Definition 0.1 (naive Menge)**.** Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, welche dann Elemente genannt werden, zu einem Objekt.

Bezeichnung 0.2 (Quantoren, Mengenschreibweise, Relationen)**.** Einige häufig verwendete Symbole

- $(\dots) := (\dots)$ definiert das, was links steht, durch das, was rechts steht.
- $\forall$ bedeutet „für alle".
- $\exists$ bedeutet „es existiert".
- Wenn M eine Menge ist, bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente in M (*Kardinalität*). Für die leere Menge ist $|\varnothing| = 0$.
- Eine Menge M heißt n*-elementig*, falls $|M| = n$ $(n \geq 0)$.
- Allgemein notieren wir Mengen bspw. durch

$$\{21, 35\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 40, 7 \mid x, x \in \{7, 14, 28\}\}.$$

$\{\ \}$ sind Mengenklammern.

$\mid$ steht oft für „mit der Eigenschaft". In unserem Beispiel heißt das „alle $x \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass …"

, steht oft für „und", eine logische Verknüpfung der Bedingungen bzw. Eigenschaften.

$\in$ steht für „ist Element von". Hingegen ist $\notin$ „ist kein Element von".

$=$ steht für „gleich", d. h. links und rechts steht das gleiche und können gegenseitig ausgetauscht werden. Analog ist $\neq$ „ungleich".

- $\leq, <, \geq, >$ sind „kleiner gleich", „(echt) kleiner", „größer gleich", „(echt) größer".

Definition 0.3 (Teilmenge)**.** Seien A und B Mengen. Dann ist

- A eine *Teilmenge* von B, falls $x \in B$ für alle $x \in A$, geschrieben $A \subseteq B$, und
- A eine *echte Teilmenge* von B, falls $A \subseteq B$, aber $A \neq B$, geschrieben $A \subset B$.

Definition 0.4 (Mengenoperatoren)**.** Für Mengen A und B seien

- $A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}$ der *Durchschnitt* von A und B,
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ die *Vereinigung* von A und B,
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ die *Mengendifferenz* von A und B,
- $\mathcal{P}(A) := \{U \mid U \subseteq A\}$ die *Potenzmenge* von A.

Definition 0.5 (Indexmenge)**.** Sei I eine *Indexmenge*, d. h. für jedes $i \in I$ ist A_i eine Menge. Dann sind

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\} \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

der *Durchschnitt* bzw. *Vereinigung* der Mengen A_i über die Indexmenge I.

Definition 0.6 (Paar)**.** Ein *Paar* (oder *2-Tupel*) besteht aus der Angabe eines ersten Elements a und eines zweiten Elements b. Wir schreiben (a, b).

Definition 0.7 (KARTESISCHES Produkt, Tupel)**.** Das KARTESISCHE *Produkt* zweier Mengen A und B ist $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Für Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ ist das KARTESISCHE *Produkt*

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\},$$

dessen Elemente n*-Tupel* genannt werden.

Sei A eine Menge und $n \geq 1$. Dann ist

$$A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$$

das n*-fache* KARTESISCHE *Produkt* von A.

Bezeichnung 0.8. Die n-Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ schreiben wir oft auch senkrecht auf:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definition 0.9 (Implikation, Äquivalenz)**.** Seien A, B und C Aussagen. Dann bedeuten

- $A \implies B$ „A impliziert B“, „aus A folgt B“,
- $A \iff B$ „A genau dann, wenn B“, „A und B sind äquivalent“, d. h. $A \implies B$ und $B \implies A$,
- $\neg A$, „nicht A“.

Satz 0.10 (Syllogismus, Kontraposition)**.**

- *Aus $A \implies B$ und $B \implies C$ folgt $A \implies C$ (*Syllogismus*).*
- *Es gilt $A \implies B$ genau dann, wenn $\neg B \implies \neg A$ (*Kontraposition*).*

Definition 0.11 (Abbildung)**.** Seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* f von X nach Y ist eine Vorschrift, durch die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zugeordnet wird.[1]

Bezeichnung 0.12. Wir schreiben $f\colon X \to Y$, $x \mapsto f(x)$. Dabei verwenden wir $\to$ zwischen Mengen und $\mapsto$ zwischen Elementen.

Definition 0.13 (Menge aller Abbildungen)**.** Seien X und Y Mengen. Dann ist $\mathrm{Abb}(X, Y)$ die *Menge aller Abbildungen* von X nach Y.

Definition 0.14 (Identität)**.** Sei X eine Menge. Als *Identität* von X bezeichnen wir die Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$, $x \mapsto x$. Es gilt also $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

Definition 0.15 (Komposition von Abbildungen)**.** Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die *Komposition* (*Hintereinanderschaltung*, *Verkettung*) von f und g, gelesen „g verknüpft mit f“, „g komponiert mit f“, „g nach f“ oder „g Kringel f“.

Bezeichnung 0.16. Wir schreiben auch manchmal gf für $g \circ f$.

Definition 0.17 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist

- f *text*, falls für alle $x_1 \neq x_2$ in X gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- f *surjektiv*, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, sodass $f(x) = y$ ist, und
- f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist. Dann nennen wir f eine *Bijektion*.

Definition 0.18 (Umkehrabbildung)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann ist die *Umkehrabbildung* $f^{-1}\colon Y \to X$ definiert durch $f^{-1}(f(x))\colon x$ für alle $x \in X$ bzw. $f(x) \in Y$.
Es gilt dann $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Definition 0.19. Seien M und I Mengen. Dann sei

$$M^I := \mathrm{Abb}(I, M)$$

die *Menge aller Abbildungen $I \to M$.*

[1] Die Menge X bezeichnen wir als *Definitionsmenge* und Y als *Zielmenge*. Die Elemente aus X heißen *Urbilder* oder *Argumente*, die Elemente aus Y heißen *Zielelemente*. Die tatsächlich angenommen Werte nennen wir *Bilder* oder schlicht *Werte*, und deren Menge auch *Bild* oder *Bildmenge*.

