MAT-2400

Méthodes numériques

Devoir 3

13 novembre 2025

Louis-Victor Carrier-Favreau
NI. 537 320 649

Jean-Christophe Parent
NI. 536 776 335

Table des matières

Table des figures

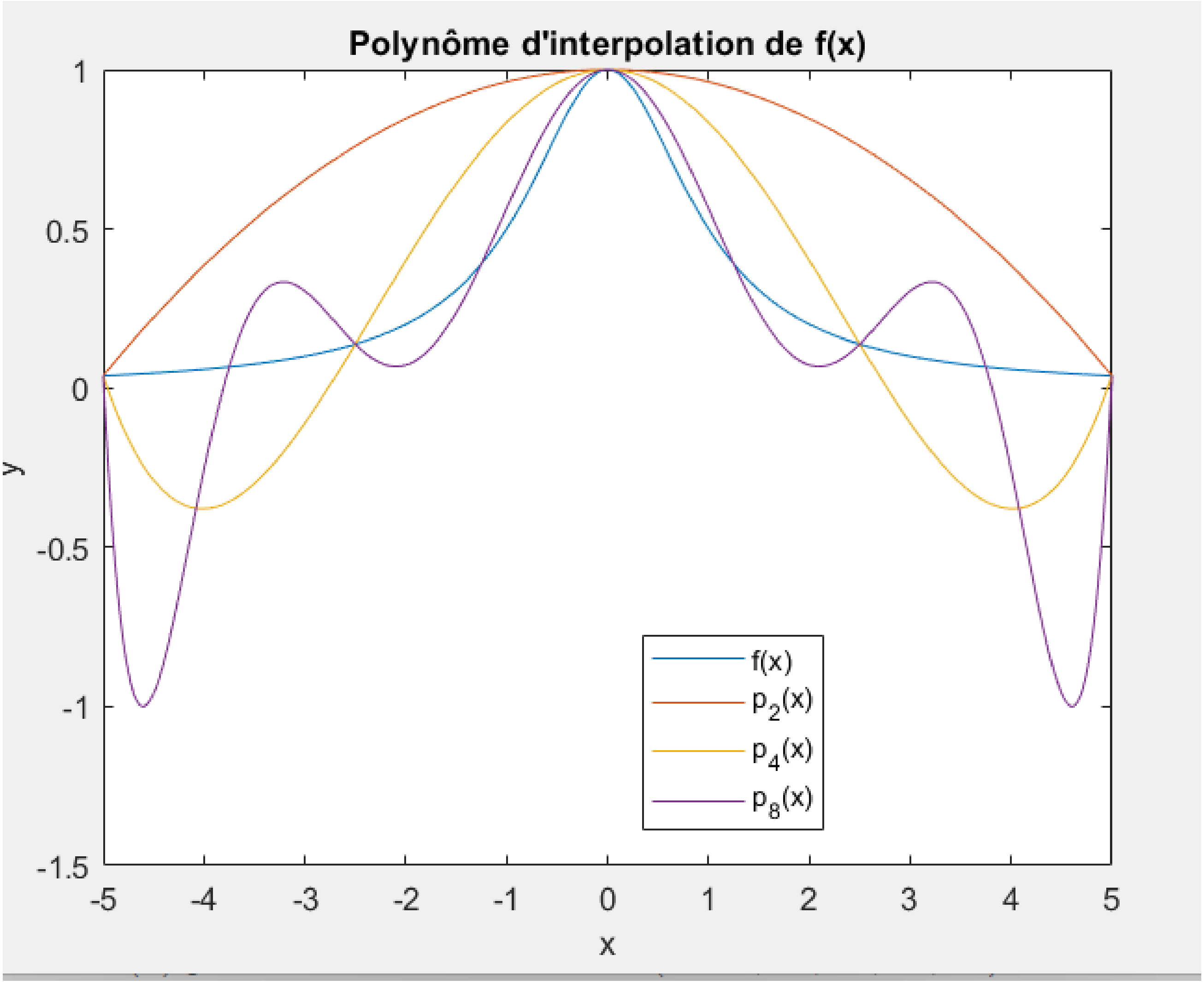

FIGURE 1 – Polynome d'interpolation de $f(x)$ (Newton)

On voit que le polynome d'interpolation ne converge pas vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$. En fait, comme l'interpolation est un polynome de degré n on voit que si $P_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ alors $P_n \to T_0(x)$ $(n \to \infty)$ où $T_0(x)$ est le polynome de Taylor de f en 0. Cependant f est discontinue en $x = \pm i$ comme Mathieu l'a mentionné en classe. Donc par le théorème de Taylor le rayon de convergence est $R = |i|$. Comme l'interpolation est sur $[-5, 5]$ qui est en dehors de $D_1(0) \subset \mathbb{C}$ l'interpolation ne peux pas converger vers $T_0(x)$.

