

**MAT-2400**  
**Méthodes numériques**

**Devoir 3**

**12 novembre 2025**

**Louis-Victor Carrier-Favreau**  
**NI. 537 320 649**

**Jean-Christophe Parent**  
**NI. ? ? ? ? ? ? ? ?**



# Table des matières

2. Démonstration que $E(h) \leq Ch^3$	5
---------------------------------------	---

# Table des figures

1 Polynôme d'interpolation de $f(x)$ . . . . .	2
2 Maximum de l'erreur du polynôme d'interpolation de $f(x)$ en fonction de $h$ . . . . .	3
3 Interpolation quadratique par morceaux $Q_n(x)$ de $f(x)$ . . . . .	4
4 Erreur max de $Q_n(x)$ en fonction de $h$ . . . . .	4
5 Splines cubiques $S_n(x)$ de $f(x)$ . . . . .	5

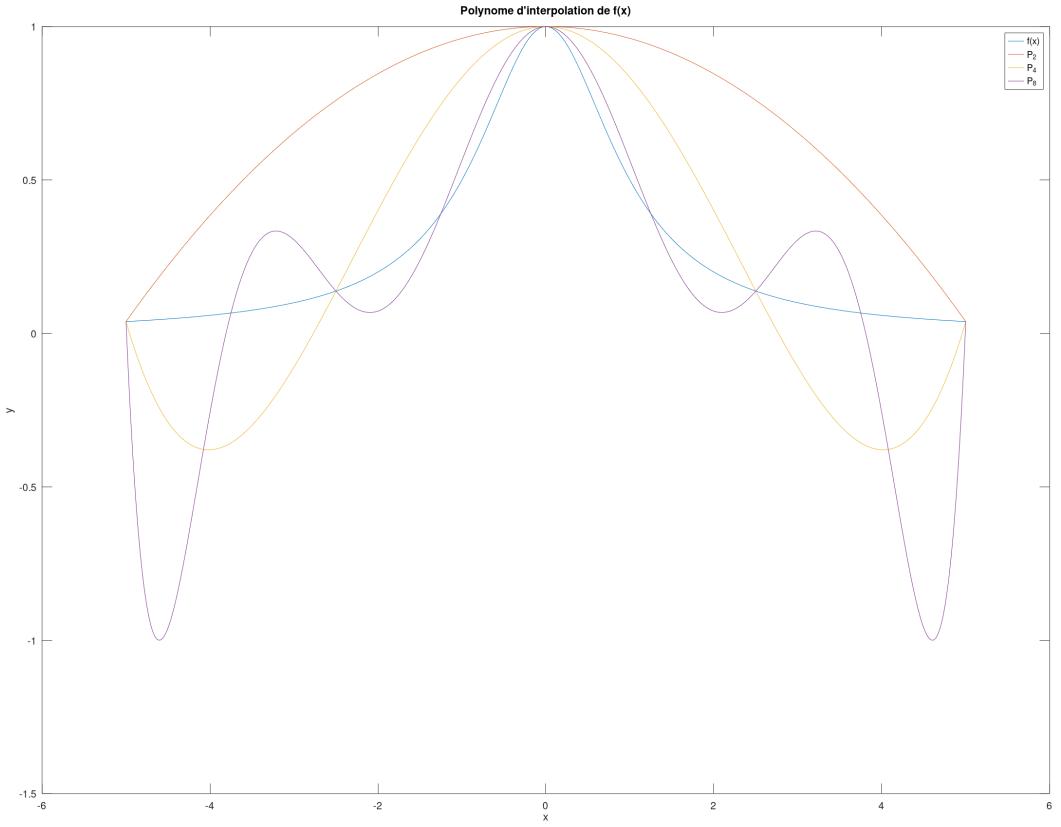


FIGURE 1 – Polynome d’interpolation de  $f(x)$

On voit que le polynome d’interpolation ne converge pas vers  $f(x)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . En fait, comme l’interpolation est un polynome de degré  $n$  on voit que si  $P_n(x) \rightarrow f(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) alors  $P_n \rightarrow T_0(x)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) où  $T_0(x)$  est le polynome de Taylor de  $f$  en 0. Cependant  $f$  est discontinue en  $x = \pm i$  comme Mathieu l’a mentionné en classe. Donc par le théorème de Taylor le rayon de convergence est  $R = |i|$ . Comme l’interpolation est sur  $[-5, 5]$  qui est en dehors de  $D_1(0) \subset \mathbb{C}$  l’interpolation ne peut pas converger vers  $T_0(x)$ .

