



MAT-2400
Méthodes numériques

Devoir 3

13 novembre 2025

Louis-Victor Carrier-Favreau
NI. 537 320 649

Jean-Christophe Parent
NI. 536 776 335

Table des matières

2. Démonstration que $E(h) \leq Ch^3$	5
---------------------------------------	---

Table des figures

1 Polynôme d'interpolation de $f(x)$ (Newton)	2
2 Maximum de l'erreur du polynôme d'interpolation de $f(x)$ en fonction de h	3
3 Interpolation quadratique par morceaux $Q_n(x)$ de $f(x)$	4
4 Erreur max de $Q_n(x)$ en fonction de h	4
5 Splines cubiques $S_n(x)$ de $f(x)$	5

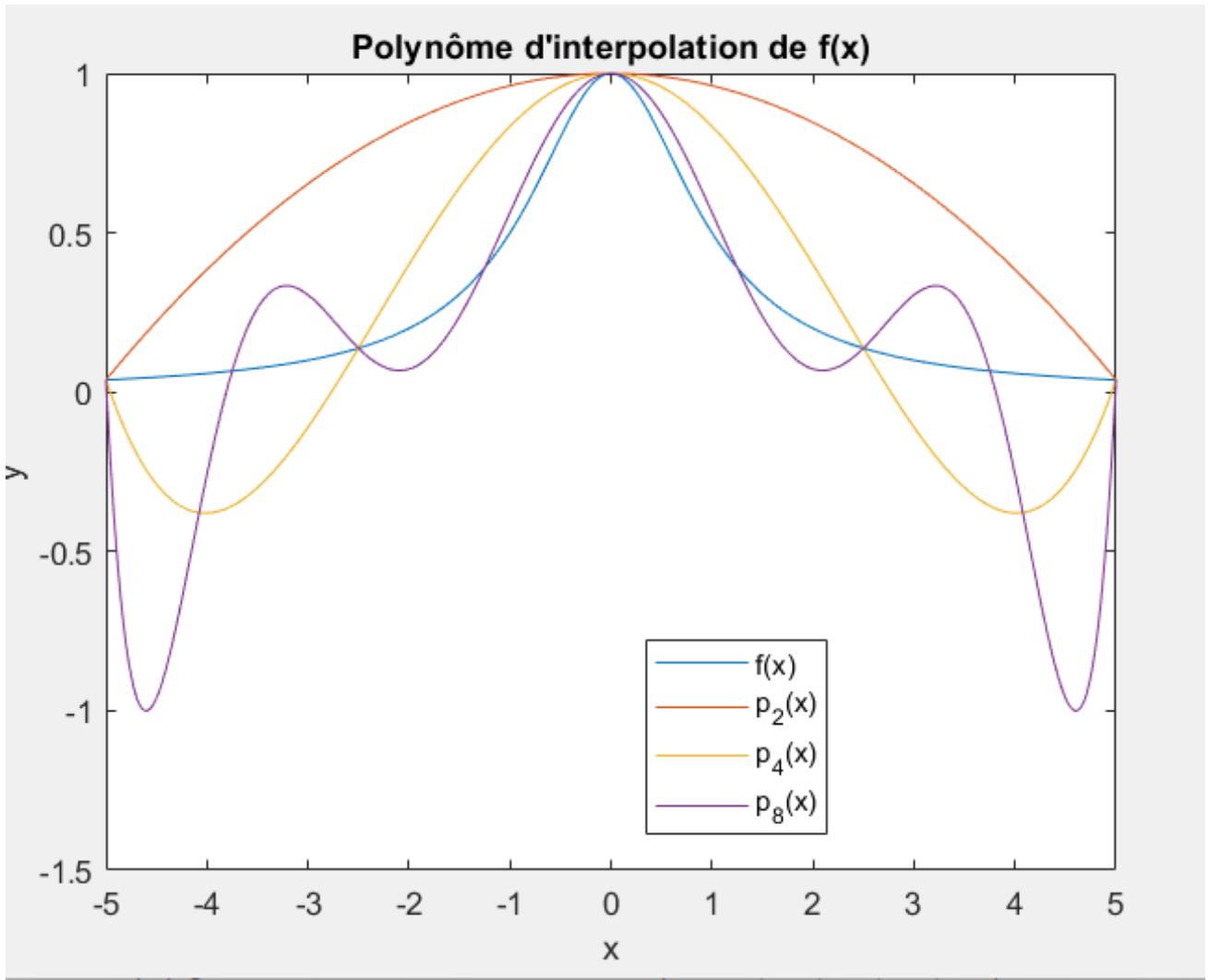


FIGURE 1 – Polynôme d'interpolation de $f(x)$ (Newton)

On voit que le polynôme d'interpolation ne converge pas vers $f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En fait, comme l'interpolation est un polynôme de degré n on voit que si $P_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) alors $P_n \rightarrow T_0(x)$ ($n \rightarrow \infty$) où $T_0(x)$ est le polynôme de Taylor de f en 0. Cependant f est discontinu en $x = \pm i$ comme Mathieu l'a mentionné en classe. Donc par le théorème de Taylor le rayon de convergence est $R = |i|$. Comme l'interpolation est sur $[-5, 5]$ qui est en dehors de $D_1(0) \subset \mathbb{C}$ l'interpolation ne peut pas converger vers $T_0(x)$.