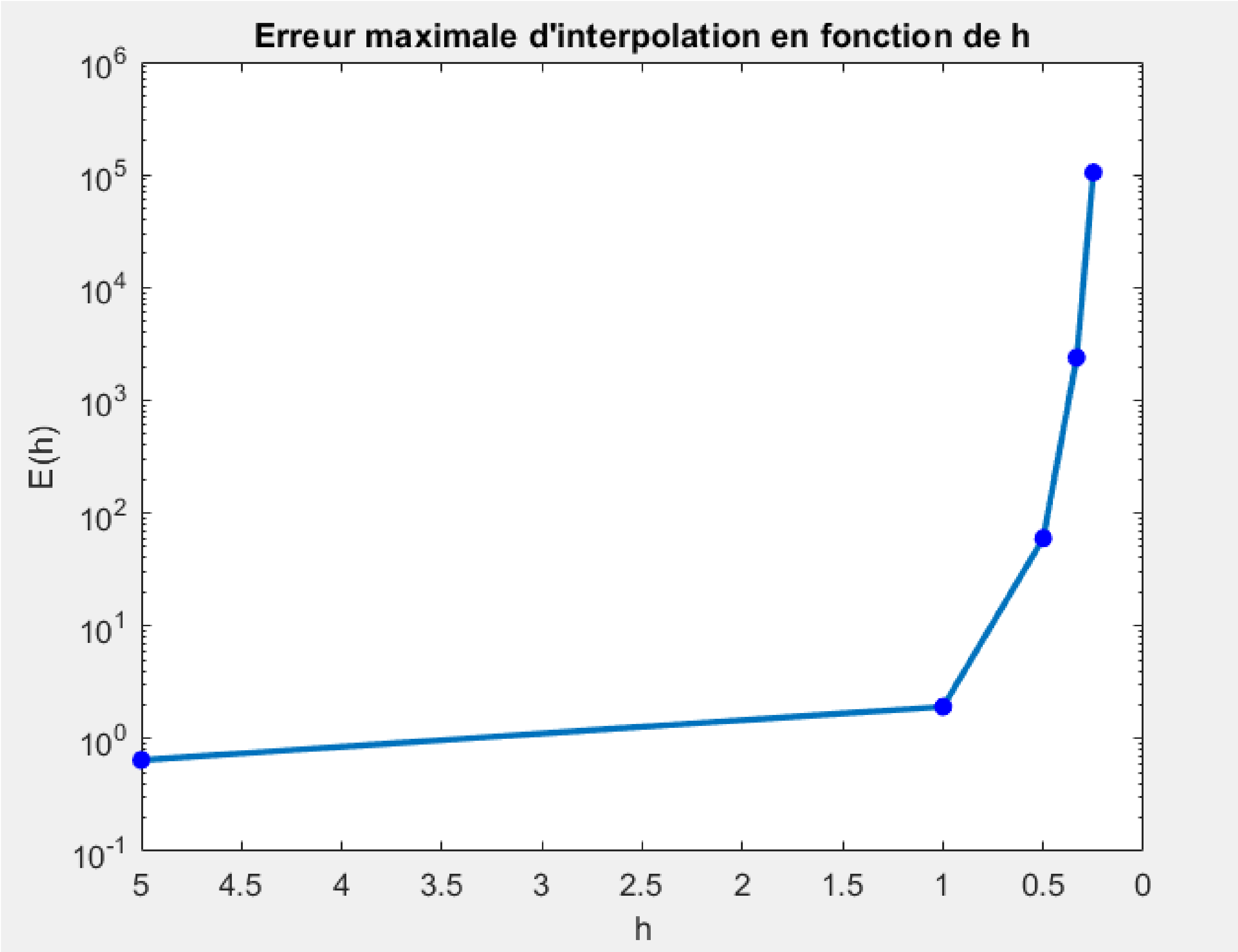

Figure 2 – Maximum de l'erreur du polynome d'interpolation de $f(x)$ en fonction de h

