ . On sait que  $X \times S^0 = X^1 \sqcup X^2$  où  $X^1, X^2$  sont deux copies de  $X$ . Par définition, on a alors  $X \wedge S^0 = \frac{X^1 \sqcup X^2}{X^1 \cup \{x_0\} \times S^0}$ , quotient qui équivaut à l'équivalence  $x_0 \in X^1 \sim x_0 \in X^2$ , d'où  $X \wedge S^0 \simeq X$ . ■

**Exemple fondamental. (*Suspensions sphériques pointées*)**

On a  $\Sigma(S^0, *) \cong S^1$  pointé n'importe où. De même,  $\Sigma(S^1, *) \cong S^2$  pointée n'importe où. Plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma(S^n, *) \cong (S^{n+1})$  pointée n'importe où (*les sphères*

sont des suspensions réduites). On peut noter bien sûr  $\Sigma S^n = \Sigma^n S^0$  la suspension  $n$ -ième itérée (pointée) de la 0-sphère, qui coïncide donc avec suspension pointée de la  $n$ -sphère. On sait donc que c'est aussi, à homéomorphisme pointé près, la  $n+1$ -sphère.

L'isotropie des sphères permet de pointer n'importe où et après coup. Il suffit donc de raisonner en terme d'espaces topologiques non pointés, ce qui a déjà été fait dans le passé.

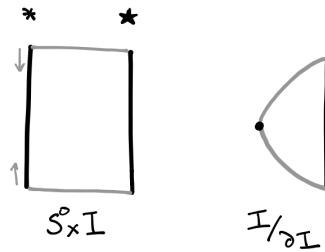
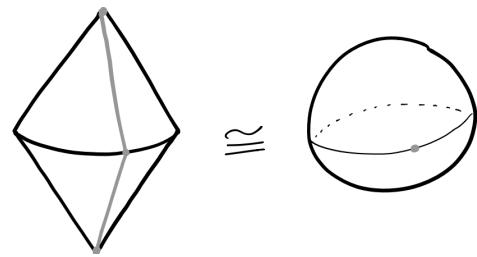
(a) Suspension pointée de  $S^0$ . —(b) Suspension pointée de  $S^1$ . —

FIGURE 6.1.7 : Premières suspensions des sphères. —  
Légende double.

*Remarque.* On n'a besoin que d'équivalences d'homotopie, mais beaucoup de celles notées sont en fait des homéomorphismes.

On peut observer que

**Fait. (*Formule de la suspension avec le smash-produit*)**

Pour tout espace topologique localement compact  $X$ ,  $\Sigma X \cong X \times S^1$ .

En effet,  $\Sigma X = X \times I / \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\} \cup X \times \{0\}$ , mais  $X \times \{1\} \cup X \times \{0\} = X \times \{0,1\}$  où  $\{0,1\} = \partial I$ , et d'autre part,  $X \wedge S^1 = X \times S^1 / X \times \{t_0\} \cup \{x_0\} \times S^1$  où l'on peut sans problème prendre  $S^1$  pointé en  $t_0 = \bar{1} = \bar{0}$  lorsque  $S^1 = I / \partial I$ .

C'est en fait très visuel, en observant (avec des yeux quadridimensionnels) la construction de la suspension pointée, faite justement sur le cercle.

Plus généralement :

**Proposition. (*Formule de la suspension utérée avec le smash-produit*)**

Pour tout espace topologique localement compact  $X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^n X \cong X \wedge I^n / \partial I^n \cong X \wedge S^n$ .

▷ On raisonne par récurrence. Pour  $n = 1$ , c'est le fait précédent. Supposons que  $\Sigma^n X \cong X \wedge (I^n / \partial I^n)$ . Alors  $\Sigma^{n+1} \cong \Sigma(\Sigma^n X) \cong \Sigma(X \wedge I^n / \partial I^n) \cong (X \wedge I^n / \partial I^n) \wedge I / \partial I$  par le cas  $n = 1$ , et

par associativité dans le cas localement compact, c'est  $X \wedge (I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I)$ . De plus,

$$I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I = I^n / \partial I^n \times I / \partial I / I^n / \partial I^n \times \partial I \cup \partial I^n \times I / \partial I \cong I^n \times I / \partial I^n \times I \cup I^n \times \partial I = I^{n+1} / \partial I^{n+1}$$

par des simples manipulations algébriques pour l'équivalence d'homotopie et la formule de dérivation de  $I^{n+1}$  pour la dernière identité, d'où l'hérédité. ■

On retrouve :

### Corollaire. (*Suspension itérée de $S^0$* )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma^n S^0 \cong S^n$ .

▷ Par la proposition,  $\Sigma^n S^0 \cong S^0 \wedge I^n / \partial I^n \cong I^n / \partial I^n$ , car  $S^0$  est neutre pour le smash. ■

### Définition. (*Spectre des sphères*)

On a une suite :

$$S^0 \xrightarrow{\Sigma} S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

infinie.

### Heuristique

Le spectre des sphères est un objet universel, qui joue un rôle fondateur en théorie de l'homotopie stable. La catégorie des spectres est la bonne catégorie pour représenter les théories cohomologiques, et le spectre sphérique est l'unité de cette catégorie.

→ *Notation.* On note encore le foncteur  $\Sigma : h\text{Top}_* : h\text{Top}_*$ .

## 6.1.4 Groupes d'homotopie supérieurs

### 6.1.4.1 Construction formelle de l'homotopie supérieure

#### Définition-propriété. (*Pincement*)

Soit  $X$  un espace topologique pointé. Le *pincement* associé à  $X$  est l'application pointée

$$\Sigma X \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X$$

définie de la manière suivante : puisque

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & & \Sigma X \vee \Sigma X \\ \uparrow & & \uparrow \\ X \times I & & X \times I \cup X \times I \end{array}$$

où cependant  $X \times I \cup X \times I$  n'est pas pointé, on pose

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} (x,2t) & \text{dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x,2t-1) & \text{dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

▷ Elle passe au quotient, car  $(x,0) \mapsto (x,0) = *$ ,  $(x,1) \mapsto (x,1) = *$  et  $(x_0,t) \mapsto (x_0,*) = *$ . On comprendra en cela que, dans la figure ci-dessous, à droite, toute la ligne grise est identifiée à un seul point. L'application obtenue est continue par recollement sur des fermés. Enfin, pinch est pointée, en prenant par exemple  $(x_0,0) \mapsto *$ . ■

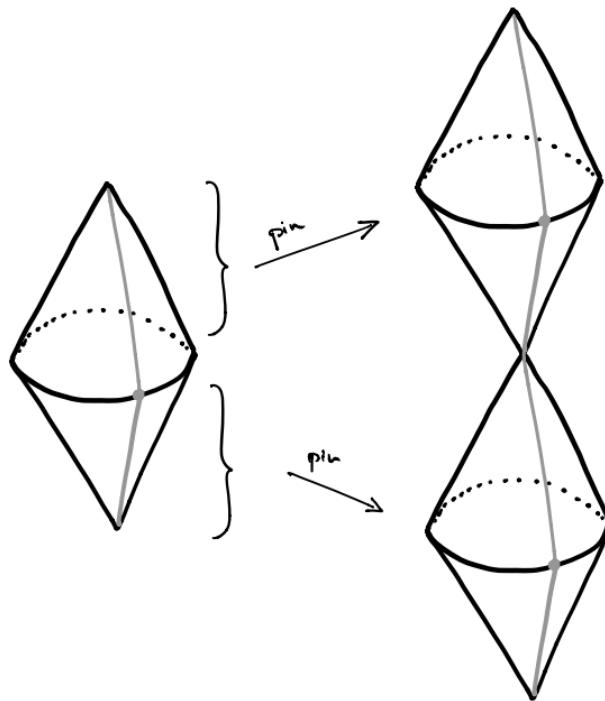


FIGURE 6.1.8 : *Pincement.* —  
Le pinch est parfois aussi noté pin, sans confusion possible.

On introduit une structure produit sur les morphismes ayant pour source une suspension.

**Fait.** (*Composition des applications induite sur la suspension pointée*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques pointés. Soient  $f, g \in \text{Top}_*(\Sigma X, Y)$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \times \text{Top}_*(\Sigma X, Y) & \equiv & \text{Top}_*(\Sigma X \vee \Sigma X, Y) \\ & \searrow \bullet & \downarrow \text{pinch}^* \\ & & \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \end{array}$$

qui permet de définir  $f \bullet g : \Sigma X \xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$ , explicitement donnée par

$$(f \bullet g)(x,t) \mapsto \begin{cases} f(x,2t) & \text{dans la première copie de } \Sigma X \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x,2t-1) & \text{dans la seconde copie de } \Sigma X \text{ pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Vérifions simplement que  $f \bullet g$  est pointée. C'est immédiat, car c'est la composée de deux applications pointées qui est donc pointée et  $f \vee g$  est pointée par définition évidente du bouquet de deux applications.



Pour l'instant, cette opération telle quelle n'est ni associative, ni unitaire.

D'une façon très similaire à la construction du groupe fondamental, en fait, qui le généralise, nous rendons cette loi une loi de groupe à homotopie près.

### Lemme. (*Définition du groupe fondamental généralisé*)

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Alors  $([\Sigma X, Y]_*, \bullet, [cste_{y_0}])$  est un groupe. (On rappelle que  $[\Sigma X, Y]_* = h\text{Top}_*(\Sigma X, Y) \simeq \text{Top}_*((X, x_0), \Omega(Y, y_0))$  et vu sous cet angle, cette adjonction semble vraiment triviale.)

▷ Faisons-le. Notons  $*$  le point base de  $\Sigma X$ .

- ★ (*Bonne définition*) La loi  $f \bullet g$  ne dépend pas du poids des représentants : si  $f \stackrel{H}{\sim} f'$  rel  $\{*\}$ ,  $f, f' : \Sigma X \rightarrow Y$  et  $g : \Sigma X \rightarrow Y$ , alors  $f \bullet g \sim Kf' \bullet g$  rel  $\{*\}$ . En effet, pour  $H : \Sigma X \times I \rightarrow Y$  avec  $H(x, t, 0) = f(x, t)$ ,  $H(x, t, 1) = f'(x, t)$  et  $H(x_0, t, s) = y_0$ ,  $(x, t, s) \mapsto H(x, t, s)$

on pose  $K : \Sigma X \times I \rightarrow Y$  continue et pointée, i.e. telle

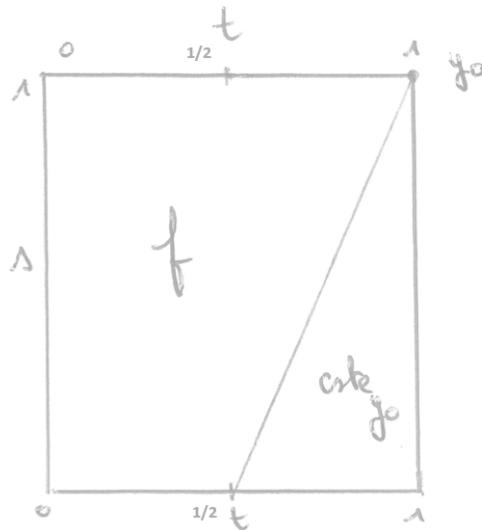
$$(x, t, s) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t, s) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, 2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

que  $H(x, 1, s) = y_0 = g(x, 0)$ ; en  $s = 0$ , on retrouve  $f \bullet g$  et en  $s = 1$ , on retrouve  $f' \bullet g$ ; enfin,  $K$  est pointée car  $K(x_0, t, s) = y_0$ . La même compatibilité vaut à droite par des arguments parallèles ce qui permet de conclure sur la bonne définition.

- ★ (*Unité*) Montrons que  $f \bullet cste_{y_0} \stackrel{H}{\sim} f$  rel  $\{*\}$ . Il suffit de poser  $H : \Sigma X \times I \rightarrow Y$ .

$$(x, t, s) \mapsto \begin{cases} f(x, \frac{2t}{1+s}) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y_0 & \text{pour } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

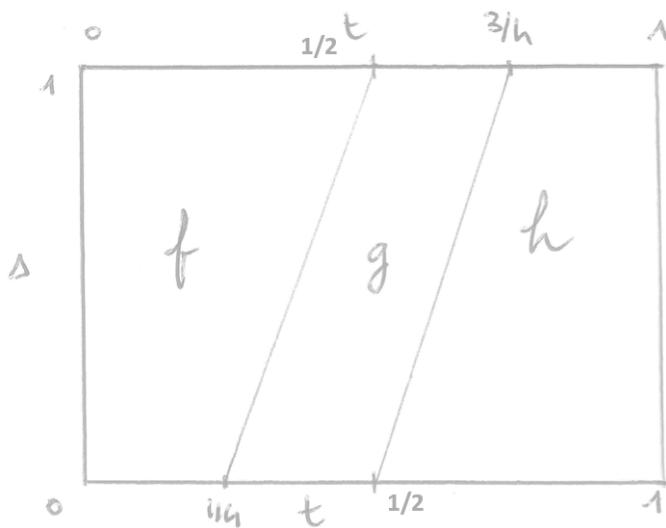
où  $H$  n'est bien sûr plus la même.



\* (Associativité) Exhibons  $f \bullet (g \bullet h) \stackrel{H}{\sim} (f \bullet g) \bullet h$  rel  $\{\ast\}$ . On pose

$$H: \Sigma X \times I \longrightarrow Y.$$

$$(x, t, s) \longmapsto \begin{cases} f(x, \frac{4}{1+s}t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ g(x, 4(t - \frac{1+s}{4})) & \text{pour } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ h(x, \frac{4}{2+s}(t - \frac{2+s}{4})) & \text{pour } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

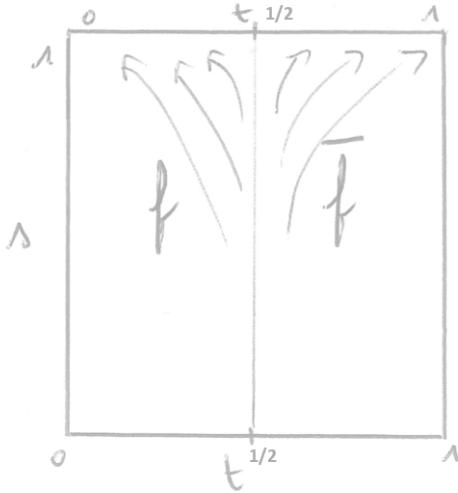


\* (Inversion) Enfin,  $f \bullet \bar{f} \sim \text{cste}_{y_0}$  rel  $\{\ast\}$  où  $\bar{f}: \Sigma X \longrightarrow Y$ . Il suffit cette fois de

$$(x, t) \longmapsto f(x, 1 - r)$$

poser  $H: \Sigma X \times I \longrightarrow Y$ .

$$(x, t, s) \longmapsto \begin{cases} f(x, 2(1-s)t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(x, 2(1-s)(1-t)) & \text{pour } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Donc  $[\Sigma X, Y]$  est bien un groupe pour la loi  $\bullet$ , de neutre  $cste_{y_0}$ . ■

### Méthode. (*Écrire les formules en homotopie*)

Les formules ci-dessus ne sortent pas totalement de nulle part, au sens que ce sont les dessins qui comptent le plus.

Pour obtenir l'homotopie de l'associativité par exemple, on trace le dessin et l'on note les points connus. Il s'agit d'abord de trouver le découpage de l'ensemble de définition, c'est-à-dire de trouver l'équation des droites verticales diagonales. Pour cela, on peut y aller au talent, ou écrire une équation affine et évaluer aux points connus, ce qui est plus sage. Pour écrire la valeur de l'homotopie sur chacun de ses ensembles, c'est plus dur : il faut intuiter une composée de fonctions affines qui fasse sens et voir si elle valide sur des points d'exemples.

*Remarque.* On se rappelle qu'une application de  $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$  est une homotopie pointée depuis et jusqu'à l'application constante entre  $X$  et  $Y$ , et que le produit  $\bullet$  est alors une composition paramétrée d'elles d'eux. On peut aussi voir une homotopie entre deux telles applications comme une application relative à  $X \times \partial I$ . Sous cette interprétation, un groupe fondamental généralisé est donc une 2-catégorie (*au sens mentionné dans la section précédente*).

### Observation. (*Groupe fondamental du premier ordre*)

Le groupe fondamental  $\pi_1(X, x_0) = ([S^1 X]_*, \bullet, [cste_{x_0}])$  où de plus

$$[S^0, \Omega X]_* \simeq [S^1, X]_* \simeq [\Sigma S^0, X]_* = [\Sigma^1 S^0, X]_*.$$

**Définition. (*Groupes d'homotopie supérieurs*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose

$$\pi_n(X, x_0) := ([\Sigma^n S^0, X]_* = [S^n, X]_*, \bullet, [cste_{x_0}])$$

le  $n$ -ième groupe d'homotopie de  $X$ .

Par isomorphisme, on peut donc aussi le définir pour  $(X, x_0)$  comme  $((I^n, \partial I^n, (X, x_0)), \bullet, cste_{x_0})$  l'ensemble des applications, i.e.  $\partial I^n \rightarrow \{x_0\}$ .

→ *Convention.* Pour  $n = 0$ , on pose  $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]_*$  qui n'est autre que l'ensemble des composantes connexes de  $X$ . En particulier, il ne reçoit pas le qualificatif de groupe d'homotopie, mais il fait partie de la *suite d'homotopie*.

▷ En effet, une application pointée  $S^0 \rightarrow X$  se ramène à sa donnée sur le deuxième point de  $S^0$ . Deux applications seront alors homotopes si et seulement si leurs deuxièmes points sont dans la même composante connexe, i.e. s'il existe un chemin continu, ici donc simplement une homotopie (par rapport à  $S^0$  (selon l'heuristique introduit ci-dessous)), entre eux deux. ■

On a une représentation graphique standard pour un élément de  $\pi_n(X, x_0)$  donnée par la figure suivante.

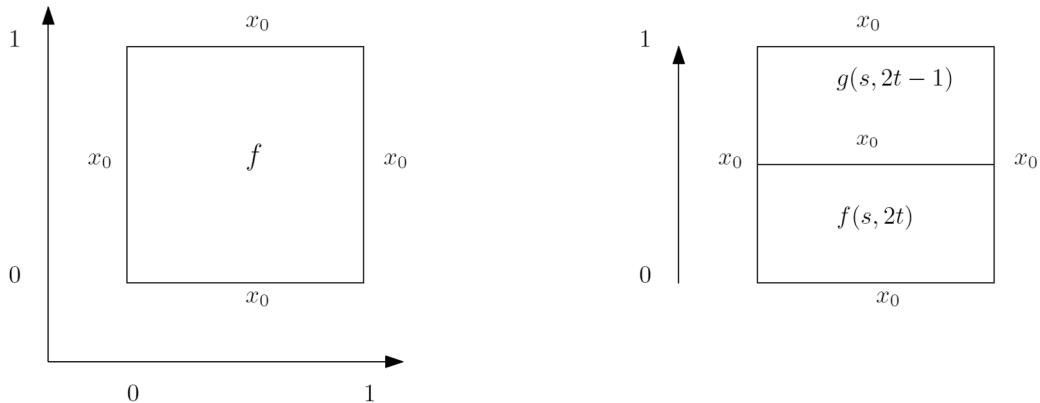


FIGURE 6.1.9 : *Produit dans le deuxième groupe d'homotopie.* —  
Représentation graphique d'une application dans  $\pi_2(X, x_0)$ ; à droite, la représentation du produit  $f \bullet g$ .

**Proposition. (*Invariance homotopique des groupes d'homotopie*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n$  est un invariant topologique pointé.

▷ En effet,  $\pi_n : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$  se factorise à travers  $h\text{Top}_* : \text{si } f : (X, x_0) \xrightarrow{\sim} (Y, y_0)$  est une équivalence,  $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  est une bijection, car  $\pi_n(X, x_0) = [\Sigma^n S^0, X]_* \xrightarrow{f_*} [\Sigma^n S^0, Y]_* =$

$\pi_n(Y, y_0)$  a pour réciproque évidente  $\pi_n(Y, y_0) = [\Sigma^n S^0, Y]_* \xrightarrow{g_*} [\Sigma^n S^0, X]_* = \pi_n(X, x_0)$  où  $g$  est un quasi-inverse de  $f$ . ■

Plus casse tête :

### Proposition

L'endofoncteur  $\Sigma$  induit un morphisme de groupes  $(\Sigma X, Y]_*, \bullet, [cste_{y_0}]) \xrightarrow{\Sigma} ([\Sigma^2 X, \Sigma Y], \bullet, [cst])$ .

▷ Puisque le foncteur  $\Sigma$  coïncide avec  $\wedge I / \partial I$ , il préserve les homotopies pointées. Ainsi, il induit un endofoncteur sur la catégorie homotopique, d'où la bonne définition de ce morphisme. La définition du produit  $\bullet$  avec le pincement conclut. que c'est un morphisme. ■

### Heuristique

$\pi_{n+1}$  est l'espace des homotopies entre deux éléments de  $\pi_n$ .

### Fait. (*Groupes d'homotopie en termes de lacets itérés*)

Pour tout espace pointé  $(X, x_0)$ ,

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_{n-1}(\Omega X) \simeq \dots \simeq \pi_1(\Omega^{n-1} X) \simeq \pi_0(\Omega^n X).$$

Par l'adjonction  $\Sigma \dashv \Omega$  bien sûr.

Ainsi, un élément du  $\pi_n$  est une application définie sur  $I^{n-1} \times I$  qui se projette en l'identité sur  $I^{n-1}$  et le pincement sur  $I$ .

En particulier, tout groupe d'homotopie est un groupe fondamental. Mais est-ce bien utile ?

**VOC** On parle parfois de *n-lacet* dans  $X$  pour désigner une application de  $I^n / \partial I^n \rightarrow X$  ou  $S^n \rightarrow X$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

D'après les définitions :

### Exemples. (*Groupes d'homotopie supérieurs*)

1. (*Invariants homotopiques du vide*)  $\pi_n(\emptyset) = (\{0\}, +, 0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. (*Groupes d'homotopie d'un contractile*) Si  $(X, x_0)$  est contractile,  $\pi_n(X) = (\{0\}, +, 0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Il n'y a qu'une seule application à valeurs dans  $\{\star\}$ .

3. (*Groupes d'homotopie d'un discret*) Si  $(X, x_0)$  est discret, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\pi_n(X) = \begin{cases} (\{0\}, +, 0) & \text{si } n \geq 1 \\ X \text{ en } n = 0.. \end{cases}$

Pour  $n \neq 0$ , il n'y a qu'une application de  $I^n$  dans  $X$  qui prenne la valeur discrète  $x_0$ , c'est l'application constante en  $x_0$ . Pour calculer  $\pi_0$ , il suffit de dire qu'un espace discret est totalement discontinu.

4.  $\pi_1(S^1, (1,0)) = (\mathbb{Z}, +, 0)$ .

Cependant déjà, le calcul suivant est encore un problème ouvert !

**Conjecture.** (*Groupes d'homotopie sphères*) ?

Pour  $k, n \in \mathbb{N}$ , que vaut  $\pi_k(S^n)$  ?

**Mnémonik :** les groupes d'homotopie supérieurs sont difficiles à calculer; c'est pour cela d'ailleurs que l'on introduit les groupes d'homologie, plus abstraits mais plus pratiques.

On dispose cependant du théorème suivant :

**Théorème.** (*Commutativité des groupes d'homotopie supérieurs*)

Soient  $(X, x_0), (Y, y_0)$  deux espaces pointés. Pour tout  $n \geq 2$ , le groupe  $[\Sigma^n X, Y]_{*, \bullet, [cste_{y_0}]}$  est abélien.

En particulier,  $\pi_n(X, x_0)$  est abélien pour tout  $n \geq 2$ .

Pour montrer cela, on aura besoin du

**Lemme.** (*Argument d'Eckmann-Hilton*)

Étant donnés deux magmas unitaires  $(+_1, u_1)$  et  $(+_2, u_2)$  sur un même ensemble  $A$  qui satifsonnt la *relation d'échange* :

$$(x +_1 x') +_2 (y +_1 y') = (x +_2 y) +_1 (x' +_2 y'),$$

ces deux magmas sont les mêmes et sont en fait associatifs et commutatifs.

▷ Montrons que  $u_1 = u_2 = u$ . En utilisant la neutralité, on a  $u_2 = (u_2 +_1 u_1) +_2 (u_1 +_1 u_2) = (u_2 +_2 u_1) +_1 (u_1 +_2 u_2) = u_1$ .

De même,  $x +_2 y = (x +_1 u) +_2 (u + y) = (x +_2 u) +_1 (u +_2 y) = x +_1 y$ , donc  $+_1 = +_2 = +$ .

La loi  $+$  est commutative. En effet,  $x + y = (u + x) + (y + u) = (u + y) + (x + u) = y + x$ .

Elle est de plus associative, car  $(x + y) + z = (x + y) + (u + z) = (x + u) + (y + z) = x + (y + z)$ . ■

Montrons maintenant le théorème de commutativité des groupes d'homotopie supérieurs.

**Preuve.**

▷ Soit  $n$  un entier plus grand que 2. Puisque le  $n$ -ième itérée de la suspension de  $\Sigma$  est un projeté de  $X \times I^n$ , toute application de  $\Sigma^n X$  dans la catégorie homotopique peut être représentée par

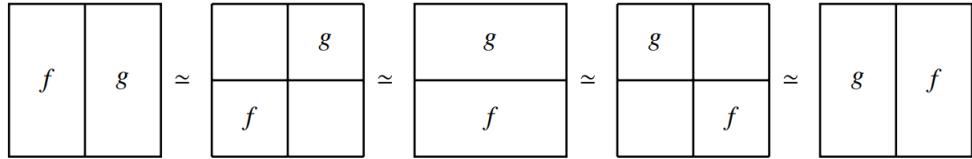


FIGURE 6.1.10 : Principe d'Eckmann-Hilton. —

fonction de  $X \times I^n$  :

$$\text{Top}(X \times I^n, Y) \xleftarrow{\text{évidente}} \text{Top}_*(\Sigma^n X, Y) \longrightarrow [\Sigma^n X, Y]_*$$

Étant données deux applications  $f, g : X \times I^n \rightarrow Y$ , considérons  $+_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  définie par

$$f +_i g(x, t_1, \dots, t_n) := \begin{cases} f(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

En particulier,  $\bullet = +_n$ . Il est clair

quoique très fastidieux à vérifier que les  $+_i$  sont bien définies sur  $[\Sigma^n X, Y]_*$  et unitaires, mais peu importe, car c'est la même preuve que pour  $\bullet$ , et ça, on l'a fait. Vérifions simplement la loi d'échange pour appliquer l'argument d'Eckmann-Hilton, qui en particulier donnera que les  $+_i$  sont les mêmes et que  $+_n = \bullet$  sera commutative. Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i \neq j$ . On a  $(f +_i g) +_j (f' +_i g') = (f +_j f') +_i (g +_j g')$

$$\text{par } (x_1, t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(x, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j, \dots, t_n) & \text{pour } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2} \\ g(x, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_j, \dots, t_n) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1, 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2} \\ f'(x, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j - 1, \dots, t_n) & \text{pour } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1 \\ g'(x, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_j - 1, \dots, t_n) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1, \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1. \end{cases}$$

■

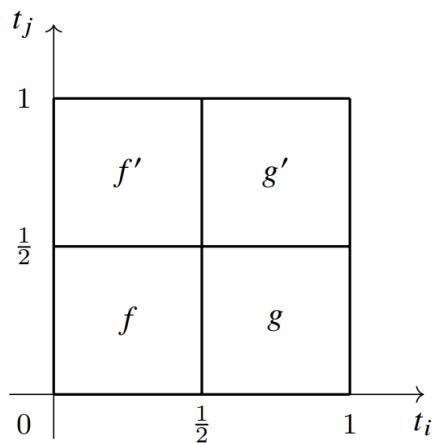


FIGURE 6.1.11 : Commutativité des groupes d'homotopie. —

**Exercice 6** (*Abélianité du  $\pi_2$* )

Montrer directement que  $([\Sigma^2, Y]_*, +_1)$  est abélien.

**Heuristique**

La non-abélianité du groupe fondamental  $\pi_1$  est une conséquence des pathologies en basses dimensions observées souvent en mathématiques.

En degré  $\geq 2$ , une certaine liberté de mouvement permet de rendre le produit  $+$  commutatif, comme l'illustre très bien le diagramme du principe d'Eckmann-Hilton.

**Vers les opérades**

On a représenté dans la figure ??Principe d'Eckmann-Hilton une homotopie  $H$  entre  $f \bullet g$  et  $g \bullet f$  pour des applications  $f, g : (S^2, *) \rightarrow (X, x_0)$  obtenue en faisant passer  $f$  au-dessus de  $g$  en contractant et en les faisant tourner dans le sens anti-trigonométrique. On aurait pu construire une autre homotopie  $H'$  entre  $f \bullet g$  et  $g \bullet f$  en tournant dans l'autre sens, c'est-à-dire le sens trigonométrique. Les applications  $H, H' : (S^2, *) \times I \rightarrow (X, x_0)$  ne sont pas homotopes l'une à l'autre en général, et donc une telle homotopie est un choix non canonique même à homotopie près.

Notons qu'en dimension supérieure  $n \geq 3$ , la même construction peut se faire en faisant le produit  $H \times id_{n-2} : (I^n, \partial I^n) \times I \rightarrow (X, x_0)$ . Dans ce cas,  $H \times id$  et  $H' \times id$  deviennent homotopes, car on peut prendre une homotopie similaire, mais en jouant sur les coordonnées dans la direction supplémentaire, pour passer de  $H$  à  $H'$ . Mais il y a plusieurs choix non homotopes de telles homotopies ! De manière générale, l'existence de ces choix donne une structure très riche et intéressante en homotopie, ayant donné naissance à la notion de  $E_n$ -algèbre, aussi appelée algèbre sur les cubes de dimension  $n$ , cruciale en homotopie et qui a des ramifications dans de nombreuses autres branches des mathématiques.

**Heuristique**

Cette commutativité ne signifie pas que les grands groupes d'homotopie et les groupes d'homologie sont liés.

On pourra retenir que l'homologie est le monde de l'algèbre linéaire et que l'homotopie est celle de la théorie de Lie.

### 6.1.4.2 Fonctorialité des groupes d'homotopie supérieurs

#### Définition-propriété. (*Application induite en homotopie*)

Soient  $(X,x), (Y,y)$  deux espaces topologiques pointés et une application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ ,  $y_0 = f(x_0)$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  donne lieu à un morphisme de groupes

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

dite *application induite par  $f$  en homotopie* au rang  $n$  et définie par  $(u : \Sigma S^n \rightarrow X) \mapsto f \circ (u : \text{Sig}S^n \rightarrow Y)$ .

#### Lemme

Si  $x_0, x'_0$  sont dans la même composante connexe par arcs d'un espace  $X$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  et  $\pi_n(X, x'_0)$  sont isomorphes.

→ *Notation.* Ceci permet d'écrire  $\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0)$  dès que  $(X, x_0)$  est connexe par arcs.

#### Lemme. (*« Homotopes $\Rightarrow$ homotopes »*)

Deux applications homotopes induisent le même morphisme au niveau des groupes d'homotopie.

▷ Par simple composition... Ce qui est beaucoup, beaucoup plus évident que l'énoncé équivalent avec l'homologie, qui constitue le théorème fondamental liant quant à lui algèbre et topologie. C'est donc normal qu'on ait moins de mal. ■

### 6.1.4.3 Équivalences faibles d'homotopie

#### Définition. (*Équivalence faible d'homotopie*)

Soient  $(X,x), (Y,y)$  deux espaces topologiques pointés et une application continue pointée  $f : X \rightarrow Y$ . On dit que  $f$  est une *équivalence faible d'homotopie* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les morphismes induits  $f_n : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, y)$  sont des isomorphismes.



Il n'y a pas de complexe de l'homotopie des espaces topologiques, donc ne pas parler de quasi-isomorphisme !

#### Fait. (*Relation d'équivalence faible d'homotopie*)

L'équivalence d'homotopie faible est une relation faible sur la classe des espaces topologiques.

C'est immédiat à partir du

**Lemme. (*Composition d'équivalences faibles d'homotopie*)**

La composée de deux équivalences faibles d'homotopie est une équivalence d'homotopie.

▷ Par fonctorialité de la suite d'homotopie. ■

**Fait. (*Équivalence d'homotopie  $\Rightarrow$  équivalence faible d'homotopie*)**

Toute équivalence d'homotopie est une équivalence faible d'homotopie.

→ *Notation.* Dans le cadre de l'homotopie supérieure, on identifie deux groupes d'homotopie isomorphes par un signe =.

Une équivalence d'homotopie est l'analogue en théorie de l'homotopie des quasi-isomorphismes en théorie de l'homologie. Mais ces deux notions sont liées :

**Propriété**

Tout quasi-isomorphisme est une équivalence faible d'homotopie. En particulier, deux espaces ayant le même type d'homotopie ont même (groupes d')homotopie.

C'est la fonctorialité de l'homotopie avec le lemme précédent : si  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie pointée en  $x_0$  sur  $y_0$ ,  $g : Y \rightarrow X$  pointée également son quasi-inverse, on a  $\pi_n(f \circ g) = \pi_n(id_Y) = id_{\pi_n(Y, y_0)} = \pi_n(f)\pi_n(g)$  et de même  $id_{\pi_n(X, x_0)} = \pi_n(g)\pi_n(f)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  et  $\pi_n(Y, y_0)$  sont donc isomorphes par  $\pi_n(f) = f^*$  et sa réciproque  $\pi_n(g) = g^*$ .

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointée qui induisent un isomorphisme de groupes abéliens  $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  en homologie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $\pi_n(f)$  est un isomorphisme de groupes pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Contre-exemple. (*Équivalence faible d'homotopie  $\not\Rightarrow$  équivalence d'homotopie*)**

Une équivalence faible d'homotopie n'est pas forcément une équivalence d'homotopie.

On considère  $W$  le cercle de Varsovie. Soient  $a, b$  deux points sur la courbe avec  $a$  sur le segment  $\{0\} \times [-1, 1]$  et  $b$  sur la courbe reliant les deux sinus du topologue en symétrie miroir. Alors on peut calculer que l'application identité  $f : \{a, b\} \rightarrow W$  est une équivalence faible d'homotopie, ce qui vient de ce que  $W$  a l'homotopie d'un contractile. Cependant, on sait que  $W$  a une seule composante connexe, donc toute application continue  $g : W \rightarrow \{a, b\}$  est constante, de sorte qu'il est impossible que  $gf \sim id_{\{a, b\}}$  et  $fg \sim id_W$ . □

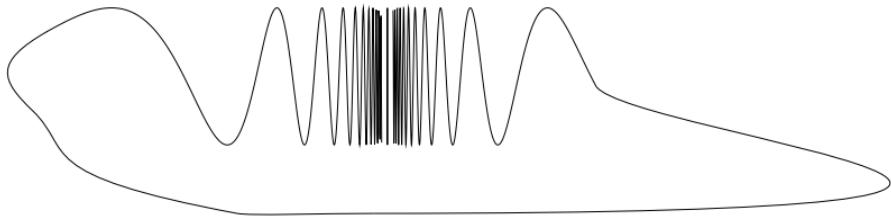


FIGURE 6.1.12 : *Cercle polonais homotopique.* —

Le cercle polonais souvent utilisé en théorie de l'homotopie, parfois appelé *cercle de Varsovie*, est un dédoublement du sinus du topologue par rapport à  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , et recollé en une unique branche.

**Contre-exemple. (*Équivalence faible d'homotopie*  $\not\Rightarrow$  *équivalence d'homotopie 2*)**

Considérons  $\mathbb{N}$  et  $D = \overline{\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}}$ . Alors  $\mathbb{N}$  et  $D$  sont faiblement homotopiquement équivalents mais ne sont pas homotopiquement équivalents.

Puisque les groupes d'homotopie sont tous nuls en rang  $\geq 1$ ,  $\mathbb{N}$  et  $D$  sont faiblement homotopiquement équivalents par la bijection donnée par  $n \mapsto \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$  et  $0 \mapsto 0$ . Cependant, ils ne sont pas homotopiquement équivalents : si  $\mathbb{N} \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{N}$  est une équivalence d'homotopie avec son quasi-inverse,  $H$  une homotopie entre  $id_{\mathbb{N}}$  et  $g \circ f$ , alors  $H(n, 0) = n$  et  $H(n, 1) = g \circ f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $H(n, \cdot)$  est un chemin continu dans  $\mathbb{N}$  entre  $n$  et  $g \circ f(n)$ , donc  $n = g \circ f(n)$  par discrétion. Donc  $g \circ f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , mais  $f(n) \in [0, 1]$  et  $g([0, 1])$  est compact, contradiction.  $\square$



Il ne suffit pas d'avoir des groupes d'homotopie isomorphes rang par rang pour être faiblement équivalents ! Ce n'est même pas vrai pour un *CW-complexe*, et l'on fournira un contre-exemple général dans la section consacrée au **THÉORÈME DE WHITEHEAD**.

**Définition. (*Espaces faiblement homotopes*)**

Deux espaces  $X, Y$  sont dits *faiblement homotopes* lorsqu'il existe une suite finie

$$X \rightarrow Z_1 \leftarrow Z_2 \rightarrow Z_3 \leftarrow Z_4 \rightarrow \dots \leftarrow Z_n \rightarrow Y$$

dont toutes les flèches sont des équivalences faibles d'homotopie.

**Fait**

Deux espaces faiblement homotopes ont des groupes d'homotopie isomorphes.

**Exercice 7**

La réciproque est-elle vraie : deux espaces ayant des groupes d'homotopie isomorphes, sont-ils faiblement homotopes ?

▷ **Éléments de réponse.**

Non, par récurrence sur le nombre de termes de la suite finie d'homotopie faible, l'initialisation étant donnée par le contre-exemple précédent et l'hérédité se séparant en deux cas.

→ *Notation.* La catégorie des espaces topologiques à homotopie faible près donne lieu à la *catégorie d'homotopie*  $\mathbf{Ho} = \text{Top}[f\text{-eq}^{-1}]$  à ne pas confondre avec la *catégorie d'homotopie forte*  $\mathbf{Ho}^{\text{forte}} = \text{Top}[\text{eq}^{-1}]$ .

**6.1.4.4  $n$ -connexité****Définition. ( $n$ -connexité)**

Soit  $X$  un espace topologique. Pour un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $X$  est  $n$ -connexe si  $\pi_k(X) = 0$  pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

**Fait**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Tout espace  $(n+1)$ -connexe est  $n$ -connexe.

**Exemples. ( $n$ -connexité)**

1. Les espaces 0-connexes sont exactement les espaces connexes par arcs.
2. Les espaces 1-connexes sont exactement les espaces simplement connexes par arcs.



La réunion disjointe de deux 3-sphères, où l'on admet que  $\pi_2(S^3) = 0$ , n'est pas 2-connexe, car elle n'est pas 0-connexe.

**Définition. (Application  $n$ -connexe)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue pointé. On dit que  $f$  est  $n$ -connexe si  $\pi_k(f)$  est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n-1$  et  $\pi_n(f)$  est un épimorphisme, i.e. est surjectif.

**6.1.5 Suites de fibres et de cofibres**

Dans cette section, tous les espaces sont supposés localement compacts ou plus généralement faiblement Hausdorff compactement engendrés.

### 6.1.5.1 Suites exactes et coexactes dans les catégories concrètes

Les applications topologiques pointées n'étant pas en général « exactes », nous allons introduire une façon de les « dériver » pour qu'elles le deviennent.

#### Définition. (*Suite exacte d'ensembles pointés*)

Soit  $(A,a) \xrightarrow{f} (B,b) \xrightarrow{g} (C,c)$  une suite dans  $\text{Ens}_*$ . On dit qu'elle est *exacte* lorsque  $f(A) = g^{-1}(c)$ . Naturellement, une suite longue dans  $\text{Ens}_*$  est *exacte* si toutes ses sous-suites à trois termes le sont.

#### Définition. (*Suite h-exacte, h-coexacte d'espaces pointés*)

Une suite courte  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  dans  $\text{Top}_*$  est dite *h-coexacte*, respectivement *h-exacte*, si pour tout  $Z \in \text{Top}_*$ ,  $[U,Z]_* \xleftarrow{f^*} [V,Z] \xleftarrow{g^*} [W,Z]$  est exacte, respectivement  $[Z,U]_* \xrightarrow{f^*} [Z,V]_* \xrightarrow{g^*} [Z,W]$  est exacte.

Autrement dit, pour toute  $\psi : V \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$ ,  $\psi$  est *homotope à 0*, i.e.  $\psi \circ f : U \rightarrow Z \sim \text{cste}_{z_0}$  rel  $\{0\} \iff \varphi : W \rightarrow Z \mid \psi \sim \varphi \circ g$  rel  $\{*\}$ .

Une suite longue est dite *h-coexacte*, respectivement *h-exacte*, si toutes ses sous-suites courtes, i.e. à trois termes, sont respectivement *h-coexactes* et *h-exactes*.

#### Reformulation pratique. (*Coexactitude d'espaces topologiques pointés*)

Une suite courte  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  dans  $\text{Top}_*$  est *h-coexacte* si et seulement si : pour toute  $\psi : V \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$ ,  $\psi \circ f : U \rightarrow Z$  est homotope à 0, i.e.  $\sim \text{cste}_{z_0}$  rel  $\{0\} \iff$  il existe  $\varphi : W \rightarrow Z$  dans  $\text{Top}_*$  telle que  $\psi \sim_{\{*\}} \varphi \circ g$ .

#### Fait. (*Condition nécessaire et suffisante de h-coexactitude*)

Si une suite  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  est *h-coexacte* dans  $\text{Top}_*$ , alors  $f^*(\psi) = g \circ f$  est homotope à zéro.

On considère  $Z = W$ ,  $\varphi = id_W$  et  $\psi = g$ .

Réciproquement, cette condition implique que  $g^*([W,Z]_*) \subseteq (f^*)^{-1}([\text{cste}])$ .

Facile cette fois.

**Remarque importante.** Les formulations correspondantes pour les suites *h-exactes* existent en dualisant les propriétés précédentes (les formuler en exercice).

### 6.1.5.2 Cônes, chemins et suites exactes de (co)fibres, de Puppe

Rien ne dit que la suite canonique  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Y/X$  est *h-coexacte* : raffinons donc la construction de droite.

**Définition. (*Cône d'une application*)**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée, donc dans  $\text{Top}_*$ . Le *cône* de  $f$  aussi appelé *cofibre homotopique* de  $f$  est défini par

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(X) \cup_f Y \end{array}$$

où  $\text{Cone}(f) := \text{Cone}(X) \cup_f Y = \frac{\text{Cone}(X) \cup Y}{(x, 1) \sim f(x)}$ , de point base l'image de  $y_0$  point base de  $Y$ .

**Mnémonik :** c'est le « cône de  $X$  de base  $Y$  ».

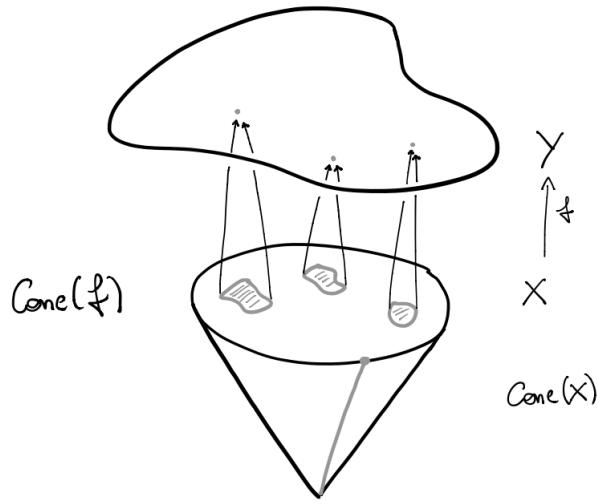


FIGURE 6.1.13 : *Cône d'une application*. —

**Heuristique**

Intuitivement, cela signifie que le cône associé à  $f$  est l'objet obtenu de la manière suivante :

- ★ en formant le cylindre sur  $X$  ;
- ★ en collant une extrémité de cet objet à  $Y$ , comme spécifié par l'application  $f$  ;
- ★ en rétrécissant l'autre extrémité du cylindre à un point.

Intuitivement, il est clair que de cette façon, chaque lacet de  $Y$  appartenant à l'image de  $X$  peut être continûment glissé dans la direction du cylindre, tout en le maintenant constant dans  $Y$ , jusqu'à l'autre extrémité du cylindre, où il devient un point. Cela signifie que chaque groupe d'homotopie de  $Y$  dans l'image de  $f$  devient trivial dans le cône associé. Ainsi, dans le cône de l'application, l'image de  $X$  sous  $f$  dans  $Y$  est supprimée à homotopie près. Cela montre clairement que  $\text{Cone}(f)$  est une version homotopique du conoyau de  $f$ ,

d'où l'adage : **le cône d'une application est son conoyau homotopique.**

### Remarques.

1. L'application  $f_1 : Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  est un plongement.

2.  $f_1 \circ f$  est homotope à 0.

Par  $H : X \times I \longrightarrow \text{Cone}(f)$  où bien  $H(-, 1) = f_1 \circ f$  et  $H(-, 0)$  est le point base  $\overline{y_0}$   
 $(x, t) \longmapsto (x, t) \in \text{Cone}(X)$   
de  $\text{Cone}(f)$ .

### Proposition. (*Suite cofibrée*)

Soient  $X, Y$  deux espaces pointés et  $f : X \rightarrow Y$  pointée. Alors  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f)$  est  $h$ -coexacte.

▷ Par propriété universelle de la somme amalgamée, la donnée d'une application  $\varphi : \text{Cone}(f) \rightarrow Z$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & & \text{Cone}(X) \cup_f Y \\ & \searrow h & \swarrow \varphi \\ & Z & \end{array}$$

où  $\psi : Y \rightarrow Z$  est l'application canonique. La commutativité de la diagramme implique que  $\varphi \circ f_1 = \psi$ .

équivaut à la donnée de deux applications  $\psi : Y \rightarrow Z$  et  $h : \text{Cone}(X) \rightarrow Z$  telles que  $g = \varphi f_1$  et  $h = \varphi k$ , ce qui coïncide avec une homotopie de l'application constante à la composée  $gf$ . ■

On peut continuer un peu plus à droite grâce au foncteur  $\Sigma$ .

### Théorème. (*Suite de cofibres, suite de Puppe*)



Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}_*$ , on a une suite  $h$ -coexacte longue

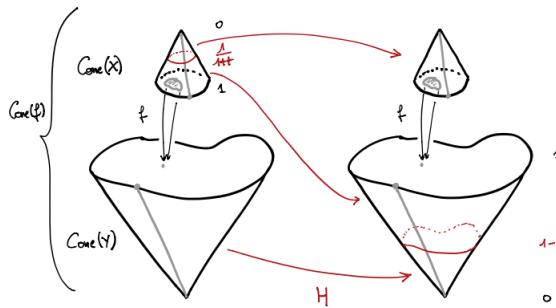
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma \text{Cone}(f) \xrightarrow{\Sigma p(f)} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 f_1} \Sigma^2 \text{Cone}(f) \longrightarrow \dots$$

qui continue à l'infini et où  $p(f) : \text{Cone}(f) \longrightarrow \text{Cone}(f)/f_1(Y) \simeq \Sigma X$  est l'application canonique, dite *suite de cofibre* ou *suite de Puppe* associée à  $f$ .

▷ Il est clair en itrant deux fois la proposition précédente que la suite  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1}$   $\text{Cone}(f) \xrightarrow{f_2} \text{Cone}(f_1) \xrightarrow{f_3} \text{Cone}(f_2)$  est  $h$ -coexacte. On peut alors montrer que, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_1} & \text{Cone}(Y) \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow j_1 \\
 \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) \\
 \downarrow p & & \downarrow p(f) & & \downarrow q(f) \\
 \text{Cone}(X)/i_1(X) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cone}(f)/f_1(Y) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cone}(f_1)/j_1(\text{Cone}(Y)) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \Sigma X & & \Sigma X & & \Sigma X,
 \end{array}$$

les flèches du bas sont des homéomorphismes avec la suspension de  $X$ , les deux carrés du haut étant les sommes amalgamées définissant les cônes d'application respectifs.



En outre,  $q(f)$  est une équivalence d'homotopie, ce qui est laissé au lecteur.

Notons  $\tau : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  l'automorphisme renversant l'orientation du cône. Alors dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) & \xrightarrow{f_3} & \text{Cone}(f_2) \\
 & \searrow p(f) & \downarrow q(f) & \swarrow p(f_1) & \downarrow q(f_1) \\
 & & \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f \circ \tau} & \Sigma Y
 \end{array}$$

non commutatif ci-dessus, les triangles latéraux commutent et le triangle centrale est homotopiquement commutatif.

En particulier,  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$  est  $h$ -coexacte (pourquoi?).

Puisqu'on a un homéomorphisme  $\chi : \text{Cone}(\Sigma f) \xrightarrow{\sim} \Sigma \text{Cone}(f)$  tel que  $\chi \circ (\Sigma f)_1 = \Sigma f_1$ , on peut conclure. ■

À l'origine des catégories triangulées, les suites de cofibre

C'est cette construction dont l'abstraction a donné naissance au concept de catégorie triangulée, développées par Dieter PUPPE et Jean-Louis VERDIER.

### Corollaire

On a en particulier pour tous espaces pointés  $X, Y, Z$  et application pointée  $f : X \rightarrow Y$ , une suite

$$\begin{array}{ccccc}
 [X, Z]_* & \xleftarrow{f^*} & [Y, Z]_* & \xleftarrow{f_1^*} & [\text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow p(f)^* & \\
 [\Sigma X, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma f)^*} & [\Sigma Y, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma f_1)^*} & [\Sigma \text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow \Sigma p(f)^* & \\
 [\Sigma^2 X, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma^2 f)^*} & [\Sigma^2 Y, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma^2 f_1)^*} & [\Sigma^2 \text{Cone}(f), Z]_* \\
 & & & \nearrow \Sigma^2 p(f)^* & \\
 & \dots & & &
 \end{array}$$

dont la première ligne est exacte dans  $\text{Ens}_*$ , la deuxième dans  $\text{Grp}_*$ , et les toutes les suivantes dans  $\text{Ab}_*$ .

En dualisant, on obtient des constructions à partir de  $\Omega \dashv \Sigma$ .

Rien ne dit que la suite canonique  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\pi} Y(f^{-1}(y_0), x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$  est  $h$ -exacte : raffinons donc la construction de gauche.

### Définition. (*Chemin d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée, donc dans  $\text{Top}_*$ . Le *chemin* de  $f$  est défini par

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Path}(f) & \xrightarrow{t} & \text{Path}(X) \\
 f^1 \downarrow & & \downarrow e_1 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

où  $\text{Path}(f) := X \times_f \text{Path}(Y) = \{(x, \varphi : [0,1] \rightarrow Y) \in X \times \text{Path}(Y) \mid \varphi(0) = y_0, f(x) = \varphi(1)\}$ , de point base  $(x_0, \text{cste}_{y_0})$  où  $x_0, y_0$  sont les points bases respectifs de  $X$  et  $Y$ .

**Mnémonik :** le chemin de  $f$  est « l'éventail » de  $X$  par  $Y$  le long des chemins tracés jusqu'au point base de  $Y$

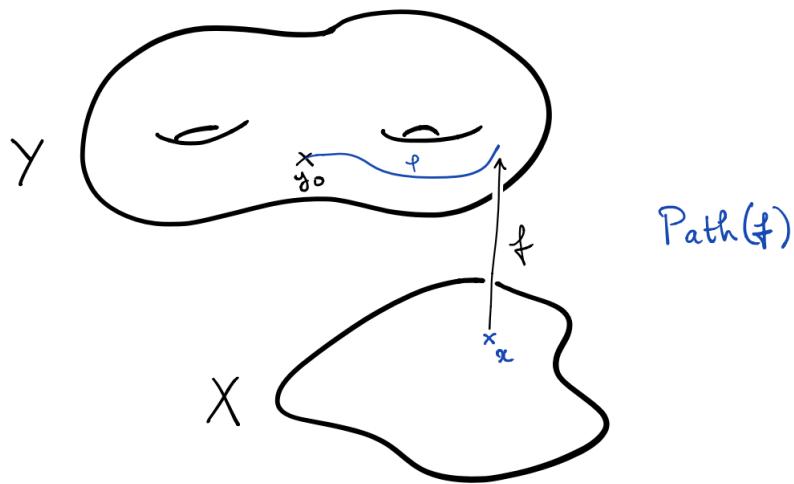
### Remarques.

1. L'application  $f^1 : \text{Path}(f) \longrightarrow X$  est une application quotient.
2.  $f \circ f^1$  est homotope à 0.

De même :

### Proposition. (*Suite fibrée*)

Soient  $X, Y$  deux espaces pointés et  $f : X \rightarrow Y$  pointée. Alors  $\text{Path}(f) \xrightarrow{f^1} X \xrightarrow{f} Y$  est  $h$ -exacte.

FIGURE 6.1.14 : *Chemin d'une application.* —

▷ Par propriété universelle du produit fibré, la donnée d'une application  $\varphi : Z \rightarrow \text{Path}(f)$

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & \text{Path}(f) & \longrightarrow & \text{Path}(X) \\
 & \searrow \psi & \downarrow f^1 & & \downarrow e_1 \\
 & X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y &
 \end{array}$$

équivaut à la donnée de deux applications  $g : Z \rightarrow X$  et  $h : Z \rightarrow \text{Path}(f)$  telles que  $g = f^1\psi$  et  $h = g\varphi$ , ce qui coïncide avec une homotopie de l'application constante à la composée  $fg$ . ■

Et :

**Théorème. (*Suite de fibres, cosuite de Puppe*)**

Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\text{Top}_*$ , on a une suite  $h$ -exacte longue

$$Y \xleftarrow{f} X \xleftarrow{f^1} \text{Path}(f) \xleftarrow{i(f)} \Omega Y \xleftarrow{\Omega f} \Omega X \xleftarrow{\Omega f^1} \Omega \text{Path}(f) \xleftarrow{\Omega i(f)} \Omega^2 Y \xleftarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 X \xleftarrow{\Omega^2 f^1} \Omega^2 \text{Path}(f) \xleftarrow{\dots}$$

qui continue à l'infini et où  $i(f) : \Omega Y \rightarrow \text{Path}(f)$  est l'application qui envoie un lacet  $\varphi$  sur  $(x_0, \varphi)$ , dite *suite de fibre* ou *cosuite de Puppe* associée à  $f$ .

▷ La preuve est duale de la précédente. ■

### Corollaire

On a en particulier pour tous espaces pointés  $X, Y, Z$  et application pointée  $f : X \rightarrow Y$ , une suite

$$\begin{array}{ccccc}
[Z, Y]_* & \xleftarrow{f_*} & [Z, X]_* & \xleftarrow{f_1}_* & [Z, \text{Path}(f)]_* \\
& & i(f)_* \nearrow & & \\
[Z, \Omega Y]_* & \xleftarrow{(\Omega f)^*} & [Z, \Omega X]_* & \xleftarrow{(\Omega f_1)^*} & [Z, \Omega \text{Path}(f)]_* \\
& & \Omega i(f)_* \nearrow & & \\
[Z, \Omega^2 Y]_* & \xleftarrow{(\Omega^2 f)^*} & [Z, \Omega^2 X]_* & \xleftarrow{(\Omega^2 f_1)^*} & [Z, \Omega^2 \text{Path}]_* \\
& & \Omega^2 i(f)_* \nearrow & & \\
& \dots & & &
\end{array}$$

dont la première ligne est exacte dans  $\text{Ens}_*$ , la deuxième dans  $\text{Grp}_*$ , et les toutes les suivantes dans  $\text{Ab}_*$ .

### Exercice 8 (Compatibilité entre la suite de fibres et la suite de cofibres)

1. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application pointée entre espaces pointés. Montrer que  $(x, \varphi) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2(1-t)) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$  définit une application pointée  $\tilde{\eta} : \text{Path}(f) \rightarrow \Omega \text{Cone}(f)$ .
2. Décrire l'application adjointe  $\tilde{\varepsilon} : \Sigma \text{Path}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)$ .
3. Montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma \Omega \text{Path}(f) & \xrightarrow{\Sigma \Omega f^1} & \Sigma \Omega X & \xrightarrow{\Sigma \Omega f} & \Sigma \Omega Y & \xrightarrow{\Sigma i(f)} & \Sigma \text{Path}(f) \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma X \\
\downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \tilde{\varepsilon} \\
\Omega Y & \xrightarrow{i(f)} & \text{Path}(f) & \xrightarrow{f^1} & X & \xrightarrow{f} & Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \\
\parallel & & \downarrow \tilde{\eta} & & \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\
\Omega Y & \xrightarrow{i(f)} & \Omega \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f^1} & \Omega \Sigma X & \xrightarrow{f} & \Omega \Sigma Y \xrightarrow{f_1} \Omega \Sigma \text{Cone}(f)
\end{array}$$

est homotopiquement commutatif.

### 6.1.6 Fibrations et cofibrations

On introduit deux classes d'applications, les cofibrations et les fibrations, qui sont les objets fondamentaux de la théorie de l'homotopie. Toute application continue est homotope à une cofibration et à une fibration et la suite de cofibres ou de fibres s'applique efficacement à leur espèce respective. Elles sont au cœur du traitement axiomatiquement moderne de l'algèbre homotopique.

### 6.1.6.1 Cofibrations ( $\equiv$ paires de Borsuk)

En théorie des ensembles, à partir d'une application  $f : X \rightarrow Y$ , on peut la factoriser sous la forme  $X \longrightarrow \text{Im}(f) \hookrightarrow Y$ . En topologie :

**Définition.** (*Cylindre d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application, dans Top. Le *cylindre* de  $f$  est définie par

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \iota_0 \downarrow & & \downarrow \\ X \times I & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

où donc  $\text{Cyl}(f) = \frac{(X \times I) \sqcup Y}{(x, 0) \sim f(x)}$ .

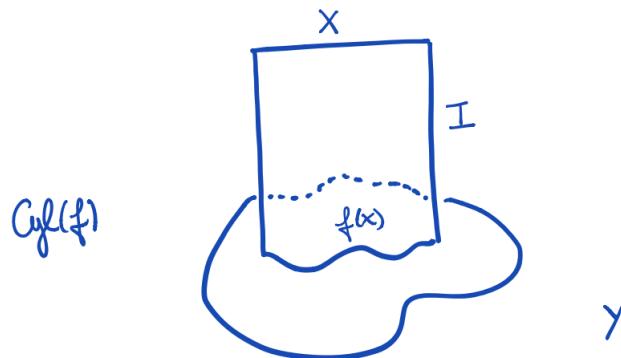


FIGURE 6.1.15 : *Cylindre d'une application.* —



Avec le cylindre, on est de retour dans le monde des espaces topologiques non nécessairement pointés.

### Proposition

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. On peut factoriser  $X \xrightarrow[i_1]{ } \text{Cyl}(X) \xrightarrow[f]{P} Y$

où  $i_1 : X \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$  est le premier plongement canonique et  $P$  est la rétraction canonique du deuxième plongement canonique  $f_0 : Y \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$  et dans ce cas  $P$  est une application quotient et équivalence d'homotopie. De plus,  $Y$  est un rétract par déformation forte du cylindre de  $f$ .

▷ On définit  $P$  par  $y \mapsto y$  et  $(x,t) \mapsto f(x)$ . C'est une rétraction puisqu'on a  $Pf_0 = id_Y$ . Montrons que  $f_0p \sim id_{Cyl(f)}$ . On pose  $H : Cyl(f) \times I \rightarrow Cyl(f)$  définie par  $(y,t) \mapsto y$  pour  $y \in Y$  et  $(x,s,t) \mapsto (x,st)$ . Elle est bien définie, continue et envoie  $f_0P$  au temps nul à  $id$  au dernier instant, donc  $P$  est un rétract par déformation, en particulier une équivalence d'homotopie. On observe qu'il est fort. Clairement,  $Pi_1 = f$ . Par sa définition, on voit aussi sans détour que  $P$  est une application quotient. ■

Cette propriété du cylindre est remarquable, mais cherchons-en une propriété carrément universelle.

### Reformulation pratique. (*Propriété d'extension des homotopies*)

Une application (non nécessairement un plongement, ni même injective)  $i : A \rightarrow X$  satisfait la *propriété d'extension des homotopies relativement à  $Z$*  si :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_0^A} & A \times I \\ i \downarrow & & \downarrow i \times id_I \\ X & \xrightarrow{\iota_0^X} & X \times I \\ & \searrow g & \swarrow H \\ & Z & \end{array}$$

pour toute  $g : X \rightarrow Z$ ,  $h : A \times I \rightarrow Z$ . Autrement dit, si  $hi_0^A = gi$ , il existe  $H : X \times I \rightarrow Z$  telle que  $h = H \circ (i \times id)$  et  $g = H \circ \iota_0^X$ .



On n'impose pas que  $H$  soit unique...  $(X \times I, H)$  n'est pas la somme amalgamée  $(A \times I) \sqcup_A X$  !

### Fait. (*Pas incroyable mais vrai sur la PEH des sommes amalgamées*)

Toute application continue  $A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $(A \times I) \sqcup_A X$ .

### Proposition. (*Caractérisation diagrammatique duale de la PEH*)

Une application continue  $i : A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $Z$  si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

i.e. pour toute  $\check{h} : A \rightarrow Z^I$  et toute  $g : X \rightarrow Z$  telles que  $e_0h = gi$ , il existe  $\check{H} : X \rightarrow Z^I$  telle que  $\check{h} = \check{H}i$  et  $g = e_0\check{H}$ .

▷ Découle de l'adjonction de curryfication. ■

On retrouve des termes déjà plus ou moins employés :

### Définition. (*Cofibration, paire de Borsuk*)

Une *cofibration*  $i : A \rightarrow X$  est une application continue qui satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à tout espace topologique. On dit aussi tout simplement qu'elle *satisfait la propriété d'extension des homotopies (PEH)*. On note parfois  $i : A \rightarrowtail B$ .

On dit que  $(A, X)$  implicitement munie de  $i$  est une *bonne paire topologique* ou encore une *paire de Borsuk*. Une paire de Borsuk est *stricte* si  $i(A)$  est fermée dans  $X$ .

### Exemples. (*Cofibrations*)

1. Les homéomorphismes sont des cofibrations.

Il suffit de poser  $\check{H} = \check{h}i^{-1}$  dans la caractérisation diagrammatique. On a donc  $\check{h} = \check{H}i$  et de plus  $g = e_0\check{h}i^{-1} = e_0\check{H}$ .

2.  $S^{n-1} \rightarrowtail B^n, \partial I^n \rightarrowtail I^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On l'a vu dans le cours élémentaire de TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE.

### Propriété. (*Composée de cofibrations*)

Les cofibrations sont stables par composition.

▷ Soit  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C$  une suite de cofibrations. Utilisons caractérisation duale de la PEH. Alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & \swarrow \check{H}_1 & \downarrow e_0 \\ B & \xrightarrow{\check{H}} & Z \\ j \downarrow & \swarrow \check{H} & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

montre que  $ji$  a la PEH par rapport à tout espace  $Z$ . ■

### Propriété. (*Somme de cofibrations*)

Les cofibrations sont stables par coproduit fini.

▷ Soient  $i : A \rightarrow X$  et  $j : B \rightarrow Y$  des cofibrations. Montrons que  $A \sqcup B \xrightarrow{i \sqcup j} X \sqcup Y$  est une cofibration. C'est clair, car on a

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup B & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \sqcup j \downarrow & \swarrow \check{H}_1 \sqcup \check{H}_2 & \downarrow e_0 \\ X \sqcup Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

où  $\check{H}_1$  est donnée par le diagramme pour  $i$  avec  $h|_A$  et  $g|_X$ , et symétriquement pour  $\check{H}_2$ . ■

### Propriété. (*Pushout de cofibrations*)

Si  $i : A \rightarrow B$  est une cofibration, alors  $j : B \rightarrow X \sqcup_f B$  est une cofibration.

▷ Par hypothèse,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \longrightarrow & X \sqcup_f B \\ & \searrow \check{H}_1 & \swarrow H \\ & & Z^I \end{array}$$

et montrons

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & & \downarrow \check{H}_1 & \downarrow \psi & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X \sqcup_f B & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

où  $g$  satisfait  $g\varphi = g\varphi$ , ce qui ne pose guère de problème, et  $g\psi = e_0\check{h}$ . Par propriété universelle du pushout, l'application unique universelle satisfait cela. On doit juste prouver que  $e_0H$  satisfait ces deux égalités. Alors  $g\varphi = e_0\check{H}_1 = e_0\check{H}\varphi$  et  $e_0\check{H}$  si  $= e_0\check{h}$ , car  $\check{h} = \check{H}\psi$ . ■

**Mnémonik :** les cofibrations sont préservées par changement de cobase.

Remarquons que :



La cofibration-teté n'est pas une notion homotopique ! Si  $(X, x_0)$  est contractile,  $id_X$  est une cofibration mais  $cste_{x_0}$  non.

Soit  $i : A \rightarrow X$  une cofibration. Examinons le cas du cylindre de  $X$  en tant qu'espace relatif. On a

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t_0^A} & A \times I \\ i \downarrow & & \downarrow i \times id_I \\ X & \xrightarrow{t_0^X} & X \times I \\ & \searrow i_1 & \swarrow r \\ & & Cyl(i) \end{array}$$

$\exists! s$

et  $i : A \rightarrow X$  satisfait la propriété d'extension des homotopies par rapport à  $Cyl(i)$ , donc il existe  $r : X \times I \rightarrow Cyl(I)$  telle que  $rs = id_{Cyl(i)}$  par propriété de la somme amalgamée. Ceci se généralise en fait :

**Propriété. (*Caractérisation des cofibrations*)**

Soit  $i : A \rightarrow X$  une application continue entre espaces topologiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $i$  est une cofibration, i.e. satisfait la PEH ;
- (ii)  $i$  satisfait la PEH relativement à  $\text{Cyl}(i)$  ;
- (iii) l'application canonique de  $\text{Cyl}(i) \xrightarrow{s} X \times I$  admet une rétraction.

▷ Par ce qui précède, il reste à montrer (iii)  $\implies$  (i). Pour tout  $Z$ , soit  $g : X \rightarrow Z$ , soit  $h : A \times I \rightarrow Z$  telles que  $gi = hi_0^A$ . Alors

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 i \downarrow & & \downarrow i \times \text{id}_I \\
 X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\
 & \nearrow i_0 & \swarrow r \\
 & & \text{Cyl}(i) \\
 & \nearrow \exists! s & \searrow \Phi \\
 & & Z
 \end{array}$$

Le diagramme indique les applications  $i_0^A : A \rightarrow X$  et  $i_0^X : X \rightarrow A \times I$  (en pointillés), l'application  $h : A \times I \rightarrow Z$  (en pointillés), la section  $r : X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$  (en pointillés), la rétraction  $s : \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$  (en pointillés), et la section  $\Phi : Z \rightarrow \text{Cyl}(i)$  (en pointillés).

en reprenant le diagramme précédent, commute. D'où la conclusion. ■

On a la propriété justifiant la notation des cofibrations :

**Proposition. (*Les cofibrations sont des plongements*)**

Soit  $i : A \hookrightarrow X$  une cofibration. Alors  $i$  est un plongement.

▷ Appliquons la PEH respectivement à  $\text{Cyl}(i)$  et ses applications canoniques. On obtient alors par

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\check{h}} & \text{Cyl}(i)^I \\
 i \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow e_0 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(i)
 \end{array}$$

une application  $\check{H}$  vérifiant toutes ces commutations. L'application  $\lambda : A \hookrightarrow \text{Cyl}(i)$  définie par  $\lambda(a)(\frac{1}{2})$  est un plongement. L'application  $\Lambda : X \rightarrow \text{Cyl}(i)$  définie par  $x \mapsto \check{H}(x)(\frac{1}{2})$  satisfait  $\Lambda i = \lambda$ , donc  $i$  est injective. En notant  $\tilde{i} : A \rightarrow i(A)$ ,  $\Lambda : A \rightarrow \lambda(A)$  et  $\tilde{\lambda} : i(A) \rightarrow \lambda(A)$ , on obtient  $\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{\lambda}\tilde{i} = id_A$ . Ceci montre que l'inverse de  $\tilde{i}$  est la composée  $\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{\lambda}$ , qui est continue, donc un homéomorphisme sur son image.

$X \times I$  est séparé, car  $X$  l'est. Puisque  $i$  est une cofibration, la section  $s : \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$  admet une rétraction  $r : X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$  par la proposition précédente. De plus,  $sr$  et l'identité de  $X \times I$  coïncident sur l'image de  $s$ , qui est donc fermée dans  $X \times I$  en tant que lieu de coïncidence de fonctions continues. Alors  $i(A)$  est fermé dans  $X$ , car pour tout point  $x \in i(A)$ , le point  $(x, \frac{1}{2}) \notin s(\text{Cyl}(i))$  et un voisinage ouvert de ce point de la forme  $U \times V$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  et  $V$  un ouvert de  $I$ , inclus

dans le complémentaire de  $s(\text{Cyl}(i))$  dans  $X \times I$ , convient. ■

### Fait

Si  $(A, X)$  est une paire de Borsuk, elle est stricte dès que  $X$  est séparé.

On peut donc naturellement se demander quels plongements, *i.e.* injections canoniquement associées à une inclusion  $(X, A)$ , sont des cofibrations. On retrouve un énoncé bien familier :

### Propriété

Soit  $A \subseteq X$  une paire topologique. Elle est bonne si et seulement si l'inclusion canonique  $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$  admet un rétract.

▷ Dans un sens,

$$\begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ (A \times I) \cup (X \times \{0\}) & \xleftarrow{\psi} & \text{Cyl}(i) & \xleftarrow[s]{r} & X \times I \end{array}$$

donne  $\psi r$  rétract de  $S$ .

Réciproquement, quand  $A$  est fermée,  $h \cup g$  est continue par recollement sur des parties fermées. Le cas général est traité par STRØM, *Notes on cofibrations* clairement. ■

Continuons.



Soit  $A \subseteq X$  donnée par  $i : A \hookrightarrow X$ . Alors  $\text{Cyl}(i) = \frac{A \times I \sqcup X}{(a, 0) \sim i(a)} \simeq (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \subseteq X \times I$  par une bijection ensembliste. Seulement, ce n'est pas un homéomorphisme ! Lorsque le quotient est muni de la topologie quotient et la paire de la topologie induite, seulement l'application de gauche à droite est continue.

Raffinons.

### Théorème. (*Factorisation canonique en cofibration par le cylindre*)

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  se factorise canoniquement par le cylindre en :

$$X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{P} Y$$

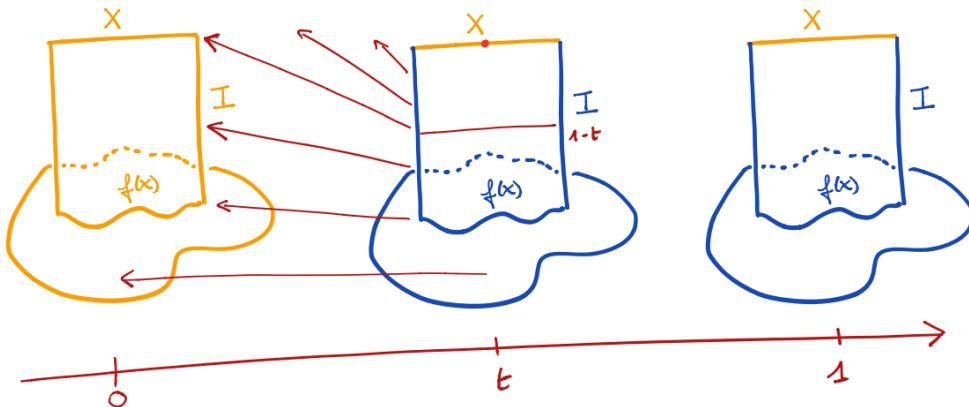
où  $i_1$  est une cofibration et  $P$  est une équivalence d'homotopie. En particulier,  $[f] = [id_1]$  dont  $h\text{Top}$ .

Autrement dit, toute application continue est une cofibration en théorie de l'homotopie.

▷ Il est clair que  $\text{Cyl}(f)$  est homotopiquement équivalent à  $Y$ . Notons  $X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f)$  le plongement. Il suffit de montrer que le plongement  $X \times I \cup \text{Cyl}(f) \times \{0\} \hookrightarrow \text{Cyl}(f) \times I$  admet un

rétract  $\rho$ . On pose

$$\begin{cases} \text{Cyl}(f) \times I & \rightarrow X \times I \cup \text{Cyl}(f) \times \{0\} \\ (y,t) & \mapsto (y,0) \\ (x,s,t) & \mapsto \begin{cases} (x, \frac{s}{1-t}, 0) \in \text{Cyl}(f) \times \{0\} \text{ pour } 0 \leq s \leq 1-t \\ (x, s - 1 + t) \in X \times I \text{ pour } 1-t \leq s \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$



qui fait le job. ■

Mentionnons :

#### Lemme. (*Cofibrations par un voisinage*)

Si  $X$  est normal, en particulier s'il est métrisable, si  $i : A \hookrightarrow X$  est fermé, c'est une cofibration si et seulement s'il existe un voisinage  $U \subseteq X$  qui se rétracte par déformation sur  $A$  dans  $X$ .

#### 6.1.6.2 Fibrations ( $\cong$ revêtements)

Dualisons tout cela, afin de définir les fibrations = cocofibrations.

#### Définition. (*Espace chemin d'une application*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application, dans Top. L'*espace chemin* de  $f$  est définie par

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y^I \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où donc  $\text{Path}(f) = \{(x, \varphi) \in X \times Y^I \mid f(x) = \varphi(0)\}$ .

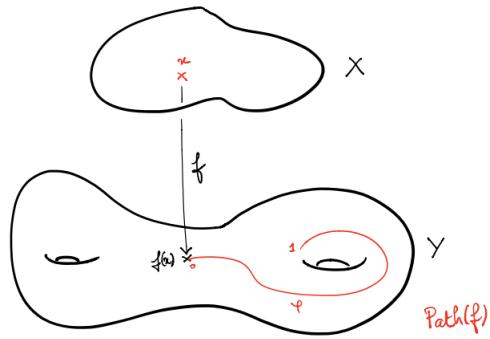


FIGURE 6.1.16 : Espace chemin d'une application. —

*Remarque.* Là encore, l'espace chemin vit dans le monde des espaces topologiques non nécessairement pointés.

### Proposition

Soit \$f : X \rightarrow Y\$ une application continue. On peut factoriser \$X \xleftarrow[f]{i} \text{Path}(f) \xrightarrow[p]{f} Y\$ où \$i : X \rightarrow \text{Path}(f)\$ est la première projection canonique et \$p\$ est définie par \$(x,\varphi) \mapsto \varphi(1)\$ et dans ce cas \$i\$ est une rétraction par déformation forte et équivalence d'homotopie. Donc, \$X\$ est un rétract par déformatin de l'espace chemin de \$f\$.

▷ On définit \$i\$ par \$x \mapsto (x, \text{cste}\_{f(x)})\$. Soit \$\rho : \text{Path}(f) \rightarrow X\$. On a \$\rho \circ i(x) = \rho(x, \text{cste}\_{f(x)})\$.  

$$(x, \varphi) \mapsto x$$

Montrons que \$i\rho \sim id\_{\text{Path}(f)}\$. On pose \$H : \text{Path}(f) \times I \rightarrow \text{Path}(f)\$ définie par \$(x, \varphi, t) \mapsto (x, s \mapsto \varphi(st))\$. Elle est bien définie, continue et puisque \$i\rho(x, \varphi) = i(x) = (x, \text{cste}\_{f(x)})\$, elle envoie \$(x, \text{cste}\_{f(x)})\$ au temps nul à \$(x, \varphi) = id\_{\text{Path}(f)}\$ au dernier instant. ■

### Reformulation pratique. (*Propriété de relèvement des homotopies*)

Une application (non nécessairement une application quotient, ni même surjective) \$p : E \rightarrow B\$ satisfait la *propriété de relèvement des homotopies relativement à \$Z\$* si :

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{g} & E^I & \xrightarrow{e_0} & E \\
 & \searrow \check{H} & \downarrow p_* & & \downarrow p \\
 & & B^I & \xrightarrow{e_0^B} & B
 \end{array}$$

pour toute  $g : Z \rightarrow E$ ,  $h : Z \rightarrow B^I$ . Autrement dit, si  $pg = e_0^B \check{h}$ , il existe  $\check{H} : Z \rightarrow E^I$  telle que  $p_* \check{H} = \check{h}$  et  $e_0^E \check{H} = g$ .



On n'impose pas que  $\check{H}$  soit unique...  $(E^I, \check{H})$  n'est pas le produit fibré  $E \times_B B^I$ !

### Fait. (*Pas incroyable mais vrai sur la PRH des produits fibrés*)

Toute application continue  $E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $E \times_B B^I$ .

### Proposition

Une application continue  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $Z$  si et seulement si

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & E \\ i_0^Z \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

i.e. pour toute  $g : Z \rightarrow E$  et toute  $h : Z \times I \rightarrow B$  telles que  $pg = hi_0^Z$ , il existe  $H : Z \times I \rightarrow E$  telle que  $pH = h$  et  $Hi_0^Z = g$ .

### Définition. (*Fibration, fibration de Serre*)

Une *fibration (de Hurewicz)*  $p : E \rightarrow B$  est une application continue qui satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à tout espace topologique. On dit aussi qu'elle *satisfait la propriété de relèvement des homotopies (PRH)*. On note parfois  $p : E \twoheadrightarrow B$ .

On dit que  $p : E \rightarrow B$  est une *fibration de Serre* si elle satisfait la PRH relativement à tout  $I^n \simeq B^n$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$ .

La  *fibre* d'une fibration au-dessus d'un point  $b$  est l'image réciproque de ce point.

### Définition. (*Suite fibrée*)

Une suite fibrée  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  est une suite dans Top telle que  $p$  est homotope à une fibration.

**Exemples. (*Fibrations*)**

1. Les homéomorphismes sont des fibrations.
2. (*Fibrations triviales*) Les projections  $B \times I \xrightarrow{pr_1} B$  sont des fibrations.
3.  $E \longrightarrow \{\star\}$  est une fibration.

On prend

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xrightarrow{g} & E^I & \xrightarrow{e_0} & E \\
 \searrow H & & \downarrow p_* & & \downarrow p \\
 \check{h} & & \{\text{cste}_*\} & \longrightarrow & \{\star\}
 \end{array}$$

où  $H(z) = \text{cste}_{g(z)}$  pour tout  $z \in Z$ .

**Contre-exemple. (*Fibration de Serre qui n'est pas une fibration*)**

Soit  $C$  le cylindre de l'application  $n \mapsto \frac{1}{n}, 0 \mapsto 0$  de  $\mathbb{N}$  muni de la topologie discrète dans  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ . Alors l'application canonique  $C \rightarrow \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]$  est une fibration de Serre mais pas une fibration de Hurewicz.

Il est facile de voir que c'est une fibration de Serre. Pour montrer que ce n'est pas une fibration, on considère l'application  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow C$  évidente et l'identité prise pour homotopie. Elle ne se relève pas sur  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Propriété. (*Composée de fibrations*)**

Les fibrations sont stables par composition.

**Propriété. (*Produit de fibrations*)**

Les fibrations sont stables par produit fini.

**Propriété. (*Pullback de fibrations*)**

Si  $i : A \longrightarrow B$  est une fibration, alors  $j : X \times_f A \rightarrow B$  est une fibration.

▷ Tout cela par dualité. ■

**Mnémonik :** les fibrations sont préservées par changement de base.

**Proposition. (*Les fibrations sont des surjections*)**

Soit  $p : E \longrightarrow B$  une fibration où ***B* est connexe par arcs**. Alors  $p$  est une surjection.

▷ En exercices. ■

**Exercice 9**

Une fibration est-elle toujours une application quotient ?

En corollaire :



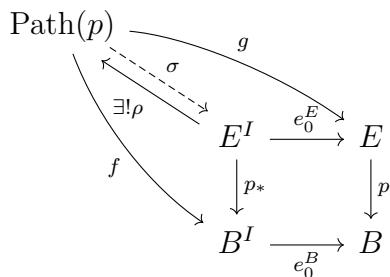
La fibration-teté n'est pas une notion homotopique ! Si  $(X, x_0)$  est contractile,  $\text{id}_X$  est une fibration mais  $cste_{x_0}$  non.

**Lemme. (*Caractérisation des fibrations par section du chemin*)**

Une application continue  $p : E \rightarrow B$  est une fibration si et seulement si l'application  $\sigma$  qui à  $\psi : I \rightarrow E$  fait correspondre  $(\psi(0), p\psi)$  admet une section  $\rho$  telle que  $\rho\sigma = \text{id}_{\text{Path}(p)}$ , autrement dit, s'il existe un moyen continu de relever  $\varphi$  en  $\psi : I \rightarrow E$  tel que  $\psi(0) = x$ .

▷ Prenons  $(x, \varphi) \in \text{Path}(p)$ ,  $p(x) \in B$ . Soit  $b \in B$  quelconque. Puisque  $B$  est connexe par arcs, il existe  $\gamma : I \rightarrow B$  tel que  $\gamma(0) = p(x)$  et  $\gamma(1) = b$ . Considérons  $\psi : I \rightarrow E$  définie par  $\sigma(x, \gamma)$ , de sorte que  $p(\psi(1)) = \gamma(1) = b$  et  $\rho(\psi) = (\psi(0), p\psi = \gamma)$ . ■

Examinons le cas de l'espace chemin. On a



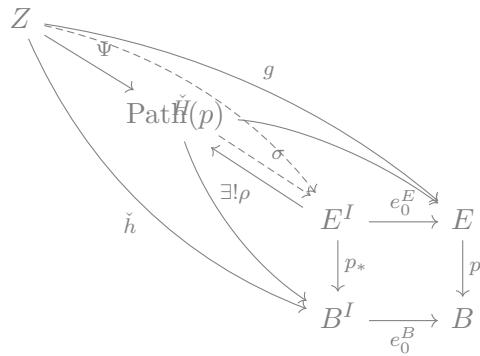
et  $p : E \rightarrow B$  satisfait la propriété de relèvement des homotopies par rapport à  $\text{Path}(p)$ , donc il existe  $\sigma : \text{Path}(p) \rightarrow E^I$  telle que  $\rho\sigma = \text{id}_{\text{Path}(p)}$  par propriété du produit fibré. Ceci se généralise en fait :

**Propriété. (*Caractérisation des fibrations*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $p$  est une fibration, i.e. satisfait la PRH ;
- (ii)  $p$  satisfait la PRH relativement à  $\text{Path}(p)$  ;
- (iii) l'application canonique de  $E^I \xrightarrow{\rho} \text{Path}(p)$  admet une section.

▷ Par ce qui précède, il reste à montrer (iii)  $\implies$  (i). Pour tout  $Z$ , soit [...]



en reprenant le diagramme précédent. ■

En admettant que le lecteur connaît la notion de *CW-complexe* redéfinie après, on peut énoncer :

### Proposition. (*Fibration de Serre de CW-complexes*)

Une fibration de Serre est exactement une application continue ayant la propriété de relèvement des homotopies relativement à tous les *CW-complexes*.

⊗ (*Idée de la preuve.*) On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  grâce à la définition du  $n$ -squelette d'un *CW-complexe* par somme amalgamée. Il s'agit alors de fusionner deux diagrammes carrés, à gauche celui-ci, à droite la propriété de relèvement recherchée relativement à  $X_{(n)}$ . ■

On aura utilisé le lemme suivant :

### Lemme. (*Propriété de relèvement des fibrations par rapport aux rétracts forts de paires cellulaires*)

Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de Serre, alors pour tout rétract par déformation forte  $i : L \rightarrow K$  où  $L$  est un sous-*CW-complexe* de  $K$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & E \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ K & \longrightarrow & B \end{array}$$

se relève.

### Exercice 10 (*Notion duale des fibrations de Serre*)

Décrire la notion duale des fibrations de Serre.

▷ Éléments de réponse.

Puisque les fibrations de Serre sont exactement les applications vérifiant la PRH relativement aux *CW-complexes*, une cofibration de Serre est par définition d'une dualité, une application vérifiant la PEH relativement

à tous les  $CW$ -complexes.

**Théorème. (Factorisation canonique en fibration par l'espace chemin)**

Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  se factorise canoniquement par l'espace chemin en :

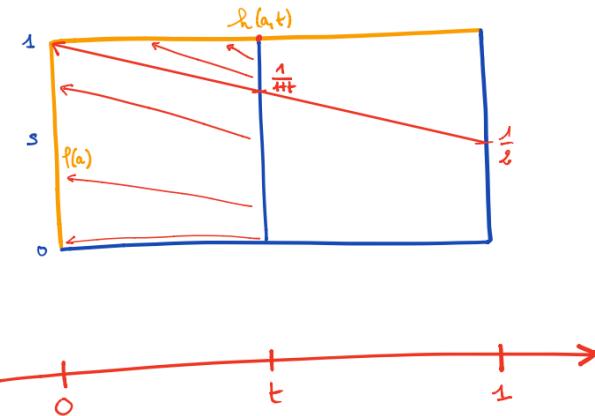
$$X \xrightarrow{I} \text{Path}(f) \xrightarrow{p} Y$$

où  $p$  est une fibration et  $I$  est une équivalence d'homotopie. En particulier,  $[f] = [p]$  dans  $h\text{Top}$ .

Autrement dit, toute application continue est une fibration en théorie de l'homotopie.

▷ La donnée de  $g$  s'écrit  $z \mapsto (x_z, \varphi_z : I \rightarrow Y)$  avec  $x_z \in X$ ,  $f(x_z) = \varphi_z(0)$  et  $h(z, t) \in Y$ ,  $h(z, 0) = \varphi_z(1)$ . La donnée de  $H$  est celle de  $(z, t) \mapsto (x_{z,t} = x_z \in X, \varphi_{z,t} : I \rightarrow Y)$  telle que  $f(x_{z,t}) = \varphi_{z,t}(0)$ , d'autre part  $(x_{z,0}, \varphi_{z,0}) = (x_z, \varphi_z)$  (commutation dans le triangle supérieur) et encore  $h(z, t) = \varphi_{z,t}(1)$  (commutation dans le triangle inférieur). L'application

$$\varphi_{z,t}(s) = \begin{cases} \varphi_z((1+t)s) & \text{pour } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t} \\ h(z, (1+t)s - 1) & \text{pour } \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1 \end{cases}$$



fait le job. ■

La notion de cofibration n'est pas autoduale. En particulier, on n'a pas de description exhaustive des fibrations. Voyons comment en construire.

**Proposition. (Stabilité des fibrations par changement de base)**

Pour toute fibration  $p : E \rightarrow B$  et toute application continue  $f : A \rightarrow B$ , l'application  $q : E \times_f B' \rightarrow B'$  obtenue par

$$\begin{array}{ccc} E \times_f B' & \longrightarrow & E \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

est une fibration.

**Proposition. (Passage des cofibrations aux fibrations)**

1. Soit  $i : A \rightarrow X$  une cofibration. Alors pour tout espace  $Z$ ,  $i^* : Z^X \rightarrow Z^A$  est une fibration.
2. Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration. Alors pour tout espace  $Z$ ,  $p_* : E^Z \rightarrow B^Z$  est une fibration.

▷ Successivement :

1. Faisons commuter

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Z^X \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow i^* \\ W \times I & \xrightarrow{h} & Z^A \end{array}$$

grâce à  $H$ . Sa donnée sur  $W \times I \rightarrow Z^X$  équivaut à la donnée de  $\tilde{H} : W \times I \times X \rightarrow Z$  telle que  $\tilde{H}(w, 0, x) = g_z(x)$  et  $\tilde{H}(w, t, i(a)) = h_{(w,t)}(a)$ . On veut donc étendre une application de  $(W \times \{0\} \times X) \cup (W \times I \times A) \simeq W \cup (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ . Or  $i : A \rightarrow X$  est une cofibration si et seulement si l'inclusion  $(A \times I) \cup (X \times \{0\}) \hookrightarrow X \times I$  admet un rétract. On considère  $\tilde{H} : W \times I \times X \simeq W \times X \times I \rightarrow W \times (A \times I) \cup (X \times \{0\})$  de sorte que  $(W \times I \times A) \cup (W \times \{0\} \times X) \xrightarrow{\tilde{h} \cup \tilde{g}} Z$  est bien définie par commutativité du carré.

2. C'est plus simple. En utilisant la définition duale,

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\check{g}} & E^Z \\ i_0 \downarrow & \nearrow \check{H} & \downarrow p_* \\ W \times I & \xrightarrow{\check{h}} & B^Z \end{array}$$

équivaut à

$$\begin{array}{ccc} W \times Z & \xrightarrow{g} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ W \times I \times Z & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

par adjonction de curryfication réciproque. ■

### Exemples

1. (*Fibration de double évaluation*) La cofibration  $i : \partial I \rightarrow I$  donne pour tout espace  $Z$  une fibration  $i^* : Z^I \rightarrow Z^{\partial I} \simeq Z \times Z$  donnée par  $\varphi \mapsto (\varphi(0), \varphi(1))$ .
2. (*L'évaluation est une fibration*) Pour tout espace  $Y$ , l'évaluation  $e_t : Y^I \rightarrow Y$   
 $\varphi \mapsto \varphi(t)$  est une fibration pour tout  $t \in I$ , venant de la cofibration  $\{\star\} \rightarrow I$ .
3. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $pr_1 : \text{Path}(f) \rightarrow X$  est une fibration par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & Y^I \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On se rend compte qu'un revêtement est un cas particulier de fibration, sans grande surprise, mais ça reste chouette.

### Proposition. (*Revêtements et fibrations*)

Tout revêtement  $p : E \rightarrow B$  est une fibration.

De plus, la section  $\sigma : \text{Path}(p) \rightarrow E^I$  de  $(x, \varphi) \mapsto x$ , donnée par  $(x, \varphi) \mapsto$  l'unique chemin relevé de  $\varphi$ , est unique par propriété universelle des revêtements.

▷ Pour tout  $t \in I$ , par revêtement, il existe un ouvert  $U_{\varphi(t)}$  satisfait la propriété des revêtements. ■

Plus généralement, un fibré, d'ailleurs aussi appelé fibration dans la littérature, est une fibration.

### Théorème

Tout fibré de base paracompacte est une fibration (de Hurewicz). De plus, sa fibre est constante.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Un fibré est localement homéomorphe à une projection, qui est une fibration. La paracompacité permet de généraliser. ■

On peut voir plus facilement que :

### Propriété

Tout fibré est une fibration de Serre.

Pour montrer cela, il suffit de voir que :

**Lemme**

La notion de fibration de Serre est une notion locale, autrement dit :  $p : E \rightarrow B$  une application continue est une fibration de Serre si et seulement si on peut recouvrir  $B = (U_i)_{i \in I}$  où les  $U_i, i \in I$  sont ouverts et chaque  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  sont des fibrations de Serre.

**Preuve.**

▷ Toute ceci est prouvé de façon relativement concise dans la bible. ■

**Lemme**

$p : E \rightarrow B$  une application continue est une fibration si et seulement si on peut recouvrir  $B = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  où les  $U_i, i \in \mathbb{N}$  sont ouverts et chaque  $p|_{p^{-1}(U_i)}$  sont des fibrations.

**Mnémonik :** revêtements  $\subseteq$  fibre discrète fibrés  $\subseteq$  fibre constante fibration  $\subseteq$  fibration de Serre.

On réunit donc la propriété :

**Fait. (*Équivalence d'homotopie des fibres d'une fibration*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration. Si  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ ,  $F_b$  est homotopiquement équivalent à  $F_{b'}$ .

On considère

$$\begin{array}{ccc} F_b & \xrightarrow{\quad} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ F_b \times I & \xrightarrow{\gamma_0 p r_2} & B \end{array}$$

$$(x,t) \longmapsto \gamma(t)$$

et soit  $\gamma : I \rightarrow B$ , avec  $\gamma(0) = b$  et  $\gamma(1) = b'$ . Soit  $f_{\gamma,H} : F_b \rightarrow F_{b'}$  définie par  $x \mapsto H(x,1) \in F_{b'}$ . On montre assez facilement par des diagrammes :

**Lemme**

$H$  et  $K$  étant deux relèvements,  $f_{\gamma,H} \sim f_{\gamma,K}$ .

**Lemme**

Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont homotopes relativement à  $\partial I$ ,  $f_\gamma \sim f_{\gamma'}$  dans  $\text{Top}(F_b, F_{b'})$ .

**Lemme**

Étant donnés  $b \xrightarrow{\gamma} b' \xrightarrow{\chi} b''$ ,  $f_\chi \circ f_\gamma \sim f_{\chi\gamma}$ .

Par suite,  $F_b$  et  $F_{b'}$  sont homotopiquement équivalentes par  $f_\gamma$  et  $f_{\bar{\gamma}}$ . En effet,  $f_{\bar{\gamma}} \circ f_\gamma \sim f_{\bar{\gamma}\gamma} \sim f_{cste_b} \sim Id_{F_b}$ .

**Corollaire. (*Équivalence d'homotopie faible des fibres d'une fibration de Serre*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration de Serre. Si  $b$  et  $b'$  sont dans la même composante connexe de  $B$ ,  $F_b$  est faiblement homotopiquement équivalent à  $F_{b'}$ .

▷ On factorise  $p : E \xrightarrow{f} \text{Path}(p) \rightarrow B$  où  $f$  est une équivalence d'homotopie qui induit un morphisme  $f_b : E_b \rightarrow \text{Path}(P)_b$ . Puisque  $\text{Path}(p)_b$  et  $\text{Path}(p)_{b'}$  sont homotopiquement équivalents par le fait précédent, il suffit de montrer que  $f_b$  est une équivalence faible d'homotopie. Or on a le diagramme de suites exactes longues, ce que le lecteur ne sait pas encore s'il ne connaît pas la section suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(E_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(E, *) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(B, b) & \longrightarrow & \pi_n(\text{Path}(p)_b, *) & \longrightarrow & \pi_n(\text{Path}(p), *) \longrightarrow \dots \end{array}$$

en tout  $n \in \mathbb{N}$ , où les flèches verticales latérales sont des isomorphismes respectivement par identité et par la remarque précédente, donc celle du milieu aussi par le lemme des cinq. ■

*Remarque.* On a presque une suite exacte courte  $F \rightarrow E \rightarrow B$  qui pourrait engendrer une suite exacte longue en homologie... Affaire à suivre.

**Contre-exemple. (*Surjection qui n'est pas une fibration*)**

On prendra garde, qu'une submersion surjective entre variétés n'est pas forcément une fibration de Serre (ni donc d'Hurewicz). Par exemple, considérons l'application  $p : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  donnée par la projection  $(x, y) \mapsto x$ . Les fibres en tout point  $x \neq 0$  sont données par une droite alors que la fibre en 0 n'est pas connexe par arcs. Par conséquent, les fibres n'ont pas les mêmes groupes d'homotopie et donc n'est pas une fibration de Serre en vertu du fait précédent. □

Examinons la question de l'unicité des factorisations précédentes.

**Définition. (*Catégorie  $\text{Top}^A$* )**

Soit  $A$  un espace topologique. On travaille dans la catégorie  $\text{Top}^A$  des *applications sous  $A$*  : ses objets sont les applications continues entre espaces topologiques  $i : A \rightarrow X$  de domaine  $A$  et ses morphismes sont, entre deux applications  $i : A \rightarrow X$  et  $j : A \rightarrow Y$  continues, les applications  $f : X \rightarrow Y$  telles que  $fi = j$ .

**Définition. (*Homotopie sous A*)**

Soit  $A$  un espace topologique. Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Soit  $f, g \in \text{Top}^A$  à  $X$  et à  $Y$  respectivement. Une *homotopie sous A*  $H : X \times I \rightarrow Y$  est une homotopie de  $f$  à  $g$  telle que toute  $H(-, t)$  est dans  $\text{Top}^A(i, j)$  pour tout  $t \in I$ , i.e.  $H(-, t)i = j$ . Ceci induit une relation d'équivalence dite d'homotopie sous  $A$ .