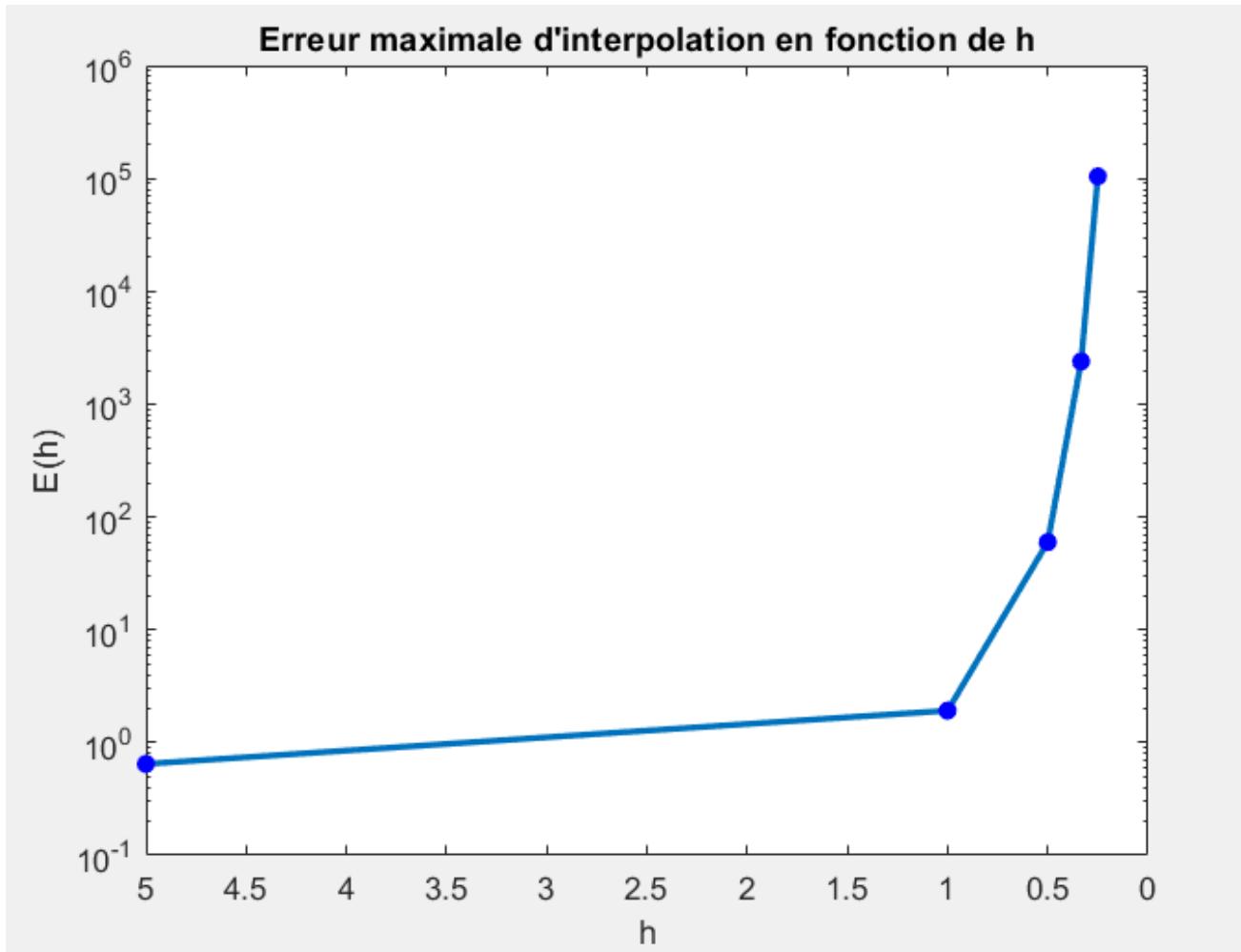


FIGURE 2 – Maximum de l'erreur du polynôme d'interpolation de $f(x)$ en fonction de h