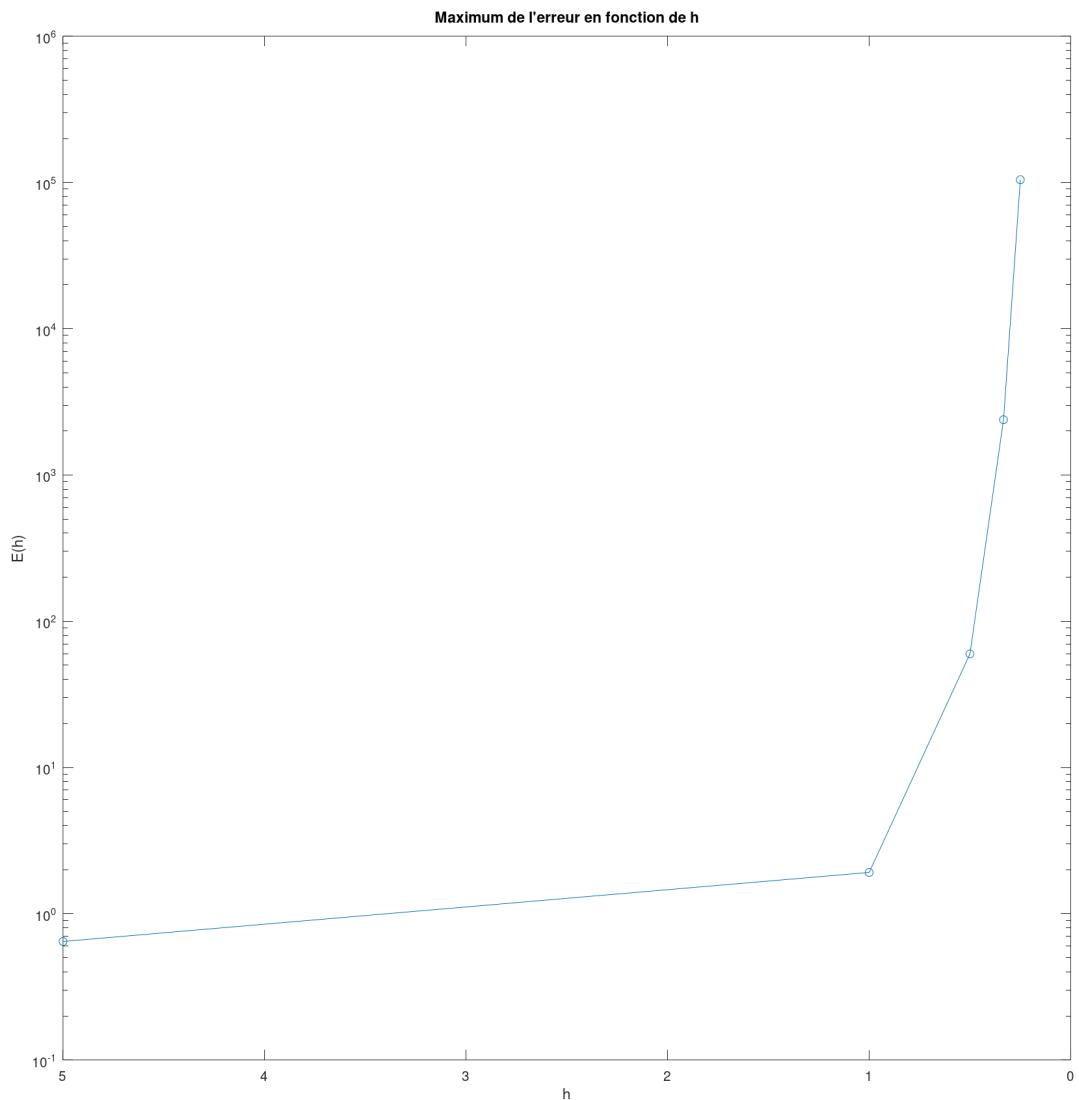


FIGURE 2 – Maximum de l'erreur du polynôme d'interpolation de  $f(x)$  en fonction de  $h$