**Théorème**

Soient  $A, X, Y$  trois espaces topologiques. Si  $i : A \rightarrow X, j : A \rightarrow Y, f : X \rightarrow Y$  sont respectivement deux cofibrations et une équivalente d'homotopie qui est  $\in \text{Top}^A(i, j)$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie sous  $A$ .

▷ Admis. ■

**Théorème. (*Unicité de la factorisation en cofibration*)**

Il y a unicité de la factorisation canonique en cofibration à équivalence d'homotopie près, au sens suivant : si une application continue entre  $X$  et  $Y$  deux espaces s'écrit à la fois  $X \xrightarrow{j} Z \cong Y$  et  $X \xrightarrow{j'} Z' \cong Y$ , alors il existe une équivalence d'homotopie  $k : Z \cong Z'$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \nearrow j & \downarrow h & \searrow q & \\ X & & & & Y \\ & \searrow j' & \downarrow & \nearrow q' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

est commutatif dans le triangle de gauche et homotopiquement commutatif dans le triangle de droite.

▷ On utilise le corollaire précédent. ■

**Exercice 11**

Dualiser pour obtenir l'unicité de la factorisation en fibration.

**Principe. (*Dualité d'Eckmann-Hilton*)**

- ★ L'adjonction de curryfication topologique pointée ;
- ★ l'autodualité de l'homotopie ;
- ★ l'adjonction  $\Sigma$ - $\Omega$  ;
- ★ les suites de Puppe exactes et coexactes ;
- ★ la dualité entre la propriété d'extension et la propriété de relèvement des homotopies,

sont la manifestation d'une seule et même dualité, dite *d'Eckmann-Hilton*.

### 6.1.7 Calcul des groupes d'homotopie

Objets difficiles à calculer, les groupes d'homotopie n'en sont que d'autant plus excitants. Les deux outils les plus puissants pour tirer des informations sont, semblablement à l'homologie, les suites exactes longues de groupes qui sont cette fois-ci obtenues principalement à partir de fibrations.

#### 6.1.7.1 Homotopie d'un produit

**Proposition.** (*Groupes d'homotopie d'un produit*)

Soient  $(X,x)$  et  $(Y,y)$  deux espaces topologiques pointés. Alors  $\pi_n(X \times Y, (x,y)) = \pi_n(X, x) \times \pi_n(Y, y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

▷ Par définition des applications dans le produit  $S^n \rightarrow X \times Y$ . ■

#### 6.1.7.2 Homotopie relative

À partir d'une inclusion  $A \hookrightarrow X$  venant d'une paire pointée d'espaces topologiques  $\star \in A \subseteq X$ , on a vu que la suite de Puppe

$$\dots \longrightarrow \Omega^2(\text{Path}(i)) \longrightarrow \Omega^2(A) \longrightarrow \Omega^2(X) \longrightarrow \Omega\text{Path}(i) \longrightarrow \Omega A \longrightarrow \Omega X \longrightarrow \text{Path}(i) \longrightarrow A \longrightarrow X$$

est  $h$ -exacte. En l'appliquant à  $Z = S^0$ , i.e. en appliquant le foncteur « Hom » donné par  $[S^0, ?]$ , on obtient une suite

$$\dots \longrightarrow \pi_2(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_2(A) \longrightarrow \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(\text{Path}(i)) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

exacte longue dite *suite exacte longue (homotopique) associée à la paire*  $(X,A)$ , à ne pas confondre avec la notion similaire en homologie singulière relative, dans Ens dès le départ, puis Grp à partir du quatrième terme, puis Ab à partir du septième terme. Le terme  $\text{Path}(i)$  est peu engageant pour calculer cette suite.

→ *Notation.* On note  $\text{Path}(X, A) = \text{Path}(i) = \{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = \star, \varphi(1) \in A\}$ .

*Remarque.* On remarque que pour  $A = \{\star\}$ ,  $\text{Path}(X, \{\star\}) = \Omega X$ .

**Définition.** (*Groupes d'homotopie relatifs*)

Soit  $\star \in A \subseteq X$  une paire topologique pointée. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit le  $n$ -ième groupe d'homotopie relatif de  $X$  à  $A$  ou de  $(X, A)$ , par

$$\pi_n(X, A) := \pi_{n-1}(\text{Path}(X, A)) = \pi_{n-1}(\text{Path}(i)) \simeq \pi_0(\Omega^{n-1}\text{Path}(X, A)).$$

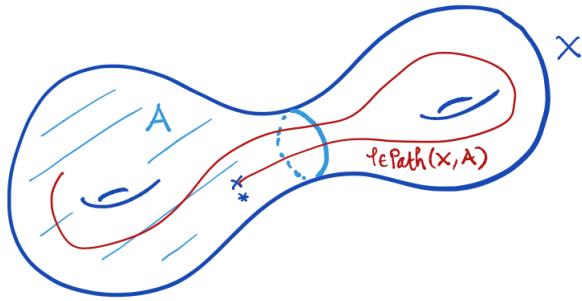


FIGURE 6.1.17 : Chemins relatifs sur un espace par rapport à une partie. —

*Remarque.* Les groupes d'homotopie relatifs sont dès groupes dès l'ordre 2 et des groupes abéliens dès l'ordre 3. Le groupe d'homotopie relatif d'ordre 1 n'est qu'un ensemble...

#### Fait. (*Homotopie relative à un point*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout espace pointé  $(X, x)$ ,  $\pi_n(X, x) = \pi_n(X, \{x\})$ .

Puisque  $\text{Path}(X, \{x\}) = \Omega X$ .

#### Lemme

Soit  $\star \in A \subseteq X$  une paire topologique pointée. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $[f] = 0 \in \pi_n(X, A, \star)$  si et seulement si  $f$  est homotope relativement à  $\partial I^n$  à une application à valeurs dans  $A$ .

#### Théorème. (*Suite exacte longue homotopique associée à une paire topologique*)

Pour toute paire topologique  $(X, A)$  pointée, on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_2(A) \xrightarrow{\pi_2(i)} \pi_2(X) \longrightarrow \pi_1(X, A) \longrightarrow \pi_1(A) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(X) \longrightarrow \pi_0(X, A) \longrightarrow \pi_0(A) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X)$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ C'est tout dit. ■

On peut donner une forme plus agréable à cette suite grâce aux considérations suivantes.

### 6.1.7.3 Homotopie d'une fibration

**Théorème. (*Suite exacte longue homotopie associée à une fibration*)**

Soient  $E, B$  deux espaces pointés,  $B$  en  $b_0$ . Pour toute fibration de Serre  $p : E \rightarrow B$  de base connexe par arcs, en particulier pour toute fibration de Hurewicz de fibration de base connexe par arcs, de fibre le long de  $p$   $F = p^{-1}(b_0)$ , on a une suite exacte longue dans Ens, puis Grp dès le rang 4, puis Ab dès le rang 6, donnée par

$$\dots \longrightarrow \pi_2(F) \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \{\star\}$$

jusqu'à l'infini à gauche.

▷ À venir. ■

#### Heuristique

Une fibration de Serre est l'analogue d'une suite exacte courte en théorie de l'homotopie, d'où la notation  $F \rightarrow E \rightarrow B$  !

**Corollaire. (*Homotopie d'un revêtement*)**

Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement de base connexe par arcs. Alors pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E)$ . Si de plus ce revêtement est pointé, alors c'est une équivalence faible d'homotopie.

▷ En effet, les fibres d'un revêtement sont discrètes d'où avec les notations précédentes  $\pi_n(F) = 0$  pour tout entier  $n \geq 1$  avec et les annulations tous les trois termes de la suite longue en homotopie donnent

$$0 \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(B) \longrightarrow 0$$

dès que  $n \geq 2$ , d'où l'isomorphie. ■

#### Corollaire

Deux espaces topologiques connexes par arcs de même groupe fondamental et de même revêtement universel ont même homotopie.

**Application. (*Homotopie d'un fibré*)**

Soit  $F \rightarrow E \rightarrow B$  un fibré de base connexe par arcs et de fibre type contractile. Alors pour tout entier entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(E) = \pi_n(B)$ .

### 6.1.7.4 Groupes d'homotopie des sphères

#### Exemple. (*Homotopie du cercle*)

Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(S^1) = 0$ . On dit que le cercle est asphérique.

En effet,  $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$  par contractibilité et l'on applique l'homotopie d'un revêtement

#### Définition. (*Asphérisme*)

Un espace topologique est *asphérique* si tous ses groupes d'homotopie d'ordre strictement plus grand que 1 sont nuls.

#### Fait. (*Asphéricité et revêtement*)

Si  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement d'espace total connexe par arcs, alors  $B$  est asphérique si et seulement si  $E$  l'est.

Par la suite exacte longue tirée d'un revêtement.

*Remarque.* Un cercle est asphérique au sens de l'homotopie comme au sens de l'homologie !

Repassons maintenant au cas général des sphères.

#### Proposition. (*Homotopie « par en-dessous » des sphères*)

Pour tous entiers naturels  $n < d$ ,  $\pi_n(S^d) = 0$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Pour tout point  $\star$  de la sphère,  $S^d \setminus \{\star\}$  est contractile. ■

Calculons un groupe d'homotopie non trivialement fourni par les connaissances acquises jusqu'ici. Le plus simple est le groupe d'homotopie à l'ordre 2 du cercle. C'est d'ailleurs le seul qu'on puisse visualiser avant de passer à la dimension 4. Pas de chance :

#### Proposition

$$\pi_2(S^1) = 0.$$

▷ On cherche donc les applications continues, aussi pointées, de  $S^2$  sur  $S^1$ . Puisque  $S^2$  est simplement connexe, une telle application  $f$  se relève en  $\tilde{f}$  de  $S^2$  dans  $\mathbb{R}$  le revêtement universel du cercle. Mais celui-ci est contractile, de sorte que  $\tilde{f}$  est contractile, et par composition  $f$  l'est. ■

#### Un peu de détail sur l'homotopie sphérique

Jean-Pierre SERRE a montré en 1953 que pour tous entiers naturels  $k > n$ ,  $\pi_n(S^n)$  est de torsion, sauf lorsque  $n \geq 1$ ,  $\pi_{4n-1}(S^{2n}) = \mathbb{Z} + \pi_{4n-1}(S^{2n})^{tor}$ .

$$\pi_i(S^n)$$

	$i \rightarrow$												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$n$	1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\downarrow$	2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
	5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
	6	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	
	7	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	
	8	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	

TABLE 6.1 : Premiers groupes d'homotopie des sphères. —

Au-delà, c'est encore plus compliqué, mais le triangle inférieur est heureusement toujours nul par la proposition initiale.

### 6.1.7.5 Fibrations de Hopf

#### Exercice 12 (Fibration de Hopf complexe et homotopie des sphères)

1. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Que peut-on dire des  $\pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?
2. Calculer  $\pi_2(S^2)$ .
3. (Homotopies comparées de la 2-sphère et de la 3-sphère) Montrer que  $\pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$  pour tout entier  $n \geq 3$ .

▷ Éléments de réponse.

1. On a une fibration donnée par  $S^1 \rightarrow S^{2d+1} \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{C}$ . La suite exacte longue associée à cette fibration s'écrit

$$\dots \longrightarrow \pi_{2d+3}(S^1) \longrightarrow \pi_{2d+3}(S^{2d+1}) \longrightarrow \pi_{2d+3}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d+2}(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_{2d+2}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_{2d+2}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d+1}(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_{2d+1}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_{2d+1}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d}(S^1) \longrightarrow \pi_{2d}(S^{2d+1}) \longrightarrow \pi_{2d}(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_{2d-1}(S^1) \xleftarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} \pi_3(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_2(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_2(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C})$$

$$\pi_1(S^1) \xleftarrow{\quad} \pi_1(S^{2d+1}) \xrightarrow{\quad} \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \longrightarrow \{*\}$$

où la première colonne est nulle sauf en  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . Puisque  $\pi_2(S^{2d+1}) = 0$ , on en déduit l'isomorphisme  $\pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$ . De plus, pour tout entier  $1 \leq k \leq 2d$ ,  $\pi_k(S^{2d+1}) = 0$ , d'où pour résumer pour tout

$n \in \mathbb{N}$  :

$$\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } n = 2 \\ 0 & \text{pour } 3 \leq n \leq 2d \\ \pi_n(S^{2d+1}) & \text{pour } n \geq 2d + 1. \end{cases}$$

En particulier,  $\mathbb{P}^d\mathbb{C}$  est simplement connexe.

2. On a  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ , car  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = S^2$ .
3. Simple application encore de ce qui précède au cas  $d = 1$ . Mais les plus exhaustifs pourront récrire la suite

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{k-1}(S^1) & \xrightarrow{\quad} & \pi_{k-1}(S^3) & \xrightarrow{\quad} & \pi_{k-1}(S^2) & \xrightarrow{\quad} & \dots \\ & \swarrow & & & \searrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\quad} & \pi_k(S^1) & \xrightarrow{\quad} & \pi_k(S^3) & \xrightarrow{\quad} & \pi_k(S^2) \end{array}$$

associée à la fibration de Hopf classique pour s'en convaincre plus visuellement.

### Exercice 13 (Homotopie des espaces projectifs réels)

1. Que peut-on dire des  $\pi_n(\mathbb{P}^1\mathbb{R})$  pour  $n \in \mathbb{N}$  ?
2. Soit  $d \geq 2$  un entier. Calculer les groupes d'homotopie  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R})$  pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ .
3. (*Les espaces projectifs ne sont pas des rétracts d'eux-mêmes*) Montrer que le plongement  $\mathbb{P}^k\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  n'admet pas de rétraction lorsque  $0 < k < n$  sont des entiers.

#### ▷ Éléments de réponse.

1.  $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$  est homéomorphe au cercle dont vous connaissez entièrement l'homotopie.
2. On a le revêtement  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^d \rightarrow \mathbb{P}^d\mathbb{R}$  qui donne  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = \pi_n(S^d)$  pour tout  $n \geq 2$ , en particulier pour tout  $2 \leq n \leq d - 1$ ,  $\pi_n(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = 0$ . On savait enfin déjà que  $\pi_0(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = 0$  et  $\pi_0(\mathbb{P}^d\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
3. Si tel est le cas,  $\rho\sigma = id_{\mathbb{P}^k\mathbb{R}}$  donc par fonctorialité des groupes d'homotopie,  $\pi_k(\mathbb{P}^k\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \rightleftharpoons \pi_k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong 0$  est injective, car  $\pi_k(\rho)\pi_k(\sigma) = id$ , mais c'est impossible.

#### 6.1.7.6 Lenticularité

Le but est d'exhiber une famille d'espaces topologiques « difficiles à classifier » pour motiver des théories de l'homotopie ou de l'homologie supérieures. Les espaces lenticulaires peuvent avoir même homotopie au sens de tous les groupes d'homotopie supérieurs et même homologie sans être homéomorphes ni même homotopiquement équivalents.

**Définition. (*Espace lenticulaire*)**

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . On note  $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ . On fait agir  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sur la sphère  $S^3 \subseteq \mathbb{R}^2$  par

$$(z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^q z_2)$$

où l'identifie  $S^3$  à la 1-sphère du plan complexe complexe<sup>a</sup>  $\mathbb{C}^4$  et l'on note  $L(p,q)$  l'espace quotient obtenu, appelé  $(p,q)$ -variété/*espace lenticulaire de troisième dimension*.

<sup>a</sup> Par opposition au plan complexe réel  $\mathbb{C}^2$ ...

**Exemples. (*Espaces lenticulaires*)**

1.  $L(2,1) = \mathbb{RP}^3$ .
2.  $L(2,5)$  consiste en la lentille entre deux parois donnée par la double rotation alignant leurs fentes. On obtient bien alors 5 régions de lentille.

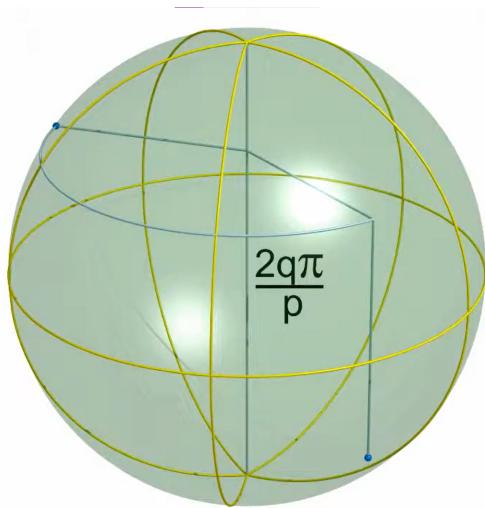


FIGURE 6.1.18 : *Espaces lenticulaires*. —  
Illustration de l'opération quotient et des angles sur  $S^3$

**Fait. (*Groupe fondamental d'un espace lenticulaire*)**

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors

Par construction,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  fini agit sur  $S^3$  qui est séparé et simplement connexe. L'action est libre, car

$z_1 = \zeta z_1 \implies \zeta = 1$  pour tout  $z_1 \in C^2 \setminus \{0\}$  et si  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  puis  $\zeta^q = 1$ , impossible, car  $q \wedge p = 1$ .

Ainsi on a un revêtement universel  $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}L(p,q)$  et le  $\pi_1$  de la base est donné  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**Propriété. (*Homotopie des espaces lenticulaires*)**

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors pour tout  $i \geq 2$ ,  $\pi_1(L(p,q)) = \pi_i(S^3)$ .

**Propriété. (*Homologie des espaces lenticulaires*)**

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et un entier  $q \wedge p = 1$ . Alors pour  $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(L(p,q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } k = 0, 2n - 1 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{pour } k \text{ impair, } 0 < k < 2n - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les groupes d'homologie de  $L(p,q)$  ne dépendent pas de  $q$ .

▷ C'est une propriété déjà ve appliquée au revêtement  $S^3 \rightarrow L(p,q)$ , et cela vient simplement de la suite exacte longue en homotopie d'une fibration à fibres discrètes. ■

**Exercice 14 (*Classification des variétés lenticulaires*)**

Soient  $p \in \mathcal{P}$  et  $q, q' \in \mathbb{N}$  avec  $q \wedge p = q' \wedge p$ . On note  $L = L(p,q)$  et  $L' = L(p,q')$ .

1. Montrer que  $L$  est homéomorphe à  $L'$  si et seulement si  $q = \pm q'^{\pm 1}$  [p].
2. Montrer que  $L$  est homotiquement équivalent à  $L'$  si et seulement si  $q = \pm kq'$  où  $k$  est un carré dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Ainsi la suite des groupes d'homotopie n'est pas un invariant complet. Mais on peut encore se demander si la suite des groupes d'homotopie d'un espace détecte la contractibilité, ce qui est moins fort. Mais c'est encore raté.

**6.1.7.7 Homotopie du cercle polonais****Propriété. (*Homotopie du cercle polonais*)**

Soit  $W$  le cercle polonais. Alors  $W$  est connexe par arcs et  $\pi_n(W) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Contre-exemple. (*Espace non contractile d'homotopie nulle*)**

Le cercle polonais  $W$  connexe par arcs n'est pas contractile mais sa suite d'homotopie est identiquement nulle. □

### 6.1.8 Un modèle simple : homotopie des *CW*-complexes

#### 6.1.8.1 Définition catégorique des complexes cellulaires

**Reformulation pratique.** (*Structure de complexe cellulaire*)

Une structure cellulaire sur un espace topologique  $X$  est un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \text{colim}_n X^{(n)}$$

où si  $J_n$  est un discret dit *ensemble d'étiquetage des cellules attachées d'ordre n*,

$$\begin{array}{ccc} J_n \times S^{n-1} \simeq \sqcup_{J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times D^n \simeq \sqcup_{J_n} D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n-1)} \coprod_{\varphi_n} (J_n \times D^n) \end{array}$$

et  $\varphi_n$  est une *application d'attachement* ou *de recollement* et  $\Phi_n$  est une *application caractéristique*, de sorte que  $X^{(n)}$  est la somme amalgamée  $\frac{X^{(n-1)} \sqcup (J_n \times D^n)}{\varphi_n(j,x) \sim (j,x)}$ . On prend garde à ce qu'ici l'usage de  $\coprod$  ne désigne pas une somme disjointe.

Alors  $X$  est de dimension finie s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X^{(n)} = X$  et la dimension d'un complexe cellulaire est  $\dim(X) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq 0\}$ . De plus,  $X$  est fini si et seulement si  $\sqcup_n J_n$  est fini. Pour un *CW*-complexe de dimension infinie, on considère la topologie colimite = topologie faible définie par les inclusions  $X^{(k)} \hookrightarrow X$  ou encore les parties  $X^{(k)} \hookrightarrow X^{(k+1)}$  où  $U \subseteq X$  est ouvert  $\iff U \cap X^{(k)}$  est ouvert dans  $X^{(k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Remarques.

- Comment cette définition coïncide-t-elle avec celle, plus intuitive, que l'on connaît déjà ? Puisque les ensembles  $J_n$  sont discrets, la donnée de  $\varphi_n$  continue équivaut à celle d'une collection  $(\varphi_{n,j})_{j \in J_n}$  d'applications continues  $S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$  et  $\Phi_{n,j}$  donnée comme plongement au sens faible de  $D^n$  dans le pushout  $X^{(n-1)} \sqcup_{\varphi_n} D^n$ , ce qui correspond au recollement à la main de cellules de la définition élémentaire.
- Au rang  $n = 0$ ,  $S^0 = \emptyset$  et  $D^0 = \{*\}$  d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_0 \times \emptyset = \emptyset & \longrightarrow & X^{(-1)} = \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_0 \times \{*\} & \longrightarrow & \sqcup_{J_0} \{*\}. \end{array}$$

Ainsi, les applications d'attachement  $\varphi_0$  sont vides : il n'y a rien à faire et les applications caractéristiques sont l'identité.

3. Au rang  $n = 1$ ,  $\partial D^1 = S^0 = \{0,1\}$  et  $D^1 = [0,1]$  d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_1 \times \{0,1\} & \xrightarrow{\varphi_1} & X^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_1 \times D^1 & \longrightarrow & X^{(1)}. \end{array}$$

Ainsi, les applications d'attachement correspondent au choix de deux points du 0-squelette pour les extrémités de  $D^1$ . Les applications caractéristiques sont à décomposition sur  $J_1$  près les plongements au sens faible des arêtes  $D^1$  dans le  $CW$ -complexe de dimension 1 obtenu.

4. Au rang  $n = 2$ ,  $\partial D^2 = S^1$  le cercle et  $D^2$  est le disque, d'où un recollement de la forme

$$\begin{array}{ccc} J_2 \times S^1 & \xrightarrow{\varphi_2} & X^{(1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_2 \times D^2 & \longrightarrow & X^{(2)}. \end{array}$$

On généralise les observations précédentes à la dimension quelconque.

5. On a toujours un recouvrement  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j \in J_n} B^n \longrightarrow X$ . (En particulier, on retrouve qu'un  $CW$ -complexe fini est compact.)

Plus précisément, tout  $CW$ -complexe  $X$  est en bijection ensembliste avec  $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \bigsqcup_{j \in J_n} \overset{\circ}{B^n}$ .

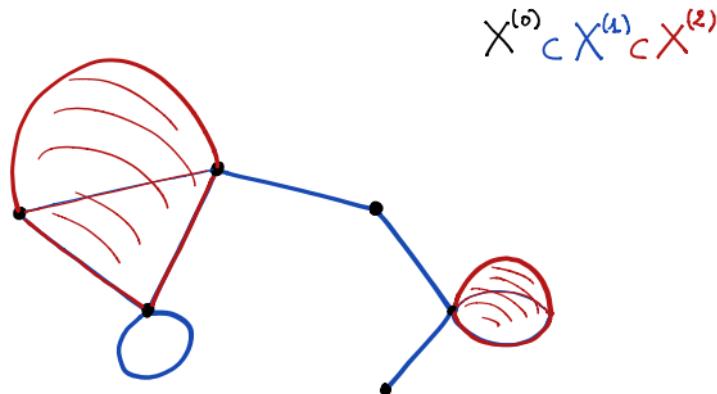


FIGURE 6.1.19 :  $CW$ -complexe. —

**Exemples. (*Complexes cellulaires du point de vue catégorique*)**

1. (*Structure cellulaire de la sphère par pushout*)  $S^2$  admet la décomposition cellulaire minimaliste suivante : prenons deux points  $x_0, x_2$  de la sphère. On prend  $J_0 = \{x_0\}$  et  $X^{(0)} = \{x_0\}$  qui  $= X^{(1)}$  en prenant de plus  $J_1 = \emptyset$ . On prend  $J_2 = \{x_2\}$  et

$\varphi_2 : \{x_2\} \times S^1 \rightarrow X^{(2)}$  constante en  $x_0$ .

Notons que cette construction est le modèle  $S^n \simeq D^n / \partial D^n$  déjà rencontré en topologie générale.

2. (*Structure cellulaire du plan projectif par pushout*)  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = D^0 \sqcup_{\varphi_1} D^1 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup \dots \sqcup_{\varphi_n} D^n$  où les attachements sont un peu casse-tête. De même,  $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = D^0 \sqcup_{\varphi_2} D^2 \sqcup_{\varphi_4} D^4 \sqcup_{\varphi_6} \dots \sqcup_{\varphi_{2n}} D^{2n}$ .

Remarquons que  $\varphi_{2n} : S^{2n-1} : \mathbb{P}^{n-1} \mathbb{C}$  est la fibration de Hopf.

3. (*Structure cellulaire du tore par pushout*)  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 = D^0 \sqcup_{\varphi_1} (D^1 \sqcup D^1) \sqcup_{\varphi_2} D^2$  et c'est cette notation que nous utiliserons le plus. Ici,  $J_0 = \{x_0\}$ ,  $J_1 = \{1, 2\}$  et  $J_2 = \{0\}$ , puis  $\varphi_1^1 : 0 \mapsto x_0, 1 \mapsto x_0$  et  $\varphi_1^2 = \varphi_1^1$ . Enfin,  $\varphi_2$  est l'attachement classique défini sur  $\partial I^2 \simeq S^1$  décrit par le carré fondamental du tore.

Avant de passer à la suite, on prendra garde à la définition récurrente d'un CW-complexe. Par exemple, pour  $n \neq 0$ , une  $n$ -boule n'est pas une décomposition cellulaire de la  $n$ -boule.

### Lemme

Tout CW-complexe non vide compte au moins une 0-cellule.

▷ Soit  $X$  un complexe cellulaire non vide et soit  $n$  minimal tel que  $X$  ait une  $n$ -cellule. Si  $n > 0$ , alors cette  $n$ -cellule possède une application d'attachement  $S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  où  $X^{n-1}$  est le  $(n-1)$ -squelette de  $X$ . Mais par minimalité de  $n$ ,  $X^{n-1} = \emptyset$ . Comme  $S^{n-1}$  est non vide, il n'existe aucune application  $S^{n-1} \rightarrow$ , ce qui est une contradiction. Ainsi, si  $X$  est un CW-complexe non vide, il doit posséder une 0-cellule. ■

*Remarque.* L'espace vide est un CW-complexe sans aucune cellule.

### Exercice 15

Donner pour  $n \in \mathbb{N}^*$  une décomposition cellulaire de la  $n$ -boule.

#### ▷ Éléments de réponse.

Il suffit de recoller son bord  $S^{n-1}$  sur  $S^{n-1}$  via l'identité, ce dernier étant un CW-complexe.

Cette nouvelle reformulation nous permet également une plus ample possibilité de manœuvre sur les espaces cellulaires.

### Proposition. (*Produit général de complexes cellulaires*)

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires. Si  $X$  ou  $Y$  est localement compact et si  $X$  et  $Y$  ont un nombre dénombrable de cellules,  $X \times Y$  admet une structure cellulaire.

▷ Soit  $(I_n, \varphi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $X$  et  $(J_n, \psi_n, \Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $Y$ . Posons  $(X \times Y)^{(n)} = \bigcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)}$ . Posons  $K_n = \bigsqcup_{k=0}^n I_k \times J_{n-k}$ . Au rang  $n = 0$ , on attache :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\theta_0} & \emptyset \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_0 \times J_0 \times \{\ast\} & \xrightarrow[\Theta_0]{} & I_0 \times J_0 \times \{\ast\} \simeq (I_0 \times \{\ast\}) \times (J_0 \times \{\ast\}). \end{array}$$

Au rang  $n = 1$ , on attache par :

$$\begin{array}{ccc} I_0 \times \{\ast\} \times J_1 \times \{0,1\} \sqcup I_1 \times \{0,1\} \times J_0 \times \{\ast\} & \xrightarrow{\Phi_0 \times \psi_1 \sqcup \varphi_1 \times \Psi_0} & X^{(0)} \times Y^{(0)} \\ \simeq (I_0 \times J_1 \sqcup I_1 \times J_0) \times \{0,1\} & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ (I_0 \times J_1) \sqcup (I_1 \times J_0) \times [0,1] & \xrightarrow{\quad} & (X^{(0)} \times Y^{(0)}) \sqcup (I_0 \times \{\ast\} \times J_1 \times I) \sqcup (I_1 \times I \times J_0 \times \{0\}) / \Phi_0 \times \psi_1 \sqcup \varphi_1 \times \Psi_0 \\ & & \simeq X^{(0)} \times Y^{(1)} \cup X^{(1)} \times Y^{(0)} \end{array}$$

où le dernier homéomorphisme est donné par les hypothèses.

Pour passer du rang  $n$  au rang  $n + 1$ , on utilise

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{k=0}^n (I_k \times \partial I^k \times J_{n+1-k} \times I^{n+1-k} \sqcup \partial I^{n+1-k} \times J_k) & & \\ \downarrow \simeq & & \\ (\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times J_{n+1-k}) \times \partial I^{n+1} & \xrightarrow[\theta_{n+1}]{\varphi_k \times \Psi_{n+1-k} \sqcup \Phi_k \times \psi_{n+1-k}} & \bigsqcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)} \\ & & \\ (\bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times J_{n+1-k}) \times I^{n+1} & \xrightarrow[\Theta_{n+1}]{} & \bigsqcup_{k=0}^n X^{(k)} \times Y^{(n-k)} \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n+1} I_k \times I^k \times J_{n+1-k} \times I^{n+1-k} \\ & & \downarrow \simeq \\ & & \bigsqcup_{k=0}^{n+1} X^{(k)} \times Y^{(n+1-k)} \end{array}$$

avec les trous évidents. Ainsi  $X \times Y$  admet la décomposition cellulaire  $(K_n, \theta_n, \Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . ■

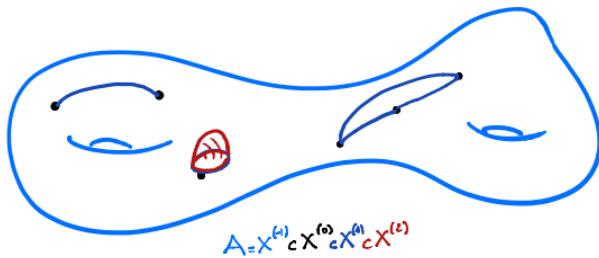
### Définition. (*Complexe cellulaire relatif*)

Une structure cellulaire relative à un espace topologique  $A$  sur un espace topologique  $X$  est la donnée  $(X, A)$  d'un homéomorphisme à une colimite de la forme

$$A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \bigcup_n X^{(n)} = \text{colim}_n X^{(n)}$$

formée comme précédemment. On parle de *complexe (cellulaire) relatif* ou *complexe (cellulaire) généralisé*.

*Remarque.* Un complexe cellulaire est un complexe cellulaire de la forme  $(X, \emptyset)$ .

FIGURE 6.1.20 : *CW-complexe relatif.* —

C'est très parlant : au lieu d'attacher des points dans le vide : on les attache sur un pré-espace  $A$ .

### Lemme. (« Non-importance de l'ordre de recollement des cellules »)

Si  $A$  est un  $CW$ -complexe, toute complexe relatif  $(X, A)$  est un  $CW$ -complexe.

### Reformulation pratique. (*Sous-complexe cellulaire*)

Un sous-complexe cellulaire  $A \subseteq X$  est un complexe cellulaire obtenu par des sous-ensembles  $I_n \subseteq J_n$  et restrictions des applications d'attachement  $I_n \times S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} A^{(n-1)}$ .

### Définition. (*Paire cellulaire*)

Une *paire cellulaire* est une paire topologique  $(X, A)$  de complexes cellulaires telle que  $A$  est un sous-complexe cellulaire de  $X$ .



Une paire cellulaire est un complexe cellulaire relatif, mais pas l'inverse.

### Exercice 16 (Quotient de complexes cellulaires)

Soit  $(X, A)$  une paire cellulaire. Montrer que  $X/A$  est muni d'une structure de complexe cellulaire.

### Corollaire. (*Suspension d'un CW-complexe*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $X$  est un  $CW$ -complexe, alors  $\Sigma^n X$  est un  $CW$ -complexe.

▷ Par récurrence, il suffit de montrer que  $\Sigma X$  est un  $CW$ -complexe. Or  $\Sigma X = \frac{X \times I}{X \times \partial I}$ . ■

Voici une propriété donnant des exemples faciles de cofibrations.

### Proposition

Pour tout complexe cellulaire relatif  $(X, A)$ , l'inclusion canonique  $A \hookrightarrow X$  est une cofibration  $A \rightarrow X$ .

▷ On a par pushout de cofibrations

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{J_n} D^n & \longrightarrow & X^{(n)} \end{array}$$

une cofibration à gauche qui donne celle de droite. Par composition de cofibrations,  $A \rightarrow X^{(0)} \rightarrow X^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n)}$  est une cofibration. Passons à la colimite. Chaque donnée sur chaque squelette :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ \downarrow & H^{(0)} \nearrow & \nearrow \\ X^{(0)} & & \\ \downarrow & H^{(1)} \nearrow & \nearrow \\ X^{(1)} & & \\ \vdots & & \\ \downarrow & H \nearrow & \nearrow \\ & & e_0 \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

permet de passer à la colimite  $H := \text{colim}_n H^{(n)}$  par foncteur. ■

### Définition. (*Caractéristique d'Euler*)

Soit  $X$  un complexe cellulaire fini. On définit sa *caractéristique d'Euler*  $\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{card}(J_n)$ .

### Exercice 17

1. Montrer que la caractéristique d'Euler ne dépend pas de la structure cellulaire.
2. Montrer que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique.

**Lemme**

1. Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $Y$  un espace topologique. Alors une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f|_{X^{(n)}} : X^{(n)} \rightarrow Y$  est continue.
2. Soit  $K$  un compact. Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Soit  $f : K \rightarrow X$  une application continue. Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(K) \subseteq X^{(n)}$ . De plus, si  $f : K \rightarrow X$  est une application quelconque, elle est continue si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f : K \rightarrow X^{(n)}$  soit bien définie et continue.

▷ Successivement :

1. Propriété classique de la topologie faible.
2.  $f(K)$  étant compact, il n'intersecte qu'un nombre fini de cellules, d'où le résultat. Le reste des implications n'est qu'esbroufe. ■

**Exercice 18**

Donner un contre-exemple à la deuxième propriété dans le cas où  $f$  n'est pas une application continue.

▷ **Éléments de réponse.**

Prenons  $K$  le compactifié d'Alexandrov de la colimite  $\mathbb{R}^{infi} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^{infi}$  l'identité sur  $\mathbb{R}$  et  $f(\infty) = 0 \in \{0\}$ . Alors  $f$  n'est incluse dans aucun  $n$ -squelette de  $\mathbb{R}^\infty$ .

**Reformulation pratique. (*Application cellulaire*)**

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre complexes cellulaires est cellulaire si elle préserve la décomposition cellulaire, i.e.  $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Heuristique**

Les applications cellulaires peuvent être approximées : si une application traverse la diagonale d'un carré, elle n'est pas cellulaire. Mais on peut en faire le tour...

Plus généralement, l'approximation optimale d'applications par des cellulaires est un domaine actif de la recherche.

**Propriétés. (*Applications cellulaires*)**

1. La composée de deux applications cellulaires est cellulaire.
2. La restriction à un sous- $CW$ -complexe d'une application cellulaire est une application cellulaire.
3. Le produit de deux applications cellulaires est cellulaire.

▷ Successivement :

1. C'est immédiat.
2. C'est clair.
3. Il suffit de reprendre la définition du produit cellulaire.

**Propriété. (*Structure cellulaire d'un recollement le long d'une application cellulaire*)**

Si  $(Z, A)$  est une paire cellulaire et  $f : A \rightarrow Y$  est cellulaire, alors  $Z \cup_f Y$  est un complexe cellulaire et l'application pushout  $Z \rightarrow Z \cup_f Y$  est cellulaire.

▷ Soit  $(J_n, \varphi_n, \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $Z$ . Soit  $(I_n, \tilde{\varphi}_n, \tilde{\Phi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une structure cellulaire sur  $A$  et  $(K_n, \psi_n, \Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sur  $Y$ . La structure sur  $Z \cup_f Y$  de squelette  $Z^{(n)} \cup_{f|_{A^{(k)}}} Y^{(n)}$  est donnée par  $((J_n \setminus I_n) \sqcup K_n, \varphi_n|_{J_n \setminus I_n} \sqcup \psi_n, \Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On vérifie que l'application pushout est cellulaire :  $X^{(n)} \rightarrow X^{(n)} \times \{0\} \subseteq Z^{(n)}$ , et  $i_0(X^{(n-1)}) \rightarrow X^{(n-1)} \subseteq (Z \cup_f Y)^{(n)}$  et  $Y^{(n)} \rightarrow Y^{(n)} \subseteq (Z \cup_f Y)^{(n)}$ . ■

**Proposition. (*Factorisation en cofibration d'une application cellulaire*)**

La factorisation canonique en cofibration d'une application cellulaire est cellulaire, *i.e.* composée de deux applications cellulaires.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une fonction cellulaire. Considérons  $X \xrightarrow{i} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{P} Y$  sa factorisation canonique. Puisque

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{i_0} & X \times I \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

il d'appliquer le lemme à  $A = X$ ,  $Z = X \times I$  et  $f : A = X \rightarrow Y$  pour avoir que  $\text{Cyl}(f)$  est un complexe cellulaire et l'application pushout est cellulaire. Ainsi  $i$  est cellulaire par comoposée, et l'application à droite l'est également et l'on a tout montré. ■

### 6.1.8.2 Théorèmes homotopiques sur les complexes cellulaires

**Lemme. (*Lemme de compression*)**

Soit  $(X, A)$  un complexe cellulaire relatif d'étiquetages  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $(Y, B)$  une paire topologique. Soit une application de paires topologiques  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , *i.e.* continue et telle que  $f(A) \subseteq B$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $J_n \neq \emptyset$  ( $n$  étant la dimension des cellules que l'on recolle sur  $X^{(n-1)}$  pour construire  $X$ ),  $\pi_n(Y, B) = 0$ . Alors il existe une application continue  $g : X \rightarrow B$  homotope à  $f$  relativement à  $A$ .

▷ Notons  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des dimensions des cellules recolles pour construire  $X$ , avec  $J_{n_0} \neq \emptyset, J_{n_1} \neq \emptyset, m \notin (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  avec pour convention que, avec  $f^{(-1)} = f$ ,  $X^{(-1)} = A$  et  $n_{-1} = -1$ , il existe  $f^{(k)} : X \rightarrow Y$  est homotope à  $f^{(k-1)} \sim^{H^{(k)}} f^{(k)}$  rel  $X^{(n_k-1)}$ .

Pour  $k = 0$ , on a

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} & \xrightarrow{\varphi_{n_0}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times B^{n_0} & \xrightarrow{\Phi_{n_0}} & X^{(n_0)} & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On a  $f\Phi_{n_0}$  une application de paires  $(J_{n_0} \times B^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \rightarrow Y \rightarrow B$  ce qui équivaut à une collection d'applications de paires  $\{B^{n_0}, S^{n_0-1}\} \rightarrow (Y, B)\}$ . Or  $\pi_{n_0}(Y, B) = \{0\} \simeq [(I^{n_0}, \partial I^{n_0}), (Y, B)] \simeq [(B^{n_0}, S^{n_0} - 1), (Y, B)]$  pour la relation d'homotopie relative au sous-espace. Autrement dit,  $f\Phi_{n_0}$  est homotope à une application  $\psi : J_{n_0} \times B^{n_0} \rightarrow B \subseteq Y$  relativement à  $J_{n_0} \times S^{n_0-1}$ . Nommément,  $f\Phi_{n_0} \stackrel{\tilde{h}}{\sim} \psi$  où  $\tilde{h} : J_{n_0} \times B^{n_0} \times I \rightarrow B$ ,  $\tilde{h}(-, 0) = f\Phi_{n_0}$  et  $\tilde{h}(-, 1) = \psi$ . On peut considérer maintenant :

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} \times I & \xrightarrow{\varphi_{n_0} \times id_I} & A \times I & \xrightarrow{\tilde{f}(a, t) := f(a)} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times B^{n_0} \times I & \xrightarrow{\Phi_{n_0} \times id_I} & X^{(n_0)} \times I & \dashrightarrow^{\exists! h} & Y. \\ & \tilde{h} & & & \end{array}$$

Par ce que l'on vient de dire, le carré extérieur est commutatif, ce qui par propriété de la somme amalgamée donne un unique  $h : X^{(n_0)} \times I \rightarrow Y$ . En outre :

- ★ on a une homotopie relative à  $A$  : en effet,  $h(a, t) = f(a)$  par commutativité du triangle est.
- ★ De plus,  $h(-, 1) \in B$ , car cette même commutation donne  $h(a, 1) \in B$  et  $h(\Phi_{n_0}(x), 1) = \tilde{h}(x, 1) \in B$  pour  $x \in B^{n_0}$  par commutation de la flèche du dessous.
- ★ Enfin,  $h(-, 0) = f|_{X^{(n_0)}}$  par le même argument.

On peut presque conclure : par cofibration,

$$\begin{array}{ccccc} X^{(n_0)} & \xrightarrow{i_0^{X^{(n_0)}}} & X^{(n_0)} \times I & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow h & \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I & \dashrightarrow^H & Y \\ & \searrow f & & \dashrightarrow^{H^{(n_0)}} & \end{array}$$

donne par commutation de l'extérieur  $h(x, 0) = f(x)$  pour  $x \in X^{(n_0)}$  d'après le dernier point d'où par extension des homotopies de la cofibration  $X^{(n_0)} \rightarrow X$ , une homotopie  $H^{(n_0)} : X \times I \rightarrow Y$ . Vérifions qu'elle nous convient. On a :

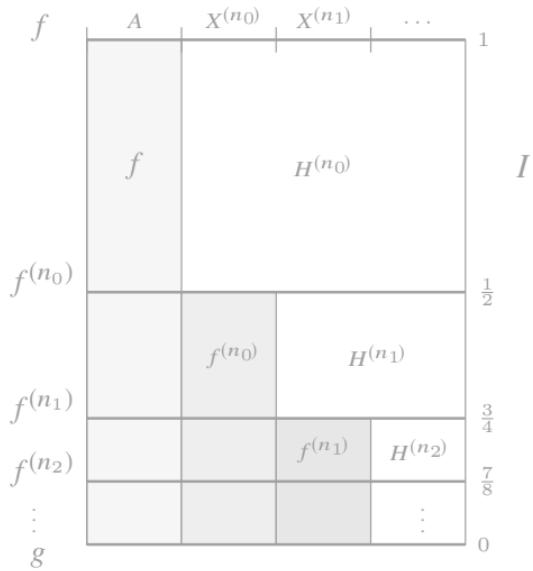
- ★  $f^{(0)} := H^{(n_0)}(-, 1) : X \rightarrow Y$  ;
- ★  $f^{(0)} \stackrel{H^{(n_0)}}{\sim} H^{(n_0)}(-, 0) = f = f^{(-1)}$  par commutation du triangle inférieur ;
- ★  $H^{(n_0)}$  est une homotopie relative à  $A$ , car  $H^{(n_0)}(a, t) = h(a, t) = f(a)$  pour tout  $a \in A$  ;
- ★  $f^{(0)}(X^{(n_0)}) \subseteq B$  et  $H^{(n_0)}(X^{(n_0)}, 1) = h(X^{(n_0)}, 1) \subseteq B$  toujours par cet argument.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang  $k$ , et démontrons-là au rang  $k + 1$ . Ce sont les mêmes arguments. Si  $\dim(X) < +\infty$ , c'est déjà fini. Sinon, construisons une homotopie  $\mathcal{H} : X \times I \rightarrow Y$  relative à  $A$  telle que  $f = \mathcal{H}(-, 0)$  et  $g = \mathcal{H}(-, 1)$ , avec  $A \times I \subseteq X^{(n_0)} \times I \subseteq X^{(n_1)} \times I \subseteq X^{(n_2)} \times I$ , la

formule analytique de ce procédé étant

$$\begin{aligned} Hj: \quad X \times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\longmapsto H^{(k)}(x, 2^{k+1}(t - 1 + \frac{1}{2^k})) \text{ pour } 1 - \frac{1}{2^k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, k \geq 0 \end{aligned}$$

relative à  $A$ .



Pour tout  $x \in X$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in X^{(n_k)}$ . Par construction, on a  $H^{(l)}(x,s) = f^{(k)}(x)$ , pour tout  $l \geq k$  et tout  $s \in I$ . L'assignation  $\mathcal{H}(x,1) = f^{(k)}(x)$  finit de définir une application continue  $\mathcal{H}: X \times I \rightarrow Y$ , qui est une homotopie relative à  $A$  de  $f$  à une application  $g = \mathcal{H}(-,1): X \rightarrow B \subseteq Y$ . ■

### Proposition. (*Tiré en arrière entre CW-complexes*)

Soit  $f: X \xrightarrow{\sim} Y$  une équivalence faible d'homotopie non nécessairement cellulaire entre complexes cellulaires. Pour tout complexe cellulaire  $Z$ , le push-forward  $f_*: [Z,X] \rightarrow [Z,Y]$  est une bijection.

▷ Considérons la factorisation canonique  $f: X \xrightarrow{i} \text{Cyl}(f) \cong Y$ . Puisque les cofibrations sont des plongements et les homéomorphismes des équivalences d'homotopie, il suffit de le montrer pour des inclusions. Après cette réduction, soit donc  $f: X \hookrightarrow Y$ . Considérons la suite exacte longue associée à cette paire :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(Y,X) & \longrightarrow & \pi_0(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_0(Y) \\ & & \searrow & & & & \\ & & \pi_2(Y,X) & \longrightarrow & \pi_1(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(Y) \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & \dots & \longrightarrow & \pi_3(Y,X) \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{\sim} \pi_2(Y) \end{array}$$

qui par hypothèse induit des isomorphismes  $\pi_i(f) : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Par force, on a donc  $\pi_i(Y, X) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Appliquons donc le lemme de compression.

Montrons que  $f_*$  est surjective. Soit  $\varphi : Z \rightarrow Y$  et considérons l'application de paires  $(Z, \emptyset) \xrightarrow{\varphi} (Y, X)$  où  $(Z, \emptyset)$  est bien un complexe cellulaire relatif. On a donc  $\varphi$  homotope à  $\psi : Z \rightarrow X$ , soit  $f\psi \sim \varphi$ .

Montrons que  $f_*$  est injective. Soient  $\varphi, \psi : Z \rightarrow X$  telles que  $f\varphi \sim_H f\psi : Z \rightarrow Y$  i.e.  $\exists H : Z \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(-, 0) = f \circ \varphi$  et  $H(-, 1) = f \circ \psi$ . Alors  $(Z \times I, Z \times \partial I)$  est un complexe cellulaire relatif et de plus  $H : (Z \times I, Z \times \partial I) \xrightarrow{H} (Y, X)$  est une application entre paires. En réappliquant le lemme de compression, il existe  $K : Z \times I \rightarrow X$  homotope à  $H$  relativement à  $Z \times \partial I$ , i.e.  $K(z, 0) = H(z, 0) = \varphi(z)$  et  $K(z, 1) = H(z, 1) = \psi(z)$ . Et voilà ! ■

On peut en déduire :

### Théorème. (*Whitehead*)



Une application continue entre complexes cellulaires est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est une équivalence faible d'homotopie.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence faible d'homotopie entre complexes cellulaires. Appliquons la proposition au cas  $Z = Y$ . L'application  $f_* : [Y, X] \xrightarrow{\sim} [Y, Y]$  est une bijection. Soit  $g : Y \rightarrow X$  l'image réciproque de  $id_Y$ . Par construction,  $fg \sim id_Y$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a alors  $\pi_n(fg) = \pi_n(f)\pi_n(g) = id_{\pi_n(Y)}$ . Ainsi, comme  $\pi_n(f)$  est un isomorphisme,  $\pi_n(g)$  est un isomorphisme, c'est-à-dire que  $g$  est une équivalence faible d'homotopie. Maintenant, appliquons la proposition  $Z = X$  et  $g$ . L'application  $g_* : [X, Y] \xrightarrow{\sim} [X, X]$  est une bijection. Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  l'image réciproque de  $id_X$ . Par construction  $g\varphi \sim gf$  d'où  $f = fid_X \sim fg\varphi \sim \varphi$ . ■

**Mnémonik :** l'homotopie cellulaire est plutôt gentille.

La donnée de l'application  $f$  est obligatoire !

Considérons les  $CW$ -complexes  $X = S^2 \times \mathbb{P}^3 \mathbb{R}$  et  $Y = \mathbb{P}^2 \mathbb{R} \times S^3$ . On a deux fibrés  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow S^2 \times \mathbb{P}^3 \mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^2 \times S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \mathbb{R} \times S^3$ . Les suites exactes longues de groupes d'homotopie associées sont similaires, d'où en particulier  $\pi_n(S^2 \times \mathbb{P}^3 \mathbb{R}) \simeq \pi_n(\mathbb{P}^2 \mathbb{R} \times S^3)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant, ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents ! En effet,  $H_5(S^2 \times \mathbb{P}^3 \mathbb{R}) \not\simeq H_5(\mathbb{P}^2 \mathbb{R} \times S^3)$ . (On en déduit que même si  $X$  et  $Y$  ont des homotopies isomorphes il est impossible de trouver une application qui induise un isomorphisme des groupes d'homotopies, drôle n'est-ce pas.)



Il est donc faux de dire que deux  $CW$ -complexes ayant même homologie sont homotopiquement équivalents, et donc même que l'homotopie cellulaire est un invariant complet !

Néanmoins, nulle raison de ne pas s'extasier sur le théorème de Whitehead.

En corollaire :

**Contre-exemple. (*Un non-CW-complexe simple*)**

Le cercle polonais ne peut être muni d'une structure cellulaire.

En effet, l'application de plongement de  $f : \{a,b\} \in W$  où  $a \in \{0\} \times [-1,1]$  et  $b$  dans l'autre composante connexe de  $W$ , est continue. Or c'est une équivalence faible d'homotopie... mais  $W$  et  $\{a,b\}$  ne sont pas homotopiquement équivalents, car  $g : W \rightarrow \{a,b\}$  continue est forcément constante et  $fg$  un point ne peut alors être homotope à l'identité, car  $W$  n'est pas contractile.  $\square$

**Remarques.**

1. Le théorème de Whitehead tient bien sûr encore pour des espaces ayant le type d'homotopie des CW-complexes.
2. L'équivalence d'homotopie faible n'est pas une relation d'équivalence sur Top, car elle n'est pas symétrique. En revanche, c'en est une dans la catégorie des espaces cellulaires.

**Proposition. (*Tiré en arrière entre CW-complexes, version  $n$ -connexe*)**

Une application  $n \in \mathbb{N}$ -connexe  $f : X \rightarrow Y$  continue entre complexes cellulaires. Soit  $Z$  un complexe cellulaire.

1. Si  $\dim(Z) \leq n - 1$ ,  $f_* : [Z, X] \xrightarrow{\sim} [Z, Y]$  est un isomorphisme.
2. Si  $\dim(Z) = n$ ,  $f_* : [Z, X] \longrightarrow [Z, Y]$  est un épimorphisme.

▷ Similaire au théorème de Whitehead : dans la preuve de la propriété du tiré en arrière lemme du théorème de Whitehead, la surjectivité de  $f_*$  tient pour des CW-complexes  $Z$  de dimension au plus  $n$  et l'injectivité tient pour des CW-complexes  $Z$  de dimension au plus  $n - 1$ . ■

**Théorème. (*Théorème de Whitehead, version  $n$ -connexe*)**

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires de dimensions bornées par  $n \in \mathbb{N}$ . Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie si et seulement si  $\pi_k(f)$  est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ .

▷ La preuve finale de Whithead tient avec la version  $n$ -connexe du tiré en arrière donnée précédemment. ■

*Remarque.* Ce fait est particulièrement fort : pour des CW-complexes de dimension finie, il suffit de vérifier qu'une application induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie jusqu'à la dimension maximale, pour avoir des isomorphismes en toute dimension. C'est loin d'être trivial, car SERRE a montré que tout CW-complexe non contractile simplement connexe a une infinité de groupes d'homotopie non triviaux !

**Corollaire.** (*Contractibilité des complexes cellulaires*)

Un complexe cellulaire  $X$  est contractile si et seulement si  $\pi_n(X) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Autrement dit, la suite d'homotopie détecte les contractiles dans la sous-catégorie de  $\text{Top}$  des complexes cellulaires.

▷ On applique le théorème de Whitehead, version  $n$ -connexe à l'application  $X \rightarrow \{\ast\}$ . ■

**Corollaire.** (*Caractérisation de l'asphérisme*)

Un  $CW$ -complexe connexe est asphérique si et seulement si son revêtement universel est contractile.

▷ On sait qu'en général un espace est asphérique si et seulement si son revêtement (universel) l'est. Or le revêtement (universel)  $\tilde{X}$  d'un  $CW$ -complexe  $X$  est un  $CW$ -complexe. Si maintenant  $X$  est asphérique, alors  $\tilde{X}$  l'est, mais il est également simplement connexe, donc d'homotopie identiquement nulle, donc contractile par le théorème de Whitehead. puisque c'est un  $CW$ -complexe. Réciproquement, un espace contractile est asphérique et donc sa base l'est. ■

**Lemme**

Soit  $X$  un  $CW$ -complexe obtenu comme la réunion = colimite croissante  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n$  de sorte que chaque inclusion  $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  soit homotopiquement nulle. Montrer que  $X$  est contractile.

▷ Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $f : S^k \rightarrow X$  continue pointée. En particulier,  $f(S^k)$  est compacte, donc par propriété de la topologie colimite, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f(S^k) \subseteq X_n$ . Ainsi, en notant  $\bar{f} : S^k \rightarrow X_n$ , de sorte que

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow j \\ & X_n & \xrightarrow{i} X_{n+1} \end{array}$$

i.e.  $f = ji\bar{f}$  où  $i \sim \text{cste}$ , soit  $f \sim jcste\bar{f} = \text{cste}$ . Ainsi tout  $n$ -lacet de  $X$  est nul, donc l'homotopie de  $X$  est nulle. Par le corollaire précédent,  $X$  est contractile. ■

**Exercice 19** (*Sphère infinie*)

1. Rappeler comment que la sphère de dimension  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  admet une structure cellulaire ayant deux  $k$ -cellules pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'image de  $S^n$  dans  $S^{n+1}$  est contractile.

Ceci permet de définir, en passant à la colimite :

$$S^0 \subseteq S^1 \subseteq S^2 \subseteq \dots \subseteq S^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n$$

un nouveau *CW*-complexe appelé *sphère de dimension infinie*.

3. Montrer que  $S^\infty$  est contractile.

▷ Éléments de réponse.

1. Voir le cours.

2. On utilise en  $N$  (puis en  $S$ )  $B^n \longrightarrow S^n$ .

$$x \longmapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

3. Il suffit d'appliquer le lemme précédent.

**Exercice 20** (*Homotopie des espaces projectifs infinis*)

Calculer l'homotopie de  $\mathbb{RP}^\infty$  et de  $\mathbb{CP}^\infty$ .

▷ Éléments de réponse.

Le revêtement double de  $\mathbb{RP}^\infty$  est  $S^\infty$ , qui est contractile. Par suite,  $\mathbb{RP}^\infty$  est un espace d'Eilenberg-MacLane  $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ .

Dans le cas complexe, on a une fibration  $S^1 \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$  d'où  $\pi_2(\mathbb{CP}^\infty) = \pi_1(S^1)$  par la suite exacte longue en homotopie, donc  $\mathbb{CP}^\infty$  est un espace d'Eilenberge-MacLane  $K(\mathbb{Z}, 2)$ .

**Lemme. (Lemme d'extension)**

Soit  $(X, A)$  un *CW*-complexe relatif et une application continue  $f : A \rightarrow Y$  avec  $Y$  connexe par arcs. Montrer que  $f$  s'étend à une application continue  $F : X \rightarrow Y$  si  $\pi_{n-1}(Y) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $X/A$  possède au moins une cellule de dimension  $n$ .

**Exercice 21**

Retrouver grâce à cela que toute *CW*-paire avec  $A$  contractile est telle que  $X$  se rétracte sur  $A$ .

### 6.1.8.3 Approximation cellulaire

**Théorème. (*Approximation cellulaire des espaces topologiques*)**

Pour tout espace topologique  $X$ , il existe un complexe cellulaire  $X_{CW}$  et une équivalence faible d'homotopie  $w_X : X_{CW} \rightarrow X$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) L'idée est la même que pour obtenir une résolution projective d'un  $\mathbb{Z}$ -complexe de chaînes : on ajoute des cellules à chaque degré pour obtenir des isomorphismes de groupes.

Un peu plus précisément, l'idée est de raisonner par récurrence sur la dimension  $n \in \mathbb{N}$  et de créer un  $CW$ -complexe  $X_{CW}^{(n)}$  avec les mêmes groupes d'homotopie que  $X$  pour  $k \leq n$ . Pour ce faire, on considère la présentation de  $\pi_n(X)$  en générateurs et relations. Les générateurs permettent de définir les applications caractéristiques  $\varphi_n$  et les relations aux caractéristiques  $\varphi_{n+1}$ . À chaque étape, cette construction  $X_{CW}^{(n)} \rightarrow X$  est liée aux représentants des groupes d'homotopie dans  $X$ . ■

**Proposition. (*Naturalité homotopique de l'approximation cellulaire*)**

Pour tous espaces topologiques  $X, Y$ , il existe  $F(f) : X_{CW} \rightarrow Y_{CW}$  continue telle que  $w_T F(f) \sim f w_X$ , autrement dit telle le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_{CW} & \xrightarrow{w_X} & X \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Y_{CW} & \xrightarrow{w_Y} & Y \end{array}$$

commute homotopiquement.

▷ On applique la proposition du tiré en arrière cellulaire à  $Z = X_{CW}$ ,  $f \hat{=} w_Y$ . ■

Cette approximation cellulaire d'espaces topologiques vaut aussi pour les applications continues.

**Théorème. (*Approximation cellulaire d'applications*)**

Soient  $X, Y$  deux complexes cellulaires. Toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  est homotope à une application cellulaire.

⊗ (*Idée de la preuve.*) On utilise le lemme : si  $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  est une application entre  $CW$ -complexes telle que la dimension de  $A$  est inférieure à  $n$ ,  $X \setminus A$  est une cellule de dimension  $n$ , la dimension de  $Y$  est inférieure à  $m$  et  $Z \setminus Y$  est une cellule de dimension  $N \geq m$ . Alors  $f$  est homotope relativement à  $A$  à  $g : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  telle que  $g(X \setminus A)$  évite un point de  $Z \setminus Y$ . ■

**Corollaire. (*Approximation cellulaire d'applications entre paires*)**

Toute application continue de paire  $f : (X,A) \rightarrow (Y,B)$  entre paires cellulaires est homotope en tant qu'application de paire à une application cellulaire.

**Corollaire. (*n*-connexité des paires cellulaires)**

Soit  $(X,A)$  une paire cellulaire telle que  $X \setminus A$  ait seulement des cellules de dimension  $\geq n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(X,A)$  est  $n$ -connexe.

**Corollaire**

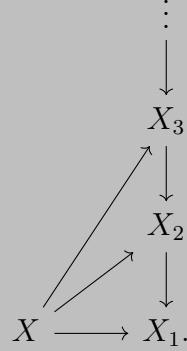
Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Alors la paire cellulaire  $(X,X^{(n-1)})$  est  $n$ -connexe et l'inclusion  $X^{(n-1)} \rightarrow X$  induit des isomorphismes  $\pi_k(X^{(n-1)}) \simeq \pi_k(X)$  pour tout entier naturel  $k < n$  et une surjection  $\pi_n(X^{(n-1)}) \twoheadrightarrow \pi_n(X)$ .

**Exercice 22 (Tour de Postnikov)**

1. Soit  $X$  un  $CW$ -complexe. Pour tout entier  $n \geq 1$ , montrer qu'il existe un  $CW$ -complexe  $X_n$  tel que  $X \subseteq X_n$  est un sous- $CW$ -complexe et qui satisfait pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \pi_k(X_n) \simeq \pi_k(X) \text{ pour } k \leq n \\ \pi_k(X_n) \simeq 0 \text{ pour } k > n. \end{cases}$$

2. Montrer qu'il existe des applications  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  qui rendent le diagramme commutatif :

**Théorème**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre complexes cellulaires simplement connexes. Si  $H_n(f)$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.

▷ On utilise simplement qu'un qis homologique induit une équivalence faible d'homotopie, et pour un  $CW$ -complexe, c'est la même chose. ■

**Exercice 23**

Démontrer le théorème précédent sur les *CW*-complexes simplement connexes quasi-isomorphes à l'aide du théorème de Hurewicz de la section suivante.

On peut aller plus loin :

**Théorème**

Si une application continue entre espaces simplement connexes induit un isomorphisme en homologie en tout rang  $< n \in \mathbb{N}$  et un épimorphisme en homologie en rang  $n$ , alors il en va de même en homotopie.

**Exercice 24**

1. Montrer grâce à l'exemple de  $S^2 \vee S^1$  que le théorème n'est pas vrai si l'on enlève l'hypothèse de simple connexité.
2. Modifier les hypothèses pour gérer ce cas.

Ce théorème est une réciproque partielle du théorème de Hurewicz :

**Propriété. (Hurewicz)**

Si une application continue entre espaces connexes par arcs induit un isomorphisme en homotopie en tout rang  $< n \in \mathbb{N}$  et un épimorphisme en homologie en rang  $n$ , alors il en va de même en homologie.

Enfin :

**Théorème**

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue telle que pour tout  $x \in X$ ,  $f^* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est un isomorphisme et que  $f_* : H_n(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\tilde{Y}; \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 0$ , alors  $f$  est une équivalence d'homotopie faible.

▷ L'isomorphisme  $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}[\pi_0(X)] \xrightarrow{\sim} H_0(Y) \simeq \mathbb{Z}[\pi_0(Y)]$  implique que  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  est une bijection. Ceci permet de se ramener à démontrer le résultat sur les composantes connexes par arcs. La condition sur  $\pi_1$  fait partie de l'énoncé. En passant aux revêtements universels, la longue suite exacte d'homotopie d'un revêtement (en vertu de théorème permet de se ramener à démontrer que  $f_* : \pi_*(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_*(\tilde{Y}, \tilde{f}(x))$  est un isomorphisme. Ce qui est exactement couvert par un théorème précédent. ■

### 6.1.9 Lien entre homotopie supérieure et homologie simpliciale

#### Définition-propriété. (*Morphisme de Hurewicz généralisé*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $f : S^n \rightarrow X$  une application continue. Elle induit une application en homologie  $H_n(f) : H_n(S^n) \rightarrow H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$ . D'autre part, on sait que  $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ . On peut alors définir de manière unique une application :

$$\begin{aligned}\pi_n(X) &\longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto H_n(f)(1)\end{aligned}$$

qui est un morphisme dit *morphisme de Hurewicz* si le contexte est clair.

▷ Il s'agit de raisonnements géométriques assez plaisants dont certains ont déjà été développés en homologie. ■

#### Théorème. (*Théorème de Hurewicz*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  un espace topologique. Si  $X$  est  $(n - 1)$ -connexe, alors :

1. l'homologie réduite en degré  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  est nulle :  $\tilde{H}_k(X) = 0$  ;
2. pour  $n = 1$ ,  $H_1(X) \simeq \pi_1(X)^{ab}$  par le morphisme de Hurewicz ;
3. dès que  $n \geq 2$ , le morphisme de Hurewicz induit un isomorphisme

$$\pi_n(X) \simeq H_n(X).$$

#### Corollaire. (*Théorème de Brouwer*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .

▷ Puisque la sphère de dimension  $n \neq 1$  est  $n - 1$ -connexe d'après le calcul de la petite homotopie des sphères et que  $H_n(S^n)$  par un calcul déjà fait en HOMOLOGIE. Le cas  $n = 1$  est bien connu et s'y rajoute.. ■

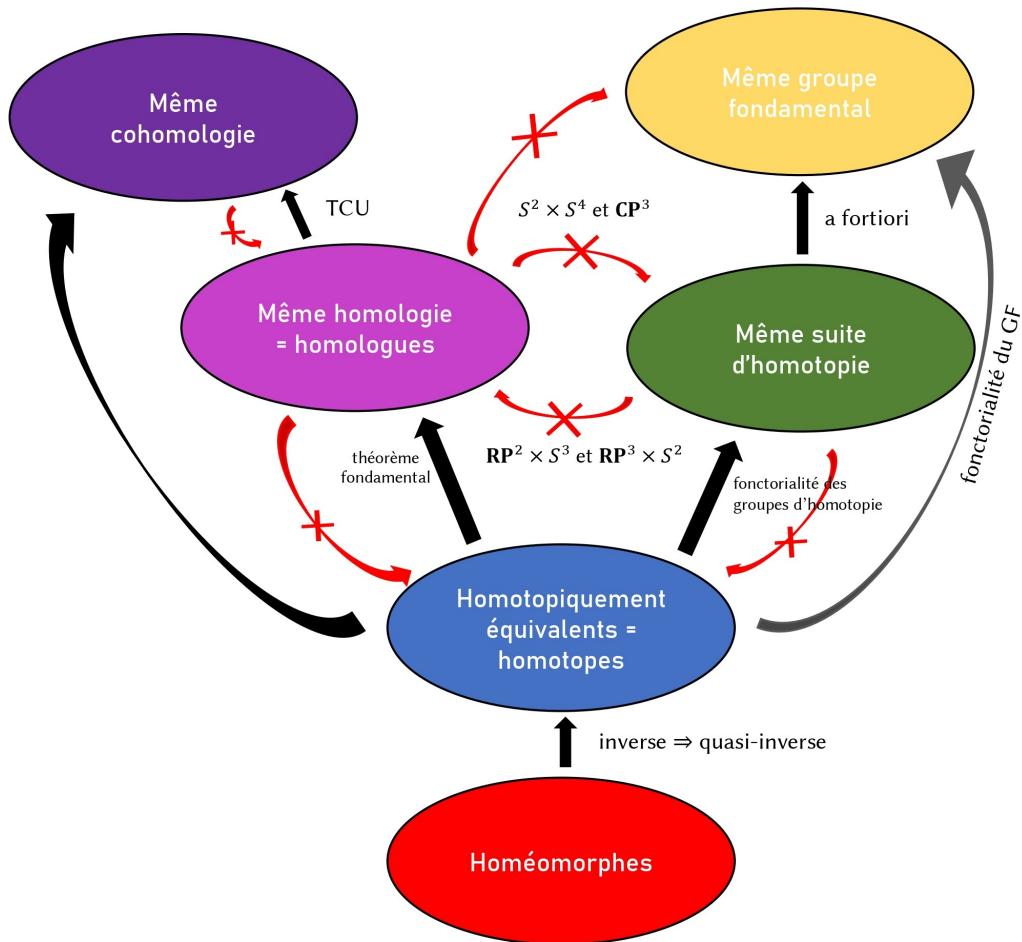


TABLE 6.2 : Toute petite carte heuristique comparant homotopie et homologie.. —

Cependant, l'homotopie faible est suffisante pour identifier les invariants homologiques :

**Théorème.** (*Faiblement homotopiquement équivalents  $\Rightarrow$  homologues*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence faible d'homotopie entre espaces topologiques. Alors c'est un quasi-isomorphisme en homologie, i.e. pour tout groupe abélien  $G$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_{*,n} : H_n(X; G) \rightarrow H_n(Y; G)$  est un isomorphisme.

*Remarque.* Notons que l'homotopie est indépendante des coefficients.

## 6.2 Homotopie des ensembles simpliciaux

**N**OUS venons de voir que les *CW*-complexes fournissaient une très large famille d'espaces topologiques : tout espace topologique est faiblement équivalent à un *CW*-complexe. Malheureusement, la donnée d'un *CW*-complexe n'est pas simple ; comment code-t-on cela dans un ordinateur ? L'idée ici sera de passer du modèle utilisant des disques ( $D^n, S^{n-1}$ ) comme brique de base à des  $n$ -simplexes géométriques standards ( $|\Delta^n|, \partial|\Delta^n|$ ). La donnée des recollements de cellules est alors beaucoup plus simple, car purement combinatoire. Ceci donne naissance à la notion d'ensembles simpliciaux. Ce n'est donc pas pour rien que ce domaine est souvent qualifié de *théorie d'homotopie combinatoire*. L'étudiant est chanceux : la théorie des ensembles simpliciaux admet un paradigme, un exemple sur lequel presque toutes les définitions et propriétés peuvent être lues facilement, il s'agit des simplexes standards.

### 6.2.1 Espaces topologiques triangulés

Les diverses notions de la topologie algébrique, comme les groupes d'homologie ou les groupes d'homotopie, s'avèrent en général difficiles à calculer. Comme toujours, toute information supplémentaire est la bienvenue pour simplifier de tels calculs. Dans cette section, nous considérerons les espaces topologiques munis d'une bonne décomposition en cellules qui auront la forme de points, d'intervalles, de triangles, de tétraèdres, etc. Plus précisément, en toute dimension, les briques de base sont les simplexes géométriques.

#### 6.2.1.1 Introduction : les complexes simpliciaux

On conseille au lecteur de reprendre les définitions de base relatives aux SIMPLEXES.

→ *Notation.* On utilise pour  $n \in \mathbb{N}$ , la notation combinatoire un peu modifiée  $[n] = [[0, n]]$ .

**VOC** Puisque tout  $n$ -simplexe,  $n \in \mathbb{N}$ , est homéomorphe au  $n$ -simplexe standard  $|\Delta^n|$ , on parlera souvent « du »  $n$ -simplexe pour désigner celui-ci.



Cependant, on essaiera tant que possible de les appeler simplexes géométriques afin de ne pas les confondre avec les *simplexes* simpliciaux définis dans la prochaine section.

Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

#### Définition. (*Polyèdre simplicial*)

Un *polyèdre simplicial*  $|\mathfrak{X}|$  de  $\mathbb{R}^N$  est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est vide ou une face de chacun d'eux.



Deux triangles isocèles dont les bases sont portées par la même droite, ne forment un complexe simplicial que si leurs bases sont identiques. (On ne peut avoir une sous-simplexe inclus dans un autre.)

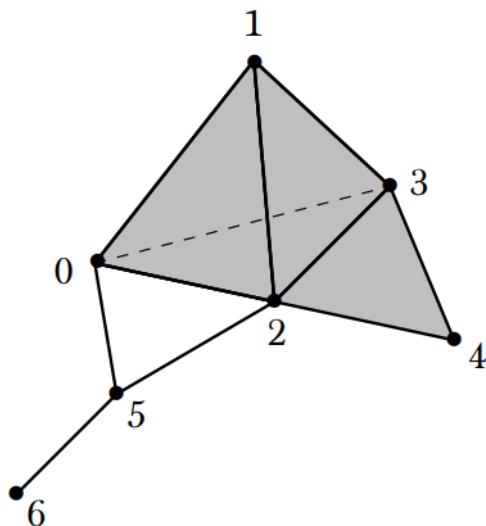


FIGURE 6.2.1 : *Un exemple de polyèdre simplicial.* —

### Définition. (*Polyèdre*)

Un *polyèdre* de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $n \in \mathbb{N}$  est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est vide une face de chacun d'eux et pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  l'intersection de deux simplexes de dimension  $d$  est une  $(d - 1)$ -face de chacun d'eux.

→ *Convention.* Par un léger abus de notation, on notera souvent un complexe simplicial simplement par  $\mathfrak{X}$ .

### Définition. (*Complexe simplicial*)

Un *complexe simplicial (abstrait)* est une paire  $(V, \mathfrak{X})$  où  $V$  est un ensemble et  $\mathfrak{X}$  est un ensemble de parties de  $V$  qui soit  $\subseteq$ -transitif, i.e. telles que pour tout  $F \subseteq \mathfrak{X}$ ,  $Z \subseteq F \implies Z \in \mathfrak{X}$ .

On impose parfois que  $\{v\} \in \mathfrak{X}$  pour tout  $v \in V$ .

**VOC** Les éléments de  $V$  sont appelés *sommets*; les éléments de  $\mathfrak{X}$  sont appelés *faces*.

Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des polyèdres simpliciaux sont représentées fidèlement par des données combinatoires simples. Les classes d'équivalence à homéomorphisme

près des polyèdres simpliciaux sont en bijection avec les complexes simpliciaux finis :

$$\boxed{\text{polyèdres simpliciaux finis} /_{\text{homéomorphisme cellulaire}} \simeq \text{complexes simpliciaux finis} /_{\text{bijections du } V}}.$$

Dans le cas du polyèdre simplicial représenté ci-dessus, le complexe simplicial fini correspondant est encodé par :  $\{0,1,2,3,4,5,6,01,02,03,05,12,13,23,24,25,56,012,013,023,123,234,0123\}$ .

### Exemples. (*Complexes et polyèdres simpliciaux*)

1. Tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  est un polyèdre simplicial. Le complexe simplicial associé à  $|\Delta^n|$  pour  $n \in \mathbb{N}$  est  $([n], \mathcal{P}([n]))$ , autrement dit la donnée combinatoire associée à  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  est formée de tous les sous-ensembles de  $\{v_0, \dots, v_n\}$ , ce qui correspond à l'ensemble de ses faces. On rappelle que c'est un modèle pour  $D^n$ .
2. Le complexe simplicial associé maintenant au polyèdre  $\partial|\Delta^n|$ , i.e. un  $n$ -simplexe géométrique amputé de sa face de dimension maximale, est  $([n], \mathcal{P}([n]) \setminus [n])$ . Il fournit quant à lui un modèle pour la sphère de dimension  $n - 1$   $S^{n-1}$ .
3. (*Cornets*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in [n]$ , le  $k$ -ième cornet de dimension  $n$  de  $|\Delta^n|$  est le complexe simplicial  $\Lambda_k^n$  obtenu à partir de  $\partial|\Delta^n|$  en retirant la face de dimension  $n - 1$  :  $0 \dots \hat{k} \dots n$  dite *opposée au sommet  $v_k$*  (avec la convention d'écriture donnée précédemment). Le complément de la face retirée composée des éléments de même dimension est appelée *facette*. Le complexe simplicial associé est donc  $([n], \mathcal{P}([n]) \setminus \{[n], [n] \setminus \{k\}\})$ .

Dans le cas  $n = 3$ , on a un tétraèdre vide dont on a retiré une face, ustensile parfait pour y stocker des frites.

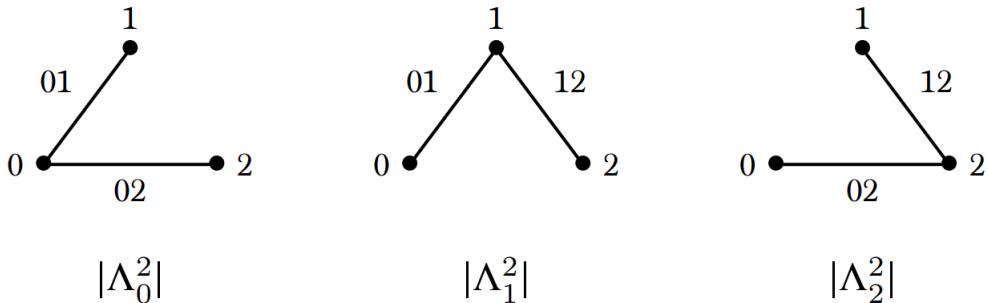


FIGURE 6.2.2 : *Cornets*. —  
Exemples en dimension 2

### Définition. (*n-squelette d'un complexe simplicial*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $n$ -squelette d'un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  est le complexe simplicial  $\mathfrak{X}^{(n)}$  formé des éléments de  $\mathfrak{X}$  de cardinal au plus  $n + 1$ .

**Remarque importante.** Cependant, la notion de complexe simplicial permet d'envisager des « polyèdres simpliciaux de dimension infinie ».

### Définition. (*Réalisation géométrique d'un complexe simplicial*)

La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  est la colimite  $|\mathfrak{X}| = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} |\mathfrak{X}^{(n)}|$  munie de la topologie colimite et définie dans le cas fini sur chaque terme squelettique en  $n \in \mathbb{N}$  par le pushout

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n| & \xrightarrow{\varphi_n} & |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n| & \xrightarrow{\Phi_n} & |\mathfrak{X}^{(n)}| \end{array}$$

i.e.  $|\mathfrak{X}^{(n)}| := |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \sqcup_{\mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n|} \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n|$  où l'on considère l'injection canonique à gauche,  $\mathfrak{X}_n = \{F \in \mathfrak{X} \mid \operatorname{card}(F) = n+1\}$  et  $\varphi_n$  sur  $\{x_0, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n \rangle$  est définie par  $\Phi_{n-1}$  sur  $\{x_0, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \hat{v_j}, \dots, v_n \rangle$  (phrase à méditer, mais licite et visuelle). Pour  $n = 0$  (mais on peut l'en déduire<sup>a</sup> si l'on est vraiment fainéant),  $|X^{(0)}|$  est l'ensemble des sommets  $V$  muni de la topologie discrète.

<sup>a</sup> En effet,  $|\Delta^0|$  est le singleton standard,  $\mathfrak{X}_0 = V$  et  $|X^{(-1)}| := \emptyset$ , d'où  $|\mathfrak{X}^{(0)}| = \emptyset \sqcup_{\emptyset} V \simeq V$ .

*Remarque.*  $\mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{X}_0 \cup \dots \cup \mathfrak{X}_n$ .

### Définition. (*PL-sphère*)

Une *PL-sphère* (pour *piecewise-linear*) ou *sphère linéaire par morceaux* est un complexe simplicial dont la réalisation géométrique est homéomorphe à une sphère. Ceci inclut les points et les cercles.

### Exemples. (*PL-sphères*)

1. Le complexe simplicial correspondant à  $|\partial\Delta^k|$  pour  $k \in \mathbb{N}, k \neq 1$  est une *PL-sphère*, car sa réalisation géométrique est  $\partial\Delta^k \simeq S^{k-1}$  pour  $k \geq 2$  et à un point pour  $k = 0$ . Pour  $k = 1$ , un segment n'est pas homéomorphe à aucune sphère, mais homotopiquement équivalent à un point.
2. Les polyèdres sont des *PL-sphères*.

### Fait. (*Complexe simplicial $\Rightarrow$ complexe cellulaire*)

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial est un *CW-complexe*.

En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\Delta^n| \simeq D^n$  et  $\partial|\Delta^n| \simeq S^{n-1}$ . De plus, les applications caractéristiques peuvent se transporter sur les disques et les sphères par cette identification et on utilise la caractérisation fondamentale des *CW-complexes séparés*.

Réiproquement :

### Théorème. (*Théorème d'approximation simpliciale*)

Tout *CW-complexe* est homotopiquement équivalent à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial, *i.e.* pour tout *CW-complexe*  $X$ , il existe un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  tel que  $X \simeq |\mathfrak{X}|$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) La définition de la réalisation géométrique donnée ci-dessus est proche de celle de *CW-complexes*. Il s'agit donc d'écrire le recollement des cellules d'un *CW-complexe* à la manière plus restrictive des complexes simpliciaux. Ceci se fait comme toujours par récurrence sur la dimension du squelette. ■

**Mnémonik :** les deux notions de *CW-complexes* et de complexes simpliciaux sont donc homotopiquement équivalentes, ce qui est intéressant.

### Exercice 25

Donner un *CW-complexe* qui n'est pas homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial.

### Corollaire. (*Whitehead simplicial*)

Tout espace topologique est faiblement homotopiquement équivalent à un complexe simplicial.

#### 6.2.1.2 Notion abstraite de triangulation

### Définition. (*Triangulation*)

Une *triangulation* d'un espace topologique  $X$  est un complexe simplicial  $X$  et un homéomorphisme  $X \simeq |\mathfrak{X}|$ .

On dit qu'un espace  $X$  est *triangulable* s'il admet une triangulation. Le choix d'une triangulation permet de rendre un espace *triangulé*.

### Reformulation pratique. (*Triangulation d'un ensemble*)

Une triangulation d'un ensemble  $X$  est une famille d'homéomorphismes sur leurs images  $(\varphi_i)_{i \in I}$  définis chacun sur un simplexe et à valeurs dans  $X$ , *i.e.*  $\varphi_i : \Delta \rightarrow \varphi_i(\Delta) \subseteq X$ , de sorte que :

- ★ pour tous  $i, j \in I$ ,  $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta')$  est soit vide, soit une face commune aux deux simplexes ;
- ★ la réunion des  $\varphi_i(\Delta^{n_i})$ , dit *simplexes*  $\sigma$  de la triangulation, recouvre  $X$  ;

★ tout compact de  $X$  coupe un nombre fini de simplexes de la triangulation.  
En particulier, les intérieurs des simplexes d'une triangulation sont disjoints.

### Exemples. (*Triangulation des espaces topologiques*)

1. Tout polyèdre simplicial est trivialement triangulable et triangulé par l'identité, car il est par construction la réalisation du complexe simplicial associé.
2. Tout  $CW$ -complexe est homotopiquement à un espace triangulable, en vertu du théorème d'approximation simpliciale.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Tout  $n$ -simplexe amputé de sa face maximale fournit un modèle de triangulation pour la sphère de dimension  $n - 1$ .
4. D'après un théorème dû à WHITNEY, toute variété différentiable est triangulable, chouette.

Cette définition combinatoirement simple a un principal écueil, elle est très rigide : le nombre de simplexes pour décomposer un espace est loin d'être optimal. En effet, deux faces distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets et les sommets d'une face sont distincts.

### Contre-exemple. (*Non-triangulation d'un triangulable*)

Pour le cercle, qui est clairement triangulable comme le montre le diagramme ci-dessous, les restrictions dans la définition de triangulation font que l'on ne peut pas l'écrire comme comme deux segments joints aux deux bouts ou comme un seul segment à sommets confondus. Il faut donc au moins trois segments pour trianguler le cercle.

En effet, avec deux segments, l'intersection des segments est un double point qui n'est donc pas une face mais une réunion de face, râté. Dans le cas d'un unique segment, l'homéomorphisme de triangulation n'est pas injective, ce qui est problématique pour une bijection.

De même, un ruban de Möbius, un tore, une bouteille de Klein ou un plan projectif n'est pas triangulable simplement en coupant en deux le diagramme carré qui les définit. □

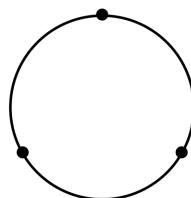


FIGURE 6.2.3 : *Triangulation du cercle*. —

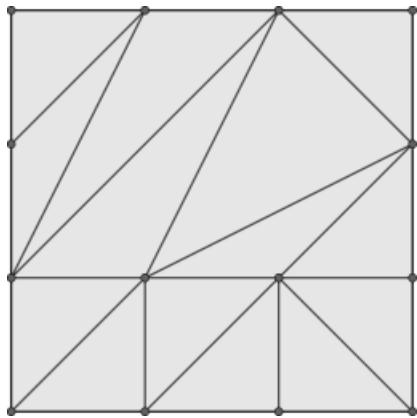
On peut trianguler  $S^1$  par trois sommets et trois arêtes, soit 6 simplexes au total. La triangulation est de dimension 1. On a bien alors  $|\partial\Delta^2| \simeq S^1$ .

**Exercice 26 (Triangulation minimale du tore)**

On sait d'après le cours de topologie algébrique que le tore ne peut être triangulé qu'avec un minimum de 7 sommets, 21 arêtes et 14 triangles. Exhiber une triangulation respectant exactement ces conditions.

▷ **Éléments de réponse.**

Le diagramme sur le carré fondamental du tore :



devrait convenir.

**Heuristique**

Cette question est loin d'être gratuite, par exemple lorsque l'on veut calculer les groupes d'homologie (cellulaire) d'un espace topologique, car la dimension des espaces vectoriels en jeu est égale aux nombres de simplexes de la triangulation. Par exemple, dans les méthodes actuelles de reconnaissance des formes des neurones utilisant des outils homologiques, la taille de ces espaces est de l'ordre de 30000.

**Définition. (*Étoile d'un simplexe dans une triangulation*)**

L'*étoile* d'un simplexe  $\sigma$  d'une triangulation d'un espace topologique est la réunion notée  $\sigma^*$  ou  $\text{star}(\sigma)$  de tous les simplexes de la triangulation contenant  $\sigma$ .

**Définition. (*Link*)**

Le *link* d'un simplexe  $\sigma$  d'une triangulation est la réunion notée  $\text{link}(\sigma)$  des simplexes  $\sigma'$  de l'étoile de  $\sigma$  tels que  $\sigma'$  est une face d'un simplexe de  $\text{star}(\sigma)$  et  $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ .

**Définition. (*Triangulation combinatoire*)**

On dit qu'une triangulation d'un espace est *combinatoire* si le link de chacun de ses simplexes est une *PL*-sphère.

**Proposition. (*Lien étoile-link*)**

Le link d'un simplexe est la frontière de son étoile.

▷ Simple reformulation de la définition de l'étoile, en connaissant la frontière d'un simplexe donné, ce qui est facile. ■

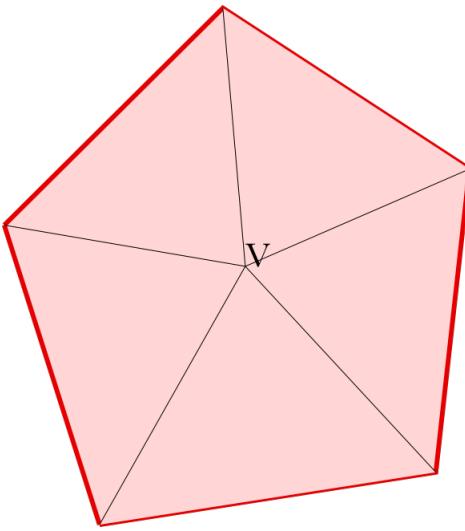


FIGURE 6.2.4 : Étoile et link d'un sommet d'une triangulation. —

On considère une triangulation du pentagone. Soit  $V$  le sommet central de cette triangulation.  
En rose, l'étoile du sommet  $V$ . En rouge, le link de  $V$ .

Essayons donc de trouver une notion plus souple et générale. Pour cela, on va chercher à encoder d'abord la manière dont les différents simplexes se recollent le long de leurs faces.

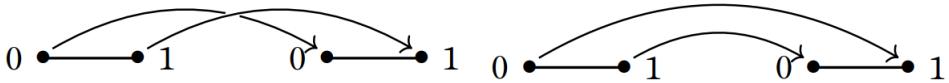
### 6.2.1.3 Applications simpliciales

La définition suivante est l'équivalent des applications cellulaires pour les  $CW$ -complexes.

**Définition. (*Application simpliciale*)**

Soient  $(V, \mathfrak{X})$  et  $(W, \mathfrak{Y})$  deux complexes simpliciaux. Une application  $f : V \rightarrow W$  est une *application simpliciale* si l'image d'une face est une face, *i.e.* si  $f(F) \in \mathfrak{Y}$  pour tout  $F \in \mathfrak{X}$ . Une telle donnée induit une unique application continue  $|\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$  par interpolation linéaire, c'est-à-dire en utilisant les coordonnées barycentriques.

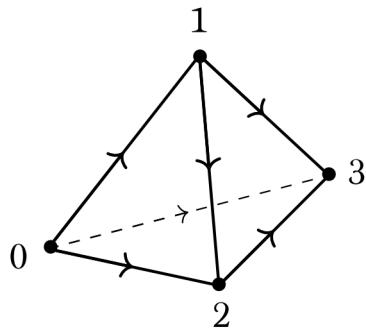
Comme l'exemple ci-dessus le montre, le nombre d'applications simpliciales n'est pas optimale : d'un point de vue topologique, il n'est pas utile d'avoir autant d'applications. Soyons rusés et imposons une condition supplémentaire.

FIGURE 6.2.5 : *Applications simpliciales.* —

Les deux applications simpliciales bijectives entre deux 1-simplexes sont les précédentes. Cependant, grâce à la définition donnée ci-dessous, il n'existe alors plus qu'une application simpliciale bijective entre deux 1-simplexes ordonnés.

### Définition. (*Complexe simplicial ordonné*)

Un *complexe simplicial ordonné* est un complexe simplicial muni d'un ordre total sur son ensemble de sommets.

FIGURE 6.2.6 : *Tétraèdre ordonné.* —

En général, toute numérotation des sommets  $V \simeq [\![1, \text{card}(V)]\!]$  fournit une structure ordonnée sur le complexe simplicial considéré.

### Définition. (*Application simpliciale entre complexes ordonnés*)

Soient  $(V, \leqslant, \mathfrak{X})$  et  $(W, \preccurlyeq, \mathfrak{Y})$  deux complexes simpliciaux. Une application  $f : V \rightarrow W$  est une *application simpliciale ordonnée* si c'est une application simpliciale qui respecte l'ordre des complexes, i.e. dès que  $x \leqslant y$ ,  $f(x) \preccurlyeq f(y)$ .

Cette donnée supplémentaire induit une orientation pour toutes les faces d'un complexe simplicial.

Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont caractérisées par l'application ensembliste sous-jacente croissante entre les ensembles ordonnés de sommets.

**Définition-propriété. (*Coface*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Il y a par un raisonnement combinatoire immédiat  $n + 1$  applications simpliciales injectives depuis un  $(n - 1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné. On traite sans perte de généralité le cas des simplexes géométriques standards  $|\Delta^n|$ . Les  $n + 1$  applications  $\delta_i : [n - 1] \rightarrow [n]$  pour  $i \in [n]$ , sont les injections qui ne prennent pas la valeur  $i$  :

$$\delta_i(k) = \begin{cases} k & \text{pour } k < i \\ k + 1 & \text{pour } k \geq i. \end{cases}$$

Ces applications sont appelées les *cofaces* et, par léger abus de notation, on note encore  $\delta_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n-1}|$  et  $|\Delta^n|$ .

→ *Convention.* Comme le contexte est clair, nous n'utilisons pas d'indice  $n$  dans la notation des cofaces, ce qui permet d'alléger grandement les écritures.

**Lemme. (*Relation fondamentale des cofaces*)**

On considère le  $n$ -simplexe pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Pour tous  $i < j$ ,  $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$ .

▷ Successivement :

$$0 \xrightarrow{\delta_{j-1}} 0 \xrightarrow{\delta_i} 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$i-1 \longrightarrow i-1 \longrightarrow i-1$$

$$\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & i \\ & & \searrow \\ i+1 & \longrightarrow & i+1 \\ & & \searrow \\ \vdots & & i+2 \end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{array}{ccc} j-2 & \longrightarrow & j-2 \\ & & \searrow \\ j-1 & & j-1 \\ & \swarrow & \\ \vdots & & j \\ & & \searrow \\ \vdots & & j+1 \end{array}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

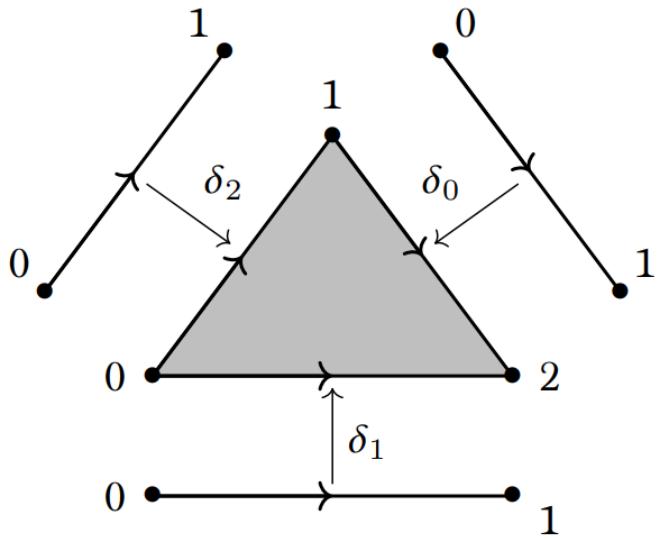
$$n \qquad \vdots$$

$$n+1 \qquad \vdots$$

$$n+2$$

pour tous  $i, j \in [n]$ . Et ce sont bien  $i$  et  $j$  que l'on a laissé de côté. ■

Dualemment, il y a donc  $n+1$  manières de recoller un  $n$ -simplexe géométrique ordonné sur un  $(n-1)$ -simplexe géométrique ordonné. Utilisons maintenant ces propriétés pour décrire un complexe simplicial ordonné  $\mathfrak{X}$  comme un recollement de simplexes géométriques ordonnés.

FIGURE 6.2.7 : *Cofaces du 1-simplexe sur le 2-simplexe.* —

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $X_n$  l'ensemble des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés qui composent  $X$ . Le complexe simplicial ordonné  $X$  est alors complètement caractérisée par la donnée des recollements des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés sur les  $(n-1)$ -simplexes géométriques ordonnés, ce qui revient à se donner  $n+1$  applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ , avec  $0 \leq i \leq n$  entier, vérifiant les relations duales de celles des cofaces. Ceci induit la définition suivante.

#### 6.2.1.4 $\Delta$ -complexes

##### Définition. ( $\Delta$ -complexe)

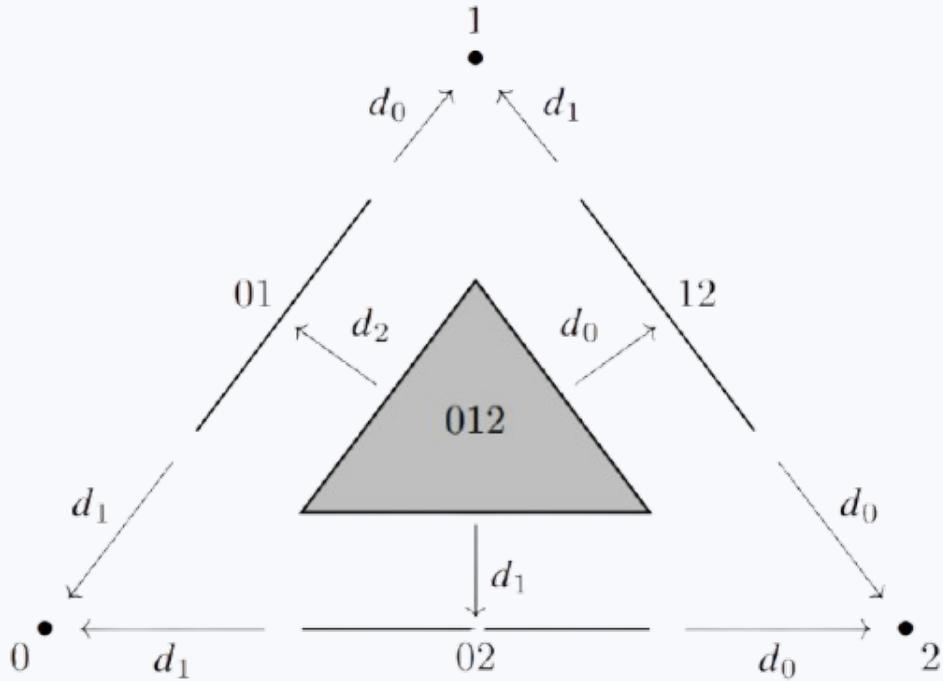
Un  $\Delta$ -complexe est la donnée d'une collection  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensembles munis en tout  $n \in \mathbb{N}^*$  d'applications dites *faces*  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  vérifiant les relations  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  dès que  $i < j$ .

