Definition 0.1 (Aussage)**.** Eine *Aussage* ist ein mathematischer oder sprachlicher Satz, der entweder *wahr* (1) oder *falsch* (0) ist.

Definition 0.2 (logische Operatoren, Junktoren)**.** Seien A und B zwei Aussagen. Es werden folgende Operatoren

Symbol	Name	Gesprochen
$\neg A$	*Negation*	„nicht A“
$A \wedge B$	*Konjunktion*	„A und B“, „sowohl A als auch B“
$A \vee B$	*Disjunktion*	„A oder B“ (dabei ist *nicht* das Exklusive Oder gemeint)
$A \Rightarrow B$	*Implikation*	„aus A folgt B“, „A impliziert B“, „wenn A, dann B“
$A \Leftrightarrow B$	*Äquivalenz*	„A ist äquivalent zu B“, „A genau dann, wenn B“, „A dann und nur dann, wenn B“ (engl. „iff – if and only if“)

durch die folgende *Wahrheitstafel* definiert:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Definition 0.3 (Tautologie)**.** Eine *Tautologie* ist eine Aussage, die immer wahr ist – unabhängig vom Wahrheitswert der darin enthaltenen Aussagen.

Satz 0.4 (Kontraposition)**.** *Für zwei Aussagen A und B gilt*

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Satz 0.5. *Für zwei Aussagen A und B gilt*

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B).$$

Satz 0.6. *Weitere Tautologien und Schlussregeln, die oft verwendet werden:*[1] *Seien A, B und C Aussagen. Dann gelten*

$$\begin{aligned}
&(A \Leftrightarrow B) \iff (\neg A \Leftrightarrow \neg B), && \\
&((A \Rightarrow B) \wedge A) \implies B && \text{Modus ponens } \textit{(Prinzip der vollständigen Induktion)}, \\
&((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \implies \neg A && \text{Modus tollens } \textit{(Prinzip des indirekten Beweises)}, \\
&((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \implies (A \Rightarrow C) && \text{Hypothetischer Syllogismus}, \\
&A \implies (A \vee B), && \\
&\neg A \implies (A \Rightarrow B). &&
\end{aligned}$$

Definition 0.7 (Aussageform)**.** Aussagen, die von freien Variablen abhängen, heißen *Aussageformen.*

Bezeichnung 0.8 (Quantoren)**.** Wir schreiben kürzer

- $\exists$ (*Existenzquantor*) für „es gibt ein“ oder „es existiert ein“ und

[1] Noch weitere (nicht triviale) hilfreiche Tautologien, die der Dozent leider nicht nannte, sind

$$\begin{aligned}
A \Rightarrow (B \Leftrightarrow C) &\iff (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \\
&\iff A \Rightarrow (Q \wedge R)(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)
\end{aligned}$$

	$A \iff \neg(\neg A)$	doppelte Negation,
$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität,
$A \wedge (A \vee B) \iff A$	$A \vee (A \wedge B) \iff A$	Absorption,
$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$	DE-MORGANSCHE Gesetze.

- $\forall$ (*Allquantor*) für „für alle“.

Satz 0.9 (einige Regeln über Quantoren)**.**

1. *Quantoren lassen sich negieren. Sei hierfür $A(x)$ eine Aussage in x. Dann gilt*

$$\neg(\forall x\colon A(x)) \iff (\exists x\colon \neg A(x)), \quad \textit{daher auch} \quad \neg(\exists x\colon A(x)) \iff (\forall x\colon \neg A(x)).$$

Auch gilt für eine Aussage $A(x,y)$ in x und y

$$\neg(\exists x\colon \forall y\colon A(x,y)) \iff (\forall x\colon \exists y\colon \neg A(x,y)) \quad \textit{und} \quad \neg(\forall x\colon \exists y\colon A(x,y)) \iff (\exists x\colon \forall y\colon \neg A(x,y)).$$

2. *Quantoren lassen sich vertauschen. Sei $A(x,y)$ eine Aussage in x und y. Es gilt*

$$(\exists x\colon \forall y\colon A(x,y)) \implies (\forall y\colon \exists x\colon A(x,y)).$$

3. *Für zwei Aussagen $A(x)$ und $B(x)$ in x gilt*

$$(\exists x\colon A(x) \wedge B(x)) \implies ((\exists x\colon A(x)) \wedge (\exists x\colon B(x))).$$

4. *Im Allgemeinen gilt für eine Aussage $A(x)$ über eine Menge M* <u>nicht</u>

$$(\forall x \in M\colon A(x)) \implies (\exists x \in M\colon A(x)).$$

Definition 0.10 (naive Menge und Elemente)**.** Eine *Menge* ist die Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Bezeichnung 0.11. Für zwei Mengen M und N bezeichnen

- $x \in M$ „*ist Element von*“,
- $M \subset N$ die *Teilmenge* M, jedes Element von M ist auch in N enthalten (nicht notwendigerweise echt, d. h. nicht notwendigerweise $M \neq N$),
- $M \subsetneq N$ die *echte Teilmenge* M, also $M \subset N$ und $M \neq N$, und
- $\varnothing = \{\}$ die *leere Menge*, die keine Elemente enthält ($\varnothing$ ist *nicht* $\{0\}$).

Definition 0.12 (mengentheoretische Operatoren)**.** Für zwei Mengen M und N werden folgende mengentheoretische Operatoren definiert:

Symbol	Name	Definition
$M \cap N$	*Durchschnitt*	$\{x : (x \in M) \text{ und } (x \in N)\}$
$M \cup N$	*Vereinigung*	$\{x : (x \in M) \text{ oder } (x \in N)\}$
$N^C = \complement N$	*Komplement*	$\{x \in X : x \notin N\}$ für eine übergeordnete Menge $X \supset N$
$M \setminus N = M \cap N^C$	*Differenz*	$\{x \in M : x \notin N\}$

Definition 0.13 (disjunkt)**.** Zwei Mengen M und N heißen *disjunkt*, falls $M \cap N = \varnothing$ gilt.

Satz 0.14 (kleiner Gauss)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.*

Bezeichnung 0.15 (Summenzeichen)**.** Für ganze Zahlen m, n und $a_k \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n, \quad \text{falls } m \leq n,$$
$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0 \quad \text{(leere Summe)}.$$

Für die leere Summe ist die Indexmenge leer. Es ist Konvention, diese auf Null zu definieren.

Satz 0.16 (Summe der ersten n ungeraden Zahlen). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.*

Satz 0.17 (geometrische Reihe). *Für alle reellen Zahlen $x \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

(Hierbei ist $x^0 = 1$ auch für $x = 0$ definiert!)

Bezeichnung 0.18 (Produktzeichen). Das *Produktzeichen* wird analog zum Summenzeichen definiert. Für ganze Zahlen m, n und $a_k \in \mathbb{R}$ bedeutet

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n, \quad \text{falls } m \leq n,$$

$$\prod_{k=m}^{m} a_k = a_m \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{m-1} a_k = 1 \quad \text{(leeres Produkt).}$$

Das leere Produkt wird konventionell auf Eins definiert.

Definition 0.19 (Fakultät). Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei die *Fakultät* $n!$ (sprich „n Fakultät") definiert als

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Für $n = 0$ ist das Produkt ein leeres Produkt und es gilt $\prod_{k=1}^{0} k = 0! = 1$.