Definition 0.20 (Bild, Urbild einer Menge)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Und seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen. Wir bezeichnen

$$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(B) \coloneqq \{x \mid f(x) \in B\}$$

als *Bild* von A unter f bzw. *Urbild* von B unter f. Dahingegen ist $f(X)$ das *Bild* von f. Es gilt stets $f^{-1}(Y) = X$.

Definition 0.21 (Graph)**.** Der *Graph* einer Abbildung $f\colon X \to Y$ ist

$$\Gamma(f) \coloneqq \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Bezeichnung 0.22. Neben diesen Axiomen führen wir noch einige Konventionen ein.

- Um Klammern zu sparen, gilt *Punktrechnung vor Strichrechnung.* Damit können wir z. B. das Distributivgesetz **??** umschreiben als $a \cdot c + b \cdot c$, ohne dass Verwirrung entsteht.
- Wir definieren $a - b \coloneqq a + (-b)$ und $ab \coloneqq a \cdot b$ für $a, b \in K$. Somit können wir Plusklammern und Malpunkte weglassen, wenn der Sinn dabei nicht verfälscht wird (z. B. nicht $1 \cdot 2 \neq 12$).
- Für $a, b \in K$ mit $b \neq 0$ sei
$$\frac{a}{b} \coloneqq a/b \coloneqq a \cdot b^{-1}.$$

Bezeichnung 0.23. Wir definieren kurz $K^\times \coloneqq K \setminus \{0\}$.

Lemma 0.24 (Linksdistributivität)**.** *Es gilt $a(b + c) = ac + ac$ für alle $a, b, c \in K$.*

Lemma 0.25 (Eindeutigkeit der Null)**.** *Es gibt nur ein Nullelement in einem Körper.*

Lemma 0.26. *Für alle $a \in K$ gilt $0a = 0$.*

Bezeichnung 0.27. Sei K ein Körper. Für $a \in K$ und $0 \neq m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$m \cdot a \coloneqq \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ mal}}.$$

Definition 0.28 (Charakteristik)**.** Wir definieren $\operatorname{char}(K)$ als die *Charakteristik* von K als

$$\operatorname{char}(K) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{falls } m \cdot 1_K \neq 0_K \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ \min\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid m \cdot 1_K = 0_K\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 0.29. *Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = p > 0$. Dann ist p eine Primzahl.*

Definition 0.30 (kommutativer Ring)**.** Ein Ring R heißt *kommutativ*, falls zusätzlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt.

Bezeichnung 0.31 (Nullring)**.** Wir nennen $R = \{0_R\}$ den trivialen[2] *Nullring.*

Lemma 0.32. *Seien $a, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$. Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente $r, q \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq r < m$, sodass $a = qm + r$ gilt. Setze $r_m(a) \coloneqq r$.*

Definition 0.33 ($\mathbb{Z}$ modulo m)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$. Dann sei $\mathbb{Z}_m \coloneqq \{0, 1, \dots, m-1\}$. Für $a, b \in \mathbb{Z}_m$ definieren wir noch Abbildungen $+$ und $\cdot$ durch $a + b \coloneqq r_m(a +_{\mathbb{Z}} b)$ und $a \cdot b \coloneqq r_m(a \cdot_{\mathbb{Z}} b)$. (Die Operationen in den $r_m(\dots)$ kommen aus $\mathbb{Z}$.)

Lemma 0.34. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring.*[3]

Lemma 0.35. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ *ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.*

Bezeichnung 0.36 (endlicher Körper)**.** Für Primzahlen p schreiben wir auch $\mathbb{F}_p \coloneqq \mathbb{Z}_p$.

Bezeichnung 0.37. Um die Notation zu vereinfachen, legen wir $v_1 - v_2 \coloneqq v_1 + (-v_2)$, $av \coloneqq a \cdot v$ für alle $v_1, v_2, v \in V$ und $a \in K$ sowie *Punkt- vor Strichrechnung* fest.

[2]Als *triviale* Objekte werden oft offensichtliche oder sehr einfache Objekte sowie uninteressante Randfälle bezeichnet.
[3]Ein sog. *Restklassenring modulo m.*

Bezeichnung 0.38 (Vektor, Skalar, Nullvektor)**.** Die Elemente von V nennen wir *Vektoren*, die Elemente von K nennen wir *Skalare*. Das Nullelement 0_V heißt *Nullvektor* oder auch *die Null von* V.

Bezeichnung 0.39 (Nullvektorraum)**.** Sei $V \coloneqq \{0\}$ über K der (triviale) *Nullvektorraum* (oft auch einfach nur $V = 0$). Addition und Skalarmultiplikation können nur auf genau eine Weise definiert werden:

$$\begin{aligned} +\colon V \times V \to V, &\qquad 0 + 0 \mapsto 0 \\ \cdot\colon V \times V \to V, &\qquad 0 \cdot 0 \mapsto 0 \end{aligned}$$

Definition 0.40 (Standardvektorraum)**.** Sei K ein Körper. Für $n \geq 1$ sei $V \coloneqq K^n$ das n-fache kartesische Produkt von K. Die Elemente aus K^n schreiben wir oft als Spalten

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \dots, a_n \in K$. Wir definieren komponentenweise

$$+\colon V \times V \to V \quad \text{durch} \quad \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und

$$\cdot\colon K \times V \to V \quad \text{durch} \quad \left(a, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} ab_1 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, der sog. *Standardvektorraum.* Wir legen $K^0 \coloneqq 0$ aus K fest. Dabei stammt die komponentenweise Addition und Multiplikation aus K.

Definition 0.41 (Funktionenraum)**.** Sei K ein Körper und sei $I \neq \varnothing$ eine Menge. Wir setzen $V \coloneqq K^I \coloneqq \mathrm{Abb}(I, K)$ und definieren

$$+\colon V \times V \to V, \quad (f, g) \mapsto f + g \qquad \text{und} \qquad \cdot\colon K \times V \to V, \quad (a, f) \mapsto af,$$

punktweise durch

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (af)(x) \coloneqq a(f(x))$$

für alle $f, g \in V$, $a \in K$, und $x \in I$.