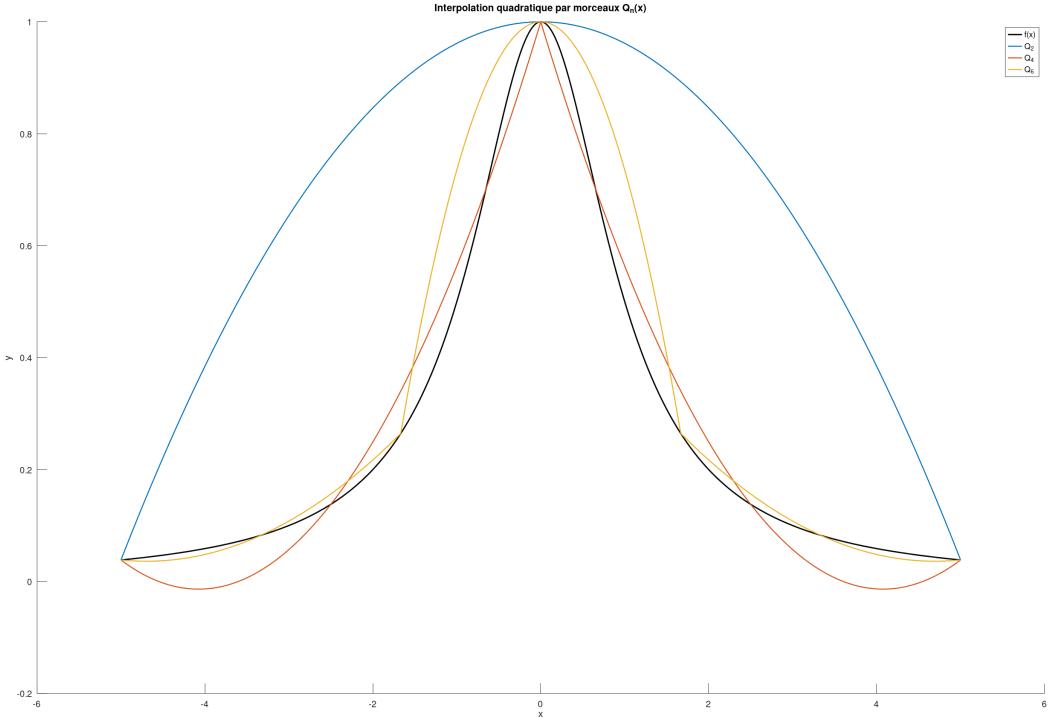


FIGURE 3 – Interpolation quadratique par morceaux  $Q_n(x)$  de  $f(x)$

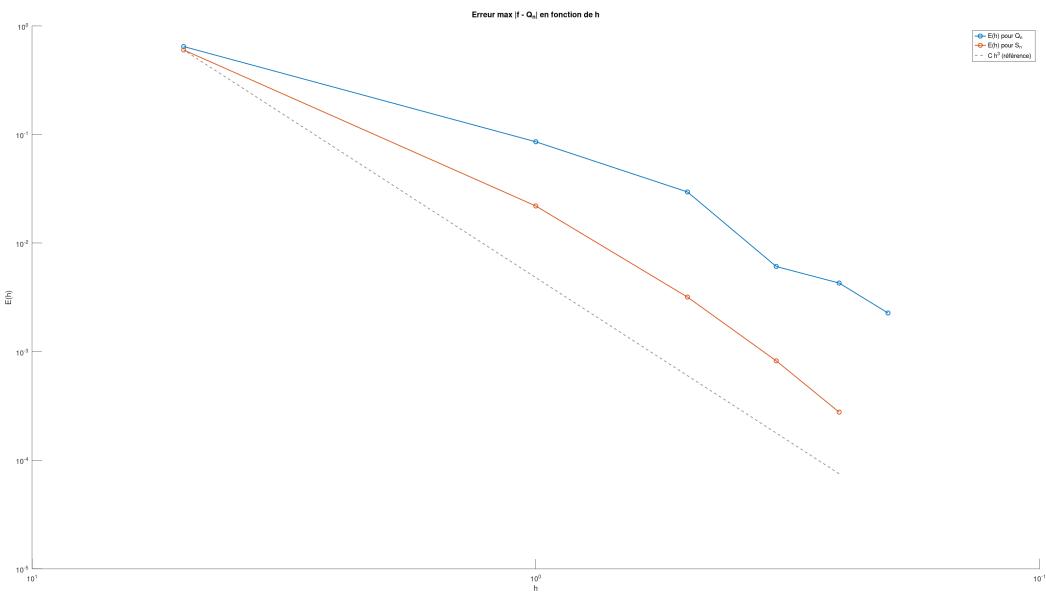


FIGURE 4 – Erreur max de  $Q_n(x)$  en fonction de  $h$

La figure montre que  $E(h)$  diminue proportionnellement à  $h^3$ . On observe le comportement attendus entre l'erreur et la courbe de référence ce qui confirme que l'interpolation quadratique par morceaux converge avec un ordre de 3, comme démontré ci-bas.