Äquivalent dazu ist die rekursive Definition

$$0! = 1, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!\,.$$

Definition 0.20 (Binomialkoeffizient). Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ sei der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (sprich „n über k" oder „k aus n", engl. „n choose k") definiert als[2]

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}. \tag{0.21}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}, & \text{falls } 0, \leq k \leq n, \\ 0, & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

Zusätzlich führen wir die Konvention $\binom{n}{k} = 0$ für negative k ein.

Korollar 0.22.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Lemma 0.23. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt*[3]

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Satz 0.24 (binomischer Lehrsatz). *Für alle reellen x und y und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

[2]Nach dieser Definition ist es auch möglich, den Binomialkoeffizienten auf reelle Zahlen k und n zu erweitern.
[3]Auf Englisch heißt das Lemma PASCAL*'s rule*.

Korollar 0.25. *Einsetzen von*

1. $x = 1$ *und* $y = 1$ *liefert* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *und*
2. $x = 1$ *und* $y = -1$ *liefert* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Satz 0.26 (Permutation)**.** *Die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Elementen ist $n!$.*

Bezeichnung 0.27. Wir nennen eine „Möglichkeit der Anordnung (der Elemente einer Menge)" eine *Permutation (der Menge).*

Satz 0.28 (Kombination)**.** *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$. (Insbesondere gilt daher, dass $\binom{n}{k}$ ganzzahlig ist.)*

Definition 0.29. Für eine Menge M ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M.

Satz 0.30 (Mächtigkeit der Potenzmenge)**.** *Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge M hat 2^n Elemente.*

Satz 0.31 (Multinomialkoeffizient)**.** *Gegeben sei $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k_1 + \cdots + k_n = k$. Dann lassen sich k unterschiedliche Teilchen auf genau*

$$\frac{k!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} =: \binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}$$

verschiedenen Weisen auf n Zellen so verteilen, dass in der i-ten Zelle genau k_i Teilchen sind ($i = 1, \ldots, n$).

Satz 0.32 (Multinomialsatz)**.** *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \frac{k!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n},$$

wobei das Summenzeichen die Summation über alle Tupel $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0 \times \cdots \times \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$ meint.

Satz 0.33 (Doppelsumme)**.** *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und für alle $x_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right),$$

d. h., dass voneinander unabhängige Summenzeichen vertauscht werden können.

Definition 0.34 (Potenz)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die *Potenz* $x^n \in \mathbb{R}$ (gesprochen „x hoch n") rekursiv definiert durch $x^0 := 1$ und $x^{n+1} := x \cdot x^n$.

Für $x \neq 0$ ist ferner $x^{-n} := \left(x^{-1}\right)^n$, wobei x^{-1} das inverse Element der Multiplikation ist.

Bezeichnung 0.35. Wir definieren die Relationen $>$, $<$, $\geq$ und $\leq$ durch[4]

$$\begin{aligned} x > y &\iff x - y > 0 \\ x < y &\iff y > x \\ x \geq y &\iff (x > y \wedge x = y) \iff \neg(x < y) \\ x \leq y &\iff (x < y \wedge x = y) \iff \neg(x > y). \end{aligned}$$

Bezeichnung 0.36 (nichtnegativ)**.** $x \in \mathbb{R}$ heißt *nichtnegativ*, falls $x \geq 0$ ist.

[4] Vielleicht verwirrt es, dass wir noch einmal die „$>$"-Relation definieren, obwohl es in den Axiomen schon definiert wurde. Müsste man das nicht beweisen?

Betrachten wir die Anordnungsaxiome genauer: Wir nehmen die Teilmenge aller Elemente aus $\mathbb{R}$ (Idee: Menge der positiven Zahlen), die einen *unären Operator* „> 0" (gesprochen: „ist positiv") definieren. Was dieser Operator ist, wird durch die beiden Axiome ausgedrückt: Addition und Multiplikation ist unter dieser Teilmenge abgeschlossen, und Elemente können entweder drin oder nicht drin liegen (exakter wäre zu definieren, dass nur $x > 0$, $x = 0$ oder $-x > 0$ gilt, da wir den „$<$"-Operator noch nicht definiert haben).

Anschließend definieren wir aus dem unären Operator die anderen *binären Operatoren*, die das Schreiben vereinfachen, also anstatt jedes mal $x - y > 0$ einfach kurz $x > y$ schreiben zu können etc.

Bezeichnung 0.37 (GAUSS-Klammer)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq x < n+1$ schreiben wir $\lfloor x \rfloor := n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 0.38 (BERNOULLISCHE Ungleichung)**.** *Für alle reellen $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Satz 0.39.

1. *Für alle reellen $a > 1$ gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n > K$ gilt.*
2. *Für alle reellen $0 < a < 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n < \varepsilon$ gilt.*

Definition 0.40 (Absolutbetrag)**.** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

und sagen dafür „Betrag von x" oder „x absolut".

Definition 0.41 (Maximum und Minimum)**.** Ferner definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max(x,y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y, \\ y, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y, \\ y, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 0.42 (Betragsfunktion, Dreiecksungleichung)**.** *Für die Betragsfunktion $|\cdot|$ gilt:*

1. *Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.*
2. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|xy| = |x| \cdot |y|$.*
3. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$, was als* Dreiecksungleichung *bekannt ist.*

Definition 0.43 (Folge)**.** Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ und schreiben dafür $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ oder kurz (a_n).

Definition 0.44 (erweiterter Folgenbegriff)**.** Eine Folge ist allgemein eine Abbildung $\{k, k+1, k+2, \dots\} \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben kurz $(a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$.

Definition 0.45 (Konvergenz)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen eine Zahl* $a \in \mathbb{R}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, für das $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gibt. Oder in Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge heißt *konvergent* falls sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Falls das nicht der Fall ist, heißt (a_n) *divergent.*

Definition 0.46 (Grenzwert, Limes)**.** Das a in Definition 0.45 heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (a_n), in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \text{ für } n \to \infty.$$

Definition 0.47 (Nullfolge)**.** Eine Folge heißt *Nullfolge*, falls sie gegen 0 konvergiert.

Satz 0.48. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Definition 0.49 (beschränkte Folge)**.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog ist (a_n) *nach oben beschränkt*, falls es ein K gibt, sodass $a_n \leq K$ für alle n ist.

Satz 0.50. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Satz 0.51 (Summe/Differenz und Produkt konvergenter Folgen)**.** *Sind (a_n) und (b_n) konvergent, so konvergiert auch ihre Summe $(a_n + b_n)$ und ihr Produkt $(a_n b_n)$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) + \Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big), \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big).$$

Die Subtraktion folgt aus $(\lim_{n\to\infty} a_n) + (\lim_{n\to\infty}(-1))(\lim_{n\to\infty} b_n)$

Lemma 0.52 (umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

Satz 0.53 (Quotient konvergenter Folgen)**.** *Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq k$, und die Folge $(a_n/b_n)_{n\geq k}$ konvergiert mit dem Limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

Satz 0.54 (Ordnungserhaltung konvergenter Folgen)**.** *Falls (a_n) und (b_n) konvergent sind, gilt dann*

$$\forall n \colon a_n \leq b_n \implies \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Korollar 0.55. *Falls $K \leq a_n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt dann $K \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq L$.*

Definition 0.56 (Cauchy-Folge)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, für das $|a_n - a_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

Satz 0.57. *Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.*

Definition 0.58 (Intervall)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ sind

- $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ das *abgeschlossen Intervall*,
- $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ das *offene Intervall* und
- $[a, b)$ sowie $(a, b]$ *halboffene Intervalle*.

a und b heißen *Randpunkte* der jeweiligen Intervalle. $|b - a|$ heißt *Länge* des Intervalls, kurz $\operatorname{diam}([a, b])$.