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum, der sog. *(lineare) Funktionenraum.* Wir definieren $K^{\varnothing} = 0$ als Nullabbildung.

Definition 0.42. Sei K ein Körper und sei $I \neq \varnothing$ eine Menge. Dann ist

$$K^{(I)} \coloneqq \{f \in K^I \mid f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x \in I\}$$

ein K-Vektorraum, wobei wir Addition und Skalarmultiplikation von K^I benutzen. Wir definieren $K^{(\varnothing)} = 0$ als Nullabbildung.

Definition 0.43 (Teilkörper)**.** Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper und sei K eine Teilmenge von L, sodass die Eigenschaften

1. $0, 1 \in K$ (neutrale Elemente);
2. $a + b \in K$ für alle $a, b \in K$ (Abgeschlossenheit unter Addition);
3. $a \cdot b \in K$ für alle $a, b \in K$ (Abgeschlossenheit unter Multiplikation);
4. $-a \in K$ für alle $a \in K$ (additive Inverse) und
5. $a^{-1} \in K$ für alle $a \in K^{\times}$ (multiplikative Inverse)

erfüllt sind. Durch Einschränkung erhalten wir die Abbildungen

$$+\colon K \times K \to K \qquad \text{und} \qquad \cdot\colon K \times K \to K.$$

(Das ist aufgrund der Abgeschlossenheit von $+$ und $\cdot$ garantiert, s. Punkte 2 und 3.) Wir können leicht überprüfen, dass K einen Körper bildet, und nennen K einen *Teilkörper* von L.

Definition 0.44 (externe direkte Summe)**.** Seien V und W zwei K-Vektorräume. Dann ist die $V \times W$ wieder ein K-Vektorraum, wobei Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise definiert sind durch

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \coloneqq (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \qquad \text{und} \qquad a(v, w) \coloneqq (av, aw)$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $a \in K$. Der K-Vektorraum $V \times W$ nennen wir die *(externe) direkte Summe* von V und W und schreiben $V \oplus W$.

Definition 0.45. Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge U von V heißt *Unterraum* von V, falls gilt:

1. $U \neq \varnothing$;
2. $u_1 + u_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$ (*Abgeschlossenheit bzgl. Addition*) und
3. $au \in U$ für alle $a \in K$ und $u \in U$ (*Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation*).

Lemma 0.46. *Sei U ein Unterraum von V. Durch Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation von V erhalten wir Abbildungen $+\colon U \times U \to U$ und $\cdot\colon K \times U \to U$ (was aufgrund Punkte 2 und 3 möglich ist). Dann ist U zusammen mit beiden Einschränkungen wieder ein K-Vektorraum.*

Definition 0.47 (Gerade)**.** Ist $v \neq 0$, so nennen wir

$$U_v \coloneqq Kv \coloneqq \{av \mid a \in K\}$$

die durch v verlaufende *Gerade*.

Definition 0.48 (Durchschnitt, Summe)**.** Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Dann ist $U_1 \cap U_2$ der *Durchschnitt* von U_1 und U_2 sowie

$$U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

die *Summe* von U_1 und U_2.

Lemma 0.49. *$U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.*

Definition 0.50 (interne direkte Summe)**.** Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Ist $U_1 \cap U_2 = 0$, so nennen wir

$$U_1 \oplus U_2 \coloneqq U_1 + U_2$$

die *(interne) direkte Summe* von U_1 und U_2.

Definition 0.51 (Summe, interne direkte Summe von Familien)**.** Sei I eine Indexmenge, und für jedes $i \in I$ sei U_i ein Unterraum von V (kurz $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen von V). Die *Summe*

$$\sum_{i \in I} U_i$$

der Unterräume U_i ist die Menge aller Vektoren $v \in V$, für die es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, sodass

$$v = \sum_{j \in J} u_j \qquad \text{mit } u_j \in U_j \text{ für alle } j \in J.$$

Ist

$$U_j \cap \left(\sum_{i \in I \setminus j} U_i \right) = 0 \qquad \text{für alle } j \in I,$$

so nennen wir die Summe *(interne) direkte Summe* und schreiben

$$\bigoplus_{i \in I} U_i \coloneqq \sum_{i \in I} U_i.$$

Lemma 0.52. *$\bigcup_{i\in I} U_i$ und $\sum_{i\in I} U_i$ sind Unterräume von V.*

Definition 0.53 (lineare Abbildung)**.** Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt *linear* (oder *K-linear*), falls folgende Bedingungen gelten:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$; und
2. $f(av) = af(v)$ für alle $v \in V$ und $a \in K$.

Definition 0.54 (Homomorphismus, Endomorphismus)**.** Ist $f\colon V \to W$ linear, so nennen wir f einen *Homomorphismus*. Ist zudem $V = W$, so nennen wir f einen *Endomorphismus* (also $f\colon V \to V$).

Weiterhin definieren wir

$$\mathrm{Hom}(V, W) \coloneqq \{f \in \mathrm{Abb}(V, W) \mid f \text{ ist ein Homomorphismus}\}$$

und

$$\mathrm{End}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}(V, V).$$

Definition 0.55 (Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus)**.** Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus.

- f ist ein *Monomorphismus*, falls f injektiv ist.
- f ist ein *Epimorphismus*, falls f surjektiv ist.
- f ist ein *Isomorphismus*, falls f bijektiv ist.

Definition 0.56 (isomorph)**.** Zwei K Vektorräume V und W heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus $f\colon V \to W$ existiert. Wir schreiben dann $V \cong W$.

Lemma 0.57. *Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to w$ ist genau dann linear, wenn*

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$$

für alle $a_1, a_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt.

Definition 0.58 (Nullabbildung)**.** Seien V und W zwei K-Vektorräume. Die *Nullabbildung*

$$f\colon V \to W, \quad v \mapsto 0 \quad \text{für alle } v \in V$$

ist ein Homomorphismus. Wir schreiben $f = 0$.

Definition 0.59 (Identität)**.** Sei V ein K-Vektorraum. Die *Identität*

$$f\colon V \to V, \quad v \mapsto v \quad \text{für alle } v \in V$$

ist ein Homomorphismus. Wir schreiben $f = \mathrm{id}_V$.