##### Exemple fondamental. ( $\Delta$ -complexe associé aux simplexes géométriques)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $\Delta$ -complexe associé au  $n$ -simplexe géométrique ordonné standard correspond à la donnée :

$$X_0 = [n], X_1 = \{01, \dots, (n-1)n\}, \dots, X_n = \{012\dots n\}, X_{n+1} = \emptyset$$

munie des applications  $d_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k$  pour  $i_j$  des sommets du  $n$ -simplexe,  $j \in [n]$ .

FIGURE A. *Delta-complexe.* —**Exercice 27 (Lien face-coface)**

Voir que  $d_j \delta_j = id$ , mais que l'inverse est faux.

Réiproquement, l'espace topologique cellulaire ainsi encodé combinatoirement s'obtient via la construction suivante.

**Définition. (*Réalisation géométrique d'un  $\Delta$ -complexe*)**

Soit  $\mathfrak{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un  $\Delta$ -complexe. Sa *réalisation géométrique* est

$$|\mathfrak{X}|_\Delta = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n \times |\Delta^n|}{\sim}$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence définie par  $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in X_n$ , pour tout  $y \in |\Delta^{n-1}|$ ,  $0 \leq i \leq n$  entier.

**Fait**

Tout complexe simplicial ordonné induit un  $\Delta$ -complexe dont la réalisation géométrique lui est homéomorphe  $|\mathfrak{X}|_\Delta \simeq |\mathfrak{X}|$ .

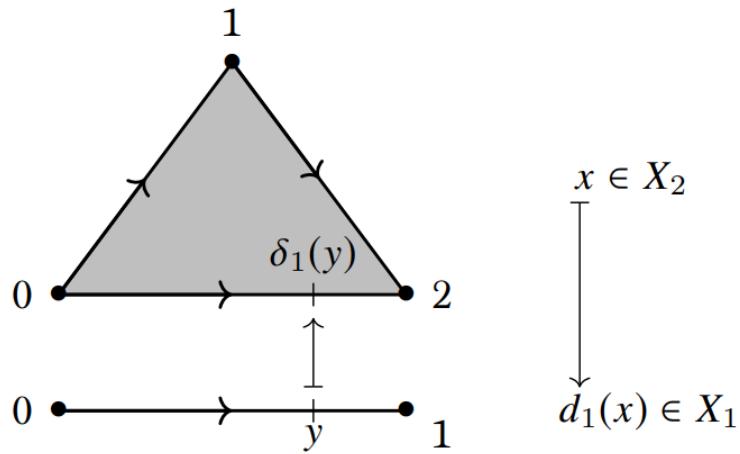


FIGURE 6.2.9 : Réalisation géométrique d'un simplexe. —

Attention par contre, la réalisation géométrique d'un  $\Delta$ -complexe  $|\mathfrak{X}|$  ne forme pas nécessairement un complexe simplicial pour la donnée combinatoire  $|\mathfrak{X}|$  comme le montre les exemples qui suivent. Par contre, il existe toujours<sup>a</sup> un complexe simplicial homéomorphe à la réalisation géométrique  $|\mathfrak{X}|_\Delta$ .

<sup>a</sup> Quitte pour cela à considérer des subdivisions barycentriques.

Ce qu'il faut en retenir, c'est que la notion combinatoire simple de  $\Delta$ -complexe est plus riche et souple que celle de complexe simplicial : par exemple, on peut utiliser moins de cellules qu'auparavant, comme le montre les exemples suivants.

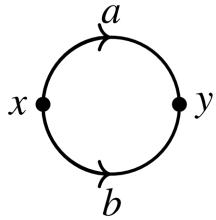
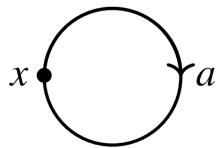
### Exemples. ( $\Delta$ -complexes)

- Le  $\Delta$ -complexe  $X_0 = \{x,y\}$ ,  $X_1 = \{a,b\}$ ,  $X_2 = \emptyset$  et de même au-delà, avec  $d_1(a) = d_1(b) = x$ ,  $d_0(a) = d_0(b) = y$  permet de réaliser le cercle comme  $\Delta$ -complexe comme recollement de deux segments.

Mieux, le  $\Delta$ -complexe  $X_0 = \{x\}$ ,  $X_1 = \{a\}$ ,  $X_2 = \emptyset$  et de même au-delà, avec  $d_0(a) = d_1(a) = x$ , permet de réaliser le cercle comme  $\Delta$ -complexe comme recollement d'un seul segment sur ses deux extrémités.

### Définition. (*Morphisme de $\Delta$ -complexes*)

Soient  $\mathfrak{X} = ((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, d)$  et  $\mathfrak{Y} = ((Y_n)_{n \in \mathbb{N}}, d')$  deux  $\Delta$ -complexes en notant  $d$  les collections des faces indifféremment, sans problème. Un *morphisme de  $\Delta$ -complexes* est une collection

FIGURE 6.2.10 : Delta-complexe sur  $S^1$  à deux arêtes. —FIGURE 6.2.11 : Delta-complexe maximal sur  $S^1$  à une seule arête. —

d'applications  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{f_n} & Y_n \\ d_i \downarrow & & \downarrow d'_i \\ X_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & Y_{n-1} \end{array}$$

commute pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $i \in [n]$ .

Deux questions se posent alors : comment obtenir la définition de  $\Delta$ -complexe de manière plus simple et comment définir la notion d'application entre  $\Delta$ -complexes ? Les réponses à ces deux questions viennent en utilisant la théorie des catégories. Les éléments d'un  $\Delta$ -complexe sont indiqués par les entiers naturels, soit, de manière équivalente, par les ensembles ordonnés  $[n]$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et les applications entre deux éléments consécutifs correspondent aux applications strictement croissantes « élémentaires ».

### Fait. (*Catégorie des $\Delta$ -complexes*)

La classe des  $\Delta$ -complexes avec pour morphismes les morphismes de  $\Delta$ -complexes forme une catégorie, notée  $\Delta Cx$ .

## 6.2.2 Construction des ensembles simpliciaux

### 6.2.2.1 Catégories permettant de construire celle des ensemble simpliciaux

#### Définition. (*Catégorie $\overline{\Delta}$* )

La *catégorie  $\overline{\Delta}$*  ou *catégorie simpliciale réduite* a pour objets les ensembles  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$  et pour morphismes entre  $[n], [m]$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , les applications strictement croissantes, i.e.  $\text{Hom}_{\overline{\Delta}}([n], [m]) = \{\varphi : [n] \rightarrow [m] \text{ strictement } \nearrow\}$ .

*Remarque.* Le notation  $\overline{\Delta}$  utilisée pour représenter cette catégorie vient du fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales strictement croissantes

#### Proposition

La catégorie des  $\Delta$ -complexes est une catégorie de préfaisceaux, nommément  $\Delta Cx \cong \text{Fun}(\overline{\Delta}^{\text{op}}, \text{Ens})$ .

Autrement dit, tout  $\Delta$ -complexe est un préfaisceau sur  $\overline{\Delta}$ .

▷ Ce n'est pas si évident. On remarque qu'une coface est un morphisme de la catégorie  $\overline{\Delta}$ . En fait,  $\overline{\Delta}$  admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces  $\delta_i$  vérifiant les relations de cofaces. En particulier, toute application strictement croissante  $\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$  où  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ . Or

$$\mathfrak{X} : \overline{\Delta}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ens}$$

$$\begin{array}{ccc} [n] & \longmapsto & X_n = \mathfrak{X}([n]) \in \text{Ens} \\ \delta_i \downarrow & & \uparrow = \mathfrak{X}(\delta_i^{\text{op}}) = d_i \\ [n+1] & \longmapsto & X_{n+1} = \mathfrak{X}([n+1]) \in \text{Ens} \end{array}$$

dans ce cas particulier. ■

Attention ! Il existe d'autres applications simpliciales que les cofaces.

#### Définition-propriété. (*Codégénérescence*)

Considérons les applications simpliciales surjectives depuis un  $(n+1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné ; elles consistent à écraser un  $(n+1)$ -simplexe géométrique sur une de ses faces de dimension  $n$ . Comme précédemment, nous allons décrire le cas des simplexes géométriques standards ordonnés. Il y a  $n+1$  telles applications simpliciales, ce sont les surjections  $\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier

qui envoient  $i$  et  $i + 1$  sur  $i$  :

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k - 1 & \text{pour } k > i. \end{cases}$$

En images :

$$\Delta^{n+1} \xrightarrow{\sigma_i} \Delta^n$$

$$0 \longrightarrow 0$$

$$1 \longrightarrow 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$i - 1 \longrightarrow i - 1$$

$$\begin{array}{ccc} i & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & i \\ & \searrow & \\ i + 1 & & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & n - 1 \\ & \nearrow & \\ n & & n \\ & \nearrow & \\ n + 1 & & \vdots \end{array}$$

et ces applications sont appelées les codégénérescences et, par léger abus de notation, on note encore  $\sigma_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n+1}|$  et  $|\Delta^n|$ .

Parallèlement aux relations de cofaces :

**Lemme. (*Relation fondamentale des codégénérescences*)**

On considère le  $n + 1$ -simplexe pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Pour tous  $i \leq j$ ,  $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$ .

Est-ce que ces applications simpliciales entre complexes simpliciaux peuvent être écrites au niveau des  $\Delta$ -complexes associés ? La réponse est négative. En effet, le  $\Delta$ -complexe associé à  $|\Delta^{n+1}|$  possède un ensemble non-trivial en dimension  $n + 1$  alors que le  $\Delta$ -complexe associé à

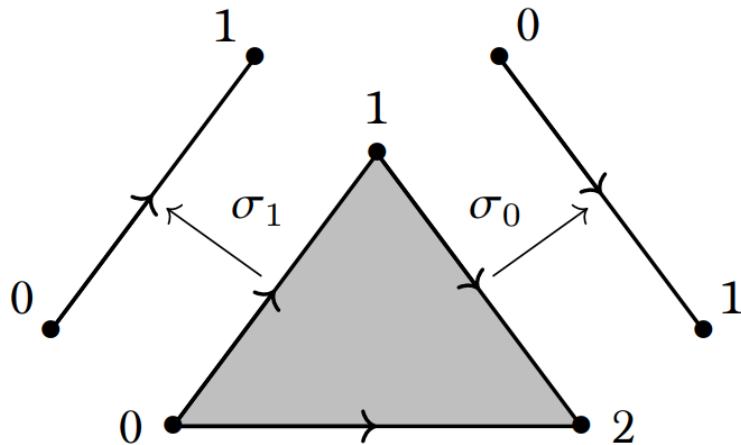


FIGURE 6.2.12 : Codégénérences du 2-simplexe sur le 1-simplexe. —

$|\Delta^n|$  admet des ensembles vides à partir de la dimension  $n$ . Il est alors impossible de définir un morphisme du premier vers le second.

Il nous faut donc introduire une notion plus riche que celle de  $\Delta$ -complexe. Pour cela, nous allons considérer une nouvelle catégorie qui a les mêmes objets que  $\overline{\Delta}$  mais qui admet toutes les applications croissantes comme morphismes.

### Définition. (*Catégorie des simplexes*)

La *catégorie des simplexes* ou *catégorie simpliciale* notée  $\Delta$  a pour objets les ensembles  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  pour  $n$  parcourant  $\mathbb{N}$  et pour morphismes entre  $[n], [m]$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , les applications croissantes, i.e.  $\text{Hom}_\Delta([n], [m]) = \{\varphi : [n] \rightarrow [m] \nearrow\}$ .

### Fait

La catégorie  $\Delta$  contient pour morphismes les cofaces et les codégénérences.

*Remarque.* Le nom donné à cette catégorie se justifie par le fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales croissantes.

### Définition. (*Ensemble simpliciaux*)

La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux (ensemblistes) sur  $\Delta$ , nommément  $\Delta\text{Ens} \cong \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ .

Autrement dit, un *ensemble simplicial* est un préfaisceau sur  $\Delta$ .

→ *Notation.* On note souvent, quoique pas dans ce cours pour alléger la présentation,  $X_\bullet$  un ensemble simplicial.

La factorisation d'une application ensembliste comme composée d'une surjection et d'une injection se raffine de la manière suivante avec les cofaces et les codégénérescences.

**Proposition. (*Forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes*)**

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Toute application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$$

avec des entiers  $i_1 \leq \dots \leq i_r$  et  $j_1 < \dots < j_s$  entre 0 et  $m$  et de plus  $m = n - s + r$ .

▷ En posant  $p = |\text{Im}(\varphi)| - 1$ ,  $\varphi$  se décompose en  $[n] \xrightarrow{\pi} [p] \hookrightarrow [m]$  où  $[p] \simeq \text{Im}(\varphi)$  par l'unique bijection qui préserve l'ordre. Si l'on note  $[m] = \text{Im}(\varphi) \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$  avec  $r = m - p$  et  $i_1 \leq \dots \leq i_r$ , alors  $\iota = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$ . Soient aussi  $q_0, \dots, q_p$  les plus grands antécédents de  $0, \dots, p$  respectivement ; si l'on note maintenant  $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$  avec  $s = n - p$  et  $j_1 < \dots < j_s$ , avec  $\pi : \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$ . On a bien factorisé  $\varphi$  sous la forme voulue, car  $\varphi = \iota\pi$ .

Soit  $\varphi = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t} \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$  une autre décomposition de  $\varphi$  en cofaces et dégénérescences avec  $k_1 \leq \dots \leq k_t$ ,  $l_1, \dots, l_u$  et  $m - n = t - u$ . Déjà,  $|\text{Im}(\varphi)| - 1 = p = n - s = m - r = n - u = m - t$ , d'où  $u = s$  et  $t = r$ . De plus, puisque  $[p] \rightarrow [m]$  envoie  $0 < \dots < p$  sur l'image de  $\varphi$  de façon ordonnée,  $\iota = \iota'$ , d'où par définition de  $\iota$ ,  $(i_1, \dots, i_r)(k_1, \dots, k_r)$ . De plus,  $\iota\pi = \iota'\pi'$  donne  $\pi = \pi'$ , car  $\iota$  est injective, d'où par définition de  $\pi$ ,  $(j_1, \dots, j_s) = (l_1, \dots, l_s)$ . ■

**Lemme. (*Relations entre cofaces et codégénérescences*)**

Avec les entiers évidents, les cofaces et les codégénérescences vérifient les relations suivantes :

- ★ les relations de cofaces ;
- ★ les relations de codégénérescences ;

$$\star \text{ (relations cosimpliciales)} \quad \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ ou } j+1 \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{si } i > j+1. \end{cases}$$

On note  $(\star)$  l'ensemble de toutes ces relations.

▷ Les vérifications sont automatiques. ■

**Théorème. (*Présentation de la catégorie des simplexes*)**

La catégorie  $\Delta$  admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces et les codégénérescences et dont les relations sont  $(\star)$ .

Autrement dit,  $\Delta$  est équivalente à la catégorie libre au sens des carquois sur  $\{\delta_i, \sigma_i, i\}$  quotientée par l'idéal engendré par  $(\star)$ .

▷ Notons  $\mathcal{C}$  cette catégorie explicite. Par le lemme précédent, le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \Delta$  est bien défini par le lemme précédent. Pour montrer qu'il est plein et fidèle, utilisons des bases de Gröbner.

Interprétons les relations  $(\star)$  comme des règles de réécriture lues de la gauche vers la droite. Ce système de réécriture est terminal. On vérifie que l'on a confluence des relations en arité 3, ce qui est le cas, et que le lecteur peut vérifier au cas par cas si le cœur lui en dit. D'après le lemme du diamant, il existe une unique forme pour tout élément *i.e.* mot en  $\delta_i, \sigma_i$  sans terme préférentiellement à gauche. Les relations  $(\star)$  sont donc complètes, d'où le résultat. ■

Cette définition des ensembles simpliciaux est à la fois conceptuelle et compacte. Néanmoins, en pratique, on utilise souvent la description détaillée qui suit.

### Reformulation pratique. (*Ensemble simplicial*)

La donnée d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée d'une collection d'ensembles  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  munis d'applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  et  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier, appelées respectivement *faces* et *dégénérescences*, qui vérifient les relations duales de la catégorie des simplexes, à savoir :

- ★ (*relation de faces*)  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  pour  $i < j$  ;
- ★ (*relation de dégénérescences*)  $s_i s_j = s_{j+1} s_i$  pour  $i \leq j$  ;

$$\star (\text{relations entre faces et dégénérescences}) d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ id & \text{si } i = j \text{ ou } j + 1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1. \end{cases}$$

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux équivaut à la donnée d'une collection d'applications ensemblistes  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  qui commutent aux faces et aux dégénérescences.

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème précédent. Pour cela, on note les ensembles images d'un foncteur  $\mathfrak{X} : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  par  $X_n = X[n]$  et les images des opposés des cofaces et des codégénérescences par  $d_i = \mathfrak{X}(d_i^{\text{op}})$  et  $s_i = \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})$  respectivement. ■

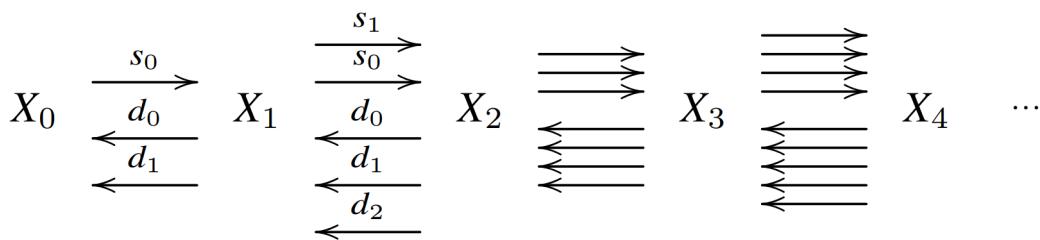


FIGURE 6.2.13 : *Représentation des ensembles simpliciaux.* —

*Remarque.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $d_0 s_0 = id_X$  avec  $X_n \xrightarrow{s_0} X_{n+1}$  et  $d_0 : X_{n+1} \xrightarrow{d_0} X_n$ .

**Exemples. (*Ensembles simpliciaux*)**

1. (*Toy-model du simplexe standard*) Essayons d'associer un ensemble simplicial au  $n$ -simplexe géométrique standard  $\Delta^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pour que les applications dégénérences existent, il faut ajouter des éléments. On considère alors toutes les suites croissantes d'éléments de  $[n]$  :  $X_0 = \{0, \dots, n\}$ ,  $X_1 = \{00, 01, \dots, (n-1)n, nn\}$ , et plus généralement  $X_k = \{i_0 \dots i_k \mid 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$ . On le munit des applications faces et dégénérences :  $d_j(i_0 \dots i_j \dots i_m) = i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_m$  et  $s_j(i_0 \dots i_j \dots i_m) = i_0 \dots i_j i_j \dots i_m$ . On appelle  $n$ -simplexe simplicial standard, et l'on note encore  $\Delta^n$ , cet ensemble simplicial fondamental.
- Remarquons que  $\Delta_m^n \simeq \text{Hom}_\Delta([m], [n])$ .
2. (*Ensemble simplicial d'un simplexe évidé*) L'ensemble simplicial noté  $\partial\Delta^n$  associé au complexe  $\partial|\Delta^n|$  admet pour  $d$ -simplexes les éléments de la forme  $i_0 \dots i_0 \dots i_m \dots i_m$  formé de  $d+1$  éléments avec  $m < n$  et  $i_0 < \dots < i_m$  dans  $[n]$ . On l'appelle quant à lui *bord du  $n$ -simplexe simplicial standard*.
3. (*Ensemble simplicial d'un cornet*) L'ensemble simplicial noté  $\Lambda_k^n$  dit *cornet simplicial*,  $k \in [n]$ , associé au  $k$ -ième cornet  $|\Lambda_k^n|$  admet les mêmes  $d$ -simplexes que  $\partial\Delta^n$  à l'exclusion de deux formés à partir de  $\{i_0, \dots, i_m\} = \{0, \dots, \hat{h}, \dots, n\}$ .

**Mnémonik :** sur l'exemple du simplexe standard, on peut lire les relations d'ensemble simplicial et les retrouver rapidement.

**Définition. (*Simplexe en théorie des ensembles simpliciaux*)**

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in X_n$ .

1. Si  $\exists y \in X_{n-1} \exists i \quad x = s_i(y)$ , on dit que  $x$  est *dégénéré* ;
2. sinon, on dit que  $x$  est *non dégénéré*. On note  $NX_n$  l'ensemble éventuellement vide des  $n$ -simplexes non dégénérés par  $NX_n$ .

**Exemple. (*Simplexe dégénéré*)**

Dans l'exemple précédent du simplexe standard  $\Delta^n$ , les  $k$ -simplexes non-dégénérés sont les éléments qui proviennent du complexe simplicial et les autres forment les  $k$ -simplexes dégénérés.

De manière plus générale, on peut associer un ensemble simplicial à tout complexe simplicial ordonné en considérant les  $n$ -simplexes de la forme  $\langle v_0, \dots, v_0, \dots, v_m, \dots, v_m \rangle$  pour tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$ .

Le recherche d'un foncteur de la catégorie des  $\Delta$ -complexes vers celle des ensembles simpliciaux est moins évidente. L'exemple suivant montre que l'on peut faire des choix pour étendre un  $\Delta$ -complexe en un ensemble simplicial.

### Exemple fondamental. (*Modèle d'ensemble simplicial pour le cercle*)

Reprenons l'exemple donné ci-dessus du  $\Delta$ -complexe qui fournit un modèle du cercle avec deux cellules. On note ici le 0-simplexe  $x$  par 0 et le 1-simplexe  $a$  par 01. À la lumière des exemples précédents, si on essaie à la main de lui adjoindre assez de  $n$ -simplices dégénérés pour créer les dégénérescences, on en vient à considérer les

$$X_n = \{0\dots 0, 0\dots 01, 0\dots 011, \dots, 01\dots 1\}$$

munis des applications

$$d_j(i_0\dots i_k) = i_0\dots \hat{i}_j\dots i_k, \quad s_j(i_0\dots i_k) = i_0\dots i_j i_{j+1}\dots i_k$$

sauf pour  $d_0(01\dots 1) = 0\dots 0$ , ce qui correspond à un choix. Ces données forment un ensemble simplicial.

**VOC** Ces faces et dégénérescences respectivement de suppression et de dédoublement sont *classiques*.

Le résultat suivant montre que tout simplexe dégénéré d'un ensemble simplicial admet une forme canonique.

### Heuristique

On veut un foncteur de  $\Delta Cx \rightarrow \Delta \text{Ens}$ . Or un élément de  $\Delta \text{Ens}$  est un foncteur  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . Or on a un foncteur  $\Phi : \overline{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \Delta^{\text{op}}$  qui n'est autre que  $\Phi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$  le plongement de la catégorie simpliciale réduite dans la catégorie simpliciale. On a donc un foncteur  $\overline{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \Delta Cx$  donné par le pullback  $(\Phi^{\text{op}})^*$ , d'où un foncteur  $\mathfrak{X} : \overline{\Delta}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathfrak{X}} \text{Ens}$ , soit un élément de  $\Delta Cx$ . Pour conclure de  $\Delta Cx$  dans  $\Delta \text{Ens}$ , on considère l'extension de Kan à gauche de  $\mathfrak{X}$  le long de  $\Phi^{\text{op}}$ . Ceci va être explicité juste après.

### Lemme. (*Eilenberg-Zilber*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout élément  $x \in X_n$ , il existe un unique  $y \in NX_m$ ,  $\psi : [n] \rightarrow [m]$  croissante surjective,  $m \in \mathbb{N}$ , telle que  $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(y)$ .

▷ Pour l'existence, si  $x \in NX_n$ ,  $y = x$ ,  $\varphi = id_{[n]}$  conviennent. Si  $x \notin NX_n$ ,  $x$  dégénéré, il existe  $y \in X_{n-1}$  avec  $x = s_{i1}(y)$  possiblement itéré.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe  $z \in NX_k$  et  $\psi : [n] \rightarrow [k]$  croissante surjective avec  $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par forme normale,  $\varphi = \sigma_{j_1}\dots\sigma_{j_s}$  avec  $j_1 < \dots < j_s$  entiers. Considérons la section  $\chi := \delta_{j_s}\dots\delta_{j_1}$ , de sorte que  $\varphi\chi = \sigma_{j_1}\dots\sigma_{j_s}\delta_{j_s}\dots\delta_{j_1} = id_{[m]}$ . On a alors  $\mathfrak{X}((\varphi\chi)^{\text{op}})(y) = y = \mathfrak{X}(\chi^{\text{op}})(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y))$  mais  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) = x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$ , d'où  $\mathfrak{X}((\varphi\chi)^{\text{op}})(y) = \mathfrak{X}((\psi\chi)^{\text{op}})(z) = y \in NX_m$ . Ainsi  $\psi\chi$  est uniquement décomposée en cofaces, donc est injective. Ainsi,  $m \leq k$ . Symétriquement,  $k \leq m$ , d'où  $k = m$ . Ainsi  $\psi\chi = id$ . On a  $\mathfrak{X}(\psi^{\text{op}}), \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ . D'autre part,  $\psi = \sigma_{l_1}\dots\sigma_{l_s}$  avec  $s = n - m$ . On écrit  $[n] = \{q_0, \dots, q_m\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$  et soit  $q_i = \max(\varphi^{-1}(i))$ , mais aussi  $[n] = \{p_0, \dots, p_m\} \sqcup \{l_1, \dots, l_s\}$  et

soit  $p_i = \max(\psi^{-1}(i))$ . Alors  $\varphi\chi(i) = \varphi q_i = i$  et  $\psi\chi(i) = i$  d'où  $q_i \leq p_i$ . Symétriquement,  $q_i \leq p_i$  d'où  $p_i = q_i$  pour tout  $i$ , autrement dit  $\varphi = \psi$ . ■

### Proposition

Le foncteur oubli  $U = (\Phi^{\text{op}})^*$  admet un adjoint à gauche

$$L : \Delta Cx \rightleftarrows \Delta \text{Ens} : U$$

donné explicitement par  $(L\mathfrak{X})_n = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [n] \rightarrow [m], x \in X_m\}$ , où les faces sont données par  $d_i(\varphi, x) = (\varphi\delta_i, x)$  si  $\varphi\delta_i$  est surjective, sinon  $\varphi\delta_i$  peut s'écrire sous une unique forme  $\delta_j\psi$  avec  $\psi$  surjective et alors  $d_i(\varphi, x) = (\psi, d_j(x))$ ; les dégénérescences sont données par  $s_i(\varphi, x) = (\varphi\sigma_i, x)$ .

▷ En exercice. ■

### Exercice 28

En utilisant cette proposition, montrer que l'exemple ci-dessus de l'ensemble simplicial modélisant le cercle obtenu à partir du  $\Delta$ -complexe est bien donné par le foncteur  $L$ .

**INDICATION** Décrire l'image sous  $L$  de  $X_0 = \{0\}$ ,  $X_1\{01\}$ ,  $X_2 = X_3 = \dots = \emptyset$  avec  $d_0(01) = d_1(01) = 0$ .

#### 6.2.2.2 Opérations sur les ensembles simpliciaux

##### Fait

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout ensemble simplicial, les  $n$ -simplexes s'injectent dans les  $n+1$ -simplexes par  $s_0 : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  et les  $n+1$ -simplexes se projettent dans les  $n$ -simplexes par  $d_0 : X_{n+1} \rightarrow X_n$  par une remarque déjà faite précédemment.

Généralisons.

##### Définition. (*Sous-ensemble simplicial*)

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. On dit que  $\mathfrak{X}$  est un *sous-ensemble simplicial* de  $\mathfrak{Y}$  lorsqu'il existe un morphisme d'ensemble simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  qui soit injectif composante par composante, *i.e.*  $X_n \hookrightarrow Y_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

##### Définition. (*Ensemble simplicial quotient*)

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. On dit que  $\mathfrak{X}$  est un *ensemble simplicial quotient* de  $\mathfrak{Y}$  lorsqu'il existe un morphisme d'ensemble simpliciaux  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  qui soit surjectif

composante par composante, i.e.  $Y_n \rightarrowtail X_n$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exemples. (*Sous-ensembles simpliciaux, ensembles simpliciaux quotients*)

1. On a l'inclusion d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_k^n \subseteq \partial\Delta^n \subseteq \Delta^n$  pour  $n \in \mathbb{N}, k \in [n]$ .
2. (*Modèle simplicial de la sphère*  ) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère l'ensemble simplicial quotient  $\Delta^n / \partial\Delta^n$  dont les  $d$ -simplexes

$$\{i_0 \dots i_0 \dots i_n \dots i_n \mid i_0 = \dots = i_n \text{ OU } i_0 = 0, i_1 = 1, \dots, i_n = n\}$$

munis des faces et dégénérescences classiques sauf lorsque les faces ne font pas sens, c'est-à-dire lorsque l'on supprime un nombre apparaissant une seule fois dans la collection, auquel cas elles valent  $0 \dots 0$ . Les deux seuls simplexes nondégénérés sont  $0$  et  $01 \dots n$ ; on a là le modèle le plus économique, avec 2 cellules, de la sphère de dimension  $n$ . (Pour  $n = 1$ , on retrouve l'exemple donné ci-dessus.) L'application évidente  $\Delta^n \rightarrowtail \Delta^n / \partial\Delta^n$  montre qu'il s'agit d'un quotient du  $n$ -simplexe standard.

**Remarque importante.** Ce dernier exemple est instructif, car il exhibe un ensemble simplicial qui ne provient pas d'un  $\Delta$ -complexe : par exemple, il n'est pas dans l'image du foncteur décrit à la proposition précédente. Il montre que les dégénérescences sont essentielles et non gratuites : ce modèle de la sphère n'existerait pas sans les dégénérescences placées en dimension 1 à  $n - 1$ .

Les exemples précédents montrent que l'on aimerait souvent générer des ensembles simpliciaux à partir de petites données. La proposition suivante donne la forme du sous-ensemble simplicial engendré par ses premiers simplexes.

#### Lemme

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le simplexe

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists [m] \rightarrowtail [k] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

forme pour  $m$  parcourant  $\mathbb{N}$  le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\mathfrak{X}$  contenant tous ses  $k$ -simplexes pour tout entier naturel  $k \leq n$ .

#### Définition-propriété. (*Squelette simplicial*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le simplexe

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists [m] \rightarrowtail [k] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

forme pour  $m$  parcourant  $\mathbb{N}$  le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\mathfrak{X}$  contenant tous ses

$k$ -simplexes pour tout entier naturel  $k \leq n$ . Le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est appelé le *n-squelette* de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

▷ On vérifie facilement qu'il s'agit là d'un sous-ensemble simplicial ; par exemple, la stabilité pour les faces vient de :

$$d_i(x) = d_i(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)) = \mathfrak{X}((\varphi \circ \delta_i)^{\text{op}})(y).$$

Ce sous-ensemble simplicial contient bien tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$  : il suffit de considérer  $k = m$ ,  $\varphi = id$  et  $y = x$ . La forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes montre que pour  $m > n$  :

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m = \{x \in X_m \mid \exists k \leq n \ \exists \varphi[m] \longrightarrow [n] \nearrow \exists y \in X_k \quad x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}.$$

Soit maintenant un sous-ensemble simplicial  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$  qui contient tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , alors il contient les images par les composées de dégénérescences de ces  $k$ -simplexes. Il contient donc tous les  $\text{sq}_m \mathfrak{X}$ , pour  $m > n$ , par la caractérisation précédente. ■

*Remarque.* Cette démonstration montre que le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est formé uniquement des  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , et de leurs images par des composées de dégénérescences, pour  $k > n$ .

### Exemples. (*Squelettes*)

1. Le  $(n - 1)$ -ième squelette du  $n$  simplexe standard est son bord :  $\text{squel}_{n-1} \Delta^n = \partial \Delta^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $(n - 2)$ -ième squelette du  $n$  simplexe standard est appelé son *squelette standard*.

### Exercice 29 (0-squelette d'un ensemble simplicial)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Montrer que  $\text{sq}_0 \mathfrak{X}$  est l'ensemble simplicial constant en  $X_0$  où les faces et dégénérescences sont toutes l'identité.

### Exercice 30 (Une autre définition du squelette)

On considère la sous-catégorie pleine  $\Delta_n$  de la catégorie des simplexes  $\Delta$  constituée seulement des objets  $[0], \dots, [n]$  où  $n \in \mathbb{N}$  est fixé. On note ce plognement de catégories par  $Y : \Delta_n \hookrightarrow \Delta$ . Les préfaisceaux  $\Delta_n^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  sont appelés *ensembles simpliciaux n-tronqués*. On note  $\Delta_n \text{Ens}$  leur catégorie.

1. Décrire le foncteur tiré en arrière  $(Y^{\text{op}})^* : \Delta \text{Ens} \rightarrow \Delta_n \text{Ens}$ .
2. Montrer que  $(Y^{\text{op}})^*$  admet un adjoint à droite  $L$  donné par  $(L\mathfrak{X})_m = X_m$  pour  $m \leq$  entier et  $(L\mathfrak{X})_m = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [m] \longrightarrow [n] \nearrow, x \in X_n\}$  pour  $m > n$  entier.
3. Montrer que  $L(Y^{\text{op}})^*(\mathfrak{X}) \simeq \text{sq}_n \mathfrak{X}$  pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

4. Décrire l'unité de cette adjonction.
5. En utilisant l'identification de la question supérieure, montrer que la coünité de l'adjonction est traduite par l'inclusion d'ensembles simpliciaux :  $L\Upsilon^*(\mathfrak{X}) \simeq \text{sq}_n \mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ .
6. En conclure que la restriction de cette adjonction à la sous-catégorie des ensembles simpliciaux de dimension  $\leq n$  est une équivalence de catégories.

Comme pour les *CW-complexes*, la notion de squelette d'un ensemble simplicial permet d'effectuer des démonstrations par récurrence grâce à la notion de

#### Définition. (*Dimension d'un ensemble simplicial*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. La *dimension* de  $\mathfrak{X}$ , notée  $\dim(\mathfrak{X})$ , est l'entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{sq}_{n-1} \mathfrak{X} \subsetneq \text{sq}_n \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$  s'il existe,  $\infty$  sinon.

On parle alors d'ensemble simplicial *dimension finie* si  $\dim(\mathfrak{X}) < \infty$ .

#### Exemples. (*Dimension des ensembles simpliciaux*)

1.  $\dim(\Delta^n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\dim(\partial\Delta^n) = n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $\dim(\Lambda_k^n) = n - 1$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ .
4.  $\dim(\Delta^n / \partial\Delta^n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Définition. (*Objet (cosimplicial)*)

Un *objet simplicial* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Un *objet cosimplicial* dans une catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ .

#### Exemples

1. On peut ainsi considérer non seulement des ensembles simpliciaux mais des groupes simpliciaux, des algèbres simpliciales, etc. Par exemple, un groupe simplicial correspond à la donnée de groupes  $G_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , munis de morphismes de groupes  $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$  et  $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$  pour  $0 \leq i \leq n$  entier, vérifiant les relations simpliciales
2. La collection des simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^n|$  munis des applications simpliciales croissantes forme un espace topologique cosimplicial.

### 6.2.2.3 Réalisation géométrique des ensembles simpliciaux

#### Définition. (*Réalisation géométrique d'un ensemble simplicial*)

La *réalisation géométrique* d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}| = \frac{\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n|}{\sim}$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par les relations  $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$  et  $(x, \sigma_i(z)) \sim (s_i(x), z)$  pour  $x \in X_n$ ,  $y \in |\Delta^{n-1}|$ ,  $z \in |\Delta^{n+1}|$  et  $0 \leq i \leq n$  entier.

#### Heuristique

Cette construction, de prime abord non élémentaire, est en fait simple à appréhender. On considère des  $n$ -simplexes géométriques standard indicés par les  $n$ -simplexes non-dégénérés que l'on recolle entre eux grâce aux faces et au premier type de relation, comme pour un  $\Delta$ -complexe. Les relations du second type montrent que tout simplexe dégénéré ne va donner naissance à aucune nouvelle cellule, et n'être vu que dans un simplexe géométrique standard issu d'un simplexe non-dégénéré. En outre, il n'y a pas plus d'identification de cellules que cela. Avant de démontrer ce résultat général, on peut se faire la main sur les exemples précédents.

Les notations choisies depuis le début trouvent ici leur cohérence.

#### Exemples

1. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la réalisation géométrique  $|\Delta^n|$  du  $n$ -simplexe standard est le  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , la réalisation géométrique  $|\partial\Delta^n|$  du bord  $\delta\Delta^n$  du  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n$  est le modèle topologique  $|\partial\Delta^n| \simeq S^{n-1}$  pour la sphère de dimension  $n - 1$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ , la réalisation géométrique  $|\Lambda_k^n|$  du  $k$ -ième cornet simplicial  $\Lambda_k^n$  est le  $k$ -ième cornet géométrique  $|\Lambda_k^n|$ , qui est contractile et homéomorphe à  $I^{n-1}$ .

*Remarque.* Notons que l'on a perdu de l'information dans cette affaire : nous étions partis de complexes simpliciaux, c'est-à-dire d'espaces topologiques munis canoniquement d'une triangulation, et le passage à la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé nous a fait perdre cette dernière. (Les notations choisies ici ne sont donc pas absolument parfaites, mais elles ont l'avantage de la simplicité.)

**Théorème**

Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , l'application suivante est une bijection continue :

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} NX_n \times |\overset{\circ}{\Delta^n}| \rightarrow |\mathfrak{X}|.$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) L'idée de la démonstration est la suivante. L'existence dans le lemme d'Eilenberg–Zilber montre que tout point associé à un simplexe dégénéré peut être identifié à un point associé à un simplexe non-dégénéré. L'unicité montre que ces identifications n'induisent aucune identification supplémentaire entre points indicés par des simplexes non-dégénérés. Au final, la bijection continue est établie comme dans le cas des *CW-complexes*, puis ce résultat en est l'analogique. ■

**Corollaire**

La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial est homéomorphe à ce dernier, *i.e.* pour tout  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$ ,

$$|\mathfrak{X}|_\Delta \simeq |L\mathfrak{X}|.$$

▷ Comme les simplexes non-dégénérés de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial sont en bijection avec les faces de ce dernier, ceci est une conséquence directe du théorème précédent dont une version similaire tient aussi pour la réalisation géométrique des complexes simpliciaux. ■

**Exercice 31**

La réalisation géométrique  $|\mathfrak{X}|$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est-elle en bijection continue avec la réalisation géométrique  $|(\Phi^{\text{op}})^*(\mathfrak{X})|_\Delta$  du  $\Delta$ -complexe associé ?

**Proposition**

La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un *CW-complexe* formé d'une seule cellule de dimension  $n$  par  $n$ -simplexe non dégénéré.

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème. ■

**6.2.2.4 Catégorie des ensembles simpliciaux**

La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie des simplexes. Ceci explique conceptuellement qu'elle possède de très bonnes propriétés catégoriques.

**Fait. (*Taille de  $\Delta$* )**

La catégorie des ensembles simpliciaux est localement petite.

Immédiat.

**Proposition. (*Limites et colimites d'ensembles simpliciaux*)**

La catégorie  $\Delta\text{Ens}$  admet les limites et les colimites, donnée de façon sous-jacente par la limite ensembliste.

Explicitement, si  $\mathcal{D}$  est une catégorie et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \Delta\text{Ens}$  un foncteur, on note  $F_n : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ens}, d \mapsto F(d)_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La limite et la colimite du foncteur  $F$  sont données point par point par

$$(\lim_{\mathcal{D}} F)_n = \lim_{\mathcal{D}} F_n \text{ ET } (\operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F)_n = \operatorname{colim}_{\mathcal{D}} F_n.$$

▷  $\Delta\text{Ens}$  est la catégorie des préfaisceaux sur  $\Delta$ . ■

**Exemples. (*Limites et colimites d'ensembles simpliciaux*)**

1. L'ensemble simplicial terminal est  $\Delta^0 = *$  donné par  $|\Delta_n^0| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. L'ensemble simplicial initial est  $\emptyset$  donné par  $X_n = \emptyset$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. De même, mais on le verra plus tard, le produit et le coproduit sont donnés en chaque terme par le produit et la somme disjointe ensembliste et les morphismes qui en découlent évidents.

**Proposition. (*Ensembles simpliciaux représentables*)**

Les ensembles simpliciaux qui sont des préfaisceaux représentables  $\text{Hom}_{\Delta}(-,[n])$  sont les  $n$ -simplexes standars pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta^n \simeq \text{Hom}_{\Delta}([k],[n])$$

où  $[k] : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ .

▷ Ce résultat se montre de manière directe. Les applications croissantes  $\psi : [k] \rightarrow [n]$  sont en bijection avec les suites croissantes  $i_0 \leq \dots \leq i_k$  d'éléments de  $[n]$  en posant  $i_j = \psi(j)$ . Cette bijection préserve bien les faces et les dégénérescences, car  $d_j(\varphi) = \varphi \circ \delta_j$  correspond à  $i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k$  et  $s_j(\varphi) = \varphi \circ \sigma_j$  correspond à  $i_0 \dots i_j i_{j+1} \dots i_k$ . ■

Il faut être à l'aise dans l'opération de traduction suivante :

$$\forall n,k \in \mathbb{N} \quad (\Delta^n)_k \simeq \text{Hom}_{\Delta}([k],[n]).$$

Entrons dans le rêve du rêve.

### Corollaire

La collection de tous les simplexes standards porte une structure d'ensemble simplicial cosimplicial.

▷ Non, il n'y a pas d'erreur. Cela signifie qu'il existe un foncteur  $\Delta \rightarrow \Delta\text{Ens}$  dont l'image de  $[n]$  est  $\Delta^n$ . En effet, pour tout application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ , on considère le morphisme d'ensembles simpliciaux  $\varphi_* : \Delta^n \simeq \text{Hom}_\Delta(-,[n]) \rightarrow \text{Hom}_\Delta(-,[m]) \simeq \Delta^m$ . Par exemple, les cofaces  $(\delta_j)_* : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  et les codégénérances  $(\sigma_j)_* : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$  sont données explicitement par  $(\delta_j)_*(i_0 \dots i_k) = \delta_j(i_0) \dots \delta_j(i_k)$  et  $(\sigma_j)_*(i_0 \dots i_k) = \sigma_j(i_0) \dots \sigma_j(i_k)$  pour  $0 \leq j \leq n$  entier. Plus heuristiquement,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_\Delta(-,[n]) \\ \downarrow \delta_i & & \downarrow \delta_{i*} \\ \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_\Delta(-,[n+1]) \end{array}$$

commute. ■

→ *Convention.* Dans la suite, nous laisserons tomber la notation  $(\cdot)_*$ , car le contexte le permettra.

Il s'agit du relèvement au niveau des ensembles simpliciaux via la réalisation géométrique de la structure d'objet cosimplicial des simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^n|$ . Une première application est donnée par le lemme suivant.

### Lemme. (*Expression catégorique du bord*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le bord  $\delta\Delta^n$  du  $n$ -simplexe standard est égal au coégalisateur

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n} \Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$$

où le morphisme en haut à gauche envoie la copie indicée par  $i < j$  sur celle indicée par  $j$  via  $\delta_i$ , le morphisme en bas à gauche envoie la copie indicée par  $i < j$  sur celle indicée par  $i$  via  $\delta_{j-1}$  et le morphisme de droite envoie la copie indicée par  $l$  sur  $\partial\Delta^n$  via  $\delta_l$ .

▷ L'intuition d'une telle colimite vient de la réalisation géométrique : le bord du  $n$ -simplexe géométrique standard est obtenu en recollant  $n+1$  simplexes géométriques standards de dimension  $n-1$  le long de leurs propres bords. La démonstration formelle s'obtient grâce à description des représentables en considérant simplement la forme combinatoire des  $d$ -simplexes respectifs et vérifiant que l'on a bien un coégalisateur ensembliste en chaque degré. ■

De même :

**Lemme.** (*Expression catégorique des cornets*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ . Le  $k$ -ième cornet  $\Lambda_k^n$  de dimension  $n$  est égal au coégalisateur

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \longrightarrow \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n, l \neq k} \Delta^{n-1} \longrightarrow \Lambda_k^n$$

avec les mêmes morphismes que dans l'expression catégorique du bord.

**Exercice 32**

En déduire que le  $k$ -ième cornet géométrique  $|\Lambda_k^n|$  peut s'écrire :

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} |\Delta^{n-2}| \longrightarrow \longrightarrow \coprod_{0 \leq l \leq n, l \neq k} |\Delta^{n-1}| \longrightarrow |\Lambda_k^n|.$$

**Lemme.** (*Expression catégorie des squelettes*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Le  $n$ -squelette de  $\mathfrak{X}$  est égal à la somme amalgamée

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in NX_n} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \text{squel}_{n-1} \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in NX_n} \Delta^n & \longrightarrow & \text{squel}_n \mathfrak{X} \end{array}$$

avec les morphismes d'inclusion ou d'identification.

**Proposition.** (*Lemme de Yoneda simplicial*)

On a une bijection

$$\begin{aligned} Y_\Delta : \quad \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \mathfrak{X}) &\xrightarrow{\sim} X_n \\ f &\longmapsto f_n(01\dots n) \end{aligned}$$

naturelle en  $[n] \in \Delta$  et  $\mathfrak{X} \in \Delta\text{Ens}$ .

▷ Le lemme de Yoneda classique dans  $\Delta$  localement petite s'écrit

$$\text{Nat}(\text{Hom}_\Delta(-, c), F) \simeq F(c)$$

où  $c = [n]$ ,  $F : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  et à  $\alpha \mapsto \alpha(id_c)$ . Or  $\text{Hom}_\Delta(-, [n]) \simeq \Delta^n$ . ■

Philosophons.

**Remarques.**

1. Ce résultat montre que l'on peut penser au  $n$ -simplexe standard comme « l'ensemble

simplicial libre à un générateur en dimension  $n$  ». De manière plus formelle, le foncteur oubli  $\Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$  qui ne conserve que l'ensemble de  $n$ -simplexes  $\mathfrak{X} \rightarrow X^n$  admet un adjoint à gauche  $L$  dont l'image du singleton est le simplexe standard :  $L(\{\ast\}) = \Delta^n$ .

2. La naturalité de la bijection montre que  $f_{d_i(x)} = f_x \delta_i$  et que  $f_{s_i(x)} = f_x \sigma_i$  ; de voir un ensemble simplicial comme un module à droite sur la catégorie  $\Delta$ .

### Corollaire

1. La donnée d'une flèche de  $\Delta\text{Ens}$   $\partial\Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée de  $n+1$   $(n-1)$ -simplexes dans  $\mathfrak{X}$   $x_0, \dots, x_n \in X_{n-1}$  tels que  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour tous  $i < j$ .
2. La donnée d'une flèche de  $\Delta\text{Ens}$   $\Lambda_k^n \rightarrow \mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée de  $n$   $(n-1)$ -simplexes dans  $\mathfrak{X}$   $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, x_n \in X_{n-1}$  tels que  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour tous  $i < j$ ,  $i, j \neq k$ .

### Corollaire. (*Plongement des simplexes dans les ensembles simpliciaux*)

La catégorie des simplexes  $\Delta$  se plonge, par le plongement de Yoneda, comme la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux dont les objets sont les simplexes standards :

$$\begin{aligned} Y: \quad \Delta &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] &\longmapsto \Delta^n \end{aligned}$$

injectif.

▷ Pour tous  $n, m \in \mathbb{N}$ , on a donc  $\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \Delta^m) \simeq (\Delta^m)_n \simeq \text{Hom}_\Delta([n], [m])$ . ■

### Corollaire. (*Complétion cocomplète de $\Delta$* )

La catégorie des ensembles simpliciaux est la complétion cocomplète de la catégorie  $\Delta$ , c'est-à-dire la plus petite catégorie cocomplète qui la contient.

*Remarque.* Il justifie une fois de plus la terminologie et la notation choisies pour la catégorie des simplexes  $\Delta$ .

Nous avons vu qu'un des buts des ensembles simpliciaux était de décrire la combinatoire des triangulations d'un espace topologique. Or, toute triangulation est obtenue en recollant des simplexes géométrique les unes aux autres. La question est maintenant de savoir on peut en faire de même pour les ensembles simpliciaux eux-mêmes, c'est-à-dire : peut-on écrire tout ensemble simplicial comme une certaine colimite faite de simplexes standards  $\Delta^n$ ? La formule de la réalisation géométrique des ensembles simpliciaux nous incite à considérer la catégorie suivante.

**Définition. (*Catégorie des éléments d'un ensemble simplicial*)**

La *catégorie des éléments*  $E(\mathfrak{X})$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est la catégorie dont

- ★ les objets sont tous les simplexes  $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  de  $\mathfrak{X}$ ,
- ★ les morphismes  $\text{Hom}_{E(\mathfrak{X})}(x, y)$  sont les morphismes  $\varphi$  de  $\Delta$  vérifiant  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ .

On peut voir que cette définition fournit en fait un foncteur  $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$  des ensembles simpliciaux vers la catégorie des petites catégories. On considère le foncteur canonique de projection  $\Pi : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta$  qui envoie  $x \in X_n$  sur  $[n]$ .

**Théorème. (*Théorème de densité des ensembles simpliciaux*)**

Tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  s'écrit comme la colimite

$$\mathfrak{X} = \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} Y\Pi.$$

▷ La démonstration est automatique, mais nous la faisons car elle permet de mettre au jour une formule essentielle. On rappelle que les adjoints à gauche préservent les colimites. Commençons par décrire la catégorie des cocônes sur le foncteur  $Y\Pi$ . Chacun de ses éléments consiste en la donnée d'un ensemble simplicial ' $Yfrak$ ' muni de morphismes d'ensembles simpliciaux  $g(x) : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{Y}$  pour chaque simplexe  $x \in X_n$  tels que pour toute application croissante  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  vérifiant  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Y} & \\ g(x) \nearrow & \uparrow & \swarrow g(y) \\ \Delta^n & \xrightarrow{\varphi_*} & \Delta^m \end{array}$$

soit commutatif. Un théorème déjà démontré affirmant que la catégorie des simplexes est engendrée par les cofaces et les codégénérescences montre qu'il faut et il suffit que les diagrammes associés à ces dernières soient commutatifs. Sa commutativité pour les cofaces  $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  et pour les codégénérescences  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$  sont respectivement équivalentes

$$g(d_i^{\mathfrak{X}}(x))(01\dots n-1) = d_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01\dots n))$$

et

$$g(s_i^{\mathfrak{X}}(x))(01\dots n+1) = s_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01\dots n)).$$

Montrons maintenant que l'on peut munir l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  d'une structure de cône initial sur le foncteur  $Y\Pi$ . Pour tout simplexe  $x \in X_n$ , on considère le morphisme canonique  $f_x : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$  fourni par le lemme de Yoneda simplicial. La naturalité de ce dernier montre que les morphismes  $f_x$  vérifient les deux équations ci-dessus. Enfin, pour tout autre cône  $(\mathfrak{Y}, \{g(x)\})$ , il existe un unique morphisme  $G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  de cônes : il s'agit de celui donné par  $G(x) = g(x)(01\dots n)$ . ■

Ainsi en toute généralité :

**Corollaire. (*Expression catégorique des ensembles simpliciaux*)**

Tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est égal au coégalisateur

$$\coprod_{\varphi:[n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times \Delta^n \rightrightarrows \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathfrak{X}$$

où  $X_n \times \Delta^n := \coprod_{X_n} \Delta^n$  dans les termes précédents, la flèche de gauche du haut est  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times id$  et celle du bas  $id \times \delta_i$ .

▷ Conséquence directe des arguments donnés dans la démonstration précédente et en particulier les deux relations hors ligne. ■

*Remarque.* On vient donc de retrouver conceptuellement la forme de la formule de la réalisation géométrique donnée à la section consacrée.

Après avoir compris la forme que peut prendre tout ensemble simplicial, on peut maintenant se demander comment obtenir des foncteurs depuis ou vers les ensembles simpliciaux. Il se trouve que l'on peut caractériser toutes les paires de foncteurs impliquant la catégorie des ensembles simpliciaux. Tous les exemples sont obtenus de la manière suivante (*voir ci-dessous et la sous-section suivante*).

**Définition. (*Représentation simpliciale*)**

Soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial d'une catégorie  $\mathcal{C}$  localement petite. La *représentation simpliciale* associée à  $\mathfrak{C}$  est le foncteur

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{C}} : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ c &\longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}, c). \end{aligned}$$

**Théorème. (*Théorème fondamental des adjonctions simpliciales*)**

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie localement petite et cocomplète et soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial de  $\mathcal{C}$ . La donnée d'une paire de foncteurs adjoints

$$L : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \mathcal{C} : R$$

est équivalente à la donnée d'un objet cosimplicial  $\mathfrak{C} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  via la restriction

$$\mathfrak{C} = LY : \Delta \xrightarrow{Y} \Delta\text{Ens} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$$

de l'adjoint à gauche par l'inclusion de Yoneda  $Y$ . Dans ce cas, l'adjoint à droite est donné par la représentation simpliciale associée à  $\mathfrak{C}$  et l'adjoint à gauche admet pour forme

explicite le coégalisateur suivant :

$$\coprod_{\varphi: [n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times C^n \longrightarrow \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times C^n \longrightarrow L(\mathfrak{X})$$

où  $C^n = \mathfrak{C}([n])$ ,  $X_n \times C^n := \coprod_{X_n} C^n$  dans les termes précédents, la flèche de gauche du haut est  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times id$  et celle du bas  $id \times \varphi_*$ .

▷ On considère le foncteur de représentation simpliciale  $R_{\mathfrak{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \Delta\text{Ens}$ . Dans l'autre sens, on pose  $L(\mathfrak{X}) := \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ . Comme  $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$  est un foncteur, on voit que  $L$  l'est aussi. Il reste à vérifier que  $L$  est adjoint à gauche de  $R_{\mathfrak{C}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(\mathfrak{X}), c) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, R_{\mathfrak{C}}(c))$ . Comme  $L(\mathfrak{X}) = \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ , tout morphisme dans  $\mathcal{C}$  vers  $c$  est équivalent à la donnée de morphismes  $g(x) : C^n \rightarrow c$  de  $\mathcal{C}$ , pour tout simplexe  $x \in X_n$ , tels que  $g(x) = g(y) \circ \mathfrak{C}(\varphi)$  lorsque  $X(\varphi^{\text{op}})(y) = x$ . Une telle donnée est équivalente à un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{C}}(c)$  défini par  $x \in X_n \mapsto g(x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C^n, c)$ . Il est facile de voir que cette bijection est naturelle de part et d'autre. Dans l'autre sens, la composée  $LY : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  définit un objet cosimplicial  $\mathfrak{C}$  de  $\mathcal{C}$ . Comme le foncteur  $L$  est adjoint à gauche, il préserve les colimites, on a donc qu'il est de la forme  $L(\mathfrak{X}) := \underset{E(\mathfrak{X})}{\text{colim}} \mathfrak{C}\Pi$ . Les arguments donnés ci-dessus montrent que  $R_{\mathfrak{C}}$  est son adjoint à droite et donc qu'il est égal au foncteur  $R$ . ■

Cette dernière formule a le même parfum que la réalisation géométrique ; ceci n'est pas le fruit du hasard, on verra (*plus tard*) que cette dernière peut être obtenue de cette manière.

### Heuristique

Dans un langage catégorique plus avancé, l'adjoint à gauche  $L$  est l'extension de Kan à gauche de  $\mathfrak{C}$  le long du plongement de Yoneda,

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathfrak{C}} & \mathcal{C} \\ & \searrow Y & \swarrow L = \text{Lan}_Y(\mathfrak{C}) \\ & \Delta\text{Ens} & \end{array}$$

en diagramme.

#### 6.2.2.5 Produit d'ensembles simpliciaux et décomposition prismatique

##### Proposition. (*Produit d'ensembles simpliciaux*)

Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  deux ensembles simpliciaux. Le produit de  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  noté  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  est défini par  $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})_n = X_n \times Y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  muni des faces  $d_i^{\mathfrak{X}} \times d_i^{\mathfrak{Y}}$  et des dégénérescences  $s_i^{\mathfrak{X}} \times s_i^{\mathfrak{Y}}$ .

**Exemple fondamental. (*Décomposition prismatique*)**

Pour bien comprendre l'effet du produit de deux ensembles simpliciaux, on conseille l'exercice suivant : montrer que l'ensemble simplicial  $\Delta^p \times \Delta^q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , est engendré par  $\binom{p+q}{p}$  copies de  $\Delta^{p+q}$  indiquées au choix par les chemins croissants sur une grille  $[p] \times [q]$  comme représenté sur la figure ??decprism2 ou au choix par les  $(p, q)$ -battages comme représenté sur la figure ??decprism1. Dans l'exemple ci-dessus par exemple, le  $(4, 3)$ -battage est  $\Sigma = [1247356]$ . Ces  $(p + q)$ -simplexes standards se recollent de la manière suivante : pour tout chemin croissant possédant une diagonale qui en est le  $i$ -ième segment, les images par  $\delta_i$  de  $\Delta^{p+q+1}$  dans les copies de  $\Delta^{p+q}$  indiquées par le même chemin mais passant par le coin en haut à gauche et par le coin en bas à droite de la case diagonale sont égales. Au final, on obtient  $\Delta^p \times \Delta^q$  comme le coégalisateur

$$\coprod \Delta^{p+q+1} \xrightarrow{\delta_i} \coprod \Delta^{p+q} \longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q$$

où le second coproduit porte sur les chemins croissants et où le premier porte sur les chemins croissants à une diagonale.

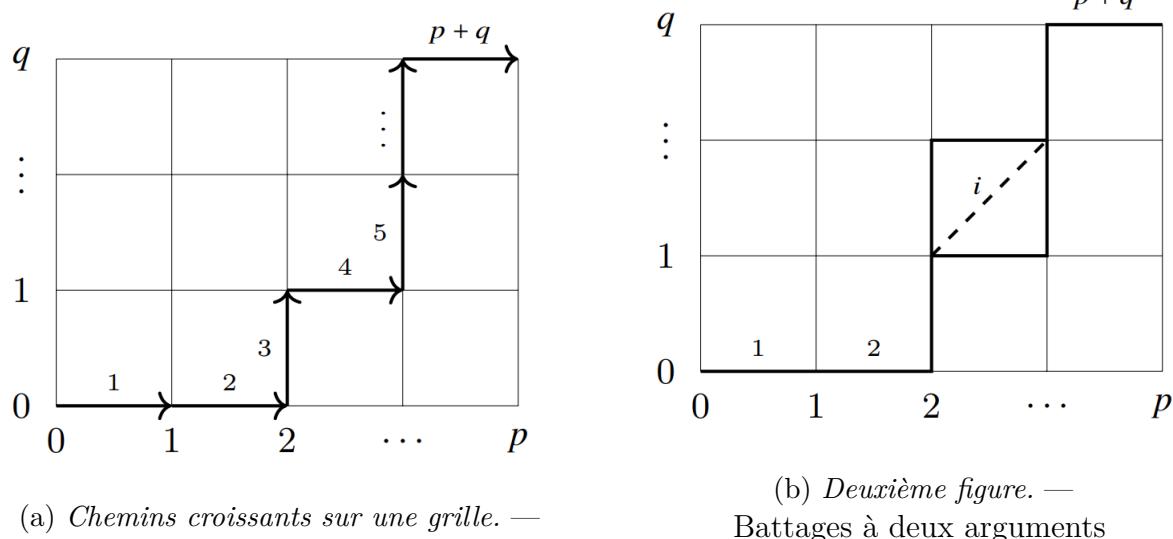


FIGURE 6.2.14 : *Décomposition prismatique.* —

**Exercice 33 (Décompositions prismatiques simples)**

1. Décrire  $\Delta^1 \times \Delta^1$ , notamment ses simplexes non dégénérés et sa réalisation géométrique.
2. Décrire les simplexes non dégénérés de  $\Delta^p \times \Delta^q$  et insister sur le cas des  $p + q$  simplexes non dégénérés. Montrer que  $|\Delta^p \times \Delta^q| \simeq |\Delta^p| \times |\Delta^q|$ .

3. Décrire l'ensemble simplicial  $\Delta^p \times \Delta^1$  et dessiner la triangulation associée de  $|\Delta^2 \times \Delta^1|$ .

### 6.2.2.6 Autoenrichissement des ensembles simpliciaux

#### Proposition

La catégorie  $(\Delta\text{Ens}, \times, *)$  des ensembles simpliciaux, muni de leur produit, forme une catégorie monoïdale symétrique cartésienne où l'unité est l'ensemble simplicial constant à un élément.

▷ Les vérifications sont automatiques et découlent du paragraphe précédent. ■

*Remarque.* Si l'on cherche à montrer que cette catégorie monoïdale symétrique est fermée, c'est-à-dire qu'elle possède un bifoncteur  $\text{Hom}$  interne, que nous noterons  $\mathfrak{hom}$ . Si c'est le cas, on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}))$$

pour tous ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ . En considérant le cas particulier du simplexe standard  $\mathfrak{X} = \Delta^n$ , le lemme de Yoneda simplicial impose la forme  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})_n = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{Y} \times \Delta^n, \mathfrak{Z})$ . On a là un premier exemple d'application de la définition de représentation simpliciale : à tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe le foncteur  $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet : \Delta \longrightarrow \Delta\text{Ens}$  qui est en fait la

$$[n] \longmapsto \mathfrak{X} \times \Delta^n$$

composée du plongement de Yoneda avec le produit avec  $\mathfrak{X}$ . La représentation simpliciale associée à cet ensemble simplicial cosimplicial  $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet$  est  $R_{\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet} \Delta\text{Ens} \Delta\text{Ens} \mathfrak{Y} \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y})$ . Cette interprétation introduit l'ensemble simplicial recherché.

#### Définition. (*Espace des morphismes*)

Pour toute paire  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  d'ensembles simpliciaux, on appelle *espace des morphismes* de  $\mathfrak{X}$  vers  $\mathfrak{Y}$  l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}).$$

On appelle aussi l'espace des morphismes *objet exponentiel simplicial* et noté  $\mathfrak{Y}^\mathfrak{X}$ .

#### Exemples. (*Espaces des morphismes*)

1. Les 0-simplices de l'espace des morphismes de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^0, \mathfrak{Y}) = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}).$$

2. Le lemme de Yoneda simplicial montre que l'espace des morphismes du point  $*$  vers un ensemble simplicial  $\mathfrak{Y}$  est égal à  $\mathfrak{Y}$  tout entier :

$$\mathfrak{hom}(*, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y}.$$

### Proposition

L'espace des morphismes est un Hom interne, c'est-à-dire qu'il munit la catégorie des ensembles simpliciaux d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée.

- ▷ Pour tous ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ , il s'agit donc de trouver une bijection naturelle de la forme

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})).$$

Pour cela, on considère le foncteur de représentation simplicial associé à  $\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet$  qui donne  $R_{\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ . Un théorème connexe fournit un adjoint à gauche  $L$  caractérisé par ses valeurs sur les simplexes standards  $L(\Delta^n) = \mathfrak{Y} \times \Delta^n \simeq \Delta^n \times \mathfrak{Y}$ . Ce foncteur est donc le « foncteur produit avec  $\mathfrak{Y}$  », c'est-à-dire  $L(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ , ce qu'il fallait. ■

### Corollaire. (*Auto-enrichissement de $\Delta$* )

La catégorie des ensembles simpliciaux muni de l'espace des morphismes est enrichie sur elle-même.

- ▷ La coünité de l'adjonction fournit un morphisme naturel d'évaluation

$$\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}} : \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}.$$

On définit une composition au niveau des espces de morphismes

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

en considérant le morphisme d'ensmble simpliciaux adjoint de la double évaluation suivante :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}} \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Y} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}} \mathfrak{Z}.$$

D'où. ■

### Corollaire

Il existe une bijection naturelle

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \simeq \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})).$$

▷ Il s'agit d'un cas particulier de la théorie générale des catégories monoïdales symétriques fermées. ■

### 6.2.3 Exemples conceptuels d'ensembles simpliciaux

Nous poursuivons ici dans la même veine que celle qui a motivée la définition des espaces de morphismes : tous les exemples de foncteurs à valeurs dans les ensembles simpliciaux donnés ci-dessous sont de la forme décrite à la définition consacrée et au théorème consacré. On applique donc le théorème fondamental en faisant varier la catégorie localement petite cocomplète considérée.

#### 6.2.3.1 Ensembles simpliciaux constants

##### Définition. (*Ensemble simplicial constant*)

À tout ensemble  $E$ , on peut associer l'*ensemble simplicial constant*  $\mathbf{c}(E)$  défini par  $X_n = E$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d_i = id_E$ ,  $s_i = i_d E$  pour tout  $i \in [n]$ .

##### Fait

Cette première famille, particulièrement simple, d'exemples d'ensembles simpliciaux est de la forme de celles obtenues par le théorème fondamental.

Il suffit pour cela de considérer la catégorie  $\mathcal{C} = \text{Ens}$  des ensembles et l'ensemble cosimplicial constant  $\mathbf{c} : [n] \mapsto \{\ast\}$  sur le singleton standard. Alors  $R_{\mathbf{c}}(E) = \mathbf{c}(E)$ .

##### Proposition

La construction des ensembles simpliciaux constants fournit un foncteur  $cst$  plein et fidèle  $\mathbf{c} : \text{Ens} \rightarrow \Delta\text{Ens}$  dont l'image est formée des ensembles simpliciaux de dimension 0.

▷ Automatique. ■

*Remarque.* Ce résultat montre que la notion d'ensemble simplicial généralise, de manière homotopique, celle d'ensemble.

##### Exercice 34

Montrer que le foncteur  $cst$  est représentable.

→ *Notation.* On note  $C^\bullet$  l'ensemble cosimplicial qui représente  $cst$ .

### Proposition

Le foncteur ensemble simplicial constant  $\mathbf{c}$  admet un adjoint à droite donné par le foncteur de troncation

$$T : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \mathfrak{X} \mapsto X_0$$

et un adjoint à gauche donné par le foncteur de troncation modulo les images des premières faces

$$\tilde{T} : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \mathfrak{X} \mapsto X_0 / \sim$$

où  $d_0(x) \sim d_1(x)$  pour tout  $x \in X_1$ . Pour résumer :

$$\mathbf{c} : \text{Ens} \rightleftarrows \Delta\text{Ens} : T \text{ ET } \tilde{T} : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Ens} : \mathbf{c}.$$

▷ Le premier se passe de commentaires. Le deuxième est immédiat par le théorème fondamental. ■

*Remarque.* L'adjonction  $\mathbf{c} \dashv T$  fournit l'équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles et celle des ensembles simpliciaux de dimension nulle déjà établie.

#### 6.2.3.2 Ensembles simpliciaux singuliers

Utilisons le théorème fondamental pour associer fonctoriellement un ensemble simplicial à tout espace topologique. Nous avons déjà vu que la collection des simplexes géométriques standards munis de leurs cofaces et codégénérances formaient un espace topologique cosimplicial :

$$\begin{aligned} |\Delta^\bullet| : \quad \Delta &\longrightarrow \text{Top} \\ [n] &\longmapsto |\Delta^n|. \end{aligned}$$

### Définition. (*Ensemble simplicial singulier*)

L'*ensemble simplicial singulier* d'un espace topologique  $X$  est défini par  $\text{Sing}(X) = \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^\bullet|, X)$ . Ses éléments, appelés *simplexes singuliers*, sont les applications continues  $f : |\Delta^n| \rightarrow X, n \in \mathbb{N}$ . Ses faces et dégénérescences sont données par  $d_i(f) = f \circ \delta_i$  et  $s_i(f) \circ \sigma_i$  pour tout  $i \in [n]$ .

### Proposition

L'application  $\text{Sing}$  qui associe l'ensemble simplicial singulier à un espace topologique est un foncteur dont l'adjoint à gauche est la réalisation géométrique, *i.e.*

$$|\cdot| : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Top} : \text{Sing}.$$

▷ Encore une fois, c'est un cas particulier du théorème fondamental : le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est représenté par l'espace topologique cosimplicial  $|\Delta^\bullet|$ . Il admet un adjoint à

gauche donné par le coégalisateur

$$\coprod_{\varphi:[n] \rightarrow [m], \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}_i} X_m \times \Delta^n \xrightarrow{id \times \varphi} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui est la formule de la réalisation géométrique. ■

### Heuristique

La réalisation géométrique est adjointe (à gauche) du foncteur définissant l'homologie singulière.

### Remarques.

1. En particulier la réalisation géométrique commute avec les colimites et le foncteur ensemble singulier commute avec les limites.
2. Si un ensemble simplicial  $X$  est fini, alors  $|X|$  est compact en tant que  $CW$ -complexe fini.
3. L'adjonction singulier-géométrique s'étend aux catégories  $\Delta\text{Ens}$  et  $\text{Top}$  pointées !

Cette série de résultats explique donc conceptuellement et rétrospectivement la formule choisie pour la réalisation géométrique.

### Proposition. (*Décomposition prismatique*)

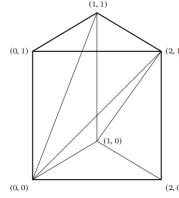
Soit une paire  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux tels que soit les deux ont une quantité dénombrable de simplexes soit au moins une des deux réalisations géométriques est localement finie, c'est-à-dire que tout point est à l'intérieur d'un polyèdre simplicial. Dans ce cas, on a un homéomorphisme

$$|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}| \simeq |\mathfrak{X}| \simeq |\mathfrak{Y}|.$$

▷ On renvoie le lecteur à la preuve de MAY. ■

### Remarques.

1. Le problème soulevé par les hypothèses techniques est toujours le même : il trait à la topologie considérée sur les espaces produits. La propriété mentionnée ci-dessus est donc vraie si on travaille dans la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés et faiblement Hausdorff. Sinon, il suffit de demander que  $|X \times Y|$  soit un  $CW$ -complexe, ce qu'impliquent les hypothèses utilisées ici.
2. Il convient de remarquer que cet homéomorphisme, vu de la gauche vers la droite, n'est pas cellulaire. Ceci est en fait positif : le membre de gauche fournit une triangulation canonique pour le produit d'espaces topologiques de droite. Dans le cas de  $\Delta^p \times \Delta^q$ , on obtient la décomposition prismatique donnée par les chemins croissants ou le  $(p,q)$ -battage.

FIGURE 6.2.15 : Décomposition prismatique de  $\Delta^2 \times \Delta^1$ . —

### 6.2.3.3 Nerf d'une catégorie

On considère la catégorie  $\text{Cat}$  des petites catégories. Le foncteur suivant fournit un objet cosimplicial dans la catégorie des catégories :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}: \quad \Delta &\longrightarrow \text{Cat} \\ [n] &\longmapsto \text{Cat}[n] := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\} \end{aligned}$$

où  $\text{Cat}[n]$  est la catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné  $[n]$ .

— Notation. On en déduit une catégorie petite cosimpliciale  $\text{Cat}[\bullet]$ .

#### Définition. (*Nerf d'une catégorie*)

Le *nerf* d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  est l'ensemble simplicial  $\mathfrak{RC} = \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{C})$ .

#### Reformulation pratique. (*Nerf d'une catégorie*)

Soit  $C$  une petite catégorie. Il y a un 0-simplexe de  $N(C)$  pour chaque objet de  $C$ . Il y a un 1-simplexe pour chaque morphisme  $f : x \rightarrow y$  dans  $C$ . Supposons que  $f : x \rightarrow y$  et  $g : y \rightarrow z$  sont des morphismes dans  $C$ . Alors il y a également leur composition  $g \circ f : x \rightarrow z$ .

Ceci suggère notre ligne de conduite : ajouter un 2-simplexe pour ce triangle commutatif. Tous les 2-simplexes de  $N(C)$  proviennent d'une paire de morphismes composable de cette façon.

En général,  $N(C)_k$  est composé des  $k$ -uplets de morphismes composable

$$A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_k$$

de  $C$ . Pour achever la définition de  $N(C)$  comme un ensemble simplicial, on doit également spécifier les applications faces et dégénérescences. Elles sont aussi fournies par la structure de  $C$  en tant que catégorie. Les applications faces

$$d_i : N(C)_k \rightarrow N(C)_{k-1}$$

sont données par la composition des morphismes au  $i^e$  objet (ou par le retrait de du  $i^e$  objet de la suite, lorsque  $i$  vaut 0 ou  $k$ ). Cela signifie que  $d_i$  envoie le  $k$ -uplet

$$A_0 \rightarrow \dots \rightarrow A_{i-1} \rightarrow A_i \rightarrow A_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow A_k$$

sur le  $(k-1)$ -uplet

$$A_0 \rightarrow \dots \rightarrow A_{i-1} \rightarrow A_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow A_k.$$

C'est-à-dire, l'application  $d_i$  compose les morphismes  $A_{i-1} \rightarrow A_i$  et  $A_i \rightarrow A_{i+1}$  en le morphisme  $A_{i-1} \rightarrow A_{i+1}$ , ce qui donne un  $(k-1)$ -uplet pour chaque  $k$ -uplet.

De même, les applications dégénérescences

$$s_i : N(C)_k \rightarrow N(C)_{k+1}$$

sont données par l'insertion d'un morphisme identité à l'objet  $A_i$ .

*Remarque.* Le nerf d'une catégorie est un ensemble simplicial dont le 2-squelette contient presque toute (pourquoi pas toute ?) l'information : tous les objets, tous les morphismes et lesquels sont composable.

### Exercice 35 (Foncteur de nerf)

Décrire le foncteur de représentation simpliciale

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} := R_{\text{Cat}[\bullet]} : \quad \text{Cat} &\longrightarrow \Delta \text{Ens} \\ \mathcal{C} &\longmapsto \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{Cat}[\bullet], \mathcal{C}) \end{aligned}$$

associé à la catégorie cosimpliciale  $\text{Cat}[\bullet]$ , dit *foncteur de nerf*.

### Exemples. (*Nerfs*)

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le nerf de  $\text{Cat}[n]$  est le  $n$ -simplexe standard :  $\mathfrak{R}\text{Cat}[n] = \Delta^n$ .

### Proposition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les  $n$ -simplexes du nerf d'une catégorie  $\mathcal{C}$  sont les chaînes de  $n$ -morphismes composable

$$\mathfrak{RC}_n = \{c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} c_n\}$$

avec convention que  $\mathfrak{RC}_0$  est formé des objets de  $\mathcal{C}$ . Les faces sont alors données par  $d_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{i+1}f_i, \dots, f_n)$  pour les entiers  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $d_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$  et  $d_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$ . Les dégénérescences sont quant à elles données par

$$s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, id, f_{i+1}, \dots, f_n) \text{ pour } i \in [n].$$

▷ Automatique. ■

### Exemple. (*Nerf d'un groupe*)

Le *nerf* d'un groupe  $G$  est le nerf de la catégorie classifiante  $BG$ .

Explicitement, cet ensemble simplicial est formé des  $n$ -simplexes  $BG_n = G^n$ , avec  $BG_0 = \{1\}$ , munis des faces et dégénérescences suivantes pour  $i \in [n]$  :

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{pour } i = 0 \\ (g_2, \dots, g_{i+1}g_i, \dots, g_n) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{pour } i = n \end{cases}$$

et

$$s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

Sa réalisation géométrique  $[BG]$  est l'*espace classifiant* du groupe  $G$ .

### Exercice 36

Soit  $G$  un groupe. On considère la collection  $(EG)_n = G^{n+1}$  d'ensembles pour  $n \in \mathbb{N}$ , munie des faces et dégénérescences :

$$d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n) \text{ ET } s_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n).$$

On note cette donnée simplement  $EG$ .

1. Montrer que l'association  $G \mapsto EG$  définit un foncteur  $E$  de Grp dans  $\Delta\text{Ens}$ . ..
2. Montrer que  $E$  admet un adjoint à gauche et le décrire.
3. Tout  $n$ -simplexe  $(EG)_n = G^{n+1}$  admet une action à gauche du groupe  $G$  donnée par  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ . Montrer que ceci munit  $EG$  d'une structure de  $G$ -module simplicial.
4. On considère les orbites sous l'action de la question précédente avec les faces et dégénérescences :

$$EG : G = ((EG)_n/G = G^{n+1}/G, \overline{d_i}, \overline{s_i}).$$

Montrer que  $EG/G/$  est un ensemble simplicial isomorphe à l'espace classifiant  $BG$ .

5. Montrer que  $EG \rightarrow EG/G \simeq BG$  est un morphisme surjectif d'ensembles simpliciaux et calculer sa fibre.

Les questions suivantes sont plus ardues et requièrent les notions d'**HOMOTOPIE SIMPLICIALE** développées ci-après.

6. Calculer les groupes d'homotopie simpliciaux du nerf  $BG$  d'un groupe.
7. Montrer que  $EG$  est contractile.
8. Montrer que le morphisme d'ensemble simpliciaux  $EG \rightarrow EG/G \simeq BG$  est une fibration de Kan.

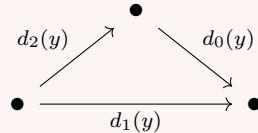
Une utilité de cette approche conceptuelle, plutôt qu'avec la définition explicite, vient de l'application complète du théorème fondamental qui montre que cette construction est fonctorielle et qu'elle admet un adjoint à gauche calculable.

### Définition-propriété. (*Catégorie fondamentale $\tau_1$* )

À tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe la *catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$*  dont les objets sont les 0-simplexes  $X_0$  et dont les morphismes sont donnés par le graphe libre sur des flèches indiquées par les 1-simplexes

$$d_1(x) \xrightarrow{x \in X_1} d_0(x)$$

quotienté par les relations données par les 2-simplexes



pour  $y \in X_2$ .

▷ Dans cette catégorie, les images de la première dégénérescence  $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$  donnent les morphismes d'identité. Les deux dégénérescences suivantes  $s_0 : X_1 \rightarrow X_2$  et  $s_1 : X_1 \rightarrow X_2$  montrent respectivement que la composée à droite et à gauche par ces identités laissent invariant les morphismes. ■

### Proposition

L'application qui associe le nerf à une petite catégorie est un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Cat} &\longrightarrow \Delta\text{Ens} \\ \mathcal{C} &\longmapsto \mathfrak{R}\mathcal{C} \end{aligned}$$

qui admet pour adjoint à gauche le foncteur catégorie fondamentale  $\tau_1 : \tau_1 : \Delta\text{Ens} \rightleftarrows \text{Cat} : \mathfrak{R}$ .

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème fondamental. Il suffit pour cela de montrer que la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  est isomorphe au coégalisateur habituel. On commence déjà par remarquer que la catégorie fondamentale associée au simple standard est la catégorie associée au poset

$[n]$ , i.e.  $\tau_1(\Delta^n) \simeq \text{Cat}[n]$ . Ensuite, pour les entiers  $n \geq 2$ , on voit que les images des foncteurs  $\delta_0, \delta_1, \delta_n : \text{Cat}[n-1] \rightarrow \text{Cat}[n]$  couvrent tous les morphismes de  $\text{Cat}[n]$ . La relation  $d_i \times id_{\text{Cat}[n-1]} \sim id_{X_n} \times \delta_i$  montre alors que ce coégalisateur se résume à

$$(\coprod_{X_0} \text{Cat}[0] \coprod \coprod_{X_1} \text{Cat}[1]) / \sim$$

où : les relations induites par les faces  $d_0, d_1 : X_1 \rightarrow X_0$  et la dégénérescence  $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$  montre que ce qui est entre parenthèses donne la catégorie libre ou graphie libre engendrée par les 1-simplexes  $d_1(x) \rightarrow d_0(x), x \in X_1$ . Il reste à quotienter cette catégorie par les relations venant des faces  $d_0, d_1, d_2 : X_2 \rightarrow X_1$ . ■

### Exercice 37

Montrer que le foncteur de nerf est pleinement fidèle et interpréter ce résultat.

### Fait. (*Groupoïde fondamental d'un ensemble simplicial*)

Le foncteur oubli de la catégorie des petits groupoïdes vers celle des petites catégories admet un adjoint à gauche. Et l'image de la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  par ce dernier fournit un groupoïde  $\pi_1(\mathfrak{X})$  appelé le *groupoïde fondamental* de l'ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

#### 6.2.3.4 Correspondance de Dold-Kan

Cet exemple est l'occasion d'introduire quelques constructions qui relient les ensembles simpliciaux aux complexes de chaînes. On travaille ici sur  $\mathbb{Z}$  mais on aurait aussi bien pu travailler sur un autre anneau de base. Les applications linéaires entre modules libres provenant d'applications ensemblistes seront notées avec une police romane droite, comme par exemple  $d_i$ .

### Définition-propriété. (*Complexe de Moore*)

Le *complexe de Moore*  $C\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  a pour chaînes de degré  $n$  le module libre sur les  $n$ -simplexes et pour différentielle la somme alternée des faces :

$$d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : \mathbb{Z}X_n \rightarrow \mathbb{Z}X_{n-1}.$$

▷ Les relations simpliciales montrent que l'opérateur  $d$  est de carré nul. ■

### Définition. (*Complexe normalisé*)

Le *complexe normalisé*  $N\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est le complexe de chaînes quotient du complexe de Moore par le complexe des dégénérescences  $D\mathfrak{X}$  qui est le sous-complexe

du complexe de Moore engendré par les simplexes dégénérés) :

$$N\mathfrak{X} = (C\mathfrak{X}/D\mathfrak{X}, d).$$

### Proposition

Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , la projection canonique  $C\mathfrak{X} \rightarrow N\mathfrak{X}$  est une équivalence d'homotopie.

▷ L'idée consiste à utiliser les dégénérescences pour créer une homotopie contractante. Il s'agit d'un bon exercice qui est donc laissé aux lecteurs. ■

### Remarques.

1. Le complexe normalisé admet donc pour base les simplexes non dégénérés.
2. Le complexe de Moore et le complexe normalisé définissent des foncteurs depuis la catégorie des ensembles simpliciaux sur les complexes de chaîne sur  $\mathbb{Z}$ .

### Exemple

Le complexe normalisé  $N\Delta^n$  associé au  $n$ -simplexe standard admet pour base les éléments de la forme  $i_0 \dots i_m$  de degré  $m$  où  $i_0 < \dots < i_m$  dans  $[n]$  et pour différentielle

$$d(i_0 \dots i_m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_m.$$

La structure d'objet cosimplicial sur les simplexes standards fournie par le plongement de Yoneda simplicial munit ces complexes normalisés d'une structure de complexe de chaînes cosimplicial :

$$N\Delta : \Delta \rightarrow Ch$$

où  $N\Delta$  est appelé *foncteur des chaînes normalisées*.

### Proposition

Le foncteur des chaînes normalisées admet un adjoint à droite

$$N : \Delta Ens \rightleftarrows Ch : R_{N\Delta}$$

donné par

$$R_{N\Delta}(C) \simeq \bigoplus_{0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n} C_k.$$

▷ Il s'agit d'un corollaire direct du théorème fondamental. ■

Le foncteur des chaînes normalisées induit un foncteur  $\bar{N} : s\text{Ab} \rightarrow Ch_{\geq 0}$  des groupes abéliens simpliciaux vers les complexes de chaînes positivement gradués par la formule  $(\bar{N}\mathfrak{A})_n := A_n$ . On considère la restriction  $\bar{R}_{N\Delta} : Ch_{\geq 0} \rightarrow s\text{Ab}$  de l'autre foncteur.

### Théorème. (*Équivalence de Dold-Kan*)

L'adjonction

$$\bar{N} : s\text{Ab} \rightleftarrows Ch_{\geq 0} : \bar{R}_{N\Delta}$$

est une équivalence entre la catégorie des groupes abéliens simpliciaux et la catégorie des complexes de chaînes positivement gradués.

▷ Les mêmes formules qu'à la proposition précédente donnent l'adjonction considérée ici. Il est ensuite automatique de montrer que l'unité et la counité de l'adjonction sont des isomorphismes. ■

#### 6.2.4 Complexes de Kan et $\infty$ -catégories

Nous sommes maintenant suffisamment armés pour mettre au jour une notion simple et efficace de catégorie supérieure. Le cahier des charges impose que les catégories en soit des exemples.

##### Lemme

Le foncteur nerf  $\mathfrak{R} : \text{Cat} \longrightarrow \Delta\text{Ens}$  est plein et fidèle.

▷ On commence par remarquer que la counité  $\varepsilon_{\mathcal{C}} : \tau_1 \mathfrak{R}\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$  de l'adjonction  $\tau_1 \dashv \mathfrak{R}$  est un isomorphisme naturel. En tirant en arrière cette dernière, on obtient la bijection naturelle recherchée :

$$\text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\tau_1 \mathfrak{R}\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{R}\mathcal{C}, \mathfrak{R}\mathcal{D}).$$

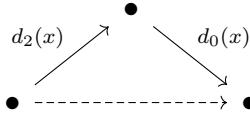
C'est ce que l'on voulait. ■

Les ensembles simpliciaux fournissent donc un cadre suffisamment large dans lequel on peut espérer définir une notion supérieure de catégorie. Commençons pour cela par caractériser les catégories parmi les ensembles simpliciaux, c'est-à-dire par décrire l'image essentielle du foncteur nerf.

Le résultat précédent utilise le fait crucial que la counité de l'adjonction catégorie fondamentale-nerf est un isomorphisme naturel. Il n'en est pas de même pour l'unité d'adjonction  $\nu_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{R}\tau_1(\mathfrak{X})$ . C'est déjà faux pour les 1-simplexes : tout élément  $x \in X_1$  fournit un morphisme  $d_2(x) \rightarrow d_0(x)$  mais les morphismes de  $\mathfrak{R}\tau_1(\mathfrak{X})$  sont représentés par des compositions libres de tels morphismes. Dans le cas du cornet  $\mathfrak{X} = \Lambda_1^2$ , l'unité d'adjonction est égale à l'inclusion

$$\nu_{\Lambda_1^2} : \Lambda_1^2 \longrightarrow \Delta^2 \simeq \mathfrak{R}\tau_1(\Lambda_1^2)$$

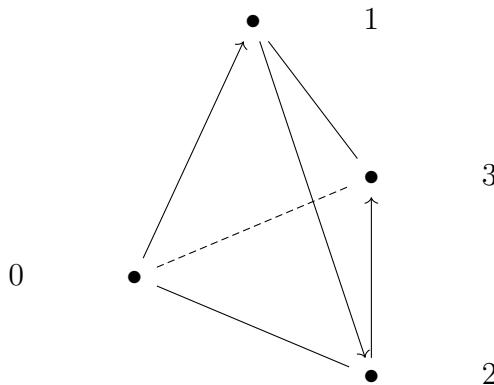
qui n'est pas un isomorphisme : il manque à gauche tout ce qui est dans  $\Delta^2$  mais pas dans le cornet  $\Lambda_1^2$ . Pour comprendre à quelle famille d'ensembles simpliciaux il faut se restreindre, on continue et on considère les 2-simplexes  $x \in X_2$  dont l'image par l'unité d'adjonction vaut  $\nu(x) = (d_2(x), d_0(x))$ . Graphiquement, on ne conserve que les deux faces *composables* du 2-simplexe :



pour  $x \in X_2$ . Pour que l'unité d'adjonction n soit un isomorphisme, il faut que cette seule donnée puisse caractériser tous les 2-simplexes de  $\mathfrak{X}$ . Pour cela, on remarque d'abord que cette donnée correspond aux morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^2 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Puis, qu'elle caractérise le 2-simplexe si et seulement si le diagramme suivant admet une unique extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \longrightarrow & \mathfrak{X}. \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

De manière générale, l'unité d'adjonction ne retient que la plus longue suite d'arêtes composables d'un  $n$ -simplexe



à savoir explicitement

$$\nu(x) = (d_2^{n-1}(x), d_2^{n-2}d_0(x), \dots, d_2d_0^{n-2}(x), d_0^{n-1}(x))$$

où  $x \in X_n$  avec un léger abus de notation pour les faces. Pour un 3-simplexe  $x \in X_3$ , on peut récupérer de manière unique la donnée de la  $\cong$  face 012 à savoir  $d_3(x)$  grâce à la propriété d'extension, puis de même, celle de la  $\cong$  face 123 à savoir  $d_0(x)$  et enfin celle de la  $\cong$  face 013 à savoir  $d_2(x)$ . Ceci correspond à un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Nous avons donc besoin que le diagramme suivant admette une unique extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_1^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X}. \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^3 & & \end{array}$$

Nous aurions aussi bien pu commencer de la même manière en finissant par la donnée de la  $\cong$  face 023 à savoir  $d_1(x)$ . Il faudrait alors demander une unique extension du morphisme  $\Lambda_2^3 \rightarrow \mathfrak{X}$  depuis le cornet  $\Lambda_2^3$ . En dimension supérieure, on est naturellement amené à considérer les définitions et conditions suivantes.

### Définition. (*Cornets internes et externes*)

Les *cornets internes* sont deux de la forme  $\Lambda_k^n$  pour des entiers  $1 \leq k \leq n - 1$ . Les *cornets externes* sont ceux de la forme  $\Lambda_0^n$  et  $\Lambda_n^n$ .

### Proposition

La catégorie des petites catégories s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tous les cornets internes, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  entier.

▷ On commence par remarquer que le nerf d'une catégorie vérifie cette propriété d'unique extension le long des cornets internes. Ensuite, on montre, en utilisant les arguments donnés dans l'analyse ci-dessus et par récurrence sur  $n$ , que l'unité de l'adjonction nerf-catégorie fondamentale est un isomorphisme naturel lorsque l'on se restreint aux ensembles simpliciaux qui vérifient cette propriété d'unique extension. ■

*Remarque.* Le nerf d'une catégorie ne vérifie en général pas de propriété d'extension le long des cornets externes. Si on considère, par exemple, les cornets externes de dimension 2 suivants

$$\begin{array}{ccc} y & & \\ \nearrow g & & \\ x & \xrightarrow{id_x} & x \\ & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} x & & \\ & \searrow f & \\ y & \xrightarrow{id_y} & y, \\ & & \end{array}$$

la propriété d'extension impliquerait l'existence d'inverse à gauche et à droite respectivement.

### Exercice 38

Montrer que la catégorie des petits groupoïdes s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tout cornet.

Comment des morphismes en dimension supérieure peuvent-ils apparaître naturellement sur un objet mathématique ? Nous avons déjà considéré cette question. On peut aussi répondre à cette question en essayant de construire un 1 -groupoïde fondamental associé à un espace

topologique. Rappelons que le groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  est la catégorie dont les objets sont les points de  $X$  et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de chemins entre deux points. Notons qu'à cause de la paramétrisation des chemins, le quotient par la relation d'homotopie permet d'avoir une composition des morphismes associatives. L'écueil d'une telle construction est qu'elle ne voit pas la donnée homotopique supérieure des espaces topologiques. On a donc envie de considérer un 1-groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  dont les objets seraient les points de  $X$ , les 1-morphismes les chemins entre deux points, les 2-morphismes les homotopies entre chemins, les 3-morphismes les homotopies entre homotopies, etc.

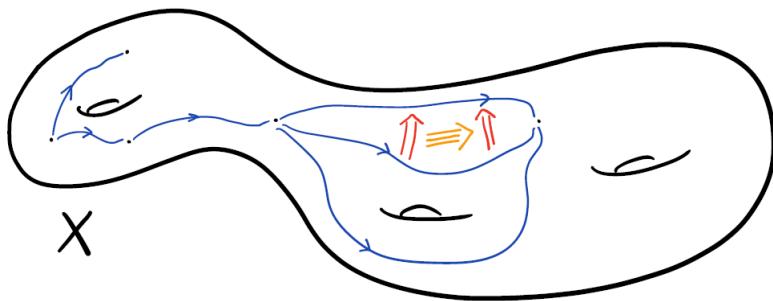


FIGURE 6.2.16 : Catégorie d'homotopie infinie. —

Premier problème : la composition des chemins n'est alors pas associative ... mais on peut contrôler le défaut d'associativité grâce aux 2-morphismes. Néanmoins l'*hypothèse homotopique de Grothendieck* voudrait que les notions d'1-groupoïde et d'espace topologique soient équivalentes, dans un sens à préciser. La version décrite ci-dessus serait une version globulaire d'un potentiel 1-groupoïde fondamental. À la place, on préfère ici considérer le modèle simplicial donné par l'ensemble simplicial singulier.

On veut donc que les espaces topologiques à travers leurs ensembles simpliciaux singuliers soient des exemples pour la notion recherchée de catégorie supérieure. Pour cela, nous aimeraisons reprendre l'étude précédente mais avec le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers à la place du foncteur nerf. Mais le premier résultat de la partie précédente ne tient partiellement plus ici.

### Lemme

Le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est fidèle mais pas plein.

▷ Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Le morphisme induit au niveau des ensembles simpliciaux singuliers  $\text{Sing}(f) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  envoie un simplexe singulier  $\varphi : [\Delta^n] \rightarrow X$  sur  $f \circ \varphi$ . L'ensemble des 0-simplexes singuliers est en bijection avec les éléments de l'espace topologique et, avec cette identification, l'application  $\text{Sing}(f)_0 : X \rightarrow Y$  est l'application  $f$ . Donc le foncteur  $\text{Sing}$  est fidèle.

Pour la deuxième partie, considérons un espace topologique totalement discontinu, par exemple  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ , et l'espace topologique discret de même ensemble sous-jacent, noté ici  $\mathbb{Q}^{dis}$ . Dans les deux cas, les simplexes singuliers sont les applications constantes et l'ensemble simplicial singulier est l'ensemble simplicial constant  $\mathbb{Q}$ . Or, le morphisme simplicial identité  $\text{Sing}(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sing}(\mathbb{Q}^{dis})$  ne saurait venir de l'identité  $id : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{dis}$  car cette dernière n'est pas continue. ■

Il est en fait illusoire de chercher à réduire la catégorie des ensembles simpliciaux pour faire de l'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique une équivalence de catégories. Néanmoins cette dernière induit une équivalence au niveau des catégories homotopiques, en vertu d'un théorème à venir. Dans ce contexte, la notion simpliciale correspondante à celle d'espace topologique est la suivante.

### Définition. (*Complexe de Kan*)

Un complexe de Kan est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$  entier, parfois dite *propriété d'extension de Kan*.

*Remarque.* Remarquez la similitude avec la propriété d'extension homotopique des fibrations d'espaces topologiques.

### Proposition

Pour tout espace topologique  $X$ , l'ensemble simplicial singulier  $\text{Sing}(X)$  est un complexe de Kan.

▷ L'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique montre que la propriété d'extension de Kan est équivalente à la propriété d'extension similaire au niveau des espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ |\Delta^n| & & \end{array}$$

Cette dernière se démontre en réalisant le  $k$ -ième cornet  $|\Lambda_k^n|$  comme rétract par déformation du  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ . ■

La propriété d'extension le long des cornets admet la description purement combinatoire suivante.

**Lemme. (*Description combinatoire des complexes de Kan*)**

Un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan si et seulement si pour tout  $n \geq 2$  et  $0 \leq k \leq n$  entier, toute collection de  $n$  simplexes  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$  vérifiant  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$  pour  $i < j$  entiers naturels différents de  $k$  inférieurs à  $n$ , admet un  $n$ -simplexe  $x \in X_n$  tel que  $d_i(x) = x_i$  pour les entiers  $0 \leq i \leq n$  différents de  $k$ .

▷ C'est une application directe du lemme de Yoneda simpliciale à la description catégorique des cornets. ■

**Exercice 39**

Montrer que le nerf d'un groupe est un complexe de Kan et que si le groupe est non-trivial, il ne peut pas être isomorphe à un ensemble simplicial singulier. En particulier, les complexes de Kan ne forment pas l'image essentielle du foncteur des ensembles simpliciaux singuliers.

**Exercice 40**

Montrer que l'ensemble simplicial sous-jacent à un groupe simplicial, après avoir oublié la structure de groupe, est un complexe de Kan.