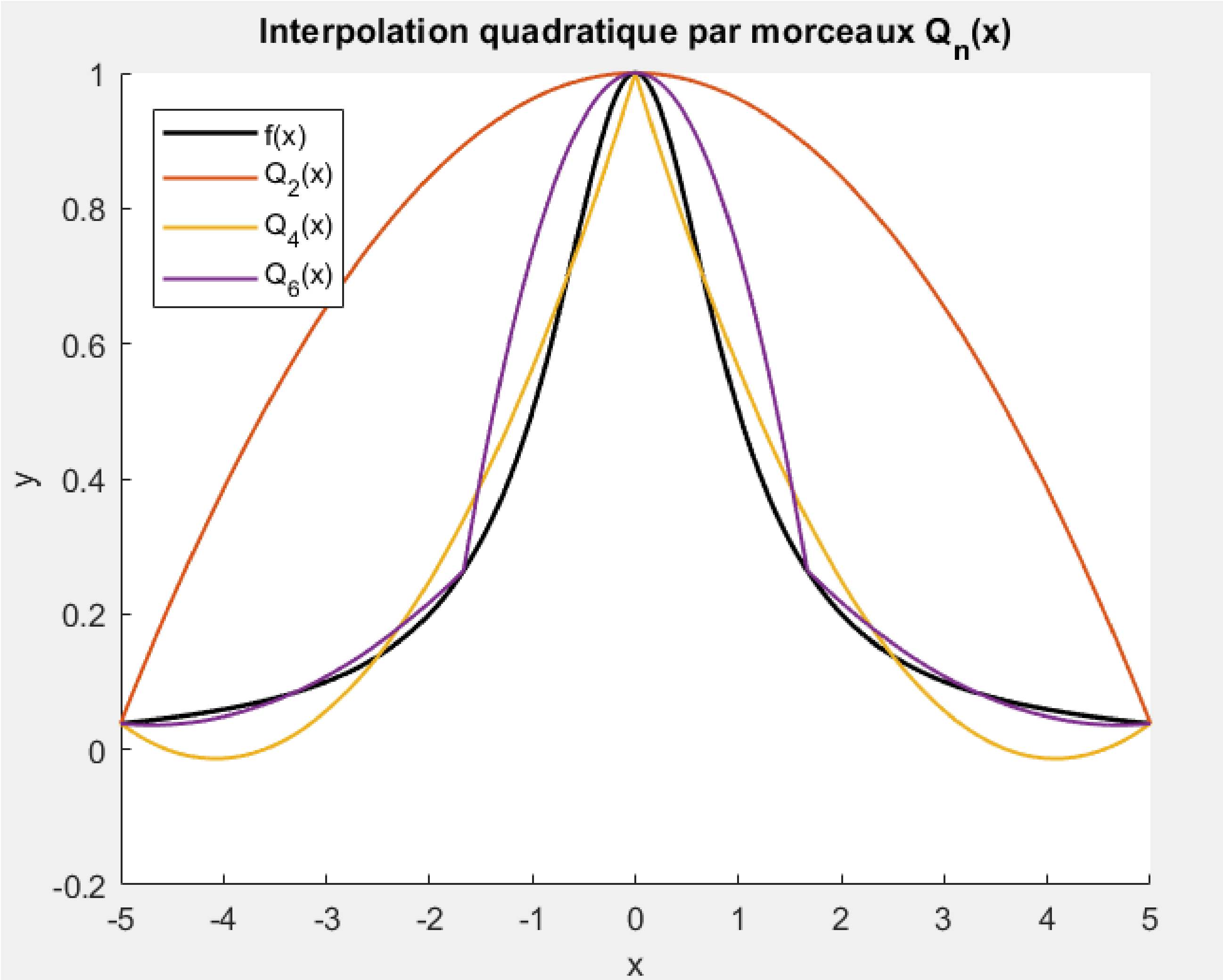

FIGURE 3 – Interpolation quadratique par morceaux $Q_n(x)$ de $f(x)$

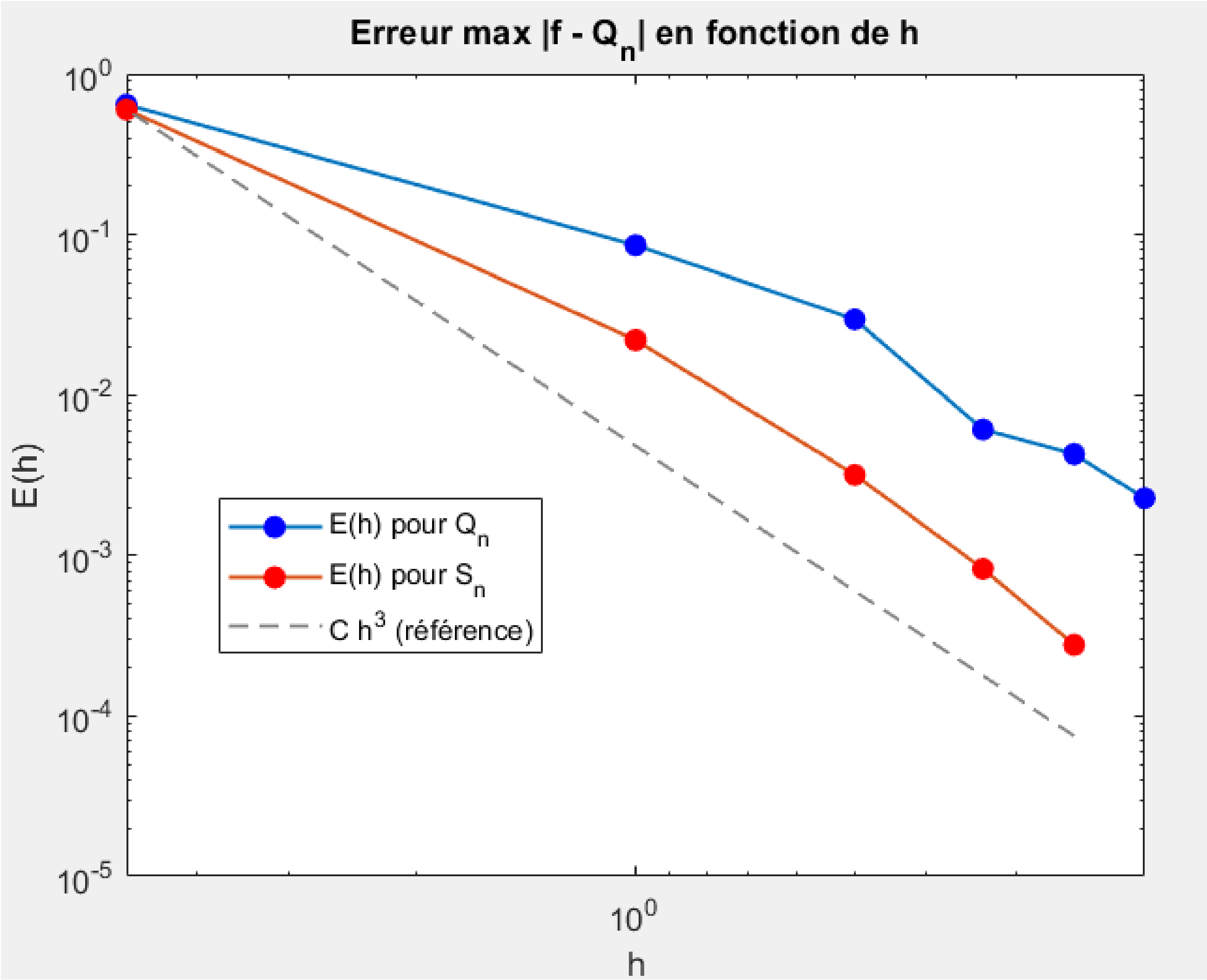

FIGURE 4 – Erreur max de $Q_n(x)$ et $S_n(x)$ en fonction de h

La figure montre que $E(h)$ diminue proportionellement à h^3. On observe le comportement attendus entre l'erreur et la courbe de référence ce qui confirme que l'interpolation quadratique par morceaux converge avec un ordre de 3, comme démontré ci-bas.