Definition 0.59 (Intervallschatelung)**.** Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von *abgeschlossenen* Intervallen $I_n = |a_n, b_n|$ mit

1. $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und
2. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_n) = 0$.

Satz 0.60 (Intervallschachtelungsprinzip)**.** *Für jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n\to\infty}$ in $\mathbb{R}$ gibt es eine reelle Zahl $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Oder mit anderen Worten: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*[5]

Satz 0.61. *Das Vollständigkeitsaxiom ist äquivalent zum Intervallschachtelungsprinzip.*

Satz 0.62 (Existenz der Wurzeln)**.** *Für alle $x > 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit $y^k = x$.*

Bezeichnung 0.63. $y = \sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ bezeichnet die *k-te Wurzel* von x.

Definition 0.64 (beschränkt, Maximum/Minimum, Supremum/Infimum)**.**

1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* (oder *von oben beschränkt*), falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq K$ für alle $x \in M$. In diesem Fall heißt K *obere Schranke* von M.
2. Ein $K \in \mathbb{R}$ heißt *Maximum* von M, falls es eine obere Schranke von M ist und zu M gehört, d. h. $K \in M$ und $\forall x \in M : x \leq K$. Wir schreiben $K = \max M$.
3. Ein $K \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* von M, fall es die kleinste obere Schranke von M ist, d. h. K ist eine obere Schranke von M und für alle oberen Schranken K' von M gilt $K' \geq K$. Hierfür schreiben wir $K = \sup M$.
4. Entsprechend werden definiert:
   (a) *untere Schranke* von M,
   (b) *Minimum* von M, $L = \min M$, und
   (c) *Infimum* von M, $L = \inf M$.

[5] Dieser Satz ist äquivalent zum *Einschnürungssatz*, bewiesen durch Gauss: Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim a_n = \lim b_n$, so folgt daraus $\lim c_n = \lim a_n = \lim b_n$. Die Aussage ist auch ein Korollar von Satz 0.54.

Satz 0.65 (Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$)**.** *Jede nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit $M \neq \varnothing$ besitzt ein Supremum. Also $\forall M \subset \mathbb{R}$: ($M$ nach oben beschränkt $\iff \exists \sup M \in \mathbb{R}$).*

Satz 0.66. *Die Supremumseigenschaft ist äquivalent zu Vollständigkeits- und archimedischem Axiom.*

Definition 0.67 (Abbildung)**.** Gegeben seien Mengen A und B. Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) $f\colon A \to B$ ist eine Zuordnung, die jedem $x \in A$ genau ein $f(A) \in B$ zuordnet (das „*Bild* von x unter f“), kurz $x \mapsto f(x)$. Wir bezeichnen $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : (\exists x \in A\colon y = f(x))\} \subset B$.

Definition 0.68 (surjetiv, injektiv, bijektiv)**.** Sei f eine Abbildung. f heißt

- *surjektiv* (selten auch „Abbildung *auf* B“), falls $f(A) = B$,
- *injektiv* (auch „eindeutig“), falls $x = x' \iff f(x) = f(x')$ für alle $x, x' \in A$ gilt und
- *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist.

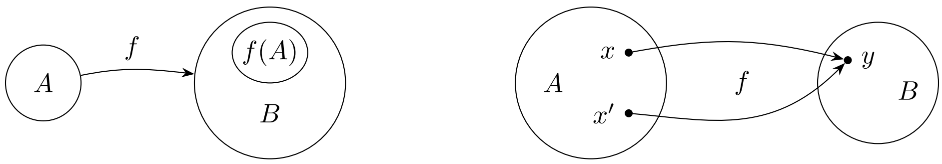


Abbildung 0.1: Links: f ist *nicht surjektiv.* Rechts: f ist *nicht injektiv.*

Definition 0.69 (Gleichmächtigkeit, Abzählbarkeit)**.**

1. Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.
2. Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich*, falls sie zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist.
3. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls sie leer, endlich oder abzählbar unendlich ist. Andernfalls heißt A *überabzählbar.*

Satz 0.70. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Satz 0.71. $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Korollar 0.72. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *ist nicht abzählbar.*

Definition 0.73 (schwach waschend/fallend, monoton)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen heißt

- *schwach wachsend* (nicht fallend), falls $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,
- *schwach fallend* (nicht wachsend), falls $a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und
- *monoton*, falls sie schwach wachsend oder schwach fallend ist.

Satz 0.74 (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen)**.** *Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert, und zwar*

- *gegen* $\sup A = \{a_n\}$*, falls (a_n) schwach wachsend ist, und*
- *gegen* $\inf A = \{a_n\}$*, falls (a_n) schwach fallend ist.*

Definition 0.75 (erweiterte Zahlengerade)**.** Sei die *erweiterte Zahlengerade* (auch die *erweiterten reellen Zahlen*) $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ die um zwei Elemente $\pm\infty$ („plus/minus unendlich“) erweiterte Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Für $\pm\infty$ werden folgende Rechenregeln für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert:

- $-\infty < x < +\infty$;
- $(\pm\infty) + x = \pm\infty$, genauso gelten hierfür Kommutativität, Assoziativität und Distributivität;

- für $x > 0$: $(\pm\infty)x = \pm\infty$, hierfür gelten auch Kommutativität, Assoziativität, Distributivität;
- für $x < 0$: $(\pm\infty)x = \mp\infty$;
- $(-\infty) + (+\infty)$ ist nicht definiert;
- $(\pm\infty) \cdot 0$ ist nicht definiert.[6]

Ferner sind $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ und für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ die Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ und (a, b) wie gewohnt (d. h. analog zu Definition 0.58) definiert.

Definition 0.76 (uneigentliche Konvergenz)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert uneigentlich gegen* $+\infty$ (geschrieben $a_n \to +\infty$), falls für jedes $k \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n \geq k$ für alle $n \geq N$ gilt. Analog ist die *uneigentliche Konvergenz gegen* $-\infty$ definiert ($a_n \to -\infty$).

Definition 0.77 (Limes Superior/Inferior)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und seien $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ und $c_n = \inf\{a_k : k \leq n\}$. Dann sind $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach fallende und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach wachsende Folge[7] in $\overline{\mathbb{R}}$, die auch (uneigentlich in $\mathbb{R}$) konvergieren. Dann sind

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \coloneqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} b_n \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \coloneqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} c_n$$

der *Limes Superior* bzw. der *Limes Inferior*.[8]

Lemma 0.78. *Es gelten*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k \qquad \textit{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Satz 0.79. *Jede monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Satz 0.80. *Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$) genau dann, wenn* $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\limsup a_n = \liminf a_n \in \overline{\mathbb{R}}$*). In diesem Fall ist* $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$*.*

Definition 0.81 (Teilfolge, Häufungspunkt)**.**

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine strikt wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gibt, die gegen a konvergiert.