Lemma 0.60. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt $f(0) = 0$.*

Lemma 0.61. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$ wieder ein Isomorphismus.*

Lemma 0.62. *Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ Homomorphismen. Dann ist die Komposition $g \circ f\colon U \to W$ auch ein Homomorphismus.*

Lemma 0.63. *Für alle $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $a \in K$ definieren wir Abbildungen (Addition und Skalarmultiplikation eines Funktionenraums)*

$$f + g\colon V \to W, \quad v \mapsto f(v) + g(v) \qquad \text{und} \qquad af\colon V \to W, \quad v \mapsto a(f(v)).$$

Dann ist $(\mathrm{Hom}(V, W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum

Lemma 0.64. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus.*

1. *Existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$, so ist f ein Monomorphismus.*

2. Existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$, so ist f ein Epimorphismus.

Definition 0.65 (Restklasse modulo U)**.** Sei V ein K-Vektorraum und sei U ein Unterraum von V sowie $v \in V$. Dann ist die *Restklasse von v modulo U* definiert als die Menge

$$v + U \coloneqq \{v + u \mid u \in U\}.$$

Das entspricht dem Unterraum U, aber verschoben um v.[4]

Definition 0.66 (affine Gerade)**.** Für alle $v, w \in V$ sei

$$L_{v,w} \coloneqq \{u_{v,w}(a) \coloneqq av + (1-a)w \mid a \in K\}.$$

Falls $v \neq w$, nennen wir $L_{v,w}$ die durch v und w verlaufende *affine Gerade*. Falls $v = w$ ist $L_{v,w} = \{v\}$.

Lemma 0.67. *Seien $v, w \in V$. Es gilt für alle affinen Geraden*

$$L_{v,w} = w + U_{v-w}.$$

Definition 0.68 (Kern, Bild)**.** Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann ist

$$\mathrm{Kern}(f) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subseteq V$$

der *Kern* von f, und

$$\mathrm{Bild}(f) \coloneqq \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

das *Bild* von f.

Lemma 0.69. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gelten:*

1. $\mathrm{Kern}(f)$ *ist ein Unterraum von V.*
2. $\mathrm{Bild}(f)$ *ist ein Unterraum von W.*
3. $\mathrm{Kern}(f) = 0$ *genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.*
4. $\mathrm{Bild}(f) = W$ *genau dann, wenn f ein Epimorphismus ist.*

Lemma 0.70. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus und sei $b \in \mathrm{Bild}(f)$. Dann ist $f^{-1}(b)$ genau dann ein Unterraum von V, wenn $b = 0$.*

Lemma 0.71. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus und seien $b \in \mathrm{Bild}(f)$ und $v \in f^{-1}(b)$. Dann gilt*

$$f^{-1}(b) = v + f^{-1}(0) = v + \mathrm{Kern}(f).$$

Definition 0.72 (Matrix (informell))**.** Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen. Eine *$(m \times n)$-Matrix* (mit *Einträgen in K*) ist eine Anordnung von Elementen $a_{ij} \in K$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ in Form eines Rechtecks/einer Tabelle

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnung 0.73 (Menge der Matrizen, Zeile, Spalte, Eintrag)**.** Mit $K^{m,n}$ bezeichnen wir die *Menge aller $(m \times n)$-Matrizen.* Die m-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

nennen wir die *j-te Spalte* von A, und die n-Tupel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

nennen wir die *i-te Zeile* von A. Für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ nennen wir $A_{ij} \coloneqq a_{ij}$ den *ij-ten Eintrag* von A.

[4]Die Namensgebung entstammt der Zahlentheorie. Ähnlich sind alle $w \in U$ in der Restklasse $v + U$ enthalten, und v ist ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse (definiert durch $v \sim w :\Longleftrightarrow (v - w) \in U$).

Definition 0.74 (Matrix (formal))**.** Für $s \geq 1$ sei $I_s \coloneqq \{1, 2, \ldots, s\}$. Wir setzen

$$K^{m,n} \coloneqq K^{I_m \times I_n} = \mathrm{Abb}(I_m \times I_n, K).$$

Die Elemente von $K^{m,n}$ nennen wir $(m \times n)$-*Matrizen* (mit *Einträgen in* K).

Eine Matrix A ist also die Abbildung[5]

$$A\colon I_m \times I_n \to K, \quad (i,j) \mapsto a_{ij}.$$

Bezeichnung 0.75. Statt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

schreiben wir auch

$$A = (a_{ij}) \in K^{m,n}.$$

Definition 0.76 (Nullmatrix)**.** Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ eine Matrix mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j. Wir schreiben dann $A = 0_{m,n} = 0$ und nennen sie die *Nullmatrix* in $K^{m,n}$.

Für $m = 0$ oder $n = 0$ beschreibt $K^{m,n} \coloneqq K^{I_m \times I_n} = K^{\varnothing}$ mit $I_0 \coloneqq \varnothing$ die Menge der Matrizen, die keine Zeilen oder Spalten haben. In dem Fall enthält $K^{m,n}$ genau ein Element, die *leere Matrix* oder auch *Nullmatrix*, die wir wieder mit 0 oder $0_{m,n}$ bezeichnen.

Bezeichnung 0.77. Für $m, n \geq 0$ definieren wir

$$M_{m,n}(K) \coloneqq K^{m,n} \qquad \text{und} \qquad M_n(K) \coloneqq K^{n,n}$$

für rechteckige bzw. quadratische Matrizen.