**Exercice 41**

Montrer que les  $n$ -simplexes standard  $\Delta^n$  ne sont pas des complexes de Kan pour  $n \geq 2$ .

Nous y sommes, pour obtenir une bonne définition de catégorie supérieure, il suffit de considérer des ensembles simpliciaux qui vérifient une propriété commune aux nerfs de catégories et aux ensembles simpliciaux singuliers : celle d'extension, non-nécessairement unique, le long des cornets internes.

**Définition. ( $\infty$ -catégorie)**

Une  $\infty$ -catégorie est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long des cornets internes, *i.e.* :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

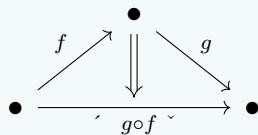
pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  entier.

**$\infty$ -catégories**

Cette notion a été introduite par BOARDMAN et VOGT dans leur étude des propriétés homotopiques des structures algébriques sous le nom de *complexe de Kan faible*. Elle a été intensivement étudiée d'abord par JOYAL puis par LURIE.

**Heuristique**

Rétrospectivement, on peut interpréter les 0-simplexes d'une 1-catégorie comme ses objets et les 1-simplexes comme ses morphismes. La condition d'extension le long du cornet  $\Lambda_1^2$



fournit un candidat pour la composée «  $g \circ f$  » de deux morphismes composable ainsi qu'une « homotopie » de  $(g, f)$  vers «  $g \circ f$  ». La composition n'est donc pas unique, ni stricte. Ceci n'est pas un problème, au contraire. Ce degré de liberté est souhaité et, de toute façon, les différents choix sont homotopiquement uniques.

**Définition. ( $\infty$ -groupoïde)**

Un  $\infty$ -groupoïde est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets  $\Lambda_k^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in [n]$ .

*Remarque.* Les notions d' $\infty$ -catégorie et d' $\infty$ -groupoïde sont définies par une propriété : existence de remplissages de cornets. Il peut parfois être nécessaire d'adopter une approche plus algébrique et d'exiger la donnée de ces remplissages. On obtient alors les notions d' $\infty$ -catégorie algébrique et d' $\infty$ -groupoïde algébrique qui sont en fait des algèbres sur des monades. Ceci leur permet par exemple d'avoir toutes les limites et colimites. Un exemple fondamental d'application de la dernière notion peut par exemple être donné où les formules de la théorie de Lie (Baker–Campbell–Hausdorff) sont retrouvées et généralisées en remplissant des cornets.

**6.2.5 Homotopie simpliciale**

L'homotopie simpliciale est la première raison d'être des ensembles simpliciaux. Elle permet d'encoder combinatoirement les propriétés homotopiques des espaces topologiques. Il faut bien faire attention que la théorie générale ne s'applique pas à tous les ensembles simpliciaux, mais uniquement à ceux qui sont des « espaces », c'est-à-dire les complexes de Kan.

**Définition. (*Chemin*)**

Un *chemin* dans un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ .

**Reformulation pratique. (*Chemin d'homotopie simpliciale*)**

Une telle donnée correspond à

$$0 \xrightarrow{01} 1 \xrightarrow{p} p(0) = d_1(x) \xrightarrow{x} p(1) = d_0(x)$$

avec  $p(01) = x \in X_1$ .

**Définition. (*Éléments homotopes*)**

Deux 0-simplexes  $a, b \in X_0$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  sont *homotopes*, et l'on note alors  $a \sim b$ , s'il existe un chemin  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $p(0) = a$  et  $p(1) = b$ , c'est-à-dire s'il existe  $x \in X_1$  tel que  $d_1(x) = a$  et  $d_0(x) = b$ . On dit aussi que  $a$  et  $b$  sont dans la *même composante connexe*.



La relation binaire  $\sim$  n'est pas une relation d'équivalence en général ! Il suffit de penser au simplexe standard  $\Delta^1$  de dimension 1 : dans ce dernier 0 est homotope à 1, mais 1 n'est pas homotope à 0.

C'est précisément pour remédier à cela qu'il faut considérer des complexes de Kan.

**Proposition. (*Relation d'homotopie sur un complexe de Kan*)**

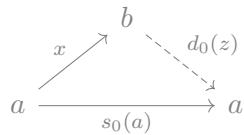
Pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{X}$ , la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

▷ En effet :

- ★ pour tout 0-simplexe  $a \in X_0$ , on a  $a \sim a$  ; pour cela il suffit de considérer le chemin conné par  $s_0(a)$  :

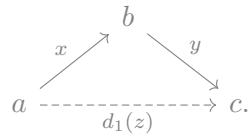
$$a = d_1 s_0(a) \xrightarrow{s_0(a)} d_0 s_0(a) = a.$$

- ★ Soient  $a \sim b$  reliés par un chemin  $x \in X_1$ . On considère le 2-cornet



qui admet un remplissage par la propriété d'extension de Kan. Alors le 1-simplexe  $d_1(z)$  est un chemin qui relie  $b$  à  $a$ .

- ★ Soient  $a \sim b$  et  $b \sim y$  deux homotopies entre éléments avec pour chemins respectifs  $x$  et  $y$ . Une telle donnée est équivalente au 2-cornet suivant de  $\mathfrak{X}$  :



La propriété d'extension de Kan fournit un 2-simplexe  $z \in X_2$  tel que  $d_2(z) = x$  et  $d_0(z) = y$ .

Le 1-simplexe  $d_1(z)$  est un chemin  $a \sim c$ ,

d'où le résultat. Remarquons qu'on a utilisé tous les cornets de dimension 2, interne et externe. ■

(*Dans le reste de cette section, nous ne considérons que des complexes de Kan, sauf mention explicite du contraire.*)

### Définition. (*Composantes connexes de Kan*)

Soit  $\mathfrak{X}$  un complexe de Kan. On note  $\pi_0(\mathfrak{X}) = X_0 / \sim$  l'ensemble de ses composantes connexes.

On va maintenant appliquer cette définition à l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  entre deux ensembles simpliciaux. On rappelle la forme de ses 0-simplexes et 1-simplexes :

$$\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \text{ ET } \mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_1 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^1, \mathfrak{Y}).$$

### Définition. (*Morphismes simpliciaux homotopes*)

Deux morphismes  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux sont *homotopes* s'ils se sont comme 0-simplexes de l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ ; cela signifie qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux  $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$  tel que  $H(-, 0) = f$  et  $H(-, 1) = g$ .

La similitude avec la notion d'homotopie entre applications continues est frappante. Le résultat suivant est l'analogue dans le cadre des ensembles simpliciaux de la structure d'espace topologique sur les ensembles d'applications continues.

### Théorème

Pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{Y}$ , l'espace des morphismes  $\mathfrak{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est un complexe de Kan.

⊗ (*Idée de la preuve.*) La démonstration combinatoire est longue. Une démonstration catégorique repose sur la notion très utile d'extension anodine. ■

### Corollaire

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial et  $\mathfrak{Y}$  un complexe de Kan. La relation d'homotopie  $\sim$  entre morphismes de  $\mathfrak{X}$  vers  $\mathfrak{Y}$  est une relation d'équivalence.

▷ On utilise la relation d'équivalence  $\sim$  sur les complexes de Kan. ■

### Fait. (*Compositions d'homotopies simpliciales*)

La relation d'homotopie vérifie la propriété

$$f \sim g \implies fk \sim gk \text{ ET } lf \sim lg$$

pour tous morphismes simpliciaux  $fg : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}, k : \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{X}, l : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$ .

### Définition. (*Équivalence d'homotopie simpliciale*)

Une *équivalence d'homotopie (simpliciale)* est un morphisme d'ensembles simpliciaux noté  $f : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}$  qui admet un morphisme  $g : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  vérifiant  $gf \sim id_{\mathfrak{X}}$  et  $fg \sim id_{\mathfrak{Y}}$ .

Deux complexes de Kan sont dits *homotopiquement équivalents* ce que l'on note  $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y}$  s'ils sont reliés par une équivalence d'homotopie.

### Propriétés

1. Le foncteur de réalisation géométrique  $|\cdot| : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Top}$  envoie les homotopies simpliciales sur les homotopies topologiques.
2. Toute homotopie topologique  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques induit une homotopie simpliciale entre  $\text{Sing}(f), \text{Sing}(g) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  par la formule

$$\text{Sing}(X) \times \Delta^1 \rightarrow \text{Sing}(X) \times \text{Sing}(I) \rightarrow \text{Sing}(X \times I) \xrightarrow{\text{Sing}(H)} \text{Sing}(Y)$$

où le morphisme de gauche est défini par  $01 \mapsto id_I$ .

Ceci montre que les foncteurs réalisation géométrique et ensemble simplicial singulier induisent des bijections entre les classes d'homotopie de morphismes d'ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X} \rightarrow \text{Sing}(Y)$  et les classes d'homotopie d'applications continues  $|\mathfrak{X}| \rightarrow Y$ .

▷ Successivement :

1. Soit  $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$  une homotopie simpliciale entre deux morphismes  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux. Comme  $|\Delta^1|$  est localement fini, l'homéomorphisme  $|\mathfrak{X} \times \Delta^1| \simeq |\mathfrak{X}| \times |\Delta^1| \simeq |\mathfrak{X}| \times I$  montre que  $|H| : |\mathfrak{X}| \times I \rightarrow |\mathfrak{Y}|$  est une homotopie topologique entre les applications continues  $|f|, |g| : |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$ .
2. Tout est dans l'énoncé. ■

**Remarque importante.** Ces deux foncteurs induisent des équivalences de catégories entre la catégorie homotopique des *CW-complexes* et la catégorie homotopique des *Kan complexes*.

L'analogie avec les espaces topologiques peut se poursuivre, mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Nous citons néanmoins rapidement les notions suivantes.

- ★ Une *paire d'ensembles simpliciaux*  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  et la donnée d'un sous-ensemble ensemble simplicial  $Y_{frak}$  de  $\mathfrak{X}$  avec  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ .
  - ★ Une *paire de complexe de Kan*  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est une paire d'ensembles simpliciaux telle que les deux soient des complexes de Kan.
- Par exemple, pour tout complexe de Kan  $\mathfrak{X}$ , la paire  $(\mathfrak{X}, *)$  est une paire de complexes de Kan.
- ★ Une *homotopie relative* à  $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$  est une homotopie  $H$  entre deux morphismes d'ensembles simpliciaux  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  vérifiant  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  pour tout  $a \in \mathfrak{Y}$  et  $t \in \Delta^1$ . Dans ce cas, on utilise la notation classique  $f \sim g$  rel  $\mathfrak{Y}$ .

### Définition. (*Complexe de Kan pointé*)

Un *complexe de Kan pointé* est un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  muni d'un morphisme d'ensembles simpliciaux  $* = \Delta^0 \rightarrow \mathfrak{X}$  où par un simple abus, on notera  $*$  le seul simplexe de dimension  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Reformulation pratique

Un complexe de Kan pointé est exactement un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  avec la donnée d'un  $x \in X_0$ .

Pour  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé, on considère les classes d'homotopie relative :

$$\pi_n(\mathfrak{X}, *) := [(\Delta^n, \partial\Delta^n), (\mathfrak{X}, *)] = \{f : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X} \mid f|_{\partial\Delta^n} : \partial\Delta^n \rightarrow *\} / \sim \text{ rel } \partial\Delta^n.$$

### Fait. (*Homotopie ⊆ homotopie simpliciale*)

Soit  $(X, x)$  un espace topologique pointé. Alors  $\pi_n(X, x) \simeq \pi_n(\text{Sing}(X), \text{Sing}(x))$ .

C'est la double propriété précédente.

→ **Notation.** Afin d'expliquer combinatoire cette définition, on utilisera la notation suivante, pour tout  $n$ -simplexe  $x \in X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé fixé :

$$\partial x := (d_0(x), d_1(x), \dots, d_{n-1}(x), d_n(x)).$$

### Lemme

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  une complexe de Kan pointé. La donnée d'un morphisme  $f : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\mathfrak{X}, *)$  est équivalente à celle d'un  $n$ -simplexe  $x \in X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ . Via cette identification, deux morphismes  $f, g$  sont homotopes relativement à  $\partial\Delta^n$  si et seulement si on peut trouver un  $(n+1)$ -simplexe  $w \in X_{n+1}$  reliant les deux  $n$ -simplexes  $x, y$  correspondant de la manière suivante  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ .

▷ La première partie est une conséquence directe du lemme de Yoneda simplicial. La seconde partie est plus longue. On commence par considérer pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout  $i \in [n]$  la relation sur les  $n$ -simplexes  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$  :

$$x \sim_i y \iff \exists w \in X_{n+1}, \partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$$

où  $y$  se trouve à la  $i$ -ième place dans la ligne précédente. Il s'agit d'une relation d'équivalence, comme on le montre ci-dessous, et qui ne paraîtra pas compliqué dès que l'on refait les dessins en dimension 3 :

- ★ c'est une relation réflexive, car en utilisant la dégénérescence  $s_i$ , on voit que  $\partial s_i(x) = (*, \dots, *, x, x, *, \dots, *)$  et donc que  $x \sim_i x$ .
- ★ Soient  $x \sim_i y$  et  $y \sim_i z$  avec respectivement  $v, w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial v = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  et  $\partial w = (*, \dots, *, z, y, *, \dots, *)$ . On considère  $W = (*, \dots, *, w, -, v, *, \dots, *)$  où  $w$  est la  $i$ -ième place du multiplet. Il s'agit alors d'un  $(i+1)$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  par le corollaire du lemme de Yoneda simplicial sur les morphismes. Comme  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan, ce cornet admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ , c'est-à-dire  $W \subseteq \partial Z$ . On calcule  $\partial d_{i+1}(Z) = (*, \dots, *, z, x, *, \dots, *)$  grâce à ce même corollaire. Ceci montre que  $x \sim_i z$ .

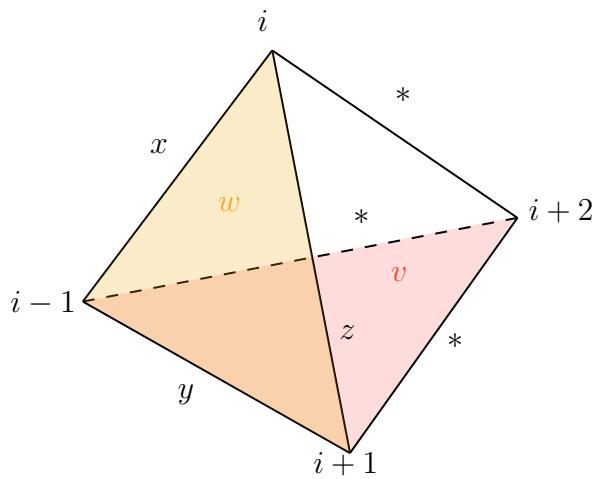


FIGURE 6.2.17 : Transfert de l'homotopie simpliciale. —

- ★ Pour la symétrie, soient  $x \sim_i y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$ . On considère  $W = (*, \dots, *, -, s_i(x), w, *, \dots, *)$  où  $w$  est la  $(i+2)$ -ième place du multiplet. Il s'agit d'un  $i$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2} : W \subseteq \partial Z$ . On calcule  $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  qui montre  $y \sim_i x$ .

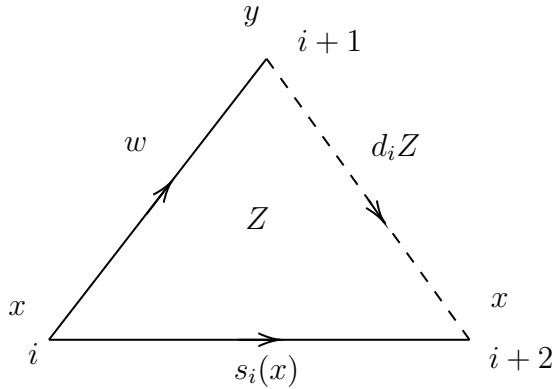
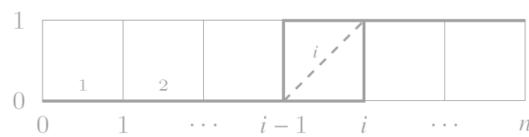


FIGURE 6.2.18 : Symétrie de l'homotopie simpliciale. —

On montre maintenant que toutes ces relations d'équivalences sont équivalentes. Soit  $i \in [n - 1]$ . Dans un sens, donnons-nous  $x_{i+1}y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  est à la  $(i + 1)$ -ième position. On considère  $W = (*, \dots, *, w, s_{i+1}(y), s_i(), -, *, \dots, *)$  où  $w$  est à la  $i$ -ième place. Il s'agit d'un  $(i + 3)$ -ième cornet de dimension  $n + 1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ . On calcule  $\partial d_{i+3}(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  où  $x$  est la  $i$ -ième place, ce qui montre  $x \sim_i y$ , car  $\sim_i$  est réflexive. Dans l'autre sens, on se donne  $x \sim_i y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tels que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  est à la  $i$ -ième position. On considère  $W = (*, \dots, *, -, s_{i+1}(x), s_i(x), w, *, \dots, *)$  où  $w$  est à la  $(i + 3)$ -ième place. Il s'agit d'un  $i$ -ième cornet de dimension  $n + 1$  de  $\mathfrak{X}$  qui admet un remplissage  $Z \in X_{n+2}$ . On calcule  $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$  où  $x$  est la  $(i + 1)$ -ième place, ce qui montre  $x \sim_{i+1} y$ . La démonstration de l'énoncé est maintenant automatique. Soient  $f, g$  rel  $\partial\Delta^n$  et soient  $x, y \in X_n$  les deux  $n$ -simplexe représentant  $f$  et  $g$  respectivement. On considère un morphisme  $H : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $H(-, 0) = f$ ,  $H(-, 1) = g$  et  $H(\partial\Delta^n, -) = *$ . La décomposition prismatique donne ici le coégalisateur

$$\coprod_{1 \leq i \leq n} \Delta^n \xrightarrow[\delta_i]{\delta_i} \coprod_{1 \leq j \leq n} \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \times \Delta^1$$

où les deux morphismes de gauche arrivent respectivement dans la  $i$ -ième copie et la  $(i - 1)$ -ième copie.



Le lemme de Yoneda simplicial montre alors que la donnée du morphisme  $H$  est équivalente à la donnée de  $n + 1$  simplexes  $z_0, z_1, \dots, z_n \in X_{n+1}$  de dimension  $n + 1$  vérifiant  $\partial z_0 = (y, d_1(z_1), *, \dots, *)$ ,  $\partial z_n = (*, \dots, *, d_n(z_n), x)$  et  $\partial z_i = (*, \dots, *, d_i(z_i), d_{i+1}(z_{i+1}), *, \dots, *)$  pour tout entier  $1 \leq i \leq n - 1$ . Ceci signifie que

$$x \sim_n d_n(z_n) \sim_{n-1} d_{n-1}(z_{n-1}) \sim_{n-2} \dots \sim_1 d_1(z_1) \sim_0 y.$$

Par ce qui précède, ceci implique  $x \sim_n y$  et donc qu'il existe  $w \in X_{n+1}$  tel que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ . Dans l'autre sens, soit  $x \sim_n y$  avec  $w \in X_{n+1}$  tel que  $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$ . On considère les  $n + 1$

simplexes  $s_0(y), s_1(y), \dots, s_{n-1}(y), w$  qui définissent un morphisme  $H : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que  $H(-, 0) = f$ ,  $H(-, 1) = g$  et  $H(\partial\Delta^n, -) = *$ . On a donc  $f \sim g$  rel  $\partial\Delta^n$ . ■

### Fait. (*Produit dans le groupe d'homotopie simplicial*)

Soient  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $[x]$  la classe d'équivalence de  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$  pour la relation d'équivalence du lemme précédent :  $x \sim_i y$  s'il existe  $w \in X_{n+1}$  avec  $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$  où  $y$  se trouve à la  $i$ -ième place. Soient  $x, y \in X_n$  deux  $n$ -simplexes de  $\mathfrak{X}$  vérifiant  $\partial x = \partial y = (*, \dots, *)$ . La donnée de  $w = (*, \dots, *, x, -y)$  définit un  $n$ -ième cornet de dimension  $n+1$  de  $\mathfrak{X}$  par le corollaire du lemme de Yoneda simplicial sur les morphismes. Comme  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan, ce cornet se remplit par un  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . On voit rapidement que  $\partial d_n(W) = (*, \dots, *)$  et l'on pose alors

$$[x] \cdot [y] = [d_n(W)].$$

### Lemme. (*Bonne définition du produit dans le groupe d'homotopie simpliciale*)

Soient  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Le produit  $\cdot$  de la construction précédente est bien défini.

▷ Montrons déjà que la définition ne dépend pas du  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . Soit  $W' \in X_{n+1}$  un  $(n+1)$ -simplexe tel que  $\partial W' = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$ . Le cornet  $(* \dots, *, s_n(x), -, W, W')$  admet un remplissage  $Z \in W_{n+2}$  dont on peut vérifier que  $\partial d_n(Z) = (*, \dots, *, d_n(W), d_n(W'))$ . Ceci implique  $[d_n(W)] = [d_n(W')]$ .

Montrons maintenant que la définition du produit  $\cdot$  ne dépend pas du choix de représentant des classes de  $[x]$  et de  $[y]$ . Nous ne traitons explicitement que le cas de  $[y]$ , celui de  $[x]$  étant symétrique. Soit  $y' \in X_n$  tel que  $y \sim y'$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w \in X_{n+1}$  vérifiant  $\partial w = (*, \dots, *, y', y)$ . Soient  $W \in X_{n+1}$  remplissant  $(* \dots, *, x, -, y)$  et  $W' \in X_{n+1}$  remplissant  $(* \dots, *, x, -, y')$ . On considère le cornet  $(* \dots, *, s_{n-1}(x), W', -, w)$  que l'on remplit avec un  $(n+2)$ -simplexe  $Z \in X_{n+2}$ . Ce dernier vérifie  $\partial d_{n+1}(Z) = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$ , ce qui montre que  $[x] \cdot [y] = [x] \cdot [y']$ . ■

### Définition. (*Groupes d'homotopie d'un complexe de Kan*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , le  $n$ -ième groupe d'homotopie de  $\mathfrak{X}$  est défini par

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]).$$

### Théorème. (*Structure des groupes d'homotopie simpliciaux*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot)$  est un groupe.

▷ Montrons :

- ★ pour tout  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ , on a  $\partial s_n(x) = (*, \dots, *, x, x)$  et  $\partial s_{n-1}(x) = (*, \dots, x, x, *)$ , ce qui montre respectivement que  $[*] \cdot [x] = [x]$  et  $[x] \cdot [*] = [x]$  d'où l'unitarité.
- ★ Pour tout  $x \in X_n$  vérifiant  $\partial x = (*, \dots, *)$ , on considère le  $(n+1)$ -ième cornet défini par  $(* \dots, *, x, *, -)$  qui se remplit avec un  $(n+1)$ -simplexe  $W \in X_{n+1}$ . Ceci montre que  $[x] \cdot [d_{n+1}(W)] = [*]$ . De la même manière, le  $(n-1)$ -ième cornet défini par  $(* \dots, *, -, *, x)$  se remplit avec un  $(n+1)$ -simplexe  $Z \in X_{n+1}$ . Ceci montre que  $[d_{n-1}(Z)] \cdot [x] = [*]$  et conclut la démonstration de l'existence d'un inverse.
- ★ Soient enfin pour l'associativité  $x, y, z \in X_n$  vérifiant tous  $\partial x = \partial y = \partial z = (*, \dots, *)$ . On considère un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n-1} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, x, -, y)$ , un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n+2} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, y, -, z)$  et un  $(n+1)$ -simplexe  $W_{n+1} \in X_{n+1}$  remplissant le cornet  $(* \dots, *, d_n(W_{n-1}), -, z)$ . Il existe un  $(n+1)$ -simplexe  $Z \in X_{n+2}$  qui remplit le cornet  $(* \dots, *, W_{n-1}, -, W_{n+1}, W_{n+2})$ . Le calcul  $\partial d_n(Z) = (* \dots, *, x, d_n(W_{n+1}), d_n(W_{n+2}))$  montre que  $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$ .

Donc c'est bien un groupe. ■

### Théorème. (*Abélianité des groupes d'homotopie simpliciale supérieurs*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot)$  est abélien.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Ce point peut être montré de manière purement combinatoire, comme tous les résultats précédents. ■

### Propriété. (*Invariance homotopique des groupes d'homotopie simpliciale*)

Les groupes d'homotopie simpliciaux d'un complexe de Kan pointé sont des invariants d'homotopie.

▷ Il est automatique de voir à partir des définitions que les groupes d'homotopie simpliciaux définissent des foncteurs depuis la sous-catégorie des complexes de Kan vers la catégorie des groupes (abéliens) qui envoient les équivalences d'homotopie sur les isomorphismes. ■

### Propriété. (*Ou comment retrouver l'homotopie géométrique*)

Soit  $(\mathfrak{X}, *)$  un complexe de Kan pointé. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un isomorphisme, *i.e.* une bijection en  $n = 0$ , naturel

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]) \simeq (\pi_n(|\mathfrak{X}|, |*|), \cdot, [cste]).$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) C'est dur ! ■

### Définition. (*Fibration de Kan*)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  est une *fibration de Kan* s'il vérifie la propriété d'extension

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{C} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathfrak{B} \end{array}$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}, k \in [n]$ . On note les fibrations de Kan avec des doubles flèches. L'ensemble simplicial  $\mathfrak{C}$  est appelé *espace/complexe total* et l'ensemble simplicial  $\mathfrak{B}$  est appelé *espace/complexe (de) base*. La donnée complète est aussi appelée *espace/complexe fibré*.

### Exercice 42

Montrer qu'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan si et seulement si l'application terminale  $\mathfrak{X} \twoheadrightarrow *$  est une fibration de Kan.

### Définition. (*Fibre d'une fibration de Kan*)

Soit  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  une fibration de Kan. Pour tout 0-simplexe  $b$  de  $\mathfrak{B}$ , on considère le sous-ensemble simplicial qu'il engendre que l'on note encore par  $b$  ainsi que tous ses simplexes, même si formellement ces dernières sont les images de  $b$  par les dégénérescences itérées. On considère l'ensemble simplicial  $\mathfrak{F} = p^{-1}(b)$  défini par  $F8n = \pi_n^{-1}(b)$  que l'on appelle *fibre (de Kan) de  $p$  au point  $b$* .

### Lemme. (*Structure des fibres de Kan*)

Toute fibre d'une fibration de Kan est un complexe de Kan.

▷ C'est immédiat par la caractérisation combinatoire des complexes de Kan. ■

À toute fin utile, on peut caractériser combinatoirement les fibrations de Kan de la manière suivante :

### Lemme. (*Description combinatoire des fibrations de Kan*)

Un morphisme d'ensembles simpliciaux  $p : \mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}$  est une fibration de Kan si et seulement si pour tous entiers  $n \geq 2$  et  $0 \leq k \leq n$ , toute collection de  $n$  simplexes  $x_0, \dots, x_{k-}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E_{n-1}$  vérifiant  $d_i^{\mathfrak{C}}(x_j) = d_{j-1}^{\mathfrak{C}}$  pour les entiers naturels  $i < j$  différents de  $k$  inférieurs à  $n$  et tout  $n$ -simplexe  $y \in B_n$  tel que  $d_i^{\mathfrak{B}}(y) = p(x_i)$ , il existe  $x \in E_n$  tel que  $p(x) = b$  et  $d_i^{\mathfrak{C}}(x) = x_i$  pour les entiers naturels  $i$  différents de  $k$  inférieurs à  $n$ .

▷ On applique le lemme de Yoneda simplicial à la caractérisation combinatoire des complexes de Kan. ■

### Exercice 43 (*S*)

Soit  $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  une fibration de Kan.

1. Montrer que si  $\mathfrak{C}$  est un complexe de Kan et  $p$  est surjective en tout degré, alors  $\mathfrak{B}$  est un complexe de Kan.
2. Montrer que si  $\mathfrak{B}$  est un complexe de Kan, alors  $\mathfrak{C}$  est un complexe de Kan.

### Théorème. (*Suite exacte longue associée à une fibration de Kan*)

Toute fibration de Kan

$$(\mathfrak{F}, f) \xrightarrow{i} (\mathfrak{C}, f) \xrightarrow{p} (\mathfrak{B}, b)$$

où  $f$  est un 0-simplexe de la fibre  $\mathfrak{F}$ , induit une longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow \pi_2(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{F}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{C}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{F}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{C}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{B}) \longrightarrow \{\ast\}.$$

⊗ (*Idée de la preuve.*) On peut donner une démonstration ad hoc dont le degré de difficulté est du même acabit que les précédentes. ■

### Propriété. (*Lien Serre-Kan*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors  $\text{Sing}(f) : \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$  est une fibration de Kan si  $f$  est une fibration de Serre et réciproquement si  $p : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$  est une fibration de Kan, alors  $|p| : |\mathfrak{C}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  est une fibration de Serre.

### Preuve.

▷ (*Suite exacte longue d'une fibration de Kan*) On aurait alors pu montrer le théorème précédent à partir de sa version topologique donnée par la suite de Puppe en utilisant l'isomorphisme avec les groupes d'homotopie des réalisations géométriques associées. ■

### Exercice 44 (*Mapping space*)

Soit  $i : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{L}$  un monomorphisme d'ensembles simpliciaux. Soit  $p : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  une fibration de Kan. Ils induisent un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{p_*} & \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Y}) \\ i^* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{p_*} & \mathfrak{h}\mathfrak{o}\mathfrak{m}(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y}). \end{array}$$

1. Montrer que l'application induite

$$\hom(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) \xrightarrow{(i^*, p_*)} \hom(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \times_{\hom(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y})} \hom(\mathfrak{L}, \mathfrak{Y})$$

est une fibration de Kan.

**INDICATION** Utiliser le fait que  $p$  satisfait la propriété de relèvement suivante :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda_k^n \times \mathfrak{L}) \cup_{(\Lambda_k^n \times \mathfrak{R})} (\Delta^n \times \mathfrak{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow p \\ \Delta^n \times \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{Y}. \end{array}$$

2. Montrer que le poussé en avant  $p_* : \hom(\mathfrak{R}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \hom(\mathfrak{R}, \mathfrak{Y})$  est une fibration de Kan.
3. Montrer que l'élément en arrière  $i^* : \hom(\mathfrak{L}, \mathfrak{X}) \longrightarrow \hom(\mathfrak{R}, \mathfrak{X})$  est une fibration de Kan quand  $\mathfrak{X}$  est un complexe de Kan.

### Définition. (*Cofibration simpliciale*)

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux est une *cofibration* si toutes les applications  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  sont injectives pour  $n \in \mathbb{N}$ .

### Définition. (*Équivalence faible simpliciale*)

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux est une *cofibration* si tous les morphismes  $\pi_n(|f|) : \pi_n(|\mathfrak{X}|, x) \simeq \pi_n(|\mathfrak{Y}|, |f|(x))$  sont des isomorphismes, *i.e.* une bijection en  $n = 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $x \in |\mathfrak{X}|$  fixé.

### Exercice 45 (Une question difficile)

Peut-on trouver un complexe de Kan  $\mathfrak{X}$  dont chaque  $n$ -simplexe  $X_n$  est fini, et qui modélise le cercle ?

Le résultat suivant relie directement les deux premières sections de ce cours.

### Théorème

L'adjonction réalisation géométrique-foncteur singulier induit l'équivalence suivante de catégories :

$$\text{Top[eq-faible}^{-1}] \simeq \text{CW-Cx}_{/\sim} \simeq \text{Kan-Cx}_{/\sim} \simeq \Delta\text{Ens[eq-faible}^{-1}]$$

où les deux catégories du milieu sont respectivement celle des *CW-complexes* et des complexes de Kan avec morphismes modulo la relation d'équivalence d'homotopie.

### Heuristique

La beauté de ce théorème tient en au moins deux points : il établit une équivalence entre les théories homotopiques des espaces topologiques et des ensembles simpliciaux et il donne une forme simple de catégories localisées, deux extrêmes.

### Exercice 46

Reformuler l'homotopie simpliciale en termes d'extensions de Kan.



# Chapitre 7

## Topologie des variétés

### Résumé

*Analysis Situs* est un article de référence sur les mathématiques publié par Henri POINCARÉ en 1895. Poincaré en a publié cinq compléments entre 1899 et 1904. Ces articles ont fourni le premier traitement systématique de la topologie et ont révolutionné le sujet en utilisant des structures algébriques pour distinguer les espaces topologiques non homéomorphes, fondant ainsi le domaine de la topologie algébrique. Les papiers de Poincaré ont introduit les concepts de groupe fondamental et d'homologie simpliciale, ont fourni une première formulation de la dualité de Poincaré, ont présenté la caractéristique d'Euler-Poincaré pour les complexes différentiels, et ont soulevé plusieurs conjectures importantes, y compris la célèbre conjecture de Poincaré, qui s'est révélé plus tard être un théorème.

On s'intéresse ici à la topologie algébrique du point de vue d'un géomètre. Autrement dit, on peut parler de *topologie géométrique*.

### 7.1 Compléments généraux sur les variétés topologiques grâce à l'homologie

#### 7.1.1 Propriétés locales algébrico-topologiques des variétés

##### 7.1.1.1 Définitions sur les variétés topologiques

###### Reformulation pratique. (*Variété topologique*)

Une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$  est un espace topologique séparé, à base dénombrable et localement homéomorphe à l'espace euclidien de dimension  $n$ .

###### Définition. (*Bon ensemble, bon voisinage sur une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ . Un *bon (ensemble) ouvert*  $V \subseteq M$  est un ouvert tel qu'il existe un ouvert  $U \subseteq M$  tel que  $U$  soit un voisinage euclidien de chacun de ses points, autrement dit  $U \simeq \mathbb{R}^n$  par  $\varphi$ , et tel  $V \subseteq U$  corresponde par  $\varphi$  à une boule

ouverte de rayon fini dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un *bon voisinage*  $V$  de  $x$  est un voisinage ouvert vérifiant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert euclidien  $U \ni x$  muni de l'homéomorphisme  $\varphi$  tel que  $V \subseteq U$  corresponde par  $\varphi$  à une boule ouverte de rayon fini dans  $\mathbb{R}^n$ .

### Proposition

Tout point d'une variété topologique admet un bon voisinage.

▷ Par hypothèse, tout point d'une variété topologique admet un voisinage euclidien  $U$  ouvert quitte à prendre son intérieur, avec si  $n = \dim(M)$ ,  $\varphi : U \simeq \mathbb{R}^n$  un homéomorphisme. Alors  $V = \varphi^{-1}(B(\varphi(x),1)) \ni x$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $U$  donc dans  $M$ , car  $U$  est ouvert, homéomorphe à  $B(\varphi(x),1)$  toujours par une restriction de  $\varphi$ . ■

#### 7.1.1.2 Locale contractibilité

##### Fait

Toute variété topologique est localement contractile.

En effet, la notion de contractibilité est stable par équivalence d'homotopie, en particulier par homéomorphie (locale).

##### Corollaire. (*Revêtement universel d'une variété*)

Toute variété topologique connexe admet un revêtement universel, qui est une variété topologique simplement connexe de même dimension.

▷ En effet, c'est un espace séparé, connexe et localement contractile. ■

#### 7.1.1.3 Théorème du voisinage tubulaire

##### Théorème. (*Théorème du voisinage tubulaire*)

On suppose qu'on a  $M \subseteq A$ , un plongement d'une variété fermée lisse dans une variété riemannienne lisse. Il existe un voisinage ouvert de  $M$  dans  $A$  qui est difféomorphe à l'espace total du fibré normal de  $M$ .

▷ On utilise le théorème de la fonction inverse généralisée, disant que si  $f : N \rightarrow A$  entre variétés est lisse et est bijective sur une sous-variété compacte  $M \subseteq N$ , alors si  $df_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} A$  est un difféomorphisme linéaire en tout  $x \in M$ ,  $f$  envoie un voisinage de  $M$  dans  $N$  sur un voisinage de  $f(M)$  dans  $A$ .

Dans notre cas, on écrit que  $TA|_M \simeq TM \oplus \nu \rightarrow M$  où  $\nu = \{v_x \in T_x A \mid v_x \perp T_x M\}$ . Si  $E = E(\nu)$ ,  $E(\varepsilon) = \{v \in \nu \mid |v| < \varepsilon\}$  est un voisinage ouvert de la section nulle.

Puisque  $A$  est riemannienne, considérons l'application exponentielle  $\exp : E(\varepsilon) \rightarrow A$  donnée par  $(x, v) \mapsto \gamma_v(1)$  où  $\gamma_v$  est l'unique géodésique lancée de  $\gamma_v(0) = x$  à la vitesse  $\frac{d}{dt}\gamma(t)|_{t=0} = v$ . Cette application est définie pour  $v$  assez petit. De plus,  $\exp$  est bijective sur la section nulle et  $d\exp|_M = id$ , donc par le théorème rappelé en début de preuve, il existe un voisinage de la section nulle dans  $E(\varepsilon)$  qui s'envoie difféomorphiquement sur un voisinage de  $M$  dans  $A$ . ■

**VOC** Un tel voisinage est appelé *voisinage tubulaire* de  $M$  dans  $A$ .

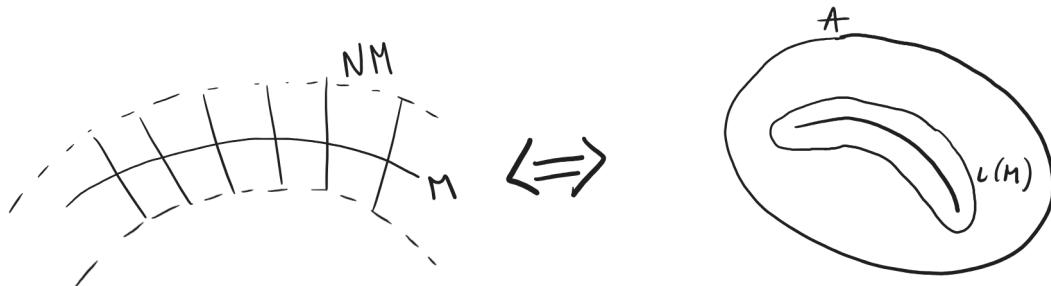


FIGURE 7.1.1 : Le voisinage tubulaire d'une variété plongée est difféomorphe à son fibré normal. —

#### 7.1.1.4 Platitude locale

##### Définition. (*Platitude locale*)

Soit  $N$  une  $d$ -variété plongée dans une  $n$ -variété  $M$ . Si  $x \in N$ , on dit que  $N$  est *localement plate* en  $x$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que la paire topologique  $(U, U \cap N)$  soit homéomorphe à la paire  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  munie des inclusions standards, autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ U \cap N & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^d \end{array}$$

commute. Une sous-variété plongée est *localement plate* si elle est localement plate en tout point. Une application  $\chi : N \rightarrow M$ , même si ce n'est pas un plongement, est *localement plate* si tout point admet un voisinage dont l'image est localement plate.

##### Définition. (*Variété à collier*)

Soit  $N$  une variété plongée dans une variété  $M$ . On dit que  $N$  est *à collier (dans  $M$ )* s'il existe un voisinage de  $N$  homéomorphe à  $N \times [0,1]$  tel que  $N$  corresponde à  $N \times \{\frac{1}{2}\}$  ou

$N \times \{0\}$  par cet homéomorphisme.

La platitude locale des plongements transmet des propriétés fortes qui ne sont pas partagées par tous les plongements.

**Proposition. (Brown, 1962)**

Toute variété plongée localement plate est à collier.

### Exercice 1

Donner un contre-exemple de sous-variété plongée qui n'est pas à collier.

## 7.1.2 Propriétés géométriques globales des variétés

### 7.1.2.1 Classification des variétés à équivalence d'homotopie près

On voit que l'équivalence d'homotopie n'est en général pas une bonne notion pour classifier les variétés par rapport à l'homéomorphie.

#### Proposition

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une variété de dimension  $n$  qui est contractile, *i.e.* homotopiquement équivalente à  $\{0\}$ .

▷  $\mathbb{R}^n$  convient. ■

### Exercice 2

Deux variétés fermées de dimension  $n \geq 3$  homotopiquement équivalentes, sont-elles homéomorphes ?

▷ Éléments de réponse.

Non. Indication : lentilles.

#### Conjecture

?

Deux variétés fermées asphériques de même dimension homotopiquement équivalentes sont homéomorphes.

### 7.1.2.2 Lemmes locaux-globaux sur les variétés

**Lemme.** (*Local-global pour les compacts*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédicat sur les sous-ensembles compacts de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien  $U \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
  - (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des compacts  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
  - (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par intersection décroissante) si l'on a une suite emboîtée de compacts  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  telle que toutes les  $\mathcal{P}_M(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  soient vraies, alors  $\mathcal{P}_M(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_i)$  est vraie ;
- alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout compact dans  $M$ .

▷ Soit  $U \subseteq M$  un ouvert euclidien. Si  $A \subseteq U$  est une réunion finie de compacts convexes, alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie, en remarquant que  $C_{m+1} \cap (C_1 \cup \dots \cup C_m) = (C_{m+1} \cap C_1) \cup \dots \cup (C_{m+1} \cap C_n)$  et que l'intersection de convexes et un convexe, pour appliquer la propriété de stabilité par réunion sous couvert de stabilité par intersection. Si maintenant  $A \subseteq U$  est seulement compact, alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est encore vraie : en effet, considérons, comme c'est possible, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}^*$ , une réunion finie  $B_i$  de boules fermées centrées aux points de  $A$  et de rayon  $\frac{1}{i}$ , qui soient dans  $U$  et telles que  $A \subseteq B_i$ . On pose  $A_i = B_1 \cap \dots \cap B_i$  pour tout  $i \geq 1$ . La suite  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et ce sont des compacts convexes de  $U$ . De plus, un peu par construction  $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$ , donc puisque  $\mathcal{P}_M(A_i)$  est vraie pour tout  $i \geq 1$ , on peut conclure. Soit enfin  $A$  un compact quelconque de  $M$ . On sait que  $M$  est métrisable, ce qui permet de procéder comme à l'étape précédente ! ■

Avançons.

**Lemme. (*Local-global pour les fermés*)**

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédictat sur les fermés de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est un compact et convexe dans un certain ouvert euclidien  $U \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
  - (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des fermés  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
  - (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par intersection décroissante) si l'on a une suite emboîtée de compacts  $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  telle que toutes les  $\mathcal{P}_M(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  soient vraies, alors  $\mathcal{P}_M(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_i)$  est vraie ;
  - (iv) ( $\mathcal{P}_M$  stable par réunions de compacts très disjoints) si  $(A_i)_{i \in I}$  est une collection de compacts très disjoints, i.e. il existe une collection d'ouverts deux à deux disjoints  $(N_i)_{i \in I}$  de  $M$  telle que  $A_i \subseteq N_i$  pour tout  $i \in I$ , avec  $(A_i)_{i \in I}$  telle que  $\mathcal{P}_M(A_i)$  soit vraie pour tout  $i \in I$  et  $\bigcup_{i \in I} A_i$  soit un fermé, alors  $\mathcal{P}_M(\bigcup_{i \in I} A_i)$  est vraie ;
- alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout fermé de  $M$ .

▷ On sait que  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie pour tout compact  $A \subseteq M$ , car les hypothèses du lemme local-global pour les fermés sont plus fortes que celui pour les compacts. Si  $M$  est compacte, c'est évident, car ses fermés sont compacts. Supposons donc que  $M$  ne soit pas compacte. Elle reste séparée et localement compacte en tant que variété. Considérons  $M^*$  sa compactifiée dont on note  $\infty$  le point à l'infini. On obtient donc un espace  $M^*$  séparé, et même régulier, qui admet clairement une base dénombrable. Par le théorème de métrisation d'Urysohn, il est métrisable. Soit  $d$  une métrique, que l'on peut sans problème supposer bornée par 1. On considère sur  $M$  la fonction  $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ . Si

$$x \longmapsto \frac{1}{d(x, \infty)}$$

$A \subseteq M$  est fermé, on pose  $B_j = f^{-1}([2j - 2, 2j - 1]) \cap A$  et  $C_j = f^{-1}([2j - 1, 2j]) \cap A$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , qui sont compacts, car respectivement fermés dans les compacts  $f^{-1}([2j - 2, 2j - 1])$  et  $f^{-1}([2j - 1, 2j])$ , qui sont homéomorphes à des boules fermées pour la métrique  $d$ ; plus généralement, on peut voir que  $f$  est propre. On pose  $B = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_j$  et  $C = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} C_j$ . Les sous-ensembles  $B$  et  $C$  sont des réunions très disjointes de compacts. De plus, ce sont des fermés par leur construction, donc  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(C)$  sont vraies. De façon similaire,  $\mathcal{P}_M(B \cap C)$  est vraie. Par conséquent,  $\mathcal{P}_M(B \cup C)$  est vraie, mais  $B \cup C = A$ , donc on a terminé. ■

**Lemme. (*Local-global pour les ouverts*)**

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $\mathcal{P}_M$  un prédictat sur les ouverts de  $M$ . Supposons pour  $\mathcal{P}_M$  que :

- (i) ( $\mathcal{P}_M$  sur les convexes) si  $A$  est homéomorphe, en particulier s'il est difféomorphe, à un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{P}_M(A)$  est vraie ;
- (ii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par crible) si  $\mathcal{P}_M(A)$ ,  $\mathcal{P}_M(B)$  et  $\mathcal{P}_M(A \cap B)$  sont vraies pour des ouverts  $A, B \subseteq M$ , alors  $\mathcal{P}_M(A \cup B)$  est vraie ;
- (iii) ( $\mathcal{P}_M$  stable par réunion disjointe) si  $(A_i)_{i \in I}$  est une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que  $\mathcal{P}_M(A_i)$  soit vraie pour tout  $i \in I$ , alors  $\mathcal{P}_M(\bigcup_{i \in I} A_i)$  est vraie ;

alors  $\mathcal{P}_M$  est vraie en tout ouvert de  $M$ .

▷ Par les deux premiers points, l'affirmation  $\mathcal{P}_M(U)$  est vraie pour tout réunion  $U$  finie d'ouverts convexes de  $\mathbb{R}^n$ , si  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Soient comme dans la preuve précédente  $M^* = M \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandrov de  $M$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{d(\infty, x)}$  où  $d$  est la distance sur  $M^*$ , qui est métrisable, où  $f : M \rightarrow [0, +\infty[$  est une application propre. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $K_n = f^{-1}([n, n+1])$ . On peut recouvrir le compact  $K_n$  par une réunion finie  $U_n \subseteq f^{-1}(]n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}[)$  d'ouverts convexes. Toutes les affirmations  $\mathcal{P}_M(U_n)$  sont vraies. On pose  $U = \bigcup_{2|n \in \mathbb{N}} U_n$  et  $V = \bigcup_{2|n \in \mathbb{N}} U_n$ . On déduit de la troisième hypothèse que  $\mathcal{P}_M(U)$  et  $\mathcal{P}_M(V)$  sont vraies. De plus,  $U \cap V = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} U_{2i} \cap U_{2j+1}$ , et les ouverts de cette réunion sont deux à deux disjoints et chacun de ces ouverts est une réunion finie d'ouverts convexes, donc  $\mathcal{P}_M(U \cap V)$  est vraie. Par conséquent,  $\mathcal{P}_M(U \cup V) = \mathcal{P}_M(M)$  est vraie. ■

**Méthode. (*Lemme local-global pour montrer une propriété sur les variétés*)**

Soit  $M$  une variété topologique.

- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les fermés de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les fermés sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .
- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les ouverts de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les ouverts sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .

Supposons de plus  $M$  compacte.

- ★ Soit  $P$  un prédictat sur les compacts de  $M$ . Si les hypothèses du lemme-local global pour les compacts sont vérifiées pour  $P$ , alors  $P(M)$ .

**7.1.2.3 ENR et structures simpliciale et cellulaire des variétés compactes****Fait**

Une variété topologique de dimension  $n$  qui est un  $CW$ -complexe est de dimension  $n$  en tant que  $CW$ -complexe.

On ne peut pas plonger une boule de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  pour un entier  $m < n$ .

Nous allons montrer en développant quelques notions intermédiaires que toute variété compacte est un complexe simplicial fini et donc un *CW-complexe fini*.

### Définition. (*Variété ENR*)

Un espace topologique  $X$  est un *ENR* (pour *Euclidian Neighbourhood Retract*) si c'est un rétract d'un voisinage euclidien, *i.e.* s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et un plongement  $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  tel que  $i(X)$  soit un rétract d'un voisinage de  $i(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

### Lemme. (*Locale contractibilité au sens faible*)

Soit  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  un compact,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $K$  est un rétract d'un de ses voisinages si et seulement si  $K$  est *localement contractile au sens faible*, *i.e.* tout voisinage ouvert  $U$  d'un point  $x$  de cet espace, il existe un voisinage  $V \subseteq U$  de  $x$  tel que l'inclusion  $V \hookrightarrow U$  soit homotopiquement nulle.

### Lemme. (*Caractérisation des compacts ENR*)

Un compact est un ENR si et seulement s'il peut être plongé comme un rétract dans un complexe simplicial fini.

▷ Soit  $C$  un complexe simplicial fini à  $n$  sommets. Alors  $C \subseteq T^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Réciproquement, si  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , soit  $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$  un voisinage ouvert.  $K$  est un rétract de  $U$  puis  $K \subseteq \Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$  le  $n$ -simplexe. ■

### Lemme

Toute variété topologique compacte est un ENR.

▷ Les variétés sont localement contractiles au sens fort, donc au sens faible. Il suffit ainsi de trouver un plongement  $M \subseteq \mathbb{R}^N$ , ce qui est possible, car  $M$  est compacte. ■

Par conséquence :

### Propriété. (*Triangulation des variétés compactes*)

Toute variété topologique compacte se plonge dans un complexe simplicial fini de telle sorte que l'image de ce plongement en soit un rétract.

### Corollaire. (*Structure cellulaire des variétés topologiques compactes*)

Toute variété topologique compacte est un *CW-complexe fini*.

**Corollaire.** (*Nombres de Betti d'une variété compacte, caractéristique d'Euler d'une variété compacte*)

Les groupes d'homologie d'une variété topologique compacte sont de types finis.

En particulier, ses nombres de Betti existent et **sa caractéristique d'Euler est toujours définie.**

▷ En effet, tout *CW-complexe* a une homologie de type fini, notion homologique donc réservée pas homéomorphisme. ■

**Corollaire.** (*Structure cellulaire des variétés topologiques*)

Toute variété topologique est un *CW-complexe*.

▷ Une variété est à base dénombrable, donc c'est la colimite de ses sous-variétés compactes. ■

#### 7.1.2.4 Variétés asphériques

**Propriété.** (*Asphéricité des variétés*)

Une variété topologique est asphérique si et seulement si son revêtement universel est contractile.

▷ En effet, une variété est un espace cellulaire. ■

*Remarque.* L'asphéricité est un invariant topologique.

**Exemples.** (*Variétés asphériques*)

1. Toute surface compacte orientable de genre non nul est asphérique.

En effet, elles sont revêtues soit par le plan euclidien, soit par l'espace hyperbolique.

2. Toute surface compacte non orientable excepté le plan projectif réel est asphérique.

En effet, elles sont revêtues par des surfaces orientables de genre  $\geq 1$ .

3. Tout tore généralisé est asphérique.

En effet,  $\mathbb{T}^n$  est revêtu par  $\mathbb{R}^n$ , puisque  $S^1$  est revêtu par  $R$ .

### 7.1.3 Éléments de topologie différentielle

#### 7.1.3.1 Théorèmes de lissité en basses dimensions

### 7.1.4 Orientations locales des variétés topologiques

#### 7.1.4.1 Définition topologique de l'orientabilité

**Définition.** (*Orientation de  $\mathbb{R}^n$  en algèbre linéaire*)

L'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  quotienté par la relation d'équivalence  $e \sim e' \iff \det_e(e') > 0$ , a deux ensembles. Le choix d'un élément  $e_r$  de  $\mathcal{B}$  est celui d'une *orientation* de  $\mathbb{R}^n$ . Une orientation *directe* est donnée par un élément de la classe de  $e_r$  et une orientation *indirecte* est donnée par un élément de la classe de l'autre élément de  $\mathcal{B}/\sim$ .

**Définition.** (*Orientation locale de l'espace euclidien*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Une *orientation locale* de  $\mathbb{R}^n$  en  $x$  est le choix d'un générateur du groupe cyclique infini  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ .

*Remarque.* Justifions au moins cela. On a vu ce calcul qui est un corollaire direct du théorème d'excision. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En effet, pour  $n \neq 0$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \cong S^{n-1}$  et  $\mathbb{R}^n \cong D^n$ , de plus, il est clair par construction que l'homologie relative est invariante par homotopie sur les deux membres de la paire considérée, d'où

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(D^n, S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z}$$

puisque  $(S^{n-1}, D^n)$  est une paire de Borsuk. Dans le cas  $n = 0$ ,  $H_0(\mathbb{R}^0, \emptyset) = H_0(\{\star\}) = \mathbb{Z}$  encore.

**Définition.** (*Orientations locales cohérentes de l'espace*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Remarquons que  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$  pour tout boule ouverte étant un voisinage  $B$  commun à  $x$  et  $y$ , puisque chacun de ces points en est un rétract par déformation.

Une *orientation locale cohérente* en  $x$  et  $y$  est la donnée de deux orientations locales en  $x$  et  $y$  telles que le générateur choisi pour l'orientation de  $x$  est envoyé sur le générateur choisi pour l'orientation de  $y$  par la composée des deux homéomorphismes précédents.

**Définition.** (*Orientation de l'espace euclidien*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Une *orientation* de  $\mathbb{R}^n$  est un choix cohérent d'orientations locales en toutes paires de points de  $\mathbb{R}^n$ .

Généralisons aux variétés topologiques quelconques, ce qui n'est qu'une traduction des termes, avant d'expliquer géométriquement ce que l'on a fait.

### Définition. (*Orientation d'une variété en géométrie différentielle*)

Soit  $M$  une variété différentielle munie d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ . Elle est *orientable* s'il existe un atlas équivalent à celui-ci dont les fonctions de transition  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont toutes de déterminant jacobien positif, dit alors *orienté*. Une *orientation* est un atlas orienté maximal de cette classe d'équivalence.

### Définition-propriété. (*Orientation locale d'une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Une *orientation locale* de  $M$  en  $x \in M$  est le choix d'un générateur du groupe cyclique infini  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .

▷ Montrons cet isomorphisme. Pour tout point  $x \in M$ , on sait qu'il existe un voisinage ouvert euclidien  $U \ni x$ . Par invariance de l'homologie relative par homéomorphismes, on a  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$  pour un homéomorphisme euclidien, et l'on se ramène au calcul déjà fait dans le cas des espaces euclidiens. ■

### Méthode. (*Orientation locale d'une variété topologique*)

Décrivons cet homéomorphisme avec les notations de la définition-propriété, mais si c'est inutile pour une raison développée après.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_n(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\}) \xrightarrow{\sim} H_n(D^n, S^{n-1})$  en appliquant trois fois de suite la bifonctorialité de l'homologie relative. On a ensuite  $H_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_n(D^n / S^{n-1}, S^{n-1} / S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_n(S^n)$  où le premier morphisme est donné par le théorème d'écrasement, qui vient de l'excision. Ensuite, on sait que  $\tilde{H}_n(S^n) = H_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  quant à lui donné par le théorème de Mayer-Vietoris. Pour  $n = 0$ , l'isomorphisme est donné par la preuve de l'homologie en degré nul et c'est donc une application quotient de l'augmentation du complexe singulier.

Visuellement, un  $n$ -lacet, *i.e.* la généralisation d'un lacet en dimension  $n$ , faisant un tour et un seul autour du point  $x$  est un générateur de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ . La donnée d'un générateur de  $\mathbb{Z}$  équivaut à la donnée d'un isomorphisme  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , car  $\text{Aut}_{\text{Grp}}(\mathbb{Z}) = \{id, -id\}$ . Ainsi, l'isomorphisme décrit précédemment n'est utile que d'exister pour décrire la structure de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .

### Définition-propriété. (*Orientations locales cohérentes sur une variété*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soient  $x, y \in M$ . On suppose que  $x, y \in V$  un bon voisinage commun à  $x$  et  $y$ . Remarquons qu'alors  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\})$ . Une *orientation locale cohérente* en  $x$  et  $y$  est la donnée de deux

orientations locales en  $x$  et  $y$  telles que le générateur choisi pour l'orientation de  $x$  est envoyé = pousse vers l'avant sur = vers le générateur choisi = fixe pour l'orientation de  $y$ .

▷ C'est toujours par bifonctorialité relativement aux équivalences d'homotopie de l'homologie relative. ■

### Méthode. (*Orientation locale cohérente d'une variété topologique*)

Il est plus intéressant de décrire cet isomorphisme de groupes. Étant donné deux fois par des calculs d'homologie relative, on peut guère espérer le décrire de façon explicite et simple.

Comprenons-le simplement :

#### Heuristique

Autrement dit, il s'agit de voir qu'on a orienté l'espace de la variété autour de  $x$  comme on l'aurait orienté autour d'une « boule », au sens des bons voisinages, contenant  $x$  et de même pour  $y$ , et que ces manières maintenant symétriques doivent être les mêmes.

### Définition. (*Orientation d'une variété topologique*)

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $M$  est *orientable* si l'on peut choisir des orientations locales  $x \mapsto \mu_x$  générateur de  $H_n(M, M \setminus \{x\})$  en tout point  $x \in M$  de telle façon que tout point  $x \in M$  admette un bon voisinage de sorte que les orientations locales choisies de  $M$  en tous points de ce bon voisinage soient cohérentes. Si  $M$  est une variété topologique orientable, une *orientation* de  $M$  est une telle orientation en tout point, représentée par l'application  $\mu$ .

→ *Notation.* Soit  $A \subseteq X$  une paire topologique. On note parfois  $H_*(X | A)$  l'*homologie locale* de  $X$  en  $A$  définie par  $H_*(X, X \setminus A)$ . Lorsque  $A = \{x\}$  où  $x \in X$ , on note  $H_*(X | \{x\}) = H(X | x)$ .

Énonçons :

### Lemme. (*Orientation cohérente des variétés*)

Soit  $M$  une variété topologique et  $\mu$  une orientation locale en tout point.

1. Si  $x \in M$  admet un bon voisinage  $U$ , les orientations locales choisies de  $M$  en tous points de ce bon voisinage sont cohérentes si et seulement si pour tout  $y \in U$ ,  $\mu_x, \mu_y$  sont cohérentes.
2. Si  $x \in M$  admet un bon voisinage admettant cette propriété pour  $\mu$ , qui a donc déjà deux formulations équivalentes, alors tout bon voisinage de  $x$  admet également cette propriété pour  $\mu$ .

### Corollaire

Soient  $M$  une variété de dimension  $n$  et  $x \in M$ . Alors une orientation locale en  $x$  induit pour toute boule  $B$  en termes de coordonnées locales une orientation en tout  $y \in B$ , canoniquement déterminée par les isomorphismes :

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \leftarrow H_n(M, M \setminus B) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\}).$$

### Remarques.

1. Sur une variété de dimension 1, une orientation locale autour d'un point correspond à un choix de gauche et de droite près de ce point.
2. Sur une variété de dimension 2, une orientation locale autour d'un point correspond à un choix de sens horaire ou antihoraire autour de ce point.
3. Heuristiquement, ces situations partagent la propriété commune qu'elles s'expriment en terme de comportement local proche de  $x$  mais pas en  $p$ , ce qui justifie l'introduction du groupe  $H_n(M, M \setminus \{x\})$ .
4. On dit que l'orientation consiste en le choix d'une *sphère positive* autour d'un point ou d'une *sphère négative*, selon le signe du générateur choisi de ce groupe, de dimension la dimension de la variété. Une telle terminologie prend tout son sens en considérant le graphe, au sens des sous-variétés de l'espace euclidien, du voisinage considéré.
5. Dans chacun des exemples ci-dessus et comme dans le cas général, **une orientation correspond à un choix et l'orientabilité à une possibilité de choix.**

### Proposition

Une variété topologique connexe a au plus deux orientations.

▷ Il s'agit seulement de montrer que, sur une variété topologique, deux points  $x, y$  dans la même composante connexe sont toujours contenus dans un bon voisinage ouvert.

C'est facile en utilisant la définition des variétés par homéomorphismes euclidiens à  $\mathbb{R}^n$  où  $n$  est la dimension de notre variété. Il suffit de montrer que  $x$  et  $y$  sont dans un même ouvert de carte. Soit alors  $\varphi$  l'homéomorphisme associé. Si  $x \in B_1$  un bon voisinage euclidien pour  $\varphi$  et  $y \in B_2$  de même, soit  $B_3$  une boule de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $\varphi(B_1)$  et  $\varphi(B_2)$ . Alors  $\varphi^{-1}(B_3)$  est un bon voisinage  $\ni x, y$ . ■

### Proposition

L'orientation des variétés le long de deux composantes connexes distinctes est indépendante.

▷ L'argument est l'inverse du précédent : deux points d'une variété topologique dans deux composantes connexes différentes ne seront jamais dans un bon voisinage ouvert commun. C'est trivial, car une boule ouverte euclidienne est connexe et la connexité est préservée par homéomorphisme, et donc on aurait nos deux points contenus dans un même ouvert connexe, contradiction. ■

**Proposition. (*Lien entre les orientations topologiques et différentielles*)**

Une variété topologique munie d'une structure différentielle  $C^1$  est orientable en tant que variété topologique si et seulement si elle est orientable en tant que variété différentielle pour cette structure.

▷ Soit  $M$  une variété différentielle  $C^1$  de dimension  $n$  orientable en tant que variété différentielle. Soit  $x \in M$  un point. Soit  $(U, \varphi)$  un ouvert de carte contenant  $x$ ,  $\varphi$  centrée en  $x$ . On suppose sans problème  $\varphi(U) = \mathbb{R}^n$ . On fixe un générateur  $\alpha \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$ . Alors  $\varphi_*^{-1}(\alpha) \in H_n(U, U \setminus \{x\})$  en est un générateur. Si  $(U', \varphi')$  est un ouvert ouvert de carte contenant  $x$ ,  $\varphi'$  centrée en  $x$ , le difféomorphisme  $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert est de jacobien strictement positif en tout point en tant que transition d'une orientable. On peut montrer qu'un tel difféomorphisme est isotope à l'identité par des difféomorphismes. On obtient qu'une application  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  fournie par  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  est homotope à l'identité. On obtient une application  $M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  (avec le vocabulaire introduit ci-dessous) et l'on vérifie facilement que cette application est continue, donc que c'est une section (dont toutes les valeurs sont des générateurs). Par conséquent,  $M$  est orientable en tant que variété topologique.

La réciproque est plus simple. Supposons que  $M$  soit topologiquement orientable. Soit  $s : M \rightarrow \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  une section dont toutes les images sont des générateurs. Pour chaque carte locale  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on peut carer  $s(x)$  où  $x \in U$  et le générateur fixé de  $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ . Si nécessaire, on peut composer des cartes avec une réflexion de  $\mathbb{R}^n$ . On obtient un atlas orienté de  $M$ , en utilisant les arguments de l'implication précédente : étant donnée une transition de jacobien négatif, on compose par une réflexion et on l'obtient positif, donc les orientations sont cohérentes. Mais elles l'étaient déjà, on l'a démontré, donc elles ne le sont plus... c'est que tous les jacobiens de transition sont positifs. ■

**Définition. (*Fonction topologique préservant l'orientation, atlas topologique orienté*)**

Soit  $M$  une variété quelconque, non orientée a priori. Soit  $n = \dim(M)$ . Une fonction de transition  $f = \varphi \circ \psi^{-1}$  où  $\varphi, \psi$  sont deux cartes préserve l'orientation si elle fixe les générateurs de  $H_n(M, M \setminus \{p\})$  pour tout  $p \in M$ .

Un *atlas (topologique) orienté* de  $M$  est un atlas topologique pour lequel toutes les fonctions de transition préservent l'orientation. Une *orientation (topologique)* de  $M$  est un atlas topologique orienté maximal au sens des atlas topologiques orientés.

**Fait. (*Reformulation de l'orientation topologique*)**

Une variété est topologique si et seulement si elle admet un atlas topologique orienté.

En effet...

**Exemples. (*Orientation des variétés topologiques*)**

1. Tout ouvert d'une variété orientable est orientable.  
Clair.
2. Un espace discret  $X$  pris comme variété discrète de dimension nulle est toujours orientable. Le choix d'une orientation revient par l'homologie des discrets à un choix de signes en chaque point de l'espace. Il y a donc  $2^{|X|}$  orientations possibles pour  $X$ .
3. Le ruban de Möbius n'est pas orientable. En effet, c'est une variété différentielle  $C^1$  non orientable en tant que variété différentielle.
4. Quid des variétés complexes ?
5. L'orientation est une notion topologique, elle est préservée par les homéomorphismes.

Puisque l'homologie relative est stable par homéomorphie.

**Théorème**

Toute orientation sur une variété à bord induit une orientation de son bord. En particulier, le bord d'une variété orientable est une variété orientable.

▷ Étant donnée  $\mu$  une orientation d'une variété à bord  $M$ , considérons  $\mu|_N$  où  $N = \partial M$ . Puisque la projection de  $\mathbb{R}^n$  où  $n = \dim(M)$  sur  $\mathbb{R}^{n-1}$  est ouverte, et que deux points du bord dans un même bon voisinage pour  $N$  sont aussi dans un bon voisinage de  $M$ ,  $\mu$  reste une orientation sur  $N$ .

Il reste à prouver ce point. A priori, deux points  $x, y$  dans le bon voisinage  $U$  pour  $N$  sont dans le voisinage  $\pi^{-1}(U)$  de  $M$  qui est un cylindre dans  $\mathbb{R}^n$  près et donc pas un bon voisinage. Le problème devient alors géométrique : étant donnée une boule  $B$  de dimension  $n$ , peut-on inclure  $B$  dans une boule de dimension  $n + 1$  incluse dans le cylindre infini  $B \times \mathbb{R}$ ? C'est évidemment le cas. ■

**Exercice 3**

1. Trouver une variété non orientable dont le bord est orientable.
2. Trouver une variété non orientable dont le bord est non orientable.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Le ruban de Möbius  $\mathbb{M}$  est non orientable, mais son bord est  $S^1$ , qui l'est.
2. La bouteille de Klein est une variété sans bord non orientable. La variété cylindrique  $\mathcal{K} \times [0,1]$  de bord  $\mathcal{K} \times \{0\} \cup \mathcal{K} \times \{1\}$  est non orientable de bord non orientable.

**Contre-exemple. (*L'orientabilité n'est pas un invariant d'homotopie*)**

Le cylindre et le ruban de Möbius sont homotopiquement équivalents, car tous deux équivalents au cercle. Cependant le premier est orientable et le second ne l'est pas. □

Toutes les variétés ne sont donc pas orientables, mais :

### 7.1.4.2 Le revêtement double d'orientation

#### Proposition



Toute variété topologique  $M$  de dimension  $n \geq 1$  admet un revêtement double  $\tilde{M} \rightarrow M$ , dit *revêtement (double) d'orientation*, telle que  $\tilde{M}$  soit une variété topologique orientable.

▷ Posons  $\tilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M \text{ ET } \mu_x \in H_n(M \mid x) \simeq \mathbb{Z} \text{ en est un générateur}\}$ , ou bien sûr on n'identifie pas les  $H_n(M \mid x)$ . Il s'agit donc de prendre toutes les orientations locales en tous les points de  $M$ . On considère l'application  $p: \tilde{M} \rightarrow M$ , qui est un bon candidat puisque ses

$$\mu_x \longmapsto x$$

fibres sont évidemment de cardinal 2. On munit  $\tilde{M}$  d'une topologie dont une base est formée par la collection de sous-ensembles  $V(\mu_V) \subseteq \tilde{M}$ , où  $V \subseteq M$  est un bon sous-ensemble ouvert de  $M$ ,  $\mu_V \in H_n(M \mid V) \simeq \mathbb{Z}$  en est un générateur et  $V(\mu_V)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}$  tel que  $x \in V$  et  $\mu_x$  est l'image de  $\mu_V$  par l'isomorphisme  $\varphi_x: H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M \mid x)$  donné par fonctorialité de l'homologie relative et pas un autre, autrement dit,  $V(\mu_V) = \{\varphi_x(\mu_V^1), \varphi_x(\mu_V^2), x \in V\}$  en notant  $\mu_V^1, \mu_V^2$  les deux générateurs de  $H_n(M \mid V)$ . En effet, l'intersection de deux  $V(\mu_V)$  est clairement une réunion de tels sous-ensembles, donné pour deux bons ouverts  $V, V'$  par  $V(\mu_V) \cap V(\mu_{V'}) = V(\mu_{V \cap V'})$ , puisque par choix des isomorphismes,  $\varphi_{V \cap V'} = \text{phi}_{V \cap V'}|_{H_n(M \mid V \cap V')}$  par construction de la suite exacte longue associée à un triplet. Alors  $p$  est un revêtement à deux feuillets, ce qui est par construction, et  $\tilde{M}$  est une variété topologique orientable. Pour ce dernier point, on utilise que les  $V$  considérés définissant les  $V(\mu_V)$  sont de bons ouverts.  $\tilde{M}$  a alors une orientation locale canonique donnée par l'image de  $\mu_x$  par  $H_n(\tilde{M} \mid \mu_x) \simeq H_n(V(\mu_V) \mid \mu_x) \simeq H_n(V \mid x)$  pour tous  $x \in V$  bon ouvert. ■

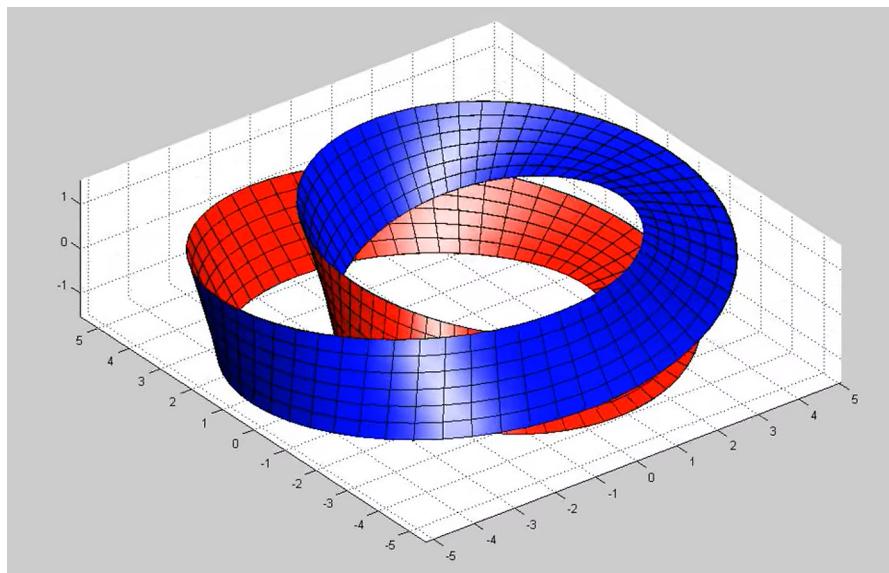


FIGURE 7.1.2 : Revêtement double d'orientation du ruban de Möbius. —  
C'est le ruban sans torsion,  $\cong S^1$ .

Cette construction universelle peut apporter de précieux renseignements :

### Remarques.

- Une variété  $M$  connexe est orientable si et seulement si  $\tilde{M}$  a deux composantes connexes. Le cas échéant,  $p$  est trivial, au sens que  $\tilde{M} = M \sqcup M$ .

Puisque  $M$  est connexe,  $\tilde{M}$  a une seule ou deux composantes connexes. S'il en a deux, chacune est homéomorphe à  $M$  par  $p$ , d'où la remarque. De plus, par ouverture des composantes connexes en nombre fini, chacune est orientable, donc  $M$  l'est. Réciproquement, si  $M$  est orientable, elle a deux orientations puisque  $M$  est connexe, et chacune définit une composante connexe de  $M$ , ce qui se voit assez facilement.

- (Orientation des variétés simplement connexes) Si  $M$  est simplement connexe, alors  $M$  est orientable.

C'est une conséquence du point suivant.

- Soit  $M$  une variété connexe. Si  $\pi_1(M)$  n'a pas de sous-groupe d'indice 2, alors  $M$  est orientable.

Si  $p$  est un revêtement à deux feuillets et  $\tilde{M}$  est connexe, alors  $p^*\pi_1(\tilde{M})$  est un sous-groupe d'indice 2 de  $\pi_1(M)$ . Donc  $\tilde{M}$  n'est pas connexe, donc par la première remarque,  $M$  est orientable.

- (Orientation par section du revêtement double canonique)  $s : x \mapsto \mu_x$  est une section de  $p$ , i.e.  $ps = id_M$ , si et seulement si  $M$  est orientable. Le cas échéant, cette section est un choix d'orientation locale cohérente en tout point de  $M$ .

- (Unicité essentielle du revêtement d'orientation) Le revêtement d'orientation  $\tilde{M}$  de  $M$  est unique à isomorphisme près. En effet, il est déterminé par les *lacets désorientants*.

### Définition. (*Orientation le long d'un fermé*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $A$  un fermé de  $M$ . Soit  $\tilde{M}$  le revêtement d'orientation de  $M$ . On parle d'*orientabilité de  $M$  le long de  $A$*  s'il existe une section du revêtement  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  définie sur  $A$ , i.e. une section du revêtement de base  $A$  induit par  $p : \tilde{p} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  et  $s : A \rightarrow p^{-1}(A)$  tel que  $ps = id_A$ .

Autrement dit, aucun des lacets basés en un point de  $A$  contenu dans  $A$ , ne sont désorientants.

*Remarque.* D'après une remarque précédente l'orientabilité d'une variété le long d'elle-même est son orientabilité.

Généralisons à coefficients quelconques. Soit donc  $G$  un groupe abélien fixé.

On peut considérer le *revêtement de  $G$  orientation*  $\tilde{M}_G = \bigcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ . On introduit une topologie sur  $\tilde{M}$  à l'aide d'une base formée de  $V(\mu_V)$  où  $V \subseteq M$  est un bon ouvert,  $\mu_V \in H_n(M, M \setminus V; G)$ ,  $V(\mu_V)$  est formé de  $\mu_x \in \tilde{M}_G$  tel que  $x \in V$  et  $\mu_x$  soit l'image de  $\mu_V$  par l'isomorphisme  $H_n(M, M \setminus V; G) \xrightarrow{\sim} H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ .

**Remarque importante.** Ainsi, le revêtement double d'orientation est un sous-revêtement d'un revêtement plus large donné par  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$  dit *grand revêtement d'orientation*.

**Propriété. (*Caractérisation de l'orientabilité topologique*)**

Soit  $M$  une variété topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est orientable ;
- (ii)  $M$  est orientable le long de tous ses compacts ;
- (iii) les générateurs des fibres du revêtement  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$  forment un revêtement double trivial ;
- (iv)  $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \simeq M \times \mathbb{Z}$  par un isomorphisme de revêtements.

$\triangleright (i) \implies (ii)$  :

$(ii) \implies (iii)$  :

$(iii) \implies (iv)$  :

$(iv) \implies (i)$  :

■

**Exercice 4 (Opérations sur les variétés orientables)**

1. Montrer que le produit de variétés topologiques orientées est orienté.
2. Montrer que la somme connexe de variétés topologiques orientées est orientable. Montrer que dans le cas d'une somme à  $n$  éléments de variétés connexes,  $2^n$  orientations sont possibles.

**Fait. (*Groupe des sections à support compact*)**

Si  $M$  est une variété et  $G$  un groupe abélien, on peut additionner deux sections de  $\tilde{M}_G$  par structure additive de cet espace. On a donc, si  $G$  est un groupe abélien et  $A \subseteq M$  un fermé, un morphisme

$$\mathcal{I}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$$

où  $\Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$  est le groupe des sections de  $p$  à support compact définies sur  $A$ .

Soit  $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; G)$ . Décrivons l'image de  $\alpha$ . Soit  $x \in A$ . Alors  $\mathcal{I}_A(\alpha)(x)$  est l'image de  $\alpha$  par le morphisme  $H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  induit par l'inclusion. Vérifions que  $\mathcal{I}_A(\alpha)$  est continue et à support compact. Soit  $c \in C_n(M; G)$  un représentant (d'un représentant) de  $\alpha$ . L'image de  $c$  (la réunion des images de tous les simplexes singuliers de  $c$ ) est un sous-ensemble compact  $K$  de  $M$ . Si maintenant  $x \in A \setminus K$ , alors  $\mathcal{I}_A(\alpha)(x) = 0$ . En effet, puisque  $K \subseteq M \setminus \{x\}$ , l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus A; G)$  est envoyée en  $0 \in C_n(M, M \setminus \{x\}; G)$ . D'autre part, si je considère le bord de  $c$ , avec  $\partial c \in C_{n-1}(M \setminus A; G)$  par un léger abus, l'image de  $\partial c$  est un compact  $K' \subseteq M$ . Si  $x \in A$ , on peut choisir un bon voisinage  $V \ni x$  dans  $M$  tel que  $K' \subseteq M \setminus V$ . Donc, l'image de  $c$  dans  $C_n(M, M \setminus V; G)$  définit une classe d'homologie  $\beta \in H_n(M, M \setminus V; G)$ . La section  $V \rightarrow V \times \{\beta\}$  coïncide avec  $\mathcal{I}_A(\alpha)$  sur  $V \cap A$ .

### 7.1.4.3 Homologie des variétés en degré de dimension

#### Théorème

Soient  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ ,  $A$  un fermé de  $M$  et  $G$  un groupe abélien.

1. (*Homologie des variétés en grandes dimensions*)  $H_k(M, M \setminus A; G) = 0$  pour tout entier  $k > n$ . En particulier,  $H_k(M; G) = 0$  pour tout  $k > n$ .
2.  $\mathcal{I}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$  est un isomorphisme. En particulier,  $H_n(M; G) \simeq \Gamma_c(M, \tilde{M}_G)$ .

▷ Successivement :

1. TBC

2. Utilisons le lemme local-global (pour les fermés). Dans toute la suite, on ne mentionne pas le module des coefficients, qui est  $G$ .

(i) Immédiat pour les compacts convexes.

(ii) On considère la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(M, M \setminus (A \cap B)) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cup B)) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus A) \oplus H_n(M, M \setminus B) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus (A \cap B)) \\ \downarrow = & & \downarrow \mathcal{I}_{A \cup B} & & \downarrow \mathcal{I}_A \oplus \mathcal{I}_B & & \downarrow \mathcal{I}_{A \cap B} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c(A \cup B, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma_c(A, \tilde{M}_G) \oplus \Gamma_c(B, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma_c(A \cap B, \tilde{M}_G) \end{array}$$

qui donne le résultat par le lemme des cinq.

(iii) On pose  $A = \bigcap_i A_i$ . Les morphismes de restrictions  $\Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \rightarrow \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , induisent un isomorphisme  $\varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \xrightarrow{\sim} \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ . On rappelle que la construction ensembliste de cette limite inductive est donnée par le quotient de la réunion par la relation d'équivalence : deux éléments ont au moins un couple de leurs images dans l'un des termes suivants qui coïncide. Par propriété universelle :

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(A_1, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma(A_2, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \Gamma(A_3, \tilde{M}_G) & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & \downarrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \downarrow \\ & & \Gamma(A, \tilde{M}_G) & & & & \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) \\ & & \nearrow & \nwarrow & \nearrow & \nwarrow & \nearrow \\ & & & & & & \exists! \varphi \end{array}$$

et l'on sait que  $\varphi$  est un isomorphisme, car pour tout voisinage  $W \supseteq A$ , il existe  $A_i$  tel que  $A_i \subseteq W$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim H_n(M, M \setminus A_i) & \xrightarrow{\sim} & H_n(M, M \setminus A) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \mathcal{I}_A \\ \varinjlim \Gamma(A_i, \tilde{M}_G) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(A, \tilde{M}_G) \end{array}$$

qui commute. Donc  $\mathcal{I}_A$  est un isomorphisme.

- (iv) On a pour  $A_i \subseteq N_i$  voisinage ouvert,  $H_n(M, M \setminus \cup_i A_i) \simeq H_n(\cup_i N_i, (\cup_i N_i) \setminus (\cup_i A_i)) \simeq \oplus_i H_n(N_i, N_i \setminus A_i) \simeq \oplus_i H_n(M, M \setminus A_i)$ . Pour les groupes de sections à support compact, on a des isomorphismes similaires.

Ceci permet de conclure. ■

### Heuristique

L'homologie en degré de dimension est critiquement reliée aux orientations des variétés.

#### Corollaire. (*Homologie à coefficients en dimension d'une variété non compacte*)

Soit  $G$  un groupe abélien. Soit  $M$  une variété topologique connexe. Si  $M$  n'est pas compacte, alors  $H_n(M; G) = 0$ .

▷ Montrons que  $\Gamma_c(M, \tilde{M}_G)$ , i.e. pour  $A = M$ , est un singleton. Soit  $s$  une section du revêtement d'orientation  $p$  définie sur  $M$ . Alors  $s^{-1}(0)$  est un fermé de  $M$ , car  $s$  est continue, et un ouvert de  $M$ , car  $s$  est à support compact donc fermé, car  $M$  est séparée. De plus, il est non vide. Comme  $M$  n'est pas compacte,  $s$  ne peut être non nulle sur tout  $M$ ,  $s^{-1}(0) = M$ , donc  $s = 0$ . Ainsi,  $\Gamma_c(M, \tilde{M}_G) = \{0\} \simeq H_n(M; G)$ . ■

#### 7.1.4.4 $G$ -orientabilité

On se rappelle la définition du revêtement de  $G$ -orientation.

#### Définition. ( *$G$ -orientabilité*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Dans ce cas (*via la section précédente*), on a un isomorphisme de  $G$ -modules  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G) \simeq G$  pour tout  $x \in M$ .

La variété  $M$  est dite  *$G$ -orientable* s'il existe une section continue  $M \rightarrow \tilde{M}_G$  dont toutes les valeurs sont des générateurs de fibres (en tant que  $G$ -modules).

### Propriétés

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire.

1. Toute variété orientable est  $R$ -orientable.
2. Une variété non orientable est  $R$ -orientable si et seulement si  $2 = 0$  dans  $R$ .

#### Propriété. (*Caractérisation de la $G$ -orientabilité topologique*)

Soit  $M$  une variété topologique. Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M$  est  $G$ -orientable ;
- (ii)  $M$  est  $G$ -orientable le long de tous ses compacts ;

- (iii) les générateurs des fibres du revêtement  $\tilde{M}_G \rightarrow M$  forment un revêtement double trivial ;
- (iv)  $\tilde{M}_G \simeq M \times G$  par un isomorphisme de revêtements.

▷ Par définition, il suffit de montrer le deuxième point. ■

### Exemples. (*Orientabilité à coefficients*)

1. Si  $G = \mathbb{Z}$ , on retrouve la notion précédente d'orientabilité comme  $\mathbb{Z}$ -orientabilité.

Par la proposition fondamentale du grand revêtement d'orientation.

2. Toute variété topologique est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientable et canoniquement orientée.

En effet, pour tout variété  $M \ni x$  de dimension  $n$ , le groupe  $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  n'a qu'un seul générateur ! Une section continue existe alors toujours, il suffit de considérer un choix de générateur constant. Comme ce choix n'en est pas un, la section considérée est bel et bien canonique, d'où la canonicité de l'orientation.

Remarquons qu'il est peu visuel de se dire que le ruban de Möbius est canoniquement  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orienté, mais que faire.

### Corollaire. (*Homologie en degré de dimension d'une variété orientable*)

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$  et soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Supposons que  $M$  soit compacte. Si  $M$  est  $G$ -orientable, alors le morphisme évident  $H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  est un isomorphisme pour tout  $x \in M$ .

En particulier, pour tout anneau commutatif unitaire, pour toute variété topologique  $M$  connexe, compacte et  $G$ -orientable de dimension  $n$ ,  $\boxed{H_n(M; G) \simeq G}$ .

En particulier, pour toute  $n$ -variété fermée connexe,  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

▷ En effet, on applique le théorème à  $A = M$ . ■

*Remarque.* Le morphisme évident  $H_n(M; G) \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  est l'application induite en homologie par la projection canonique du complexe de chaînes singulières sur le complexe de chaînes singulières relatives

### Exercice 5

Déterminer  $H_n(M; G)$  où  $G$  est un anneau commutatif unitaire et  $M$  est une variété topologique connexe, compacte et non  $G$ -orientable.

▷ Éléments de réponse.

On montre que  $H_n(M; G) = \{r \in G \mid 2r = 0\}$  ; en particulier, si  $M$  est non orientable,  $H_n(M) = 0$ .

Ainsi, une  $n$ -variété fermée  $M$  est orientable si et seulement si  $H_n(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ .

**Conseils**

- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . Alors  $H_{k>n}(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  non compacte. Alors  $H_n(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte et orientable. Alors  $H_n(M) = \mathbb{Z}$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte et non orientable. Alors  $H_n(M) = 0$ .
- ◊ Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  compacte. Alors  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- ◊ Soient  $M$  une variété de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif. Si  $M$  est non compacte, alors  $H_n(M; R) = 0$ .
- ◊ Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif. Si  $M$  est  $R$ -orientable, alors  $H_n(M; R) = R$ .
- ◊ Soient  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif. Si  $M$  est non  $R$ -orientable, alors  $H_n(M; R) = \{r \in R \mid 2r = 0\} = 0$ .

**7.1.4.5 Classes fondamentales****Définition. (*Classe fondamentale*)**

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ . Un élément de  $H_n(M; G)$  dont l'image par le morphisme évident dans  $H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$  soit un générateur pour tout  $x \in M$ , s'appelle une *classe fondamentale (d'homologie)* de  $M$  à coefficients dans  $G$ .

**Fait. (*Existence des classes fondamentales*)**

Une telle classe existe si et seulement si  $M$  est fermée et  $G$ -orientable.

Voir le théorème suivant.

→ *Notation.* Si  $M$  est compacte,  $G$ -orientable et  $G$ -orientée, alors on note  $[M]$  la classe fondamentale donnée par la section du revêtement double choisie pour l'orientation.

**Reformulation pratique. (*Classe fondamentale sur  $\mathbb{Z}$* )**

Si  $M$  est une variété fermée  $\mathbb{Z}$ -orientée connexe de dimension  $n$ , la classe fondamentale de  $M$  existe, est unique et correspond au choix de générateur de  $H_n(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  déterminé par l'orientation.

**Reformulation pratique. (*Orientation en termes de classes fondamentales*)**

Une orientation pour une  $n$ -variété  $M$  est une fonction qui assigne à chaque  $x \in M$  une orientation locale  $\mu_x$  qui varie continûment avec  $x$ , dans le sens suivant : pour chaque  $x$ , il doit exister un voisinage compact  $N$  et une classe  $\mu_N \in H_n(M, M \setminus N)$  telle que

$\rho_y(\mu_N) = \mu_y$  pour tout  $y \in N$ .

### Définition. (*Restriction d'une classe*)

Soit  $M$  une  $n$ -variété non nécessairement compacte. Soient  $K \subseteq L$  deux compacts de  $M$ . On note  $\rho_K$  le morphisme naturel

$$H_i(M, M \setminus L) \rightarrow H_i(M, M \setminus K)$$

pour  $i \in \mathbb{N}$ , de sorte que l'image  $\rho_K(\alpha)$  d'une classe  $\alpha$  sera pensée comme la *restriction de  $\alpha$  à  $K$* .

### Lemme

Soit  $M$  une  $n$ -variété. Soit  $K$  un compact de  $M$ . Une classe d'homologie  $\alpha \in H_n(M, M \setminus K)$  est nulle si et seulement si la restriction  $\rho_K(\alpha) \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  est nulle pour tout  $x \in K$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) La preuve est longue et difficile, et peut se faire en six étapes, grâce au lemme local-global pour les compacts. ■

### Théorème

Pour toute  $n$ -variété orientée  $M$  et tout compact  $K \subseteq M$ , il existe une unique classe  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$  telle que  $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$  pour tout  $x \in K$ .

En particulier, si  $M$  est compacte, alors il existe une unique classe  $\mu_M \in H_n M$  ayant la propriété requise. C'est cette classe  $\mu = \mu_M$  qui est la classe fondamentale de  $M$ .

▷ L'unicité de  $\mu_K$  découle immédiatement du lemme. La preuve de l'existence sera divisée en trois étapes.

**Cas 1.** Si  $K$  est contenu dans un voisinage suffisamment petit d'un point donné, alors l'existence de  $\mu_K$  découle de la définition de l'orientation.

**Cas 2.** Supposons que  $K = K_1 \cup K_2$  où  $\mu_{K_1}$  et  $\mu_{K_2}$  existent. Comme dans la preuve du lemme, il existe une suite exacte :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(M, M \setminus K) \xrightarrow{s} H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) \xrightarrow{t} H_n(M, M \setminus K_1 \cap K_2) \longrightarrow \dots$$

où

$$s(\alpha) = \rho_{K_1}(\alpha) \oplus \rho_{K_2}(\alpha)$$

$$t(\beta \oplus \gamma) = \rho_{K_1 \cap K_2}(\beta) - \rho_{K_1 \cap K_2}(\gamma).$$

Or,  $t(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}) = 0$ , par le théorème d'unicité appliqué à  $K_1 \cap K_2$ , donc  $\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2} = s(\alpha)$  pour un certain  $\alpha \in H_n(M, M \setminus K)$  unique. Cette classe  $\alpha$  est la classe  $\mu_K$  recherchée.

**Cas 3.**  $K$  quelconque. Alors  $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$  où les  $\mu_{K_i}$  existent par le premier cas. La classe  $\mu_K$  est maintenant construite par induction sur  $r$ . ■

*Remarque.* Pour tout anneau de coefficients  $\Lambda$ , l'homomorphisme unique  $\mathbb{Z} \rightarrow \Lambda$  induit une classe dans  $H_n(M, M \setminus K; \Lambda)$  qui sera également notée  $\mu_K$ . Le cas  $\Lambda = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est particulièrement important, puisque la classe d'homologie de dimension 2 modulo 2  $\mu_K \in H_2(M, M \setminus K; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  peut être construite directement pour une variété arbitraire, sans faire aucune hypothèse d'orientabilité.

*Remarque. (Classes fondamentales des variétés à bord)* Des considérations similaires s'appliquent à une variété orientée avec bord  $M$ . Pour tout sous-ensemble compact  $K \subset M$ , il existe une classe unique  $\mu_K \in H_n(M, (M \setminus K) \cup \partial M)$  telle que  $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$  pour tout  $x \in K \cap (M \setminus \partial M)$ . En particulier, si  $M$  est compacte, alors il existe une classe fondamentale d'homologie unique  $\mu_M \in H_n(M, \partial M)$  avec la propriété requise. On peut montrer que l'homomorphisme naturel  $\partial : H_n(M, \partial M) \rightarrow H_{n-1}(\partial M)$  envoie  $\mu_M$  sur la classe fondamentale d'homologie de  $\partial M$ .

### Propriété. (Classe fondamentale de l'orientée inverse)

Soit  $M$  une variété fermée orientée. Alors  $[\bar{M}] = -[M]$ .

### Propriété. (Classe fondamentale d'une somme disjointe)

Soient  $M_1, M_2$  deux variétés fermées orientées. Alors  $[M_1 \sqcup M_2] = [M_1] \oplus [M_2]$ .

### Fait

Soit  $M$  une variété fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Alors la classe fondamentale détermine un morphisme

$$\begin{aligned} H^n(M; R) &\longrightarrow R \\ c &\longmapsto \langle c, [M] \rangle. \end{aligned}$$

### Définition. (Classes réalisables)

Soit  $G$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$  et soit  $N \subseteq M$  une sous-variété topologique compacte  $G$ -orientable et  $G$ -orientée de  $M$  de dimension  $k \subseteq n$ . On considère la classe fondamentale  $[N] \in H_k(N; G)$ . La *classe réalisée par  $N$  dans  $H_k(M; G)$*  est  $i_*(N)$  où  $i_* : H_k(N; G) \rightarrow H_k(M; G)$  est le morphisme induit par l'inclusion canonique.

**Exercice 6** (*Une question non triviale : classes réalisables d'une variété*)

On fixe  $G = \mathbb{Z}$ .

1. Déterminer les classes réalisables dans  $S^1$ .
2. Déterminer les classes réalisables dans  $S^2$ .
3. Déterminer les classes réalisables dans  $\mathbb{T}$ .

### 7.1.5 Classification des variétés topologiques de très petites dimensions

#### 7.1.5.1 Sommes connexes de variétés

**Définition.** (*Somme connexe de variétés topologiques*)

Soient  $A$  et  $B$  deux variétés topologiques de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . La *somme connexe* de  $A$  et  $B$ , notée  $A \# B$ , est la variété topologique de dimension  $n$  obtenue en retirant un voisinage homéomorphe à un disque  $D^n$  à chaque et en les recollant le long des sphères  $S^{n-1}$  apparues.

**Proposition**

La somme connexe de deux variétés connexes est une variété connexe.

▷ Montrons que c'est une variété. ■

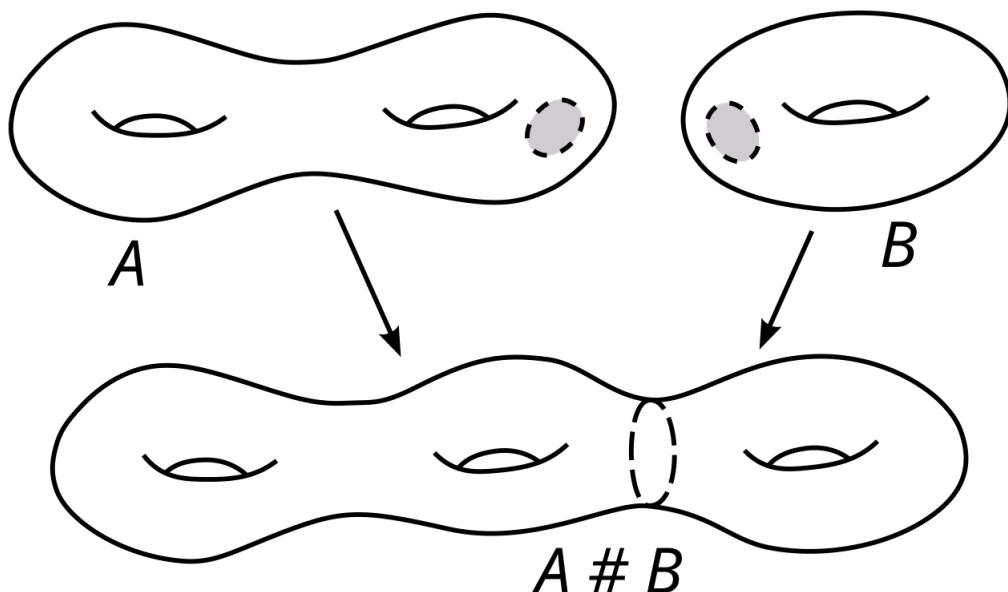


FIGURE 7.1.3 : *Somme connexe de deux surfaces topologiques.* —  
On retire un disque au deux surfaces et on les recolle le long des cercles qui les bordent.

**Propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une somme connexe*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $M, N$  deux variétés de dimension  $n$ . Alors

- ★ si  $n$  est pair,  $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$  ;
- ★ si  $n$  est impair,  $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N)$ .

**7.1.5.2 Variétés topologiques de dimension nulle****Fait. (*Variétés topologiques de dimension 0*)**

Les variétés topologiques connexes de dimension 0 sont les points. Les variétés topologiques de dimension 0 sont les discrets dénombrables.

Soit  $x \in M$  variété topologique connexe de dimension 0. Soit  $U$  un ouvert de  $M$  contenant  $x$ ,  $U$  homéomorphe à  $\{0\}$ . Alors  $U = \{x\}$ , dont  $x$  est isolé dans  $M$ . Donc  $M$  est discrète. Puisque  $M$  est connexe,  $M = \{x\}$ . On aurait aussi pu dire que  $\{x\}$  était ouvert fermé, puisque  $M$  est séparée.