Lemma 0.82. *$a \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Satz 0.83 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Für jede beschränkte reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:*

1. $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *und* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *sind Häufungspunkte.*
2. *Für jeden Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Mit anderen Worten: $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *und* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *sind der kleinste bzw. größte Häufungspunkt.*

[6] Weitere nicht definierte Ausdrücke sind $x/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ und $(\pm\infty)/(\mp\infty)$. Hingegen gilt zusätzlich für die Division $x/(\pm\infty) = 0$, $(\pm\infty)/x = \pm\infty$ für $x > 0$ und $(\pm\infty)/x = \mp\infty$ für $x < 0$.

[7] Eine kurze Begründung dafür: Nach Definition ist $b_n \geq a_k$ für alle $k \geq n$, also auch $b_n \geq a_k$ für alle $k \geq n+1$, d. h. b_n ist eine obere Schranke von $\{a_k : k \geq n+1\}$. Aufgrund der Minimalität des Supremums muss dann $b_n \geq b_{n+1} = \sup\{a_k : k \geq n+1\}$ sein. Analog lässt sich für c_n argumentieren.

[8] Die Idee des Limes Superior bzw. Inferior ist es, eine neue Weise einzuführen, um Folgen zu beschreiben. Bisher kennen wir nur die Konvergenz gegen eine Zahl, aber was ist, wenn die Folge divergiert? Dann kann es trotzdem sein, dass sie beschränkt ist (wie z. B. $((-1)^n)_n$, aber in $\overline{\mathbb{R}}$ eigentlich immer), und wir können versuchen Aussagen über die Grenzwerte der Schranken zu machen. Mit dem Limes Superior bzw. Inferior können wir also den „Grenzwert“ zu einem „Grenzbereich“ erweitern, worin ab einem bestimmten Folgenglied alle Folgenglieder im Intervall $[\liminf a_n - \varepsilon,\ \limsup a_n + \varepsilon]$ für beliebig kleine ε liegen.

Korollar 0.84. *Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.*[9]

Korollar 0.85. *Jede reelle Zahlenfolge besitzt (mindestens) eine in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergente Teilfolge.*

Definition 0.86 (Partialsumme, Reihe)**.** Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nicht in $\overline{\mathbb{R}}$!). Dann ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Folge der Partialsummen* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (zum Teil auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$).

Als *unendliche Reihe* $\sum_k a_k$ bezeichnen wir

- einerseits die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und
- andererseits deren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Satz 0.87 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *$\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.*

Satz 0.88. *Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_k a_k$ ist* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Satz 0.89 (monotone Reihen)**.** *Eine Reihe $\sum a_k$ mit $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.*

Satz 0.90 (alternierende Reihen, Leibniz-Kriterium)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.*

Satz 0.91 (Majorantenkriterium)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen und $(b_n)_n$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit der Eigenschaft, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \geq N$ gibt. Dann gilt: Konvergiert $\sum_n b_n$, s konvergiert auch $\sum_n a_n$ und es gilt $|\sum_{n=N}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} b_n$.*

Die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ heißt Majorante *von $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$.*

Satz 0.92 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass es ein $0 < q < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n \neq 0$ und $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann konvergiert auch $\sum a_k$.*

Korollar 0.93 (Modifikation des Quotientenkriteriums)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$. Dann*

1. *konvergiert $(a_n)_n$, wenn $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ ist, und*
2. *divergiert $(a_n)_n$, wenn $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ ist.*

Satz 0.94 (Wurzelkriterium)**.** *Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Setze $r := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Dann gilt*

1. *Ist $r < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$.*
2. *Ist $r > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_n a_n$.*

Satz 0.95. *Für $s \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$*

1. *konvergent genau dann, wenn $s > 1$;*
2. *divergent genau dann, wenn $s \leq 1$.*

Bezeichnung 0.96. Im Fall $s > 1$ heißt

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

die *Riemannsche Zeta-Funktion.*

Korollar 0.97. *Für $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ konvergiert $\sum_{n=1} n^c/b^n$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *$|b| > 1$,*
2. *$b = -1$ und $c < 0$,*

[9] In den meisten Lehrbüchern wird das als Satz von Bolzano-Weierstraß bezeichnet.

3. $b = 1$ *und* $c < -1$.

Definition 0.98 (absolut konvergente Reihen)**.** Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Definition 0.99 (Umordnung)**.** Eine Reihe $\sum_n b_n$ heißt *Umordnung* der gegebenen Reihe $\sum_n a_n$, falls eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_n = a_{f(n)}$.

Satz 0.100 (Umordnungssatz)**.** *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist wieder absolut konvergent und besitzt denselben Wert.*

Definition 0.101 (Familie)**.** Sei I eine beliebige *abzählbare* Indexmenge und $a\colon I \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Anstatt von der Abbildung $a\colon I \to \mathbb{R}$ sprechen wir auch von einer *Familie* $(a_i)_{i\in I}$. Im Fall von $I = \mathbb{N}$ ist es unsere bekannte *Folge*.

Definition 0.102 (absolute Summierbarkeit)**.** Sei $f\colon \mathbb{N} \to I$ eine Abzählung von I und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{f(n)}|$ eine absolut konvergente Reihe. Dann heißt die Familie $(a_i)_{i\in I}$ *(absolut) summierbar* und wir definieren ihre *Summe* als $\sum_{i\in I} a_i \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$.

Satz 0.103 (großer Umordnungssatz)**.** *Seien I und L abzählbare Mengen und I_ℓ für alle $\ell \in L$ paarweise disjunkte Teilmengen von I mit $I = \bigcup_{\ell\in L} I_\ell$ (d. h. $\{I_\ell : \ell \in L\}$ ist eine Partition von I, wir schreiben kurz $\dot{\bigcup}_{\ell\in L} I_\ell$). Ferner sei $(a_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie reeller Zahlen. Dann ist jede Teilfamilie $(a_i)_{i\in I_\ell}$ mit $\ell \in L$ summierbar, also auch die Familie $(s_\ell)_{\ell\in L}$ der Summen $s_\ell \coloneqq \sum_{i\in I_\ell} a_i$ und es gilt*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\ell\in L} s_\ell = \sum_{\ell\in L}\left(\sum_{i\in I_\ell} a_i\right).$$

Korollar 0.104 (Doppelreihensatz)**.** *Sei $(a_{j\ell})_{(j,\ell)\in J\times L}$ eine summierbare Familie. Dann gilt*

$$\sum_{(j,\ell)\in J\times L} a_{j\ell} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{\ell\in L} a_{j\ell}\right) = \sum_{\ell\in L}\left(\sum_{j\in J} a_{j\ell}\right),$$

d. h. die Summenzeichen lassen sich vertauschen.

Bezeichnung 0.105 (Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert)**.** Eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsverteilung* auf N_0, falls $p_k > 0$ für alle k und $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

Als *Erwartungswert* dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren wir $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$, falls dieser endlich ist bzw. konvergiert.

Satz 0.106. *Für den Erwartungswert gilt* $\mu = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k>j} p_k\right)$.

Definition 0.107 (diskrete Faltung)**.** Für zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definieren wir deren *Faltung* als Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Glieder

$$c_n \coloneqq (a * b)_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Algemein für Familien $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definieren wir

$$(a * b)_n \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$$

(vorausgesetzt die Reihe konvergiert).

Satz 0.108 (Cauchy-Produkt)**.** *Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergente Reihen, so defineirt die Falutng der Folgenglieder eine absolut konvergente Reihe $\sum_n (a * b)_n$, genannt* Cauchy-Produkt *der Reihen*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{j,l=0}^{\infty} a_j b_l = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n.$$

Satz 0.109 (binomische Reihe)**.** *Für alle $x, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $|x < 1|$ ist die Reihe*

$$B(x,\alpha) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots$$

absolut konvergent.