Definition 0.78 (Addition)**.** Seien $m, n \geq 1$. Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen in $K^{m,n}$. Die *Summe* von A und B ist

$$A + B \coloneqq (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

und die Abbildung

$$+\colon K^{m,n} \times K^{m,n} \to K^{m,n}, \quad (A, B) \mapsto A + B$$

heißt *Addition von Matrizen.*

Definition 0.79 (Skalarmultiplikation)**.** Seien $m, n \geq 1$. Seien $a \in K$ und $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Die *Skalarmultiplikation* von a und B ist

$$a \cdot A \coloneqq aA \coloneqq (aa_{ij}) = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \cdots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & \cdots & aa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \cdots & aa_{mn} \end{pmatrix}$$

und die Abbildung

$$\cdot\colon K \times K^{m,n} \to K^{m,n}, \quad (a, A) \mapsto aA$$

heißt *Skalarmultiplikation für Matrizen.*

Lemma 0.80. $(K^{m,n}, +, \cdot)$ *ist ein* K*-Vektorraum.*

[5] Die Definition erinnert an die Schreibweise von Familien, $A = (a_{ij})_{(i,j) \in I_m \times I_n}$.

Definition 0.81 (Produkt)**.** Seien $m, n, p \geq 1$ und seien $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ und $B = (b_{jk}) \in K^{n,p}$ Matrizen. Das *Produkt* von A und B ist

$$A \cdot B \coloneqq AB \coloneqq (c_{ik}) \in K^{m,p} \qquad \text{mit} \qquad c_{ik} \coloneqq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

und die Abbildung

$$\cdot \colon K^{m,n} \times K^{n,p} \to K^{m,p}, \quad (A, B) \mapsto AB$$

heißt *Multiplikation von Matrizen.*

Lemma 0.82 (Assoziativität)**.** *Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$, $B = (b_{jk}) \in K^{n,p}$ und $C = (c_{kl}) \in K^{p,q}$. Dann gilt*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Lemma 0.83 (Linksdistributivität)**.** *Für alle $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$, $B = (b_{jk})$ und $C = (c_{jk})$ in $K^{n,p}$ gilt*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Lemma 0.84 (Rechtsdistributitvität)**.** *Für alle $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ in $K^{m,n}$ und $C = (c_{jk}) \in K^{n,p}$ gilt*

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Definition 0.85 (Einheitsmatrix)**.** Für $n \geq 1$ sei

$$E_n \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

die *Einheitsmatrix* in $K^{n,n}$, also

$$E_n \coloneqq (a_{ij}) \in K^{n,n} \qquad \text{mit} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 0$ sei $E_0 = 0_n$.

Lemma 0.86 (Einselement)**.** *Für alle $A \in K^{m,n}$ gilt*

$$E_m A = A = A E_n.$$

Lemma 0.87. *Für alle $a \in K$, $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{n,p}$ gilt*

$$a(AB) = (aA)B = A(aB).$$

Lemma 0.88 (Ring der quadratischen Matrizen)**.** $(M_n(K), +, \cdot)$ *ist ein Ring.*

Bezeichnung 0.89. Wir schreiben auch $ar \coloneqq a * r$ und $rs \coloneqq r \cdot s$.

Lemma 0.90 (Algebra der quadratischen Matrizen)**.** *$M_n(K)$ ist eine K-Algebra, wobei $+$ die Addition von Matrizen, $\cdot$ die Multiplikation von Matrizen und $*$ die Skalarmultiplikation von Matrizen ist.*

Definition 0.91 (Matrixabbildung)**.** Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ eine Matrix. Wir definieren eine Abbildung, die wir ebenfalls mit A bezeichnen, durch

$$A \colon K^n \to K^m, \quad v \mapsto A(v) \coloneqq A \cdot v,$$

wobei $A \cdot v$ das Produkt der $(m \times n)$-Matrix A mit der $(n \times 1)$-Matrix v ist. (Hier haben wir $K^n = K^{n,1}$ identifiziert.) Die Abbildung $A \colon K^n \to K^m$ heißt *Matrixabbildung.*[6]

[6] Auch bekannt als *Matrix-Vektor-Produkt.*

Lemma 0.92. *Die Matrixabbildung $A\colon K^n \to K^m$ ist K-linear.*

Satz 0.93. *Seien $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{n,p}$ sowie $A\colon K^n \to K^m$ bzw. $B\colon K^p \to K^n$ die entsprechenden Matrixabbildungen. Dann gilt*

$$A \cdot B = A \circ B,$$

wobei $A \cdot B$ das Matrixprodukt und $A \circ B$ die Komposition von Abbildungen ist.

Definition 0.94 (Standardbasisvektor)**.** Sei $n \geq 1$. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i^{(n)} \coloneqq e_i \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \qquad \text{mit } a_j \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

der *i-te Standardbasisvektor* oder auch *i-te Einheitsvektor* von K^n.

Lemma 0.95. *Für jedes $v \in K^n$ gibt es eindeutig bestimmte $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.*

Definition 0.96 (Standardbasis)**.** Wir nennen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ die *Standardbasis* von K^n.

Lemma 0.97. *Seien $f, g \in \operatorname{Hom}(K^n, K^m)$. Dann gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(e_i) = g(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Satz 0.98. *Für $m, n \geq 0$ gilt*

$$K^{m,n} \cong \operatorname{Hom}(K^n, K^m).$$

Korollar 0.99. *Alle Abbildungen in $\operatorname{Hom}(K^n, K^m)$ sind Matrixabbildungen.*
Für $m = 0$ oder $n = 0$ gilt $\operatorname{Hom}(K^m, K^n) = \{0\}$, wobei $0\colon K^n \to K^m$ die Nullabbildung ist.

