DIVISEURS SUR LES SURFACES DE RIEMANN COMPACTES

Surface de Riemann compacte quelconque

- $\boxed{\mathrm{Princ}(X) \subseteq \mathrm{Div}^0(X)} \subseteq \mathrm{Div}(X)$.
- $\mathrm{Princ}(X) = \mathcal{M}(X)^*/(f_1 = \alpha f_2, \alpha \in \mathbb{C}^2)$.
- Les classes d'équivalence $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Princ}(X)$ sont contenues dans les iso-degré.
- $\mathrm{Eff}(X) \cap \mathrm{Princ}(X) = \{\mathrm{cstes}\}$.
- $\mathrm{Div}(X) = \mathrm{Eff}(X) - \mathrm{Eff}(X)$.

- $L(D) \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \mathrm{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}$ l'ensemble des diviseurs d'ordre de « pôle » au plus n_i en p_i si $D = \sum_i n_i p_i$.
- Les classes d'équivalence $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Princ}(X)$ sont contenues dans les iso-$\ell(D)$.
- Si $D \in \mathrm{Div}^0(X)$, $D \in \mathrm{Princ}(X) \Leftrightarrow \ell(D) \geq 1$.
- Si $D \in \mathrm{Div}^0(X)$, $\ell(D) = \ell(-D)$.
- $L(D) \neq 0 \ \Leftrightarrow D \sim E \geq 0$.
  - → Si $D = 0$, $L(D) = \langle 1 \rangle = \{\mathrm{cstes}\}$ et $\ell(D) = 1$.
  - → Si $D \in \mathrm{Princ}(X)$, $L(D) = \langle \frac{1}{D} \rangle$ et $\ell(D) = 1$.
  - → Si $D \geq 0$, $\ell(D) \leq \deg(D) + 1$.
  - → Si $\deg(D) < 0$ $L(D) = 0$ et $\ell(D) = 0$.

- Tout diviseur est associé à une section méromorphe d'un certain fibré en droites.
- L'équivalence entre diviseurs traduit l'isomorphie des fibrés en droites associés

- *(Riemann-Roch)* K canonique, *ie* associé à une forme : $\ell(D) + \ell(K - D) = \deg(D) - g(X) + 1$.
  Où $L(D) = \{F \in \mathcal{M}(X) \mid (F) \geq -D\} \cup \{0\}$ et $L(K - D) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) \mid (\omega) \geq D\} \cup \{0\}$.
  Rappel : $\ell(K) = g(X)$. On en déduit $\deg(K) = -\chi(X)$.
- *(Existence)* $\ell((g + 1)[p]) \geq 2$.
- $\ell(D) \geq \deg(D) - g(X) + 1$.
- Si $\deg(D) > -\chi(X)$, $\ell(D) = \deg(D) - g(X) + 1$.
- *(Abel)* $\mathrm{Princ}(X) = \mathrm{Div}^0(X) \cap \ker(J)$ avec la fonction $J: D = \sum_i^n z_i - p_i \in \mathrm{Div}^0(X) \mapsto \left(\sum_i \int_{z_i}^{p_i} \alpha_1, \ldots, \sum_i \int_{z_i}^{p_i} \alpha_g\right)$ où $(\alpha_i)_i$ est une base de $\Omega^{1,0}(X)$.

Sphère de Riemann

- $\mathrm{Princ}(\mathbb{CP}^1) = \mathrm{Div}^0(\mathbb{CP}^1)$.
  - → Si $\deg(D) = 0$, $D \neq 0$, $\ell(D) = 1$.
  - → Si $\deg(D) > 0$, $\ell(D) = \deg(D) + 1$.

Courbes elliptiques

- $\mathrm{Princ}(E_\tau) = \mathrm{Div}^0(E_\tau) \cap \ker(J)$ où $J: z \in E_\tau \mapsto [z]$.
  (Ainsi si $D = \sum a_i - b_i$, $J(D) = 0 \Leftrightarrow \sum a_i - b_i \in \Lambda_\tau$.)
- Si $\deg(D) > 0$, $D \sim E = \deg(D).[p_0] > 0$.
  - → Si $E \in \mathrm{Eff}(X)$, $\ell(D) \leq \deg(D)$.
  - → Si $\deg(D) > 0$, $\ell(D) = \deg(D)$.
  - → Si $\deg(D) = 0$, $\ell(D) = 1$ si $J(D) = 0$ et $\ell(D) = 0$ sinon.