Lemma 0.110. *Für alle $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt*

$$B(x,\alpha) \cdot B(x,\beta) = B(x, \alpha + \beta).$$

Satz 0.111. *Für $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ und für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt*

$$B(x,\alpha) = (1+x)^\alpha.$$

Definition 0.112 (Exponenzialreihe, eulersche Zahl)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei die *Exponenzialreihe*

$$\exp(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Insbesondere ist die *eulersche Zahl*

$$e \coloneqq \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \approx 2{,}7182818\ldots$$

Satz 0.113.

1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponenzialreihe absolut konvergent.*
2. *Restgliedabschätzung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ gilt*

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Satz 0.114 (Funktionalgleichung)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y).$$

Korollar 0.115.

1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\exp(x) > 0 \qquad \textit{und} \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$
2. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{Q}$ gilt*
$$\exp(qx) = (\exp(x))^q.$$
Insebsondere folgt daraus auch $\exp(q) = e^q$.

Proposition 0.116.

1. *Es gilt $\exp(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Es gilt $\exp(x) \leq 1/(1-x)$ für alle $x < 1$.*

Satz 0.117 (Grenzwertdarstellung der Exponenzialfunktion)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Insebsondere gilt $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$.

Satz 0.118 (Körper der komplexen Zahlen)**.** *Die Menge* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ *der geeordneten Paare reller Zahlen definiert einen* Körper *mit* Addition *und* Multipikaiton*, definiert durch*

$$(x, y) + (u, v) \coloneqq (x + u, y + v) \qquad \textit{und} \qquad (x, y) \cdot (u, v) \coloneqq (xu - yv, yu + xv),$$

neutrale Elemente $0 \coloneqq (0, 0)$*,* $1 \coloneqq (1, 0)$ *sowie* Inverse*, definiert durch*

$$-(x, y) \coloneqq (-x, -y) \qquad \textit{und} \qquad (x, y)^{-1} \coloneqq \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \quad \textit{falls } (x, y) \neq (0, 0)$$

mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$*.*

Definition 0.119 (Körper der komplexen Zahlen, imaginäre Einheit, Real-/Imaginärteil)**.** Wir setzen den Körper aus Satz 0.118 vor. Sei $i \coloneqq (0, 1)$ mit $i^2 = -1$ die *imaginäre Einheit*. Dann lässt sich jede *komplexe Zahl* des Körpers schreiben als $z = (x, y) = x + iy$ mit *Realteil* $\mathrm{Re}(z) = x$ und *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z) = y$ von z.

$$\mathbb{C} \coloneqq \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Körper der komplexen Zahlen.*

Definition 0.120 (komplexe Konjugation)**.** Die Abbildung $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$z = (x + iy) \mapsto \overline{z} = (x - iy)$$

ist die *komplexe Konjugation.* $\overline{z}$ ist die *komplex Konjugierte* von z.

Lemma 0.121 (Rechenregeln mit Konjugierten)**.** *Für die Konjugation gilt mit* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *und* $w \in \mathbb{C}$*:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$*.*
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$*.*
3. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$*.*
4. $z\overline{z} = x^2 + y^2$*, also ist* $z\overline{z}$ *reell und* ≥ 0*. Ferner ist* $z\overline{z} = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$*.*[10]

Definition 0.122 (Betrag)**.** Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$|z| \coloneqq \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Lemma 0.123 (Rechenregeln mit Beträgen)**.** *Für Beträge gilt mit* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *und* $w \in \mathbb{C}$*:*

1. $|z| \geq 0$*, und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$*.*
2. $|z| = |\overline{z}|$*.*
3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$*.*
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)*.*
5. $|zw| = |z| \cdot |w|$*.*
6. $1/z = \overline{z}/|z|^2$ *für* $z \neq 0$*.*

Definition 0.124 (komplexe Folge)**.** Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

1. Die Folge *konvergiert gegen* $c \in \mathbb{C}$, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|c_n - c| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. In Zeichen:
$$\forall \varepsilon \geq 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon |c_n - c| \leq \varepsilon.$$
2. Die Folge ist eine *Cauchy-Folge*, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|c_n - c_m| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt. In Zeichen:
$$\forall \varepsilon \geq 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq N\colon |c_n - c_m| \leq \varepsilon.$$

[10] Eine weitere (wie ich finde) nützliche Regel: Für $a \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{az} = a\overline{z}$.

Satz 0.125 (Konvergenz in $\mathbb{C}$, komplexe Cauchy-Folgen)**.** *Sei $(c_n)_n$ eine komplexe Zahlenfolge mit $c_n = a_n + ib_n$, d. h. $a_n = \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(c_n)$.*

1. *$(c_n)_n$ konvergiert genau dann gegen $c = a + ib$, wenn $(a_n)_n$ gegen $a = \mathrm{Re}(c) \in \mathbb{R}$ <u>und</u> $(b_n)_n$ gegen $b = \mathrm{Im}(c) \in \mathbb{R}$ konvergiert. (Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die Folgen der Real- und Imaginärteile konvergieren.)*

2. *$(c_n)_n$ ist genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, wenn $(a_n)_n$ <u>und</u> $(b_n)_n$ Cauchy-Folgen sind.*

Korollar 0.126 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)**.** *$\mathbb{C}$ ist vollständig, denn jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.*

Korollar 0.127 (Grenzwertsätze in $\mathbb{C}$)**.** *Für zwei komplexe Folgen $c_n \to c$ und $d_n \to d$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n = c + d \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(c_n d_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} c_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} d_n\Big) = cd,$$

und, falls $d_n \neq 0$ und $d \neq 0$ für alle $n \geq N$ mit hinreichend großem N,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} c_n}{\lim_{n\to\infty} d_n} = \frac{c}{d}.$$

Korollar 0.128 (Konjugation einer konvergenten Folge)**.** *Mit $(c_n)_n$ ist auch $(\overline{c_n})_n$ eine komplexe Cauchy-Folge und aus $c_n \to c$ folgt $\overline{c_n} \to \overline{c}$. Oder mit anderen Worten*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{c_n} = \overline{\lim_{n\to\infty} c_n}.$$

Korollar 0.129 (Betrag einer konvergenten Folge)**.** *Gilt für eine komplexe Folge $c_n \to c$, so gilt auch $|c_n| \to |c|$.*

Definition 0.130 (komplexe Reihe, Konvergenz, absolute Konvergenz)**.** Die *komplexe Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ heißt *konvergent*, falls die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert (bzw. die Folge $t_k = \sum_{n=1}^{k} |c_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.)

Proposition 0.131. *Sei $\sum_n c_n$ eine komplexe Reihe.*

1. *Eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{C}$ ist auch konvergent in $\mathbb{C}$.*

2. Majorantenkriterium*: Gilt stets $|c_n| \leq a_n \in \mathbb{R}_+$ für hinreichend große n, und konvergiert $\sum_n a_n$ in $\mathbb{R}_+$, so ist auch $\sum_n c_n$ absolut konvergent.*

3. Quotientenkriterium*: Gilt*
$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1,$$
dann konvergiert die Reihe absolut.

4. Wurzelkriterium*: Gilt*
$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < 1,$$
dann konvergiert die Reihe absolut.