Definition 0.100 (Elementarmatrix Typ (I))**.** Für $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$ und $a \in K$ definieren wir eine quadratische Matrix

$$T_{ij}^{(m)}(a) \coloneqq T_{ij}(a) = (t_{pq}) \in K^{m,m} \qquad \text{durch} \qquad t_{pq} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } p = q, \\ a & \text{falls } (p,q) = (i,j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen diese Art von Matrizen *Elementarmatrizen vom Typ (I).*

Definition 0.101 (Elementarmatrix Typ (II))**.** Für $1 \leq i \leq m$ und $b \in K^\times$ definieren wir eine quadratische Matrix

$$D_i^{(m)}(b) \coloneqq D_i(b) = (d_{pq}) \in K^{m,m} \qquad \text{durch} \qquad d_{pq} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } p = q \neq i, \\ b & \text{falls } p = q = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen diese Art von Matrizen *Elementarmatrizen vom Typ (II).*

Definition 0.102 (Elementarmatrix Typ (III))**.** Für $1 \leq i \neq j \leq m$ definieren wir eine quadratische Matrix

$$E_{ij}^{(m)} \coloneqq E_{ij} = (e_{pq}) \in K^{m,m} \qquad \text{durch} \qquad e_{pq} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq p = q \neq j, \\ 1 & \text{falls } (p,q) = (i,j), \\ 1 & \text{falls } (p,q) = (j,1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen diese Art von Matrizen *Elementarmatrizen vom Typ (III).*

Lemma 0.103. *Die Matrixabbildungen $T_{ij}^{(m)}(a)$, $D_i^{(m)}(b)$ und $E_{ij}^{(m)}$ mit $a \in K$ und $b \in K^\times$ sind Isomorphismen.*

Lemma 0.104 (Zeilenoperationen)**.** *Seien $A \in K^{m,n}$, $a \in K$ und $b \in K^\times$. Dann bilden die Elementarmatrizen die sog.* Zeilenoperationen vom Typ (I), (II) oder (III) *oder* elementare Zeilenumformungen, *wenn sie von links multipliziert werden.*

1. *$T_{ij}^{(m)}(a) \cdot A$ entsteht aus A, wenn wir zur i-ten Zeile von A das a-fache der j-ten Zeile von A addieren.*

2. *$D_i^{(m)}(b) \cdot A$ entsteht aus A, wenn wir die i-te Zeile von A mit b multiplizieren.*

3. *$E_{ij}^{(m)} \cdot A$ entsteht aus A, wenn wir die i-te und j-te Zeile von A vertauschen.*

Lemma 0.105. *Die Zeilenoperationen vom Typ (III) können wir durch Verknüpfung von Zeilenoperationen vom Typ (I) und Typ (II) erhalten.*

Definition 0.106 (Spaltenoperationen)**.** Sei $A \in K^{n,m}$. Dann sind

$$A \cdot T_{ij}^{(m)}(a), \qquad A \cdot D_j^{(m)}(b) \qquad \text{und} \qquad A \cdot E_{ij}^{(m)}$$

die *elementaren Spaltenoperationen vom Typ (I), (II) bzw. (III).*

Definition 0.107 (reduzierte Zeilenstufenform)**.** Eine Matrix $B = (b_{ij}) \in K^{m,n}$ ist in *reduzierter Zeilenstufenform*, falls folgendes gilt:

1. $B = 0$. Oder:

2. Es existieren ein Zeilenindex $1 \leq r \leq \min(m, n)$ und Spaltenindizes $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

   (a) Für alle Zeilen $1 \leq k \leq r$ gilt $b_{kj} = 0$ für alle $j < j_k$. (In Worten: Für die ersten r Zeilen sind die ersten $j_k - 1$ Einträge der k ten Zeile alles null.)

   (b) Für alle Zeilen $1 \leq k \leq r$ gilt
   $$b_{ij_k} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
   (In Worten: Für die ersten r Zeilen ist der Eintrag in der j_k ten Spalte Eins, und alle anderen Einträge der j_k-ten Spalte sind null. Die Spalten sind also „Standardbasisvektoren“ e_k.)[7]

   (c) Für alle Zeilen $r + 1 \leq k \leq m$ gilt $b_{kj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. (In Worten: Die restlichen $m - r$ Zeilen sind alles Nullen, also ein großer Nullblock.)

Bezeichnung 0.108 (Zeilenstufenindizes)**.** Wir nennen die Menge der Indizes

$$\mathcal{I}(B) \coloneqq \begin{cases} \{j_1, \ldots, j_r\} & \text{falls } B \neq 0, \\ \varnothing & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeilenstufenindizes. Zudem definieren wir das Komplement

$$\mathcal{K}(B) \coloneqq \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I}(B).$$

Satz 0.109. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$, sodass $B \coloneqq T_t \cdots T_2 T_1 A$ in reduzierter Zeilenstufenform ist.*

Definition 0.110. Entsteht die Matrix B durch Anwendung von elementaren Zeilenoperationen aus A, so nennen wir B eine *reduzierte Zeilenstufenform von A.*

Definition 0.111 (Basisvektoren des Kerns)**.** Sei $B = (b_{ij}) \in K^{m,n}$ in reduzierter Zeilenstufenform. Für $\mathcal{I}(B) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ und $j \in \mathcal{K}(B)$ definieren wir

$$L_j^B \coloneqq \begin{pmatrix} \ell_{1j} \\ \vdots \\ \ell_{nj} \end{pmatrix} \in K^n \qquad \text{durch} \qquad \ell_{kj} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j, \\ -b_{sj} & \text{falls } k = j_s \text{ mit } j_s \in \mathcal{I}(B) \text{ und } j_s < j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 0.112 (Basis des Kerns)**.** *Sei $B \in K^{m,n}$ in reduzierter Zeilenstufenform.*

[7] Sind die Einträge b_{ij_k} nicht normiert und sind in derselben Spalte über dem Eintrag nicht alles Nullen, so bezeichnet man diese Form als (nicht reduzierte) *Zeilenstufenform*

1. *Es gilt*

$$\mathrm{Kern}(B) = \left\{ \sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B \;\middle|\; a_j \in K \right\}.$$

Falls $\mathcal{K}(B) = \varnothing$, *ist* $\mathrm{Kern}(B) = 0$.

2. *Aus*

$$\sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B = \sum_{j \in \mathcal{K}(B)} b_j L_j^B \qquad \textit{mit } a_j, b_j \in K$$

folgt $a_j = b_j$ *für alle* $j \in \mathcal{K}(B)$.