Pour le cas non connexe, une réunion disjointe de points est discrète, et réciproquement, tout discret dénombrable est séparé, à base dénombrable et trivialement tout point est son propre voisinage euclidien.

*Remarque.* On classifie de même les variétés différentiables de dimension 0 de n'importe quelle classe de régularité.

**7.1.5.3 Variétés topologiques de dimension 1****Lemme. (*Variété compactes de dimension 1*)**

Toute variété compacte (connexe) unidimensionnelle est homéomorphe au cercle.

▷ Soit  $M$  une variété topologique compacte connexe de dimension 1. Soit  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de  $M$  avec  $I$  fini. Soient  $U_i, U_j$  deux ouverts de cet atlas qui s'intersectent. Montrons que  $U_i \cup U_j$  est homéomorphe soit à  $\mathbb{R}$ , soit à  $S^1$ . Si l'un est inclus dans l'autre, c'est clair, la réunion est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , car ces ouverts sont euclidiens. Le cas contraire,  $\varphi_1(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  qui n'est ni  $\mathbb{R}$ , auquel cas  $U_i \subseteq U_j$ , ni un segment ouvert borné de  $\mathbb{R}$ , auquel cas  $U_j \subseteq U_i$ . Ce ne peut non plus être la réunion disjointe non triviale de deux segments ouverts bornés du type  $]a,b[ \cup ]c,d[$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , car en considérant un chemin  $\gamma$  dans le connexe  $U_2$  reliant un point de  $\varphi_1^{-1}(]a,b[)$  à un point de  $\varphi_2^{-1}(]c,d[)$ , on aurait un grave problème en  $\gamma(\inf\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \notin U_i\})$ ; il ne devrait pas être dans  $U_1$ , or il est dans  $\varphi_1^{-1}(]a,b[)$  par continuité. Par suite, les seules formes possibles pour  $\varphi_1(U_i \cap U_j)$  sont  $]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  ou une réunion des deux. Dans les deux premiers cas,  $U_i \cup U_j$  est homéomorphe à la droite réelle; dans le troisième, on montre facilement qu'elle est homéomorphe au cercle.

On peut donc fusionner successivement les  $U_i$  s'intersectant, car  $M$  est connexe. On obtient forcément un cercle à un moment donné, car sinon,  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , ce qui ne peut, par compacité. Une fois que l'on a obtenu un cercle, on voit que les  $U_j$  restants sont tous inclus dans ce cercle, sinon, l'on aurait une contradiction similaire à la précédente. ■

**Théorème. (*Variétés topologiques de dimension 1*)**

Les variétés topologiques connexes de dimension 1 sont  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$  à homéomorphisme près.

▷ On remarque qu'une variété admet toujours un atlas indexé par  $\mathbb{N}$ , car elle est Lindelöf. On applique le raisonnement précédent. ■

**Exercice 7**

Remontrer qu'un carré est lisse.

▷ **Éléments de réponse.**

Un carré (vide) étant homéomorphe à  $S^1$ , on peut sans problème le munir d'une structure différentielle par transport de structure, et il est alors  $C^\infty$ .

**Corollaire**

Les variétés topologiques compactes de dimension 1 sont à homéomorphisme près les sommes finies de cercles.

Par le théorème de lissité :

**Corollaire. (*Variétés différentiables de dimension 1*)**

Les variétés différentiables de n'importe quelle classe de régularité  $D^1, C^k, k \in \mathbb{N} \cup \{\text{inf}, \omega\}$  connexes de dimension 1 sont  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$  à homéomorphisme près.

**7.1.5.4 Classification des surfaces topologiques****Définition. (*Surface topologique*)**

Une *surface topologique* est une variété topologique réelle de dimension 2.

**Lemme. (*Somme connexe de surfaces*)**

Le type topologique de la somme connexe de deux surfaces topologiques connexes et compactes ne dépend pas des choix effectués pour les disques ni l'homéomorphisme de recollement.

**Exercice 8 (*Neutralité de  $S^2$  pour la somme connexe*)**

Montrer que pour tout surface topologique connexe  $X$ ,  $X \# S^2$  est homéomorphe à  $X$ .

Citons la définition suivante qui fait souvent défaut aux lecteurs de livres sur les surfaces :

**Définition. ( $\hat{A}me$ )**

On appelle  $\hat{A}me$  d'une surface, une courbe simple, souvent fermée, qui sectionne la surface en parties symétriques.

**Exemples. ( $\hat{A}mes$ )**

1. Sur un cylindre ou un ruban de Möbius, l' $\hat{A}me$  et le cercle médian.
2. Sur le tore, l' $\hat{A}me$  est la longitude principale.
3. Sur le plan projectif réel, l' $\hat{A}me$  est la courbe symétrique passant dans l'œil du cross-cap, c'est-à-dire, pile entre les fesses.

**7.1.5.4.1 Triangulation des surfaces****Reformulation pratique. (*Triangulation d'une surface compacte*)**

Une *triangulation* d'une surface compacte  $X$  est une famille finie indexée par  $I$  d'homéomorphismes  $\varphi_i : \Delta \rightarrow \varphi_i(\Delta) \subseteq X$  en fixant  $\Delta$  le triangle du plan de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$  tel que pour  $i,j \in I$ ,  $\varphi_i(\Delta) \cap \varphi_j(\Delta)$  soit vide, un sommet ou une arête commune aux deux triangles. (En particulier, l'intérieur des triangles de la triangulation sont disjoints.)

**Lemme. (*Triangulation des surfaces compactes*)**

Toute surface compacte est triangulable, *i.e.* admet une structure de complexe simplicial fini.

**Remarques.**

1. En fait, RADÓ a montré en 1924 que toute surface à base dénombrable (ça lui plaisait) est triangulable, avec un nombre quelconque de triangles. Il faut alors dans la définition de triangulation, imposer que tout point possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de triangles.
2. On peut alors redéfinir l'orientabilité d'une surface triangulée en disant qu'il existe une orientation sur chaque triangle *compatible*, *i.e.* induisant des orientations opposées sur les arêtes communes.
3. (*Relative unicité de la façon de trianguler*) On peut toujours passer d'une triangulation à une autre par déformation continue et un nombre fini d'étapes élémentaires parmi les suivantes : la création d'un sommet dans l'adhérence d'un triangle et la création de trois nouveaux triangles, et l'opération inverse ; le remplacement de l'arête commune de deux triangles adjacents par l'autre diagonale du quadrilatère qu'ils forment, ce que l'on appelle un *flip*.
4. Le théorème de triangulation est en fait vrai pour les variétés compactes de dimension 3 : il a été démontré par MOISE en 1952, mais en dimensions plus grandes, il est infirmé.

### 7.1.5.4.2 Classification des surfaces topologiques compactes connexes

**Théorème.** (*Classification des surfaces topologiques connexes compactes*)

Les surfaces topologiques connexes compactes sont, à homéomorphisme près,

- ★ parmi les surfaces orientables,

$$S^2, \quad \mathbb{T}^2, \quad S^1 \times S^1, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \quad \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \dots$$

et plus généralement pour tout  $g \in \mathbb{N}$  :  $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_{g \text{ termes}}$ ;

- ★ parmi les surfaces non orientables,

$$\mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \quad \mathcal{K} \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2, \dots$$

et plus généralement pour tout  $g \in \mathbb{N}^*$  :  $g\mathbb{T}^2 := \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_{g \text{ termes}}$ .

De plus, chacune des surfaces présentées sont deux à deux non homéomorphes, ni même homotopiquement équivalentes ; on a donc une classification complète non redondante.

En outre, pour n'importe quelle classe  $C = D^1, C^k, k \in \mathbb{N} \cup \{infi, \omega\}$  au choix, la classification des surfaces différentiables de classe  $C$  est la même muni de la structure de sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Regardant la signification de  $g$ , on parle de nombre d'*anses* pour une surface orientable et de *calottes croisées* pour une surface non orientable.

⊗ (*Idée de la preuve.*) Ce théorème se démontre au moyen de l'outil de triangulation des surfaces compactes et du théorème de triangulation dû à RADÓ, objet de la section précédente.

La disjonction deux à deux des types d'homotopie est évidente lorsqu'on a calculé leur groupe fondamental, ce que l'on fait par la suite.

La classification des surfaces différentiables vient du théorème de lissité. ■

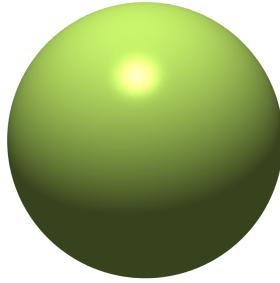
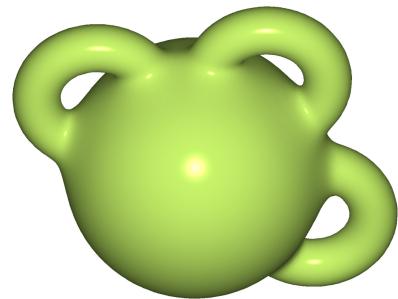
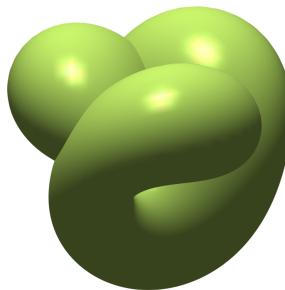
(a) *Sphère.* —(b) *Tore.* —(c) *Bouée à deux trous.* —(d) *Tasse à trois anses.* —(e) *Plan projectif réel représenté comme surface de Boy.* —(f) *Bouteille de Klein, somme de deux plans projectifs réels.* —

FIGURE 7.1.4 : *Classification des surfaces topologiques compactes connexes.* —  
On a représenté les orientables et les non orientables dans deux groupes distincts.

*Remarque.* Remarquer la dissymétrie : il n'y a rien dans la case en dessous de la sphère dans la ligne des non-orientables.

#### 7.1.5.4.3 Classification des surfaces topologiques compactes connexes orientables

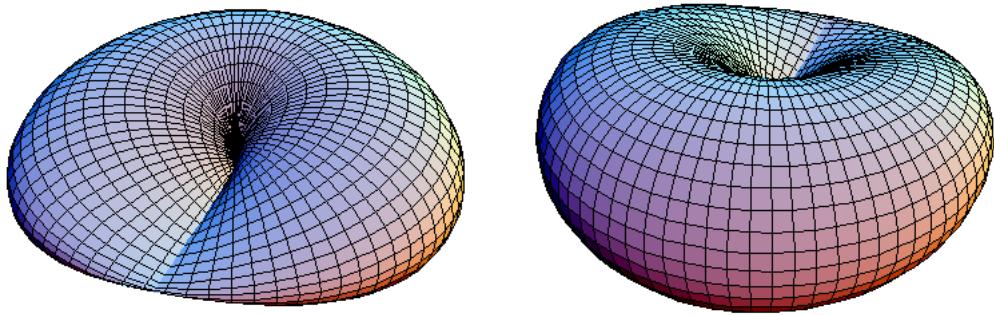


FIGURE 7.1.5 : Deux vues de la sphère avec une calotte croisée, formant le plan projectif. —

**Théorème. (*Classification des surfaces compactes orientables*)**

Les surfaces topologiques compactes connexes orientables sont, à homéomorphisme près, la sphère  $S^2$ , le tore  $\mathbb{T}^2$  et les surfaces  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  dites *bouées à g trous* avec  $g$  termes où  $g \geq 2$  est le *genre* de la surface. En posant  $S^2$  la somme connexe vide, elles sont donc toutes décrites par  $\{\#_{i=1}^g \mathbb{T}^i \mid g \in \mathbb{N}\}$ , famille qui forme une transversale sur leur ensemble pour l'homéomorphie.

▷ Corollaire du théorème général de Radó. ■

**Corollaire. (*Plongement des surfaces dans l'espace*)**

Toute surface compacte orientable se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ .

▷ C'est facile de le voir si l'on sait que le tore se plonge dans  $\mathbb{R}^3$ . ■



Les surfaces non orientables ne se plongent a priori pas dans  $\mathbb{R}^3$  ! C'est le cas par exemple de la bouteille de Klein.

**Exercice 9 (Surface de Riemann)**

Montrer que toute *surface de Riemann compacte* est une sphère, un tore ou une somme connexe d'un nombre fini de tores.

▷ **Éléments de réponse.**

Toute variété complexe est canoniquement une variété différentielle (réelle), et donc topologique, de dimension paire en chaque point, et de plus orientable. En effet, on procède aux identifications topologiques  $C^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Cette identification est compatible avec le calcul différentiel, puisqu'une fonction de transition holomorphe est en particulier différentiable. De plus, le déterminant jacobien d'une fonction de transition holomorphe  $f$  est toujours positif en raison des conditions de Cauchy-Riemann :  $\det \text{Jac}(f) = |f'(1)|^2 > 0$  d'où l'orientabilité d'une variété

complexe vue comme variété réelle. Les surfaces de Riemann sont en particulier des variétés topologiques réelles orientables de dimension 2, autrement dit, des surfaces (topologiques, réelles) orientables. De plus, une surface de Riemann est compacte si et seulement si la surface topologique sous-jacente l'est.

### Définition. (*Poignée, poignée croisée, calotte croisée*)

On dit que l'on rajoute une *poignée* à la sphère  $S^2$  lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathbb{T}^2$ .

On dit que l'on rajoute une *poignée croisée* à la sphère lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathcal{K}$ .

On dit que l'on rajoute une *calotte croisée* à la sphère lorsque l'on considère sa somme connexe avec  $\mathbb{PR}^2$ .

### Remarques.

1. Ces trois notions sont bien définies par propriété de la somme connexe.
2. Toute surface compacte est une sphère à laquelle on ajoute un nombre fini de poignées ou de calottes croisées. On peut lui ajouter également des poignées croisées sans faire de différence puisque  $\mathbb{PR}^2 \# \mathbb{PR}^2 \simeq \mathcal{K}$  et donc une poignée croisée est une calotte croisée.
3. Une surface est orientable si et seulement si elle ne comporte aucune calotte croisée.
4. Si l'on ne considère une réalisation d'une surface à partir de la sphère que par ajout de poignées et de calottes croisées, le décompte des poignées et des calottes croisées permet de calculer le genre de la surface, selon des règles énoncées ci-dessous.

### Heuristique

Les poignées sont aux variétés ce que les cellules sont aux *CW*-complexes.

### Heuristique

Les calottes croisées doivent être pensées comme les auto-intersections de surfaces à une seule face.

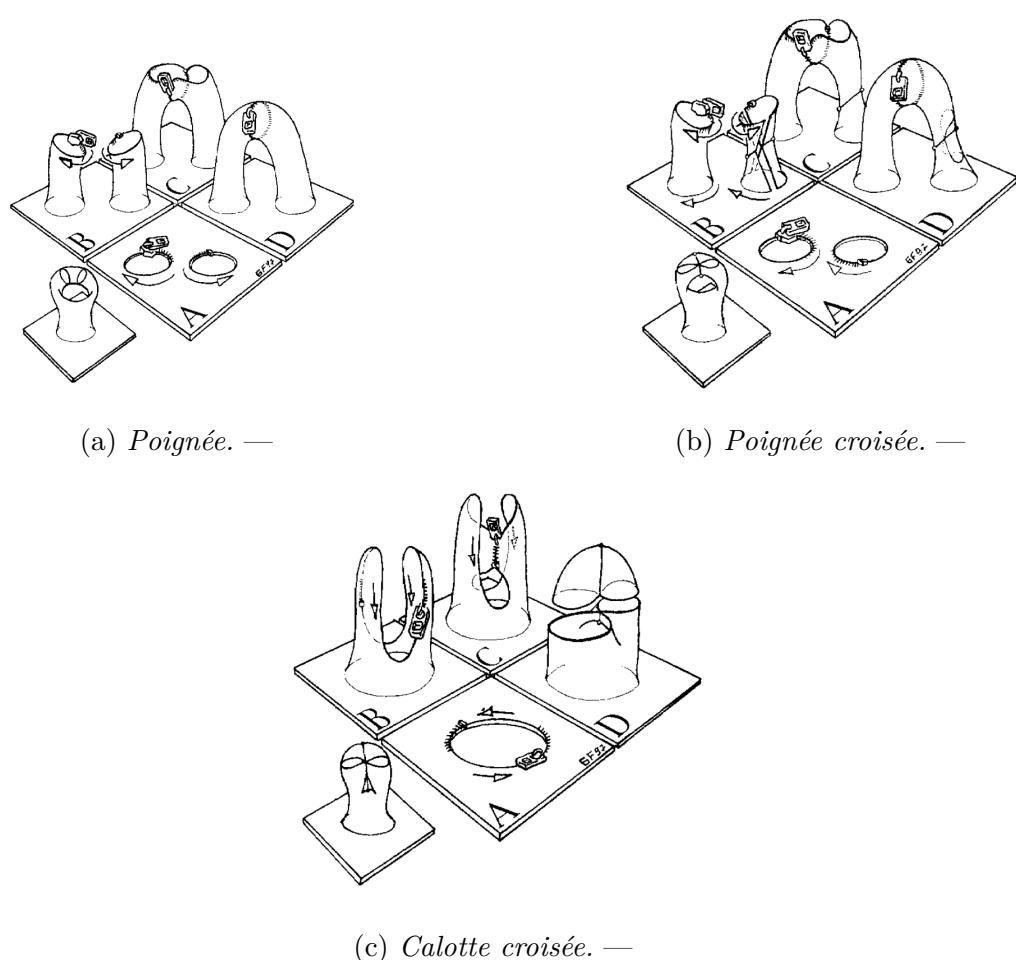
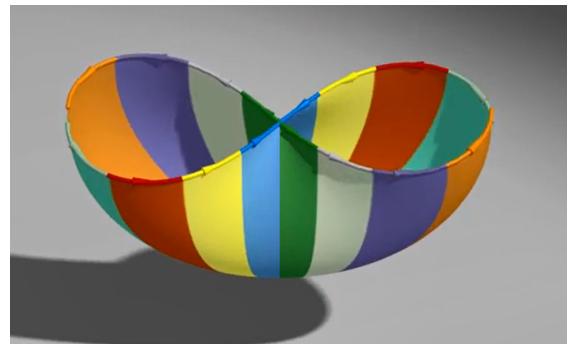


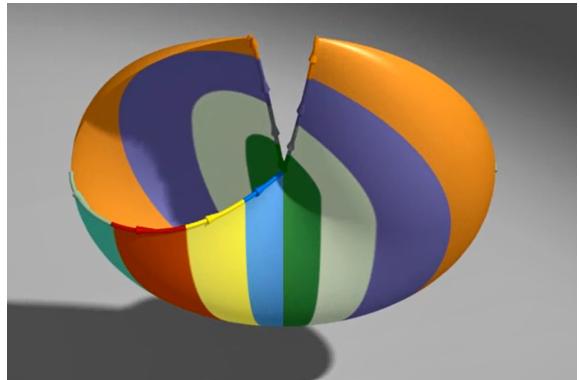
FIGURE 7.1.6 : *Vocabulaire des sommes connexes de surfaces.* —



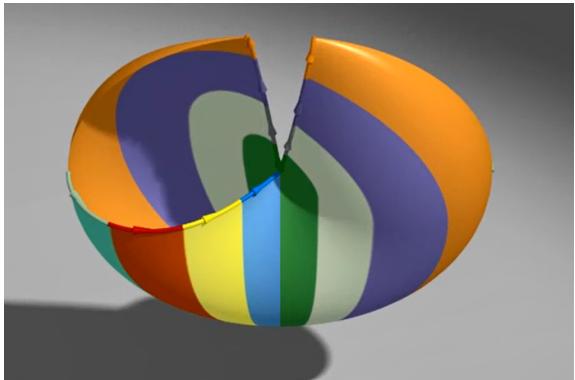
(a) . —



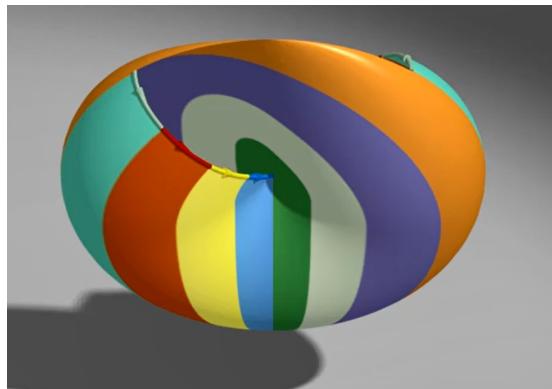
(b) . —



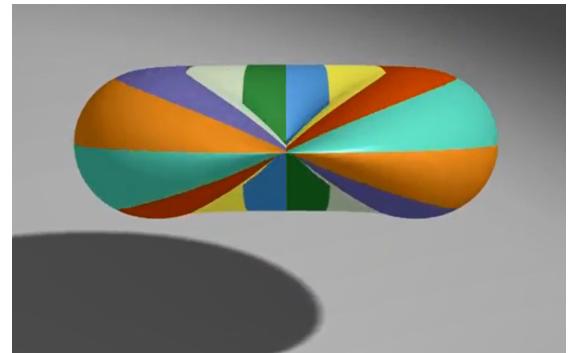
(c) . —



(d) . —



(e) . —



(f) . —

FIGURE 7.1.7 : Construction d'un cross-cap. —

#### 7.1.5.4.4 Genre des surfaces

**Définition.** (*Genre d'une surface*)

Soit  $S$  une surface topologique connexe compacte. Si  $S$  est orientable, on note  $g(S) = 0$  si  $S$  est la 2-sphère et  $g(S)$  le nombre de termes dans  $S \simeq \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  sinon. Réciproquement, on note  $S_g$  « la » surface orientable de genre  $g \in \mathbb{N}$ .

Si  $S$  est non orientable, on note  $g(S) = l$  où  $l$  est le nombre de termes dans  $S \simeq \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ . Réciproquement, on note  $V_g$  « la » surface non orientable de genre  $g \in \mathbb{N}^*$ .

### Exercice 10 (*Interprétation géométrique du genre*)

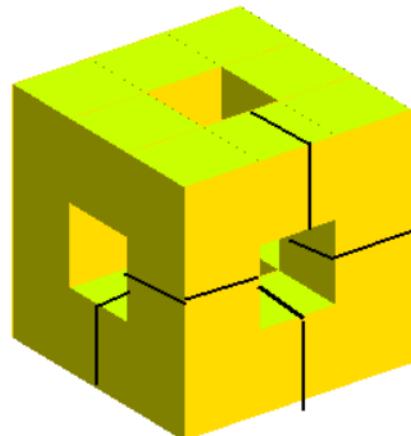
1. Justifier que le genre d'une surface compacte est le nombre maximal de courbes simples fermées que l'on tracer sur la surface sans que leur complémentaire soit non connexe (par arcs).
2. Retrouver ainsi, en faisant des dessins, le genre de la sphère, du tore, du ruban de Möbius, du plan projectif réel, de la bouteille de Klein et même du slip de Möbius.



(a) *Rulpidon d'Ulysse Lacoste.* —

Il faut bien compter le nombre de poignées : trois par rapport à une poignée arbitrairement

choisie comme l'origine de la surface, *i.e.* la sphère sur laquelle on ajoute des poignées, par exemple. De plus, en noir, trois courbes qui ne sont pas solides, déconnectent pas la surface ; une quatrième ne déconnecte pas la surface ; une sixième le ferait.



(b) *Fractale de Sierpinski à la première étape.* — Cette surface, ou alors le bord de ce corps solide, est de genre 5. En noir, cinq courbes qui déconnectent pas la surface ; une sixième le ferait.

FIGURE 7.1.8 : *Quelques réalisations des surfaces orientables de grand genre.* —  
Ainsi, pour compter le genre d'une surface représentée symétriquement, il faut compter le nombre de poignées total, moins une.

### Définition-propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une surface*)

Soit  $X$  une surface topologique triangulée par une certaine triangulation. On note  $\chi(X) = S - A + F \in \mathbb{Z}$  où  $S$  est le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces de la triangulation. Alors  $\chi(X)$  ne dépend pas du choix de la triangulation, et on appelle ce nombre la *caractéristique d'Euler* de  $X$ .

**Fait. (*Relation genre-caractéristique*)**

Soit  $X$  une surface compacte orientable. Alors

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

où  $g(X)$  est le genre de  $X$ . Réciproquement,  $g(X) = 1 - \frac{\chi(X)}{2}$ .

Si  $X$  est une surface compacte non orientable, alors

$$\chi(X) = 2 - g(X).$$

Réciproquement,  $g(X) = 2 - \chi(X)$ .

**Mnémonik :** le genre est un entier positif ou nul, défini uniquement pour une surface topologique, tandis que la caractéristique d'Euler est un entier relatif  $\leq 2$  dans le cas d'une surface, qui est en outre pair si elle est orientable (la réciproque étant fausse) et  $\leq 1$  si elle est non orientable.

**Exemples. (*Caractéristiques d'Euler, genres*)**

1. (Genre, caractéristique de la sphère)  $\chi(S^2) = 2$  et  $g(S^2) = 0$ .
2. (Genre, caractéristique du tore)  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$  et  $g(\mathbb{T}^2) = 1$ .
3. (Genre, caractéristique de la bouée à deux trous)  $\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = -2$  et  $g(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = 2$ .
4. (Genre, caractéristique du plan projectif réel)  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$  et  $g(\mathbb{RP}^2) = 1$ .
5. (Genre, caractéristique de la bouteille de Klein)  $\chi(\mathcal{K}) = 0$  et  $g(\mathcal{K}) = 2$ .

**Propriété. (*Transport de la caractéristique via un revêtement*)**

Soient  $X, Y$  deux surfaces topologiques, avec  $Y$  compacte. On suppose que  $Y$  est revêtue par  $X$  via un revêtement (topologique) à  $d$  feuillets, où  $d \in \mathbb{N}$ . Alors  $\chi(X) = d\chi(Y)$ .

▷ En effet, on a montré qu'une surface topologique est (homéomorphe à) un  $CW$ -complexe. ■

**Exercice 11 (*Revêtements des surfaces non orientables*)**

Montrer qu'une surface non orientable de genre  $g$  est revêtue par une surface orientable de genre  $2g - 2$ .

▷ Éléments de réponse.

Une surface non orientable a un revêtement d'orientation à 2 feuillets, qui est une surface par invariance de la dimension par revêtement, dont le genre  $h$  vérifie donc  $2 - 2h = 2(2 - 2g)$ , soit  $h = 2g - 2$ .

**Exercice 12** (*Revêtements des surfaces orientables entre elles*)

Donner une CNS sur  $g, h \in \mathbb{N}$  pour que  $S_h$  revête  $S_g$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Soient  $g, h$  deux entiers naturels. Supposons que  $S_h$  revête  $S_g$ . Remarquons qu'un revêtement par un espace compact est nécessairement fini : en effet, les fibrés sont des fermés discrets d'un compact, donc sont finies. Par la propriété, on a donc  $\chi(S_g) \mid \chi(S_h)$ , donc nécessairement  $1 - g \mid 1 - h$ , d'où  $h = (g - 1)d + 1$  pour un certain  $d \in \mathbb{Z}$  ce qui vaut en particulier pour  $g \neq 0$ . De plus, dans le cas  $g = 0$ , le revêtement universel  $S_h = S^2$  par simple connexité d'où  $h = 0$ . Réciproquement, si  $h = (g - 1)d + 1$  pour un  $d \in \mathbb{Z}$  et  $g \neq 0$ , ou si  $h = g = 0$ , cas traité par le revêtement trivial  $S^2 \rightarrow S^2$ , alors dans le premier cas si  $g = 1$ ,  $h = 1$  et on considère le revêtement trivial  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ; enfin si  $g > 1$ ,  $h = (g - 1)d + 1 \leq 0$  donc  $h = 0$  donc  $(1 - g)d = 1$  d'où  $1 - g = 1$  d'où  $g = 0$ , impossible. Sinon,  $d \in \mathbb{N}$  et on considère une surface en étoile à  $d$  branches avec un trou au centre, et sur chaque branche strictement  $g - 1$  anses. C'est la surface  $S_{(g-1)d+1} = S_h$  par hypothèse. Sous cette vision des choses, il est clair que  $S_h$  est un revêtement de  $S_g$  : pour être formel, voyons que  $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  agit continûment, proprement et librement sur  $S_h$  et que  $S_h/G = S_g$ . Le dessin ci-dessous traite le cas  $h = 11, g = 3$ .

Remarquons que cette condition ne contredit pas l'existence d'un revêtement d'orientation lui-aussi orientable, comme le prévoit implicitement l'exercice précédent.

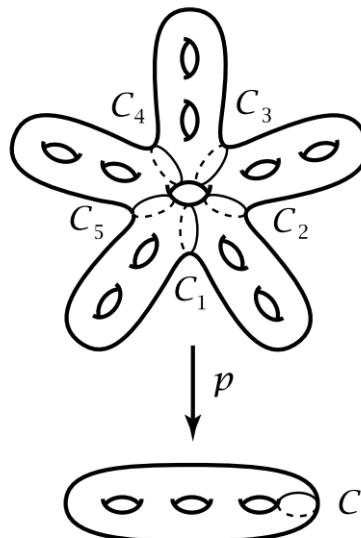


FIGURE 7.1.9 : *Revêtement des surfaces compactes entre elles.* —  
Revêtement de  $S_3$  par  $S_{11}$ , où  $11 = 2 \times 5 + 1$ .

**Application.** (*Caractéristique d'Euler de la bouteille de Klein*)

On a un revêtement différentiel, en particulier topologique, du tore  $\mathbb{T}^2$  sur la bouteille de Klein  $K$  à deux feuillets. Ainsi,  $\chi(\mathbb{T}^2) = 0 = 2\chi(K)$ , d'où

$$\chi(K) = 0$$

puis

$$g(K) = 2.$$

### Exercice 13

Peut-on en déduire que  $K$  est homéomorphe à  $\mathbb{T}^2$  ?

▷ Éléments de réponse.

Non. Le théorème de classification des surfaces compactes à anses ne s'applique pas :  $K$  n'est pas orientable.

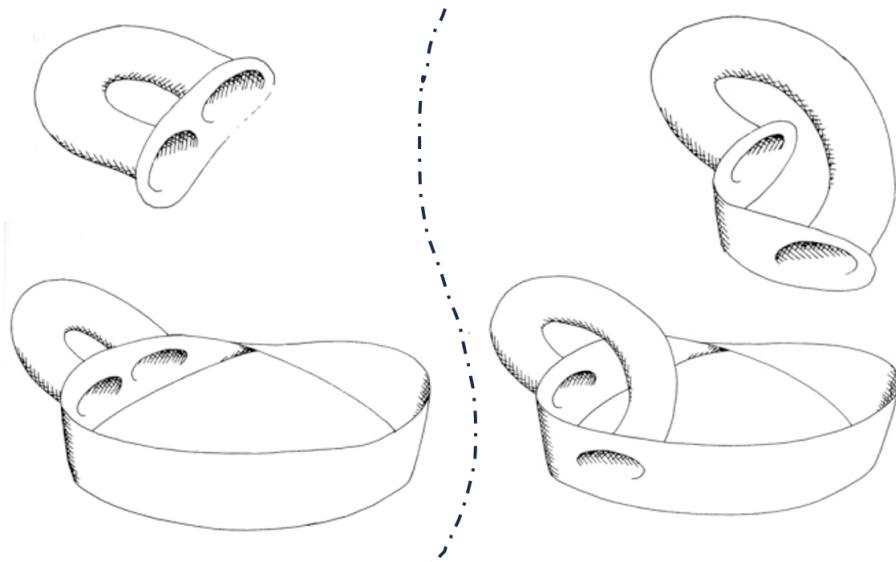
**Remarque importante.** Les faits suivants permettent de calculer les surfaces topologiques compactes : le lien entre genre et caractéristique dans le cas orientable ou non, le fait que la somme connexe se comporte par règle des signes au vu de l'orientabilité, comme le montre l'exercice suivant. Parallèlement, ces règles de calcul exhaustives sur les surfaces permettent de passer outre des démonstrations un peu laborieuses sur les faits suivants : la somme connexe de surfaces est commutative, associative, etc.

### Exercice 14 (Règle des signes pour les surfaces connexes)

1. Montrer que la surface de Dyck  $\mathbb{RP}^2 \# \mathcal{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ .
2. Que vaut  $\mathcal{K} \# S^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  ?

▷ Éléments de réponse.

1. C'est un théorème de Dyck. Pour le montrer, faisons un dessin, qui est à notre sens très convaincant. Faisons la somme d'un tore puis d'une bouteille de Klein respectivement avec un ruban de Möbius.



Il est clair que les surfaces obtenues de gauche et de droite sont les mêmes, car un ruban de Möbius n'a qu'une seule face ! Or un ruban de Möbius est une sous-variété plongée du plan projectif, donc il

n'est pas difficile de se convaincre que la même manipulation fonctionne en remplaçant le ruban par le plan projectif, même si l'on ne peut se le représenter dans  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi,  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{RP}^3 \# \mathcal{K}$ .

2. Par commutativité et neutralité de la sphère, en notant  $P = \mathbb{RP}^2$  et  $T = \mathbb{T}^2$ ,  $P \# P \# P \# T \# T \simeq P \# P \# P \# P \# T \simeq P \# P \# P \# P \# P \# P \# P$  successivement. C'est donc la surface compacte à 7 calottes croisées.

On en déduit :

### Théorème. (*Dyck*)

En présence d'une calotte croisée, poignées et poignées croisées sont équivalentes.



La somme connexe n'est pas simplifiable... Sinon, de  $\mathbb{RP}^2 \# \mathcal{K} \simeq \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ , on obtiendrait  $\mathcal{K} \simeq \mathbb{T}^2$ , qui pique les yeux.

### Fait. (*Additivités du genre*)

Soient  $g, h \in \mathbb{N}$ . Identifions les surfaces isomorphes, quitte à considérer leurs classes d'homéomorphie.

- ★ On a  $S_g \# S_h = S_{g+h}$ , en particulier le genre est additif sur les surfaces compactes orientables.
- ★ On a  $V_g \# V_h = V_{g+h}$ , en particulier le genre est additif sur les surfaces compactes non orientables.
- ★ On a  $S_g \# V_h = V_{2g+h}$ .

Les deux premiers points découlent de la classification des surfaces exprimées comme sommes connexes de tores et de plans projectifs.

D'autre part, d'après le théorème de Dyck vu à l'exercice précédent,  $S_1 \# V_1 = V_3$ . Ainsi,  $S_g \# V_h = S_{g-1} \# S_1 \# V_1 \# V_{h-1} = S_{g-1} \# V_{h+2}$ , puis par récurrence finie inverse pour tout  $k \in \llbracket 0, g \rrbracket$ ,  $S_g \# V_h = S_{g-k} \# V_{h+2k}$ . En particulier pour  $k = g$ ,  $S_g \# V_h = S_0 \# V_{h+2g}$ . Or  $S_0 = S^2$  est neutre pour la somme connexe, d'où le résultat.

### Exercice 15

Retrouver que pour toutes surfaces  $S, S'$ ,  $\chi(S \# S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$ .

#### ▷ Éléments de réponse.

Traitons les cas séparément, mais c'est alors une conséquence directe du fait.

**Lemme. (*Homologie d'une somme connexe*)**

Soient  $A, B$  deux variétés topologiques de même dimension  $n$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{n, n-1\}$ ,  $H_n(A \# B) \simeq H_n(A \setminus \star) \oplus H_n(B \setminus \star)$ .

▷ On applique la suite de Mayer-Vietoris de la manière suivante : dans  $A \# B$ , on décompose l'image de  $A$  qui est  $A \setminus \star$ , i.e.  $A$  troué, et celle de  $B$  qui est  $B$  trouée :  $B \setminus \star$  car on enlève une boule  $\cong \star$  à chaque variété par construction, et l'intersection de l'image de  $A$  avec l'image de  $B$  est homotopiquement équivalente au cylindre de  $S^n$ , et donc à  $S^n$ . On a donc une suite exacte longue avec :

$$\dots \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_k(A \setminus \star) \oplus H_k(B \setminus \star) \longrightarrow H_k(A \# B) \longrightarrow \dots$$

à tout rang  $k$ . Si  $H_{k+1}(S^n) = H_k(S^n) = 0$ , alors  $H_k(A \# B) \simeq H_k(A \setminus \star) \oplus H_k(B \setminus \star)$ . Par le calcul de l'homologie des sphères, ceci arrive dès que  $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket \cup \llbracket n+1, +\infty \rrbracket$ . ■

Cette identité calculatoire ne suffit donc pas pour calculer l'homologie complète d'une somme connexe.

**Lemme. (*Homologie du tore pointé*)**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H_k(\mathbb{T}^2 \setminus \star) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon..} \end{cases}$

▷ On utilise la suite de Mayer-Vietoris de manière différente à  $\mathbb{T}^2$  : on considère le tore pointé  $\mathbb{T}' \cong T \setminus D^2$  et on écrit  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}' \cup D^2$  où  $D^2 \cong \star$  et  $\mathbb{T}' \cap D^2$  est homotopiquement équivalent à un cercle. Ainsi la suite

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & \nearrow & \\ \dots & \longrightarrow & & & & & 0 \\ & & & & & \searrow & \\ & & 0 & \longleftarrow & H_2(\mathbb{T}') \oplus 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & & & & & \\ & & & & & \nearrow & \\ & & \mathbb{Z} & \longleftarrow & H_1(\mathbb{T}') \oplus 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & & & & & & \\ & & & & & \nearrow & \\ & & \mathbb{Z} & \longleftarrow & H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

est exacte où la colonne de gauche est l'homologie d'un cercle, la colonne de droite est l'homologie du tore et celle du milieu est la somme de l'homologie de  $\mathbb{T}^2$  et de  $\star$ . On obtient que  $H_{\geq 2}(\mathbb{T}') = 0$ . De plus  $H_0(\mathbb{T}') = \mathbb{Z}$  par connexité. Reste à calculer  $H_1(\mathbb{T}')$ . On a :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où la suite finale  $\mathbb{Z} \longrightarrow H_0(\mathbb{T}') \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$  est exacte, donc la première de ces deux flèches est injective. On peut donc couper la suite pour obtenir :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}') \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 0.$$

Ainsi  $H_1(\mathbb{T}')$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2 \oplus A$  où  $A$  est une partie de torsion qui proviendrait du conoyau de  $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ . Or d'après sa définition dans la suite de Mayer-Vietoris,  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  est surjective : on part d'un cycle représentant un générateur de  $H_2(\mathbb{T})$ , on le projette en le cycle générateur de l'homologie relative  $H_2(D^2, D^2 \cap \mathbb{T}')$  dont le bord est le cycle générateur de  $H_1(D^2 \cap \mathbb{T}')$ . ■

*Remarque.* En fait, il est assez visuel que  $\mathbb{T}'$  se rétracte sur le bouquet de deux cercles, ce qui aurait été plus rapide que d'utiliser la suite de Mayer-Vietoris, mais les idées sont intéressantes.

### Application. (*Homologie des surfaces topologiques compactes*)

Soit  $g \in \mathbb{N}$ . Calculons l'homologie de  $S_g$  puis de  $V_g$ .

- ★ Dans le cas de  $S^2$ , c'est l'homologie de la sphère de  $\mathbb{R}^3$ . On sait que  $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(S^2) = 0$ ,  $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$  et  $H_k(S^2) = 0$  pour  $k \geq 3$ .
- ★ Si  $g \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_g$  la surface compacte orientable à  $g$  anses, qui est la bouée à  $g$  trous. On sait que  $H_0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ ,  $H_2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}$  et  $H_k(\mathbb{T}^2) = 0$  pour  $k \geq 3$ . Par suite, en utilisant le lemme précédent de manière itérée, la suite de Mayer-Vietoris donne  $H_k(S_g) = 0$  dès que  $k \geq 3$ , ce qui est cohérent au passage avec la dimension de la surface et la théorie de l'homologie des variétés. On a de plus  $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$  par connexité.

Pour aller plus loin, on utilise le lemme précédent. Montrons par récurrence sur  $g$  que les groupes d'homologie de  $S_g$  sont pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$H_k(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et au passage

$$H_k(S'_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'on note  $S'_g$  la surface orientable de genre  $g$  privée d'un point.

Appliquons la suite de Mayer-Vietoris au recouvrement de  $S_g$  par  $S'_g$  et  $\mathbb{T}'$ , l'inter-

section étant un cylindre se rétractant par déformation sur  $S^1$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2(S_g) \\ & & \searrow & & & & \\ & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)} & \xrightarrow{\quad} & H_1(S_g) \\ & & \swarrow & & & & \\ & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & H_0(S_g) \end{array}$$

et l'on a alors  $H_{\geq 3}(S_g) = 0$ . Comme d'habitude,  $H_0(S_g) = \mathbb{Z}$ . Cette situation en degré nul permet de couper en

$$0 \longrightarrow H_2(S_g) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)} \longrightarrow H_1(S_g) \longrightarrow 0.$$

Par orientabilité, en degré de dimension, on a directement  $H_2(S_g) = \mathbb{Z}$ . Reste à déterminer  $H_1(S_g)$ . La flèche  $H_2(S_g) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(\mathbb{T}' \cap S'_{g-1})$  est surjective comme dans le cas de  $\mathbb{T}'$  en revenant à la définition et en passant par  $H_2(\mathbb{T}', \mathbb{T}' \cap S'_{g-1})$ . Donc la flèche  $\underbrace{\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)}}_{\simeq \mathbb{Z}^{2g}} \rightarrow H_1(S_g)$  est un isomorphisme.

Pour conclure la récurrence, il faut calculer l'homologie de  $S'_g$  mais on peut procéder mot pour mot comme pour le tore troué :  $S_g = S'_g \cup D^2$  et l'on réapplique la suite de Mayer-Vietoris à  $S_g$  avec cette nouvelle décomposition.

Remarquons que la dualité de Poincaré s'applique, les surfaces étant dans notre premier cas orientables.

- ★ Si  $g \in \mathbb{N}^*$ , on note  $V_g$  la surface compacte non orientable à  $g$  calottes croisées, qui est la somme de  $g$  plans projectifs. Or on sait que  $H_0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$ ,  $H_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H_k(\mathbb{RP}^2) = 0$  pour  $k \geq 2$ . Par suite,  $H_k(V_g) = 0$  dès que  $k \geq 3$ . On a de plus  $H_0(V_g) = \mathbb{Z}$  par connexité.

Considérons maintenant l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

#### 7.1.5.4.5 Combinatoire des surfaces topologiques

On décrit maintenant les groupes fondamentaux des surfaces topologiques.

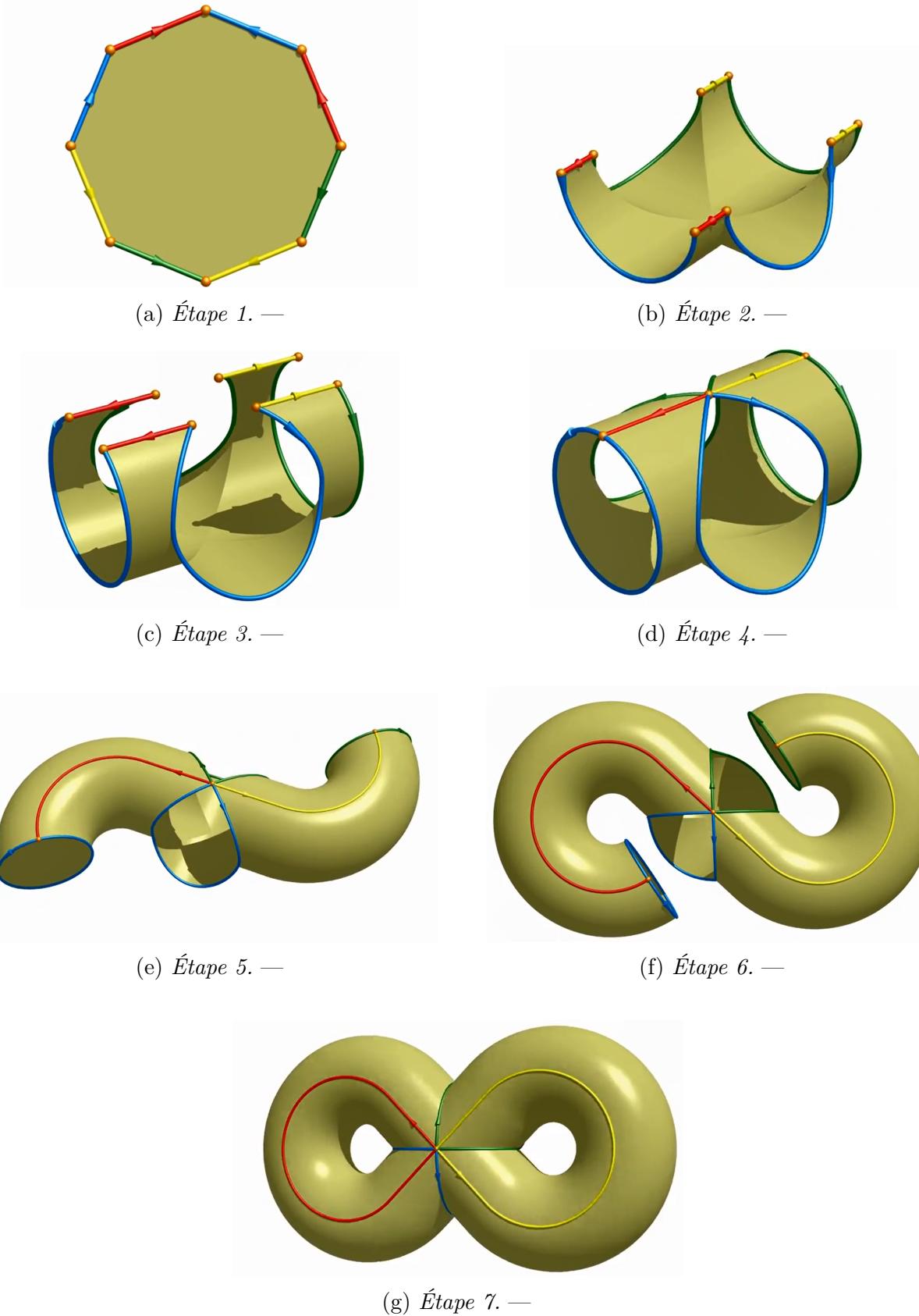
##### Propriété. (*Groupe fondamental d'une surface compacte*)

Soit  $X$  une surface orientable, compacte, connexe = connexe par arcs de genre  $g$ . Alors  $\pi_1(X)$  est présenté par  $2g$  générateurs  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  et une relation  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$  où  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  désigne le commutateur.

▷ Conséquence du théorème de Van-Kampen appliqué à la somme connexe  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ , avec  $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \simeq \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid [\gamma_1, \gamma_2] \rangle$ . Pour le cas général, le groupe fondamental est invariant par homéomorphisme. ■

**Corollaire. (*Structure de CW-complexe d'une surface compacte*)**

Toute surface compacte connexe orientable est munie d'une structure de *CW-complexe* dont le 2-squelette est un  $2g$ -gone, dit *polygone fondamental* de la surface.

FIGURE 7.1.10 : Structure de CW-complexe de  $T \# T$ . —

**Exercice 16** (*Polygones fondamentaux du double tore*)

Montrer qu'il existe quatre octogones fondamentaux donnant la surface orientable de genre 2, à savoir :

- ★  $abcdABCD$ ,
- ★  $abABcdCD$ ,
- ★  $abAcBdCD$ ,
- ★  $abcABdCD$ ,

en recollant les côtés de même lettre, en minuscule dans un sens, en majuscule dans l'autre, ceci de façon globalement cohérente.

**7.1.5.4.6 Surfaces de type fini****Proposition.** (*Caractéristique d'Euler généralisée d'une surface*)

Soient  $g, n, b$  trois entiers naturels. Alors  $\chi(\Sigma_{g,n,b}) = 2 - 2g - n - b$ .

Le tore, la bouteille de Klein, le plan projectif réel... sont obtenus par recollement d'un carré fondamental, les arêtes étant identifiées deux à deux et avec une 2-cellule au centre. Pourquoi les deux premiers ont-ils caractéristique nulle  $0 = 1 - 2 + 1$ , tandis que  $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$  ?



Il y a un piège. Dans le cas du tore et de la bouteille de Klein, les recollements des arêtes font identifier les quatre sommets en un seul, d'où une seule 0-cellule dans la décomposition cellulaire considérée. Cependant, pour le plan projectif, identifier les arêtes en sens inverse deux à deux laisse au final un total de deux sommets, d'où une caractéristique de  $2 - 2 + 1 = 1$  et le compte est bon.

**7.1.5.5 Classification des variétés topologiques de dimension  $\geq 3$** **Et après ?**

La somme connexe de deux variétés orientables en dimension supérieure, dépend des choix effectués pour l'homéomorphisme de recollement  $\varphi$  de cellules. En effet, étant données deux surfaces orientables et orientées (et c'est ce cas seul qui ne pose pas problème), on peut définir le degré de  $\varphi$ , qui est alors  $\pm 1$  sans détermination forcée. Cependant, le type d'homotopie ne change pas si l'on remplace un homéomorphisme qui renverse l'orientation par un qui la préserve, car toute variété orientable préserve un automorphisme qui renverse l'orientation). Par contre, en dimension 4, la somme connexe de  $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$  non orientables dépend fortement de ce choix.

Ceci complique forcément la classification des surfaces

Le cas de la dimension 3 consiste en la conjecture de Poincaré, démontrée par Grigori PERELMAN. Elle est en fait (de loin) plus facile que le cas  $n = 4$ , résolu par Michael FREEDMAN en 1982... car toute variété de dimension  $\leq 3$  admet une structure lisse, ce qui n'est plus le cas au-delà. De plus, il y a en plus grandes dimensions des structures exotiques : même  $\mathbb{R}^4$  admet « beaucoup » de structures lisses...

### 7.1.6 Décomposition en anses

#### 7.1.6.1 Théorème du voisinage tubulaire élémentaire

## 7.2 Dualité de Poincaré et théorie des intersections

**L**a dualité de Poincaré se montre difficilement mais nul besoin d'en connaître les méandres pour s'amuser avec des conséquences fortes : elle permet de caractériser de manière importante les invariants homologiques des variétés, cohomologie bien sûr mais aussi homologie et caractéristique d'Euler. Elle produit également des invariants, tels que la signature.

### 7.2.1 Prolégomènes à la dualité de Poincaré

#### 7.2.1.1 Motivation : liens entre la cohomologie de Rham et l'homologie singulière

On restreint l'homologie singulière aux simplexes lisses dans le cas des variétés différentiables.

**Définition-propriété.** (*Intégration des formes sur une variété à bord*)

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on considère un simplexe singulier lisse  $\sigma : T^p \rightarrow M$ , i.e. restriction d'une application lisse  $U \rightarrow M$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $T^p$  et l'on considère que  $T^p \subseteq \mathbb{R}^{p+1}$  et toutes ses faces sont un simplexe orienté. On note  $C_p^\infty(M)$  le sous-complexe de chaînes formé par eux.

Soit  $\omega \in \Omega^p(M)$ . Alors,  $\sigma^*\omega$  est une  $p$ -forme sur (un voisinage ouvert de)  $T^p$  et l'on pose

$$\int_\sigma \omega = \int_{T^p} \sigma^* \omega.$$

Pour une  $p$ -chaîne  $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma \in C_p^\infty(M)$ , on pose  $\int_c \omega = \sum_\sigma n_\sigma \int_\sigma \omega$ .

▷ On omet des détails techniques concernant le  $(p-2)$ -squelette de  $T^p$ . ■

**Fait. (*Morphisme de de Rham*)**

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on obtient un morphisme

$$\psi^p : \Omega^p(M) \rightarrow \text{Hom}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) := C_\infty^p(M; \mathbb{R})$$

donné par  $\psi^p(\omega)(c) = \int_c \omega$ , et un morphisme de complexes de cochaînes par extension.  
C'est un corollaire du théorème de Stokes.

**VOC** On note  $H_\infty^p(M)$  le  $p$ -ième groupe d'homologie de  $C_\infty^\bullet(M; \mathbb{R})$ .

La cohomologie singulière restreinte aux simplexes lisses coïncide comme par magie avec la cohomologie de de Rham, merci Dieu.

**Théorème. (*Théorème de de Rham*)**

Soit  $M$  une variété lisse. Le morphisme induit

$$\psi^* : H_\Omega^p(M) \rightarrow H_\infty^p(M)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$ .

**Lemme. (*Reformulation du lemme de Poincaré*)**

Le théorème de de Rham est vrai pour tout sous-ensemble ouvert et convexe de  $\mathbb{R}^n$ .

On en déduit deux séries de résultats :

- \* dans le cadre des simplexes singuliers lisses, les suites exactes longues classiques, la suite de Mayer-Vietoris pour les sous-ensembles ouverts (*que l'on explicitera ci-après*), le calcul de l'homologie pour les espaces contractiles ;
- \* des résultats similaires pour la cohomologie de de Rham.

**Proposition. (*Suite de Mayer-Vietoris pour l'homologie lisse*)**

Soient  $U, V \subseteq M$  deux ouverts d'une variété lisse. On a la double suite de Mayer-Vietoris dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_\Omega^p(U \cap V) & \longrightarrow & H_\Omega^p(U) \oplus H_\Omega^p(V) & \longrightarrow & H_\Omega^p(U \cap V) \longrightarrow H_\Omega^{p+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H_\infty^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_\infty^p(U; \mathbb{R}) \oplus H_\infty^p(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_\infty^p(U \cap V; \mathbb{R}) \longrightarrow H_\infty^{p+1}(U \cup V; \mathbb{R}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

▷ Soient  $U, V \subseteq M$  deux ouverts d'une variété lisse. On a une suite courte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{-} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{+} \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

Pour montrer la surjectivité de la deuxième application, considérons une  $p$ -forme  $\omega$  sur  $U \cap V$ . On peut utiliser une partition de l'unité pour trouver une fonction lisse  $f : U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$  qui est nulle sur un voisinage de  $U \setminus V$  et vaut 1 sur un voisinage de  $V \setminus U$ . On a alors une décompositioin  $\omega = f\omega + (1-f)\omega$ . Les formes  $f\omega$  et  $(1-f)\omega$  peuvent être prolongées par zéro sur  $U$  et  $V$  respectivement. Ainsi, en notant  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) & \longrightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i^* \circ \psi & & \downarrow \psi \oplus \psi & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U; \mathbb{R}) \oplus C_{\mathcal{U}, \infty}^p(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & C_{\mathcal{U}, \infty}^p(U \cap V; \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

commutatif. ■

### Corollaire

Si  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $U, V$  et  $U \cap V$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il l'est aussi pour  $U \cup V$ .

### Lemme

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  est une collection d'ouverts deux à deux disjoints telle que  $\psi^*$  soit un isomorphisme pour tout  $U_i$ , alors  $\psi^*$  est un isomorphisme pour  $\bigcup_{i \in I} U_i$ .

▷ C'est un corollaire du calcul des groupes de cohomologie dans le cas singulier et dans le cas de de Rham et la naturalité de  $\psi^*$ . ■

On peut donc faire la démonstration du théorème de de Rham.

### Preuve.

▷ L'isomorphisme obtenu  $\psi^* : H_\Omega^p(M) \rightarrow H_\infty^p(M; \mathbb{R})$  peut être composé avec un isomorphisme  $H_\infty^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})$ . L'inclusion  $C_\bullet^\infty(M) \hookrightarrow C_\bullet(M)$  induit un morphisme de complexes de cochaînes  $C^\bullet(M; G) \rightarrow C_\infty^\bullet(M; G)$  pour tout groupe abélien  $G$ . On peut utiliser le lemme local-global pour les ouverts pour démontrer que le morphisme induit  $H^p(M; G) \rightarrow H_\infty^p(M; G)$  est un isomorphisme pour tout entier  $p \geq 0$ , isomorphisme de  $G$ -modules si  $G$  est un anneau commutatif. ■

#### 7.2.1.2 Première approche : triangulation des variétés compactes

On utilise les notions de TRIANGULATION SIMPLICIALE d'un espace topologique venant de la théorie de l'homotopie des complexes simpliciaux.

### Définition-propriété. (*Décomposition cellulaire duale*)

Soit  $M$  une variété topologique connexe compacte orientable de dimension  $n$ . On suppose qu'il existe une triangulation finie combinatoire  $\tau$  de  $M$ . On considère  $\tau_1$  la subdivision barycentrique de  $\tau$ .

Les cellules (fermées) de  $\tau$  sont décrites de la façon suivante : à un sommet  $v$  de  $\tau$ , on associe une  $n$ -cellule fermée  $v^*$  l'étoile de  $v$  dans  $\tau_1$ , et à un  $k$ -simplexe  $\sigma$  de  $\tau$ , on associe une  $(n - k)$  cellule  $\sigma^*$  qui n'est autre que l'intersection des  $n$ -cellules fermées des sommets.

Dans la définition précédente, on considère chaque  $(n - k)$  cellulaire de la décomposition cellulaire duale de  $\tau$  comme une  $(n - k)$ -cochaîne. Pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ , à toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$ , on associe une  $(n - k)$ -cochaîne cellulaire  $D(c)$ , et on a  $\delta D(c) = \pm D(\partial c)$ . On obtient l'*isomorphisme de Poincaré*  $H_k(M) \xrightarrow{\sim} H^{n-k}(M)$  pour tout entier  $0 \leq k \leq n$ . Pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c_1 = \sum_i m_i \sigma_i$  de  $M$  et toute  $(n - k)$ -chaîne cellulaire  $c_2 = \sum_i e_i \sigma_i^*$ , on peut considérer leur *indice d'intersection*

$$\xi(c_1, c_2) = \sum_{i,j} \delta_{ij} m_i l_j.$$

On a  $\xi(\partial c, d) = \pm \xi(c, \partial d)$  pour toute  $k$ -chaîne simpliciale  $c$  de  $M$  et toute  $(n - k + 1)$ -chaîne cellulaire  $d$  de  $M$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On obtient une forme bilinéaire entière  $H_k(M)/H_k(M)^{tor} \times H_{n-k}(M)/H_{n-k}(M)^{tor} \rightarrow \mathbb{Z}$  (ou  $H_k(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H_{n-2}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) appelée *forme d'intersection* de  $M$ .

### Exemple

Pour  $\mathbb{CP}^2$ , on a  $H_2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}$ . Un générateur est donné par la classe réalisée par une droite. Le carré de cette classe par rapport à la forme d'intersection  $H_2(\mathbb{CP}^2) \times H_2(\mathbb{CP}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  est égal à 2, autrement dit, cette forme bilinéaire est isomorphe à  $\langle 1 \rangle$ .

#### 7.2.1.3 Formalisme moderne des cup produit et cap produit

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.

##### Définition-propriété. (*Cup-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tous entiers  $k, l \geq 0$ , on définit l'opération de *cup-produit* :

$$\smile : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$$

de la façon suivante : pour toute cochaîne  $c \in C^k(X; R)$ , pour toute cochaîne  $d \in C^l(X; R)$  et pour tout  $(k + l)$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , on pose

$$(c \smile d)(\sigma) = c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_k)}) \times_R d(\sigma \circ \Delta_{(v_k, \dots, v_{k+l})}) \in R$$

où  $\Delta_{(v_0, \dots, v_k)}$  désigne le plongement canonique du simplexe  $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$  dans  $T^{k+1}$  et  $\Delta_{(v_k, \dots, v_{k+l})}$  le plongement canonique du simplexe  $\langle v_k, \dots, v_{k+l} \rangle$  dans  $T^{k+1}$ .



Ceci ne suffit pas pour définir  $\smile$  sur les groupes d'homologie. Il faut montrer la proposition suivante.

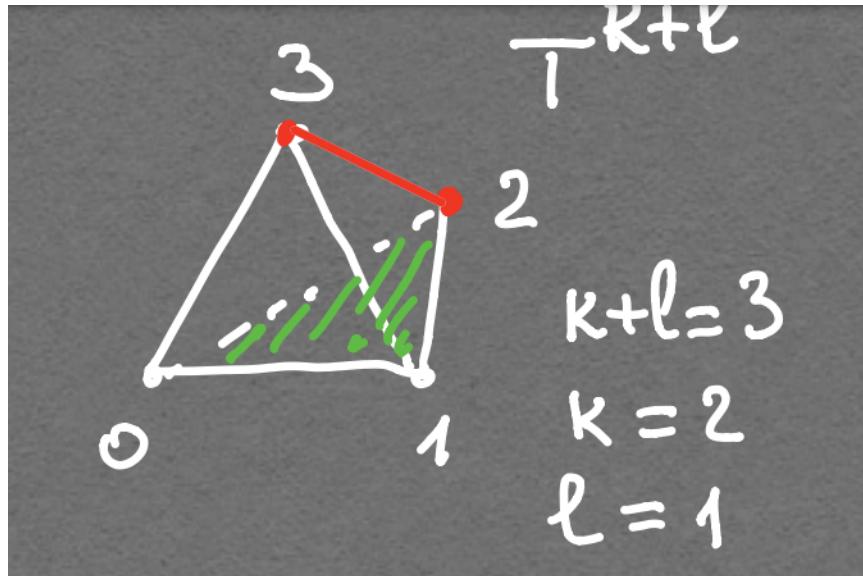


FIGURE 7.2.1 : Cup-produit de deux cochaînes évalué en une chaîne. —

**Lemme. (Pseudo-règle de Leibniz pour le cup-produit)**

Soient  $X$  un espace topologique,  $k, l \in \mathbb{N}$  et  $(c, d) \in C^k(X; R) \times C^l(X; R)$ . Alors

$$\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^k c \smile \delta d.$$

Autrement dit, le cup-produit est compatible avec le cobord.

▷ Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $\sigma \in C_{l+k+1}(X)$ . Alors

$$\begin{aligned}
\delta_k(c \smile d)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k+l+1} (-1)^i c \smile d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&= \sum_{i \leq k} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&\quad + \sum_{1+k \leq i \leq k+l+1} (-1)^i c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_{k+1})}) d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) \\
&= d(\sigma \circ \Delta_{(v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1})}) \underbrace{\sum_{i \leq k+1} c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1})})}_{= b \smile \delta a} \\
&\quad + c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_k)}) \underbrace{\sum_{k \leq i \leq k+l+1} (-1)^{i-k} d(\sigma \circ \Delta_{(v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})})}_{(-1)^i d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})})} \\
&= (-1)^k \sum_{k \leq i \leq k+l+1} (-1)^i d(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1})}) = (-1)^k \delta b
\end{aligned}$$

$$\delta_k(c \smile d)(\sigma) = (-1)^k c \smile \delta b,$$

ce qu'il fallait calculer. ■

### Preuve.

▷ Ainsi, le cup-produit descend sur l'homologie :  $\delta(c \smile d)(\sigma) = (c \smile d)(\partial\sigma)$ . ■

### Fait. (*Bilinéarité du cup-produit*)

Pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $\smile : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$  est bilinéaire.

C'est très lisible sur la définition.

→ *Notation.* Il n'est pas rare, et notamment pour simplifier les écritures dans la théorie des classes caractéristiques, de noter le cup produit simplement par une absence de symbole :  $\alpha \smile \beta = \alpha\beta$ .

### Propriétés. (*Propriétés calculatoires du cup-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique.

1. (*Associativité du cup-produit*) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $k_i$  entier naturel, alors

$$\alpha_1 \smile (\alpha_2 \smile \alpha_3) = (\alpha_1 \smile \alpha_2) \smile \alpha_3.$$

2. (*Commutation du cup-produit*) Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2$  et  $k_i$  entier naturel, alors

$$\alpha_1 \smile \alpha_2 = (-1)^{k_1 k_2} \alpha_2 \smile \alpha_1.$$

3. (*Transport du cup-produit sur les coefficients*) Soit  $h : R \rightarrow R'$  un morphisme d'anneaux. Alors  $h^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = h^*(\alpha_1) \smile h^*(\alpha_2)$ .

4. (*Transport du cup-produit sur l'espace de base*) Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue. Si  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 1, 2$ , alors  $f^*(\alpha_1 \smile \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \smile f^*(\alpha_2)$ .

▷ Successivement :

1.

2. Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$ , on note  $\bar{\sigma}$  le simplexe inversé  $\sigma \circ \omega$  où  $\omega : T^k \rightarrow T^k$  est l'application affine qui envoie tout sommet  $e_i$  du  $k$ -simplexe standard  $T^k$  sur  $e_{k-i}$ ,  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . On définit alors un morphisme  $\rho_k : C_k(X) \rightarrow C_k(X)$  en posant  $\rho(\sigma) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \bar{\sigma}$ . Alors les  $\rho_k$  forment un morphisme de complexes de chaînes  $\rho : (C_*(X), \partial) \rightarrow (C^*(X), \delta)$ . De plus, ce morphisme est homotope à l'identité. On utilise une preuve de type triangulation du prisme en posant pour homotopie à l'identité :

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)(-1)^{\frac{(k-i)(k-i+1)}{2}} (\sigma \circ \pi \circ \text{un sous-simplexe comme habituellement}).$$

3.

4. ■

*Remarque.* Soit  $(X, A)$  une paire topologique. On définit de même le *cup-produit relatif*, par rapport à l'un ou les deux termes pris relatifs :

$$H^k(X; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

ou

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R)$$

ou encore

$$H^k(X, A; R) \times H^l(X, A; R) \rightarrow H^{k+l}(X, A; R).$$

### Définition-propriété. (*Cap-produit*)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tous entiers  $k, l \geq 0$ , on définit l'opération de *cap-produit* :

$$\smile : H_k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$$

de la façon suivante : pour tout  $k$ -simplexe singulier  $\sigma$  de  $X$ , pour toute cochaîne  $c \in C^l(X; R)$ , on pose

$$\sigma \smile c = c(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_l)}). \sigma \circ \Delta_{(v_l, \dots, v_k)}.$$



Là encore, ceci ne suffit pas pour définir  $\smile$  sur les groupes d'homologie. Il faut montrer la proposition suivante.

**Lemme. (*Pseudo-règle de Leibniz pour le cap-produit*)**

Soient  $X$  un espace topologique,  $k,l \in \mathbb{N}$  et  $\sigma$  un  $k$ -simplexe de  $X$  et  $c \in C^l(X; R)$ . Alors

$$\partial(\sigma \frown c) = (-1)^l (\partial\sigma \frown c - \sigma \frown \delta c).$$

Autrement dit, le cap-produit est compatible avec le cobord.

▷

■

**Preuve.**

▷ Ainsi, le cap-produit descend sur l'homologie. ■

**Fait. (*Bilinéarité du cap-produit*)**

Pour tous  $k,l \in \mathbb{N}$ ,  $\frown : H^k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H^{k+l}(X; R)$  est bilinéaire.

C'est encore très lisible sur la définition.

**Propriétés. (*Propriétés calculatoires du cap-produit*)**

Soit  $X$  un espace topologique.

1. (*Associativité du cap-produit*) Si  $\alpha_1 \in H_{k_1}(X; R)$  et  $\alpha_i \in H^{k_i}(X; R)$  pour  $i = 2,3$  et  $k_i$  entier naturel, alors  $\alpha_1 \frown (\alpha_2 \frown \alpha_3) = (\alpha_1 \frown \alpha_2) \frown \alpha_3$ .

▷ Successivement :

1. ■

Les cap-produits relatifs sont un peu plus piégeux.

*Remarque.* Soit  $(X,A)$  une paire topologique. On définit de même le *cap-produit relatif*, par rapport à l'un ou les deux termes pris relatifs :

$$H_k(X,A; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$$

ou

$$H_k(X,A; R) \times H^l(X,A; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R).$$

▷ En effet,  $C_k(A; R) \times C^l(X,A; R) \rightarrow 0$ . ■

Cette opération est également fonctorielle, quoique d'une manière pas bien naturelle, ce qui est dû à l'assymétrie des cup et cap-produits.

**Proposition. (*Fonctorialité des produits cohomologiques*)**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Soient  $k, l \in \mathbb{N}$ . On a

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$$

pour tous  $\alpha \in H^k(X; R)$  et  $\beta \in H^l(Y; R)$ . D'autre part,

$$f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \smile f^*(\varphi))$$

pour tous  $\alpha \in H_k(X; R)$  et  $\varphi \in H^l(Y; R)$ .

▷ À faire soi-même. ■

Terminons par un point important.

**Propriété. (*Lien cup-cap-produits*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Soient  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  et  $\psi \in C^p(X; R), \varphi \in C^q(X; R)$ ,  $p, q$  entiers naturels. Alors

$$\psi(\sigma \smile \varphi) = (\varphi \smile \psi)(\sigma).$$

Si  $\sigma$  peut être de degré  $\geq p + q$ , ceci se récrit :

$$(\sigma \smile \varphi) \smile \psi = \sigma \smile (\varphi \smile \psi).$$

En particulier,  $H_*(X; R)$  est un  $H^*(X; R)$ -module à droite.

▷ Pour tout simplexe singulier  $\sigma : T^{p+q} \rightarrow X$ , on a  $\psi(\sigma \smile \varphi) = \psi(\varphi(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_p)}) \sigma \circ \Delta_{(v_p, \dots, v_{q+q})}) = \varphi(\sigma \circ \Delta_{(v_0, \dots, v_p)}) \psi(\sigma \circ \Delta_{(v_p, \dots, v_{q+q})}) = (\varphi \smile \psi)(\sigma)$ . ■

**7.2.1.4 D'autres produits en cohomologie****7.2.1.4.1 Produit croisé**

On définit un produit externe à valeurs dans la cohomologie d'un espace produit.

**Définition. (*Produit croisé*)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Le *produit croisé* ou *cross-produit* de deux cochaînes  $a \in H^k(X)$  et  $b \in H^l(Y)$  est défini pour tous entiers  $k, l \in \mathbb{N}$  par

$$a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \in H^{k+l}(X \times Y)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les projections de  $X \times Y$  sur respectivement  $X$  et  $Y$ .

**Reformulation pratique. (*Le cup-produit est un produit croisé*)**

Soient  $X$  un espace topologique et  $x,y$  deux cochaînes singulières sur  $X$ . Alors

$$x \smile y = \Delta^*(x \times y)$$

où  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  est l'application diagonale.

**7.2.1.4.2 Produit oblique****Définition. (*Produit oblique*)**

Soient  $X,Y$  deux espaces topologiques. On prend tous les coefficients dans un corps. Puisque  $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$ , on peut définir le *produit oblique* ou *produit slant* pour tous  $p,q \in \mathbb{N}$  de

$$H^{p+q}(X \times Y) \otimes H_q(Y) \rightarrow H^p(X)$$

par  $(\alpha \otimes \omega, B) \mapsto \omega(\beta)\alpha$ , et qui passe à l'anneau de cohomologie.

On note  $(p,\mu) \mapsto p/\mu$ .

**Exercice 17 (Un peu difficile tout seul)**

Montrer que le produit oblique est bien défini.

**Fait. (*Linéarité à gauche du produit oblique*)**

Soient  $X,Y$  deux espaces topologiques ; On prend tous les coefficients dans un corps. Alors pour tout  $\beta \in H_*(Y)$ , le morphisme  $p \mapsto p/\beta$  est  $H^*(X)$  linéaire à gauche au sens que pour tous  $a \in H^*(X)$  et  $p \in H^*(X \times Y)$ ,

$$((a \otimes 1) \smile p)/\beta = a \smile (p/\beta).$$

Si l'on décompose en tenseurs purs  $p = \sum a_{ij}p_i \otimes q_j$ ,  $(a \times 1) \smile (\sum a_{ij}p_i \otimes q_j) = (\sum a_{ij}(a \smile p_i) \times q_j)/\beta = \sum a_{ij}(a \smile p_i)q_j(B) = a \smile (\sum a_{ij}q_j(\beta)p_i) = p/\beta$ .

## 7.2.2 Dualité de Poincaré

### Heuristique

A priori, le premier groupe d'homologie « intéressant» d'une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  est  $H_n(M)$ , en descendant. Or le théorème des coefficients universels permet de calculer  $H_n(M : G)$  pour tout groupe abélien  $G$  si l'on connaît  $H_{n-1}(M)$ . Nous nous intéressons en quelque sorte à l'opération inverse.

### 7.2.2.1 Isomorphismes de Poincaré

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.

On souhaite montrer le résultat suivant

#### Théorème. (*Isomorphisme de Poincaré dans le cas compact*)



Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et  $R$ -orientable. On considère une classe fondamentale  $[M] \in H_n(M; R)$ .

L'application  $D: H^m(M; R) \longrightarrow H_{n-m}(M; R)$  est un isomorphisme pour tout entier

$$\alpha \longmapsto [M] \frown \alpha$$

$0 \leq m \leq n$  et donc  $H^m(M; R) \simeq H_{n-m}(M; R)$  et même  $H_m(M; R) \simeq H^{n-m}(M; R)$ .

On rappelle au passage que  $H_k(M; R) = H^k(M; R) = 0$  dès que  $k > n$ .

▷ Ce sera un cas particulier de l'isomorphisme de Poincaré général. ■

**VOC** Lorsqu'on parle de *l'isomorphisme de Poincaré*, c'est souvent à celui-ci que l'on se réfère.

Afin de démontrer le théorème général, il est en fait nécessaire la cohomologie à support compact. Soit  $G$  un groupe abélien.

#### Définition-propriété. (*Complexe de cochaînes à support compact*)

Soit  $X$  un espace topologique. Pour tout entier naturel  $m$ , on considère le sous-groupe  $C_c^m(X; G) \subseteq C^m(X; G)$  formé des *cochaînes à support compact*, c'est-à-dire ses cochaînes  $\varphi: C_m(X) \rightarrow G$  pour lesquelles, il existe un compact  $K_\varphi \subseteq X$  tel que  $\varphi$  soit nulle sur toutes les  $m$ -chaînes dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Une telle cochaîne  $\varphi$  est alors telle que  $\partial\varphi$  soit nulle sur toutes les  $(m+1)$ -chaines dans  $X \setminus K_\varphi$ .

Le *complexe de cochaînes de  $X$  à support compact* est alors

$$\dots \longleftarrow C_c^2(X; G) \xleftarrow{\partial} C_c^1(X; G) \xleftarrow{\partial} C_c^0(X; G)$$

et les groupes d'homologie de ce complexe sont les *groupes de cohomologie*  $H_c^m(X; G)$  de  $X$  à coefficients dans  $G$  et à support compact.

▷ La remarque fait est immédiate. ■

*Remarque.* De façon équivalente, le groupe  $C_c^m(X; G)$  est la réunion  $\bigcup_{K \subseteq X} C^m(X, X \setminus K; G) \subseteq C^m(X; G)$ .

**Fait.** (*Description de l'homologie à support compact comme limite inductive*)

Soit  $X$  un espace topologique. Si  $K \subseteq L$  sont deux compacts de  $X$ , on a le morphisme

$$H^m(X, X \setminus K; G) \rightarrow H^m(X, X \setminus L; G)$$

pour tout entier naturel  $m$ , induit par l'inclusion  $(X, X \setminus L) \hookrightarrow (X, X \setminus K)$ . Notons que l'ensemble des compacts de  $X$  est filtrant. On a alors  $\varinjlim H^m(X, X \setminus K; G) \simeq H_c^m(X; G)$ .

**Exemple.** (*Homologie à support compact de l'espace euclidien*)

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  deux entiers. On a  $H_c^m(\mathbb{R}^n; G) = 0$  si  $m \neq n$  et  $H_c^n(\mathbb{R}^n; G) \simeq G$  sinon.

**Remarque importante.** Si  $X$  est un espace séparé, alors le groupe  $H^m(X, X \setminus K; G)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , où  $K \subseteq X$  est un compact, ne dépend que relativement à  $G$  d'un voisinage de  $K$ .

### Exercice 18

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$ . Montrer que le groupe  $H_c^n(M)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $M$  est orientable et à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sinon.

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et  $R$ -orientée.

Si  $K \subseteq L \subseteq M$  sont deux compacts, on a

$$H_n(M, M \setminus L; R) \times H^m(M, M \setminus L; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

et

$$H_n(M, M \setminus K; R) \times H^m(M, M \setminus K; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

pour tous entiers positifs  $m \leq n$ .

Il existe un unique élément  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$  qui, pour tout  $x \in K$ , donne l'orientation locale choisie.

De même façon, on a  $\mu_L \in H_n(M, M \setminus L; R)$ .

De plus, par unicité,  $i_*(\mu_L) = \mu_K$  où  $i : (M, M \setminus L) \hookrightarrow (M, M \setminus K)$  est l'inclusion.

En outre, par naturalité du cap-produit,  $\mu_K \frown \alpha = i_*(\mu_L) \cap \alpha = i_*(\mu_L \frown i^*(\alpha))$  pour tout  $\alpha \in H^m(M, M \setminus K; R)$ .

Donc, les morphismes  $H^m(M, M \setminus K; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$  où  $K$  parcourt les compacts

$$\alpha \mapsto \mu_K \cap \alpha$$

de  $M$ , induisent un morphisme  $D_M : H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; \mathbb{R})$ .

### Théorème. (Isomorphisme de Poincaré)

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ , compacte et  $R$ -orientée ; c'est-à-dire, prenons une  $n$ -variété fermée  $R$ -orientable. Le morphisme

$$D_M : H_c^m(M; R) \rightarrow H_{n-m}(M; R)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

▷ On se permet de sous-entendre que les groupes d'homologie et de cohomologie sont pris à coefficients dans  $R$ .

Utilisons le lemme local-global pour les ouverts.

### Lemme

Le morphisme

$$D_{\mathbb{R}^n} : H_c^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-m}(\mathbb{R}^n)$$

est un isomorphisme pour tout entier  $0 \leq m \leq n$ .

▷ Le seul cas à considérer est le cas où  $m = n$ . Le morphisme  $D_{\mathbb{R}^n}$  s'identifie avec  $H^n(T^n, \partial T^n) \rightarrow H_0(T^n)$  donné par le cap produit avec le générateur  $[T^n] \in H_n(T^n, \partial T^n)$  représenté par l'identité  $id_{T^n}$ , multiplié par un inversible de  $R$ . Un générateur de  $H^n(T^n, \partial T^n)$  qui dans ce cas est isomorphe à  $\text{Hom}(H_n(T^n, \partial T^n), R)$  est représenté par un cocycle  $\varphi$  qui prend la valeur 1 sur  $T^n$ . Donc,  $T^n \frown \varphi$  est le dernier sommet de  $T^n$ . Ce sommet représente un générateur de  $H_0(T^n)$ . ■

### Lemme

Soient  $U, V$  deux ouverts qui recouvrent  $M$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^m(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^m(U) \oplus H_c^m(V) & \longrightarrow & H_c^{m+1}(U \cup V) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow D_{U \cap V} & & \downarrow D_U \oplus D_V & & \downarrow D_{U \cup V} \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) & \longrightarrow & H_{n-m-1}(U \cup V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

commutatif à signe près.

▷ L'existence du diagramme n'est autre qu'un jeu de définitions avec la limite inductive. Il est plus difficile de montrer qu'il commute presque.

Si  $K \subseteq U$  et  $L \subseteq V$  sont deux compacts, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cap L)) & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus K) \oplus H^m(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H^m(M, M \setminus (K \cup L)) \longrightarrow H^{m+1}(M, M \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dots & \longrightarrow & H^m(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) & \longrightarrow & H^m(U, U \setminus K) \oplus H^m(V, V \setminus L) & \longrightarrow & H^{m+1}(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) \dots \\ & & \downarrow \mu_{K \cap L} \frown & & \downarrow \mu_K \frown \oplus \mu_L \frown & & \downarrow \mu_{K \cap L} \frown \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-m}(U) \oplus H_{n-m}(V) & \longrightarrow & H_{n-m}(M) \longrightarrow H_{n-m-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{array}$$

dont on veut en fait montrer que le carré de droite commute.

On pose  $A = M \setminus K$  et  $B = M \setminus L$ . On a la suite exacte courte  $0 \longrightarrow C^\bullet(M, A + B) \xrightarrow{\oplus} C^\bullet(M, A) \oplus C^\bullet(M, B) \xrightarrow{\rightarrow} C^\bullet(M, A \cap B) \longrightarrow 0$ . Pour évaluer le morphisme connectant  $\delta$  sur une base de cohomologie représentée par un cocycle  $\varphi \in C^*(M, A \cap B)$ , on écrit  $\varphi : p\varphi_A - \varphi_B$  où  $\varphi_A \in C^*(M, A)$  et  $\varphi_B \in C^*(M, B)$ . On a  $\delta[\varphi] = [\delta\varphi_A] = [\delta\varphi_B]$ , car  $\delta\varphi = 0$ , d'où  $\delta\varphi_A = \delta\varphi_B$ . De façon similaire, pour toute classe d'homologie représentée par un cycle  $c \in C_i^U(M)$ , on a  $c = c_U + c_V$  où  $c_U \in C_i(U), c_V \in C_i(V)$ , et  $\delta[c] = [\partial c_U]$  où  $\mathcal{U} = \{U, V\}$ .

La chaîne  $\mu_{K \cup L}$  peut être représentée par une chaîne  $\alpha = \alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V} + \alpha_{V \setminus K}$  où la chaîne  $\alpha_{U \cap V}$  représentée  $\mu_{K \cap L}$  et la chaîne  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{V \setminus K}$  représente  $\mu_K$ .

Soit  $[\varphi] \in H^m(M, M \setminus (K \cup L))$ . En appliquant  $\delta$ , on obtient  $[\delta\varphi_A]$ . Ensuite, dans  $H_{n-m-1}(U \cap V)$ , on obtient  $[\alpha_{U \cap V} \frown \delta\varphi_A] = [\partial \alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A]$ , car  $\partial(\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A) = (-1)^m(-\alpha_{U \cap V} \frown \delta\varphi_A + \partial \alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A)$  et  $\alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A$  est une chaîne dans  $U \cap V$ . D'autre part, dans  $H_{n-m}(M)$ , on obtient  $[\alpha \frown \varphi]$ . On a  $\alpha \frown \varphi = (\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi) + (\alpha_{U \cap V} \frown \varphi) + \alpha_{V \setminus K} \frown \varphi$ . Donc  $\delta[\alpha \frown \varphi] = [\partial(\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi)] \in H_{n-m-1}(U \cap V)$ . On a comme  $\delta\varphi = 0$ ,  $\partial(\alpha_{U \setminus L} \frown \varphi) = (-1)^m \partial \alpha_{U \setminus L} \frown \varphi = (-1)^m \partial \alpha_{U \setminus L} \frown \varphi_A = (-1)^{m+1} \partial \alpha_{U \cap V} \frown \varphi_A$ , l'avant-dernière égalité ayant lieu, car  $\varphi_B$  est nul sur les chaînes dans  $B = M \setminus L$ , toute cela car  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}) \cap \varphi_A = 0$  et  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V})$  est une chaîne dans  $U \setminus K$ ,  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$  représentant  $\mu_K$ . ■

### Lemme

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  où  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$  est une suite d'ouverts. Si  $D_{U_i} : H_c^m(U_i) \rightarrow H_{n-m}(U_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  est un isomorphisme, alors  $D_M : H_c^m(M) \rightarrow H_{n-m}(M)$  est aussi un isomorphisme.

▷ Par le théorème d'excision, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le groupe  $H_c^m(U_i)$  peut être vu comme limite inductive des  $H^m(M, M \setminus K)$  où  $K$  parcourt les compacts de  $U_i$ . Par conséquent, on a les morphismes naturels  $H_c^m(U_i) \rightarrow H_c^m(U_{i+1})$ , donc on peut considérer  $\lim H_c^m(U_i)$  qui est isomorphe à  $H_c^m(M)$ . Il reste à démontrer que  $\lim H_{n-m}(U_i) \simeq H_{n-m}(M)$ , ce qui est un exercice facile. ■

**Exemple fondamental.** (*Dualité de Poincaré pour les groupes de cohomologie de de Rham*)

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $n$ . On note  $H_\Omega$  la cohomologie de de Rham sur  $M$ . On a une application bilinéaire

$$\begin{aligned} H_{\Omega,c}^p(M) \times H_\Omega^q(M) &\longrightarrow H_\Omega^{p+q}(M) \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto [\omega \wedge \eta] \end{aligned}$$

puis une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \int : \quad H_{\Omega,c}^k(M) \times H_\Omega^{n-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

pour  $p,q,k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Alors :

**Théorème**

La forme bilinéaire  $\int$  est non dégénérée.

**Corollaire**

Le morphisme  $H_{\Omega,c}^k(M) \rightarrow (H_\Omega^{n-k}(M))^*$  est un isomorphisme.

**Corollaire**

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soient  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ , compacte et  $R$ -orientée. Alors

$$\beta_i(M; R) = \beta_{n-i}(M; R)$$

pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Corollaire.** (*Cohomologie en degré de dimension d'une variété orientable*)

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  connexe, compacte et  $R$ -orientable. Alors  $H^n(M) \simeq \mathbb{Z}$ .

▷ En effet, la dualité de Poincaré s'applique à  $H_0(M) = \mathbb{Z}$ . ■

En se rappelant le lien entre cup et cap produits, on a :

**Corollaire. (*Relations de la dualité de Poincaré avec le cup-produit*)**

Soient  $X$  un espace topologique. Soient  $k, l \in \mathbb{N}$ . Soient  $\varphi \in C^k(X; R), \psi \in C^l(X; R)$ . Le morphisme  $\varphi \smile: C^l(X; R) \rightarrow C^{k+1}(X; R)$  coïncide avec le morphisme  $\text{Hom}(C_l(X; R), R) \rightarrow \text{Hom}(C_{k+1}(X; R), R)$  dual à  $\smile \varphi$ .

Au niveau des groupes d'homologie et de cohomologie, on obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^l(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_l(X; R), R) \\ \varphi \smile \downarrow & & \downarrow (\smile \varphi)^* \\ H^{k+l}(X; R) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{k+1}(X; R), R). \end{array}$$

**7.2.2.2 Dualité de Poincaré proprement dite****Théorème. (*Dualité de Poincaré*)**

Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ , fermée et  $R$ -orientée. On prend  $[M] \in H_n(M; R)$  une classe fondamentale de  $M$ .

(i) Si  $R$  est un corps, la forme bilinéaire *accouplement de torsion* ou *accouplement cup-produit*

$$\begin{aligned} H^k(M; R) \times H^{n-k}(M; R) &\longrightarrow R \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto (\varphi \smile \psi)[M]. \end{aligned}$$

est non dégénérée pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

(ii) Si  $R = \mathbb{Z}$ , la forme bilinéaire sur les parties libres

$$H^k(M; R)/H^k(M; R)^{\text{tor}} \times H^{n-k}(M; R)/H^{n-k}(M; R)^{\text{tor}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

est unimodulaire pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

⊗ (*Idée de la preuve.*) Considérons l'application

$$H^{n-k}(M; R) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_{n-k}(M; R), R) \xrightarrow{D^*} \text{Hom}(H^k(M; R), R).$$

Ce morphisme composé envoie  $\psi \in H^{n-k}(M; R)$  sur le morphisme  $\varphi \mapsto \psi([M] \smile \varphi) = (\varphi \smile \psi)[M]$ .

Si  $R$  est un corps, ou si  $R = \mathbb{Z}$  et on passe à la torsion, il est possible de montrer que tous les modules apparaissant ici sont de type fini et que le morphisme  $h$  est un isomorphisme. Sous ces hypothèses, la composée est donc un isomorphisme. On vérifie enfin que l'autre morphisme associé est un isomorphisme en utilisant l'anti-commutativité du cup-produit. ■

**Corollaire. (*Caractéristique d'Euler en dimension  $2k+1$* )**

La caractéristique d'Euler d'une variété compacte de dimension impaire est nulle.

▷ Remarquons que la caractéristique d'Euler est bien définie, car notre variété  $M$  est compacte. Pour calculer la caractéristique d'Euler, on peut toujours travailler sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$  qui est un corps. Alors  $\chi(M) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim(H_i(M; \mathbb{Z}_2)) = \sum_{i \in I} (-1)^i b_i(M)$ . On peut appliquer le théorème de dualité, car toute variété est  $\mathbb{Z}_2$ -orientable :  $H^p(M; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-p}(M; \mathbb{Z}_2)$  pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , d'où l'annulation de la somme et  $\chi(M) = 0$ . ■

### Corollaire

Soit  $M$  une variété connexe compacte non orientable de dimension 3. Alors que le groupe  $H_1(M)$  est infini.

▷ Par le corollaire précédent,  $\chi(M) = 0$ . De plus,  $H_3(M) = 0$ , car  $M$  est non orientable. De plus,  $\chi(M) = \text{rg}(H_0) - \text{rg}(H_1) + \text{rg}(H_2) - \text{rg}(H_3)$  et  $\text{rg}(H_0) = 1$ . Si  $H_1(M)$  qui est de type fini car  $M$  a une structure de CW-complexe, est fini, i.e.  $\text{rg}(H_1) = 0$ , on a  $\chi(M) = 1 + \text{rg}(H_2) > 0$ , absurde, d'où le résultat. ■

### Exercice 19 (Homologie des variétés cellulaires)

Soit  $M$  une variété topologique connexe de dimension  $n$  qui soit un CW-complexe fini.

1. Montrer que si  $M$  est orientable, alors  $H_{n-1}(M)$  est sans torsion.
2. Montrer que si  $M$  est non orientable, alors  $H_{n-1}(M)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
3. Montrer qu'en dimension 4, si  $M$  est orientable et si  $H_1(M) = 0$ , alors tous les  $H_i(m)$  pour  $i \leq 4$  sont sans torsion.
4. Donner un exemple de variété topologique  $N$  connexe compacte orientable de dimension 4 telle que  $H_2(N)$  ait au moins un élément de torsion non trivial.

▷ Éléments de réponse.

1. On a  $H_0(M) = \mathbb{Z}$  par connexité d'où  $H^n(M) = \mathbb{Z}$  par dualité de Poincaré sur une compacte orientable, d'où par la formule des coefficients universels en type fini,  $H_{n-1}(M)$  sans torsion.
2. De même, mais plus dur.
3.  $H_3(M)$  est sans torsion d'après la première question. Pour  $H_4(M)$  et pour  $H_0(M)$ , c'est  $\mathbb{Z}$  qui est sans torsion.  $H_1(M) = 0$  est bien sûr sans torsion. Enfin, on en déduit  $H^3(M) = 0$  par dualité, et par la formule des coefficients universels, il n'y a pas de torsion dans  $H_2(M)$ .
4. On a alors  $H_2(M) = H^2(M)$ . On a un revêtement double  $M \rightarrow N$ . On cherche  $\tau : M \rightarrow M$  une involution sans point fixe et qui préserve l'orientation ; le quotient par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est alors de torsion. Prenons le simplexe connexe  $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^3$ . Il est isomorphe à la quadrique sans points réels  $X_1^2 + \dots + X_4^2 = 0$  qui donc convient.

### Heuristique

Informellement, pour tout espace topologique  $X$ , les éléments de  $H^i(X)$  peuvent être pensés comme des sous-espaces de codimension  $i$  de  $X$  qui peuvent se déplacer librement

sur  $X$ .

Par exemple, une façon de définir un élément de  $H^i(X)$  consiste à donner une application continue  $f$  de  $X$  dans une variété  $M$  et une sous-variété fermée  $N$  de  $M$  de codimension  $i$  avec une orientation grâce au fibré normal. De manière informelle, on pense à la classe résultante  $f^*([N]) \in H^i(X)$  comme vivant dans le sous-espace  $f^{-1}(N)$  de  $X$ ; cela se justifie dans la mesure où la classe  $f^*([N])$  se restreint à zéro dans la cohomologie du sous-ensemble ouvert  $X \setminus f^{-1}(N)$ . La classe de cohomologie  $f^*([N])$  peut se déplacer librement sur  $X$  dans le sens où  $N$  pourrait être remplacée par toute déformation continue de  $N$  à l'intérieur de  $M$ .

### 7.2.2.3 Anneaux de cohomologie

Maintenant que nous savons bien comment calculer des cohomologies, il est temps de définir un des invariants les plus incontournables de la topologie algébrique.

#### Définition. (*Anneau de cohomologie*)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire. L'*anneau de cohomologie* sur  $R$  de  $X$  est l'algèbre  $\mathbb{N}$ -graduée (de degrés indexés par  $k \in \mathbb{N}$ ) :

$$H^\bullet(X; R) = H^*(X; R) := \sum_{k \in \mathbb{N}} H^k(X; R)$$

munie de l'addition qui définit la somme directe d'une somme de groupes, de la loi externe étendue évidente de  $R$ -module et de la multiplication donnée par le cup-produit pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$  par  $H^k(X; R) \times H^l(X; R) \longrightarrow H^{k+l}(X; R)$ .

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \smile \beta$$

Cet anneau est donc gradué-commutatif au sens où les éléments commutent au signe près, lequel est déterminé par le produit de leurs degrés :  $(-1)^{kl}$  avec les notations muettes qui précèdent.

→ *Convention.* Si l'on ne précise pas, l'anneau de cohomologie d'un espace est son anneau de cohomologie pris sur  $\mathbb{Z}$ .

#### Définition. (*Longueur de cup*)

La *longueur de cup* d'un espace topologique  $X$  sur un anneau commutatif unitaire  $R$  est l'invariant numérique donné par le nombre maximal d'éléments gradués de degrés  $\geq 1$  qui ne s'annulent pas lorsque multipliés.

→ *Notation.* On rappelle que le degré d'un élément  $c$  d'une algèbre graduée est souvent noté  $|c|$  ou plus simplement  $\deg(c)$ .

**Remarque importante.** L'anneau de cohomologie est un invariant topologique, car le cup-produit en est un. En effet, par propriété de transfert du cup-produit sur l'espace de base, une équivalence d'homotopie induit par pullback un isomorphisme d'algèbres  $\mathbb{N}$ -graduées. La longueur de cup est donc également un invariant topologique.

→ *Notation.* Souvent, lorsque l'anneau de cohomologie, qui est une  $\mathbb{N}$ -algèbre graduée, s'exprime sous la forme d'un quotient d'un anneau de polynôme, on note  $\alpha, \beta, \dots$  les indéterminées.

Pour calculer proprement des anneaux de cohomologie, on aura besoin du corollaire suivant du théorème de Poincaré :

### Corollaire

Si  $M$  est une variété connexe compacte sans bord orientable de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , un élément  $\alpha \in H^k(M; \mathbb{Z})$  engendre un terme monogène infini de  $H^k(M; \mathbb{Z})$  si et seulement s'il existe  $\beta \in H^{n-k}(M; \mathbb{Z})$  tel que  $\alpha \smile \beta$  est un générateur de  $H^n(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ .

De plus, si  $\mathbb{Z}$  est remplacé par un corps, en particulier dans le cas des coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , le résultat reste vrai pour tout  $\alpha \neq 0$ .

▷  $\alpha$  engendre un terme en  $\mathbb{Z}$  de  $H^k(M; \mathbb{Z})$  si et seulement s'il existe un morphisme  $\varphi : H^k(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  qui envoie  $\alpha$  sur 1 ou -1. Par non-dégénérescence de l'accouplement cup-produit par dualité de Poincaré,  $\varphi$  est réalisée en prenant le cup-produit avec un élément  $\beta \in H^{n-k}(M; \mathbb{Z})$  et en évaluant en  $[M]$ , donc avoir un  $\beta$  tel que  $\alpha \smile \beta$  engendrant  $H^n(M; \mathbb{Z})$  est équivalent à la donnée de  $\varphi$  avec  $\varphi(\alpha) = \pm 1$ .

Le cas des coefficients dans un corps est similaire, mais plus simple. ■

### Exemples. (*Anneaux de cohomologie, longueur de cup*)

1. L'anneau de cohomologie d'un point ou, plus généralement, d'un espace contractile, est l'anneau  $\mathbb{Z}$ , placé en degré 0, i.e. :  $\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$ .