Satz 0.132. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponenzialreihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Proposition 0.133.

1. Restgliedabschätzung*: Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{1}{2}|N|$ gilt*
$$\left|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

2. Funktionalgleichung*: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w).$$

3. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\exp(z) \neq 0 \qquad \textit{und} \qquad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

4. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Definition 0.134 (Trigonometrische und hyperbolische Funktionen)**.** Für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

- $\cosh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z))$ (*Cosinus hyperbolicus*),
- $\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$ (*Sinus hyperbolicus*),
- $\cos(z) = \cosh(iz) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ (*Cosinus*),
- $\sin(z) = \frac{1}{i}\sinh(iz) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ (*Sinus*),

sowie, falls der Nenner jeweils nicht Null ist,

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}, \qquad \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}, \qquad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \qquad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

(in der Reihenfolge *Tangens hyperbolicus*, *Cotangens hyperbolicus*, *Tangens*, *Cotangens*).[11]

Satz 0.135 (Reihendarstellung)**.**

- *Es gelten*

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \textit{und} \qquad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- *Es gelten*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

und

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Proposition 0.136.

1. cos *und* cosh *sind gerade Funktionen, wohingegen* sin *und* sinh *ungerade Funktionen sind. D. h. es gelten*

$$\cos(-z) = \cos(z), \qquad \cosh(-z) = \cosh(z),$$
$$\sin(-z) = -\sin(z), \qquad \sinh(-z) = -\sinh(z).$$

2. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z) \qquad \textit{und} \qquad \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

Die letzte Gleichung heißt auch EULERSCHE Formel*.*

[11] cosh, sinh, cos und sin lassen sich wie folgt geometrisch visualisieren: Zeichnen wir den Einheitskreis mit $x^2 + y^2 = 1$, so liegt jeder Punkt $(\cos\theta, \sin\theta)$ auf dem Kreis, wobei der Radius mit der x-Achse den Winkel θ einschließt. Zeichnen wir die Einheitshyperbel mit $x^2 - y^2 = 1$, so liegt jeder Punkt $(\cosh A, \sinh A)$ auf der Hyperbel, wobei die Strecke vom Ursprung zu dem Punkt mit der x-Achse und der Hyperbel die Fläche $\frac{1}{2}A$ einschließt.

3. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1 \qquad \textit{und} \qquad \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$$

Die letzte Gleichung heißt trigonometrischer PYTHAGORAS *(in Anlehnung an den Satz des PYTHAGORAS).*

Bezeichnung 0.137. Es ist Konvention, für trigonometrische und hyperbolische Funktionen die Potenzen an die Funktion zuschreiben, z. B. $\sin^2(z)$ anstatt von $(\sin(z))^2$. Genauso lässt man oft Klammern weg, falls der Sinn nicht verfälscht wird, also z. B. $\sin^2 z = \sin^2(z)$.

Satz 0.138 (Additionstheoreme[12])**.**

1. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{aligned}\cosh(z \pm w) &= \cosh z \cosh w \pm \sinh z \sinh w,\\ \sinh(z \pm w) &= \sinh z \cosh w \pm \cosh z \sinh w.\end{aligned}$$

2. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{aligned}\cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w,\\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w.\end{aligned}$$

Korollar 0.139 (Doppelwinkelfunktionen)**.**

1. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{aligned}\cosh(2z) &= \cosh^2 z + \sinh^2 z = 2\cosh^2 z - 1 = 2\sinh^2 z + 1,\\ \sinh(2z) &= 2\cosh z \sinh z.\end{aligned}$$

2. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{aligned}\cos(2z) &= \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2 z = 2\cos^2 z - 1,\\ \sin(2z) &= 2\sin z \cos z.\end{aligned}$$

3. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten*

$$\begin{aligned}\sin z - \sin w &= 2\cos\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2},\\ \cos z - \cos w &= -2\sin\frac{z+w}{2}\sin\frac{z-w}{2}.\end{aligned}$$

Proposition 0.140. *Sei $x \in \mathbb{R}$.*

1. $\cosh x$*,* $\sinh x$*,* $\cos x$ *und* $\sin x$ *sind reellwertig. Es gelten*

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) \qquad \textit{und} \qquad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

2. *Es gilt*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Damit liegen die Punkte $(\cos x, \sin x)$ auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.[13] *Dabei ist x die Bogenlänge auf der Einheitskreislinie von $1 = (1, 0)$ nach $e^{ix} = (\cos x, \sin x)$ (Übungsaufgabe).*

[12] Ich habe mir die Freiheit genommen, hier auch Subtrationstheoreme hinzuzufügen, die sich aus den Additionstheorem unter Beachtung der Parität, d. h. ob die Funktionen (un-)gerade sind, ergeben.

[13] Hier muss spezifiziert werden, was mit dem Isomorphismus gemeint ist. Die beiden Räume sind maximal in der Kategorie der metrischen Räume isomorph zueinander. Aber $\mathbb{R}^2$ ist im Gegensatz zu $\mathbb{C}$ kein Körper.

3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten*
$$|\cos x| \le 1, \qquad |\sin x| \le 1 \qquad \text{und} \qquad \cosh x \ge 1.$$
Für alle $x \in [-2, 2]$ gelten die Abschätzungen
$$\cos x \le 1, \qquad \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$
Für alle $x \in [0, 2]$ gelten die Abschätzungen
$$\sin x \le x, \qquad \sin x \ge x - \frac{x^3}{6}, \qquad \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Definition 0.141 (Kreiszahl)**.** $\frac{1}{2}\pi$ ist die eindeutige Nullstelle von $x \mapsto \cos x$ im Intervall $[0, 2]$. Dabei ist $\pi \approx 3{,}1415\ldots$

Proposition 0.142. *Die Nullstelle $\frac{1}{2}\pi$ existiert und ist eindeutig.*

Proposition 0.143. *Es gelten*

1. $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ *und* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$*; sowie*
2. $\exp(\frac{1}{2}\pi i) = i$, $\exp(\pi i) = -1$, $\exp(\frac{3}{2}\pi i) = -i$ *und* $\exp(2\pi i) = 1$.

Satz 0.144. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*

1. $\exp(z + i\frac{1}{2}\pi) = i \exp(z)$,
2. $\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$ *und*
3. $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$.

Damit ist die Exponenzialfunktion periodisch *in $\mathbb{C}$ mit Periode $2\pi i$.*

Korollar 0.145 (Phasenverschiebung)**.** *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*

1. $\cos(z + \frac{1}{2}\pi) = -\sin z$ *und* $\sin(z + \frac{1}{2}\pi) = -\cos z$,
2. $\cos(z + \pi) = -\cos z$ *und* $\sin(z + \pi) = -\sin z$ *sowie*
3. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ *und* $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

Damit sind die trigonometrischen Funktionen periodisch *in $\mathbb{C}$ mit Periode 2π.*

Satz 0.146 (Nullstellen in $\mathbb{R}$)**.** *Die Menge aller Nullstellen von* cos *in $\mathbb{R}$ ist*
$$\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
und von sin *ist*
$$\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Korollar 0.147. *Es ist genau dann $\exp(z) = 1$, wenn $z = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.*

Korollar 0.148 (Nullstellen in $\mathbb{C}$)**.** *Die Menge aller Nullstellen von* cos *in $\mathbb{C}$ ist*
$$\{x \in \mathbb{C} : \cos x = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
und von sin *ist*
$$\{x \in \mathbb{C} : \sin x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Proposition 0.149 (Eindeutigkeit der Polardarstellung)**.** *Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es eindeutig bestimmte $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, sodass gilt:*
$$z = r \exp(i\varphi) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Bezeichnung 0.150 (Betrag, Argument)**.** $r = |z|$ ist der *Betrag* und $\varphi =: \arg(z)$ ist das *Argument* von $z = r\exp(i\varphi)$.