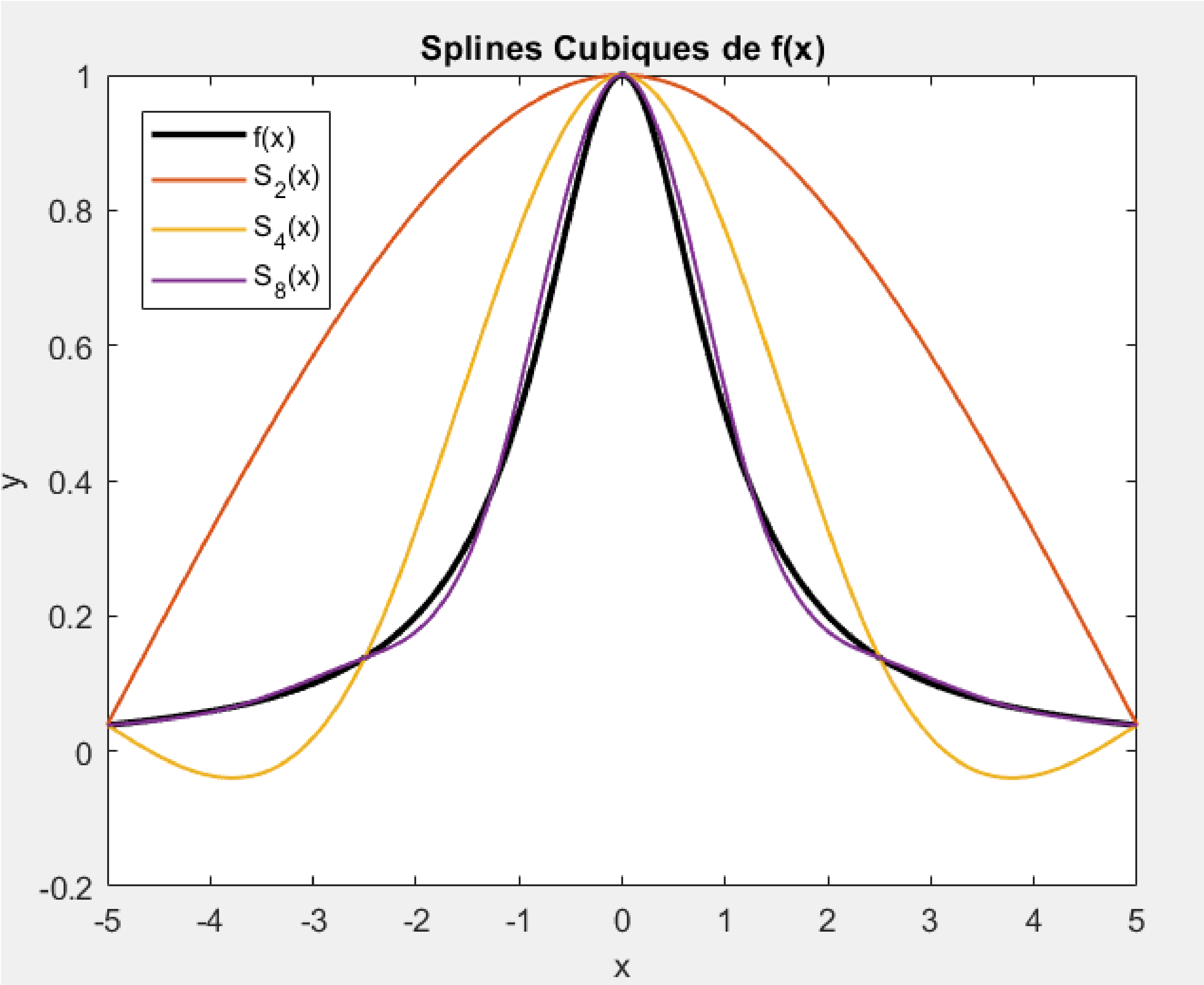

FIGURE 5 – Splines cubiques $S_n(x)$ de $f(x)$

On voit sur la figure le résultat est lisse contrairement aux Q_n et que le résultat est plus proche de la fonction originale.

2. Démonstration que $E(h) \leq Ch^3$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
|f'''(x)| &\leq M \ (M > 0) \\
E(h) &:= \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)|
\end{aligned}
$$

Travaillons sur $I = [x_i, x_{i+2}] \subset [-5, 5]$. Soit $\xi_x \in I$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_i)(x - (x_i + h))(x - (x_i + 2h)) \right| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi_x)}{3!}(x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right| \\
&\leq \left| \frac{M}{3!}(x - x_i)((x - x_i) - h)((x - x_i) - 2h) \right|
\end{aligned}$$

Comme $|x - x_i| \leq 2h$ on trouve que $|x - x_i - h| \leq h$ et $|x - x_i - 2h \leq 2h$ et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &\leq \frac{M}{3!} 2h \times h \times 2h \\
&= \frac{2M}{3} h^3 \\
&= Ch^3 \quad \left(C = \frac{2M}{3} \right)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$E(h) = \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - Q_n(x)| \leq Ch^3$$