(In fortgeschrittener Sprache: Die Menge $\{L_j^B \mid j \in \mathcal{K}(B)\}$ *ist eine Basis von* $\mathrm{Kern}(B)$.*)*

Lemma 0.113. *Seien* $A \in K^{m,n}$ *eine Matrix und* $T \in K^{m,m}$ *eine Elementarmatrix. Dann gilt*

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(TA).$$

Korollar 0.114 (Bestimmung des Kerns)**.** *Sei* $A \in K^{m,n}$ *und sei* B *eine reduzierte Zeilenstufenform von* A. *Dann gilt*

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(B).$$

Das bedeutet, dass der Gauß-Algorithmus ein explizites Verfahren zur Konstruktion einer Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ *liefert.*

Satz 0.115. *Sei* $A \in K^{m,n}$ *und sei* B *eine reduzierte Zeilenstufenform von* A. *Sei zudem* $\mathcal{K}(B) = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I}(B) = \{i_1 < \cdots < i_{n-r}\}$. *Dann ist die Abbildung*

$$f\colon K^{n-r} \to \mathrm{Kern}(A), \qquad \sum_{k=1}^{n-r} a_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{n-r} a_k L_{i_k}^B$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.[8]

Lemma 0.116. *Sei* $A \in K^{m,n}$ *und sei* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *die Standardbasis von* K^n. *Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j A(e_j) \;\middle|\; a_j \in K \right\}.$$

Definition 0.117 (reduzierte Spaltenstufenform)**.** Eine Matrix $B \in K^{m,n}$ ist in *reduzierter Spaltenstufenform*, falls die transponierte Matrix B^T in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Satz 0.118. *Sei* $B \in K^{m,n}$ *in reduzierter Spaltenstufenform und sei* $r = |\mathcal{I}(B^T)|$.

1. *Es gilt*

$$\mathrm{Bild}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_j B(e_j) \;\middle|\; a_j \in K \right\}.$$

Falls $B = 0$ *die leere Matrix ist, ist* $\mathrm{Bild}(B) = 0$.

2. *Aus*

$$\sum_{j=1}^{r} a_j B(e_j) = \sum_{j=1}^{r} b_j B(e_j) \qquad \textit{mit } a_j, b_j \in K$$

folgt $a_j = b_j$ *für alle* $1 \le j \le r$.

(In fortgeschrittener Sprache: Die Menge $\{B(e_j) \mid 1 \le j \le r\}$ *ist eine Basis von* $\mathrm{Bild}(B)$.*)*

Lemma 0.119. *Seien* $A \in K^{m,n}$ *eine Matrix und* $T \in K^{n,n}$ *eine Elementarmatrix. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(AT).$$

[8] Das folgt schon daraus, dass die lineare Hülle der beiden Basen dieselbe Dimension besitzen.

Korollar 0.120 (Bestimmmung des Bildes)**.** *Sei $A \in K^{m,n}$ und sei B eine reduzierte Spaltenstufenform von A. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(B).$$

Das bedeutet, dass der Gauß-Algorithmus ein explizites Verfahren zur Konstruktion einer Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ *liefert.*

Definition 0.121 (invertierbar)**.** Sei R ein Ring. Ein Element $r \in R$ ist

1. *linksinvertierbar*, falls es ein $s \in R$ gibt mit $sr = 1$,
2. *rechtsinvertierbar*, falls es ein $t \in R$ gibt mit $rt = 1$, und
3. *invertierbar*, falls r sowohl rechts- als auch linksinvertierbar ist.

Lemma 0.122. *Sei R ein Ring und sei $r \in R$ invertierbar. Dann gelten:*

1. *Es gibt ein eindeutiges Element $r^{-1} \in R$ mit $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$.*
2. *Falls $rs = 1$ gilt für ein $s \in R$, so gilt $s = r^{-1}$.*
3. *Falls $rs = 1$ gilt für ein $s \in R$, so gilt $s = r^{-1}$.*
4. *r^{-1} ist invertierbar mit $(r^{-1})^{-1} = r$.*

Bezeichnung 0.123 (Inverse)**.** Wir nennen r^{-1} das *Inverse* von r. (Umgekehrt ist auch r das Inverse von r^{-1}.)

Satz 0.124. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist ein Isomorphismus.*
2. *$m = n$ und es gibt Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t \in K^m$ mit $T_t \cdots T_1 A = E_n$.*
3. *$m = n$ und es gibt Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t \in K^n$ mit $AT_1 \ldots T_t = E_m$.*
4. *$m = n$ und A ist invertierbar.*
5. *$m = n$ und E_n ist die reduzierter Zeilenstufenform von A.*

Korollar 0.125. *Sei K ein Körper. Für $m, n \geq 0$ gilt*

$$K^m \cong K^n \iff m = n.$$

Korollar 0.126 (Praktische Berechnung inverser Matrizen)**.** *Sei $A \in M_n(K)$ invertierbar. Der Gauß-Algorithmus liefert Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ mit $T_t \cdots T_1 A = E_n$. Dann gilt*

$$A^{-1} = T_t \cdot T_1 \qquad \textit{und} \qquad A = T_1^{-1} \cdot T_t^{-1}.$$

Definition 0.127 (allgemeine lineare Gruppe)**.** Für $n \geq 1$ sei

$$\mathrm{GL}_n(K) \coloneqq \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$$

die *allgemeine lineare Gruppe* vom Grad n über einem Körper K.

Korollar 0.128. *Jedes $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen vom Typ (I) und (II).*

Korollar 0.129. *Für alle $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Satz 0.130. *Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent:*

1. *A ist ein Isomorphismus.*
2. *A ist ein Monomorphismus.*
3. *A ist ein Epimorphismus.*

Bezeichnung 0.131. Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{m,l}$ Matrizen. Wir definieren

$$[A|B] \coloneqq \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{ml} \end{array}\right) \in K^{m,n+l},$$

wobei dessen linker $(m \times n)$-Block A und dessen rechter $(m \times l)$-Block B ist.

Proposition 0.132. *Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K^{2,2}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.*[9] *In diesem Fall ist*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Definition 0.133 (Transponierte)**.** Sei

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}.$$

Die *Transponierte* A^T von A ist definiert durch

$$A^T \coloneqq (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in K^{n,m}.$$

Der Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A wird also zum Eintrag der j-ten Zeile und i-ten Spalte von A^T.