Bezeichnung 0.151 (Polardarstellung)**.** Das Paar

$$(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$$

heißt *Polardarstellung* von $z = r\exp(i\varphi)$. Im erweiterten Sinne ist jedes

$$(r, \varphi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

auch eine Darstellung von z, wobei r eindeutig ist, sich die φ aber um Vielfache von 2π unterscheiden.

Korollar 0.152 (Multiplikation in Polardarstellung)**.** *Für alle* $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1) \in \mathbb{C}$ *und* $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2) \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$z_1 z_2 = r\exp(i\varphi) \quad \textit{mit } r = r_1 r_2 \textit{ und } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

(Produkt der Beträge und Summe der Argumente).[14]

Satz 0.153 (Einheitswurzeln)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Die Gleichung* $z^n = 1$ *hat genau* n *verschiedene Lösungen in* $\mathbb{C}$, *nämlich*

$$\xi_k = \exp\left(\frac{k}{n} 2\pi i\right) \quad \textit{für } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

und werden als n-te Einheitswurzeln *bezeichnet.*

Definition 0.154 (Funktion in $\mathbb{R}$)**.** Eine *reellwertige Funktion* auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$, also die jedem $x \in D$ ein $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. D heißt *Definitionsbereich* von f, und $f(D) := \{f(x)\colon x \in D\} \subset \mathbb{R}$ heißt *Wertebereich* von f.

Definition 0.155 (algebraische Operationen)**.** Gegeben seien zwei Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir *punktweise*[15]

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x), \qquad (fg)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Ferner definieren wir auf $D' = \{x \in D : f(x) \neq 0\}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 0.156 (Komposition)**.** Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Dann ist deren *Komposition* (auch *Verknüpfung*, *Hintereinanderausführung*)

$$g \circ f\colon D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Definition 0.157 (Umkehrfunktion)**.** Die Funktion $g\colon E \to \mathbb{R}$ heißt *Inverse* oder *Umkehrfunktion* zur Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, falls

$$g \circ f\colon \mathrm{id}_D \qquad \text{und} \qquad f \circ g\colon \mathrm{id}_E$$

(insbesondere $g(E) = D$ und $f(D) = E$) gilt.

Definition 0.158 (ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)**.**

1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $x_0 \in D$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

   $$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| \leq \delta$$

   gilt. Oder in Zeichen:

   $$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in D\colon \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

[14] Das gilt natürlich auch für die Division (Quotient der Beträge und Differenz der Argumente).

[15] *Punktweise* bedeutet, dass wir sie für jede Stelle $x \in D$ einzeln definieren.

2. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Definition 0.159 (Folgenkriterium für Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D und $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. Oder anders formuliert: Für jede Folge $x_n \to x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big).$$

Satz 0.160 (Äquivalenz der Stetigkeitsdefinitionen)**.** *Definitionen 0.158 und 0.159 sind äquivalent.*

Proposition 0.161. *Die Exponenzialfunktion $x \mapsto \exp(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

Proposition 0.162. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{1/k}$ stetig auf $\mathbb{R}_+$.*

Proposition 0.163. *Die konstante Funktion, die Identität und die Betragsfunktion sind stetig auf $\mathbb{R}$.*

Proposition 0.164 (Stetigkeit unter algebraischen Operationen)**.** *Mit Funktionen f und g sind auch die Funktionen $f+g$, $f\cdot g$ und f/g (falls $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.*

Korollar 0.165. *Jede Polynomfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}$. Jede rationale Funktion ist stetig auf ihrem Definitionsbereich.*

Proposition 0.166 (Stetigkeit unter Komposition)**.** *Ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 und eine Funktion $g\colon E \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in x_0.*

Korollar 0.167. *Ist f eine stetige Funktion, so ist auch $f^{1/k}$ stetig (in x_0 bzw. auf D).*
Insbesondere ist auch $x \mapsto x^s$ für jedes $s \in \mathbb{Q}$ stetig auf $(0,\infty)$ (bzw. für jedes $s \in \mathbb{Q}^+$ auf $[0,\infty)$) und $x \mapsto |x|^s$ für jedes $s \in \mathbb{Q}$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (bzw. für jedes $s \in \mathbb{Q}^+$ auf $\mathbb{R}$).

Satz 0.168 (Zwischenwertsatz)**.** *Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nimmt für jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an, d. h. es gibt für jedes $\gamma \in [f(a), f(b)]$ ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = \gamma$.*
Ist insbesondere $f(a) \le 0 \le f(b)$, so hat f eine Nullstelle.

Korollar 0.169. *Jedes Polynom ungeraden Grades, also*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_0 \quad \textit{mit } a_{2n+1} \neq 0,$$

hat mindestens eine reelle *Nullstelle*

Korollar 0.170. *Sei $I \in \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt). Ist eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, so ist auch $f(I)$ ein Intervall.*

Definition 0.171 (kompaktes Intervall)**.** Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, falls es abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 0.172 (Extremwertsatz)**.** *Das Bild eines kompakten Intervalls unter einer stetigen Abbildung ist ein kompaktes Intervall. Insbesondere nimmt jede stetge Funktion auf einem kompakten Intervall ihre Extrema an, d. h. für ein stetiges $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ kompakt gibt es $p, q \in I$ mit*

$$f(p) = \sup f(I) \qquad \textit{und} \qquad f(q) = \inf f(I).$$

Oder mit anderen Worten: Es existieren $p, q \in I$, sodass $f(y) \le f(x) \le f(p)$ für alle $x \in I$ gilt und damit $f(I) = [f(q), f(p)]$.

Definition 0.173 (gleichmäßige Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } x, x_0 \in D \text{ mit } |x - x_0| \le \delta$$

gilt. Oder in Zeichen:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x, x_0 \in D\colon \quad |x - x_0| \le \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

Satz 0.174. *Sei I ein kompaktes Intervall. Dann ist die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.*[16]

[16] Der Satz ist auch als *Satz von* HEINE bekannt.

Satz 0.175. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und strikt monoton. Dann bildet f das Intervall D bijektiv auf das Intervall $D' = f(D)$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon D' \to \mathbb{R}$ ist stetig und strikt monoton.*

Definition 0.176 (Stetigkeit in $\mathbb{C}$)**.** Für eine komplexwertige Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ ist *stetig in* $z_0 \in \mathbb{C}$, falls

1. es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| \leq \delta$ gilt; oder falls
2. es für alle Folgen $(z_n)_n$ in D mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$ gilt: $f(z_n) \to f(z_0)$.

Beide sind auch in $\mathbb{C}$ äquivalent.

Proposition 0.177. $z \mapsto \exp(z)$ *ist stetig auf* $\mathbb{C}$.