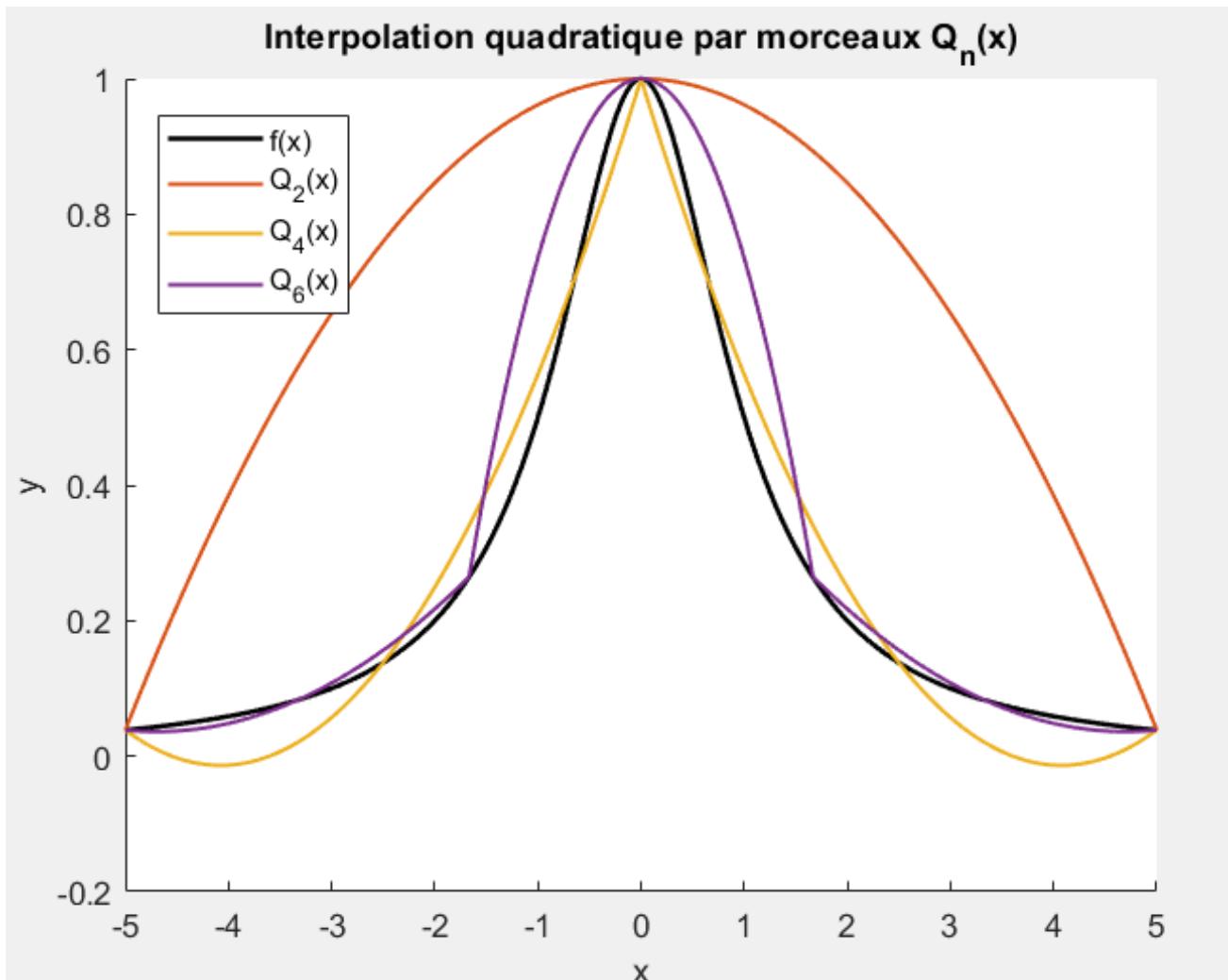


FIGURE 3 – Interpolation quadratique par morceaux $Q_n(x)$ de $f(x)$

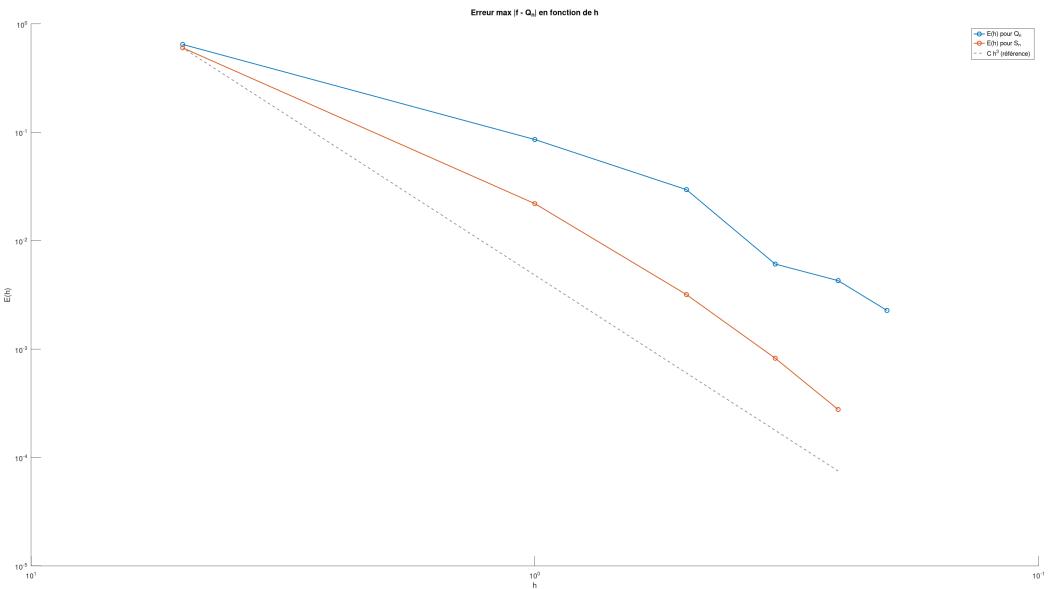


FIGURE 4 – Erreur max de $Q_n(x)$ en fonction de h

La figure montre que $E(h)$ diminue proportionnellement à h^3 . On observe le comportement attendus entre l'erreur et la courbe de référence ce qui confirme que l'interpolation quadratique par morceaux converge avec un ordre de 3, comme démontré ci-bas.

