

Applications directes de la topologie algébrique à des trucs qui n'ont rien à voir super difficile à montrer sinon et donc la preuve que la topologie algébrique c'est génial

Topologie générale

- Théorème d'invariance du domaine de type 2-3 : \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 ne sont pas homéomorphes
- Plus généralement, \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes pour $n \neq m$.

Algèbre générale

- Théorème de Nielsen-Schreier : tout sous-groupe d'un groupe libre est libre

Algèbre matricielle

- $O(n+1)/O(n) \simeq S^n$

Algèbre commutative

- Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant est scindé

Algèbre linéaire

- Théorème de Perron-Frobenius faible : toute matrice 3×3 à coefficients positifs possède une valeur propre positive

Théorie de Lie

- Tout groupe de Lie compact agissant librement sur une sphère est isomorphe à S^1, S^3 où $N_{S^3}(S^1)$

Géométrie euclidienne

- Théorème de Platon : il n'existe que cinq polyèdres réguliers dans l'espace
- La sphère de dimension n ne se plonge pas dans l'espace de dimension n

Géométrie projective

- \mathbf{RP}^{2^r} ne se plonge pas dans \mathbf{RP}^i pour $i \leq 2^{r+1} - 1$.
- \mathbf{RP}^n admet au plus $2^r - 1$ champs de vecteurs linéairement indépendants où $n + 1 = 2^r m$.
- \mathbf{CP}^n n'est pas un produit de variétés.

Analyse

- Théorème de Brouwer : tout endomorphisme d'une boule fermée admet un point fixe
- Théorème de Borsuk-Ulam : sur le globe terrestre, il existe toujours deux points antipodaux ayant même altitude et même température
- Théorème de Lusternik-Schnirelmann : le soleil ne se couche jamais sur l'un au moins des trois états qui se partagent la Terre dans le roman *1984* de Georges Orwell
- Théorème de la boule chevelue : tout champ de vecteurs sur la sphère qui ne s'annule pas admet au moins un point de discontinuité
- Théorème du sandwich au jambon : étant donnés trois mesurables de l'espace de dimension 3, il existe un plan affine divisant chacun d'entre eux en deux sous-ensembles de mesures égales

Variétés différentielles

- Classification des surfaces topologiques : toute variété réelle de dimension 2 est à difféomorphisme près une sphère ou une somme connexe dénombrable de tores

Théorie des graphes

- Groupe fondamental d'un graphe fini en tant que CW-complexe : dans un graphe connexe de connectivité k l'ensemble des chemins tracés sur le graphe est $\simeq F_k$ qui en particulier est de rang k

Arithmétique

- Théorème d'Euclide : il existe une infinité de nombres premiers

Combinatoire

- Partage discret du collier : dans un collier de perles rouges et noires, deux coupes suffisent pour partager le collier entre deux voleurs

Théorie des ensembles

- L'axiome du choix sur un ensemble X , *i.e.* toute surjection sur X admet une section, est équivalent à $H^1(X; G) = 0$ où X est discret et G parcourant l'ensemble des groupes abéliens, où $H^1(X; G) = 0$ signifie que tout fibré G -principal admet une section. (*Cohomology detects failures of the axiom of choice*, Transactions of the American Mathematical Society, 279, 1 (1983))

Théorie des jeux

- Condition nécessaire d'équilibre : un jeu possède un équilibre de Nash seulement s'il est inéquitable

Théorie du choix social

- Paradoxe du choix social : il n'existe pas de règle de choix social continue, anonyme et respectant l'unanimité
- Lemme au théorème d'impossibilité d'Arrow : le critère d'unanimité : si tout le monde préfère a à b alors a est préférée à b , est équivalent à l'existence d'un dictateur

Chimie

- Oui ! Mais je n'y comprends rien.

Physique

- L'espace des phases d'un système mécanique classique de lagrangien non dégénéré a le même type d'homotopie que son espace des configurations

Informatique théorique

- Formulation de la théorie homotopique des types

Vraie vie

- Un nœud simple ne peut être déformé en un nœud de huit sans rompre les brins.