Proposition 0.178. *Folgende Aussagen sind für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ äquivalent.*

1. *f ist stetig.*
2. $\mathrm{Re}(f)$ *und* $\mathrm{Im}(f)$ *sind stetig.*
3. *$\overline{f}$ ist stetig.*

Korollar 0.179. *Die Funktionen $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.*

Korollar 0.180. *Die Funktion $x \mapsto \cos x$ auf $[0, 2]$ besitzt eine eindeutige Nullstelle (nämlich $\frac{1}{2}\pi$, vgl. Proposition 0.142).*

Proposition 0.181 (natürlicher Logarithmus)**.**

1. *Die Expoenntialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist stetig und strikt monoton. Deshalb bildet sie $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ ab.*
2. *Die Umkehrfunktion ist der* natürliche Logarithmus *(oder* Logarithmus zur Basis *e)*

   $$\log\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

   (auch mit ln *abgekürzt) Er genügt der Funktionalgleichung*

   $$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Definition 0.182 (Logarithmus, Potenz zur Basis a)**.** Für $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ definieren wir den *Logarithmus zur Basis a* als

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*$$

und die *Potenz bzw. Exponenzialfunktion zur Basis a*

$$a^x = \exp(x \log(a)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Satz 0.183 (Potenzgesetze)**.** *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gelten*

1. $a^x a^y = a^{x+y}$,
2. $(a^x)^y = a^{xy}$,
3. $a^x b^x = (ab)^x$,
4. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ *mit* $a^m = a \cdots a$ *(m Faktoren),*
5. $a^{\log_a(x)} = x$ *und* $\log_a(a^x) = x$*, d. h. die Funktionen $x \mapsto \log_a(x)$ und $x \mapsto a^x$ sind invers zueinander.*

Definition 0.184 (Areafunktionen)**.** Die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cosh\colon [0, \infty) \to [1, \infty), \qquad \tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$$

sind alle stetig, strikt monoton wachsend und damit bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen sind

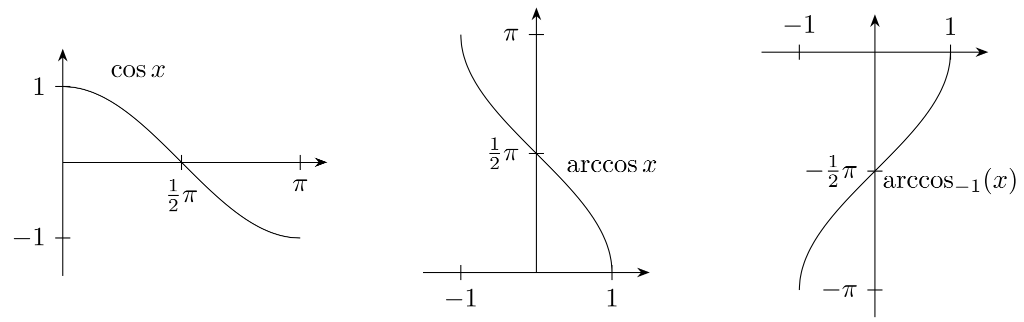
- $\operatorname{Ar}\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*Area sinus hyperbolici*),
- $\operatorname{Ar}\cosh\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ (*Area cosinus hyperbolici*) und
- $\operatorname{Ar}\tanh\colon (-1{,}1) \to \mathbb{R}$ (*Area tangens hyperbolici*).[17]

Satz 0.185 (Arkuskosinus)**.**

1. $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ *ist stetig und strikt monoton fallend, also bijektiv. Die Umkehrfunktion*

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißt Arcus cosinus *(oder genauer,* „Hauptzweig des Arcus cosinus“*).*



2. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist $\cos\colon [k\pi,(k+1)\pi] \to [-1,1]$ *bijektiv und die Umkehrfunktion*

$$\arccos_k\colon [-1,1] \to [k\pi,(k+1)\pi]$$

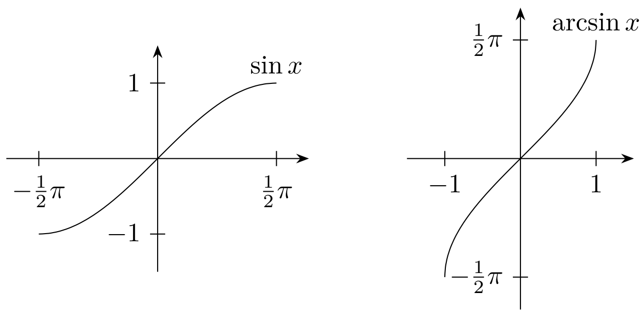
heißt der k-ter Nebenzweig des Arcus cosinus*.*

Korollar 0.186 (Arkussinus)**.** $\sin\colon [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ *ist stetig und stirkt monoton, also bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt* Arcus sinus*:*

$$\arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es den k-ten Nebenzweig

$$\arcsin_k\colon [-1,1] \to \left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right].$$



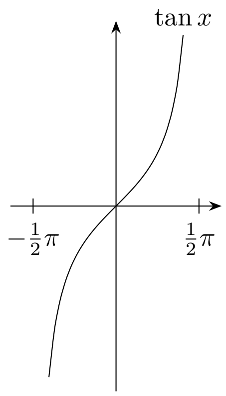
Korollar 0.187. $\tan\colon (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$ *ist stetig und strikt monoton, also bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt* Arcus tangens*:*

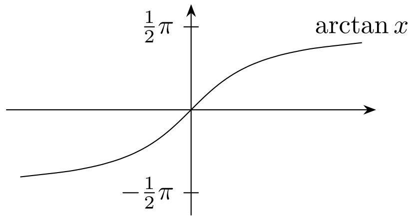
$$\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gibt es den k-ten Nebenzweig

$$\arctan_k\colon \mathbb{R} \to \left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right).$$

[17] Es gilt genauer: $\operatorname{Ar}\sinh x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ und $\operatorname{Ar}\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$.





Korollar 0.188 (Eindeutigkeit der Polardarstellung)**.** *Für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *gibt es eindeutig bestimmte* $r \in (0, \infty)$ *und* $\varphi \in [0, 2\pi)$, *sodass* $z = r \exp(i\varphi)$ *gilt.*

Definition 0.189 (Differenzierbarkeit, Ableitung)**.** Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt dann *Ableitung* oder *Differenzialquotient von* f *im Punkt* x_0.

Bezeichnung 0.190. Wir schreiben

$$f'(x_0) := \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0 \\ x_0 + h \in D}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0 \\ x \in D}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da uns klar ist, dass die Folgenglieder aus D kommen und der Nenner nicht 0 werden kann, können wir einige Bedingungen unter lim weglassen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Proposition 0.191. *Für* $f(x) = c \in \mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}$ *ist* $f'(x) = 0$.

Proposition 0.192. *Für* $f(x) = x^n$ *auf* $\mathbb{R}$ *mit einem* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Proposition 0.193. *Für* $f(x) = 1/x$ *auf* $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ist* $f'(x) = -1/x^2$.

Proposition 0.194. *Für* $f(x) = e^{cx}$ *auf* $\mathbb{R}$ *mit* $c \in \mathbb{R}$ *ist* $f'(x) = ce^{cx}$.

Proposition 0.195. *Für* $f(x) = a^x$ *auf* $\mathbb{R}$ *mit* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *ist* $f'(x) = \log(a)a^x$.

Proposition 0.196. *Es gilt* $\sin'(x) = \cos x$ *und* $\cos'(x) = -\sin x$.

Proposition 0.197. *Es gilt* $\sinh'(x) = \cosh x$ *und* $\cosh'(x) = \sinh x$.