Exercice 1
Application du cours : calcul de π par la méthode du "hit or miss"

Exercice 2
On pose

$$J = \int_{0.1}^{0.9} \frac{1}{2}\, e^{arcsin(x)} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

1. Par intï¿½gration donner la valeur de l'intï¿½grale J (cette valeur sera considï¿½rï¿½e comme la valeur vraie de l'intégrale et pourra être utilisï¿½e comme valeur de référence).

2. Donner une estimation, à l'aide de la méthode de Monte Carlo, de l'intégrale J.

3. Etudier la convergence de la valeur de l'intégrale en fonction du nombre de valeurs simulées n.

4. Comparer la valeur de l'intégrale obtenue par la méthode Monte Carlo avec celle obtenue par utilisation d'une méthode de quadrature.

5. Nous souhaitons connaï¿½tre l'erreur numérique qui est faite lors du calcul par Monte Carlo et étudier la dépendance de cette erreur avec le nombre de tirage n. Ecrire un programme qui permet de calculer l'erreur numérique faite sur I en fonction de n. Représenter ensuite vos résultats sur un graphique.

6. Mï¿½thode des "batchs" : effectuer M expériences Monte Carlo de N tirages et estimer la valeur de l'intégrale pour chacune de ces expériences. L'évaluation Monte Carlo de l'intégrale sera obtenue en effectuant la moyenne sur ces M estimations.

7. Réduction de variance : application de la méthode de "stratification".

Exercice 3
Même exercice pour

$$I = \int_0^1 \int_0^1 xy(sin(\frac{1}{xy}))^2\, dx\, dy$$

Exercice 4
Réduction de variance : Il s'agit d'approcher numériquement l'intégrale Z en utilisant une variable de contrôle

$$Z = \int_0^1 \int_0^1 e^{u^2}\, du$$

1. Donner une estimation, à l'aide de la méthode de brute Monte Carlo, de l'intégrale J.

2. En considérant pour variable de contrôle la fonction $h(u)$ début du développement de Taylor de la fonction $g(u) = e^{u^2}$ au voisinage de 0, donner une estimation de Z et de sa variance.

3. Estimer de combien la variance peut être réduite grâce à cette méthode