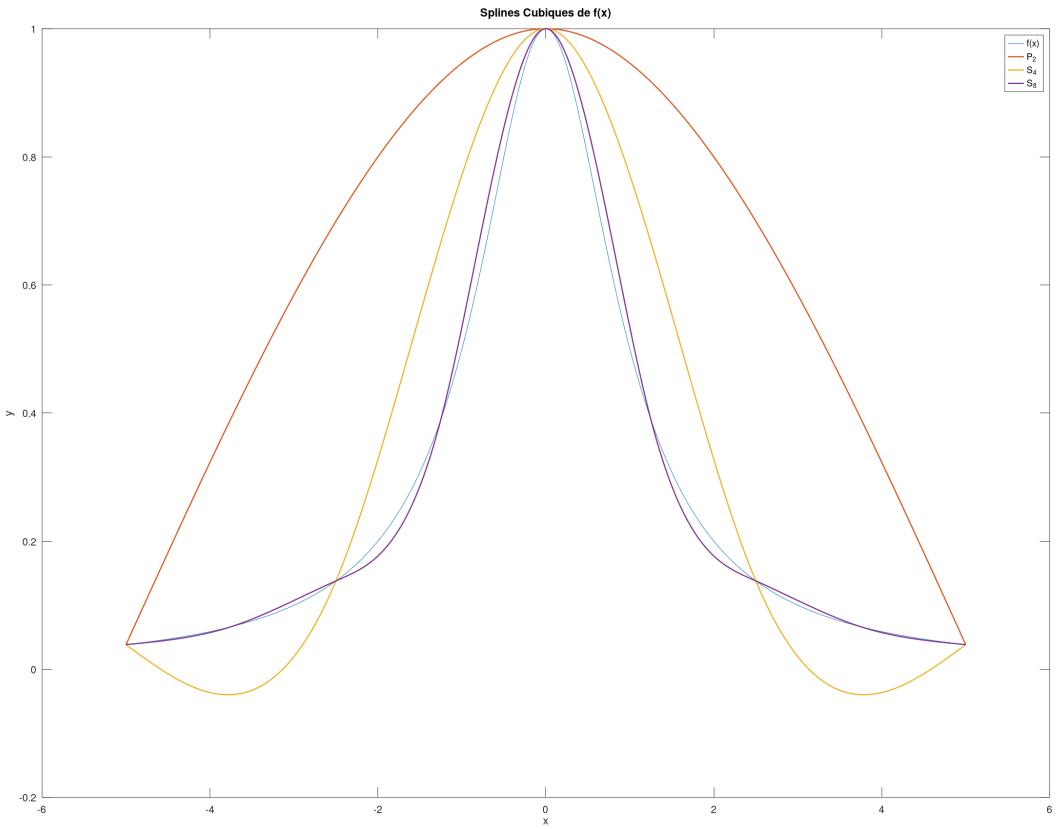


FIGURE 5 – Splines cubiques $S_n(x)$ de $f(x)$

On voit sur la figure le résultat est lisse contrairement aux Q_n et que le résultat est plus proche de la fonction originale.

2. Démonstration que $E(h) \leq Ch^3$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$|f'''(x)| \leq M \quad (M > 0)$$

$$E(h) := \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)|$$

Travaillons sur $I = [x_i, x_{i+2}] \subset [-5, 5]$. Soit $\xi_x \in I$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)(x - (x_i + h))(x - (x_i + 2h)) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right| \\
&\leq \left| \frac{M}{3!} (x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right|
\end{aligned}$$

Comme $|x - x_i| \leq 2h$ on trouve que $|x - x_i - h| \leq h$ et $|x - x_i - 2h| \leq 2h$ et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &\leq \frac{M}{3!} 2h \times h \times 2h \\
&= \frac{2M}{3} h^3 \\
&= Ch^3 \quad \left(C = \frac{2M}{3} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(h) = \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)| \leq Ch^3$$