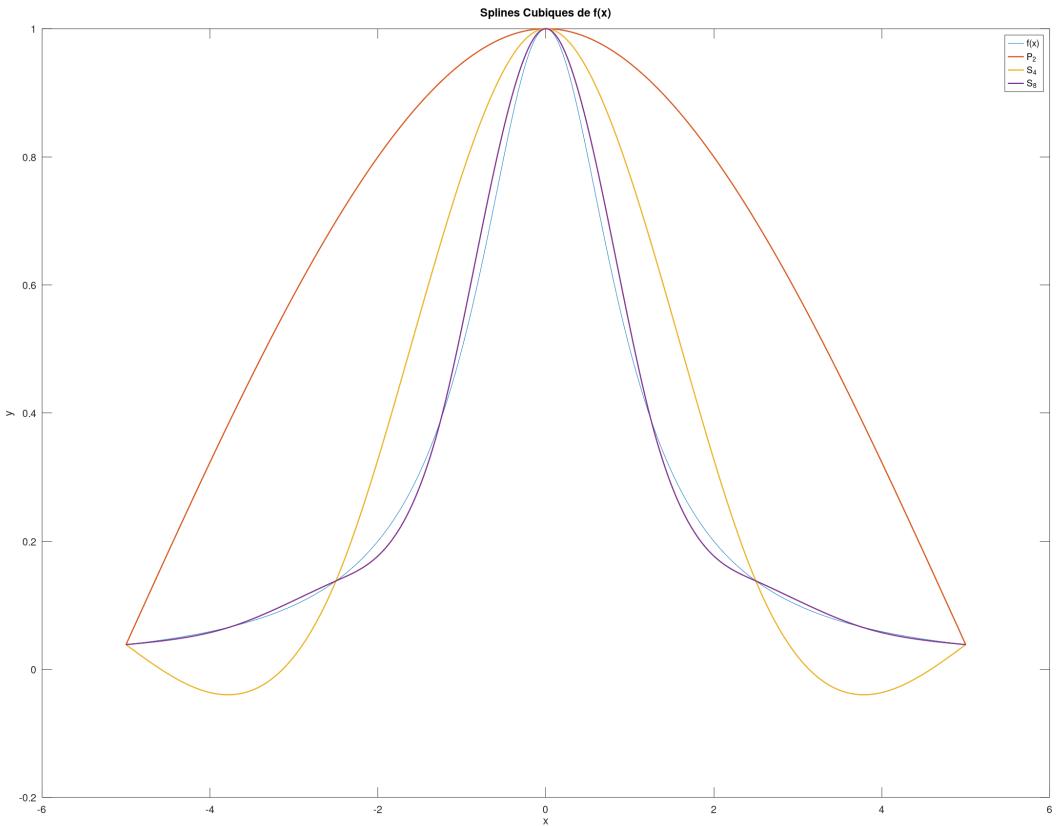


FIGURE 5 – Splines cubiques  $S_n(x)$  de  $f(x)$

On voit sur la figure le résultat est lisse contrairement aux  $Q_n$  et que le résultat est plus proche de la fonction originale.

## 2. Démonstration que $E(h) \leq Ch^3$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
 |f'''(x)| &\leq M \quad (M > 0) \\
 E(h) &:= \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)|
 \end{aligned}$$

Travaillons sur  $I = [x_i, x_{i+2}] \subset [-5, 5]$ . Soit  $\xi_x \in I$ .

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)(x - (x_i + h))(x - (x_i + 2h)) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!} (x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right| \\
&\leq \left| \frac{M}{3!} (x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right|
\end{aligned}$$

Comme  $|x - x_i| \leq 2h$  on trouve que  $|x - x_i - h| \leq h$  et  $|x - x_i - 2h| \leq 2h$  et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &\leq \frac{M}{3!} 2h \times h \times 2h \\
&= \frac{2M}{3} h^3 \\
&= Ch^3 \quad \left( C = \frac{2M}{3} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(h) = \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)| \leq Ch^3$$