C'est simple, par graduation de la loi produit, la seule partie de la loi multiplicative qui peut être non nulle, concerne la multiplication des éléments de  $H^0(\{\ast\})$ . C'est bien celle de  $\mathbb{Z}$  : notons encore  $1 = f^{-1}(1)$  où  $f$  est un isomorphisme du  $H^0$  à  $\mathbb{Z}$ . Alors pour tous  $k, k' \in H^0(\{\ast\})$ ,  $k \smile k' = kk' \cdot (1 \smile 1)$  par distributivité du cup-produit. Il suffit donc de voir que  $f(1 \smile 1) = 1$ . Mais l'isomorphisme  $H^0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  est donné par la factorisation du degré, qui vaut 1 sur toute simple cochaîne, donc puisque le cup-produit de deux cochaînes est une cochaîne, le résultat suit. Important ! De cette preuve, on déduit que sur un espace connexe, le produit en degré zéro de l'anneau de cohomologie est donné par le produit usuel sur  $\mathbb{Z}$ .

La longueur de cup d'un contractile est nulle.

2. L'anneau de cohomologie de la sphère  $S^n$ ,  $n \in N$  est  $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$  avec  $\alpha$  appartenant au terme de degré  $n$  de l'anneau. Remarquons alors qu'en oubliant la structure

graduée, tous les anneaux de cohomologie des sphères sont égaux.

De façon générale, puisque pour tout  $k$ , le cup-produit est défini sur  $H^k(X) \times H^0(X) \rightarrow H^k(X)$  et  $H^0(X) \times H^k(X) \rightarrow H^k(X)$ , et par la remarque précédent, l'élément  $1 \in H^0(X)$  doit être l'unité de l'anneau de cohomologie. Notons  $\alpha$  un générateur de  $H^n(X) \simeq \mathbb{Z}$ , de sorte qu'ensemblistement,  $H^*(X) = \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$ . Les relations satisfaites sont alors  $1 \smile 1 = 1$ ,  $1 \smile \alpha = \alpha \smile 1 = x$  et  $\alpha \smile \alpha = 0$ , puisque  $\alpha \smile \alpha \in H^{2n}(X) = 0$ . Or l'anneau  $\mathbb{Z}.1 \oplus \mathbb{Z}.\alpha$  satisfait ces quatre relations n'est autre abstraitemen que  $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^2)$ , on laissera le lecteur s'en convaincre, sachant que c'est immédiat. La longueur de cup d'une sphère est toujours de 1.

3. De même,  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha, \alpha^2)$  où  $|\alpha| = 2$ .

Le raisonnement est le même, la cohomologie étant alors ensemblistement  $\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0 \dots$ . Les relations sont alors les mêmes, mais on ajoute  $2\alpha = 0$  où  $\alpha$  est un générateur de  $H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^2; \mathbb{Z})$  pour rendre compte que ce groupe est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et plus  $\mathbb{Z}$ . La longueur de cup de l'espace projectif réel est de 1.

4. L'anneau de cohomologie du tore  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  est  $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  en degré 1.

En effet, la cohomologie graduée du tore a une base en tant que  $\mathbb{Z}$ -module libre de la forme : 1 en degré 0,  $\alpha := [P \times S^1]$  et  $\beta := [Q \times S^1]$  en degré 1, et  $\alpha\beta = [Q]$  en degré 2, où  $P$  est un point du cercle  $S^1$  et  $Q = (P, P)$  dans  $\mathbb{T}^2$  où des orientations ont été implicitement fixées. Notons que  $\alpha\beta = -\beta\alpha = -[Q]$  par commutativité graduée.

La longueur de cup du tore est de 2. Remarquons que le calcul précédent aurait pu être donné par la formule de Künneth et qu'il permet également de calculer :

La cohomologie du tore généralisé  $\mathbb{T}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  comme algèbre extérieure sur  $\mathbb{Z}$  ayant  $n$  générateurs en degré 1.

5. L'anneau de cohomologie d'une surface fermée orientable  $X$  de genre  $g$  a pour base en tant que  $\mathbb{Z}$ -module libre : l'élément 1 en degré 0, les éléments  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g$  en degré 1 et la classe  $P$  d'un point en degré 2. Le produit est donné par  $A_i A_j = B_i B_j = 0$  pour tous  $i, j$ ,  $A_i B_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $A_i B_i = P$  pour tout  $i$ . Il suit bien sûr que  $B_i A_i = -P$ .
6. L'anneau de cohomologie de l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est  $\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$  avec  $\alpha$  en degré 2.

On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , c'est presque insolent. Pour  $n = 1$ , on a le cas de la sphère  $S^2 \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  qui a déjà été traité et l'initialisation a lieu. Par calcul de la cohomologie via la structure cellulaire, puisque celle-ci est définie par récurrence, l'inclusion  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  induit un isomorphisme sur les groupes  $H^i$  pour tout  $i \leq 2n - 2$ . Faisons l'hypothèse d'induction que  $H^{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$  est engendré par  $\alpha^i$  pour  $i < n$ . Par le corollaire, il existe un entier  $m$  tel que le produit  $\alpha \smile m\alpha^{n-1} = m\alpha^n$  engendre  $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ . Cela n'est au plus possible que si  $m = \pm 1 \dots$  d'où le résultat déjà ! Ainsi, par récurrence, si  $\alpha$  engendre  $H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ , avec  $\alpha^2$  engendre  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ ,  $\alpha^3$  engendre  $H^6(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \dots$  dès que  $n > 1, 2, 3$  respectivement. Puisqu'on aura toujours  $\alpha^{n+1} = 0$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , l'anneau de cohomologie est bien celui annoncé.

7. L'anneau de cohomologie de l'espace projectif réel  $\mathbb{RP}^n, n \in \mathbb{N}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$  avec  $\alpha$  en degré 1.

Ici  $\alpha$  est la classe d'un hyperplan  $\mathbb{RP}^{n-1}$  dans  $\mathbb{RP}^n$ . Remarquons que ce calcul fait sens même si  $\mathbb{RP}^j$  n'est pas orientable pour  $j$  pair, car la dualité de Poincaré fonctionne pour toute variété sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

L'anneau de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  est plus subtil. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , la  $\mathbb{Z}$ -cohomologie de  $\mathbb{RP}^{2k}$  a un élément  $y$  en degré 2 tel que toute sa cohomologie est la somme directe  $\mathbb{Z}$  couverte par l'élément 1 en degré 0 avec de copies de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  couverte par les éléments  $y^i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ; d'autre part, la  $\mathbb{Z}$ -cohomologie de  $\mathbb{RP}^{2k+1}$  est la même à une copie supplémentaire de  $\mathbb{Z}$  en degré  $2k + 1$ .

La longueur de cup d'un espace projectif est égale à sa dimension.

8. On a  $H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha]$  avec  $|\alpha| = 2$  et  $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]$  avec  $|\alpha| = 1$ .  
9. L'anneau de cohomologie de la bouteille de Klein est  $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, 2\beta)$ .

Ceci peut se calculer grâce à la cohomologie simpliciale en se rappelant qu'ensemblistement  $H^*(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \dots$

### Définition. (*Pullback en cohomologie*)

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Son *pullback cohomologique*  $f^* : H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$  est le morphisme d'algèbres graduées contravariant défini pour tout cochaîne :  $c : \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, Y) \rightarrow R$  par  $f^*[c(g)] = c(g \circ f)$ .

### Fait. (*Fonctorialité du pullback cohomologique*)

- Étant données deux applications continues composableles  $f, g$ , les pullbacks cohomologiques vérifient :  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .
- Pour tout espace  $X$ ,  $\text{id}_X^* = \text{id}_{H^*(X; R)}$ .

### Définition. (*Restriction d'une classe de cohomologie*)

Soient  $X, Y$  deux espaces ou  $(X, A), (Y, B)$  deux paires. Alors une inclusion  $i : X \rightarrow Y$  ou  $i : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  donne lieu à un morphisme en cohomologie  $i^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ ,  $u \mapsto u|_X$ , dit *morphisme de restriction* à  $X$ , respectivement  $i^* : H^*(Y, B) \rightarrow H^*(X, A)$ .

### Propriété. (*Invariance homotopique de la cohomologie*)

Deux applications homotopes induisent le même pullback en cohomologie.

**Mnémonik :** l'anneau de cohomologie est une construction fonctorielle.

**Corollaire**

Deux espaces homotopiquement équivalents, en particulier homéomorphes, ont le même anneau de cohomologie.

La donnée de la loi d'anneau est bien sûr fondamentale dans le calcul de l'anneau de cohomologie, mais le contre-exemple ci-dessous permet d'en être sûr.

**Contre-exemple. (*Même cohomologie  $\not\Rightarrow$  même anneau de cohomologie*)**

$S^2 \times S^4$  et  $\mathbb{CP}^3$  ont la même cohomologie mais n'ont pas les mêmes anneaux de cohomologie.

La formule de Künneth permet de voir que  $S^2 \times S^4$  a la même suite d'homologie que  $\mathbb{CP}^3$ , donc la même cohomologie également. Cette même formule permet de voir que les lois d'anneaux diffèrent cependant, avec un argument précis à fournir par le lecteur.  $\square$

**Corollaire. (*Invariant de cohomologie*)**

L'anneau de cohomologie est un invariant plus fort que l'homologie.

**Propriétés. (*Propriétés de l'anneau cohomologique*)**

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire.

1. Pour tout  $x \in H^{2k+1}(X; R)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $2x^2 = 0$ .
2. En particulier, si  $R$  contient  $\frac{1}{2}$  (ce qui n'est pas le cas de  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ), pour tout  $x \in H^{2k+1}(X; R)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x$  est nilpotent d'ordre 2.

▷ Par commutativité graduée,  $x \smile x = (-1)^{\text{impair}} x \smile x$  d'où  $2x \smile x = 0$ , ce que l'on voulait. ■

**Contre-exemple**

Dans le cas de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{RP}^2$  a des carrés non nuls en degré impair.

Dans le cas de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{RP}^4 \times \mathbb{RP}^2$  a des carrés non nuls en degré impair.  $\square$

**7.2.2.4 Signature d'une variété**

L'homologie en dimension du milieu, *i.e.*  $\approx \frac{n}{2}$ , est une question intéressante qui donne lieu à des formes symétriques non dégénérées par la dualité de Poincaré. En particulier, on peut s'intéresser aux invariants de ladite forme.

**Définition. (*Signature d'une variété, parité d'une variété*)**

Soit  $M$  une variété topologique compacte sans bord orientable de dimension  $n$  divisible par  $k$ ,  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque  $M$  est a fortiori  $\mathbb{Q}$ -orientable, si on l'oriente, on obtient la forme bilinéaire symétrique<sup>a</sup> non dégénérée dite *accouplement d'intersection* ou *forme*

d'intersection :

$$\begin{aligned} I_M : H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto (\varphi \smile \psi)[M]. \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique associée  $(s, t)$  où  $s$  est le nombre de carrés positifs et  $t$  le nombre de carrés négatifs dans la décomposition de Gauss de cette forme, permet de définir un entier noté  $\sigma(M) = s - t$  appelé *signature* de la variété  $M$ .

On dit que  $M$  est *paire* si  $\sigma(M)$  est paire et *impaire* sinon.

<sup>a</sup> Par la formule d'anticommutativité associée à  $(2k, 2k)$ .

### Lemme

Soit  $M$  une variété fermée orientée. Les sous-groupes de torsion des  $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$  sont dans le noyau de  $I_M$ , i.e. si  $c_1 \in H^{2k}(M)$  est de torsion, alors  $I(c_1, c_2) = 0$  pour tout  $c_2$ . En particulier,  $I_M$  descend sur les parties libres :  $\overline{I_M} : \text{Free}(H^{2k}(M; \mathbb{Q})) \times \text{Free}(H^{2k}(M; \mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{Z}, (\overline{c_1}, \overline{c_2}) \mapsto (\overline{c_1} \smile \overline{c_2})([M])$  en une forme non dégénérée.

▷ Simple vérification. La non-dégénérescence de la forme obtenue est l'expression de la dualité de Poincaré. ■

### Heuristique

Une autre conséquence de la dualité de Poincaré sur une variété  $M$  est qu'il existe un couplage dual sur le groupe libre  $H_{2k}(M)$ , et celui-ci est plus géométrique. En fait, le terme « forme d'intersection » provient de la version homologique. Pour le calculer, on représente deux classes d'homologie de dimension intermédiaire par des sous-variétés fermées orientées  $C_1, C_2 \subseteq M$ , on les déforme pour qu'elles soient transverses, et on définit la forme d'intersection comme le nombre d'intersection orienté  $I_M(C_1, C_2) \in \mathbb{Z}$ .

### Exemples. (*Signatures*)

1.  $\sigma(S^4) = 0$ .

En effet,  $H^2(S^4; \mathbb{Q}) = 0$ .

2.  $\sigma(S^2 \times S^2) = 0$ .

Le groupe  $H^2(S^2 \times S^2; \mathbb{Q})$  est de rang 2. Dans la base standard, la matrice de la forme d'intersection s'écrit simplement  $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ce que l'on peut calculer en comprenant que les sous-variétés  $S^2 \times \{\ast\}$  et  $\{\ast\} \times S^2$  de  $S^2 \subseteq S^2$  sont les générateurs de ce groupe, qui ont des nombres d'auto-intersection nuls et un nombre d'intersection réciproque égal à 1. Alors  $\text{Sp}(H) = \{\pm 1\}$  d'où  $\sigma(S^2 \times S^2) = 1 - 1 = 0$ .

**Exercice 20** (*Petite étude du tore en dimension 4*)

1. Montrer que  $\mathbb{T}_2 = S^2 \times S^2$  est orientable.
2. Calculer que  $H^2(\mathbb{T}_2)$  est sans torsion.
3. En déduire la signature de  $\mathbb{T}^2$ .

**Exercice 21** (*Comparaison de la signature et de la caractéristique d'Euler*)

Soit  $M$  une variété topologique compacte orientée de dimension  $4k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  et la signature  $\sigma(M)$  sont de même parité.

## ▷ Éléments de réponse.

Par compacité, la caractéristique d'Euler poincaré est bien définie. Montrons que  $\sigma(M) = \sigma = \chi(M)$  [2]. Puisque  $M$  est orientée, par la dualité de Poincaré, on a  $H^p(M; \mathbb{Q}) \simeq H_{4k-p}(M; \mathbb{Q})$  pour  $p \in \llbracket 0, 4k \rrbracket$  d'où  $\dim H_p(M; \mathbb{Q}) = \dim H_{4k-p}(M; \mathbb{Q})$  et en termes de nombres de Betti,  $b_p = \dim H_p(M; \mathbb{Q}) = b_{4k-p}$  et comme  $(-1)^{4k-i} = (-1)^i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a donc

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{4k} (-1)^i b_i = 2 \sum_{i=0}^{2k-1} b_i + b_{2k} \equiv b_{2k} \quad [2].$$

D'autre part,  $\sigma = b_+ - b_- \equiv b_+ + b_- \equiv b_{2k}$  [2] ce qui permet de conclure.

**Exercice 22**

Montrer que  $\mathbb{CP}^2$  n'est pas homotopiquement équivalent à  $S^2 \vee S^4$ .

## ▷ Éléments de réponse.

Remarquer que ces deux espaces ont la même homologie, et donc que l'exemple est intéressant.

**Propriété.** (*Signature d'une réunion disjointe*)

Soient  $A, B$  deux variétés fermées orientées de dimension divisible par 4. Alors  $\sigma$  est additive par rapport à la réunion disjointe, c'est-à-dire  $\sigma(A \sqcup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$ .

**Propriété.** (*Signature d'une somme connexe*)

Soient  $A, B$  deux variétés fermées orientées de dimension divisible par 4 et dont la somme connexe est bien définie. Alors  $\sigma$  est additive par rapport à la somme connexe, c'est-à-dire  $\sigma(A \# B) = \sigma(A) + \sigma(B)$ .

**Propriété. (Signature d'un produit)**

Soient  $A, B$  deux variétés fermées orientées de dimension divisible par 4. Alors  $\sigma(A \times B) = \sigma(A)\sigma(B)$ . En fait, le résultat reste vrai sans restriction de dimension si l'on impose que  $\sigma(M) = 0$  dès que  $M$  est une variété de dimension non divisible par 4.

**7.2.3 Autres formes de dualité****7.2.3.1 Dualité de Poincaré pour les variétés à bord****Définition-propriété. (Classe fondamentale relative)**

Soit  $M$  une variété topologique à bord de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est compacte et  $R$ -orientable.

Le bord  $\partial M$  de  $M$  admet un voisinage ouvert tubulaire dans  $M$  homéomorphe à  $\partial M \times [0,1[$  et on l'y identifie. Pour tout  $\varepsilon \in ]0,1[$ , on a un isomorphisme naturel

$$H_n(M, \partial M; R) \simeq H_n(M \setminus \partial M, \partial M \times ]0, \varepsilon[; R).$$

Ainsi, une  $R$ -orientation de  $M$  donne une classe  $[M] \in H_n(M, \partial M; R)$ . L'image de cette classe par le morphisme habituel  $H_n(M, \partial M; R) \rightarrow H_{n-1}(\partial M; R)$  est  $[\partial M] \in H_{n-1}(\partial M; R)$ .



FIGURE 7.2.2 : Classe fondamentale relative. —

**Théorème. (Isomorphisme de Poincaré pour les variétés à bord)**

Supposons que le bord  $\partial M$  d'une variété topologique  $M$  compacte,  $R$ -orientable et de dimension  $n$  soit présenté comme réunion disjointe  $\partial M = A \sqcup B$  où  $A$  et  $B$  sont donc des

réunions de composantes connexes de  $\partial M$ . Alors

$$\begin{aligned} D_M: \quad H^k(M, A; R) &\longrightarrow H_{n-k}(M, B; R) \\ \varphi &\longmapsto [M] \frown \varphi \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , et donc  $H^k(M, A; R) \simeq H_{n-k}(M, B; R)$ .

▷ Considérons le cas  $B = \emptyset$ . On a  $H^k(M, \partial M; R) \simeq H_c^k(M \setminus \partial M; R)$  et  $H_{n-k}(M; R) \simeq H_{n-k}(M \setminus \partial M; R)$ . On peut utiliser le théorème d'isomorphisme de Poincaré.

Dans le cas général, on a le diagramme commutatif à signe près :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(M, \partial M) & \longrightarrow & H^k(M, A) & \longrightarrow & H^k(\partial M, A) & \longrightarrow & H^{k+1}(M, \partial M) & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow [M] \frown & & \downarrow [M] & & \downarrow \simeq & & \downarrow [M] \frown & \\ & & H_{n-k}(M) & \longrightarrow & H_{n-k}(M, B) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-k-1}(M) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

où l'on ne précise pas toujours l'anneau  $R$  des coefficients. Le lemme des cinq conclut. ■

### Théorème

Soit  $M$  une variété topologique sans bord de dimension  $n$ . Supposons que  $M$  est compacte et orientable. Soit  $K \subseteq M$  un « bon » compact. On a  $H_m(M, M \setminus K) \simeq H^{n-m}(K)$  pour tout entier  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

\* (Idée de la preuve.) Soit  $K \subseteq U$  un voisinage ouvert. On a le diagramme commutatif à signe près

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_m(M \setminus K) & \longrightarrow & H_m(M) & \longrightarrow & H_m(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{m-1}(M \setminus K) & \longrightarrow \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow [M] \frown & & \uparrow \simeq & & \uparrow & \\ & & H^{n-m}(M \setminus U \setminus K) & & H_m(U, U \setminus K) & & H_{n-m+1}(M \setminus K, U \setminus K) & & \\ & & \uparrow \simeq & & \uparrow & & \uparrow \simeq & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{n-m}(M, U) & \longrightarrow & H^{n-m}(M) & \longrightarrow & H^{n-m}(U) & \longrightarrow & H^{n-m+1}(M, U) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

où la classe fondamentale  $[M]$  de  $M$  est représentée par un cycle qui est la somme d'une chaîne dans  $M \setminus K$  et une chaîne dans  $U$  représentant des éléments de  $H_n(M \setminus K, U \setminus K)$  et  $H_n(U, U \setminus K)$ , respectivement ; ce sont les éléments utilisés pour définir les flèches correspondantes du diagramme.

On considère des voisinages ouverts de plus en plus petits et on passe à la limite inductive. La première flèche verticale devient l'isomorphisme de Poincaré  $H_c^{n-m}(M \setminus K) \simeq H_m(M \setminus K)$ . On obtient un isomorphisme  $H_m(M, M \setminus K) \simeq \varinjlim H^{n-m}(U)$ . Sous certaines hypothèses sur  $K$ , notamment que c'est un « bon » compact, on a  $\varinjlim H^{n-m}(U) \simeq H^{n-m}(K)$ . ■

### 7.2.3.2 Dualité d'Alexander

Généralisons.

Soit  $M$  une variété topologique orientable de dimension  $n$ . Soit  $\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$  une orientation,  $G$  un groupe abélien. Si  $L \subseteq K \subseteq M$  sont des sous-ensembles compacts, on pose  $\check{H}^m(K, L; G) = \lim_{\leftarrow}^m (U, V; G) \mid (U, V) \supseteq (K, L), U, V \text{ ouverts}\}$ , groupes isomorphes pour ceux qui connaissent aux groupes de cohomologie de Čech. Si  $K$  et  $L$  sont raisonnables, par exemple, des  $CW$ -complexes ou des variétés topologiques, ces groupes sont isomorphes aux groupes de cohomologie singulière correspondants.

On a un cap-produit

$$\left[ \frac{C_n(V) + C_n(U \setminus L)}{C_n(U \setminus K)} \right] \times C^m(U, V; G) \rightarrow C_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G)$$

donné par  $(b + c) \frown f = b \frown f + c \frown f = c \frown f$ .

On a  $H_{n-m}(U \setminus L, U \setminus K; G) \simeq H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$  et  $H_n(\frac{C_{\bullet}(V) + C_{\bullet}(U \setminus L)}{C_{\bullet}(U \setminus K)}) \simeq H_n(U, U \setminus K) \simeq H_n(M, M \setminus K)$ , car  $\{V, U \setminus L\}$  est un recouvrement ouvert de  $U$ .

On obtient un cap-produit

$$H_n(M, M \setminus K) \times H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

Pour tout compact  $K' \supseteq K$ , on peut considérer la classe  $\mu_{K'} = \mu_{M|K'} \in \Gamma(K', \tilde{M}_{\mathbb{Z}}) \simeq H_n(M, M \setminus K')$ , et on a un morphisme  $\mu_{K'} \frown: H^m(U, V; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$ . Il est défini par  $[f] \mapsto \Gamma \frown [f] = [c \frown f] \in H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$ , où  $\Gamma \in H_n(M, M \setminus K')$  est représenté par  $f + c + d \in C_n(V) + C_n(U \setminus L) + C_n(M \setminus K)$ . En passant à la limite inductive, on obtient le morphisme

$$\mu \frown: \check{H}^m(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G).$$

**Théorème. (Dualité de Poincaré-Alexander-Lefschetz)**

Soit  $M$  une variété topologique orientable de dimension  $n$ . Soit  $\mu_M \in \Gamma(M, \tilde{M}_{\mathbb{Z}})$  une orientation,  $G$  un groupe abélien. Le morphisme  $\mu \frown: \check{H}^m(K, L; G) \rightarrow H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K; G)$  est un isomorphisme pour tout  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

▷ On reprend les notations du laïus. Le cas  $L = \emptyset$  a été déjà essentiellement considéré. Le cas général peut être déduit du cas  $L = \emptyset$  à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{H}^m(K, L) & \longrightarrow & \check{H}^m(K) & \longrightarrow & \check{H}^m(L) & \longrightarrow & \check{H}^{m-1}(K, L) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-m}(M \setminus L, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus K) & \longrightarrow & H_{n-m}(M, M \setminus L) & \longrightarrow & H_{n-m-1}(M \setminus L, M \setminus K) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

à coefficients dans  $G$ . Sa commutativité est laissée en exercice. ■

**Corollaire. (*Dualité d'Alexander*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \check{H}^{n-i-1}(K; G)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

▷ On a  $\check{H}^{n-i-1}(K; G) \simeq H_{i+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; G) \simeq \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n \setminus K; G)$ . ■

**7.2.3.3 Éléments de dualité de Thom****Théorème**

Soit  $F$  un corps. Soit  $N$  une variété topologique compacte orientée de dimension impaire  $2n+1$  où  $n \in \mathbb{N}$ , à bord connexe  $M$ . Alors  $\dim(H^n(M; F))$  est paire et  $\dim(\text{Ker}(i_* : H_n(M; F) \rightarrow H_n(N; F))) = \dim(\text{Im}(i^* : H^n(N; F) \rightarrow H^n(M; F))) = \frac{1}{2} \dim(H^n(M; F))$  où  $i : M \hookrightarrow N$  est l'inclusion.

De plus, pour tous  $\alpha, \beta \in \text{Im}(i^*)$ , on a  $\alpha \smile \beta = 0$ .

▷ On a le diagramme commutatif à signe près

$$\begin{array}{ccccc} H^n(N; F) & \xrightarrow{i^*} & H^n(M; F) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(N, M; F) \\ [M] \smile \downarrow & & \downarrow [N] \smile & & \\ H_n(M; F) & \xrightarrow{i_*} & H_n(N; F) & & \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. On a  $[M] \smile \text{Im}(i^*) = [M] \smile \text{Ker}(\delta^*) = \text{Ker}(i_*)$ .

Donc  $\text{rg}(i^*) = \dim(\text{Im}(i^*)) = \dim(\text{Ker}(i_*)) = \dim(H^n(M)) - \text{rg}(i_*)$ . Par conséquent,  $\dim(H^n(M; F)) = 2\text{rg}(i^*) = 2\dim(\text{Ker}(i_*))$ .

Si  $\alpha', \beta' \in H^n(N; F)$ , alors  $\delta^*(i^*(\alpha') \smile i^*(\beta')) = \delta^*i^*(\alpha' \smile \beta') = 0$ . De plus  $\delta^* : H^{2n}(M; F) \rightarrow H^{2n+1}(N, M; F)$  est injectif, car ce morphisme est Poincaré-dual à  $i_* : H_0(M; F) \rightarrow H_0(N; F)$ . ■

**Corollaire. (*Dualité de Thom*)**

Pour toute  $N$  une variété topologique compacte orientable de dimension congrue à 1 modulo 4, i.e.  $4k+1$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , à bord connexe  $M$ , la signature de  $M$  est nulle.

▷ On pose  $\dim(H^{2k}(M; \mathbb{Q})) = 2m$  où  $m \in \mathbb{N}$ . Notons  $r$  le nombre de carrés positifs de la forme bilinéaire  $H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \times H^{2k}(M; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}, (\varphi, \psi) \mapsto (\varphi \smile \psi)[M]$ . D'après le théorème précédent, l'espace  $H^{2k}(M; \mathbb{Q})$  contient un sous-espace totalement isotrope de dimension  $m$ . Donc  $r = 2m - r = m$ . ■

La dualité de Thom a des conséquences fortes en termes de COBORDISME.

### 7.2.3.4 Quelques commentaires concernant variétés topologiques et variétés lisses

#### Exercice 23

Soit  $M$  une variété topologique fermée, simplement connexe et donc orientée, et de dimension 4. Vérifier que l'homologie et la cohomologie de  $M$  est sans torsion. En déduire que la forme bilinéaire symétrique fournie par le cup-produit

$$\beta_M : H^2(M) \times H^2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est unimodulaire.

#### Théorème. (*Théorème d'Arf*)

Soit  $E \simeq \mathbb{Z}^r$  un groupe abélien libre de type fini et soit  $\beta : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$  une forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire, i.e.  $\beta(\alpha, \alpha) = 0$  [2] pour tout  $\alpha \in H^2(M)$ . Alors 8 divise  $\sigma(\beta)$ .

#### Exemples. (*Parité des variétés*)

1. Considérons  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ . Elle est impaire, car la matrice de la forme  $\beta$  est :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
2. Considérons  $S^2 \times S^2 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ . Elle est paire, car la matrice de la forme  $\beta$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

*Remarque.* Inversement, pour tout nombre entier  $s$  divisible par 8, il existe une forme bilinéaire symétrique à valeurs entières unimodulaire paire dont la signature est  $s$ . On peut construire une telle forme à l'aide de l'opération de la somme directe à partir des formes  $\pm E_8$ .

Ici,  $E_8$  est la forme bilinéaire symétrique unimodulaire paire définie positive de rang 8 dont

la matrice de Gram dans une certaine base est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & 0 & & & \\ & & & -1 & 0 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } -E_8$$

est la forme  $E_8$  dont toutes les valeurs sont multipliées par  $-1$ .

Alors il existe une variété topologique fermée simplement connexe orientée  $N$  de dimension 4, appelée  **$E_8$ -variété de Freedman**, dont la forme bilinéaire  $\beta_N$  est isomorphe à  $E_8$ .

**Théorème. (*Théorème de Rokhlin*)**

Si  $M$  est une variété lisse fermée simplement connexe orientée de dimension 4, et si la forme bilinéaire  $\beta_M$  est paire, alors la signature  $\sigma(M)$  de  $M$  est divisible par 16.

**Corollaire**

La  $E_8$ -variété de Freedman n'admet pas de structure lisse.

**7.2.4 Théorie des intersections****7.2.4.1 Classes de Thom naïves****Définition. (*Produit d'intersection*)**

Soit  $M$  une variété topologique à bord de dimension  $n$ . On suppose que  $M$  est compacte et orientable. On note  $D : H^{n-i}(M) \rightarrow H_i(M, \partial M)$  et  $D : H^{n-i}(M, \partial M) \rightarrow H_i(M)$  tous les isomorphismes de Poincaré pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On définit le *produit d'intersection*

- :  $H_i(M) \times H_j(M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$
- :  $H_i(M, \partial M) \rightarrow H_{i+j-n}(M)$
- :  $H_i(M, \partial M) \times H_k(M, \partial M) \rightarrow H_{i+j-n}(M, \partial M)$

pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  par

$$\begin{aligned} a \bullet b &= D(D^{-1}(b) \smallsetminus D^{-1}(a)) \\ &= [M] \smallsetminus (D^{-1}(b) \smallsetminus D^{-1}(a)) \\ &= ([M] \smallsetminus D^{-1}(a)) \smallsetminus D^{-1}(b) \\ &= a \smallsetminus D^{-1}(b). \end{aligned}$$

**Propriétés. (*Propriétés calculatoires du produit d'intersection*)**

Dès que ceci a un sens,

1. (*Associativité du produit d'intersection*)  $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ ;
2. (*Commutation du produit d'intersection*)  $a \bullet b = (-1)^{n-\deg(a)(n-\deg(b))} b \bullet a$ .

**Reformulation pratique. (*Fibré en disques fermés*)**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $N$  un espace topologique. Si  $W$  est un espace topologique,  $\pi : W \rightarrow N$  est un *fibré en  $k$ -disques fermés* si tout point  $x \in N$  admet un voisinage ouvert  $U \ni x$  est un homéomorphisme  $\varphi_u : p^{-1}(U) \rightarrow U \times D^k \subseteq U \times \mathbb{R}^k$  compatible avec les projections sur  $U$  tels que pour deux ouverts arbitraires  $U$  et  $V$  trivialisant  $\pi$  et tout point  $y \in U \cap V$ , l'homéomorphisme  $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_y \times D^k : \{y\} \times D^k \rightarrow \{y\} \times D^k$  soit linéaire.

### Définition. (*Classe de Thom*)

Soient  $N, W$  deux variétés topologiques sans bord orientées avec  $N$  compacte. Soit  $\pi : W \rightarrow N$  un fibré en  $k$ -disques fermés,  $k \in \mathbb{N}$ . On voit  $N$  comme une sous-variété de  $W$  par la section zéro  $i : N \hookrightarrow W$ . La *classe de Thom* du fibré  $\pi$  est  $\tau : D_W^{-1}(i_*[N]) \in H^k(W, \partial W)$ . De façon équivalente,  $[W] \cap \tau = i_*[N]$ . On peut voir  $\tau$  comme élément de  $H^k(W, W \setminus N) \simeq H^k(W, \partial W)$ .

### Définition. (*Morphismes de transfert de Hopf-Freudenthal*)

Soient  $M, N$  deux variétés compactes à bord orientées de dimension  $m$  et  $n$  respectivement. Soit  $f : (N, \partial N) \rightarrow (M, \partial M)$  une application continue entre paires. On considère les morphismes

$$f^! : H^{n-p}(N) \rightarrow H^{m-p}(M), f^! : H^{n-p}(N, \partial N) \rightarrow H^{m-p}(M, \partial M)$$

pour  $p \in \llbracket 0, \min(m, n) \rrbracket$  définis par  $f^! = D_M^{-1} f_* D_N$ .

De façon similaire, on a

$$f_! : H_{m-p}(M) \rightarrow H_{n-p}(N), f_! : H_{m-p}(M, \partial M) \rightarrow H_{n-p}(N, \partial N)$$

pour  $p \in \llbracket 0, \min(m, n) \rrbracket$  définis par  $f_! = D_n f^* D_M^{-1}$ .

Les  $f^!, f_!$  sont appelés *morphismes de transfert*.

### Théorème. (*Isomorphismes de Thom*)

Si  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ , alors on a les *isomorphismes de Thom* pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

- (i)  $H^p(N) \xrightarrow{\pi^*} H^p(W) \xrightarrow{\sim} H^{p+k}(W, \partial W)$  qui coïncide avec  $i^!$ ,
- (ii)  $H_{p+k}(W, \partial W) \xrightarrow{\sim} H_p(W) \xrightarrow{\pi_*} H_p(N)$  qui coïncide avec  $i_!$ .

▷ Les morphismes  $i^!$  et  $i_!$  sont des isomorphismes. On a pour  $\alpha \in H^p(W)$  et  $\beta = i^*(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} i^!(\beta) &= D_W^{-1} i_* D_N(\beta) \\ &= D_W^{-1} i_* ([N] \cap i^*(\alpha)) \\ &= D_W^{-1} (i_* [N] \cap \alpha) \\ &= D_W^{-1} (([W] \cap \tau) \cap \alpha) \\ &= D_W^{-1} ([W] \cap (\alpha \cup \tau)) \\ &= \alpha \cup \tau = \pi^*(\beta) \cup \tau. \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour  $i_!$ . ■

**Lemme**

Soit  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $N$  une variété Supposons que  $N$  est connexe. Soit  $A \subseteq N$  un fermé. On pose  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  et  $\partial\tilde{A}$  et  $\partial\tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$ . On a  $\check{H}^p(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) = 0$  pour tout  $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

▷ On utilise le lemme local-global pour les compacts. ■

**Lemme**

Soit  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $N$  une variété Supposons que  $N$  est connexe. Soit  $A \subseteq N$  un fermé. On pose  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  et  $\partial\tilde{A}$  et  $\partial\tilde{A} = \tilde{A} \cap \partial W$ . Si  $A = \{x\}$  où  $x \in N$ , alors la restriction  $\tau_x \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$  de  $\tau$  est un générateur et dans ce cas  $(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \simeq (D^k, S^{k-1})$ .

▷ Supposons que  $\tau_x = 0$  pour un certain  $x \in N$ . Dans ce cas, il existe un voisinage de  $x$  tel que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y$  de ce voisinage. Puisque  $N$  est connexe, on obtient que  $\tau_y = 0$  pour tout point  $y \in N$ .

Soit  $P_n(A)$  l'affirmation que la restriction  $\tau_A \in \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A})$  de  $\tau$  est nulle, où  $A \subseteq N$  est un fermé. Si  $A \subseteq U$  est un sous-ensemble fermé et convexe d'un certain ouvert euclidien  $U \subseteq N$ , alors  $P(A)$  est vraie. D'autre part pour appliquer le lemme local-global pour les compacts, on peut utiliser le diagramme commutatif suivant de type Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^k(W, \partial W) & \longrightarrow & H^k(W, \partial W) \oplus H^k(W, \partial W) \\ & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \check{H}^k(\tilde{A} \cup \tilde{B}, \partial(\tilde{A} \cup \tilde{B})) & \longrightarrow & \check{H}^k(\tilde{A}, \partial\tilde{A}) \oplus \check{H}^k(\tilde{B}, \partial\tilde{B}) \end{array}$$

et pour le dernier point, on peut utiliser le fait que le passage à la limite inductive commute avec la considération de groupes  $\check{H}$ . Par suite,  $P_N(N)$  est vraie, ce qui contredit  $\tau \neq 0$ . Si  $\tau_x \neq 0$  est divisible dans  $H^k(D^k, S^{k-1}) \simeq \mathbb{Z}$  par un nombre premier  $p$ , alors on peut changer le groupe des coefficients pour  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . ■

**Corollaire**

Si  $\pi : W \rightarrow N$  est un fibré en  $k$ -disques entre variétés sur une variété fermée orientée de dimension  $n$ , si de plus elle est connexe, la classe  $\tau \in H^k(W, \partial W)$  est l'unique classe à signe près dont la restriction sur chaque fibre de  $\pi$  est un générateur.

▷ Le cup-produit avec  $\tau$  donne l'isomorphisme de Thom

$$H^0(N) \simeq H^0(W) \rightarrow H^k(W, \partial W).$$

Donc  $\tau \in H^k(W, \partial W) \simeq \mathbb{Z}$  est un générateur. ■

**Théorème. (*Théorème d'isomorphisme de Thom*)**

Pour tout compact  $A \subseteq N$ , l'application

$$\pi^*(\cdot) \smile \tau_A : \check{H}^p(A) \rightarrow \check{H}^{p+k}(\tilde{A}, \partial \tilde{A})$$

est un isomorphisme.

▷ On peut de nouveau utiliser le lemme local-global pour les compacts. ■

Soient maintenant  $N, W$  deux variétés lisses compactes orientées de dimension respectivement  $n$  et  $n+k$  où  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $i : N \hookrightarrow W$  un plongement lisse. On suppose que  $N$  est sans bord mais que le bord de  $W$  peut être non vide, mais alors disjoint de  $i(N)$ .

On pose  $[N]_W = i_*[N]$  et  $\tau_N^W = D_W^{-1}([N]_W) \in H^k(W)$ . Ici  $D_W^{-1} : H_n(W, \partial W) \rightarrow H^k(W)$ . La classe  $\tau_N^W$  qui s'appelle aussi *classe de Thom* est l'image de la classe de Thom du fibré normal  $\nu_N^W$  en  $k$ -disques de  $N$  dans  $W$  :

$$H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) \simeq h^k(W, W \setminus \text{tube}) \rightarrow H^k(W).$$

On a  $[W] \smile \tau_N^W = [N]_W$ .

Considérons maintenant deux sous-variétés lisses orientées  $M$  et  $N$  de dimensions respectivement  $m$  et  $n$  de  $W$ . Alors  $[M]_W \bullet [N]_W = ([W] \smile \tau_M^W) \bullet ([W] \smile \tau_N^W) = [W] \smile (\tau_N^W \smile \tau_M^W)$ .

Supposons que  $M$  et  $N$  soient transverses et que  $M \cap N$  soit connexe. On a  $\nu_{M \cap N}^N = \nu_M^W|_{M \cap N}$ . De plus,  $\tau_M^W$  se restreint à  $\tau_{M \cap N}^N$ , car la propriété de fournir par restriction un générateur du groupe de cohomologie relatif correspondant pour chaque fibre caractérise la classe de Thom à signe près. Par conséquent, en choisissant une orientation de  $M \cap N$  de façon appropriée,

$$\tau_{M \cap N}^N = i^*(\tau_M^W).$$

**Théorème. (*Classe de Thom d'une intersection transverse*)**

Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-variétés lisses fermées orientées de dimensions  $m$  et  $n$  respectivement d'une variété lisse fermée orientée  $W$ . Si  $M$  et  $N$  sont transverses, alors

$$\tau_{M \cap N}^N = \tau_M^W \smile \tau_N^W,$$

ou de façon équivalente

$$[M \cap N]_W = [N]_W \bullet [M]_W$$

le produit d'intersection.

▷ On a :

$$\begin{aligned}
 [M \cap N]_W &= (i_{M \cap N}^W)_*[M \cap N] = (i_N^W)_*(i_{M \cap N}^N)_*[M \cap N] \\
 &= (i_N^W)_*([N] \frown \tau_{M \cap N}^N) \\
 &= (i_N^W)_*([N] \frown (i_N^W)^*\tau_M^W) \\
 &= (i_N^W)_*[N] \frown \tau_M^W \\
 &= ([W] \frown \tau_N^W) \frown \tau_M^W \\
 &= [W] \frown (\tau_M^W \frown \tau_N^W) \\
 [M \cap N]_W &= [N]_W \bullet [M]_W
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. ■

#### 7.2.4.2 Classes d'Euler naïves

On donne là un premier exemple de classe caractéristique dont la théorie générale sera développée plus tard.

##### Définition. (*Classe d'Euler*)

Soit  $i_N^W : N \hookrightarrow W$  un plongement lisse où  $N$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$  et  $W$  une variété lisse compacte orientée de dimension  $n+k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . La *classe d'Euler* du fibré normal de  $N$  dans  $W$  est  $e_N^W = (i_N^W)^*(\tau_N^W) \in H^k(N)$ .

##### Remarques.

1. Le cas général d'un fibré vectoriel de rang fini de base  $N$  peut être réduit à ce cas de fibré normal.
2. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^k(W, W \setminus \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(W) \ni \tau_N^W \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \\
 H^k(\text{tube}, \partial \text{tube}) & \longrightarrow & H^k(\text{tube}) \simeq H^k(N) \ni e_N^W.
 \end{array}$$

Si le rang  $k$  du fibré est strictement plus grand que  $n$ , le groupe  $H^k(N)$  est trivial, donc  $e_N^W = 0$ .

##### Proposition

Soit  $N \hookrightarrow W$  un plongement lisse où  $N$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$  et  $W$  une variété lisse compacte orientée de dimension  $n+k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . S'il existe une section continue  $s$  du fibré normal de  $N$  dans  $W$  telle que  $s$  ne s'annule pas, alors  $e_N^W = 0$ .

▷ Une telle section  $s$  fournit une application continue  $s' : N \rightarrow \partial\text{tube}$  telle que la composition de  $s'$  avec la projection sur  $N$  soit l'identité. Donc la deuxième application dans la suite exacte

$$H^*(\text{tube}, \partial\text{tube}) \rightarrow H^*(\text{tube}) \rightarrow H^*(\partial\text{tube})$$

est injective. Par conséquent, la première application est nulle. ■

### Exercice 24

1. Vérifier que si  $M$  est une variété lisse fermée orientée de dimension  $n$ , on peut parler de la classe d'Euler dans  $H^n(M)$  du fibré tangent de  $M$  et l'évaluation en  $[M]$  de cette classe d'Euler est la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(M)$  de  $M$ .
2. Si  $\pi : W \rightarrow M$  est un fibré lisse en  $k$ -disques fermés où  $N$  est une variété lisse fermée orientée et  $W$  est orientée, et si  $s : N \rightarrow W$  est une section lisse telle que  $s(N)$  intersecte la section zéro  $N$  transversalement, alors la classe Poincaré-duale de la classe  $[s(N) \cap N]_N$  coïncide avec la classe d'Euler du fibré.

## 7.3 Introduction au cobordisme

### 7.3.1 Homologie naïve des variétés à bord

On rappelle que la bonne définition du bord des espaces topologiques provient d'un argument de topologie algébrique : en effet, un point d'une variété à bord ne peut à la fois admettre un voisinage euclidien et un voisinage homéomorphe à un demi-espace dans lequel elle se situe sur le bord (dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  la dimension de la variété). En effet, en privant ces voisinages des images de ce point, l'un a une homologie relative nulle et l'autre, par excision, égale  $\mathbb{Z}$ .

#### Théorème. (*Structure du bord d'une variété à bord*)

Soit  $M$  une variété à bord de dimension  $n > 0$ . Alors  $\partial M$  est une variété sans bord de dimension  $n - 1$ , avec donc  $\partial(\partial M) = \emptyset$ .

#### Corollaire. (*Homologie des variétés à bord*)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $M_n$  la sous-classe de la classe des variétés topologiques réelles constituées des variétés à bord de dimension  $n$ . On définit  $\partial_n$  par l'opérateur qui à une variété de  $M_n$  associe son bord qui est une variété de  $M_{n-1}$ . Alors

$$\dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\partial} M_{n-1} \dots \dots \dots M_1 \xrightarrow{\partial} M_0$$

est une complexe de chaînes.

▷ Une variété sans bord est en particulier une variété à bord. Par le théorème,  $\partial^2 = 0$ . ■

**Fait. (*Comportement du bord vis-à-vis du produit*)**

Soient  $M, N$  deux variétés à bord. Alors

$$\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup M \times \partial N$$

qui est une sous-variété de  $M \times N$ .

On vérifie calmement l'identité ensembliste avec les définition et caractérisation du bord, puis que  $\partial M \times N$  et  $M \times \partial N$  sont transverses.

### 7.3.2 Notion de cobordisme

#### 7.3.2.1 Définition et exemples

**Définition. (*Cobordisme*)**

Deux variétés compactes  $M_1, M_2$  de même dimension  $n$  sont *cobordantes* s'il existe une variété compacte à bord de dimension  $n + 1$  dont le bord est homéomorphe à leur réunion disjointe  $M_1 \sqcup M_2$ . On dit que cette variété est un *cobordisme* entre  $M_1$  et  $M_2$ .

On généralise bien sûr cette définition à un nombre quelconque nécessairement fini de variétés compactes.

**Exercice 25 (*Cobordisme entre variétés fermées*)**

Justifier l'usage de la locution « nécessairement fini » dans la généralisation précédente.

▷ **Éléments de réponse.**

Le bord d'une variété compacte est un fermé d'un compact, donc compact. Ce ne peut être une somme infinie de compacts non vides.

**Propriété. (*Relation de cobordisme*)**

Le cobordisme sur la classe des variétés compactes de dimension  $n$  à  $n \in \mathbb{N}$  fixé est une relation d'équivalence.

▷ En effet, la symétrie est triviale. Pour la réflexivité n'est pas triviale, mais il suffit de considérer, pour toute variété compacte  $M$ , la variété compacte  $M \times [0,1]$ , de bord  $M \times \{0\} \cup M \times \{1\} = M \sqcup M$ . Enfin, pour la transitivité, étant donné un cobordisme de  $M$  à  $M'$  et un de  $M'$  à  $M''$ , on produit un cobordisme de  $M$  à  $M''$  en recollant  $M$  et  $M''$  le long de  $M'$ . Ceci requiert qu'il existe un voisinage tubulaire de  $M'$ , mais c'est possible grâce à un théorème corolaire de la théorie des classes caractéristiques, et on l'admet sans problème pour parler de cobordisme. ■

**Définition. (*Cobordisme à zéro*)**

Une variété compacte est *cobordante à zéro* ou *nulcobordante* si elle est cobordante à  $\emptyset$ , autrement si elle est homéomorphe au bord d'une variété de dimension un de plus.

Citons tout de suite :

**Propriété. (*Caractéristique d'Euler d'une variété cobordante à zéro*)**

La caractéristique d'Euler d'une variété cobordante à zéro est paire.

**Exercice 26**

Soit  $N$  une variété topologique compacte cobordante à zéro par un cobordisme ayant une structure de *CW-complexe fini* induisant sur son bord une structure de sous-complexe. Montrer que  $\chi(N)$  est paire.

▷ **Éléments de réponse.**

Soit  $X$  un tel cobordisme. Si  $\dim(N)$  est impaire,  $\chi(N) = 0$  et c'est fini. Si  $\dim(N)$  est paire, truc magique : on pose  $Y = X \cup_{\partial X} X$ . Alors  $\chi(Y) = 2\chi(X) - \chi(\partial X)$  donc puisque  $\dim(Y) = \dim(X) = \dim(N) + 1$  est impaire et  $N = \partial X$ , et  $\chi(Y) = 0$ , on a  $\chi(N) = 2\chi(X)$  qui est paire.

**Preuve.**

▷ (*Preuve générale*) On utilise le même artifice en posant  $Y = X \cup_{\partial X} X$ . On peut obtenir la même formule pour les caractéristiques d'Euler en utilisant la suite de Mayer-Vietoris appliquée à  $Y = X_1 \cup X_2$  où  $X_1, X_2$  sont les deux copies respectives de  $X$  dans  $Y$ . ■

**Exercice 27 (*Cobordismes en petites dimensions*)**

1. (*Surfaces bordant des nœuds*) Montrer que toute variété compacte connexe de dimension 1 est cobordante à zéro.
2. Montrer que pour tous entiers naturels  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n$  cercles sont cobordants à  $m$  cercles.
3. Montrer que toute surface topologique compacte orientable sans bord est cobordante à zéro.
4. Montrer que le plan projectif réel n'est pas cobordant à zéro.
5. Que dire d'un point ? De deux points ? De trois points ?
6. Le ruban de Möbius est-il cobordant à zéro ?

▷ **Éléments de réponse.**

1. Il suffit de le montrer pour le cercle. Or c'est le bord d'une demi-sphère  $S^2_{\geq 0}$ .
2. Pour cela, on habille un alien à  $n$  jambes,  $m - 1$  bras et une tête.

3. Pour la sphère ou le tore, c'est visuel : il suffit de prendre la boule ou le tore solide. Pour les autres, c'est la même chose.
4. En effet, sa caractéristique d'Euler est  $1 \notin 2\mathbb{Z}$ . De même, celle du ruban de Möbius est 1 donc il n'est pas cobordant à zéro.
5. Un point est aussi de caractéristique d'Euler 1, donc même remarque. Deux points forment le bord d'un segment, qui est une variété à bord compacte de dimension 1. Trois points ont pour caractéristique d'Euler  $3 \notin 2\mathbb{Z}$ , donc ne sont pas cobordants à zéro.
6. Non, car ce n'est pas une variété sans bord.

**Exercice 28**

La bouteille de Klein est-elle cobordante à zéro ?

## ▷ Éléments de réponse.

Oui, il suffit en fait d'imaginer la bouteille de Klein pleine et l'on obtient une variété de dimension 3 dont le bord est  $\mathcal{K}$ . C'est bien possible, car dans  $\mathbb{R}^4$ , la bouteille de Klein est une variété plongée et donc n'a pas d'autointersection. Puisque c'est le recollement d'un certain cylindre, on considère le recollement correspondant du cylindre plein correspondant et c'est terminé.

**Corollaire. (*Classes de cobordismes des surfaces*)**

Toute surface compacte orientable est cobordante à zéro. Parmi les surfaces compactes non orientables, les sommes connexes de copies de la bouteille de Klein sont cobordantes à zéro et les autres, qui sont les surfaces non orientables de genre impair, ne sont pas cobordantes à zéro.

On justifie que la théorie du cobordisme concerne les variétés compacte.

**Fait**

Si l'on enlève les hypothèses de compacité dans la définition de cobordisme, toutes les variétés sont cobordantes.

En effet, toute variété  $M$  est cobordante à zéro grâce au cylindre infini  $M \times \mathbb{R}_+$ .

**7.3.2.2 Cobordismes orientés****Définition. (*Cobordisme orienté*)**

Deux variétés compactes orientées  $M_1, M_2$  de même dimension  $n$  sont *cobordantes* (*en tant que variétés orientées*) s'il existe une variété compacte orientée à bord de dimension  $n+1$  dont le bord est homéomorphe à la réunion disjointe  $\overline{M_1} \sqcup M_2$  où  $\overline{M_1}$  est la variété  $M_1$  munie de l'orientation opposée à celle qui a été choisie en premier lieu.

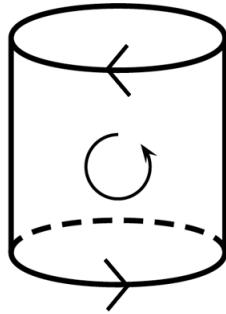


FIGURE 7.3.1 : Orientation du cylindre à bord. —

Ceci justifie la définition du cobordisme orienté. Voyons comment obtenir ces sens de rotation : la donnée d'une rotation sur, disons, le cercle du bas, est celle d'un vecteur tangent au cercle. Pour que celui-ci soit induit par l'orientation du cylindre, il faut que le deuxième vecteur soit dirigé vers le haut, afin tout simplement de correspondre à une donnée d'orientation, *i.e.* deux vecteurs de base d'un plan tangent, du cylindre. Cette orientation, puisqu'elle est cohérente en tout point, se déplace continûment et on peut en faisant glisser ce repère, par rotation de 180 degrés, obtenir une orientation du cylindre qui touche maintenant le cercle du haut, avec notre premier vecteur tangent au cercle du haut allant de droite à gauche et le deuxième vecteur allant vers le bas. En ne gardant que le premier vecteur, il induit donc bien un sens de tour opposé sur cet autre cercle, ce qu'il fallait voir.

### Propriété. (*Relation de cobordisme orienté*)

Le cobordisme orienté sur la classe des variétés compactes orientées de dimension  $n$  à  $n \in \mathbb{N}$  fixé est une relation d'équivalence.

#### ▷ Éléments de réponse.

La réflexivité et la transitivité se traitent de la même manière que dans le cas non orienté. Pour la symétrie, on remarque l'homéomorphisme  $\overline{M_1 \sqcup M_2} = \overline{M_1} \sqcup \overline{M_2} \simeq M_2 \sqcup \overline{M_1}$  qui permet de conclure, sachant que  $\overline{\partial M} \simeq \partial \overline{M}$ .



Il existe par contre des variétés n'ayant pas d'autodifféomorphismes renversant l'orientation.

### Définition. (*Cobordisme orienté à zéro*)

Une variété compacte orientée est *cobordante à zéro* (*en tant que variété orientée*) si elle est cobordante à  $\emptyset$  en tant que variété orientée, autrement si elle est homéomorphe au bord d'une variété orientée de dimension un de plus.

*Remarque.* La définition précédente ne pose pas de problème puisque l'on peut sans problème renverser l'orientation de l'un ou l'autre des termes, car une variété est toujours homéomorphe

à la variété d'orientation inverse.

→ *Convention.* On s'autorise à ne pas signaler que l'on parle de cobordismes orientés lorsque le contexte est clair.

### Corollaire. (*Dualité de Thom et cobordisme*)

Une variété fermée connexe orientée cobordante à zéro de dimension divisible par 4 est de signature nulle.

Cela revient en fait à montrer que la signature est un invariant de bordisme. On montre deux lemmes à cet effet.

#### Lemme

Soit  $N^{4k+1}, k \in \mathbb{N}$  une variété compacte orientée de bord  $i : M^{4k} \hookrightarrow N$ . Soit  $c \in H^{4k}(N; G)$  pour un certain groupe abélien  $G$ . Alors  $\langle i^*(c), [M] \rangle = 0$ .

▷ En effet,  $\langle i^*(c), [M] \rangle = \langle c, i_*[M] \rangle = 0$  puisque  $i_*[M] = 0$ . ■

#### Lemme

Soit  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel réel  $V$ . Supposons que  $W \subset V$  soit isotrope, c'est-à-dire que  $B(w_1, w_2) = 0$  pour tout  $w_1, w_2 \in W$ , et que  $2 \dim W = \dim V$ . Alors  $\sigma(B) = 0$ .

▷ Soit  $e_1 \in W$  non nul. Puisque  $B$  est non dégénérée, il existe  $f_1 \in V$  tel que  $B(e_1, f_1) = 1$ . En déplaçant  $f_1$  par un multiple de  $e_1$ , on peut arranger que  $B(f_1, f_1) = 0$ . Autrement dit, la forme  $B$  sur le sous-espace  $\mathbb{R}e_1, f_1 \subset V$  est hyperbolique, donc sa signature est nulle. Soit  $V_1$  le complément orthogonal de  $\mathbb{R}\{e_1, f_1\}$  dans  $V$  par rapport à la forme  $B$ . Puisque  $B$  est non dégénérée, nous avons  $V = \mathbb{R}\{e_1, f_1\} \oplus V_1$ . De plus,  $W_1 := W \cap V_1 \subseteq V_1$  est isotrope et  $2 \dim W_1 = \dim V_1$ . Soit  $B_1 = B|_{V_1}$ . Alors les données  $(V_1, B_1, W_1)$  satisfont les mêmes hypothèses que  $(V, B, W)$  mais avec une dimension plus petite. En répétant ce processus un nombre fini de fois, on écrit  $B$  comme une somme de formes hyperboliques. ■

On peut donc conclure.

#### Preuve.

▷ Soit donc  $N^{4k+1}, k \in \mathbb{N}$  une variété compacte de frontière  $i : M^{4k} \hookrightarrow N^{4k+1}$ . On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(N; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2k}(M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{2k+1}(N, M; \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{2k+1}(N, M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{2k}(M; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k}(N; \mathbb{R}) \end{array}$$

commutatif.

Les lignes sont une extension des suites exactes longues du couple  $(N, M)$  en cohomologie réelle et homologie réelle. Les flèches verticales sont des isomorphismes de dualité de Poincaré. Nous affirmons que  $\text{Im}(i^*)$  est isotrope pour la forme d'intersection réelle  $I_M \otimes \mathbb{R} : H^{2k}(M; \mathbb{R}) \times H^{2k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et a pour dimension  $\frac{1}{2} \dim H^{2k}(M; \mathbb{R})$ . L'isotropie découle immédiatement du lemme. Cette isotropie, ainsi que la commutativité du diagramme, impliquent que  $\text{Im}(i^*)$  est isomorphe à  $\text{Ker}(i_*)$  par la dualité de Poincaré, et  $\text{Im}(i^*)$  annule  $\text{Ker}(i_*)$  sous la forme d'appariement entre cohomologie et homologie. Il est facile de conclure via ces résultats combinés que  $2 \dim \text{Im}(i^*) = \dim H^{2k}(M; \mathbb{R})$ . Le théorème découle alors immédiatement du lemme précédent. ■

Pour ceux qui connaissent :

#### Corollaire. (*Morphisme signature sur $\Omega$* )

La signature définit un morphisme de l'anneau de cobordisme d'une variété fermée orientée à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

D'autre part :

#### Corollaire

La signature d'un produit de surfaces compactes orientées est nulle.

▷ En effet, une surface orientée est un bord, disons de  $B_1$ , disons donc le produit  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  de deux surfaces orientées est également un bord, en posant  $E = B_1 \times \Sigma_2$ , on a bien  $\partial E = \partial B_1 \times \Sigma_2 \cup B_1 \times \emptyset \simeq \Sigma_1 \times \Sigma_2$ . Ce bord est orienté et compact, de dimension 4, donc le corollaire précédent s'applique. ■

On peut citer :

#### Propriété. (*Théorème de Rohlin*)

Une variété fermée orientée de dimension 4 est cobordante à zéro si et seulement si sa signature est nulle.

▷ En exercice. ■

#### Contre-exemple. (*Une variété non cobordante à zéro*)

$\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$  n'est pas cobordante à zéro dans le sens orienté.

On a  $\sigma(\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}) = 2 \neq 0$ , car  $\sigma(\mathbb{CP}^2) = 1$ . En effet, l'anneau de cohomologie de  $\mathbb{CP}^2$  est  $\mathbb{Z}[x]/x^3$  où  $|x| = 3$ . Alors  $H^2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{Z}x^2$  et l'accouplement cup-produit est  $x^2 \cdot x^2 = x^4$ , qui est la classe d'orientation de  $H^4(\mathbb{CP}^2)$ , d'où la signature égale à 1.

Attention, pourtant,  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$  est cobordante à zéro.

On peut montrer, mais ce n'est pas simple, qu'il existe une variété compacte de dimension 5 dont le bord est homéomorphe à  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ .

Cependant aussi,  $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ , est cobordante à zéro dans le sens orienté.

Cela ne contredit pas le théorème sur la signature, car  $\sigma(\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}}^2) = 0$ . □

### Cobordisme et classes caractéristiques

Pour les variétés compactes lisses, une condition nécessaire et suffisante de cobordisme à zéro peut être formulée en termes de certaines classes caractéristiques, qui s'appellent classes de Stiefel-Whitney. C'est l'objet de la section suivante.

De façon similaire, pour les variétés compactes lisses orientées, une condition nécessaire et suffisante pour être cobordante à zéro dans le sens orienté peut être formulée en termes de classes de Stiefel-Whitney et de classes de Pontryagin.



Pour aller plus loin dans la théorie du cobordisme, il est nécessaire de parler de classes caractéristiques, objet fondamental en topologie algébrique des variétés.



## 7.4 Théorie des classes caractéristiques

### 7.4.1 Trois choses à savoir avant de se lancer dans la topologie algébrique des fibrés

#### 7.4.1.1 Théorème de Leray-Hirsch et applications

Les classes caractéristiques, exception faite de la classe fondamentale, se définissent le plus souvent en terme de FIBRÉS VECTORIELS. On dispose d'un puissant théorème à leur propos. Rappelons d'abord :

**Fait. (*Homotopie d'un fibré*)**

Si  $E \rightarrow B$  est un fibré, alors pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(E) = \pi_n(B)$ .

En effet, tout fibré est une fibration de Serre.

### Fait. (*Homotopie et homologie d'un fibré vectoriel*)

Si  $E \rightarrow B$  est un fibré vectoriel, alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(E) \simeq \pi_n(B)$ , et pour tout groupe abélien  $G$ ,  $H_n(E; G) \simeq H_n(B; G)$  et  $H^n(E; G) \simeq H^n(B; G)$ .

En effet,  $E$  et  $B$  sont homotopiquement équivalents.

De plus, des isomorphismes explicites sont induits par la projection  $\pi$ .

En effet, on a démontré que  $\pi$  et  $id_E$  sont homotopes, donc pour la section nulle  $s$ ,  $s \circ \pi \sim id_E$  et  $\pi \circ s = id_B$ . Or une équivalence d'homotopie induit des isomorphes en homologie et en cohomologie.

### Théorème. (*Théorème de Leray-Hirsch*)

Soit  $p : G \rightarrow X$  une fibration,  $F$  une fibre de  $p$  et  $k$  un corps tels que la restriction  $H^*(G; k) \rightarrow H^*(F; k)$  induite par l'injection  $F \rightarrow G$  soit surjective. Alors pour toute section linéaire  $\sigma : H^*(F; k) \rightarrow H^*(G; k)$  de cette projection, l'application

$$\begin{aligned} \sigma \smile p^* : H^*(F; k) \otimes H^*(X; k) &\longrightarrow H^*(G; k) \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \sigma(\alpha) \cup p^*(\beta) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de  $H^*(X)$ -modules. En particulier, pour toute section  $s$  de la fibration  $p$ ,  $\sigma = s^*$  convient.

On énonce une version en coordonnées du théorème précédent.

### Propriété. (*Leray-Hirsch en coordonnées*)

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration de type  $F$  telle que, pour un certain anneau commutatif des coefficients  $R$  :

- (a)  $H^n(F; R)$  est un  $R$ -module libre de type fini pour chaque  $n$  ;
- (b) il existe des classes  $c_j \in H^{k_j}(E; R)$  dont les restrictions  $i^*(c_j)$ ,  $i : F \rightarrow E$  l'inclusion, forment une base pour  $H^*(F; R)$  dans chaque fibre  $F$ .

L'application

$$\Phi : H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R)$$

donnée par  $\sum_{i,j} b_i \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_{i,j} p^*(b_i)c_j$  est un isomorphisme de  $R$ -modules.

**VOC** On dit qu'un espace  $X$  *satisfait Leray-Hirsch* si la conclusion du théorème est vérifiée pour chaque fibration ayant pourbase  $X$  et satisfaisant les hypothèses du théorème.

### Preuve.

▷ (Seulement pour les CW-complexes finis) Soit  $B'$  le  $(n-1)$ -squelette du CW-complexe fini

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_I \partial D^n & \xrightarrow{\coprod \varphi_i} & B' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \coprod_I D^n & \xrightarrow{\coprod f_i} & B
 \end{array}
 \quad \text{par définition. De plus} \quad
 \begin{array}{ccc}
 E' & \subseteq & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \subseteq & B
 \end{array}.
 \quad \text{Par excision, } H^*(B, B') \simeq$$

B, de sorte que

$H^k(\coprod_I D^n, \coprod_I \partial D^n)$  et  $H^*(E, E') \simeq H^*(\coprod_I E_i, \coprod_I E'_i)$  où  $E_i$  et le tiré en arrière de  $E$  sous  $f_i : D^n \rightarrow B$ . Or ici, héhé,  $E_i \simeq D^n \times F$ , car  $D^n$  est contractile. Ainsi, par la formule de Künneth,  $\Phi_i : H^*(D^n, \partial D^n) \otimes H^*(F) \xrightarrow{\sim} H^*(D^n \times F; \partial D^n \times F) \simeq H^*(E_i, E'_i)$  est un isomorphisme.

La suite longue associée au diagramme  $B, B', E, E'$  diagramme s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & (H^*(B, B') \otimes H^*(F))^k & \longrightarrow & (H^*(B) \otimes H^*(F))^k & \longrightarrow & (H^*(B') \otimes H^k(F))^k \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \Phi_{(E, E')} & & \downarrow \Phi_E & & \downarrow \Phi_{E'} \\
 \dots & \longrightarrow & H^k(E, E') & \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(E') \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Par induction sur la dimension,  $\Phi_{E'}$  est alors un isomorphisme. Or d'après ce qui précède,  $\Phi_{(E, E')}$  est un isomorphisme, donc par le lemme des cinq,  $\varphi_E$  est un isomorphisme. Ainsi, si  $B'$  satisfait Leray-Hirsch, alors  $B$  satisfait Leray-Hirsch. Par récurrence immédiate sur la dimension du CW-complexe, on a montré la proposition. ■

#### 7.4.1.2 Fibrés projectifs

##### Définition. (*Fibré projectif*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang fini. On définit  $\mathbb{P}(\pi) : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$  le fibré vectoriel de fibres  $\mathbb{P}(\pi^{-1}(b))$  l'espace des droites de la fibre  $\pi^{-1}(b)$  pour tout  $b \in B$  muni de la projection canonique.

Si  $\pi$  est de rang  $n \in \mathbb{N}$ , son fibré projectif est un fibré en espaces  $\mathbb{RP}^{n-1}$ .

La preuve du lemme suivant utilise l'universalité de la variété grassmannienne que nous n'avons bien sûr par encore vu mais il fournit une preuve alternative de la méthode présentée dans la section suivante.

##### Lemme

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  non nul.

- (i) Le tiré en arrière  $\mathbb{P}(\pi)^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}(E))$  est injectif où  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est omis dans les notations.
- (ii) Il existe une scission  $H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{RP}^{n-1}) \simeq H^*(\mathbb{P}(E))$ .

▷ On considère  $\gamma_1$  le fibré en droites canonique sur  $\mathbb{P}(E)$  où pour  $(b, v) \in \mathbb{P}(E)$  avec  $v \in \mathbb{P}(\pi^{-1}(b))$ ,  $\gamma_{|\mathbb{P}(\pi)^{-1}(b)}$  est le fibré en droites  $\mathbb{L}_{n-1}$  sur  $\mathbb{RP}^{n-1}$  où  $\mathbb{P}(\pi)^{-1}(b) = \mathbb{P}(\pi^{-1}(b)) = \mathbb{RP}^{n-1}$ . Alors il existe une application classifiante  $f : \mathbb{P}(E) \rightarrow Gr_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{RP}^\infty$  dont la restriction sur les fibres est une application classifiante pour  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ , mais l'inclusion  $\iota_{n-1} : \mathbb{RP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty$  aussi

induit un diagramme tiré en arrière pour  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ , donc  $f$  est homotope à  $j$  l'inclusion des fibres, où  $j^*(a^k) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Ainsi, on a un isomorphisme  $\underbrace{H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1})}_{\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]/a^n} \simeq \underbrace{H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)}_{\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]}$ , donc  $f^*(a^k) \neq 0$  dans  $\mathbb{P}(E)$  et  $j' : F \longrightarrow \mathbb{P}(E))^* f^*(a)$  engendre la cohomologie de la fibre (avec  $a \in H^1$ ). ■

#### 7.4.1.3 Principe de décomposition en fibrés en droites

La technique de *splitting* des fibrés est très utilisée en théorie des classes caractéristiques, afin de se réduire à des questions sur les fibrés en droites.

##### Méthode. (*Principe de décomposition en fibrés en droites*)

Soit  $\xi \rightarrow X$  un fibré vectoriel de base paracompacte. Alors il existe une application continue  $p : Y \rightarrow X$  entre espaces topologiques telle que le pullback  $p^*\xi = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$  où  $n \in \mathbb{N}$  et les  $l_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  sont des fibrés en droites sur  $X$  et  $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^*(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est injective.

Le théorème de Leray-Hirsch s'applique en posant  $Y = \text{Flag}(\xi)$  un *fibré drapeau* qui est l'ensemble des  $(x, l_1^* \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} l_n^* \simeq \xi_x)$  où pour chaque  $i$ ,  $l_i$  est une droite dans  $\xi_x$  telle que  $(l_i)_{(X, l_1 \oplus \dots \oplus l_n)} = l_i^*$ .

On peut même généraliser dans le cas complexe, si jamais c'est utile :

##### Théorème. (*Principe de décomposition dans le cas complexe*)

Soit  $\xi : E \rightarrow X$  un fibré vectoriel réel de rang  $2n, n \in \mathbb{N}$  de base paracompacte. Alors il existe un espace  $Y$  et une application  $p : Y \rightarrow X$  telle que :

1.  $p^*\xi : p^*E \rightarrow Y$  est la somme directe de fibrés en droites et de leurs conjugués  

$$p^*(E \otimes \mathbb{C}) = L_1 \oplus \overline{L_1} \oplus \dots \oplus L_n \oplus \overline{L_n}$$
2. et l'application induite  $p^* : H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$  est injective.



On ne dit pas qu'un fibré vectoriel est isomorphe à une somme de fibrés en droites !

On pourra voir de multiples applications de cette méthode, l'une étant illustrée dans l'exercice calculant les CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY d'un produit tensoriel.

Définissons précisément :

##### Définition. (*Application de scindage*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Une *application de scindage* pour  $E$  est une application continue/différentiable/lisse  $f : B' \rightarrow B$  vérifiant conjointement :

- (i)  $f^*(E) \simeq \sum_{i=1}^n L_i$  avec  $L_i \rightarrow B$  des fibrés en droites pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ;
- (ii)  $f^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(B')$  injective.

Le principe de décomposition en fibrés en droites dit exactement que

**Corollaire. (*Existence des applications de scindage*)**

Tout fibré vectoriel réel  $\pi : E \rightarrow B$  de rang fini admet une application de scindage.

Si l'on ne souhaite pas utiliser Leray-Hirsch, on peut voir que ce corollaire découle directement :

### Lemme

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  et  $\mathbb{P}(\pi) : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$  le fibré projectif associé, voir ce mot dans la suite. Alors il existe un sous-fibré en droites de  $\mathbb{P}(\pi)^*(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ .

▷ Au-dessus de  $(b,v)$ , prenons la droite engendrée par  $v$  dans  $\mathbb{P}(\pi)^{-1}(b) = \mathbb{P}(\pi)^*(\pi^{-1}(b))$ , de sorte que  $\mathbb{P}(\pi)^*(E) = V \oplus \gamma_1$  avec  $V \in \text{Vect}^{n-1}$ ,  $\gamma_1$  un fibré en droites et  $\mathbb{P}(E) \rightarrow B$  injective en cohomologie. ■

## 7.4.2 Classes de Stiefel-Whitney

### 7.4.2.1 Axiomes de Stiefel-Whitney

On associe une suite d'invariants à tout fibré topologique de la façon axiomatique suivante :

**Définition. (*Axiomes de Stiefel-Whitney*)**

1. (*Définition des classes de Stiefel-Whitney*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À tout fibré vectoriel réel  $\xi$  de rang  $n$ , i.e. à tout  $\mathbb{R}^n$ -fibré, on associe une suite de classes de cohomologie  $\omega_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  indexée par  $i \in \mathbb{N}$ , avec (*axiomes de rang*)  $\omega_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  et  $\omega_i(\xi) = 0$  dès que l'entier  $i > n$ . Ce sont les<sup>a</sup> *classes de Stiefel-Whitney* de  $\xi$ .
2. (*Naturalité des classes de Stiefel-Whitney (par tirage en arrière)*) Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés vectoriels de rang  $n$ . Si  $f : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$  est l'application induite sur les bases de l'application fibrée  $\check{f} : \xi \rightarrow \eta$ , alors  $\omega_i(\xi) = f^*\omega_i(\eta)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  où  $f^*$  est l'application induite en cohomologie par  $f$ . Ceci se récrit, puisque  $\xi \simeq \bar{g}^*\eta$  au sens des pullbacks de fibrés,  $\omega_i(f^*\eta) = f^*(\omega_i(\eta))$ , d'où le nom de naturalité.
3. (*Théorème du produit de Whitney*) Si  $\xi, \eta$  sont deux fibrés vectoriels de même base, on a  $\omega_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k \omega_i(\xi) \smile \omega_{k-i}(\eta)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
4. La classe  $\omega_1(\gamma_1^1)$  du fibré en droites tautologique sur le cercle  $\gamma_1^1 \simeq \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{RP}^1 = S^1$  est non nulle (*normalisation des classes de Stiefel-Whitney*).

On notera pour une variété différentiable  $M$ ,  $\omega_i(M) = \omega_i(TM \rightarrow M)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

<sup>a</sup> Jusqu'à preuve d'unicité, que nous remettons à plus tard.

### Exemple. (*Formule du produit de Whitney*)

En particulier, pour tous fibrés  $\xi, \eta$  de même base,

- \*  $\omega_1(\xi \oplus \eta) = \omega_1(\xi) + \omega_1(\eta)$  et donc  $\omega_1$  est additive ;

- \*  $\omega_2(\xi \oplus \eta) = \omega_2(\eta) + \omega_1(\xi)\omega_1(\eta) + \omega_2(\xi)$  ;

- \*  $\omega_3(\xi \oplus \eta) = \omega_3(\eta) + \underbrace{\omega_1(\xi)\omega_2(\eta)}_{= \omega_2(\eta)\omega_1(\xi)} + \underbrace{\omega_2(\xi)\omega_1(\eta)}_{= \omega_1(\eta)\omega_2(\xi)} + \omega_3(\xi)$  par commutativité graduée de

l'anneau de cohomologie, ce qui est en accord avec  $\xi \oplus \eta \simeq \eta \oplus xi$  comme on va le voir juste en dessous ;

où l'on note + l'addition graduée dans l'anneau de cohomologie et par l'absence de signe le cup-produit qui est le produit gradué dans l'anneau de cohomologie.

Sous réserve du rang des fibrés, certains termes des décompositions précédentes peuvent facilement s'annuler.

Pour l'instant :

### Proposition. (*Existence des classes de Stiefel-Whitney*)

Admis

Les classes de Stiefel-Whitney existent.

Sous cette réserve, on peut énoncer quelques propriétés de base.

### Lemme. (*Classes de Stiefel-Whitney de fibrés isomorphes*)

Deux fibrés isomorphes  $\xi \simeq \eta$  de même base ont mêmes classes de Stiefel-Whitney :  $\omega_i(\xi) = \omega_i(\eta)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

▷ Dans ce cas, l'application induite sur les bases par l'isomorphisme est l'identité. Par naturalité,  $\omega_i(\xi) = id_{B(\xi)}^* \omega_i(\eta)$  d'où l'égalité. ■

### Lemme. (*Classes de Stiefel-Whitney d'un fibré trivial*)

Si  $\xi$  est un fibré trivial, alors  $\omega_i(\xi) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ .

▷ La preuve repose sur le fait pas encore vu que, lorsque  $\xi$  est trivial, il existe une application fibrée de  $\xi$  vers un fibré sur un point  $\{p\}$ , donné par  $B(\xi) \times F(\xi) \rightarrow \{p\} \times F(\{p\})$ ,  $(b,x) \mapsto (p,x)$ . Elle induit donc une application constante, qui induit le morphisme nul en cohomologie en degrés strictement positifs, d'où le résultat par naturalité des classes de Stiefel-Whitney. ■

### Corollaire

Si  $\varepsilon$  est un fibré trivialisable, alors pour tout fibré  $\eta$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i(\eta \oplus \xi) = \omega_i(\eta)$ .

▷ En mettant en commun les deux lemmes précédents et le théorème du produit de Whitney. ■

**Lemme. (*Classes de Stiefel-Whitney et sections indépendantes*)**

Si  $\xi$  est un  $\mathbb{R}^n$  fibré euclidien ayant une section nulle part nulle, alors  $\omega_n(\xi) = 0$ .

Plus généralement, si  $\xi$  est un  $\mathbb{R}^n$ -fibré euclidien ayant  $k$  sections linéairement indépendantes, alors  $\omega_n(\xi) = \omega_{n-1}(\xi) = \dots = \omega_{n-k+1}(\xi) = 0$ .

▷ Les  $k$  sections  $s_1, \dots, s_k$  considérées engendrent un  $\mathbb{R}^k$ -sous-fibré trivial  $\varepsilon^k$  de  $\xi$ , en considérant l'intersection  $s_1(B(\xi)) \cap \dots \cap s_k(B(\xi))$  de leurs plongements. Soit  $\eta$  son supplémentaire orthogonal. Alors  $\eta$  est un  $\mathbb{R}^{n-k}$ -fibré tel que  $\varepsilon^k \oplus \eta \simeq \xi$ . On a  $\omega_i(\xi) = \omega_i(\varepsilon^k \oplus \eta) = \omega_i(\eta)$  où  $\eta$  est un  $n - k$  fibré donc cette quantité s'annule pour les entiers  $i > n - k$ . ■

**Corollaire**

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , si  $\omega_{n-k}(TM) \neq 0$ , alors  $M$  a au plus  $k$  champs de vecteurs linéairement indépendants.

**Heuristique**

Les classes de Stiefel-Whitney quantifient les obstructions pour trouver des sections nulle part interdépendantes de fibrés, et donc des champs de vecteurs linéairement indépendants dans le cas des variétés différentielles avec leur fibré tangent.

*Remarque.* Un cas particulier intéressant est celui où l'on est en présence d'une somme  $\xi \oplus \eta$  triviale. Alors

$$\omega_1(\xi) + \omega_1(\eta) = 0$$

$$\omega_2(\xi) + \omega_1(\xi)\omega_1(\eta) + \omega_2(\eta) = 0$$

$$\omega_3(\xi) + \omega_2(\xi)\omega_1(\eta) + \omega_1(\xi)\omega_2(\eta) + \omega_3(\eta) = 0,$$

etc., ainsi, il se résout de proche en proche et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i(\eta)$  s'écrit comme en polynômes en les classes de Stiefel-Whitney de  $\xi$ . De plus, pour  $\xi, \eta$  de rangs respectifs  $n, k$ , ce système a toutes ses lignes nulles à partir du rang  $n + k$ .

Pour formaliser ceci plus correctement :

**Définition. (*Anneau des séries de classes*)**

Soit  $B$  un espace topologique. On note  $H^\Pi(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  l'espace des séries formelles infinies à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de la forme  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  où  $a_i \in H^i(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , qui est un anneau commutatif<sup>a</sup> dont l'addition est donnée terme à terme

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots$$

i.e.  $H^\Pi(B)$  est le produit cartésien des  $H^i(B)$  pour  $i$  parcourant  $\mathbb{N}$ , et le produit par la formule

$$ab = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \dots$$

<sup>a</sup> Car on travaille sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et donc les classes qui anticommutent, en fait, commutent.

Les séries formelles du  $H^\Pi$  commençant par  $\omega_0(B) = 1$  représentent éventuellement des classes de Stiefel-Whitney.

#### Fait. (*Sous-groupe des classes de Stiefel-Whitney*)

La collection des éléments de  $H^\Pi(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  pour un espace  $B$  formée des séries formelles dont le terme constant est 1, est un sous-groupe commutatif pour la multiplication, et c'est le groupe des unités de  $H^\Pi(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Il est clair qu'une unité de  $H^\Pi$  a pour terme constant un 1. Réciproquement, étant donnée  $\omega$ , on peut construire  $\bar{\omega}$  telle que  $\omega\bar{\omega} = 1$ . On pose  $\bar{\omega}_1 = -\omega_1 = \omega_1$ , puis l'on doit vérifier  $\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1\omega_1 + \omega_2 = 0$  donc on pose  $\bar{\omega}_2 = \omega_1^2 + \omega_2$ , puis l'on doit vérifier  $\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_2\omega_1 + \bar{\omega}_1\omega_2 + \omega_3 = 0$ , donc on pose  $\bar{\omega}_3 = (\omega_1^2 + \omega_2)\omega_1 + \omega_1\omega_2 + \omega_3 = \omega_1^3 + \omega_3$ , puis  $\bar{\omega}_4 = \omega_1^4 + \omega_1^3\omega_2 + \omega_2^2 + \omega_4$ , etc.

Finalement,  $\bar{\omega} = 1 + \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{n-1} + \bar{\omega}_n$  peut être construit inductivement par l'algorithme  $\bar{\omega}_n = \omega_1\bar{\omega}_{n-1} + \omega_2\bar{\omega}_{n-2} + \dots + \omega_{n-1}\bar{\omega}_1 + \omega_n$ .

#### Exercice 29 (*Expression combinatoire de la classe inverse*)

Soit  $\omega$  la classe de Stiefel-Whitney d'un fibré vectoriel de rang fini  $\xi$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tous entiers naturels  $i_1, \dots, i_k$ , le coefficient de  $\omega_1(\xi)^{i_1} \dots \omega_k(\xi)^{i_k}$  dans  $\bar{\omega}$  est  $\frac{(i_1 + \dots + i_k)!}{i_1! \dots i_k!}$ .

#### ▷ Éléments de réponse.

On peut refaire le calcul précédent par le développement en série entière de l'inverse où les signes deviennent inutiles.

#### Définition. (*Classe de Stiefel-Whitney totale*)

Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . La *classe de Stiefel-Whitney totale* de  $\xi$  est le polynôme = série formelle finie  $\omega(\xi) := \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) + \dots + \omega_n(\xi) + 0 + \dots \in H^\Pi(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

On notera pour une variété différentiable  $M$ ,  $\omega(M) = \omega(TM \rightarrow M)$ .

**Reformulation pratique. (*Théorème du produit de Whitney*)**

Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés vectoriels de même base. Alors

$$\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi)\omega(\eta).$$

On peut donc généraliser la remarque fait précédemment. Pour tous fibrés  $\xi, \eta$  de même base, l'équation

$$\omega(\xi \oplus \eta) = \omega(\xi)\omega(\eta)$$

se résout d'une unique manière par

$$\omega(\eta) = \overline{\omega(\xi)}\omega(\xi \oplus \eta).$$

Dans le cas sur lequel on s'était penché où  $\xi \oplus \eta$  est trivial, cela s'écrit

$$\omega(\eta) = \overline{\omega(\xi)}.$$

**Lemme. (*Théorème de dualité de Whitney*)**

Si  $M$  est une sous-variété d'un espace euclidien, alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i(\nu_M) = \overline{\omega_i(\tau_M)}$ .

▷ Rien à faire par rapport à ce qui précède, puisque  $\nu \oplus \tau = \xi(\mathbb{R}^n) \simeq \varepsilon_M^n$ . ■

**Application. (*Classes de Stiefel-Whitney du fibré tangent des sphères*)**

Considérons  $S^n$  la sphère de dimension  $n$ . Alors on sait que son fibré normal  $\nu_{S^n}$  est trivial, i.e.  $\omega_i(\nu) = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , d'où  $\overline{\omega_i(TS^n)} = 0$  d'où  $\omega_i(TS^n) = 0$  et  $\omega(TS^n) = 1$ .

Ainsi, les classes de Stiefel-Whitney ne permettent pas de distinguer le fibré tangent des sphères du fibré trivial (ah génial les filles).

**Exercice 30**

Retrouver le résultat de l'application précédente grâce à l'application  $f : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ .

→ *Notation.* Pour un fibré vectoriel de rang fini  $\xi$ , il nous arrivera de noter  $\overline{\omega(\xi)} = \bar{\omega}(\xi)$  par commodité.

**Exercice 31 (*Formule du produit de Stiefel-Whitney*)**

Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés vectoriels. Montrer que, pour tout entier  $k > 0$ , on a  $\omega_k(\xi \times \eta) = \sum_{i=0}^k \omega_i(\xi) \times \omega_{k-i}(\eta)$  où  $\times$  dans la somme désigne le cross-produit.

**Exercice 32** (*Définition de  $\omega_1$  pour les fibrés en droites*)

Soit  $B$  un espace topologique paracompact.

1. Établir une bijection naturelle entre les fibrés en droite réels sur  $B$  et les recouvrements doubles de  $B$ .
2. Soit  $\ell$  un fibré en droite sur  $B$  et  $U \subseteq B$  une composante connexe par arcs. Montrer que  $\omega_1(\ell|_U) \in H^1(U; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  vue comme application  $\pi_1(U) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est l'unique morphisme de noyau  $\pi_1(U')$  où  $U' \rightarrow U$  est le recouvrement double associé à  $\ell$  par la bijection naturelle explicitée précédemment.
3. En déduire une définition alternative de  $\omega_1$  pour les fibrés en droite sur des bases paracompactes. Vérifier à la main les deuxièmes et quatrièmes axiomes de Stiefel-Whitney et que  $\omega_1(\ell_1 \otimes \ell_2) = \omega_1(\ell_1) + \omega_1(\ell_2)$ .

**Exercice 33** (*Définition alternative générale des classes de Stiefel-Whitney*)

Soit  $E$  un fibré vectoriel réel de dimension  $n$  sur un espace topologique paracompact  $B$ . Soit  $p : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$  le fibré projectif réel associé et  $\tau \rightarrow \mathbb{P}(E)$  son fibré tautologique, défini comme suit :  $\tau$  est le sous-fibré en droite de  $p * E$  tel que  $\pi_l = l \subseteq E_b$  pour tout  $b \in B$  et  $l \in \mathbb{P}(E_b)$ . On pose  $a = \omega_1(\tau)$ . On admettra le théorème de Leray-Hirsch.

1. Montrer qu'il existe d'uniques classes  $u_i(E) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  pour  $i \in [\![1, n]\!]$  tels que  $a^n = u_1(E)a^{n-1} + \dots + u_{n-1}(E)a + u_n(E)$  dans  $H^n(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .
2. En utilisant les axiomes de Stiefel-Whitney, montrer que  $u_i(E) = \omega_i(E)$  pour tout  $i \in [\![1, n]\!]$ .
3. À l'aide de l'exercice correspondant, en déduire une définition des classes de Stiefel-Whitney pour les fibrés vectoriels réels sur les espaces topologiques paracompacts.
4. Vérifier à la main les premiers, seconds et quatrièmes axiomes.

▷ **Éléments de réponse.**

1. Considérons la fibration :  $\mathbb{R}\mathbb{P}(E_b) \hookrightarrow \mathbb{P}(E) \rightarrow B$  où  $i^*\tau$  est le fibré tautologique de  $\mathbb{R}\mathbb{P}(E_b)$ . Ainsi,  $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}(E_b); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  a pour base  $1, \omega_1(i^*\tau), \dots, \omega_{n-1}(i^*\tau) = i^*(a^{n-1})$  qui admet donc un relèvement  $1, a, \dots, a^{n-1}$  à  $H^*(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme de Leray-Hirsch :

$$H^*(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^*(B) \times 1 \oplus H^*(B) \times a \oplus \dots \oplus H^*(B) \times a^{n-1}$$

c'est-à-dire que tout élément  $\omega \in H^*(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  s'écrit sous la forme :

$$\omega = p^*(\omega_0) + p^*(\omega_1)a + \dots + p^*(\omega_{n-1})a^{n-1}$$

pour des éléments uniques  $\omega_0, \dots, \omega_{n-1} \in H^*(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Nous pouvons appliquer cela à  $a^n$  : il existe  $u_1(E), \dots, u_n(E) \in H^*(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  tels que :  $a^n = u_1(E)a^{n-1} + \dots + u_n(E)$  en omettant  $p^*(-)$ . Par unicité,  $u_i(E)$  est de degré  $i$ .

2. Notons que, par définition,  $\tau$  est un sous-fibré vectoriel de  $p^*E$ , donc il existe  $\xi$  de rang  $n-1$  sur  $\mathbb{P}(E)$  tel que  $p^*E \simeq \xi \oplus \tau$ . En particulier :  $\omega(p^*E) = \omega(\xi) \oplus \omega(\tau) = \omega(\xi) = \omega(\tau)^{-1}\omega(p^*E)$ . Ainsi,  $\omega(\xi) = (1+a)^{-1}(1+\omega_1(E) + \dots + \omega_n(E))$  où  $p^*(-)$  est omis, ou encore  $\omega(\xi) = (1+a+a^2+\dots)(1+$

$\omega_1(E) + \dots + \omega_n(E)$ ). Or  $\omega(\xi)$  est nul en degré  $n$  puisque  $\text{rg}(\xi) = n - 1$  et le premier facteur vaut  $a^n + a^{n-1}\omega_1(E) + \dots + \omega_n(E)$  en degré  $n$ . Ainsi,  $a^n = \omega_1(E)a^{n-1} + \dots + \omega_n(E)$ . Par unicité selon la question précédente,  $\omega_i(E) = u_i(E)$ .

3. On utilise la première question pour définir  $\omega_i(E)$  comme  $u_i(E)$ . Pour ce faire, on utilise  $a = \omega_1(\tau)$ , donc on doit définir  $\omega_1$  sur un fibré en droites, ce que l'on a déjà fait dans un exercice passé.
4. Pour le premier axiome,  $u_i(E)$  a degré 1,  $u_0(E)$  est 1 par définition et  $u_i(E) = 0$  pour  $i > n$  par définition.

Pour le deuxième axiome, si  $f : B' \rightarrow B$  est induite par une application fibrée  $E' \rightarrow E$ , on a un

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(E') & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{P}(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

diagramme et  $\tau' = \tilde{f}^*\tau$ , d'où  $(a')^m = \tilde{p}^*(a^m) = \tilde{p}^*(u_1(E)a^{m-1} + \dots + u_{m-1}(E)a + u_m(E)) = (\tilde{p}^*u_1(E))a'^{m-1} + \dots + (\tilde{p}^*u_{m-1}(E))a' + \tilde{p}^*u_m(E)$ , et donc, par unicité,  $\tilde{p}^*u_i(E) = u_i(E')$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\gamma_1^1) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & \nearrow id & \\ \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

Pour le quatrième axiome, on a comme la fibre de  $\mathbb{RP}(\mathbb{R}) = \mathbb{RP}^0 = \{*\}$  donc

$a = \omega_1(\gamma_1^1)$  implique qu'on est réduit au cas du fibré en droites, également traité par le passé.

#### 7.4.2.2 Premières propriétés sur les classes de Stiefel-Whitney. Conséquences sur les fibrés projectifs

##### Exemples. (*Classes de Stiefel-Whitney*)

1. (*Classes de Stiefel-Whitney du fibré tautologique sur  $\mathbb{RP}^n$* ) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le fibré en droite canonique  $\gamma_n^1$  sur  $\mathbb{RP}^n$  a une classe de Stiefel-Whitney totale  $1 + a$  où  $a$  est un générateur de  $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , **notation standard en théorie des classes caractéristiques**, même si  $n$  n'est pas indiqué dans le symbole  $a$ .

$\mathbb{RP}^1$  se plonge  $\mathbb{RP}^n$  par  $j$  qui est clairement recouverte par une application fibrée  $\gamma_1^1 \rightarrow \gamma_n^1$  donnée par  $j$  sur la première composante et  $\iota : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  sur la deuxième composante. Alors  $1 = \omega_1(\gamma_1^1) = j^*\omega_1(\gamma_n^1) \Leftrightarrow \omega_1(\gamma_n^1) \neq 0$ . Il s'ensuit que  $\omega_1(\gamma_n^1) = a$ , car  $j^*$  ne peut envoyer autre qu'un générateur sur le générateur 1, puisque c'est un isomorphisme en cohomologie, puisque induit par une inclusion d'espaces projectifs. On a trivialement toutes les autres classes de Stiefel-Whitney de  $\gamma_n^1$ .

Pour  $n \geq 1$ , on retrouve que  $\gamma_n^1$  n'est pas trivialisable.

2. Par construction,  $\gamma_n^1$  est un sous-fibré du fibré trivial  $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ . Si  $\gamma^\perp$  est le supplémentaire orthogonal de ce fibré dans  $\varepsilon_{\mathbb{RP}^n}^{n+1}$ , alors  $\omega(\gamma^\perp) = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ . En effet,  $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$  est trivial par définition, d'où  $\omega(\gamma^\perp) = \bar{\omega}(\gamma_n^1) = (1+a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ , ce qu'il fallait calculer.

Les classes de Stiefel-Whitney des espaces projectifs permettent d'établir des résultats sur les fibrés projectifs apparemment inapparentés.

Essayons de calculer maintenant les classes de Stiefel-Whitney du fibré tangent des espaces projectifs.

### Lemme

Soit  $n$  un entier naturel. Alors  $T(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ .

▷ Soit  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  la projection canonique. La différentielle  $df : TS^n \rightarrow T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  vérifie  $df(x, v) = df(-x, -v)$ . De plus,  $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \{(x, v), (-x, -v) \mid x \in S^n, v \in T_x S^n\}$ . Étant donné un tel  $(x, v)$ , on peut définir une application linéaire de la droite  $L$  passant par  $x$  et  $-x$  vers le plan orthogonal  $L^\perp$ , via  $l : L \longrightarrow L^\perp$ . Ainsi,  $T_{\{\pm x\}}\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  est isomorphe à  $\text{Hom}(L, L^\perp)$ , dont on déduit que  $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}$  est isomorphe à  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ . ■

### Théorème. (*Classes de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$* )

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\varepsilon_n^1$  le fibré trivial  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}$ . Alors  $T(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \oplus \varepsilon_n^1 = \underbrace{\gamma_1^n \oplus \dots \oplus \gamma_1^n}_{n+1 \text{ fois}}$ .

En particulier,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) := \omega(T\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}a^2 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n$ .

▷  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) = \varepsilon_n^1$ , car c'est fibré en droites avec pour section nulle part nulle l'identité. Maintenant  $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n \oplus \varepsilon_n^1 = \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp \oplus \gamma_n^1) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$ . Ce dernier terme est lui-même isomorphe à  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \dots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$   $n+1$  fois répété. Puisque  $\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) = \gamma_n^{1*} \simeq \gamma_n^1$  en tant que fibré euclidien, on a  $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n \oplus \varepsilon_n^1 = \gamma_1^n \oplus \dots \oplus \gamma_1^n$  formé de  $n+1$  copies, d'où le résultat et la formule pour  $\omega(T\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  par théorème du produit de Whitney itéré. ■

	1
	1 1
$P^1 :$	1 0 1
$P^2 :$	1 1 1 1
$P^3 :$	1 0 0 0 1
$P^4 :$	1 1 0 0 1 1
$P^5 :$	1 0 1 0 1 0 1
$P^6 :$	1 1 1 1 1 1 1 1
$P^7 :$	1 0 0 0 0 0 0 0 1
$P^8 :$	1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
$P^9 :$	1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
$P^{10} :$	1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
$P^{11} :$	1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
$P^{12} :$	1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
$P^{13} :$	1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
$P^{14} :$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

TABLE 7.1 : Coefficients binomiaux sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . —

On représente à la ligne  $P^n$ , les coefficients binomiaux  $\binom{n+1}{i}$  modulo 2 pour  $n \leq 14$ .

### Exemples

1.  $\omega(\mathbb{RP}^1) = 1$ .
2.  $\omega(\mathbb{RP}^2) = 1 + a + a^2$ .
3.  $\omega(\mathbb{RP}^3) = 1$ .
4.  $\omega(\mathbb{RP}^4) = 1 + a + a^4$



Il faut à chaque fois supprimer le dernier coefficient de chaque ligne, car  $a^{n+1} = 0$  dans  $H^*(\mathbb{RP}^n)$ .

### Corollaire. (Stiefel)

Les seuls espaces projectifs éventuellement parallélisables sont les  $\mathbb{RP}^{2^n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier, les espaces projectifs pairs ne sont jamais parallélisables, en particulier  $\mathbb{RP}^2$  n'est pas parallélisable.