Lemma 0.134. *Für alle $A \in K^{l,m}$ und $B \in K^{m,n}$ gilt*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Lemma 0.135. *Sei $A \in K^{m,n}$ eine Matrix und sei A^T die Transponierte von A. Dan gelten:*

1. *A ist genau dann ein Monomorphismus, wenn A^T ein Epimorphismus ist.*
2. *A ist genau dann ein Epimorphismus, wenn A^T ein Monomorphismus ist.*
3. *A ist genau dann ein Isomorphismus, wenn A^T ein Isomorphismus ist.*

Definition 0.136 (lineares Gleichungssystem, Variable, Koeffizient)**.** Ein *lineares Gleichungssystem* besteht aus m Gleichungen der Form

$$\begin{array}{cccc} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 & + \ldots + a_{1n}X_n & = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 & + \ldots + a_{2n}X_n & = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad & \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 & + \ldots + a_{mn}X_n & = b_m \end{array} \quad \text{mit } a_{ij}, b_i \in K \tag{0.137}$$

wobei $X_1, \ldots, X_n$ *Variablen* oder *Unbekannte* und die a_{ij} *Koeffizienten* genannt werden.

Definition 0.138 (Matrixschreibweise, Koeffizientenmatrix)**.** Mittels der Matrixmultiplikation können wir (0.137) kürzer schreiben:

$$Ax = b,$$

wobei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

[9] Das ist die *Determinante*, die wir später noch behandeln werden.

die *Koeffizientenmatrix* von (0.137) und

$$x := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \in K^m \qquad \text{und} \qquad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

ist.

Definition 0.139 (Lösung, Lösungsmenge)**.** Ein Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ist eine *Lösung* von (0.137), falls

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 &+ \ldots + a_{1n}v_n &= b_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 &+ \ldots + a_{2n}v_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 &+ \ldots + a_{mn}v_n &= b_m \end{aligned}$$

gilt. Die *Lösungsmenge* des linearen Gleichungssystems (0.137) definieren wir als

$$\mathcal{L}(A, b) := \{v \in K^n \mid v \text{ ist eine Lösunge von (0.137)}\}.$$

Definition 0.140 ((in-)homogen, erweiterte Koeffizientenmatrix)**.** Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt *homogen*, falls $b = 0$, und andernfalls *inhomogen*.

Die Matrix

$$[A|b] := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in K^{m,n+1}$$

ist die *erweiterte Koeffizientenmatrix* von (0.137).

Lemma 0.141. *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in K^{m,n}$ und $b \in K^m$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}(A, b) = \{v \in K^n \mid A(v) = b\} = A^{-1}(b).$$

Bezeichnung 0.142 (Lösbarkeit)**.** Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist

- *lösbar*, falls $\mathcal{L}(A, b) \neq \varnothing$,
- *eindeutig lösbar*, falls $|\mathcal{L}(A, b)| = 1$, und
- *unlösbar*, falls $\mathcal{L}(A, b) = \varnothing$.

Lemma 0.143. *Sei $T \in K^{m,m}$ eine Elementarmatrix und sei $[A|b] \in K^{m,n+1}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix. Sei*

$$[A'|b'] := \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right) := T \cdot [A|b].$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}(A', b') = \mathcal{L}(A, b).$$

Satz 0.144 (Lösung eines linearen Gleichungssystems)**.** *Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit A in reduzierter Zeilenstufenform und $\mathcal{I}(A) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$. Dann gelten:*

1. *Falls $b_k \neq 0$ für ein $r + 1 \leq k \leq m$ gilt, so ist $Ax = b$ unlösbar, d. h. $\mathcal{L}(A, b) = \varnothing$.*

2. *Angenommen es gilt* $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$. *Wir definieren*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n \qquad \textit{durch} \qquad v_k := \begin{cases} b_s & \textit{falls } k = j_s \textit{ für ein } 1 \leq s \leq r, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

   Dann gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = v + \mathcal{L}(A,0) = v + \mathrm{Kern}(A).$$

Korollar 0.145 (Lösbarkeit)**.** *Sei* $A \in K^{m,n}$ *in reduzierter Zeilenstufenform mit* $|\mathcal{I}(A)| = r$, *und sei* $b \in K^m$. *Dann ist das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *genau dann lösbar, wenn* $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$ *gilt.*

Korollar 0.146 (eindeutige Lösbarkeit)**.** *Sei* $A \in K^{m,n}$ *in reduzierter Zeilenstufenform mit* $|\mathcal{I}(A)| = r$, *und sei* $b \in K^m$. *Dann ist das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *genau dann eindeutig lösbar, wenn* $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$ *und* $\mathrm{Kern}(A) = 0$ *gilt.*

Definition 0.147 (Linearkombination)**.** Sei V ein K-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Dann ist $v \in V$ eine *Linearkombination von* $v_1, \ldots, v_m$, falls es $a_1, \ldots, a_m \in K$ gibt mit

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$

Definition 0.148 (lineare Hülle)**.** Sei M eine Teilmenge (nicht unbedingt Unterraum) von V mit $M \neq \varnothing$. Dann ist $v \in V$ eine *Linearkombination von Vektoren aus* M, falls es endlich viele $v_1, \ldots, v_m \in M$ gibt, sodass v eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_m$ ist. Die *lineare Hülle* von M ist

$$\mathrm{Lin}(M) := \{v \in V \mid v \text{ ist eine Linearkombination von Vektoren aus } M\}.$$

Für $M = \varnothing$ definieren wir dessen lineare Hülle $\mathrm{Lin}(\varnothing) := \{0\}$.

Bezeichnung 0.149. Für $M \subseteq V$ und $f \in K^{(M)}$ sei

$$\sum_{u \in M} f(u)u := \sum_{w \in f^{-1}(K^\times)} f(u)u.$$

Lemma 0.150. *Sei* $M \subseteq V$ *und* $v \in V$. *Dann ist* $v \in \mathrm{Lin}(M)$ *genau dann, wenn es ein* $f \in K^{(M)}$ *gibt mit* $v = \sum_{u \in M} f(u)u$. *Falls* $M = \varnothing$ *setzen wir* $\sum_{u \in M} f(u)u := 0$.