▷ Montrons que ce sont les seuls tels que  $\omega(\mathbb{RP}^{2^n-1}) = 1$ . On a  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  d'où  $(1+a)^{2^r} = 1 + a^{2^r}$  pour tout  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $n+1 = 2^r$ , alors  $\omega(\mathbb{RP}^n) = (1+a)^{n+1} = (1+a)^{2^r} = 1 + a^{2^r} = 1$ ,

car puisque  $2^r = n + 1 > n$ ,  $a^{2^r} = 0$ . Si au contraire  $n + 1$  n'est pas une puissance de 2,  $n + 1 = 2^r m$  où  $m$  est impair et alors  $\omega(R\mathbb{P}^n) = (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^{2^r m} = (1 + a^{2^r})^m = 1 + ma^{2^r} + \dots$  où ni  $m$  ni  $a^{2^r}$  ne sont nuls, comme  $m \notin 2\mathbb{Z}$  et  $2^r \leq n$ . ■

On peut même aller plus loin.

### Théorème. (*Stiefel*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . S'il existe une opération bilinéaire  $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  non nécessairement associative ni unitaire mais sans diviseurs de zéro, alors  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  est parallélisable et donc  $n$  est une puissance de 2.

▷ Soit  $b_1, \dots, b_n$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La correspondance  $y \mapsto p(y, b_1)$  définit un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, la formule  $v_i(p(y, b_1)) = p(y, b_i)$  définit pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  une transformation linéaire  $v_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Notons que  $v_1(x), \dots, v_n(x)$  sont linéairement indépendants pour  $x \neq 0$ , et que  $v_1(x) = x$ . Les fonctions  $v_2, \dots, v_n$  donnent lieu à  $n - 1$  sections linéairement indépendantes du fibré vectoriel  $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}} \simeq \text{Hom}(\gamma_{n-1}^1, \gamma^\perp)$ . En effet, pour chaque droite  $L$  passant par l'origine, une transformation linéaire  $\bar{v}_i : L \rightarrow L^\perp$  est définie comme suit. Pour  $x \in L$ , soit  $\bar{v}_i(x)$  l'image de  $v_i(x)$  par la projection orthogonale  $\mathbb{R}^n \rightarrow L^\perp$ . Il est clair que  $\bar{v}_1 = 0$ , mais  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  sont partout linéairement indépendants. Ainsi, le fibré tangent  $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}}$  est un fibré trivial. ■

### Corollaire. (*Parallélisation des petits espaces projectifs*)

$\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$  et  $\mathbb{R}\mathbb{P}^7$  sont parallélisables.

▷ En effet, une telle algèbre à division n'existe que pour  $n = 1, 2, 4, 8$ , et sont respectivement  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ . ■

*Remarque.* On pourrait montrer que ces trois espaces projectifs sont en fait les seuls espaces parallélisables.

On se demande maintenant sous quelles conditions les espaces projectifs se plongent dans un espace euclidien donné. Le lemme suivant se généralise à toute variété différentiable comme on l'énonce.

### Lemme. (*Classes de Stiefel-Whitney totales et immersions*)

Si une variété différentiable  $M^n$  est immersible dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  où  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $\bar{\omega}_i(M) = 0$  pour tout entier  $i > k$ .

▷ Simple application du lemme de dualité de Whitney, puisque  $TM^n \oplus \nu \simeq i^*T\mathbb{R}^{n+k}$  où  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  est le plongement considéré, donc  $\omega_i(\nu) = \bar{\omega}_i(M)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  mais  $\nu$  est de rang  $k$ , car  $n + k = n + k$ . ■

**Application.** ( $\mathbb{RP}^9$  ne se plonge pas dans  $\mathbb{R}^{9+k}$ )

On a  $\omega(\mathbb{RP}^9) = (1+a)^{10} = 1 + a^2 + a^8 = 1 + \omega_2 + \omega_8$ . On calcule par la formule de récurrence  $\bar{\omega}(\mathbb{RP}^9) = 1 + a^2 + a^4 + a^6$ , donc  $\mathbb{RP}^9$  ne peut pas s'immerger dans  $\mathbb{R}^{9+k}$  pour  $k < 6$ .

Plus généralement :

**Théorème**

Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathbb{RP}^{2r}$  ne peut s'immerger dans  $\mathbb{R}^i$  pour un entier  $i \leq 2^{r+1} - 1$ .

▷ On a  $\omega(\mathbb{RP}^{2r}) = (1+a)^{2r+1} = (1+a^{2r})(1+a) = (1+a^n)(1+a) = 1 + a + a^n$  puis  $\bar{\omega}(\mathbb{RP}^n) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ . Dans ce cas,  $k \geq n-1 = 2^r - 1$ . Donc  $\mathbb{RP}^{2r}$  ne peut s'immerger dans plus petit que  $\mathbb{R}^{2(2^r)-1}$ . ■

*Remarque.* Par le théorème de plongement de Whitney, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{RP}^{2r}$  se plonge dans  $R^{2^{r+1}}$  et donc dans ce cas ce plongement est maximal par le théorème précédent.

**Application.** ( $\mathbb{RP}^8 \not\hookrightarrow \mathbb{RP}^{14}$ )

$\mathbb{RP}^8$  ne se plonge pas dans  $\mathbb{RP}^{14}$ .

En particulier, on retrouve que  $\mathbb{RP}^9$  se plonge pas dans  $\mathbb{RP}^{14}$ .

**Exercice 34 (Théorème de Stiefel)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On décompose  $n+1 = 2^r m$  où  $r \in \mathbb{N}$  et  $m$  est un entier impair. Montrer que si  $\mathbb{RP}^n$  admet  $k$  champs de vecteurs linéairement indépendants en tous points, alors  $k < 2^r$ .

▷ **Éléments de réponse.**

Par hypothèse,  $T\mathbb{RP}^n \simeq \eta \oplus \varepsilon^k$  où  $\eta$  est de rang  $n-k$ . Alors  $(1+a)^{n+1} = \omega(\eta)\omega(\varepsilon^k) = \omega(\eta) = 1 + \omega_1(\eta) + \dots + \omega_{n-k}(\eta)$ . En particulier  $\binom{n+1}{n-k+1}a^{n-k+1} = 0, \dots, \binom{n+1}{n}a^n = 0$ , d'où  $\binom{n+1}{n-k+u} \equiv 0$  [2] pour  $u \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . On utilise maintenant le résultat d'arithmétique important suivant : si  $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k$  et  $b = b_0 + b_1 p + \dots + b_k p^k$  pour un  $p$  premier, alors  $\binom{b}{a} \equiv \binom{b_0}{a_0} \dots \binom{b_k}{a_k} [p]$ . Cela donne dans notre cas  $\binom{2^r m}{2^r(m-1)} \equiv \binom{2^r m}{2^r} \equiv \underbrace{\binom{0}{0} \dots \binom{0}{0}}_{r \text{ fois}} \binom{1}{1} \binom{c_1}{0} \dots \binom{c_1}{0} \equiv 1$  [2], i.e.  $\not\equiv 0$  [2], si l'on note en binaire  $2^r m = (c_1 c_2 \dots c_l 10 \dots 0)_2$ . Ainsi  $\binom{2^r m}{2^r m - 2^r} \not\equiv 0$  [2] i.e.  $\binom{n+1}{n-2^r+1} \not\equiv 0$  [2] d'où  $k-1 \leq 2^r$ .

**Exercice 35** (*Étude des champs planaires sur les espaces projectifs*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On dit qu'une variété différentiable  $M$  admet un *champ de  $k$ -plans* si  $TM$  admet un sous-fibré vectoriel de dimension  $k$  et ce champ est alors ce sous-fibré. Ceci signifie que le fibré tangent se décompose en  $TM = \eta \oplus \zeta$  où  $\eta, \zeta$  sont respectivement de rangs  $n - k$  et  $k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  admet un champ de 1-plans si et seulement si  $n$  est impair.
2. Montrer que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^4$  et  $\mathbb{R}\mathbb{P}^6$  n'admettent pas de champs de 2-plans.

## ▷ Éléments de réponse.

1. Si  $n$  est impair, il est clair que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  admet un champ de vecteurs non nul, en particulier un champ de 1-plans. Si  $n$  est pair, si c'était le cas, on aurait  $\omega(TM) = \omega(\eta)\omega(\zeta)$ . Alors  $\omega(\eta) = P(a)$  et  $\omega(\zeta) = Q(a)$  où  $P, Q$  sont respectivement de degré  $\leq n-1, 1$ . Par  $\omega(\eta)\omega(\zeta) = 1 + \dots + \binom{n+1}{n}a^n = 1 + \dots + a^n$ , puisque  $n+1 = \binom{n+1}{n} \equiv 1$  [2], on a les égalités  $\deg(P) = n-1$  et  $\deg(Q) = 1$ . Mais  $Q$  a un terme constant unitaire, d'où  $Q(a) = 1+a$ . De plus,  $Q(a)P(a) = (1+a)^{n+1} - a^{n+1}$  d'où  $Q(X)P(X) = (1+X)^{n+1} - X^{n+1}$ , et  $Q(1) = 0$ , mais  $(1+1)^{n+1} - 1^{n+1} = 1 \neq 0$ , contradiction.
  2. Pour  $\mathbb{R}\mathbb{P}^4$ ,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^4) = 1 + a + a^4$ . Ainsi,  $\omega(\eta) = 1 + ba + b'a^2$  et  $\omega(\zeta) = 1 + ca + c'a^2$ . En tapant sur la relation, on obtient  $b' = 1, c' = 1, b+c = 1$  et  $b+c = 0$ , contradiction.
- Pour  $\mathbb{R}\mathbb{P}^6$ , on a  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^6) = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = \Phi_7(a)$ . Ainsi,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^6) = \omega(\eta)\omega(\zeta)$  se traduit par  $\Phi_7 = PQ$  où  $\deg(P) = 2$  et  $\deg(Q) = 4$ .  $P$  a une racine dans  $\mathbb{F}_4$ , car il est de degré 2, mais chaque racine de  $\Phi_7$  engendre  $\mathbb{F}_{2^6}$ , car chaque racine  $\zeta$  est simple et alors  $\zeta^k, k \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*$  sont ses autres racines. Surtout ne concluez pas par ce que  $\Phi_7$  est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -irréductible, car c'est faux !

**Exercice 36** (*Les variétés minalement plongées ont des classes très simples*)

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $M$  une  $n$ -variété différentiable qui s'immerge dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Montrer que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i(M) = \omega_1(M) \smile \dots \smile \omega_1(M)$  avec  $i$  itérations.
2. Montrer que seuls les  $n$ -ièmes espaces projectifs où  $n = 2^r - 1, 2^r - 2, r \in \mathbb{N}^*$  sont susceptibles de s'immerger dans  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ . En déduire que le plan projectif réel ne s'immerge pas dans l'espace usuel.

## ▷ Éléments de réponse.

1. On a  $TM \oplus \nu(M) = T\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}_{|M}$  d'où  $\omega(M)\omega(\nu(M)) = 1$ , puis  $\omega(M) = \overline{\omega(\nu(M))} = (1 + \omega_1(\nu(M)))^{-1} = 1 + \omega_1(\nu) + \omega_1(\nu)^2 + \dots + \omega_1(\nu)^n$  d'où  $\omega_1(\nu) = \omega_1(M)$  et  $\omega(M) = 1 + \omega_1(M) + \omega_1(M)^2 + \dots + \omega_1(M)^n$ .
2. Alors  $\omega_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (n+1)a$  donne  $((n+1)a)^k = \binom{n+1}{k}a^k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  d'où  $n+1 \equiv \binom{n+1}{k}$  [2], ce qui ne peut arriver que si toute la ligne du triangle de Pascal est composée entièrement de 1 ou n'a des 1 qu'aux deux extrémités. La condition qu'elle donne sur  $n$  se démontre par le même lemme énoncé sur les polynômes en nombres premiers : si  $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ ,  $\binom{m}{k} \equiv 0$  [2] implique que  $m$  est une puissance de 2 et le contraire, que  $m$  est une puissance de 2, moins 1. Montrons par exemple le premier cas. Si  $m$  n'est pas une puissance de 2, écrivons  $m = (1c_m\dots c_0)$  en binaire pour  $c_a \neq 0$  pour un  $a \in \llbracket 0, l \rrbracket$ . Choisissons  $k = (0\dots 010\dots 0)$  où 1 est à la position  $a$ . Alors  $\binom{m}{k} \equiv \binom{c_0}{0} \dots \binom{c_{a-1}}{0} \binom{1}{1} \binom{c_{a+1}}{0} \dots \binom{c_l}{0} \binom{1}{0} \equiv 1$  [2].

### 7.4.2.3 Nombres de Stiefel-Whitney

#### Définition. (*Nombres de Stiefel-Whitney*)

Soit  $M$  une variété lisse fermée de dimension  $n$  et soit  $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  sa classe fondamentale, qui n'est autre que le générateur de  $H_n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Soient  $r_1, \dots, r_n$  une collection de  $n$  entiers naturels vérifiant  $\sum_{i=1}^n ir_i = r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$ . Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de base  $M$ . On forme le  $(r_1, \dots, r_n)$ -nombre de Stiefel-Whitney de  $M$ , donné par

$$\underbrace{\omega_1(\xi)^{r_1}\omega_2(\xi)^{r_2}\dots\omega_n(\xi)^{r_n}}_{\text{cup-produits}}[M] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

qui est l'indice de Kronecker<sup>a</sup>  $\langle \omega_1(\xi)^{r_1}\omega_2(\xi)^{r_2}\dots\omega_n(\xi)^{r_n}, [M] \rangle$  où  $\omega_1(\xi)^{r_1}\omega_2(\xi)^{r_2}\dots\omega_n(\xi)^{r_n} \in H^n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est une classe de cohomologie apparaissant comme un monôme dans  $H^\Pi(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Sans autre précision sur  $\xi$ , les nombres de Stiefel-Whitney d'une variété seront ceux associés à son fibré tangent.

---

<sup>a</sup> Et par hypothèse sur la somme pondérée des  $r_1, \dots, r_n$ ,  $\omega_1(\xi)^{r_1}\omega_2(\xi)^{r_2}\dots\omega_n(\xi)^{r_n} \in H^n(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  d'où la bonne définition de cette évaluation.

**VOC** Deux  $n$ -variétés auront les mêmes nombres de Stiefel-Whitney si toutes les quantités  $\omega_1(\tau_M)^{r_1}\dots\omega_n(\tau_M)^{r_n}[M] = \omega_1(\tau_{M'})^{r_1}\dots\omega_n(\tau_{M'})^{r_n}[M']$  pour  $(r_1, \dots, r_n)$  parcourant  $\{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n \mid r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n\}$ .

#### Exemples. (*Nombres de Stiefel-Whitney*)

- Si  $n$  est pair,  $\omega_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (n+1)a^n = a^n \neq 0$ , donc le  $(0, \dots, 0, 1)$ -nombre de Stiefel-Whitney  $\omega_1^n[\mathbb{R}\mathbb{P}^n] = a^n[M] \neq 0$ . Similairement, puisque  $\omega_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (n+1)a = a \neq 0$ , le  $(n, 0, \dots, 0)$ -nombre de Stiefel-Whitney  $\omega_1^n[\mathbb{R}\mathbb{P}^n] \neq 0$ .

Si  $n$  est une puissance de 2 par  $n = 2^r, r \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{2^r+1} = (1+a)(1+a^{2^r}) = 1+a+a^n+a^{n+1} = 1+a+a^n$  et donc tous les autres nombres de Stiefel-Whitney de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  sont donc nuls.

- Si  $n$  est impair, tous les nombres de Stiefel-Whitney de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  sont nuls.

En effet, si  $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}$ ,  $\omega(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{2k} = (1+a^2)^k$  donc en développant le binôme  $\omega_j(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 0$  pour tout entier naturel impair  $j$ . Puisque tout monôme de somme pondérée totale  $2k-1$  doit contenir un facteur  $\omega_j$  de dimension impaire, le tour est joué.

Notons :

**Fait. (Additivité des nombres de Stiefel-Whitney)**

Les nombres de Stiefel-Whitney sont additifs pour la réunion disjointe de variétés.

Puisque les classes fondamentales le sont, et que les classes de cohomologie sont bien sûr des morphismes additifs.

**Théorème. (Pontryagin, nombres de Stiefel-Whitney d'un bord)**

Une variété fermée lisse est cobordante à zéro si tous ses nombres de Stiefel-Whitney sont nuls.

**Preuve.**

▷ Soit  $M^n$  notre  $n$ -variété et  $B = B^{n+1}$  un cobordisme. Alors  $M \xrightarrow{i} B$ . Ce plongement induit une suite exacte longue  $H_*(M) \longrightarrow H_*(B) \longrightarrow H_*(B,M) \longrightarrow H_{*-1}(M)$  d'où en cohomologie  $H^*(M) \longleftarrow H^*(B) \longleftarrow H^*(B,M) \xleftarrow{\delta} H^{*-1}(M)$  avec  $\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial \mu_B \rangle = \langle \partial v, \mu_B \rangle$  et  $H_{n+1}(B,M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par  $\delta : \mu_B \mapsto \mu_M \in H_n(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

On sait que  $TB|_M = TM \oplus \nu$  où  $\nu$  est trivial, puisque pour une métrique euclidienne sur  $\tau_b$ , il existe un unique champ de vecteur normal pointant vers l'extérieur, couvrant un fibré en droites trivial  $\nu$ . En utilisant la suite exacte  $H^n(B) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B,M)$ , il suit que  $i^* \omega_i(TB) = \omega_i(TM)$  puis pour toute uplet  $(r_1, \dots, r_n)$  convenable,  $\langle i^* \omega_1^{r_1}(TB) \dots i^* \omega_n^{r_n}(TB), \mu_M \rangle = \langle \omega_1^{r_1}(TM) \dots \omega_n^{r_n}(TM), \mu_M \rangle = \langle \partial i^* \omega_1^{r_1}(TB) \dots \partial i^* \omega_n^{r_n}(TB), \mu_B \rangle = 0$  où  $i^* : H^*(B) \rightarrow H^*(M)$  et par exactitude  $\partial i^*$  est nulle, donc ce nombre de Stiefel-Whitney s'annule. ■

**Corollaire**

Pour tout entier naturel  $n$  pair, l'espace projectif  $\mathbb{RP}^n$  n'est pas cobordant à zéro.

La réciproque au théorème de Pontryagin est en fait vraie.

**Théorème. (Thom, caractérisation des bords par les classes de Stiefel-Whitney)**

Si tous les nombres de Stiefel-Whitney d'une variété fermée lisse sont nuls, alors elle est cobordante à zéro.

✳ (Idée de la preuve.) Difficile. ■

**Exercice 37 (Parité des nombres de Stiefel-Whitney)**

Montrer que si  $M$  est une variété fermée lisse et  $M' = M \sqcup M$ , alors tous les nombres de Stiefel-Whitney de  $M'$  sont nuls.

**▷ Éléments de réponse.**

En effet,  $M'$  est le bord de  $M \times I$ .

**Exercice 38** (*Cobordisme explicite pour  $\mathbb{RP}^{2k-1}$* )

Montrer que les espaces projectifs réels de dimension impaire bordent des espaces lenticulaires.

**Corollaire.** (*Caractérisation des classes de cobordisme par les nombres de Stiefel-Whitney*)

Deux variétés fermées lisses  $M_1, M_2$  sont cobordantes si et seulement si leurs nombres de Stiefel-Whitney sont égaux.

Autrement dit, les nombres de Stiefel-Whitney déterminent les classes de cobordismes orientés d'une variété.

▷ Si  $M_1$  et  $M_2$  sont cobordante,  $M_1 \sqcup M_2$  est cobordante à zéro, et les nombres de Stiefel-Whitney du vide sont nuls, donc les nombres de Stiefel-Whitney de  $M_1$  et  $M_2$  sont opposés par additivité, donc égaux, car on travaille sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Réciproquement, s'ils sont égaux, alors ceux de  $M_1 \sqcup M_2$  sont nuls, donc  $M_1 \sqcup M_2$  est cobordante à zéro par Thom, donc  $M_1 \sqcup M_2$  sont cobordantes. ■

**Définition-propriété.** (*Groupes de cobordismes non orientés*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathfrak{N}_n$  des classes de cobordismes de  $n$ -variétés fermées est un groupe additif fini muni de la structure de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -module.

**Exercice 39**

Montrer que  $\text{card}(\mathfrak{N}_4) \geq 4$ .

▷ **Éléments de réponse.**

On peut utiliser les variétés  $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$  et  $\mathbb{RP}^4$ .

### 7.4.3 La variété grassmannienne

#### 7.4.3.1 Topologie des grassmanniennes

**Définition.** (*Grassmannienne*)

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . La *variété grassmannienne* associée au couple  $(n, k)$ , notée  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ , est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$  ou *n-plans* dans  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

*Remarque.* Bien sûr, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Gr_1(\mathbb{R}^{1+k}) = \mathbb{RP}^k$  et c'est sans exagération le seul exemple susceptible d'être à peu près compris par le lecteur.

**Définition. (*Repères*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Un  $n$ -repère ou  $n$ -cadre dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  est un  $n$ -uplet de vecteurs linéairement indépendants.

**Définition. (*Variété de Stiefel*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . La variété de Stiefel  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est l'ensemble des  $n$ -repères de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

**Fait. (*Ouverture de la variété de Stiefel*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .  $V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^{n+k} \times \dots \mathbb{R}^{n+k}}_{n \text{ fois}} \simeq \mathbb{R}^{n(n+k)}$  est un ouvert.

C'est l'image réciproque de  $\mathbb{R}^*$  par  $A \mapsto \det(A^t A)$ .

Elle est donc munie d'une structure de sous-variété de  $\mathbb{R}^{n(n+k)}$  de dimension  $n(n+k)$  et de dimension  $n(n+k)$ . En particulier, c'est un espace topologique.

**Fait. (*Portée*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Il existe une application  $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  dite portée qui envoie tout  $n$ -repère sur le  $n$ -plan qu'il engendre. **Ainsi la variété grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est munie de la topologie quotient = finale induite par la portée.**

**Fait. (*Identification de la grassmannienne par les repères orthonormés*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . En notant  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  l'ensemble des  $n$ -repères orthonormés de  $\mathbb{R}^{n+k}$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) & & \\
 \searrow & \nearrow & \\
 & V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\text{Gram-Schmidt}} V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) & \\
 q_0 = q|_{V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})} \quad & & \downarrow q_0 \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) &
 \end{array}$$

donc  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})/V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  et  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  s'identifient pour l'action de  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  sur  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$  où  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  est isomorphe à un espace orthogonal.

**Fait. (*Compacité de la grassmannienne*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Alors  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est compact.

En effet, c'est l'image par  $q_0$  continue de  $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$  qui est fermé, car c'est l'image réciproque de  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  par une application continue composée de normes et de produits scalaires, et borné, par 1 sous la norme maximaum par exemple, dans  $\mathbb{R}^{n(n+k)}$ , donc compact en dimension finie.

**Lemme. (*Structure de la grassmannienne*)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est une variété topologique de dimension  $nk$ .

▷ Pour montrer que  $Gr_n = Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est séparée, on exhibe une fonction continue qui sépare les points  $Gr_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ . Si  $\omega \in \mathbb{R}^{n+k}$ , il suffit de considérer la distance de  $\omega$  à  $X$  un plan dans  $\mathbb{R}^{n+k}$  notée  $\rho_\omega$  et fonction de  $X$ . Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est un repère orthonormé de  $X$ ,  $\rho_\omega(X) = \omega \cdot \omega - \omega \cdot x_1 - \dots - \omega \cdot x_n$  est continue en les  $x_i$ , donc en composant  $\rho_\omega \circ q_0 : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{q_0} Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\rho_\omega} \mathbb{R}$  est continue, et donc  $\rho_\omega$  l'est.

Montrons que tout point de la grassmannienne a un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^{nk}$ . Soit  $X_0$  un plan de  $\mathbb{R}^{n+k}$ . On peut écrire  $\mathbb{R}^{n+k} = X_0 \oplus X_0^\perp$ . Soit  $U \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  défini par  $U = \{Y \in Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \mid \pi_{X_0^\perp}(Y) = X_0\}$  où  $\pi_{X_0^\perp}$  est la projection orthogonale parallèlement à  $X_0^\perp$ . Ceci nous donne une application  $\Pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0$ . On veut  $\Pi(Y) = X_0$  d'où  $Y \cap X_0^\perp = 0$ . Or  $U$  est ouvert : en effet, tout point de  $\mathbb{R}^{n+k}$  peut être écrit comme  $v \oplus \omega$  dans la décomposition  $X_0 \oplus X_0^\perp$ , et de plus  $U \ni Y = \{(v, \omega) \mid (v, \omega) \in Y\}$ . C'est le graphe d'une application linéaire  $X_0 \rightarrow X_0^\perp$  puisque  $\Pi(Y) \simeq X_0$  linéairement, par  $(v, \omega) \mapsto v$  où  $\omega \in X_0^\perp$ . Ainsi on a une application  $x_0 \in U \xrightarrow{T} \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \simeq \mathbb{R}^{n+k}$ . On voit que  $T$  est une bijection : si  $T(Y) \in \text{Hom}(X_0, X_0^\perp)$ , on définit  $Y$  comme l'image de l'application linéaire  $x_0 \ni X \mapsto X + T(Y)(X) \in X_0^\perp$ . Pour montrer que  $T$  est continue, étant donnée une base orthonormale  $(x_i)_i$  de  $X_0$ , on déduit un repère  $(y_i)_i$  de  $Y$  et  $y_i = x_i + T(Y)x_i$  qui dépend continûment de  $Y$ , donc  $T(Y)$  dépend continûment de  $Y$  ; réciproquement,  $y_i$  dépend continûment de  $T(Y)$ , donc  $Y$  dépend continûment de  $T(Y)$ , donc  $T, T^{-1}$  sont continues et  $T$  est une carte de  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ . ■

**Exercice 40 (Structure différentielle de la grassmannienne)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .

1. Écrire comment la grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  peut être munie d'une structure lisse de telle façon que, pour tout fonction  $f : Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $f$  devient lisse si et seulement si la composition  $f \circ q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse où ici  $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est la projection de la variété de Stiefel  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$  sur la grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ .
2. Montrer que  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est difféomorphe à la sous-variété de  $\mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R})$  des matrices symétriques idempotentes de trace  $n$ .

**▷ Éléments de réponse.**

1. La preuve est similaire.
2. Exercice plaisant.

**Exercice 41 (Plongement projectif de la grassmannienne)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_n$  de  $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$  dans  $\Lambda^n(\mathbb{R}^{n+k})$  induit un plongement lisse de  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  dans  $Gr_1(\Lambda^n(\mathbb{R}^{n+k})) \simeq \mathbb{RP}^{\binom{n+k}{n}-1}$ . En

déduire qu'un sous-espace linéaire d'un espace projectif n'est en général pas projectif.

▷ Éléments de réponse.

Essayons  $\psi: Gr_n(V) \longrightarrow \mathbb{RP}(\Lambda^n V)$  où l'on pose  $V = \mathbb{R}^{n+k}$  et  $\Lambda^n V \simeq \mathbb{R}^{\binom{n+k}{n}}$ .

$$X \subseteq V \longmapsto \Lambda^n X \subseteq \Lambda^n V$$

Soit  $v \in V$ . Sit  $v \in X$ , alors pour tout  $e \in \Lambda^n X$ ,  $e \wedge v = 0$  dans  $\Lambda^{n+1} V$  comme  $e \wedge v \in \Lambda^{n+1} X = 0$ . Si  $v \neq X$ , alors pour  $e \in \Lambda^n X \setminus \{0\}$ ,  $e \wedge v$  est une base de la droite  $\Lambda^{n+1}(X \oplus \mathbb{R}v)$ , en effet  $e = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  pour une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $X$ . Alors  $e \wedge v = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge v$  et  $(e_1, \dots, e_n, v)$  est une base de  $X \oplus \mathbb{R}v$ . Alors  $v \in X \iff \forall e \in \Lambda^n X \quad e \wedge v = 0$ , donc  $X \mapsto \Lambda^n X$  est injective.

Notons  $F_n(V)$  l'ensemble des  $n$ -repères dans  $V$ . Alors

$$\begin{array}{ccc} F_n(V) & \xrightarrow{(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n} & \Lambda^n V \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Gr_n(V) & \xrightarrow[X \mapsto \Lambda^n X]{} & \mathbb{RP}(\Lambda^n V) \end{array}$$

commute et  $F_n(V) \subseteq V^n$  est un ouvert, d'où le calcul de différentielle  $T_{f_{lv}}F_n(V) \simeq V^n \rightarrow T_{\varphi(\vec{v})}\Lambda^n V \setminus \{0\} = \Lambda^n V, (h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} h_i \wedge v_i \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n$ ; en effet,  $\varphi(\vec{v} + \vec{k}) = (v_1 + k_1) \wedge \dots \wedge (v_n + k_n) = \varphi(\vec{v}) + h_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n + v_1 \wedge h_1 \wedge v_3 \wedge \dots \wedge v_n + \dots + v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge h_n + \mathcal{O}(|h|^2)$ . On a

$$\begin{array}{ccccc} T_{\vec{v}}F_n(V) & \xrightarrow{\sim} & V^n & \supseteq & (X_0^\perp)^n \xrightarrow{\quad} T_{\varphi(v)}\Lambda^n V \setminus \{0\} = \Lambda^n V \\ \downarrow & & \downarrow h \mapsto f_h & \nearrow & \downarrow e \mapsto g_e \\ T_X Gr_n(V) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}(X, V/X) & \xrightarrow{\quad} & T_{\Lambda^n X}\mathbb{RP}(\Lambda^n V) = \text{Hom}(\Lambda^n X, \Lambda^n V / \Lambda^n X) \end{array}$$

et l'on veut montrer que  $\chi$  est injective. Soit  $X = \text{Vect}(v_i)_i$ ,  $f_k(v_i) = [h_i] \in V/X$  où  $X^\perp \simeq V/X$ ,  $g_e(\Lambda^n \vec{v}) = [e]$ . Allons-y :  $e = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} h_i \wedge v_i \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n$  et  $\chi(h) = g_e$ , donc  $g_e = 0 \iff e \in \Lambda^n X = \mathbb{R}v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  les  $(v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n)_i$  sont linéairement indépendants donc forment une base de  $\Lambda^{n-1} X$ . Or on a la formule  $\Lambda^n V = \Lambda^n(X^\perp \oplus X) = \sum_{p+q=n} \Lambda^p X^\perp \oplus \Lambda^q X$ . Donc  $\sum_{i=1}^n \underbrace{X^\perp \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n}_{=e} \oplus \Lambda^n X \subseteq \Lambda^n V$  et  $(-1)^{i-1} h_i \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n \in X^\perp \wedge v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_i \wedge \dots \wedge v_n$ , donc  $\varphi_e = 0 \iff e = 0 \iff \forall i \quad h_i = 0$ , donc  $\chi$  est injective.

**Lemme. (Symétrie de la grassmannienne)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . L'application  $X \mapsto X^\perp$  induit un homéomorphisme  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \xrightarrow{\sim} Gr_k(\mathbb{R}^{n+k})$ .

▷ Cette application est donnée par le procédé de Gram-Schmidt à composition par  $q$  près, qui est continu, et est son propre inverse, donc c'est un homéomorphisme, et il est bien défini sur ces ensembles. ■

**Corollaire. (*Variété des n-plans de  $\mathbb{R}^{n+1}$* )**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq Gr_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$ .

**Définition. (*Fibré tautologique de la grassmannienne*)**

Soient  $n,k \in \mathbb{N}$ . Considérons l'ensemble de couples

$$\gamma^n = \gamma_k^n = \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) := \{(X,x) \mid X \text{ n-plan de } \mathbb{R}^{n+k}, x \in X\}$$

muni de la projection  $\pi : \gamma_n \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  canonique sur la première coordonnée. On l'appelle *fibré tautologique de la grassmannienne* ou encore *fibré universel*.

*Remarque.* Pour  $k \in \mathbb{N}$ , cette notation est cohérente avec le fibré tautologique du  $k$ -ième espace projectif :  $\gamma^1(\mathbb{R}^{k+1}) = \gamma_k^1 \rightarrow \mathbb{RP}^k$ .

**Lemme**

Le fibré tautologique de la grassmannienne est localement trivial.

▷ Prenons  $X_0 \in Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  et considérons  $U$  l'ouvert de carte associé à  $X_0$  pour la structure de variété de la grassmannienne précédemment définie. On définit  $h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$  par  $h(Y,x) = (y, p_Y^{-1}(x)) = (y, x + T(Y)x)$  où  $p_Y(x)$  est l'unique vecteur de  $Y$  envoyé sur  $x$  par la projection orthogonale  $p : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow X_0$  qui définit une trivialisation locale de  $\gamma^n$ , d'inverse  $h^{-1}(Y,y) = (Y, py)$ . ■

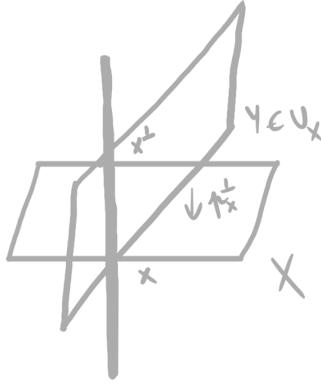
L'exercice généralise un lemme déjà énoncé pour les espaces projectifs.

**Exercice 42 (Fibré tangent de la grassmannienne)**

Soient  $n,k \in \mathbb{N}$ . Montrer que le fibré tangent de la grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est isomorphe au fibré  $\text{Hom}(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \gamma^\perp)$  où  $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$  est le fibré tautologique de la grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  et  $\gamma^\perp$  est le complémentaire orthogonal de  $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$  dans le fibré trivial  $\varepsilon^{n+k}$ .

**▷ Éléments de réponse.**

Prenons  $X \in Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  et  $U_X \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  l'ouvert défini par  $\{Y \in Gr_n \mid p_X^\perp : Y \rightarrow X \text{ est un isomorphisme}\}$ . Alors  $\varphi_X : U_X \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, X^\perp), \Gamma_f = \{x + f(x), x \in X\} \leftrightarrow f$ .



On définit  $T_X Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \longrightarrow \text{Hom}(\gamma^n, \gamma^\perp)_X$ . Remarquons que  $\varphi_X \circ \delta : ]-1,1[ \rightarrow \text{Hom}(X, X^\perp)$

$$\delta : ]-1,1[ \rightarrow U_X, \delta(0) = X \longmapsto (\varphi_X \circ \delta)'(0)$$

a pour images un ensemble d'espaces linéaires, ce qui fait mal au crâne.

Autre méthode : on utilise que si  $G$  est un groupe de Lie agissant transitivement sur une variété lisse  $M$ , alors pour tout  $p \in M$ ,  $G/G_p \longrightarrow M$  est un difféomorphisme. Dans notre cas, l'action de  $GL_{n+k}(\mathbb{R})$  sur

$$g \longmapsto g \cdot p$$

$M = Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est lisse et transitive. Pour  $P \in GL_{n+k}(\mathbb{R})$  et  $X \in Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ,  $P \cdot X = P(X)$  donc par le théorème, on a une bijection  $GL_{n+k}(\mathbb{R})/G_{X_0} \longrightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  où  $X_0 = \mathbb{R}^n \oplus 0 \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ . Qu'est-ce maintenant

$$P \longmapsto P(X_0)$$

que  $G_{X_0}?$   $P \in G_{X_0} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad Pe_i \in \mathbb{R}^n \iff P = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL_{n+k}(\mathbb{R})$ . Alors  $T_{I_{n+k}} Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) = T_{I_{n+k}} GL_{n+k}(\mathbb{R})/T_{I_{n+k}} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R})/\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\} \simeq \mathfrak{M}_{n,k}(\mathbb{R}) = \text{Hom}(X_0, \mathbb{R}^{n+k}/\perp)$ , et  $TGL_{n+k}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_{n+k}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R}), (P, M) \mapsto (P, MP^{-1})$  et  $TG_{X_0} \xrightarrow{\sim} G_{X_0} \times T_{X_0} G_{X_0}, (P, M) \mapsto (P, MP^{-1})$ . Le  $P(TG_{X_0}) \subseteq TGL_{n+k}(\mathbb{R})$  forme un sous-fibré  $W \subseteq TGL_{n+k}(\mathbb{R})$  avec  $W_P \simeq PT_{X_0} G_{X_0} P^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R})$ . Alors  $T_{P(X_0)} Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) = T_P GL_{n+k}(\mathbb{R})/W_P = \mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R})/PT_{X_0} G_{X_0} P^{-1} = \mathfrak{M}_{n+k}(\mathbb{R})/P \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} P^{-1} \simeq \text{Hom}(P(X_0), \mathbb{R}^{n+k}/P(X_0))$ .

### Définition. (*Fonction de Gauss généralisée*)

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Soit  $M$  une  $n$ -sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^{n+k}$ . On définit la *fonction de Gauss généralisée*  $\bar{g}$ :

$$M \longrightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$$

$$x \longmapsto T_x M$$

### Fait

Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ , la fonction de Gauss généralisée est recouverte par l'application fibrée

$$g: TM \longrightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}).$$

$$(x, v) \longmapsto (T_x M, v)$$

Évident. Le fait que  $g$  soit fibré découle directement de la définition.

En particulier,  $g$  et  $\bar{g}$  sont continues.

On peut généraliser le fait précédent à d'autres fibrés que les fibrés tangents, afin de justifier le nom de fibré universel attribué au fibré tautologique de la grassmannienne.

**Lemme. (*Universalité des fibrés tautologiques grassmanniens*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\mathbb{R}^n$ -fibré  $\xi$  sur une base compacte  $B$ , il existe une application fibrée  $\xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$  pour un entier  $k$  assez grand, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{f} & \gamma_k^n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\tilde{f}} & Gr_n^{n+k} \end{array}$$

et implique  $\xi = f^*\gamma_k^n$ .

En particulier, tout fibré en droites de base compacte est le pullback d'un fibré sur un espace projectif.

▷ On prétend que pour construire une application fibrée  $f : \xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^m)$ , il suffit de construire une application continue  $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est linéaire et injective sur chaque fibre. Ensuite, on définit  $f$  et  $E(\xi)$  par  $f(e) = (\hat{f}(\text{fibre sur } \pi(e)), \hat{f}(e))$ , cette première coordonnée étant dans  $\gamma^n$ . Alors  $f$  est continue par trivialité local de  $\xi$

On veut donc construire  $\hat{f}$ . On prend un recouvrement fini  $(U_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  de  $B$  avec des trivialisations locales  $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i) = \xi|_{U_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , ce qui est possible en partant d'un recouvrement quelconque par des trivialisations locales. Posons  $m = rn$ , ce qui revient à prendre  $k = n(r-1)$ . On prend une partition  $W_i$  qui recouvrent encore  $B$ ,  $\overline{W_i} \subseteq V_i$ ,  $\overline{V_i} \subseteq U_i$  et l'on prend par le lemme d'Urysohn des  $\lambda_i$  égales à 1 sur  $\overline{W_i}$  et à 0 hors de  $V_i$  et qui restent entre [0,1] en tous points. Considérons  $\tilde{h}_i = p \circ h^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $p : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la projection. Tout  $\tilde{h}_i$  est un isomorphisme sur chaque fibre. On pose  $h'_i : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n$  et l'on

$$h_i(e) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{pour } \pi(e) \notin V_i \\ \lambda_i(\pi(e))\tilde{h}_i(e) & \text{pour } \pi(e) \in U_i \end{cases}$$

définit  $\tilde{h} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^n$  somme  $r$  copies de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi  $\hat{f}(e) = (h'_1(e), \dots, h'_r(e))$  définit une application continue de  $E(\xi)$  à  $\mathbb{R}^{nr}$ , linéaire sur chaque fibre et injective sur chaque fibre. ■

Pour généraliser à des bases seulement paracompactes, il faut laisser «  $k$  tendre vers l'infini ». On aura besoin de la

**Définition. (*Grassmannienne infinie*)**

Notons  $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$  les suites presque nulles de réels. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La  $n$ -ième *grassmannienne infinie*  $F_n = Gr_n = Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  est l'ensemble des  $n$ -plans, i.e. des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$ , de  $\mathbb{R}^\infty$ , muni de la topologie colimite associée à la suite  $Gr_n(\mathbb{R}^n) \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^{n+1}) \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^{n+2}) \subseteq \dots$ , sachant que  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  puisque  $\mathbb{R}^\infty$  est

topologisée comme la limite directe  $\mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \dots$

*Remarque.* Si  $n = 1$ , la  $n$ -ième grassmannienne infinie est  $\mathbb{RP}^\infty = Gr_1(\mathbb{R}^\infty)$ .

### Fait. (*Topologie de la grassmannienne infinie*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, un sous-ensemble  $U$  de  $Gr_n$  est ouvert, respectivement fermé, si et seulement si  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \cap U$  est ouvert, respectivement fermé, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### Définition. (*Fibré tautologique de la grassmannienne infinie*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons l'ensemble de couples

$$\gamma^n = \gamma^n(\mathbb{R}^\infty) := \{(X, x) \mid X \text{ } n\text{-plan de } \mathbb{R}^\infty, x \in X\}$$

muni de la projection  $\pi : \gamma_n \rightarrow Gr_n$  canonique sur la première coordonnée. On l'appelle *fibré tautologique de la grassmannienne infinie* ou bien encore *fibré universel*.

### Lemme

Le fibré tautologique de la grassmannienne infinie est localement trivial.

▷ La preuve est semblable à celle du cas fini, en utilisant le lemme technique disant que pour toutes suites topologiques  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  et  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ , la topologie produit  $A \times B$  est la topologie de la limite directe associée à  $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2 \subseteq \dots$ . Alors si  $X_0 \subseteq \mathbb{R}^\infty$  est un  $n$ -plan fixé, soit  $U \subseteq Gr_n$  l'ensemble des  $n$ -plans  $Y$  qui se projettent surjectivement sur  $X_0$  par la projection orthogonale  $p : \mathbb{R}^\infty \rightarrow X_0$ . C'est bien un ouvert pour la topologie colimite. En définissant  $h : U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$  comme d'habitude,  $h|_{U_k \times X_0}$  définie comme précédemment est continue pour tout  $k$ , donc  $h$  est continue et c'est un homéomorphisme pour les mêmes arguments. ■

→ *Notation.* C'est le plus souvent ce fibré tautologique de la grassmannienne infinie de rang  $n \in \mathbb{N}$  que nous noterons  $\gamma^n$ .

On peut donc énoncer le théorème suivant, munie d'une information importante sur les applications fibrées modulo homotopie, qui pour être énoncée nécessite la notion suivante :

### Définition. (*Homotopie fibrée*)

Deux applications fibrées sont *fibré-homotopes* si elles sont homotopes par une famille d'applications fibrées.

**Théorème. (*Universalité du fibré de la grassmannienne infinie*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\mathbb{R}^n$ -fibré  $\xi$  de base paracompacte  $B$ , il existe une application fibrée  $\xi \rightarrow \gamma^n$  dite universelle, ce qui s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{f} & \gamma^n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\tilde{f}} & Gr_n \end{array}$$

et implique  $\xi = f^*\gamma^n$ .

De plus, deux telles applications fibrées  $f_1, f_2 : \xi \rightarrow \gamma^n$  sont fibré-homotopes, en particulier elles déterminent la même classe d'homotopie d'applications de base  $[\tilde{f}_1] = [\tilde{f}_2] \in \text{Hom}_{\text{Top}}(B, Gr_n)$ .

En particulier, tout fibré en droites de base paracompacte est le pullback d'un fibré de base  $\mathbb{RP}^\infty$ .

**VOC** L'application induite sur les bases par une application fibrée universelle est appelée *application classifiante*. Tout fibré est donc un pullback d'une application classifiante.

**Reformulation pratique. (*Fibré grassmannien universel*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le groupe  $\mathcal{O}(n)$  a pour espace classifiant  $B\mathcal{O}(n)$  la Grassmannienne infinie associée à la variété de Stiefel infinie  $E\mathcal{O}(n)$ .

Pour montrer ce théorème, on aura besoin de plusieurs outils.

**Lemme. (*Paracompacité de la grassmannienne infinie*)**

La grassmannienne infinie est paracompacte.

▷ En effet, c'est une tour de compacts, d'où le résultat par le théorème de Morita. ■

**Lemme**

Pour tout fibré  $\xi$  sur une base paracompacte séparée, il existe  $q$  un recouvrement localement fini dénombrable  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tel que  $\xi|_{U_i}$  est trivial pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

▷ On commence avec  $(V_\alpha)_\alpha$  qui recouvre  $B(\xi)$ . C'est localement fini et  $\xi|_{V_\alpha}$  est trivial. Prenons  $\omega_\alpha \subseteq V_\alpha$  et  $\lambda_\alpha$  la fonction plateau correspondante ; Pour tout  $S \subseteq \{\alpha\}$  fini,  $U(S) \subseteq B(\xi)$ . Posons  $U(S) = \{b \in B \mid \min_{\alpha \in S} \lambda_\alpha(b) > \max_{\alpha \notin S} \lambda_\alpha(b)\}$ .  $U(S)$  est ouvert puisque les  $\lambda_\alpha$  sont continues. Tout  $b$  est dans au moins un  $U(S)$ .  $S$  s'écrit  $\{\alpha \mid V_\alpha \ni b\}$ , donc  $b \in U(S)$ . Posons  $U_k = \bigsqcup_{|S|=k} U(S)$ . Alors  $U_k$  est un recouvrement ouvert de  $B$  tel que  $\lambda_\alpha(b) > \lambda_{\alpha'}(b) \Rightarrow \lambda_{\alpha'} \not> \lambda_\alpha(b)$ .

$B = U_1 \cup \dots \cup U_k \cup \dots$  et  $\xi|_{U_8k}$  est trivial sur chacun de ces ouverts puisque  $\xi|_{U(S)}$  est trivial, ceci car  $U(S) \subseteq \bigcap_{\alpha \in S} V_\alpha$ . Si  $b \in U(S)$  et  $\alpha \in S$ ,  $b \in V_\alpha$  puisque  $\lambda_\alpha(b) > 0$ . Ainsi  $(U_k)_k$  produit le recouvrement que l'on souhaite. ■

### Preuve.

▷ Maintenant, on peut construire  $\hat{f} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  comme dans le cas compact. Dans le cas paracompact, on a un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ . On prend encore les  $h_i : U_i \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$  et l'on définit  $h'_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $p \circ h^{-1}$ . On pose  $\hat{f} : E(\xi) \longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus \dots$  On pose

$$e \longmapsto (\lambda_1(\pi(e))h'_1, \lambda_2(\pi(e))h'_2, \dots)$$

$f : \xi \rightarrow \gamma^n$  qui à  $e \mapsto (\hat{f}(\text{toute la fibre sur } \pi(e)), \hat{f}(e))$ .

Soient maintenant  $f, g : \xi \rightarrow \gamma^n$  des applications fibrées. Prenons les applications correspondantes  $\hat{f}, \hat{g} : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ . On a deux cas :

- ★ si  $\hat{f}(e) \neq -\lambda^2 \hat{g}(e)$  pour tout  $e \neq 0$  dans  $E(\xi)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\hat{h}_t(e) = (1-t)\hat{f}(e) + t\hat{g}(e)$  convient. On a en effet  $\hat{h}_t(e) \neq 0$  pour  $e \neq 0$ . C'est bien linéaire sur les fibres par combinaison de linéaires, dont  $\hat{h}$  est une homotopie fibrée.
- ★ Définissons  $d_1 : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Elle induit une application fibrée  $\gamma^n \xrightarrow{d_1}$

$$e_i \longmapsto e_{2i-1}$$

$\gamma^n$ . Alors la composée  $d_1 \circ f$  et  $\hat{f}$  vérifient la condition du premier cas. Donc  $f \sim d_1 \circ f$ . Posons d'autre part  $d_2 : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$  de sorte que  $d_2 \circ g$  et  $\hat{g}$  vérifient la condition du

$$e_i \longmapsto e_{2i}$$

premier cas et  $d_2 \circ g \sim g$ . Ainsi,  $d_1 \circ f$  et  $d_2 \circ g$  vérifient la condition du premier cas, d'où  $d_1 \circ g \sim d_2 \circ g$ .

Ceci termine la preuve du théorème. ■

La notion de grassmannienne permet de donner un sens précis à la notion de classe caractéristique.

### Corollaire

Un fibré vectoriel  $\xi$  de rang  $n$  sur une base paracompacte détermine une classe d'homotopie d'applications  $B(\xi) \rightarrow Gr_n$ , et réciproquement, une classe d'homotopie de telles applications détermine la classe d'isomorphie de  $\xi$ , de sorte que : deux fibrés  $\xi, \eta$  de rang  $n$  de même base paracompacte sont isomorphes si et seulement si  $\overline{f_\xi}, \overline{f_\eta}$  sont homotopes.

▷ Soit  $f_\xi : \xi \rightarrow \gamma^n$  fibrée, on considère  $\overline{f_\xi}$  l'application induite aux bases. La réciproque est une conséquence du théorème de l'homotopie recouvrante laissée aux soins de la littérature. ■

### Définition. (*Classe caractéristique*)

Soient  $\Lambda$  un groupe abélien. Soient  $\xi$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur une base paracompacte et  $c \in H^i(Gr_n; \Lambda), i \in \mathbb{N}$ . Alors  $c(\xi) := \overline{f_\xi}^* c \in H^i(B; \Lambda)$  pour n'importe quelle application fibrée  $f_\xi : \xi \rightarrow \gamma^n$  en vertu du corollaire précédent est appelée *classe (de cohomologie)*

caractéristique déterminée par  $c$  et  $\xi$ .

**Remarque importante.** Cette correspondance  $\xi \mapsto c(\xi)$  est naturelle relativement aux applications fibrées et réciproquement, toute correspondance  $\xi \mapsto c(\xi) \in H^i(B(\xi; \Lambda))$  naturelle aux applications fibrées est telle que  $c(\xi) = \overline{f_\xi}^* c(\gamma^n)$ , de sorte que la construction précédente est la plus grande généralité possible.

Il est donc on ne peut plus important de calculer l'anneau de cohomologie de  $Gr_n$  sur  $\Lambda$ , car alors **l'anneau constitué de toutes les classes de cohomologie sur  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$ -fibrés de bases paracompactes est canoniquement isomorphe à  $H^*(Gr_n; \Lambda)$ .**

### Exercice 43 (Fibrés de type fini)

Un fibré vectoriel de base  $B$  et de rang  $n$  est dit de type fini s'il existe une application fibre par fibre  $\xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$  pour  $k$  suffisamment grand.

1. Montrer que  $\xi$  est de type fini si et seulement si l'on peut trouver un fibré vectoriel  $\eta$  de base  $B$  tel que  $\xi \oplus \eta$  soit trivial.
2. Supposons que  $B$  soit normal. Montrer que  $\xi$  est de type fini si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert fini  $U_1, \dots, U_r$  tel que la restriction de  $\xi$  sur  $U_i$  soit trivial pour tout  $i \in [1, r]$ .
3. Supposons que  $B$  soit paracompact et sa dimension de recouvrement soit finie. Montrer que  $\xi$  est de type fini.
4. Exemple : montrer que le fibré tautologique  $\gamma^1$  de  $\mathbb{RP}^\infty$  n'est pas de type fini.

#### 7.4.3.2 Une structure cellulaire sur la grassmannienne

On fixe un  $m \in \mathbb{N}$ .

##### Lemme

On écrit  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^m$  avec à chaque fois les dernières coordonnées prises nulles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour un  $n$ -plan  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ , on considère  $0 = \dim(X \cap \mathbb{R}^0) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq \dots \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$ . Alors les nombres consécutifs de cette suite diffèrent d'au plus 1.

▷ Pour chaque  $k \in [1, n]$ , la suite  $0 \longrightarrow X \cap \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow X \cap \mathbb{R}^k \xrightarrow{F} \mathbb{R}$  où l'application  $f$  est donnée par la  $x_k$ -ième coordonnée, est exacte. Ainsi,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^k) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$  où  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(X \cap \mathbb{R}^{k-1})$ . Le rang de  $f$  est au plus 1, d'où le résultat. ■

→ *Notation.* Autrement dit, à un  $n$ -plan fixé de  $\mathbb{R}^m$ , on associe  $m$  entiers ordonnés de la forme par exemple  $(0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, \dots, n-1, n-1, n, n)$ . On note habituellement  $\sigma_1$  la position du premier 1 de cette suite à  $m$  termes,  $\sigma_2$  celle du premier 2, etc., de sorte qu'on ait  $1 < \sigma_1 <$

$\sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_n < m$ . Cette suite de  $n$  sauts successifs est appelée *symbole de Schubert* et est notée  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

### Définition. (*Précellules de la grassmannienne*)

Soit  $\sigma$  un symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ . On définit  $e(\sigma) \in Gr_n(\mathbb{R}^m)$  donnée par  $\{X \mid \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) = i-1 \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ .

*Remarque.* Clairement les  $e(\sigma)$  recouvrent  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  pour  $\sigma$  parcourant l'ensemble des symboles de Schubert associés aux  $n$ -plans de  $\mathbb{R}^m$ . De plus, chaque  $n$ -plan  $X$  est dans précisément un seul des  $e(\sigma)$  par unicité du symbole de Schubert, puisque  $e(\sigma)$  est l'ensemble des  $n$ -plans de  $\mathbb{R}^m$  de symbole de Schubert  $\sigma$ .

### Lemme

Soit  $\sigma$  le symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ . Alors  $e(\sigma)$  est une cellule ouverte de dimension  $d(\sigma) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - i) = \sigma_1 + \dots + \sigma_n - \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Lemme

Soit  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Soit  $\sigma$  le symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $H^k \subseteq \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$  est le demi-espace de  $k$ -ième coordonnée  $> 0$ , alors  $X \in e(\sigma) \iff X$  a une base  $(x_1, \dots, x_n)$  telle que  $x_1 \in H^{\sigma_1}, \dots, x_n \in H^{\sigma_n}$ .

▷ Si  $X$  a une telle base, alors  $x_i \in H^{\sigma_i}$  donc la  $\sigma_i$ -ième coordonnée de  $x_i$  est non nulle. Ainsi, la forme  $X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\sigma_i$ -ième coordonnée est de rang 1, donc  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) > \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}})$  d'où  $X = e(\sigma)$ .

Maintenant, si  $X \in e(\sigma)$ ,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_1}) = 1$ , engendré  $x_1$  et il y a un unique choix de générateur ayant dernière coordonnée 1 ; puis,  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_2}) = 2$  : on a déjà  $x_1$  et il existe un unique  $x_2$  orthogonal à  $x_1$  ayant la coordonnée de rang  $\sigma_2$  égale à 1. On continue par récursion finie. Ainsi, tout  $x_i$  construit est dans  $H^{\sigma_i}$  et ils forment une base de  $X$ . ■

*Remarque.* Matriciellement, cela signifie qu'un  $n$ -plan  $Y$  de  $\mathbb{R}^m$  appartient à  $e(\sigma(Y))$  si et seulement si on peut décrire  $Y$  comme l'espace des lignes d'une matrice  $n \times m$  de la forme

$$\begin{pmatrix} * & \dots & *10 & \dots & 000 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ * & \dots & * * * & \dots & *10 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \dots & & \dots & & \vdots \\ * & \dots & * * * & \dots & * * * & \dots & *10 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où la  $i$ -ième ligne a sa  $\sigma_i$ -ième entrée strictement positive, disons 1, et toutes les entrées suivantes nulles.

**Lemme**

Soit  $\sigma$  un symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ . Tout  $n$ -plan  $X \in e(\sigma)$  a une unique base orthonormale  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $H^{\sigma_1} \times H^{\sigma_n}$ .

▷ La preuve est la même, seulement on remplace la condition sur la dernière coordonnée = 1 par > 0. ■

**Définition. (*Cellules de la grassmannienne*)**

Soit  $\sigma$  un symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \dots \times H^{\sigma_n})$  l'ensemble des repères orthonormés avec  $x_i \in H^{\sigma_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (\overline{H^{\sigma_1}} \times \dots \times \overline{H^{\sigma_n}})$  l'ensemble des repères orthonormés avec  $x_i \in \overline{H^{\sigma_i}}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Lemme. (*Applications caractéristiques de la grassmannienne*)**

Soit  $\sigma$  un symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ .  $\bar{e}'(\sigma)$  est une cellule fermée de dimension  $d(\sigma)$  et d'intérieur la cellule ouverte  $e'(\sigma)$ . De plus, l'application  $\varphi : V_n^0 \rightarrow Gr_n$  envoie  $e'(\sigma)$  homéomorphiquement sur  $e(\sigma)$ .

▷ Par récurrence, pour  $n = 1$ ,  $\bar{e}'(\sigma_1) = \{x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1\sigma_1}, 0, \dots, 0), x_1 x_1 = 1, x_{1\sigma_1} > 0\}$  d'où  $\bar{e}'(\sigma_1) \simeq D^{\sigma_1-1}$ . Maintenant étant donnés  $U, V \in \mathbb{R}^m$ , soit  $T(U, V) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  la rotation qui envoie  $u$  sur  $v$  et fixe tout vecteur orthogonal à ces deux là.  $T$  est continue et conserve le produit scalaire. Si  $u, v \in \mathbb{R}^k$ , alors  $T(u, v)x = x \begin{bmatrix} \mathbb{R}^k \\ \mathbb{R}^{m-k} \end{bmatrix} = x + a$  où  $a \in \mathbb{R}^k$ . Soit  $b_i \in H^{\sigma_i}$  donné par  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  à la  $\sigma_i$ -ième coordonnée pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $(b_1, \dots, b_n) \in e'(\sigma)$ . Pour tout autre  $(x_1, \dots, x_n) \in e'(\sigma)$ , considérons  $T = T(b_n x_n) \cdot \dots \cdot T(b_1 x_1)$ .  $T$  envoie  $b_i$  sur  $x_i$  puisque  $T(b_1, x_1 \dots T(b_{i-1}, x_{i-1}))$  fixe  $b_i$ ,  $T(b_i, x_i)$  envoie  $b_i$  sur  $x_i$  donc  $T(b_{i+1}, x_{i+1}) \dots T(b_n, x_n)$  fixe  $x_i$ . Par récurrence, on sait que  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  est une cellule fermée de dimension  $\sum_i \sigma_i - i$ .

On veut montrer que  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma_{n+1})$  est une cellule fermée de dimension  $\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i - i$ . Soit  $D$  l'ensemble des vecteurs unitaires de  $\overline{H^{\sigma_{n+1}}}$  avec  $b_1 u = \dots = b_n u = 0$ . Seulement  $\sigma_{n+1} - n$  des coordonnées sont strictement positives et la dernière coordonnée est > 0. Ainsi cette cellule est  $\simeq D^{\sigma_{n+1}-n-1}$  la demi-sphère dans un espace de dimension  $\sigma_{n+1} - n$ . C'est donc une cellule fermée.

On définit  $f : \bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \times D \longrightarrow \bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ . Pour montrer que  $f((x_1, \dots, x_n), u) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, T(x_1, \dots, x_n)(u))$   $f((x_1, \dots, x_n, u) \in e'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ , on veut montrer que  $Tu$  est orthogonal à  $x_i$ , ce qui est clair, et  $Tu$  est unitaire et sa dernière coordonnée est > 0. De plus,  $T(b_i) = x_i$  et  $x_i \cdot Tu = T(b_i) \cdot T(u) = b_i \cdot u = 0$  d'où  $Tu \cdot Tu = u \cdot u = 1$  et  $Tu = u$   $[\mathbb{R}^{\sigma_n}]$ . Puisque la dernière coordonnée de  $u$  est > 0, car  $u \in \mathbb{R}^{\sigma_{n+1}}$ , la dernière coordonnée de  $Tu > 0$ . Ainsi  $T, T^{-1}$  sont continues donc  $f$  est un homéomorphisme entre une cellule fermée de dimension  $(\sigma_1 - 1 + \dots + \sigma_{n+1} - n - 1)$  sur  $\bar{e}'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$ . ■

### Proposition. (*Lien précellules-cellules*)

Soit  $\sigma$  un symbole de Schubert associé à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ .  $q|_{\bar{e}'(\sigma)} : e'(\sigma) \rightarrow e(\sigma)$  est un homéomorphisme.

▷ Il suffit de prouver que  $q|_{e(\sigma)}$  envoie des ensembles relativement fermés sur des ensembles relativement fermés.

En vertu du lemme précédent,  $q$  envoie  $e'(\sigma)$  bijection sur  $e(\sigma)$ . D'autre part, si  $(x_1, \dots, x_n)$  appartient à la « frontière »  $\bar{e}'(\sigma) \setminus e'(\sigma)$ , alors le  $n$ -plan  $X = q(x_1, \dots, x_n)$  n'appartient pas à  $e(\sigma)$  puisque l'un des vecteurs  $x_i$  doit être dans la frontière  $\mathbb{R}^{\sigma_i-1}$  du demi-espace  $\overline{H^{\sigma_i}}$ . Ceci implique que  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i-1}) \geq i$ , d'où  $X \notin e(\sigma)$ .

Soit maintenant  $A \subseteq e'(\sigma)$  relativement fermé. Alors  $\overline{A} \cap e'(\sigma) = A$ , où l'adhérence  $\overline{A} \subseteq \bar{e}'(\sigma)$  est compacte, de sorte que  $q(\overline{A})$  est fermée. Il suit que  $q(\overline{A}) \cap e(\sigma) = q(A)$  donc  $q(A) \subseteq e(\sigma)$  est relativement fermée également. ■

### Théorème. (*Structure cellulaire d'Ehresmann sur $Gr_n(\mathbb{R}^m)$ et $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$* )

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les  $\binom{m}{n}$  sous-ensembles  $e(\sigma) \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^m)$  pour  $\sigma$  parcourant l'ensemble des symboles de Schubert associés à un  $n$ -plan de  $\mathbb{R}^m$ , munissent  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  d'une structure de  $CW$ -complexe.

Similairement, en considérant la limite directe sur  $m \rightarrow \infty$ , ces structures donnent une structure de  $CW$ -complexe infini à  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ .

▷ On montre d'abord que tout  $X \in \partial(\sigma)$  appartient à une cellule  $\sigma(\tau)$  de moindre dimension. Puisque  $\bar{e}'(\sigma)$  est compact,  $q(\bar{e}'(\sigma)) = \bar{e}(\sigma)$ , donc tout  $X \in \partial e(\sigma) = \bar{e}(\sigma) - e(\sigma)$  a une base  $(x_1, \dots, x_n)$  appartenant à  $\bar{e}'(\sigma) - e'(\sigma)$ , qui est orthonormale à  $x_i \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$ . Ainsi  $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) \geq i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donc le symbole de Schubert  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  associé à  $X$  satisfait  $\tau_1 \leq \sigma_1, \dots, \tau_n \leq \sigma_n$ . Ainsi, l'un des  $x_i$  doit appartenir à  $\mathbb{R}^{\sigma_i-1}$  de sorte que le  $\tau_i$  correspondant satisfasse  $\tau_i \leq \sigma_i$ . Par suite,  $d(\tau) < d(\sigma)$  ce qui, en vertu du lemme précédent, assure que  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  est un  $CW$ -complexe fini.

La preuve est similaire pour la closure-finiteness de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$ . ■

En particulier, la structure d'Ehresmann induit sur l'espace projectif infini la structure cellulaire canonique.

### Corollaire

$\mathbb{RP}^\infty$  est un  $CW$ -complexe avec une unique  $n$ -cellule  $e(n+1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, la cellule fermée  $\bar{e}(n+1) \subseteq \mathbb{RP}^\infty$  est l'espace fini  $\mathbb{RP}^n$ .

▷ En effet, c'est le cas  $n = 1$  déjà mentionné pour la grassmannienne infinie. ■

**Exercice 44**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Soit  $G$  un groupe abélien. Montrer que pour tout  $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , l'inclusion canonique  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \hookrightarrow Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  induit un isomorphisme  $H^p(Gr_n(\mathbb{R}^\infty)) \xrightarrow{\sim} Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ .

▷ **Éléments de réponse.**

On cherche le maximum des  $i \in \mathbb{N}$  tel que toute cellule  $e_\sigma$  de dimension  $i$  dans  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  est en fait dans  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ , que nous notons  $m$ . On veut donc  $\dim(e_\sigma) \leq m \implies \sigma_n \leq n+k$ .

Si  $\dim(e_\sigma) \leq m$ , alors  $\sigma_n - n \leq m \iff \sigma_n \leq n+m$ . Ainsi, si  $\dim(e_\sigma) \leq k$ , alors  $\sigma_n \leq n+k$ , donc  $\overline{e_\sigma} \subseteq Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ . Ainsi, en degrés  $d \leq k$ , le nombre de  $d$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  égale celui de  $d$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ , donc pour tout  $d < k$ ,  $H^d(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); G) = H^d(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); G)$ .

**Proposition. (*Nombre de cellules de la grassmannienne*)**

Soient  $n, m = n+k, k \in \mathbb{N}$  avec éventuellement  $m = k = \infty$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Le nombre de  $r$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  est le nombre de partitions non ordonnées de l'entier  $r$  en entiers naturels non nuls  $i_1, \dots, i_s$ , i.e.  $i_1 + \dots + i_s = r$ , en au plus  $n$  entiers  $i_j, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , i.e.  $s \leq n$ , et qui satisfont tous  $i_j \leq m - n = k$ .

▷ À chaque symbole de Schubert  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  avec  $d(\sigma) = r$  et  $\sigma_n \leq m$ , il correspond une partition  $i_1, \dots, i_s$  de  $r$  où  $i_1, \dots, i_s$  sont les suites obtenues de  $\sigma_1 - 1, \dots, \sigma_n - n$  en enlevant tout zéro apparaissant au début de la suite. Clairement alors  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq m - n$ . ■

**Corollaire**

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$  avec éventuellement  $m = \infty$ . Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $n \geq r$  et  $m - n \geq r$ , alors le nombre de  $r$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  est le nombre de partitions de l'entier  $r$ . En particulier, si  $n \geq r$ , le nombre de  $r$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  est le nombre de partitions de l'entier  $r$ .

→ *Notation.* On note ici  $I \vdash n$  pour dire que  $I$  est une partition de  $n$ .

**Remarques.** Soient  $n, m = n+k, k \in \mathbb{N}$ .

1. On retrouve que pour tout entier  $r > nk$ , il n'y a pas de  $r$ -cellules dans  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$ , ce qui est normal, car la dimension de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  en tant que variété est  $nk$ . De plus, la dimension de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  en tant que complexe cellulaire est bien  $nk$ , car  $k + \dots + k = nk$  est une partition de  $nk$  en  $n$  entiers inférieurs à  $k$ , mais si  $k > 1$ , cette partition n'est pas la cellule est la grassmannienne qui n'est pas un espace projectif a toujours plus d'une cellule en dimension maximale.
2. La grassmannienne a toujours une unique 0-cellule et une unique arête. Si  $n \geq 2$  et  $m > n+2$ , elle possède exactement deux 2-faces.

### Corollaire

Soient  $n, k, r$  trois entiers naturels. Le nombre de  $r$ -cellules de  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  égale le nombre de  $r$ -cellules de  $Gr_k(\mathbb{R}^{n+k})$ .

▷ Gans  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$ , le nombre de cellules est donné par  $\dim(H^k(-; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ . Remarque :  $C_{cell}^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est de différentielle nulle, et  $C_{cell}^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est un sous-complexe, donc de différentielle nulle également, donc le nombre de cellules dans  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est  $\dim(H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ . Dans ces cas,  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \simeq Gr_k(\mathbb{R}^{n+k})$  par un homéomorphisme. Ils ont donc le même nombre de cellules en dimension  $r$ . ■

### Preuve.

▷ (*Autre méthode*) Les partitions de  $d$  en  $n$  entiers bornés par  $k$  sont en bijection avec les diagrammes de Young à  $d$  carrés, moins de  $k$  colonnes et moins de  $n$  lignes. Il suffit alors d'inverser le diagramme ! ■

### Exercice 45 (Amusons-nous sur la structure cellulaire de la grassmannienne)

1. (*Plongements globaux des grassmanniennes*) Soient  $n < m$  deux entiers naturels. À tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $n$ , on associe  $\mathbb{R}^1 \oplus V \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ , qui est de dimension  $n+1$ . Montrer que ceci définit un plongement  $f : Gr_n(\mathbb{R}^m) \rightarrow Gr_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ .
2. Montrer que  $f$  provient d'une application fibre par fibre  $\varepsilon^1 \oplus \gamma^n(\mathbb{R}^m) \rightarrow \gamma^{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$  où  $\gamma^n(\mathbb{R}^m)$ , respectivement  $\gamma^{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$  est le fibré tautologique de la grassmannienne  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$ , respectivement  $Gr_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$  et  $\varepsilon^1$  est le fibré trivial de rang 1 et de base  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$ .
3. Montrer que, pour tout entier  $r \in \mathbb{N}$ , l'application  $f$  envoie les cellules de dimension  $r$  de  $Gr_n(\mathbb{R}^m)$  sur les cellules de dimension  $r$  de  $Gr_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ .

▷ **Éléments de réponse.**

1. À faire chez soi.
2. Idem.
3. Remarquons qu'on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Gr_n(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{X \mapsto \mathbb{R} \oplus X} & Gr_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1}) \\ \downarrow X \mapsto X^\perp & & \downarrow Y \mapsto Y^\perp \\ Gr_{m-n}(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow[X^\perp \mapsto (\mathbb{R} \oplus X)]{} & Gr_{m-n}(\mathbb{R}^{m+1}) \end{array}$$

et que la relation  $(\mathbb{R} \oplus X) \cap \mathbb{R}^{l+1} = \mathbb{R} \oplus (X \cap \mathbb{R}^l)$  implique que  $\dim((\mathbb{R} \oplus X) \cap \mathbb{R}^{\sigma_i+1}) = \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) + 1 = i+1$  et  $\dim((\mathbb{R} \oplus X) \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i-1} + 1 = i)$ . De plus,  $R \oplus X \in e_\tau$  pour  $1 \leq \tau_1 = 1 < \tau_2 = \sigma_1 + 1 < \dots < \tau_{n+1} = \sigma_n + 1 \leq m+1$ . En fait,  $e_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\tau$  est un homéomorphisme. En termes de partitions :  $\dim(e_\sigma) = (\sigma_1 - 1) + \dots + (\sigma_n - n) = \dim(e_\tau) = (1 - 1) + (\sigma_1 + 1 - 2) + \dots + (\sigma_n + 1 - (n+1)) \dots$  qui correspond donc à la même partition.

**Exercice 46**

Montrer que le nombre de nombres de Stiefel-Whitney distincts d'une  $n$ -variété est le nombre de partitions de  $n$ .

### 7.4.3.3 L'anneau de cohomologie modulo 2 de la grassmannienne infinie $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

**Remarque importante.** (*Homologie de  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$* ) Si l'on travaille sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on a que  $\partial e(\sigma) = 0$  dans  $C_*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty))$ , de sorte que chaque cellule est un cycle, donc pour tout  $i \in I$ ,  $\text{rg}(H_i(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$  est le nombre de cellules  $e(\sigma)$  de dimension  $(\sigma_1 - 1) + \dots + (\sigma_n - 1) = i$ , et de plus,  $\text{rg}(H^i(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$  est le nombre de partitions de  $i$  en  $\sigma_i \leq \dots \leq \sigma_n - n$ .

#### Théorème. (*Anneau de cohomologie de $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$* )

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $h_n : (\mathbb{RP}^\infty)^n \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  l'application classifiante associée au fibré produit  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1 \rightarrow \mathbb{RP}^\infty \times \dots \times \mathbb{RP}^\infty$ . Alors  $h_n^* : H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*((\mathbb{RP}^\infty)^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n]$  est injective où symboliquement  $a_1 = \omega_1(\gamma^n), \dots, a_n = \omega_n(\gamma^n)$  et son image est l'algèbre libre  $\text{Im}(h_n^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ , autrement dit  $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  s'identifie à  $R^\sigma$  le sous-anneau des polynômes symétriques en les  $a_1, \dots, a_n$ .

▷ L'application  $h_n^*$  est injective : soit  $f : B \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  l'application de scindage pour  $\gamma_n \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$  telle que  $f^*\gamma_n = \sum_{i=1}^n L_i$  et  $f^* : H^*(Gr_n^\infty) \rightarrow H^*(B)$  soit injective. Soit alors  $g : B \rightarrow (\mathbb{RP}^\infty)^n$  telle que  $g^*(\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n) \simeq L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ . Alors

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \\ & \searrow g & \uparrow h_n \\ & & (\mathbb{RP}^\infty)^n \end{array}$$

et  $f$  et  $h_n \circ g$  classifient  $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ , donc  $f$  et  $h_n \circ g$  sont homotopes. Ainsi,  $f$  est injective, donc  $h_n$  aussi et regardant

$$\begin{array}{ccc} & (\mathbb{P}^\infty)^n & \\ & \downarrow h_n & \searrow \sigma \\ Gr_n^\infty & \xleftarrow[h_n]{} & (\mathbb{P}^\infty)^n \end{array}$$

qui commute.

Une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  induit une application  $\sigma : \mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbb{P}^\infty \rightarrow \mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbb{P}^\infty$  et  $\tilde{\sigma} : \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n \rightarrow \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  où la commutativité implique que  $h_n^*(H^*(Gr_n^\infty))$  est invariant sous permutation des  $a_1, \dots, a_n$ . Ainsi  $h_n^*(H^*(Gr_n^\infty)) \subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ . ■

**Exercice 47**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $r \in \mathbb{N}$ , identifier explicitement le cocycle correspondant dans  $H^r(Gr_n)$  à la classe de Stiefel-Whitney  $\omega_r(\gamma^n)$ .

**Exercice 48 (Une présentation de l'anneau de cohomologie grassmannien)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'algèbre  $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$  est engendrée par les classes de Stiefel-Whitney  $\omega_1, \dots, \omega_n$  du fibré tautologique  $\gamma^n$  et les classes  $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_k)$  soumises à la seule relation :

$$(1 + \omega_1 + \dots + \omega_n)(1 + \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_k) = 1.$$

Citons quelques applications classiques de la construction grassmannienne.

**Exercice 49 (Classes de Stiefel-Whitney d'un produit tensoriel)**

Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Soient  $\xi, \eta$  des fibrés vectoriels de rang respectivement  $n$  et  $k$ , de même base paracompacte. Après avoir vérifié dans le cas  $n = k = 1$  que  $\omega_1(\xi \otimes \eta) = \omega_1(\xi) + \omega_1(\eta)$ , montrer que  $\omega(\xi \otimes \eta) = p_{n,k}(\omega_1(\xi), \dots, \omega_n(\xi), \omega_1(\eta), \dots, \omega_k(\eta))$  où le polynôme  $p_{n,k}$  de  $n+k$  variables  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_k$  est défini de la façon suivante : si  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont les polynômes symétriques élémentaires des variables  $t_1, \dots, t_n$  et  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_k$  les polynômes symétriques élémentaires des variables  $t'_1, \dots, t'_k$ , alors  $p_{n,k}(\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma'_1, \dots, \sigma'_k) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k (1 + t_i + t'_j)$ .

## ▷ Éléments de réponse.

Montrons le fait proposé à vérifier en préliminaire. Par universalité du fibré de la grassmannienne,  $\xi$  et  $\eta$  de base  $X$  viennent respectivement de deux applications

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{\quad} & (\gamma^1)_1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_\xi} & (\mathbb{RP}^\infty)_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\quad} & (\gamma^1)_2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_\eta} & (\mathbb{RP}^\infty)_2 \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{ccccc} \xi \otimes \eta & \xrightarrow{\quad} & (\gamma^1)_1 \boxtimes (\gamma^1)_2 & & \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f_\xi \times f_\eta} & (\mathbb{RP}^\infty)_1 \times (\mathbb{RP}^\infty)_2 & \xrightarrow{p_2} & (\mathbb{RP}^\infty)_2 \\ & & & p_1 \downarrow & \\ & & & & (\mathbb{RP}^\infty)_1 \end{array}$$

où  $(\gamma^1)_1 \boxtimes (\gamma^1)_2 = p_1^*((\gamma^1)_1) \otimes p_2^*((\gamma^1)_2)$  donnée en tous  $x_1, x_2$  par  $(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1)_{(x_1, x_2)} := (\gamma_1^1)_{x_1} \otimes (\gamma_2^1)_{x_2}$ . Il suffit donc de montrer le résultat pour  $\omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) = \omega_1(\gamma_1^1) \smile 1 + 1 \smile \omega_1(\gamma_2^1)$  en enlevant les parenthèses autour des fibrés universaux.

On définit deux plongements en pointant  $* \in \mathbb{RP}^\infty$  avec  $i_1: (\mathbb{RP}^\infty)_1 \longrightarrow (\mathbb{RP}^\infty)_1 \times (\mathbb{RP}^\infty)_2$  et  $i_2$  en  $x \longmapsto (x, *)$

inversant le sens. On a

$$\begin{array}{ccc} \omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) \in H^1((\mathbb{RP}^\infty)_1 \times (\mathbb{RP}^\infty)_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_1^*} & \omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) \in H^1((\mathbb{RP}^\infty)_1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ \downarrow \wr & \nearrow pr_1 & \\ \omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) \in H^1((\mathbb{RP}^\infty)_1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus H^1((\mathbb{RP}^\infty)_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

mais  $i_1^*(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) = \gamma_1^1 \otimes (\gamma_2^1)^* \simeq \gamma_1^1$  puisque  $(\gamma_2^1)^*$  est trivial de rang 1. Maintenant,  $\bar{i}_1^* \omega_1(\gamma_1^1) \boxtimes \gamma_2^1 = \omega_1(i_1^*(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1)) = \omega_1(\gamma_1^1) = a_1$  générateur de  $H^1((\mathbb{RP}^\infty)_1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Similairement,  $i_2^* \omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) = a_2$  générateur de  $H^1((\mathbb{RP}^\infty)_2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi,  $\omega_1(\gamma_1^1 \boxtimes \gamma_2^1) = a_1 \smile 1 + 1 \smile a_2$ .

Pour conclure à partir de cela,  $(f_\xi, f_\eta)LHS = \omega_1(\xi \otimes \eta)$  et  $(f_\xi, f_\eta)RHS = \omega_1(\xi) + \omega_1(\eta)$ .

Pour passer au cas général, on utiliser le principe de décomposition en fibrés en droites. On écrit  $\xi = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$  dans cette idée,  $\eta = m_1 \oplus \dots \oplus m_k$ . Dans ce cas,  $\omega(\xi \otimes \eta) = \omega((\bigoplus_i l_i) \otimes \bigoplus_j m_j) = w(\bigoplus_{i,j} (l_i \otimes m_j)) = \prod_{i,j} \omega(l_i \otimes m_j) = \prod_{i,j} (1 + \omega_1(l_i) + \omega_1(m_j))$  par le cas simple déjà traité, d'où le résultat puisque  $\omega(\xi) = \prod_i \omega(l_i) = \prod_i (1 + \omega_1(l_i))$  et  $\omega_i(\xi) = \sigma'_j(\omega_1(l_1), \dots, \omega_1(l_n)), \omega_j(\eta) = \sigma_i(\omega_1(m_1), \dots, \omega_1(m_k))$  d'où  $\omega(\xi \otimes \eta) = p_{n,k}(\omega_1(\xi), \dots, \omega_n(\xi), \omega_1(\eta), \dots, \omega_k(\eta))$ .

Pour terminer la preuve, on écrit que  $p$  l'application du principe de décomposition permet d'écrire  $p^*(\xi \otimes \eta)$  satisfait la relation cherchée, et  $p^*$  est un morphisme d'algèbres, donc  $p^*\omega(x \otimes \eta) = p^*(p_{n,k}(\omega_1(\xi), \dots, \omega_n(\xi), \omega_1(\eta), \dots, \omega_k(\eta)))$ , puis par injectivité de  $p^*$ ,  $\xi \otimes \eta$  satisfait la relation cherchée.

### Exercice 50 (Un exercice un peu plus avancé)

Considérons un fibré vectoriel  $\xi$  de base  $B$ , d'espace total  $E$  et de rang  $n$ . On note  $E_0$  l'espace total  $E$  privé de la section nulle. Pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , on pose  $\omega_i(\xi) = \Phi^{-1}Sq^i\varphi(1)$  où, pour tout entier  $k \geq 0$ , l'application  $\Phi : H^k(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est l'isomorphisme de Thom. Soient  $\xi_1, \xi_2$  deux fibrés vectoriels de même base. Montrer que  $\omega(\xi_1 \oplus \xi_2) = \omega(\xi_1) \smile \omega(\xi_2)$ , sans utiliser l'approche axiomatique aux classes de Stiefel-Whitney.

#### ▷ Éléments de réponse.

On a  $\mathbb{R}^\infty \simeq (\mathbb{R}^\infty)(\text{rangs pairs}) \oplus (\mathbb{R}^\infty)(\text{rangs impairs}) \simeq \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty$ , donc on a une application  $p: Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \times Gr_k(\mathbb{R}^\infty) \longrightarrow Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty) = Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty)$ . La fibre homotopique de  $p$

$$(\xi, \eta) \longmapsto \xi \oplus \eta$$

est homotope à  $gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  : en effet,  $[X, Gr_n(\mathbb{R}^\infty \times Gr_k(\mathbb{R}^\infty))] \simeq [X, Gr_n(\mathbb{R}^\infty)] \times [X, Gr_k(\mathbb{R}^\infty)] \simeq \{\xi \rightarrow X \text{ fibré vectoriel de rang } n\}_{/\simeq} \times \{\eta \rightarrow X \text{ fibré vectoriel de rang } n\}_{/\simeq}$  s'envoie par  $(\xi, \eta) \mapsto \xi \oplus \eta$  sur  $[X, Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty)] \simeq \{xi \rightarrow X \text{ fibré vectoriel de rang } n\}_{/\simeq}$  et la fibre de cette application est

$$\{xi \rightarrow X, \eta \rightarrow X \text{ fibrés vectoriels de rang respectifs } n \text{ et } k, \xi \oplus \eta \text{ trivialisable}\}_{/\simeq} \simeq [X, Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})]$$

donc  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \times Gr_k(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty)$  est une suite fibrée, c'est-à-dire homotope à une fibration. On utilise

**Lemme**

$H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est surjective.

▷ De chaque côté,  $H^* = C_{cell}^*$  et toutes les différentielles sont nulles, et  $Gr_n(\mathbb{R}^{n+k})$  est un sous-complexe plein de  $Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$ , donc  $C_{cell}^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow C_{cell}^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . ■

En particulier,  $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \times Gr_k(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est surjective. On peut appliquer Leray-Hirsch au résultat obtenu, de sorte que  $H^*(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty)) \otimes H^*(Gr_k(\mathbb{R}^\infty))$  en tant que  $H^*(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ -modules. En passant au foncteur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{H^*(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$  — de chaque côté, c'est-à-dire en quotientant par  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} H^i(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , on obtient que  $H^*(Gr_n(\mathbb{R}^{n+k}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \frac{H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty)) \otimes H^*(Gr_n(\mathbb{R}^\infty))}{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \simeq \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\omega_1, \dots, \omega_n, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n]}{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+k})}$  avec au dénominateur les générateurs de  $H^*(Gr_{n+k}(\mathbb{R}^\infty); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  où  $\sigma_i = \omega_i(\xi \oplus \eta)$ , d'où  $(1 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{n+k}) = (1 + \omega_1 + \dots + \omega_n)(1 + \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_k)$ , ce qui dit que c'est la seule relation.

#### 7.4.4 Construction des classes de Stiefel-Whitney

##### 7.4.4.1 Théorème de satisfaisabilité des axiomes de Stiefel-Whitney

On renvoie à la définition par les axiomes de Stiefel-Whitney donnée en début de chapitre.

**Propriété. (*Existence des classes de Stiefel-Whitney*)**

Les classes de Stiefel-Whitney existent.

▷ L'idée est de définir les classes de Stiefel-Whitney comme les tirés en arrière de générateurs de  $H^*((\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n]$  donnés par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ , les  $\sigma_i$  étant les fonctions symétriques élémentaires en les  $a_1, \dots, a_n$  induisant les  $\tilde{\sigma}_i$  tels que  $H^*(Gr_n^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n]$ .

Soit  $\xi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Définissons les  $\omega_i(E)$  en commençant par  $\omega_0(E) = 1$ ,  $\omega_{i>n}(E) = 0$  et pour  $\varphi : B \rightarrow Gr_n^\infty$  l'application classifiante,  $\omega_i(E) = f^*(\tilde{\sigma}_i)$  où  $\tilde{\sigma}_i$  est l'application de permutation sur le fibré.

Le premier axiome suit alors automatiquement par construction.

En outre, la naturalité vient du diagramme tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{f_E} & E \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B' & \xrightarrow{f_B} & B \\
 & \searrow \varphi' & \swarrow \varphi \\
 & Gr_n^\infty &
 \end{array}$$

tel que  $\varphi' \sim f_B \circ \varphi$  d'où  $\omega_i(E') = \varphi'^*(\tilde{\sigma}_i) = f_B^*\varphi^*(\tilde{\sigma}_i) = f_B^*\omega_i(E)$ .

Quant à l'axiome de la somme de Whitney, pour  $Gr_n^\infty \times Gr_{n'}^\infty \xrightarrow{f} Gr_{n+n'}^\infty$  et  $h_n : (\mathbb{P}^\infty)^n \rightarrow Gr_n^\infty$  l'application classifiante pour  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^n \times (\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^{n'} & \xrightarrow{\bar{F}} & (\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^{n+n'} \\ h_n \times h_{n'} \downarrow & & \downarrow h_{n+n'} \\ Gr_n^\infty \times Gr_{n'}^\infty & \xrightarrow{F} & Gr_{n+n'}^\infty \end{array}$$

commute à homotopie près,  $F$  prise pour application fibrée, puisque  $\bar{F}^*(\underbrace{\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_i}_{n+n' \text{ fois}}) = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1$ , de sorte que  $F \circ (h_n \times h_{n'})$ ,  $h_{n+n'} \circ \bar{F}$  sont deux applications classifiantes pour  $\gamma_{n+n'} \rightarrow Gr_{n+n'}^\infty$ , donc homotopes. En particulier,  $(h_n \times h_{n'})^* \circ F^*(\tilde{\sigma}_i) = \bar{F}^* \circ h_{n+n'}^*(\tilde{\sigma}_i) = \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n+n'} \prod_{i=1}^k a_{j_i}$  où  $h_{n+n'} : Gr_{n+n'}^\infty \rightarrow (\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^{n+n'}$  et

$$H^*((\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a'_1, \dots, a'_n], H^*((\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)^{n'}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a''_1, \dots, a''_n]) \text{ et } \bar{F}^*(a_i) = \begin{cases} a'_i \text{ pour } i \leq n \\ a''_{i-n} \text{ pour } i \geq n. \end{cases} \quad \text{Ainsi}$$

$\bar{F}^*(\sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n+n'} \prod_{i=1}^k a_{j_i}) = \sum_{s=0}^k \sum_{0 \leq j_1 < \dots < j_s \leq n} \sum_{0 \leq j_{s+1} < \dots < j_k \leq n+n'} \prod_{i=1}^s a'_{j_i} \prod_{l=s+1}^k a''_{j_l} = \sum_{s=0}^k \sigma'_s \smile \sigma''_{i-s}$  où l'on place les primes sur les polynômes élémentaires pour signifier à quels anneaux en  $a$ ,  $a'$  ou  $a''$  ils se rapprotent. Ainsi, pour deux fibrés  $E, E'$  sur  $B$  et  $f^E, f^{E'}, f^{E \oplus E'}$  les applications classifiantes correspondantes, où  $f^{E \oplus E'} : B \rightarrow Gr_{n+n'}^\infty$ , on a  $\omega_i(E \oplus E') = (f^{E \oplus E'})^*(\tilde{\sigma}_i) = (f^E \times f^{E'})^* \tilde{F}^k(\tilde{\sigma}_i) = (f^E \times f^{E'})^* (\sum_{s=0}^k \tilde{\sigma}'_s \times \tilde{\sigma}''_{k-s}) = \sum_{s=0}^k w_s(E) \smile \omega_{i-s}(E')$  de sorte que  $F^*(\tilde{\sigma}_i) = \sum_{s=0}^k \tilde{\sigma}'_s \smile \tilde{\sigma}''_{k-s}$  !

Enfin, l'injection  $i : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$  classifie  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$  de sorte que  $\omega_1(\gamma_1) = i^*(a) = a \neq 0$ . ■

### Propriété. (*Unicité des classes de Stiefel-Whitney*)

Les classes de Stiefel-Whitney sont uniques.

▷ Soient une collection de classes vérifiant les axiomes de Stiefel-Whitney. On veut montrer qu'elles coïncident avec la construction précédente. Il suffit par naturalité de vérifier qu'elles coïncident sur  $\gamma_n \rightarrow Gr_n^\infty$ . Puisque  $h_n : H^*(Gr_n^\infty) \rightarrow H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)$  est injective avec  $h_n$  classifiante pour  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1$ , il suffit de vérifier l'égalité pour les classes de  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ . Par l'axiome du produit de Whitney, il suffit de vérifier ceci sur  $\gamma^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ , qui est un fibré en droites, de telle sorte que seule la classe  $\omega_1$  est à vérifier. Encore  $i : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$  classifie  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ . Supposons qu'on a des classes  $\omega_i, \tilde{\omega}_i$  satisfaisant donc les axiomes où  $\tilde{\omega}_i(\gamma_1) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$ . Alors par normalisation bien sûr  $\tilde{\omega}_i(\gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1) = a = i^*(\tilde{\omega}_i(\gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty)) \neq 0$ , d'où  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1$ , ce qui conclut. ■

### Exercice 51 (*Une information sur le rang des classes de Stiefel-Whitney non nulles*)

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de rang fini. Montrer que si  $\omega(\xi) \neq 1$ , le plus petit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega_n(\xi)$  soit non nul est une puissance de 2.

**INDICATION** Utiliser que l'entier  $\binom{x}{2^r}$  est impair dès que  $x$  est un multiple impair de  $2^r$ .

#### 7.4.4.2 Isomorphisme de Thom

→ *Notation.* (*Éléments nuls d'un fibré*) Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. On note  $E_0$  l'ensemble des éléments non nuls de  $E$  et  $F_0$  l'ensemble des éléments non nuls de la fibre type  $F \simeq \pi^{-1}(b), b \in B$  de sorte que  $F_0 = F \cap E_0$  et  $E_0 = \cup F_0$ .

#### Définition. (*Orientation des fibrés vectoriels*)

Une orientation sur un fibré vectoriel  $\xi$  de rang  $n$  est la donnée d'une orientation en tant qu'espace vectoriel sur chaque fibre de  $\xi$  telle que la trivialisation locale  $(U, h)$  où  $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$  soit un homéomorphisme/difféomorphisme préservant l'orientation, ce qui revient à dire que les fonctions de transition ont déterminants positifs : pour  $h_U, h_V$  avec  $U \cap V \neq \emptyset$  deux ouverts trivialisants,  $h_U^{-1} \circ h_V : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto (x, M_x v)$  est tel que  $\det(M_x) > 0$  en tout  $x$ .

En particulier, étant donnée une orientation, chaque fibre  $F$  a un générateur préféré<sup>a</sup>  $u_F$  de  $H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$ .

<sup>a</sup> Un simplexe linéairement plongé par  $\sigma$  dans un espace  $V^n$  détermine une orientation de  $V$  en prenant  $(\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}v_n})$ . Le plongement  $\sigma$  représente un générateur de  $H_n(V, V_0)$  si  $0 \in \text{Im}(\Delta^n) \implies \sigma(\partial\Delta^n) \subseteq V_0$ , où  $V_0 = V \setminus \{0\}$ . Si  $V$  est orienté, on considère  $\sigma : \Delta^n \rightarrow V^n$  qui induit la même orientation. On appelle alors la classe de  $\Delta^n$  dans  $H_n(V, V_0)$  le *générateur préféré*, souvent noté  $\mu$ . Il lui correspond un générateur de  $H^n(V, V_0)$  noté  $u_V$  et caractérisé par  $\langle u_V, \mu \rangle = +1$ .

#### Fait

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de rang fini. Tout point de la base de  $\xi$  admet un voisinage  $N$  et une classe de cohomologie  $u \in H^n(\pi^{-1}(N), \pi^{-1}(N)_0; \mathbb{Z})$  telle que pour toute fibre  $F$  sur  $N$ , la restriction  $u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$  égale  $u_F$ .

Par condition de compatibilité locale de l'orientation d'un fibré.

Dans la suite, on comprendra si l'on n'oriente pas les fibrés qu'il faut prendre les coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

#### Théorème. (*Théorème d'isomorphisme de Thom*)

Soit  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$  un fibré vectoriel de rang  $n$ , orienté si on se place sur  $\mathbb{Z}$  ou plus généralement un anneau unitaire quelconque. Alors  $H^n(E, E_0)$  contient une unique classe toujours notée  $u$  dite *classe d'orientation* et dont la restriction dite *classe de Thom*  $u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbb{Z})$  est le générateur préféré  $u_F$  de  $H^n(F, F_0)$  pour toute fibre du fibré ; de plus,  $H^j(E) \rightarrow H^{j+n}(E, E_0), y \mapsto y \smile u$  est un isomorphisme pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . En

particulier,  $H^i(E, E_0) = 0$  pour les entiers naturels  $i < n$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^{k+n}(E, E_0)$  est isomorphe à  $H^k(B)$ .

Autrement dit,  $H^*(E, E_0; \mathbb{Z})$  est un  $H^*(E, \mathbb{Z})$ -module libre ayant un générateur  $u$  situé en degré  $n$ .

### Définition. (*Isomorphisme de Thom*)

Soit  $E \xrightarrow{\pi} B$  un fibré vectoriel de rang  $n$ , orienté si on se place sur  $\mathbb{Z}$  ou plus généralement un anneau unitaire quelconque. L'application

$$\begin{aligned}\varphi: \quad H^k(B) &\xrightarrow{\sim} H^{j+n}(E, E_0) \\ \beta &\longmapsto \pi^*(\beta) \cup u\end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , dit *isomorphisme de Thom*.

Le théorème d'isomorphisme de Thom est admis pour l'instant, mais nous le démontrerons à la section prochaine après l'avoir un peu éprouvé en pratique, ce qui est loin d'être mauvais.

### Propriétés. (*Propriétés de l'isomorphisme de Thom et de la classe de Thom*)

1. (*Tiré en arrière de Thom*) Si  $f : \xi \rightarrow \xi'$  est une application fibrée préservant l'orientation, ce qui est automatique sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , alors les classes de Thom vérifient  $f^*u' = u$ .
2. (*Naturalité de l'isomorphisme de Thom*) De plus, sous les mêmes hypothèses,  $\varphi_\xi \circ \bar{f}^* \beta' = f^* \circ \varphi_{\xi'} \beta'$  pour toute  $\beta' \in H^k(B), k \in \mathbb{N}$ .
3. (*Compatibilité avec le cross-produit*)  $u_{\xi \times \xi'} = u_\xi \times u_{\xi'}$ .

▷ Successivement :

1. Puisque  $f^* : H^n(E', E'_0) \rightarrow H^n(E, E_0)$  envoie générateur sur générateur, préserve l'orientation et  $(F, F_0) \simeq f^*(F', F'_0)$ ,  $f^*u'_{|f^*(F', F'_0)}$  est le générateur du théorème d'isomorphisme de Thom.
2. Puisque

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B', \end{array}$$

on a

$$\begin{array}{ccc} H^*(E, E_0) & \xleftarrow{f^*} & H^*(E', E'_0) \\ \varphi_\xi \left( \begin{array}{ccc} \nearrow u \\ H^*(E) & \xleftarrow{f^*} & H^*(E') \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi'^* \end{array} \right) & & \varphi_{\xi'} \left( \begin{array}{ccc} \nearrow u \\ H^*(E') & \xleftarrow{\bar{f}^*} & H^*(B') \\ \uparrow \pi'^* & & \end{array} \right) \\ H^*(B) & \xleftarrow{\bar{f}^*} & H^*(B'). \end{array}$$

3. On a

$$\begin{array}{ccc}
 H^{*-n+m}(E \times E', (E \times E')_0) & \xleftarrow{\sim} & \sum H^i(E, E_0) \otimes H^{*-i}(E', E'_0) \\
 \varphi_{\xi_1 \times \xi_2} \uparrow u_{\xi_1 \times \xi_2} & & u_{\xi_1 \times \xi_2} \uparrow \\
 H^*(E \times E') & \xleftarrow{\sim} & \sum H^i(E) \otimes H^{*-i}(E' \otimes_{\xi_1 \times \varphi_{\xi_2}} E'_0) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^*(B \times B') & \xleftarrow{\sim} & \sum H^i(B) \otimes H^{*-i}
 \end{array}$$

donc  $u_{\xi \times \xi'} \in H^{n+m}(E \times E', (E \times E')_0) = E_0 \times E' \cup E \times E'_0 = \sum_{i=0}^{n+m} H^i(E, E_0) \otimes H^{*-i}(E, E_0) = H^n(E, E_0) \otimes H^m(E', E'_0) \ni u_\xi \otimes u_{\xi'} \text{ puisque si } * < n \text{ le premier terme du tenseur est nul et si } * - i < n, \text{ c'est le second. On regarde } u_\xi \times u_{\xi'}|_{(F^m, F_0^m)}. \text{ Comme } F^{n+m} \simeq F^n \times F^m \text{ par un difféomorphisme préservant l'orientation, } u_\xi \times u_{\xi'}|_{(F^{n+m}, F_0^{n+m})} = 1 \text{ soit } (u_\xi \times u_{\xi'})(\Delta^{n+m}) = (u_\xi \Delta^n) \times u_{\xi'}(\Delta^m) = 1 \text{ puis } \varphi_{\xi \times \xi'}(a \times b) = \varphi_\xi(a) \times \varphi_{\xi'}(b). \blacksquare$

#### 7.4.4.3 Carrés de Steenrod

##### Définition. (*Carrés de Steenrod*)

Pour toute paire topologique  $(X, Y)$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le  $i$ -ième carré de Steenrod associé à  $(X, Y)$  est la donnée d'un morphisme en tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $Sq^i : H^n(X, Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

Sans autre précision, les *carrés de Steenrod (absolus)* sur un espace  $X$  sont les carrés sur  $(X, \emptyset)$ .

##### Définition. (*Carré de Steenrod total*)

Le *carré de Steenrod total* au rang  $n \in \mathbb{N}$  d'une paire topologique  $(X, Y)$  est défini par  $Sq = id + Sq^1 + Sq^2 + \dots + Sq^n$  sur  $H^n(X, Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

##### Propriétés. (*Axiomes des carrés de Steenrod*)

Soit  $(X, Y)$  une paire topologique. Soit  $i \in \mathbb{N}$ .

1. Les carrés de Steenrod sont additifs.
2. (*Naturalité des carrés de Steenrod*) Pour toute application continue de paires  $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ , pour toute classe de cohomologie  $\alpha$ ,  $Sq^i(f^*\alpha) = f^*(Sq^i(\alpha))$ .
3. Si  $\alpha \in H^n(X, Y)$ ,  $Sq^0(\alpha) = \alpha$ ,  $Sq^n(\alpha) = \alpha \smile \alpha$  et  $Sq^i(\alpha) = 0$  dès que  $i > n$ .
4. (*Formule de Cartan*) Pour toutes classes  $\alpha, \beta$  de cohomologie relative de  $(X, Y)$ ,

$$Sq^i(\alpha \smile \beta) = \sum_{j=0}^i Sq^j(\alpha) \smile Sq^{i-j}(\beta).$$

En termes de carrés de Steenrod totaux, ceci se récrit  $Sq(a \smile b) = Sq(a) \smile Sq(b)$ .

**Exercice 52** (*Carré de Steenrod d'un cross-produit*)

Montrer que pour toutes classes de cohomologie  $a, b$  d'une paire topologique,  $Sq(a \times b) = Sq(a) \times Sq(b)$ .

**Théorème****Admis**

Les carrés de Steenrod existent toujours.

**Exercice 53** (*Petite formule de Wu*)

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de rang fini. Soient  $m, k$  deux entiers naturels. Montrer que

$$Sq^k(\omega_n(\xi)) = \omega_k \omega_m + \binom{k-m}{1} \omega_{k-1} \omega_{m+1} + \dots + \binom{k-m}{k} \omega_0 \omega_{m+k}.$$

On a alors une autre construction des classes de Stiefel-Whitney :

**Définition.** (*Classes de Stiefel-Whitney en termes de carrés de Steenrod*)

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de rang fini et de base  $B$ . On note  $\varphi$  l'isomorphisme de Thom. Alors les classes de Stiefel-Whitney sont définies pour tout  $i \in \mathbb{N}$  par l'*identité de Thom* :

$$\omega_i(\xi) = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1)$$

où  $1 \in H^0(B)$ .

Autrement dit,  $\omega_i(\xi)$  est l'unique classe de cohomologie dans  $H^i(B)$  telle que  $\varphi(\omega_i(\xi)) = \pi^* \omega_i(\xi) \smile u$  égale  $Sq^i \varphi(1) = Sq^i(u)$ .

De plus,  $\omega(\xi) = \varphi^{-1} Sq \varphi(1)$ .

▷ Les propriétés des carrés de Steenrod et la naturalité de l'isomorphisme de Thom, impliquent les axiomes des classes de Stiefel-Whitney, d'où l'égalité par unicité. ■

**Remarque importante.** Tout ceci tient encore sur  $\mathbb{Z}$ , et ainsi pour tout anneau unitaire, pour les fibrés orientés.

**7.4.4.4 Classes d'Euler****Définition.** (*Classe d'Euler*)

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel orienté de rang  $n$ . L'inclusion de paires  $i : (E, \emptyset) \hookrightarrow (E, E_0)$  induit en cohomologie un morphisme de restriction  $H^*(E, E_0) \xrightarrow{i^*} H^*(E), y \mapsto y|_E$ . La *classe d'Euler*  $e(\xi)$  est donnée par  $(\pi^*)^{-1} i^*(u)$  où  $\pi^* : H^*(B) \xrightarrow{\sim} H^*(E)$  est l'isomorphisme canonique, *i.e.*  $e(\xi)$  est la classe dans  $H^n(B)$  correspondant par  $\pi^*$  à  $u|_E \in H^n(E)$ .

**Propriété. (Naturalité des classes d'Euler)**

Si  $f : \xi \rightarrow \xi'$  est une application fibrée entre fibrés vectoriels orientés qui préserve l'orientation alors  $\bar{f}^* e(\xi') = e(\xi)$ .

▷ Un double carré commutatif, comme d'habitude. ■

**Propriété. (Classe d'Euler d'un fibré trivial)**

Si  $\xi$  est trivial, alors  $e(\xi) = 0$ .

▷ En effet,

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \{\ast\} \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & \{\ast\} \end{array}$$

est une application fibrée et  $H^{>0}(\{\ast\}) = 0$ . Il suffit alors d'appliquer la propriété précédente. ■

**Propriété. (Classe d'Euler de l'orientation inverse)**

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel. Alors  $e(-\xi) = -e(\xi)$ .

▷ La preuve est immédiate. ■

**Propriété. (Classe d'Euler d'un fibré impair)**

Si  $\xi$  est de rang impair,  $e(\xi) = -e(\xi)$ , donc  $e(\xi)$  est de 2-torsion.

▷ Il existe une application fibrée sur l'identité renversant l'orientation donnée par  $(x, v) \mapsto (x, -v)$  puis

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{-} & \xi \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

permet de conclure. ■

**Propriété. (Classe d'Euler et classe de Stiefel-Whitney)**

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel orienté de rang  $n$  et de base  $B$ . Le morphisme naturel  $H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  par réduction des coefficients envoie  $e(\xi)$  sur  $\omega_n(\xi)$ .

▷  $e(\xi) = \varphi^{-1}(u \smile u)$ , car  $e(\xi) \in H^n(B) \xrightarrow{\pi^*} H^n(E) \xrightarrow{\sim u} H^{2n}(E, E_0), e(\xi) \mapsto u|_{H^*(E)} \mapsto u \smile u$ . Sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $u \smile u = Sq^n(u)$  puis  $e(\xi) = \varphi^{-1}Sq^n(\varphi(1)) = \omega^n(\xi)$ . ■

**Propriété. (*Cross-produit de classes d'Euler*)**

Soient  $\xi, \xi'$  deux fibrés vectoriels orientés. Alors  $e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi')$ .

▷ On sait que  $u_{\xi \times \xi'} = u_\xi \times u_{\xi'}$ . On écrit :

$$\begin{array}{ccc} H^{n+m}(E \times E', (E \times E')_0) & \xleftarrow{\sim} & H^n(E, E_0) \otimes H^*(E', E'_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{m+n}(E \times E') & \longleftarrow & H^n(E) \otimes H^m(E') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{m+n}(B \times B') & \longleftarrow & H^n(B) \otimes H^m(B'). \end{array}$$

D'où la formule. ■

**Propriété. (*Somme de Whitney de classes d'Euler*)**

Soient  $\xi, \xi'$  deux fibrés vectoriels orientés. Alors  $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \smile e(\xi')$ .

▷ On a  $\xi \oplus \xi' = \Delta^*(\xi \times \xi')$  puis  $e(\xi \oplus \xi') = \Delta^*(e(\xi \times \xi')) = \Delta^*(e(\xi) \otimes e(\xi')) = e(\xi) \smile e(\xi')$ . ■



Par rapport à l'équation  $\omega(\xi \oplus \xi') = \omega(\xi)\omega(\xi')$  qui se résout facilement, puisqu'on a un groupe multiplicatif selon une propriété déjà démontrée, l'équation correspondante des classes d'Euler ne peut se résoudre aisément a priori, puisque  $e(\xi)$  a des chances d'être nulle ou un diviseur de zéro.

**Remarques.**

1. Ainsi, si  $2e(\xi) \neq 0$ , alors  $\xi$  ne peut se scinder comme la somme de deux fibrés de dimensions impaires.

Par conséquent, si le fibré tangent d'une variété lisse est orienté et  $e(\tau) \neq 0$ , alors  $\tau$  n'a pas de champ de plans de dimension impaire.

En effet, si le sous-fibré  $\xi$  de rang impair était orientable, la classe d'Euler  $e(\tau) = e(\xi)e(\xi^\perp)$  est un élément d'ordre 2 dans le groupe...  $H^n(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . Le cas non orientable s'y ramène grâce au revêtement double d'orientation.

2. Si  $\xi$  est un fibré orienté avec une section nulle part nulle, alors  $e(\xi) = 0$ .

En effet, dans le cas simple euclidien ladite section donne un sous-fibré en droites trivial  $\xi = l \oplus l^\perp$  d'où  $e(\xi) = e(l) \smile e(l^\perp)$  où  $e(l) = 0$ .

Dans le cas général, on peut raisonner comme suit : si  $s : B \rightarrow E_0$  est une section, la composée  $B \xrightarrow{s} E_0 \subseteq E \xrightarrow{\pi} B$  est l'identité de  $B$ , donc  $H^n(B) \xrightarrow{\pi^*} H^n(E) \rightarrow H^n(E_0) \xrightarrow{s^*} H^n(B)$  est l'identité de  $H^n(B)$ . Par définition,  $\pi^*$  envoie  $e(\xi)$  sur la restriction  $u|_E$ . Ainsi, les deux premiers morphismes de cette composée envoient  $e(\xi)$  à la restriction  $u|_{E|_{E_0}}$ , qui est nulle puisque  $H^n(E, E_0) \rightarrow H^n(E) \rightarrow H^n(E_0)$  est nulle. En appliquant  $s^*$ ,  $e(\xi) = s^*(0) = 0$ .

### Exemples. (Classes d'Euler)

1. (Classe d'Euler du fibré de Möbius) Calculons  $e(\gamma^1 \rightarrow \mathbb{P}^1)$  sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On a  $H^1(\gamma^1, \gamma_0^1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni u$ . En notant  $\mathbb{M}$  le ruban de Möbius,  $(\gamma^1, \gamma_0^1) \sim (\mathbb{M}, \partial M) = (\mathbb{P}^2 \setminus \overset{\circ}{D^2}, S^1)$ . Alors  $H^{1,2}(M, \partial M) \xrightarrow{\sim} H^{1,2}(M/\partial M) = \mathbb{Z}[a]/a^3$ . Or  $e = \varphi^{-1}(u, u)$  d'où  $e(\gamma^1) = a$ .
2. (Classes d'Euler des fibrés universels) On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & u & \curvearrowleft & H^1(\mathbb{M}, \partial \mathbb{M}) & \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2) \\ & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \\ a & \leftarrow & H(\mathbb{P}^2) & & \end{array}$$

Donc  $e(\gamma^1) \rightarrow \mathbb{P}^1$  est générateur.  $e(\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^1)$  comprenant  $n$  termes où  $a_1 \dots a_n = \sigma_n$  d'où  $e(\gamma^n) = \omega_n(\gamma^n \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^n)) = \tilde{\sigma}_n$ .

On considère  $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2, [x_0, x_1] \mapsto [x_0, x_1, x_2]$  et  $\gamma^1$  d'ouverts trivialisants  $\mathcal{U} = \{x_0 \neq 0 \text{ OU } x_1 \neq 0\}$  difféomorphes à  $\mathbb{P}^1$ . On a  $\gamma^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  en associant  $[x_0, x_1], t.(x_0, x_1)$ .

Le fibré normal sur  $\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2$  est  $\gamma^1$  (sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ ), voisinage de  $\mathbb{P}^1$  dans  $\mathbb{P}^2$ . Le complémentaire de ce voisinage est un disque. Ainsi  $\gamma^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  est homotope à une ruban de Möbius, et attacher un disque donne  $\mathbb{RP}^2$ .  $\mathbb{P}^2$  a pour cellules  $e_0, e_1, e_2$ .  $H^{*>0}(\gamma^1, \gamma_0^1) \simeq H^{*>0}(U, \partial U) \simeq H^{*>0}(\mathbb{P}^2)$  d'où  $H^1(\gamma^1, \gamma_0^1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[a]$ ,  $H^2(\gamma^1, \gamma_0^1) = \mathbb{Z}a \cup a$  sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $\mathbb{F}_2$ , c'est  $\mathbb{Z}[a]$ .

$H^4(\gamma^1, \gamma_0^1) = \mathbb{Z}a \cup a$ . Posons  $u = f^*a$ . On a

$$\begin{array}{ccccc} u & & H^1(\gamma^1, \gamma_0^1) & \xrightarrow{f \simeq} & H^1(\mathbb{RP}^2) \\ g \downarrow & & \downarrow i^* & & \nearrow incl \\ & & H^1(\gamma^1) & & \\ & & \downarrow H^* \simeq & & \\ e & & H^1(\mathbb{P}^1) & & \end{array}$$

et  $g^*u = a = e(\gamma^1)$ . Ainsi la classe d'Euler à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  de  $\gamma^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$  est  $\omega_1(\gamma^1)$  et celle dans  $\mathbb{Z}$  de  $\gamma^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$  et  $c_1(\gamma^1)$ .

Pour tout fibré complexe muni de l'orientation canonique,  $e(\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^1 \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n) = e(\gamma^1) \cup \dots \cup e(\gamma^1) = a_1 \dots a_n = \sigma_n(a_1 \dots a_n)$ . Prenons l'application classifiante pour  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1$ .

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1 & \xrightarrow{f} & \gamma^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{P}^\infty)^n & \xrightarrow{\bar{f}} & Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

Alors  $e(f * \gamma^n) = e(\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1) = \sigma_n$  d'où  $e(\gamma^n) = \tilde{\sigma}_n = \omega_n(\gamma_n) = c_n(\gamma_n)$ . Ainsi pour tout fibré  $\xi$ , on retrouve que  $e(\xi) = \omega_n(\xi)$  pour  $\xi$  réel et  $e(\xi) = c_n(\xi)$  la classe de Chern (*définie plus tard*) pour  $x$  complexe (sur  $\mathbb{R}$ , on prend des coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , pour  $\mathbb{C}$ , dans  $\mathbb{Z}$ ).

**Exercice 54** (*Classe d'Euler du double du fibré universel*)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Rappeler pourquoi  $\gamma^n \oplus \gamma^n$  est orientable, puis montrer que  $e(\gamma^n \oplus \gamma^n) \neq 0$  mais que si  $n$  est pair,  $2e(\gamma^n \oplus \gamma^n) = 0$ .

**7.4.5 Preuve de l'isomorphisme de Thom**

On considère  $\mathbb{R}_0^n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \neq 0\}$ . Alors  $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . De plus,  $e^1$  est le générateur de  $H^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) = 0 = H^2(D)$  par dualité de Poincaré, et puisque  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) \simeq (D^2, S^1)$ .

Pour tout  $B$ ,  $H^j(B) \rightarrow H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_0), y \mapsto y \times e^1$  par un isomorphisme. Par la formule de Künneth,  $H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_0) \simeq \sum_i H^i(B) \otimes H^{j+1-i}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0) = H^j(B) \otimes \mathbb{Z}$ , car le second terme est non nul seulement pour  $i = j$  et  $j + 1 - i = 1$ .

Soit  $B' \subseteq B$  un ouvert. Alors  $H^j(B, B') \rightarrow H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B' \times \mathbb{R} \cup B \times \mathbb{R}_0), y \mapsto y \times e^1$  est un isomorphisme encore par la formule de Künneth. Par suite, la composition  $n$ -itéérée :  $y \mapsto y \times e^1 \times y \times e^1 \times e^1 \mapsto \dots \mapsto y \times e^1 \times \dots \times e^1$  est un isomorphisme de  $H^j(B, B')$  sur  $H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B^1 \times \mathbb{R}^n \cup B \times \mathbb{R}_0^n)$ . En posant  $e^1 \times \dots \times e^1 = e^n \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^n)$ , on a :

**Lemme**

Pour tout espace topologique  $B$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} H^j(B) &\longrightarrow H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}_0^n) \\ y &\longmapsto y \times e^n \end{aligned}$$

est un isomorphisme si  $\xi$  est un fibré vectoriel de rang  $n$ , orienté dans le cas de l'anneau  $\mathbb{Z}$ .

**Théorème**

Il existe un unique  $u \in H^n(E, E_0^*, \Lambda)$  qui se rétracte sur  $(F, F_0)$ , est un générateur et tel que  $H^j(E) \xrightarrow{\sim u} H^{j+n}(E, E_0)$  est un isomorphisme.

▷ Dans le premier cas,  $\xi$  est trivial, i.e.  $\xi \simeq B \times \mathbb{R}^n$ . Alors  $H^n(E, E_0) \simeq H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^0) \simeq H^0(B) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}$  ou  $\Lambda$ . Posons  $U = 1 \times e^n$ . On peut voir

$$\begin{array}{ccc} 1 \times e^n \in H^n(F \times *, F_0 \times *) & (F, F_0) \longrightarrow (E, E_0) & \\ \uparrow 1 & \downarrow * \longrightarrow B & \uparrow 1 \times e^n \\ \end{array}$$

où  $H^0(*) = H^0(B)$ . Donc  $u|_{(F, F_0)}$  est le générateur. Les éléments de  $H^j(E) = H^j(B \times \mathbb{R}^n)$  sont de la forme  $y \times 1$  par le théorème de Künneth. Soit  $y \in H^j(B)$ . Considérons  $H^j(E) \xrightarrow{\sim u} H^{j+n}(E, E_0), y \times 1 \mapsto (y \times 1) \smile u = 1 \times e^n = y \times e^n$ . On sait que la correspondance  $y \rightarrow y \times 1 \mapsto y \times e^n$  est un isomorphisme par le lemme.

Dans le second cas, supposons que  $B = B' \cup B''$  sont deux ouverts et supposons que le théorème tienne pour  $\xi_{|B'}$ ,  $\xi_{|B''}$  et  $\xi_{|B' \cap B''}$ . Notons  $E' = \pi^{-1}(B')$ ,  $E'' = \pi^{-1}(B'')$ ,  $E^\cap = \pi^{-1}(B' \cap B'')$ . Alors  $E' \cup E'' = E$ ,  $E' \cap E'' = E^\cap$  donc  $\underbrace{H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap)}_{= 0 \text{ par hypothèse}} \rightarrow H^n(E, E_0) \xrightarrow{j^*} H^n(E', E_0') \oplus H^n(E'', E_0'') \xrightarrow{i'^* - i''^* n} (E^\cap, E_0^\cap) \rightarrow 0$

où  $j^* : u \mapsto (u', u'')$ . Par hypothèse, il existe  $u' \in H^n(E', E_0')$  qui se restreint aux générateurs sur les fibres d'où  $i'^* u' = u^n \in H^*(E^n, E_0^n)$  et similairement  $i''^* u'' = u^\cap$  d'où  $(u', u'') \mapsto 0$  par  $i'^* - i''^*$ , donc il existe  $u \in H^n(E, E_0)$  tel que  $j^* u = (u', u'')$ . Par hypothèse, le théorème tient pour  $E^\cap$ , donc il existe un isomorphisme  $H^j(E^\cap) \xrightarrow{\sim} H^{j+n}(E^n, E_0^n)$  donc si  $j < 0$ ,  $H^{j+n}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ , d'où  $H^{n-1}(E^\cap, E_0^\cap) = 0$ , donc  $u$  est unique dans  $H^n(E, E_0)$ .

Maintenant, par Mayer-Vietoris,

$$\begin{array}{ccccc} H^{j-1}(E^\cap) & \longrightarrow & H^j(E) & \longrightarrow & H^j(E') \oplus H^j(E'') \\ \downarrow \sim u^\cap & & \downarrow \sim u & & \downarrow \sim(u', u'') \\ H^{j-1+n}(E^\cap, E_0^\cap) & \longrightarrow & H^{j+n}(E, E_0) & \longrightarrow & H^{j+n}(E', E_0') \oplus H^{j+n}(E'', E_0'') \end{array}$$

et puisque les flèches latérales sont des isomorphismes,  $\sim u$  est un isomorphisme.

Dans le troisième cas,  $B$  est compact. On a un recouvrement fini  $U_1, \dots, U_k$  tel que le théorème tienne pour chaque  $\xi_{|U_i}$  et chaque intersection, par exemple si  $\xi_{|U_i} \simeq U_i \times \mathbb{R}^n$ . Par le cas précédent, le théorème tient encore sur  $U_1 \cup U_2$  et chaque intersection, et par récurrence finie, c'est vrai sur  $B$ .

Dans le cas général, on sait que le théorème est valable sur tout compact de  $B$ . On note  $\mathcal{K}$  l'ensemble des compacts de  $B$ . On écrit  $\varinjlim_{C \in \mathcal{K}} H_j(C) = B$  pour n'importe quels coefficients et on considère également  $\varprojlim_{C \in \mathcal{K}} H^j(C)$ . Pour une homologie à coefficients dans un corps  $\mathbb{F}$ ,  $\text{Hom}(\varinjlim H_k(C)) = \varprojlim \text{Hom}(H_k(C))$ , car  $\text{Hom}(H_j(C), \mathbb{F}) \simeq H^j(C, \mathbb{F})$  et  $H^j(B) = \text{Hom}(H_k(B)) = \text{Hom}(\varinjlim H_k(C)) = \varprojlim \text{Hom}(H_k(C))$ . D'autre part,  $H^j(E, E_0, \mathbb{F}) = \varprojlim H^j(E_{|C}, E_{0|C})$  car chaque terme de cette limite contient un unique  $u_c$  qui se restreint à un générateur sur la fibre, de même à gauche. Pour montrer que  $\sim u$  est un isomorphisme, on fait commuter

$$\begin{array}{ccc} H^j(E) & \xrightarrow{\sim u} & H^{j+n}(E, E_0) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \varprojlim H^j(E_{|C}) & \xrightarrow{\sim u} & \varprojlim H^{j+n}(E_{|C}, E_{0|C}) \end{array}$$

où les flèches horizontales et celle du bas est un isomorphisme, donc  $\sim u$  est un isomorphisme.

Jusqu'ici on a montré que le théorème d'isomorphisme de Thom était valable pour un compact  $B$  en tout coefficient et tout paracompact  $B$  en coefficients dans un corps. On voudrait avoir les coefficients dans  $\mathbb{Z}$  dans le dernier cas également. Par le théorème des coefficients universels,

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X); G) \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_q(X); G) \rightarrow 0$$

donc si le foncteur d'extension s'annule,  $H^q(X; G) \simeq \text{Hom}(H_q(X); G)$  donc si  $H_q(X) = 0$ ,  $H^q(X; G) \simeq \text{Hom}(H_q(X); G)$ . On va montrer que  $H_{n-1}(E, E_0) = 0$ . En supposant cela, comme précédemment on a  $H^n(E, E_0) \simeq \varprojlim H^n(E_{|C}, E_{0|C})$  donc il existe  $u \in H^n(E, E_0)$  qui se restreint à un générateur des fibres.

On veut montrer que  $\frown u$  est un isomorphisme.

**Lemme. (*Un lemme classique d'algèbre homologique*)**

Soit  $f : K \rightarrow K'$  un morphisme de complexes de chaînes de  $\mathbb{Z}$ -modules de degré  $d$ , i.e. une suite de morphismes  $K_i \rightarrow K'_{i+d}$  satisfaisant  $\partial' \circ f = (-1)^d f \circ \partial$ . Si  $f$  induit un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans tout corps, alors il induit des isomorphismes en homologie et en cohomologie pour tout anneau unitaire.

▷ On considère le cône  $K^f$  donnée par  $K_i^f = K_{i-d-1} \oplus K'_i$  et  $\partial^f(k, k') = ((-1)^{d+1} \partial k, f(k) + \partial' k')$ , qui est bien un complexe de chaînes par le cours.  $K'$  apparaît dans

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K^f \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow K'_i \xrightarrow{i} K_{i-d-1} \oplus K'_i \xrightarrow{p} K_{i-d-1} \longrightarrow 0$$

où  $i : b \mapsto (0, b)$  et  $p : (a, b) \mapsto a$ . Alors  $i \circ \partial' = (0, \partial' b) = \partial^f \circ i = d^f(0, b) = \partial' b$  puisque  $f(0) = 0$ , et  $p \circ \partial^f(a, b) = (-1)^{d+1} \partial a$  et  $\partial p(a, b) = \partial a$ , donc ces suites sont exactes courtes. Elles donnent naissance à une suite exacte longue  $\partial^f : H_{i-d-1}(K) \xrightarrow{f} H_{i-1}(K')$  donnée par  $f$ . de la forme  $H_i(K') \xrightarrow{i} H_i(K^f) \xrightarrow{p} H_{i-d-1}(K) \xrightarrow{f} H_{i-1}(K')$ . Ici  $\partial^f(a, b) = 0$ , car  $\partial a = 0$  et  $f(a) + \partial b = 0$ ,  $\partial a = 0$  comme  $f(a) = \partial b$  et  $f(a) = \partial b = 0$ . Ainsi  $H_*(K^f) = 0$  si et seulement si  $f : H_*(K) \rightarrow H_k(K')$  est un isomorphisme sur  $\mathbb{Z}$ . Dans notre cas,  $f$  induit un isomorphisme sur tout corps par hypothèse du théorème, d'où  $f : H^*(K') \xrightarrow{\sim} H^*(K')$ , donc  $H^*(K^f) = 0$  pour tout corps. Ainsi  $0 = H^n(K^f, \Lambda) \simeq \text{Hom}(H_n(K^f \otimes \Lambda), \Lambda)$  d'où  $H_n(K^f \otimes \Lambda) = 0$ , autrement il y aurait un élément non trivial dans  $\text{Hom}(H_n(K^f \otimes \Lambda), \Lambda)$ . En particulier,  $H_n(K^f \otimes R) = 0$ , donc  $H_n(K^f; \mathbb{Z})$  est au plus de torsion. Pour montrer qu'il n'y a pas de torsion, il suffit de montrer qu'il n'y a pas de  $p$ -torsion pour tout premier  $p$ . Or  $0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{q-1}(X); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(K^f, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_q(X; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$  et comme les deux premiers termes sont nuls, il n'y a pas de  $p$  torsion. Ainsi  $H_n(K^f; \mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $H_n(K^f; \Lambda) = 0$  pour tout anneau associatif unitaire  $\Lambda$ . Ainsi  $H^n(K^f; \mathbb{Z}) = 0$ , donc  $f$  induit  $H^*(K') \xrightarrow{\sim} H^m(K)$  et  $H_*(K) \xrightarrow{\sim} H_k(K')$ . ■

**Corollaire**

$H_{n+i}(E, E_0) \longrightarrow H_i(E)$  est un isomorphisme sur  $\mathbb{Z}$  et  $\Lambda$ .

$$\eta \longmapsto u \frown \eta$$

▷ Choisissons un cocycle singulier représentant  $u$ , disons  $z \in \mathbb{Z}^n(E, E_0)$ . Alors  $c_{n+i}(E, E_0) \rightarrow C_i(E), \gamma \mapsto z \frown \gamma$  satisfait  $\partial(z \frown \gamma) = (-1)^n z \frown \partial \gamma$  donc  $z \frown : C_*(E, E_0) \rightarrow C_*(E)$  est un morphisme de complexes de degrés  $-n$ . On sait que  $\langle c, z \frown_g am \rangle = \langle c \frown z, \gamma \rangle$ , donc l'application induite sur les cochaînes est  $(z \frown)^\# : C^*(E) \rightarrow C^*(E, E^0), c \mapsto c \frown z$ . On sait que cette application induit des isomorphismes  $H^*(E) \xrightarrow{\frown u} H^{*+n}(E, E^0)$  sur tout corps. Par le lemme précédent, on peut conclure. ■

On peut terminer la fameuse preuve du théorème d'isomorphisme.

Ceci termine la preuve en remarquant que  $H_{n-1}(E, E_0; \mathbb{Z}) = 0$ . Si la base est compacte, par le corollaires précédents on sait que  $H_{n-1}(E, E_0; \mathbb{Z}) \simeq H_{n-1}(E) = 0$ . Dans le cas général, on a  $H_{n-1}(E, E_0; \mathbb{Z}) = \varinjlim H_{n-1}(E|_C, E_0|_C) = 0$ . ■

## 7.4.6 Obstructions

### 7.4.6.1 Suite de Gysin

### 7.4.6.2 Fibré universels orientés

### 7.4.6.3 L'obstruction due à la classe d'Euler

## 7.4.7 Applications des classes de Stiefel-Whitney

### 7.4.7.1 Calculs sur le fibré normal

**Corollaire.** (*Anneau de cohomologie du fibré normal*)

Soit  $\Lambda$  un anneau quelconque. On suppose qu'on a  $M$  une sous-variété lisse fermée plongée dans  $A$  une variété riemannienne lisse. Alors

$$H^*(E, E_0; \Lambda) \simeq H^*(A, A \setminus M; \Lambda)$$

où  $E = E(\nu)$ .

▷ Remarquons que  $M$  est fermée dans  $A$ . On utilise le théorème du voisinage tubulaire. Soit  $U$  un voisinage tubulaire de  $M$  dans  $A$ . Par le théorème précédent,  $H^*(E, E_0; \Lambda) \simeq H^*(E(\varepsilon), E(\varepsilon)_0; \Lambda) \simeq H^*(U, U \setminus M; \Lambda) \simeq H^*(A, A \setminus M; \Lambda)$  par excision induite par l'isomorphisme induit par le plongement exponentiel. ■

### Remarques.

1. Par le théorème d'isomorphisme de Thom, il existe un unique classe  $u \in H^k(E, E_0)$ . Si  $TA$  et  $TM$  sont orientés, alors ceci induit une orientation sur  $\nu$  par  $TA|_M \simeq TM \oplus \nu \rightarrow M$ . On obtient alors une classe  $u' \in H^k(A, A \setminus M)$  qui est l'image de  $u$  par l'isomorphisme précédent.
2. Cette classe ne dépend même pas de la métrique, puisque deux métriques  $g_1, g_2$  sur  $A$  peuvent être connectées via  $tg_1 + (1-t)g_2$ , ce qui donne lieu à une homotopie entre les isomorphismes exponentiels correspondants.

**Théorème**

Si une variété fermée  $M$  se plonge dans une variété  $A$ , alors les inclusion et restriction

$$M \hookrightarrow A \rightarrow (A, A \setminus M)$$

induisent des morphismes en cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} H^k(A, A \setminus M) & \rightarrow & H^k(A) \rightarrow H^k(M) \\ u' \mapsto u'' & \mapsto & \begin{cases} \omega(\nu) \text{ sur } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ e(\nu) \text{ si tout est orienté.} \end{cases} \end{array}$$

**VOC** Dans le théorème précédent,  $u''$  est la *classe duale* de  $u$ . Attention, certains auteurs préfèrent noter  $u'$  la classe duale, ce que nous ne faisons que pour simplifier les notations et alors de façon très expresse.

▷ Soit  $\pi$  la section nulle de  $i : M \rightarrow E(\nu)$ . Elle induit  $\pi^* : H^*(M) \xrightarrow{\sim} H^*(\nu)$  et  $\pi \circ i = id$ , d'où  $i^* \circ \pi^* = id$ , i.e.  $i^* = \pi^{*-1}$ , donc  $i^* : H^*(E(\nu)) \xrightarrow{\sim} H^*(M)$  est un isomorphisme. ■

On rappelle que :

$$\begin{array}{ccccc}
 & u & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & e(\nu) & \\
 & \nearrow & & & \\
 H^k(E, E_0) & \longrightarrow & H^k(E) & \longrightarrow & H^k(M) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel \\
 H^k(E(\varepsilon), E_0(\varepsilon)) & \longrightarrow & H^k(E(\varepsilon)) & \longrightarrow & H^k(M) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel \\
 H^k(U, U \setminus M) & \longrightarrow & H^k(U) & \longrightarrow & H^k(M) \\
 \downarrow \wr & & \uparrow & & \parallel \\
 H^k(A, A \setminus M) & \longrightarrow & H^k(A) & \longrightarrow & H^k(M) \\
 & \searrow & & & \\
 & u' & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & u'' & \xrightarrow{\hspace{2cm}} e(\nu).
 \end{array}$$

**Fait. (Application de la classe duale vers la classe d'Euler)**

Avec les notations précédentes, on a une application :

$$\begin{aligned}
 H^k(A) &\longrightarrow H^k(M) . \\
 u'' &\longmapsto e(\nu)
 \end{aligned}$$

**Corollaire**

Si la classe duale d'une sous-variété plongée fermée est nulle, alors la classe de Stiefel-Whitney totale de son fibré tangent est nulle.

**Corollaire**

Si  $M$  est une variété lisse fermée de dimension  $n$  plongée dans  $\mathbb{R}^{n+k}, n, k \in \mathbb{N}$ , alors  $\omega_k(\nu^k) = 0$ , et dans le cas orienté,  $e(\nu^k) = 0$ .

Si de plus la variété est immérsee, on a  $\omega_j(\nu) = 0$  pour tout  $j \geq k$ .

▷ On a que  $\omega_k(\nu) = e(\nu) \xleftarrow{u}'' \in H^k(\mathbb{R}^{n+k}) = 0$ .

Pour le reste, on le sait déjà pour  $j > k$ , le corollaire précédent le montre en  $k$ . ■

**Exemple. (*Encore un plongement projectif...*)**

Si  $M$  est une variété lisse fermée plongée dans  $\mathbb{R}^{n+k}, n, k \in \mathbb{N}$ , on a  $TM \oplus \nu \simeq T\mathbb{R}^{n+k}$  qui est trivial, donc  $\omega(\nu) = \bar{\omega}(TM)$  où  $\bar{\omega}(TM)\omega(TM) = 1$ . Pour  $M = \mathbb{RP}^{2^n}$ , on a  $\omega(\mathbb{RP}^{2^n}) = 1 + a + a^{2^n}$  et  $\bar{\omega}(\mathbb{RP}^{2^n}) = 1 + a + \dots + a^{2^n-1}$  où  $a^{2^n-1} \neq 0$ . Par suite,  $\mathbb{RP}^{2^n}$  ne peut se plonger dans  $\mathbb{R}^{2 \cdot 2^n - 1}$ , même s'il se plonge dans  $\mathbb{R}^{2 \cdot 2^n}$  par le théorème de Whitney.

Dans le théorème fondamental de cette section, il est essentiel que la sous-variété plongée considérée soit sans bord.

**Contre-exemple**

Le ruban de Möbius ouvert peut être plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , mais pas comme une sous-variété fermée.

La classe de Stiefel-Whitney associée à son fibré tangent  $\bar{\omega}_1(\tau)$  est non nulle. □

D'ailleurs, l'immersion ne suffit pas non plus. Et l'on retrouve :

**Contre-exemple**

Le plan projectif réel  $\mathbb{RP}^2$  ne peut être plongé dans  $\mathbb{R}^3$ .

La classe de Stiefel-Whitney duale de son fibré tangent  $\bar{\omega}_1(\tau)$  est non nulle. □

**7.4.7.2 Classe de cohomologie diagonale**

On rappelle que si  $M$  est une variété riemannienne,  $M \times M$  est encore riemannienne et l'on note  $\Delta = \Delta_M : M \rightarrow M \times M$  l'application diagonale.

**Lemme. (*Fibré normal d'un carré riemannien*)**

Soit  $M$  une variété riemannienne. Le fibré normal  $N(\Delta)$  est canoniquement isomorphe à  $TM$ .

▷ Le fibré tangent à la diagonale s'écrit  $T\Delta = \{(v,v), v \in T_x M \times T_x M\}$  et  $N(\Delta) = \{(-v,v) \in T_x M \times T_x M\}$ . Ainsi, on a un isomorphisme canonique  $\begin{aligned} TM &\longrightarrow N(\Delta). \\ (x,v) &\longmapsto (x,-v), (x,v) \end{aligned}$  ■

**Corollaire. (*Lien classe d'Euler-classe duale*)**

Si  $M$  est une variété riemannienne fermée de dimension  $n$ ,  $H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \ni u' \mapsto e(N\Delta) = e(TM) \in H^n(M)$ . Ainsi,  $\boxed{\Delta^* u'' = e(TM)}$ .

**Lemme**

Pour tout  $x \in M$  une variété riemannienne fermée orientée de dimension  $n$ ,  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus X; \mathbb{R}) \simeq R$  qui vient d'une orientation sur  $M$ . Alors il existe une unique classe  $u_x \in H^n(M, M \setminus \{x\})$  telle que  $\langle u_x, \mu_x \rangle = 1$ . Maintenant, plongeons  $j_x : M \setminus \{x\} \longrightarrow M \times M \setminus \Delta(M)$ . Alors  $u' \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$  est caractérisée par  $j_x^*(u') = u_x$ . En particulier,  $u' \in H^n(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$  s'envoie sur  $u'' \in H^n(M \times M)$  la classe duale, aussi appelée dans ce contexte *classe diagonale (de cohomologie)*.

▷ Pour  $x \in M$ ,  $N_x \subseteq T_x M \xrightarrow{\sim} N\Delta_{(x,x)} \xrightarrow{\exp} M \times M$  où l'isomorphisme central est donné par  $v \mapsto (-v, v)$ , se compose en  $f$ . qui à  $v \in (N_x, N_x \setminus 0)$  associe  $(\exp(x, -vt), \exp(x, v))$  où  $t \rightarrow 0$  et donc  $(N_x, N_x \setminus 0) \mapsto (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M)) \ni u'$ . Un générateur de  $H^*(T_x M, T_x M_0) = f^* u'$  par définition, puisque  $u'$  est l'image de  $u(N\Delta) = u(TM)$ .

$f$  est homotope à l'application  $f_1 : (N_x, N_x \setminus 0) \rightarrow (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$  qui à  $v \mapsto' x, \exp(x, v)$  par  $\exp(x, -tv)$  où  $t \in [0,1]$ . Ainsi  $f_1^* u'$  est un générateur de  $H^n(T_x M, T_x M \setminus 0) \ni u''$ . On a

$$(N_x, N_x \setminus 0) \xrightarrow{\exp} (M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{j_x} (M \times M, M \times M \setminus \Delta(M))$$

$f_1$

C'est le point important des assertions faites. ■

Soit  $M$  une variété riemannienne fermée. On a une correspondance biunivoque entre les orientations sur  $TM$  et sur  $M$ , donnée par l'exponentielle  $T_x M \xrightarrow{\sim} U_x \subseteq M$ , de sorte que  $H_n(T_x M, T_x M \setminus 0) \simeq H_n(M, M \setminus \{x\})$  et similairement  $H^n(T_x M, T_x M \setminus 0) \simeq H^n(M, M \setminus \{x\})$ , où  $n = \dim(M)$ .

### Lemme

Soit  $M$  une variété riemannienne fermée orientée. Pour toute classe de cohomologie  $a \in H^*(M)$ ,  $(a \times 1) \smile u'' = (1 \times a) \smile u''$ .

▷ Soit  $U$  un voisinage de  $\Delta$  dans  $M \times M$  que l'on peut prendre pour qu'il se rétracte par déformation sur  $U$ . En notant  $\pi_1, \pi_2$  les deux projections de  $M \times M \rightarrow M$ , i.e. telles que  $\pi_1 \circ \Delta = id$  et  $\pi_2 \circ \Delta = id$ , on en déduit deux applications  $\pi_1^*, \pi_2^* : H^*(M \times M) \rightarrow H^*(U) \xrightarrow{\sim} H^*(\Delta = M)$  données respectivement par  $a \times 1 \mapsto \tilde{a} \mapsto a$  et  $1 \times a \mapsto \tilde{a} \mapsto a$  où dès la deuxième flèche, les résultats sont égaux. Ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^i(M \times M) & \longrightarrow & H^i(U) \\ \smile u' \downarrow & & \downarrow \smile u'_{|(U, U \setminus \Delta(M))} \\ H^{i+n}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) & \xrightarrow{\sim} & H^{i+n}(U, U \setminus \Delta(M)) \end{array}$$

commute et la flèche du bas est un isomorphisme par excision. Ceci implique

$$\begin{array}{ccc} (1 \times a) \smile u' & = & (a \times 1) \smile u' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (1 \times a) \smile u'' & = & (a \times 1) \smile u''. \end{array}$$

d'où le résultat. ■

On travaille maintenant à coefficients dans un corps.

### Lemme. (*Lien classe diagonale-classe fondamentale via le produit oblique*)

Soit  $M$  une  $n$ -variété riemannienne compacte orientée. La classe diagonale  $u'' \in H^n(M \times M)$  à coefficient dans un corps et la classe fondamentale  $\mu \in H_n(M)$  sont liées par  $u''/\mu = 1 \in H^0(M)$ , i.e. si  $u'' = u_1 \otimes u_2$ ,  $u_1 = \frac{1}{u_2(\mu)} \in H^0(M)$ .

▷ Prenons  $x \in M$  et calculons  $u''/\mu \in H^0(M) = \Lambda$  un corps. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^n(M \times M) & \xrightarrow{/ \mu} & H^0(M) \\ i^* \downarrow & & \downarrow \\ H^n(\{x\} \times M) & \xrightarrow{/ \mu} & H^0(\{x\}) \end{array}$$

commute par naturalité du produit oblique. On a également un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & M \times M & & \\ & \nearrow i : (x,y) \mapsto (x,y) & & \nwarrow i_x : y \mapsto (x,y) & \\ \{x\} \times M & \xrightarrow[p : (x,y) \mapsto y]{} & & & M \end{array}$$

qui implique que  $i^*(\alpha) = p^*(x)(\alpha)$ . On a  $p^*: H^*(M) \longrightarrow H^*(\{x\} \times M) = H^*(\{x\}) \otimes H^*(M)$

$$\beta \longmapsto 1 \times \beta$$

et  $i^*\alpha = 1 \times i_x^*\alpha$ . On s'intéresse à  $H^0(\{x\}) \ni i^*u''/\mu = 1 \times i_x^*u''/\mu = 1 \cdot \langle i_x^*u', \mu \rangle$ . On sait que  $H_n(M \rightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}), \mu \mapsto \mu_x)$  un générateur préféré. Or

$$\begin{array}{ccccc}
 & i_x^*(u'') & \longleftrightarrow & j_x^*(u') & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 M & \xrightarrow{i_\mu} & (M, M \setminus \{x\}) & & \\
 i_x(y)=(x,y) \downarrow & & \downarrow j_x(y)=(x,y) & & \\
 M \times M & \longrightarrow & (M \times M, M \times M \setminus \Delta) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & u'' & \longleftrightarrow & u' &
 \end{array}$$

et  $j_x(u') = u_x$  es tun générateur préféré :  $\langle u_x, \mu_x \rangle = 1$ . On a  $i_x^*(u'') = i_\mu^*j_x^*(u')$  puis  $\langle i_x^*u'', \mu \rangle = \langle i_\mu^*j_x^*(u'), \mu \rangle = \langle j_x^*(u'), u_x, \mu_x \rangle = 1$  d'où  $i_x^*u''/\mu = 1$  pour tout  $x$ , donc  $u''/\mu = 1$  dans  $H^0(M)$ . ■

Enfin, citons un lien entre la dualité de Poincaré et la classe diagonale.

#### Fait. (*Expression de la classe duale*)

Soit  $M$  une variété riemannienne compacte lisse. Par théorème de dualité, que pour toute base  $b_1, \dots, b_r$  de  $H^*(M)$  à coefficients dans un corps, il y a une base duale  $b_1^\#, \dots, b_n^\#$  telle que  $\langle b_i \smile b_j^\#, \mu \rangle = \delta_{ij}$ . Alors :

$$u'' = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^\#.$$

Remarquons qu'on peut toujours riemanniser une variété, donc ce qui précède s'applique.

Puisque  $H^*(M \times M) \simeq H^*(M) \otimes H^*(M)$ ,  $H^n \ni u'' = b_1 \times c_1 + \dots + b_r \times c_r$  où  $\dim b_i + \dim c_i = n$ . On sait que  $(a \times 1) \smile u'' = (1 \times a) \smile u''$  pour tout  $a$ , et l'on a  $(a \times 1) \smile u''/\mu = z \smile (u''/\mu) = a$ , donc  $a = (1 \times a \smile u'')/\mu = (1 \times a) \smile (\sum_i b_i \times c_i)/\mu = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim a \dim b_i} (1 \smile b_i) \times (a \smile c_i)/\mu$ . Si l'on prend  $a = b_j$ ,  $b_j = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim b_i \dim b_j} \beta_i \langle b_j \smile c_i, \mu \rangle$  d'où, pour  $i = j$ ,  $c_i = b_i^\# (-1)^{(\dim b_i)^2}$  d'où le résultat.

#### 7.4.7.3 Lien entre classe et caractéristique d'Euler

##### Corollaire. (*Lien classe d'Euler-caractéristique*)

Soit  $M$  une variété compacte lisse. Alors si  $M$  est orientée,

$$\langle e(TM), \mu \rangle = \chi(M)$$

et

$$\langle e(TM), \mu \rangle \equiv \chi(M) [2]$$

sinon.

$\triangleright \Delta^*(u'') = e(N_\Delta) = e(TM)$ . Or, on a  $e(TM) = \Delta^*(\sum(-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^\#) = \sum(-1)^{\dim b_i} b_i \smile b_i^\#$  d'où  $\langle e(TM), \mu \rangle = \sum(-1)^{\dim b_i} \underbrace{\langle b_i \smile b_i^\#, \mu \rangle}_{=1} = \sum_k (-1)^k \text{rg}(H^k(M)) = \chi(M)$ .

L'argument modulo 2 est complètement analogue. ■

#### 7.4.7.4 Formule de Wu

##### Lemme

Si  $M$  est une variété lisse compacte, alors les classes de Stiefel-Whitney de  $\tau_M$  sont données par  $\omega_i = Sq^i(u'')/\mu$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

##### Définition-propriété. (*Classe de Wu*)

Soit  $M$  une variété lisse compacte de dimension  $n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on considère la *classe de Wu*  $v_k \in H^k(M)$  associée par dualité au morphisme  $x \mapsto \langle Sq^k(x), \mu \rangle$  de  $H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui satisfasse

$$\langle v_k \smile x, \mu \rangle = \langle Sq^k(x), \mu \rangle$$

pour tout  $x$ .

La *classe de Wu totale* est donnée par la somme formelle  $v = 1 + v_1 + \dots + v_n$  dans  $H^\Pi(M) = H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \dots \oplus H^n(M)$ .

*Remarque.* La  $k$ -ième classe de Wu d'une  $n$ -variété est nulle pour  $k > n - k$ , i.e.  $k \geq \frac{n}{2}$ .

##### Théorème. (*Formule de Wu*)

Soit  $M$  une variété lisse compacte de classe de Wu  $v$ . Alors la classe de Whitney totale de  $\tau_M$  est  $Sq(v)$ .

Autrement dit, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\omega_k(\tau_M) = \sum_{i+k=k} Sq^i(v_j).$$

### 7.4.7.5 Autres applications

#### Exercice 55

Montrer que tous les nombres de Stiefel-Whitney d'une variété lisse compacte sans bord de dimension 3.

#### Exercice 56 (*Caractérisation de l'orientabilité par la première classe de Stiefel-Whitney*)

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de base un CW-complexe. Montrer que  $\xi$  est orientable si et seulement si  $\omega_1(\xi) = 0$ .

▷ Éléments de réponse.

On rappelle qu'un fibré  $\xi$  de rang  $n$  est orientable si et seulement si  $\Lambda^n \xi$  l'est.

Si  $\xi = l_1 \oplus \dots \oplus l_n$ ,  $\Lambda^n \xi = \Lambda^n(l_1 \oplus \dots \oplus l_n) = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_n = k} \Lambda^{i_1} l_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{i_n} l_n$ . Pour  $k = n$ ,  $\Lambda^n \xi = l_1 \otimes \dots \otimes l_n$ ,

donc  $\omega_1(\Lambda^n \xi) = \omega_1(l_1) + \dots + \omega_1(l_n) = \omega_1(\xi)$  et le cas général serait traité par principe de décomposition si on le montre dans le cas d'un fibré en droites.

Si  $\xi$  est orientable, il a une section non nulle donnée par l'orientation : explicitement, on choisit une métrique sur  $\xi$ ,  $v_x \in \xi_x$  de norme 1 et d'orientation +1, alors  $x \mapsto v_x$  est la section non nulle. Ainsi,  $\xi$  est trivial, donc  $\omega_1(\xi) = 0$ . Réciproquement, si  $\omega_1(\xi) = 0$ , on choisit une métrique  $\|\cdot\|$  sur  $\xi$  et l'on pose  $Y = \{v \mid \|v\| = 1\}$ , de sorte que  $Y \rightarrow B$  est un revêtement double. Alors  $\xi$  est trivial si et seulement si  $Y \simeq B \coprod B \rightarrow B$  le revêtement trivial si et seulement si pour tout  $\gamma : S^1 \rightarrow B$ ,  $\gamma$  a un relèvement le long de  $Y$ . Soit  $\gamma : \mathbb{RP}^1 = S^1 \rightarrow B$ . Alors  $\gamma^*(\omega_1(\xi)) = \omega_1(\gamma^*\xi) = 0$ . Maintenant,  $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$  a deux fibrés en droites :  $\gamma_1^1$  et  $\varepsilon$ . Ainsi, puisque  $\omega_1(\gamma^*\xi) \neq \omega_1(\gamma_1^1)$ ,  $\gamma^*\xi$  est trivial et  $S^1 \times B \xrightarrow{\sim} \gamma^*\xi$ . Ainsi  $\gamma$  a un relèvement  $\frac{p(\cdot, 1)}{\|\gamma(p(\cdot, 1))\|}$ , donc  $\xi$  est trivial.

### 7.4.8 Classes de Chern et classes de Pontryagin

Les classes de Chern sont définies sur les FIBRÉS COMPLEXES, et les classes de Pontryagin en découlent ; on conseille au lecteur de revoir rapidement cette section.

#### Fait. (*Théorème de Leray-Hirsch*)

Le théorème de Leray-Hirsch tient encore sur  $\mathbb{Z}$  pour les fibrés complexes.

#### Définition. (*Fibré projectif complexe*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel complexe de rang fini. On définit  $\mathbb{P}(\pi) : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$  le fibré vectoriel de fibres  $\mathbb{P}(\pi^{-1}(b))$  l'espace des droites complexes de la fibre  $\pi^{-1}(b)$  pour tout  $b \in B$  muni de la projection canonique.

Si  $\pi$  est de rang  $n \in \mathbb{N}$ , son fibré projectif complexe est un fibré en espaces  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .

**Lemme**

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  non nul.

- (i) Le tiré en arrière  $\mathbb{P}(\pi)^* : H^*(B) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}(E))$  est injectif où  $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est omis dans les notations.
- (ii) Il existe une scission  $H^*(B) \otimes H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \simeq H^*(\mathbb{P}(E))$ .

**Lemme**

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel complexe. Le tiré en arrière  $\mathbb{P}(\pi)^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{P}(E); \mathbb{Z})$  est injectif.

▷ Il y a un fibré canonique sur  $\mathbb{P}(E)$  qui se restreint à chaque fibre comme le fibré canonique sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ , où  $j : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  de sorte que  $j^*(a^m) = a^m$  pour  $m \leq n-1$ , et  $\gamma_{\mathbb{P}(E)}^*(a^m) \in H^*(\mathbb{P}(E))$ . Alors pour tout fibré complexe  $E \rightarrow B$ , il existe  $f : B^1 \longrightarrow B$  telle que  $f^*E \simeq L_1 \oplus \dots \oplus L_1 \rightarrow B'$  et  $f^* : H^*(B) \rightarrow H^*(B')$  est injective. ■

**7.4.8.1 Grassmanniennes complexes**

En imitant mot à mot le cas réel, on obtient la construction suivante :

**Définition-propriété. (*Grassmannienne complexe*)**

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ .

1. On définit semblablement au cas réel : la  $(n,m)$ -grassmannienne complexe  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$  est l'ensemble des  $n$ -plans complexes de  $\mathbb{C}^m$  et  $V_n(\mathbb{C}^m)$  est l'ensemble des  $n$ -repères  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^m$ , i.e. des  $n$ -uplets  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendants de  $\mathbb{C}^m$ .
2.  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$  est topologisée de la même manière que dans le cas réel,  $V_n(\mathbb{C}^m)$  étant une sous-variété d'un  $\mathbb{C}^M$  et ayant la même portée sur la grassmannienne complexe.
3.  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$  est compacte, de dimension  $2nm$ .
4. On définit le fibré tautologique  $\Gamma_n = \{(X, x), X \text{ } n\text{-plan de } \mathbb{C}^m, x \in X\}$  sur  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$ .
5.  $Gr_1(\mathbb{C}^m) = \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ .
6.  $H^*(Gr_1(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a]/(a^{n+1})$  pour une certaine  $a$
7. Toute classe de cohomologie de  $H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$  sera caractéristique relativement au tiré en arrière où  $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}^0 \oplus \mathbb{C}^1 \oplus \dots$  et la grassmannienne complexe infinie est définie de façon évidente.
8. Si l'on a un fibré complexe  $\xi : E \rightarrow B$  sur une base  $B$  compacte, il existe une application fibrée  $E \rightarrow \gamma_n(\mathbb{C}^{n+k})$  pour  $k$  assez grand. Si  $B$  est seulement paracompacte, il existe un recouvrement dénombrable localement fini  $(U_\alpha)_\alpha$  de  $B$  tel que  $\xi|_{U_\alpha}$  est trivial et même conclusion avec la grassmannienne infinie.
9. Deux applications fibrées  $E \rightarrow \gamma_n$  sont fibrés-homotopiques.

**Définition-propriété. (*Structure cellulaire sur  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$* )**

Soient  $n, m \in \mathbb{C}$ . Soient  $\mathbb{C}^0 \subseteq \mathbb{C}^1 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^m$  pour  $X \in Gr_n(\mathbb{C}^m)$ . Alors  $0 = \dim_{\mathbb{C}}(X \cap C^0) \leq \dots \leq \dim_{\mathbb{C}}(X \cap \mathbb{C}^m) = n$  où la différence entre deux dimensions consécutives est au plus 1. Il y a donc  $n$  sauts où  $1 \leq \sigma_1 < \dots < \sigma_n \leq m$  marque la position des sauts.

- (i) Pour chaque tel symbole  $\sigma$ , on pose  $e(\sigma) = \{X \in Gr_n(\mathbb{C}^m) \mid \dim_{\mathbb{C}}(X \cap \mathbb{C}^{\sigma_i}) = i, \dim_{\mathbb{C}}(X \cap \mathbb{C}^{\sigma_1-1}) = i-1\}$  de sorte que  $Gr_n(\mathbb{C}^m)$  est partitionnée par les  $e(\sigma)$ .
- (ii) Encore soit  $H^{\sigma_i} = (x, \dots, x, 0, \dots, 0)$  où le dernier  $x \in \mathbb{R}_+^*$  est à la  $\sigma_i$ -ième coordonnée pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Alors  $X$  a une unique base orthonormale  $(x_1, \dots, x_n)$  telle que  $x_i \in H^{\sigma_i}$ .
- (iii) Soit  $e'(\sigma) = V_n^0 \cap (H^{\sigma_1} \times \dots \times H^{\sigma_n}) \simeq D^{2((\sigma_1-1)+\dots+(\sigma_n-n))}$  qui est en correspondance bijective avec les  $e(\sigma)$ , en fait, en correspondance par un homéomorphisme. Par récurrence  $e(\sigma)$  et une cellule de dimension  $2((\sigma_1-1)+\dots+(\sigma_n-n))$  où  $\partial(e(\sigma))$  s'envoie sur  $e(\tau)$  avec  $\dim(e(\tau)) < \dim(e(\sigma))$ . Donc, **l'opérateur de bord  $\partial$  s'annule sur le complexe cellulaire grassmannien complexe**, puisqu'il n'y a aucune cellule de dimension impaire. En particulier,  $H^{2r}(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang le nombre de partitions de  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  tel que  $(\sigma_1-1)+\dots+(\sigma_n+n)=1$  et  $H^{2r-1}(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})=0$ .

**Exercice 57 (*Structure cellulaire de la grassmannienne complexe*)**

Pour tout entier naturel  $n$ , construire une décomposition cellulaire de la grassmannienne complexe  $Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$  telle que toutes les cellules de cette décomposition soient de dimension paire et, pour tout entier  $k \geq 0$ , le nombre de cellules de dimension  $2k$  soit égal au nombre de partitions de  $k$  en au plus  $n$  termes.

**Théorème. (*L'anneau de cohomologie sur  $\mathbb{Z}$  de la grassmannienne complexe infinie*)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $h_n : (\mathbb{CP}^\infty)^n \rightarrow Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$  l'application classifiante pour  $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$ . Alors  $h_n^* : H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*((\mathbb{CP}^\infty)^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n]$  est injective d'image  $h_n^*(H^*(Gr_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$  où les  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  sont les polynômes symétriques élémentaires en les symboles  $a_i$ .

**Heuristique**

On pourra travailler en  $\mathbb{Z}$ -cohomologie sur les fibrés complexes à la place de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  comme on en a l'habitude sur les fibrés réels.

Merci la grassmannienne complexe et son  $\mathbb{Z}$ -anneau de cohomologie.

### 7.4.8.2 Définition des classes de Chern

**Lemme.** (*Classe d'Euler d'un fibré complexe*)

Pour tout  $\mathbb{C}^n$ -fibré  $\omega$  de base  $B$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la classe d'Euler  $e(\omega_{\mathbb{R}}) \in H^{2n}(B; \mathbb{Z})$  est bien définie et si  $\omega'$  est un  $\mathbb{C}^m$ -fibré de base  $B$ ,  $m \in M$ , on a  $e((\omega \oplus \omega')_{\mathbb{R}}) = e(\omega_{\mathbb{R}})e(\omega'_{\mathbb{R}})$ .

**Définition.** (*Axiomes de Chern*)

1. (*Définition des classes de Chern*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . À tout fibré vectoriel complexe  $\xi$  de rang  $n$ , i.e. à tout  $\mathbb{C}^n$ -fibré, i.e. fibré vectoriel réel de rang  $2n$ , on associe une suite de classes de cohomologie  $c_k(\xi) \in H^{2k}(B(\xi); \mathbb{Z})$  indexée par  $k \in \mathbb{N}$ , avec (*axiomes de rang*)  $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  et  $c_k(\xi) = 0$  dès que l'entier  $k > n$ . Ce sont les *classes de Chern* de  $\xi$ .
2. (*Naturalité des classes de Chern (par tirage en arrière)*) Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés vectoriels complexes de rang  $n$ . Si  $f : B(\xi) \rightarrow B(\eta)$  est l'application induite sur les bases de l'application fibrée  $\check{f} : \xi \rightarrow \eta$ , alors  $c_k(\xi) = f^*c_k(\eta)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  où  $f^*$  est l'application induite en cohomologie par  $f$ .  
Ceci se récrit aussi bien, puisque  $\xi \simeq \overline{g}^*\eta$  au sens des pullbacks de fibrés,  $c_k(f^*\eta) = f^*(c_k(\eta))$ , d'où le nom de *naturalité*.
3. (*Théorème du produit de Whitney*) Si  $\xi, \eta$  sont deux fibrés vectoriels de même base, on a  $c_t(\xi \oplus \eta) = \sum_{k=0}^t c_k(\xi) \smile c_{t-k}(\eta)$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ .
4. La classe  $c_1(\gamma_1^1)$  du fibré en droites tautologique sur la sphère de Riemann  $\mathcal{O}(-1) := \gamma_1^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1 \simeq S^2$  est un générateur de  $H^2(\mathbb{CP}^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  (*normalisation partielle des classes de Chern*). Si on veut la normaliser totalement, on choisit un générateur négatif de  $H^2(\mathbb{CP}^1; \mathbb{Z})$ .

On notera pour une variété complexe  $M$ ,  $c_i(M) = c_i(TM \rightarrow M)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

*Remarque.* Étant donnée  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré complexe, on peut toujours définir  $\pi_0 : E_0 = \{v \in E \mid v \neq 0\} \rightarrow B$ .

On rappelle que :

**Théorème.** (*Suite de Gysin*)

Pour tout fibré  $\pi : E \rightarrow B$  en  $n$ -plans, il existe une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{\sim} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0) \longrightarrow H^{i+1}(B) \longrightarrow \dots$$

avec des indices entiers.

De même que dans le cas réel :

**Propriété. (*Classes de Chern*)**

Les classes de Chern existent et sont uniques en fixant un générateur positif de  $H^2(\mathbb{CP}^1; \mathbb{Z})$  unique.

▷ Soit  $x \in E_0$ . Alors  $E_{0|\{x\}} \simeq S^{n-1}$  et l'on considère le fibré de la sphère  $S^1(E) \rightarrow B \leftarrow E$ . Considérons  $\pi_0^*E \rightarrow S^1(E) \subseteq E_0$  qui contient  $(x, v)$ . Il se scinde en prenant le  $\mathbb{C}$ -span de  $v \in E$  non nul. Ceci définit un sous-fibré complexe en droite de  $\pi_0^*(E)$ . Soit  $W$  son complémentaire orthogonal.  $\pi_0^*(E) = L \oplus W$  est de dimension complexe  $n - 1$ , donc  $e(W) \in H^{2n-2}(S^1(E)) \simeq H^{2n-2}(B)$  par  $\pi^{*-1}$ .

On sait que  $H^{i+2n}(B) \simeq H^{i+2n}(S^1(E))$  pour  $i < \dots$ . Donc  $H^*(B) \simeq H^*(S^1(E))$  pour  $x \in \dots$ .

Définissons  $c_n(E) = e(E)$ , puis  $c_{n-1}(E) = (\pi_0^*)^{-1}e(W)$ , et on continue par récurrence. ■

**Définition. (*Classe de Chern totale*)**

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel complexe de rang  $n$ , de rang réel  $2n$ . Sa *classe totale de Chern* est  $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \dots + c_n(\xi)$ .

*Remarque. (Inversion des classes de Chern totales)* Exactement de la même façon que dans le cas réel, les classes totales de Chern de fibrés  $\xi$  forment un groupe :  $\bar{c}(\xi)c(\xi) = 1$  pour  $\bar{c}(\xi)$  bien choisi.

**Propriété. (*Classes de Chern du fibré complexe opposé*)**

Étant donné un fibré vectoriel complexe  $\xi$  de rang fini, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$c_k(\bar{\xi}) = (-1)^k c_k(\xi).$$

▷ On considère  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Alors  $c_1(\gamma_1) = e(\gamma_1)$  où  $\gamma_1$  est orienté par la structure complexe, i.e. par la base  $(v_1, Jv_1)$ . Ainsi  $\bar{\gamma}_1 = \mathbb{R}\gamma_1$  avec l'orientation opposée. Ainsi,  $c_1(\bar{\gamma}_1) = e(\bar{\gamma}_1) = -e(\gamma_1) = c_1(\gamma_1)$ . Le même argument reste valable pour  $\gamma_1 \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ . Maintenant :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n & \xrightarrow{f} & \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{P}^\infty)^n & \longrightarrow & Gr_n \longleftarrow \bar{\gamma}_n \end{array}$$

donne que  $f^*\bar{\gamma}_n = \bar{\gamma}_1 \oplus \dots \oplus \bar{\gamma}_n$  d'où  $c_k(\bar{\gamma}_n) = \sigma_k(c_1, \dots, c_n)$  et  $c_k(\gamma_n) = \sigma_k(a_1, \dots, a_n)$ . ■

**Corollaire. (*Classes de Chern impaires du complexifié*)**

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel réel de rang fini. Tous les  $c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C}), i \in \mathbb{N}$  sont de 2-torsion.

▷ Puisque fibré complexifié est isomorphe à son opposé,  $c_{2i+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = c_{2i+1}(\bar{\xi} \otimes \bar{\mathbb{C}}) = (-1)^{2k+1}c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C})$ . ■

**Exercice 58** (*Classes de Stiefel-Whitney réelles et complexes*)

Soit  $n$  un entier strictement positif, et soit  $\omega$  un fibré vectoriel complexe de rang  $n$  et de base  $B$ . On note  $\omega_{\mathbb{R}}$  le fibré vectoriel réel correspondant de rang  $2n$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , la classe de Stiefel-Whitney  $\omega_{2k-1}(\omega_{\mathbb{R}})$  de  $\omega_{\mathbb{R}}$  est nulle.
2. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 0$ , l'image de la classe de Chern  $c_k(\omega)$  de  $\omega$  par le morphisme de changement des coefficients  $H^{2k}(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2k}(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est la classe de Stiefel-Whitney  $\omega_{2k}(\omega_{\mathbb{R}})$  de  $\omega_{\mathbb{R}}$ .

**7.4.8.3 Classes de Pontryagin****Définition.** (*Classe de Pontryagin*)

Soit  $\xi : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel réel de rang fini. Soit  $i \in \mathbb{N}$ . La  $i$ -ième *classe de Pontryagin* de  $\xi$  est  $p_i(\xi) = c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C}) \in H^{4i}(B; \mathbb{Z})$ .

**Exercice 59** (*Propriétés élémentaires des classes de Pontryagin*)

Énoncer les « axiomes » des classes de Pontryagin.

**Définition.** (*Classe de Pontryagin totale*)

Si  $\xi$  est un fibré vectoriel réel de rang  $n$ , sa *classe totale de Pontryagin* est  $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \dots + p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\xi)$ .

**Théorème.** (*Somme de Whitney des classes de Pontryagin*)

Soient  $E_1, E_2 \rightarrow B$  deux fibrés vectoriels de rangs finis. On a  $p(E_1 \oplus E_2) \equiv p(E_1)p(E_2)$  [2].

$\triangleright 2c_k(E_1 \otimes \mathbb{C}) = 2c_k(E_2 \otimes \mathbb{C}) = 0$  pour un entier  $k$  impair d'où  $2(p(E_1 \oplus E_2) - p(E_1)p(E_2)) = 2(c(E_1 \otimes \mathbb{C} \oplus E_2 \otimes \mathbb{C}) - c(E_1 \otimes \mathbb{C})c(E_2 \otimes \mathbb{C})) = 0$ , car la classe de Chern totale vérifie la propriété de somme de Whitney. ■

**Corollaire.** (*Formule du produit pour les classes de Chern*)

Si  $E \rightarrow B$  est un fibré vectoriel complexe de rang  $n$ , alors

$$1 - p_1(E) + p_2(E) - \dots + (-1)^n p_n(E) = (1 - c_1(E) + c_2(E) - \dots + (-1)^n c_n(E))(1 + c_1(E) + \dots + c_n(E))$$

d'où :

$$c(E \oplus E) = c(E \otimes \mathbb{C}) = c(\overline{E})c(E).$$

▷ En effet, on a, pour tout entier naturel  $k$ ,  $c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbb{C}) = c_{2k+1}(\xi \oplus \bar{\xi}) = \sum_{i=0}^{2k+1} c_i(\xi) c_{2k+1-i}(\bar{\xi}) = \sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^{i-1} c_i(\xi) c_{2k+1}(\xi) = 0$ . ■

### Corollaire. (*Lien classes de Chern-classes de Pontryagin*)

Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel complexe de rang fini. Alors pour tous  $i \in \mathbb{N}$ ,  $p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E)$ .

### Exemples. (*Classes de Chern, classes de Pontryagin*)

- (*Classes complexes du fibré tangent projectif*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $T(S^n) \oplus N(S^n) = T(\mathbb{R}^{n+i})$  pour un certain  $i \in \mathbb{N}$  où  $N(S^n)$  et  $T(\mathbb{R}^{n+i})$  est trivial. Donc  $p(S^n) = 1$ . Calculons  $p_k(T(\mathbb{CP}^n))$ .  $1 + p_1 + \dots + p_n = (1 - c_1 + \dots + \pm c_n)(1 + c_1 + \dots + c_n) = (1 - a)^{n+1}(1 + a)^{n+1} = (1 - a^2)^{n+1} = \binom{n+1}{k} a^{2k} = p_k(\mathbb{CP}^n)$  où  $c(T\mathbb{CP}^n) = (1 + a)^{n+1}$  et

$$c(T\mathbb{CP}^n) = (1 - a)^{n+1}$$

où  $a = c_1(\gamma^1 \rightarrow \mathbb{CP}^n)$ .

- (*Classes complexes du fibré tautologique projectif*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $T\mathbb{P}^n \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1, \gamma^\perp)$ .  $T\mathbb{P}^n$  peut être décrire sous la forme  $\{(\lambda x, \lambda v) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid x \cdot x = 1, x \cdot v = 0, |\lambda| = 1\}$ . On considère  $(x, v) \mapsto l : L \rightarrow L^\perp, x \mapsto v$  où  $L^\perp$  est orthogonale à  $L$  la droite passant par  $x$  et  $-x$ . D'autre part,  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  est isomorphe à  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1, \gamma^1)$ . On a  $T\mathbb{P}^n \oplus \mathbb{C} \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^\perp, \gamma^\perp) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1, \gamma^\perp \oplus \gamma^1)$  où  $\gamma^\perp \oplus \gamma^1 = \mathbb{C}^n$ , donc ceci est isomorphe à la somme de  $n$  copies de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma^1, \overline{\mathbb{C}}) = \gamma^{1*} \neq \gamma^1$  mais  $\simeq \overline{\gamma^1}$ . Rappelons qu'il y a la métrique hermitienne  $h(u, v) = \langle v, \omega \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  qui est sesquilinear. Pour  $v \in \mathbb{C}$ ,  $F \in \gamma^1$ ,  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \gamma^1 \rightarrow (\cdot, v)$ . Pour  $\overline{\mathbb{C}}, F \in \overline{\gamma^1}$ , cela devient  $\mathbb{C}$ -linéaire par l'isomorphisme  $\overline{\mathbb{C}} \simeq \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  respectivement  $\overline{\gamma^1} \simeq \text{Hom}(\gamma^1, \mathbb{C})$ .

On a  $c(T\mathbb{P}^n) = c(T\mathbb{P}^n \oplus \overline{\mathbb{C}}) \simeq (\overline{\gamma^1})^{n+1} = (1 - u)^{n+1} = (1 + a)^{n+1}$ .  $\gamma^1$  est un fibré en droites complexes donc  $c_1(\gamma^1) = u \in H^2(\mathbb{P}^n)$ .  $\overline{\gamma^1}$  est un fibré en droite complexe avec  $c_1(\overline{\gamma^1}) = -c_1(\gamma^1) = -u = a$  et  $c(\overline{\gamma^\perp}) = (1 - u) = (1 + a)$ .

$1 - p_1(T\mathbb{P}^n) + \dots = c(T\mathbb{P}^n)c(\overline{T\mathbb{P}^n}) = (1 - u)^{n+1}(1 + u)^{n+1} = (1 - u^2)^{n+1} = (1 + a)^{n+1}(1 - a)^{n+1} = (1 - a^2)^{n+1}$  d'où

$$p_k(T\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{k} u^{2k}$$

pour tout  $k \in [\![1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$ . Par exemple,

- ★  $p(\mathbb{CP}^1) = 1$  ;
- ★  $p(\mathbb{CP}^2) = 1 + 3u^2$  ;

- \*  $p(\mathbb{CP}^3) = 1 + 4u^2;$
- \*  $p(\mathbb{CP}^4) = 1 + 5u^2 + 10u^4;$
- \*  $p(\mathbb{CP}^5) = 1 + 6u^2 + 15u^4;$
- \*  $p(\mathbb{CP}^6) = 1 + 7u^2 + 21u^4 + 35u^6.$



Si  $V$  est un fibré vectoriel réel de rang  $n$  orienté,  $V \otimes \mathbb{C} \simeq V \oplus V$ . Il y a deux orientations naturelles : l'orientation complexe  $v_1 = v_1 \oplus 0, Jv_1 = o \oplus v_1, \dots, v_n, Jv_n$  et la double orientation en tant que fibrés de chaque terme :  $v_1 \oplus 0, v_2 \oplus 0, \dots, v_n \oplus 0, 0 \oplus v_1, \dots, 0 \oplus v_n$ . La différence entre ces deux orientations est de  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

#### Lemme. (*Lien classe de Pontryagin-classe d'Euler*)

Si  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel orienté de dimension  $2n, n \in \mathbb{N}$ , alors  $p_n(V) = (e(V))^2$ .

▷  $p_n(V) = (-1)^n c_{2n}(V \otimes \mathbb{C})$  et  $c_{2n}(V \otimes \mathbb{C}) = (-1)^n (V \otimes \mathbb{C})$  où  $V \otimes \mathbb{C}$  est orienté comme fibré complexe. On a  $V \otimes \mathbb{C} \simeq V \oplus V$  ce dernier muni des orientations de fibrés et  $e(V \otimes \mathbb{C}) = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} e(V \oplus V) = (-1)^n e(V \oplus V) = e(V)^2$ . ■

#### 7.4.8.4 Nombres de Chern, nombres de Pontryagin

##### Définition. (*Nombre de Chern*)

Si  $X$  est une variété munie d'une structure presque complexe de dimension  $n$  et  $I = (i_1, \dots, i_r) \vdash n$ , on définit  $c_I(X) = \langle c_{i_1} \smile \dots \smile c_{i_r}, [X] \rangle$ . Si  $J$  est une partition d'un autre entier que  $n$ , on pose  $c_J(X) := 0$ .

##### Exemple. (*Nombres de Chern projectifs*)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $I \vdash n$ . Les nombres de Chern de  $\mathbb{CP}^n$  sont donnés par  $c(\mathbb{CP}^n) = (1+a)^{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} a^i = ((c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_r}, [\mathbb{CP}^n]) = \prod_{j=1}^r \binom{n+1}{i_j} \neq 0$ .

Similairement :

##### Définition. (*Nombre de Pontryagin*)

Si  $M$  est une variété orientée de dimension  $4n, n \in \mathbb{N}$  et  $I = (i_1, \dots, i_r) \vdash n$ , on définit  $p_I(M) = \langle p_{i_1} \smile \dots \smile p_{i_r}, [M] \rangle$ . Si  $J$  est une partition d'un autre entier que  $n$ , on pose  $p_J(X) := 0$ .

**Exemple. (*Nombres de Pontryagin projectifs*)**

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $I \vdash n$ . Pour  $\mathbb{CP}^{2n}$ ,  $p_{i_1} \dots p_{i_r} = \binom{2n+1}{i_1} \dots \binom{2n+1}{i_r} \neq 0$ .

*Remarque.* Soit  $V$  un fibré vectoriel orienté et soit  $\bar{V}$  le fibré d'orientation inverse. On a  $p_i(V) = p_i(\bar{V})$ . Si l'on change l'orientation sur  $M$ , les nombres de Pontryagin changent de signe.

**Lemme. (*Existence d'autodifféomorphismes renversant*)**

Si une variété différentielle  $M$  de dimension  $4n, n \in \mathbb{N}$  possède un nombre de Pontryagin non nul, alors elle n'admet pas d'auto-difféomorphisme renversant l'orientation.

▷ Si  $f : M \rightarrow M$  renverse l'orientation, elle induit un isomorphisme entre  $TM$  et  $f^*TM$ , puisque  $Df : TX \rightarrow TN$  est une application fibrée. Ainsi,  $p_i(TM) = p_i(f^*TM) = f^*p_i(TM)$  puis  $\langle p_{i_1} \dots p_{i_r}, [M] \rangle = \langle f^*(p_{i_1} \dots p_{i_r}), [M] \rangle = \langle p_{i_1} \dots p_{i_r}, f_*[M] \rangle = -\langle p_{i_1} \dots p_{i_r}, [M] \rangle$  d'où  $\langle p_{i_1} \dots p_{i_r}, [M] \rangle = 0$ . ■

**Corollaire**

Les espaces projectifs complexes d'ordres pairs n'admettent pas de difféomorphisme sur eux-mêmes renversant leur orientation.

**Lemme. (*Condition de cobordisme par les nombres de Pontryagin*)**

Si les nombres de Pontryagin d'une variété de dimension  $4n, n \in \mathbb{N}$  sont tous nuls, alors  $M$  n'est pas le bord orienté d'une variété orientée.

**Preuve.**

▷ Si  $TB$  est orientée, on a une orientation induite sur  $TM$  qui induit une orientation sur  $M$ , car fibré normal d'un bord  $M$  d'une variété orientée  $B$  est toujours canoniquement orienté en prenant la direction pointant vers l'extérieur partout :  $TB|_M = TM \oplus \nu$ . On a la composée  $H_{4k+1}(B, \partial B) \rightarrow H_{4k}(\partial B) \rightarrow H_{4k}(\partial B), [B] \mapsto [M] \mapsto 0$ . Alors  $i_M^* p : TB \rightarrow p_i(TM)$  où  $TB = TM \oplus \nu$  et  $\nu$  est trivial d'où  $\langle (p_{i_1} \dots p_{i_r})(TM), [M] \rangle = \langle i^*(p_{i_1} \dots p_{i_r}(TB)), [M] \rangle = \langle p_{i_1} \dots p_{i_r}(TB), i_*[M] \rangle = 0$ . ■

**Exemple. (*Les espaces projectifs pairs ne sont pas cobordants à 0*)**

$\mathbb{CP}^{2n}$  n'est pas cobordante à zéro.  $\mathbb{CP}^{2n} \coprod \mathbb{CP}^{2n}$  non plus, mais  $\mathbb{CP}^{2n} \coprod \overline{\mathbb{CP}^{2n}}$  est la frontière de  $\mathbb{CP}^n \times I$ .

**Méthode. (Lien entre partitions d'entiers et polynômes symétriques)**

Étant données deux partitions  $J = (j_1, \dots, j_s)$  et  $K = (k_1, \dots, k_t)$ , on peut former une nouvelle partition  $i = JK = j_1 \dots j_s k_1 \dots k_t$  de  $s + k$ . De plus, l'ensemble des polynômes symétriques en  $u_1, \dots, u_n$  est égal à la sous-algèbre  $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \subseteq \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_n]$  où les  $\sigma_i$  sont les fonctions symétriques élémentaires. Étant donnée  $I = i_1 \dots i_r$  on peut former une fonction symétrique  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u_{\sigma(1)}^{i_1} \dots u_{\sigma(r)}^{i_r} = s_I(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  ( $n$  n'est pas l'entier qu'on partitionne!).

Par exemple, pour  $I = (2, 1, 1)$ , on peut calculer qu'on obtient  $2\sigma_3\sigma_1$ . Pour  $I = k$ , on a  $u_1^k + \dots + u_n^k$ . Pour  $k = 2, n = 3$ , c'est faisable par un vieil exercice.

→ *Notation.* Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel complexe de rang  $n$ . On pose  $s_I(E) = s_I(c_1(E), \dots, c_n(E)) \in H^{2|I|}(B)$  où  $c_i(E) = f^*\tilde{\sigma}_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  où  $f : B \rightarrow Gr_n(\mathbb{C}^\infty)$  est l'application classifiante dans  $H^*((\mathbb{P}^\infty)^n)$ . Autrement dit,  $s_I(c_1(E), \dots, c_n(E)) = f^*s_I(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n)$ .

**Théorème. (Formule de Thom)**

Soient  $E, E' \rightarrow B$  deux fibrés vectoriels complexes de rang respectifs  $n, n'$ . Alors

$$s_I(E \oplus E') = \sum_{JK=I} s_J(c(E)) \smile s_K(c(E')).$$

▷ On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_n & \times & \gamma_{n'} \xrightarrow{f} \gamma_{n+n'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) & \longleftarrow Gr_n & \times \quad Gr_{n'} \longrightarrow Gr_{n+n'} \longleftarrow u''_1, \dots, u''_{n+n'} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma_1 \oplus \gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^1 & \longrightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n & \times \quad (\mathbb{P}^\infty)^{n'} \xrightarrow{i} (\mathbb{P}^\infty)^{n+n'} \longleftarrow \gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^1
 \end{array}$$

d'où  $s_I(\gamma_n \times \gamma_{n'}) = f^*(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+n'}} (u''_{\sigma(1)})^{i_1} \dots (u''_{\sigma(n+n')})^{i_r})$ . Si  $\sigma(j) \leq n$ ,  $u''_{\sigma(j)} = u_{\sigma(j)}$  et sinon,  $u''_{\sigma(j)} = u'_{\sigma(j)}$  donc  $s_I(\gamma_n \times \gamma_{n'}) = \sum_{JK=I} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n'}} \sigma(1)^{j_1} u_{\sigma(1)}^{j_1} \dots u_{\sigma(s)}^{k_1} \dots u_{\sigma'(t)}^{k_t}$ . ■

**Lemme**

Si  $X$  est une variété complexe de dimension  $n$ , pour toute  $I \vdash n$ ,  $s_I(X) = \langle s_I(c(TX)), [X] \rangle$ . En particulier, si  $I = i_1, \dots, i_r$ ,  $s_I$  est éventuellement non nulle seulement si  $i_1 + \dots + i_r = n$ .

On en déduit des propriétés sur les variétés produits.

**Corollaire. (*Formule du produit de Thom*)**

Soient  $K, L$  deux variétés complexes de dimensions respectives  $m, n$ . Pour tout  $I \vdash m + n$ ,

$$s_I(K^m \times L^n) = \sum_{JK=I} s_J(K^m)s_K(L^n).$$
**Corollaire**

Soient  $K, L$  deux variétés complexes de dimensions respectives  $m, n$ . Alors  $s_{(m+n)}(K^m \times L^n) = 0$  où  $(m + n)$  n'est autre que la partition à un seul élément.

▷ Si  $I = \{i\} = JK$  alors  $J = \{i\}$  et  $K = \emptyset$  ou l'inverse. ■

**Corollaire. (*Indécomposabilité des espaces projectifs complexes*)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{CP}^n$  n'est pas une variété produit.

▷  $s_n(\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C}) = n + 1 \neq 0$  et  $s_I(T\mathbb{CP}^n) \simeq s_I(\gamma^1 \oplus \dots \oplus \gamma^1) = \sum a^n$ . ■

**Théorème. (*Théorème de Thom*)**

Soient  $X^1, \dots, X^n$  des variétés complexes de dimensions respectivement  $1, \dots, n$  satisfaisant  $s_k(c(X^k)) \neq 0$  pour tout  $k \in [\![1, n]\!]$ . Alors la matrice  $p(n) \times p(n)$  donnée par  $(c_{i_1} \dots c_{i_r}[X^{j_1} \dots X^{j_s}])$  est inversible, où l'on rappelle que  $p(n)$ .

▷ Soient  $I, J \vdash n$ .  $s_I(X^{j_1} \dots X^{j_k}) = \sum_{I_1 I_2 \dots I_s = I} s_{I_1}(X^{i_1}) \dots s_{I_s}(X^{i_s})$ . C'est éventuellement non nul seulement si  $I_t$  est une partition de  $j_t$ . Soit  $I_t$  a un élément  $j_t$ , soit elle en a plusieurs. On a  $p(n)$  partitions  $P_1, \dots, P_{p(n)}$  et le nombre d'éléments de  $P_i$  est strictement plus petit que le nombre d'éléments de  $P_j$  pour  $i \leq j$ . Ainsi  $s_I(X^{j_1} \dots X^{j_t}) = 0$  pour tout  $I$  différent de  $J$  et tel que  $\#I \geq \#J$ . Ainsi

$$\begin{pmatrix} s_{P_1}(X^{P_1}) & \dots & s_{P_1}(X^{P_{p(n)}}) \\ \vdots & & \vdots \\ s_{P_{p(n)}}(X^{P_1}) & \dots & s_{P_{p(n)}}(X^{P_{p(n}}}) \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure, de déterminant non nul car  $s_{P_s}(X^{P_s})$  est non nul et  $s_{P_i}(X^{P_i}) = 0$  pour  $i > j$ , le nombre d'éléments dans  $P_i$  étant plus petit que celui de  $P_j$  et  $P_i \neq P_j$ . ■

*Remarque.* Les polynômes symétriques de degré  $k, k \in \mathbb{N}$  sont engendrés par les  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}$  tels que  $\sum_{i=1}^n i r_i = k$ . On a une correspondance biunivoque entre les  $(r_1, \dots, r_n)$  et les  $\lambda$ , partitions de  $k$ . Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  est une partition de  $k$ , soit  $m_i$  le nombre de  $\lambda_j$  égaux à  $i$ ; la suite  $(m_i)$  détermine  $\lambda$ . Si  $\sum_i i r_i = k$  alors  $\sum \lambda_i = k$  avec  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n} = \sigma_{\lambda_1} \dots \sigma_{\lambda_s}$  où  $\sigma_1^{r_1} = \sigma_1 \dots \sigma_1$   $r_1$  fois, ...,  $\sigma_n^{r_n} = \sigma_n \dots \sigma_n$   $r_n$  fois.

Une autre base pour les polynômes symétriques de degré  $k$  est donnée par la symétrisation des monômes de degré  $k$  en  $u_1, \dots, u_n$ . Prenons une partition de  $k$  avec  $\leq n$  éléments, donnée par

$\lambda = \lambda_1 \dots \lambda_s$ . En notant 1 le groupe d'isotropie des monômes,  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} y_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots y_{\sigma(s)}^{\lambda_s} \cdot 1 = s_\lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  qui est une combinaison linéaire de  $\sigma_1^{r_1} \dots \sigma_n^{r_n}$  où  $\sum i r_i = k$ .

On prétend que  $s_\lambda$  sont une base des partitions de  $k$  en au plus  $n$  éléments.

Toute fonction symétrique  $f$  de degré  $k$  est la somme de monômes symétrisés et l'on sait que  $\sigma_\mu = \sigma_{\mu_1} \dots \sigma_{\mu_s}$  est aussi une base si  $\mu$  est une partition de  $k$ . Ainsi,  $\sigma_{p_j} = \sum_{i=1}^{p(n)} a_{p_i}^{p_i} s_{P_i}$ . Ainsi  $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^{p_1} & a^{p_2} & \dots & a^{p(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \neq 0$ . De plus,  $\begin{pmatrix} \dots & a^{p_1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a^{p(n)} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{P_1}(X^{P_1}) & \dots & s_{P_1}(X^{P_{p(n)}}) \\ \vdots & & \vdots \\ s_{P_{p(n)}}(X^{P_1}) & \dots & s_{P_{p(n)}}(X^{P_{p(n)}}) \end{pmatrix}$  se calcule en une certaine matrice qui donne la réponse à notre question.

Pour  $s_I(E \oplus E') = \sum_{JK} s_I(E)s_K(E')$ , on a besoin de  $s_I = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{|I?|\sigma|}$  modulo 2.

On a des assertions similaires pour les classes de Pontryagin : pour  $s_I(p_1, \dots, p_n)$  où  $I$  est une partition de  $k$  et  $M^{4n}$  est une variété,  $s_I(M) = s_I(p_1, \dots, p_n)[M]$  et  $s_I(M)$  pour toute autre partition. Alors  $s_I(p(E \oplus E')) = \sum_{JK=I} s_J(p(E))s_K(p(E'))$  et  $s_I(M^{4n} \times N^{4n}) = \sum_{JK} s_K(M^{4n})s_K(N^{4n})$ .  $s_I(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = s_I(\sigma'_1, \dots, \sigma'_t, \sigma''_1, \dots, \sigma''_s) = \sum_{JK} s_J(\sigma'_1, \dots, \sigma'_t)s_K(\sigma''_1, \dots, \sigma''_s)$ . Si l'on écrit  $\sigma_i = \sum_{j=0}^i i\sigma'_j\sigma''_{i-j}$ ,  $p_i(E \oplus E') = \sum_i p_j(E)p_{i-j}(E')$ .

Pour des variétés  $(M^{4k})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  (par exemple les  $\mathbb{CP}^{2k}$ ) telles que  $s_k(M^{4k}) \neq 0$ , la matrice de  $S_I(M^{4j_1}, \dots, M^{4j_s})$  où  $I, J$  sont deux partitions de  $n$  est non dégénérée et  $p_{i_1} \dots p_{i_t}(M_1^{4j_1} \dots M_s^{4j_s})$ .

#### 7.4.9 L'anneau de cobordisme orienté

**Théorème.** ( $\tilde{Gr}_n(\mathbb{R}^\infty)$  est classifiante pour les fibrés vectoriels orientés)

Pour tout entier  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H^*(\tilde{Gr}_{2m+1}, \mathbb{Q})$  est un anneau polynomial sur  $p_1(\tilde{\gamma}^{2m+1}), \dots, p_m(\tilde{\gamma}^{2m+1})$  et  $H^*(\tilde{Gr}_{2m}, \mathbb{Q})$  est engendré par  $p_1(\tilde{\gamma}^{2m}), \dots, p_m(\tilde{\gamma}^{2m})$  et  $e(\gamma^{2m})$ .

**Définition.** (Anneau de cobordisme orienté)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\Omega_n$  la collection des classes de cobordisme orientés de  $n$ -variétés lisses fermées orientées.

**Fait.** (Structure de l'anneau de cobordisme orienté)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega_n$  est un groupe abélien.

Le neutre est la classes des variétés cobordantes à zéro. Pour toute  $n$ -variété fermée lisse orientée,  $M \sqcup \overline{M}$  est cobordante à zéro.  $\Omega_* = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$  est un anneau gradué muni du produit de variétés qui est commutativement gradué.

**Lemme.** (*Nombres de Pontryagin de variétés cobordantes*)

Deux variétés  $M, M'$  de dimensions  $4k, k \in \mathbb{N}$  cobordantes de façon orientée ont les mêmes nombres de Pontryagin pour toute partition  $I$  de  $4k$ .

▷ La frontière d'une  $4k + 1$ -variété a tous ses nombres de Pontryagin nuls. ■

**Corollaire**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour toute partition  $I$  de  $k$ , on a un morphisme de groupes  $\Omega_{4k} \longrightarrow \mathbb{Z}$ .  
 $[M] \longmapsto p_I(M)$

▷ À écrire. ■

**Corollaire.** (*Minoration des rangs des groupes de cobordisme*)

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Les produits  $\mathbb{CP}^{2i_1} \times \dots \times \mathbb{CP}^{2i_r}$  où  $I = (i_1, \dots, i_r)$  parcourt l'ensemble des partitions de  $k$ , sont linéairement indépendantes dans  $\Omega_{4k}$ .

En particulier,  $\text{rg}(\Omega_{4k}) \geq p(k)$  le nombre de partitions de  $k$ .

▷ En effet, la matrice  $p_{i_1} \dots p_{i_r} (\mathbb{CP}^{2j_1} \times \dots \mathbb{CP}^{2j_s})$  est inversible et donc on a un morphisme de groupes surjectif  $\Omega_{4k} \longrightarrow \mathbb{Z}^{p_k}$  où  $p_k$  est l'ensemble des partitions de  $k$ . ■  
 $M \longmapsto ((p_{i_1} \dots p_{i_r})([M]))_{(i_1, \dots, i_r) \in p_k}$

**7.4.10 Approfondissements****7.4.10.1 Espaces de Thom****Définition.** (*Espace de Thom*)

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré euclidien de rang  $k$ . Soit  $E^{\geq 1}$  l'ensemble des éléments de norme  $\geq 1$ . L'espace de Thom est l'espace  $T(E) = E/E^{\geq 1}$  pointé en  $*_E = E^{\geq 1} \in E/E^{\geq 1}$ . On pose  $E^{< 1} = T(E) \setminus \{*_E\}$ .

*Remarque.* Par l'isomorphisme de Thom, pour un fibré euclidien de rang  $k$   $E \rightarrow B$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $H_i(B) \simeq H_{i+k}(T(E))$  et  $E^{\geq 1}$  est homotope à  $E_0 = E \setminus B$ .

**Fait.** (*Structure cellulaire de l'espace de Thom*)

Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Si  $B$  est un  $CW$ -complexe, alors  $T(E)$  est  $k - 1$ -connexe. Si  $D^d$  est une  $d$ -cellule de  $B$ , alors  $E|_D$  est trivial et  $E|_D^{\leq 1} = D^d \times D^k$  qui donne une cellule  $D^d \times D^k$  de  $T(E)$  qui le munit d'une structure cellulaire. De plus,  $S^m \rightarrow T(E)$  est homotope à une application cellulaire pour les entiers  $m < k$  i.e.  $S^m \rightarrow \{*\}$ .

**Définition. (*Catégorie des groupes abéliens finis*)**

Soit  $\mathcal{F}$  la catégorie des groupes abéliens finis. Un morphisme  $h : A \rightarrow B$  dans  $\mathcal{F}$  est un  $\text{Ab}_{<\infty}$ -isomorphisme si ses noyaux et conoyaux  $h^{-1}(0), B/h(A)$  sont finis, i.e. dans  $\mathcal{F}$ .

**Lemme**

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  un  $CW$ -complexe fini  $(k-1)$ -connexe. Alors le morphisme de Hurewicz  $\pi_r(X) \rightarrow H_r(X; \mathbb{Z})$  est un  $\mathcal{F}$ -isomorphisme pour les entiers naturels  $r < 2k-1$ .

**Corollaire**

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré euclidien de rang  $k$  sur un  $CW$ -complexe fini. Alors  $\pi_{n+k}(T(E)) \rightarrow H_{n+k}(T(E); \mathbb{Z}) \simeq H_n(B)$  est un  $\mathcal{F}$ -isomorphisme pour les entiers naturels  $n < k-1$ .

**Théorème**

Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un fibré réel orienté de rang  $k$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Toute application continue  $S^m \rightarrow T(E)$  est homotope à  $g : S^m \rightarrow T(E)$  telle que  $g|_{g^{-1}(E^{<1})} : g^{-1}(E^{<1}) \rightarrow E^{<1}$  est lisse et transverse à la section nulle.

▷ La classe de cobordisme orienté de  $g^{-1}(B)$  où  $B$  est la section nulle, dépend uniquement de la classe d'homotopie de  $g$ , donc  $\pi_m(T, *_E) \rightarrow \Omega_{m-k}$ . ■

**Théorème. (*Thom*)**

Pour  $k < n+1$ , le groupe d'homotopie  $\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}^k), *) \simeq \Omega_n$  canoniquement.

▷ Le lemme suivant suffit. ■

**Lemme**

Si  $k, p \geq n$  sont des entiers naturels,  $\pi_{n+k}(T(\gamma_p^k), *) \rightarrow \Omega_n$  est surjective.

▷ Pour montrer cela, on veut décrire toute  $n$ -variété  $M$  comme l'inverse par  $g$  d'une section nulle pour  $g : S^{n+k} \rightarrow T(E)$ . On prend le fibré normal du plongement de  $M$  dans un espace euclidien. ■

# Appendice

