DEVOIR 5

MAT-2400 Méthodes numériques Automne 2025

La méthode des différences finies pour la résolution d'équations différentielles à valeurs aux limites

À remettre avant 10h20 :

la fonction Matlab *tridiagonal.m* demandée à la Question 1. a) (vous n'avez pas besoin de lire toute l'introduction, il suffit d'aller directement à la Question 1 a)).

À remettre avant jeudi prochain 23h59

Un fichier compressé, contenant un rapport et trois programmes Matlab (.m) : un fichier script (*devoir .m*) et 2 fonctions Matlab (*tridiagonal.m* et *problimite.m*)
Le fichier script fait appel aux fonctions. Lorsqu'on lance ce fichier script, il doit produire les 2 figures demandées.

But du travail :

Ce devoir traite de la résolution numérique des problèmes à valeurs aux limites en dimension un. Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 7 (section 7.10) du manuel du cours.

Problème

Soient trois fonctions $p(x)$, $q(x)$ et $r(x)$ définies sur l'intervalle $[a, b]$. On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\begin{array}{lcl} y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) & = & r(x), \quad x \in [a, b], \\ y(a) & = & \alpha, \\ y(b) & = & \beta, \end{array} \tag{1}$$

où les constantes α et β sont connues. Un tel problème est appelé problème à valeurs aux limites, car la fonction inconnue y doit satisfaire les conditions $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$, posées aux limites de l'intervalle $[a, b]$.

Pour approcher la solution du problème (1), on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en $N+1$ sous-intervalles de même longueur

$$h = \frac{b-a}{N+1}.$$

On définit les noeuds de la subdivision par

$$x_i = a + i\ h, \qquad i = 0, 1, \dots, N+1.$$

Au lieu de chercher une fonction $y(x)$ qui satisfait (1), on cherche un vecteur $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N, y_{N+1})$ dont la ième composante y_i donne une approximation de la valeur exacte $y(x_i)$ au ième noeud x_i. Bien sûr, on impose dès le départ

$$y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta.$$

Il nous reste à déterminer N inconnues $y_1, \dots, y_N$. Pour ce faire, on construit un système linéaire en remplaçant dans (1) x par chacun des noeuds **intérieurs** x_i, $y(x_i)$ par l'inconnue y_i et les dérivées par des différences finies :

$$\begin{aligned} y''(x_i) &\simeq \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \\ y'(x_i) &\simeq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient un système linéaire à N équations et N inconnues $y_1, \dots, y_N$ qui s'écrit

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p_i\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) - q_i y_i = r_i, \qquad \forall i = 1, \dots, N$$

où on a utilisé les notations $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ et $r_i = r(x_i)$.

On peut aussi récrire le système sous forme matricielle

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2+q_1h^2 & -1+p_1h/2 & 0 & \dots & 0 \\ -1-p_2h/2 & 2+q_2h^2 & -1+p_2h/2 & 0 & \dots \\ 0 & -1-p_3h/2 & 2+q_3h^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1+p_{N-1}h/2 \\ 0 & \dots & 0 & -1-p_Nh/2 & 2+q_Nh^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r_1h^2 + (1+p_1h/2)\alpha \\ -r_2h^2 \\ \vdots \\ -r_{N-1}h^2 \\ -r_Nh^2 + (1-p_Nh/2)\beta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Notons que la matrice a une structure *tridiagonale*. On va donc résoudre le système linéaire en ne stockant que la partie intéressante de la matrice.

Questions

Question 1.

a) Écrire une fonction Matlab que vous nommerez *tridiagonal.m*, qui aura pour arguments un vecteur D contenant la diagonale principale, un vecteur I contenant la diagonale inférieure, un vecteur S contenant la diagonale supérieure et un vecteur b, et qui aura pour sortie la solution du système $Ax = b$ où A est la matrice tridiagonale de diagonales I, D et S.
Pour résoudre le système on programmera l'algorithme (utilisant une factorisation LU) décrit dans la section *3.6.2 Les systèmes tridiagonaux* du manuel du cours.

b) Écrire une fonction Matlab que vous nommerez *problimite.m*, qui aura comme arguments N, des vecteurs P, Q et R contenant les évaluations des fonctions p, q et r aux noeuds x_i, des scalaires a, b, α et β. La sortie de cette fonction Matlab sera le vecteur $\vec{y}$ solution de (3). Cette fonction Matlab fera bien sûr appel à la fonction Matlab précédente pour résoudre le système tridiagonal.

Question 2.

Si l'on veut prédire la distribution de température dans un fluide Newtonien contenu entre deux cylindres coaxiaux dont l'extérieur tourne à une vitesse angulaire constante, on peut, en utilisant la symétrie de la géométrie, ramener l'étude à celle d'un problème en dimension un de la forme

$$\begin{cases} y''(x) + \dfrac{y'(x)}{x} + \dfrac{1.6}{x^4} = 0 \quad x \in [0.9, 1], \\ y(0.9) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

où x est la distance à l'axe, 0.9 est le rayon du cylindre intérieur alors que 1 est celui du cylindre extérieur.

On peut vérifier que pour des valeurs c et d que vous déterminerez,

$$y(x) = \left[c - \frac{0.4}{x^2}\right] - \left[c - \frac{0.4}{d}\right] \frac{\ln x}{\ln 0.9},$$

est la solution de (4).

a) Écrire un script Matlab que vous nommerez *devoir.m*, qui fera appel à la fonction Matlab précédente, et qui calculera la solution de (4) obtenue avec $h = 1/30$, puis avec $h = 1/50$. Dans ce script Matlab, faire représenter graphiquement ces deux approximations ainsi calculées et la solution exacte pour comparer.

b) Toujours sur le même script Matlab, pour les valeurs de $h = 10^{-2},\ 10^{-3}, ..., 10^{-5}$, calculer l'erreur

$$E(h) = \max_{i=1,\ldots,N} |y_i - y(x_i)|,$$

et faire tracer le graphe de $E(h)$ dans une échelle logarithmique qui permettra d'apprécier à l'oeil nu l'ordre de convergence des approximations (on s'attend à 2).

c) Dans le rapport :
— Détailler comment vous avez obtenu les paramètres c et d de la solution exacte ;
— Expliquer pourquoi si l'erreur est d'ordre 2 alors sur une échelle logarithmique on doit obtenir graphiquement une droite de pente 2.
— Copier les figures et les commenter brièvement.
— Dans un dernier commentaire, énumérer les différents outils, notions ou techniques (et en précisant pour chacun et chacune le chapitre du manuel où il se trouve) utilisés pour résoudre numériquement le problème de ce devoir. Puis donner une conclusion (une ou deux phrases) sur ce que cela vous inspire. Vous pouvez dire la vérité, je ne prendrai mal aucun commentaire négatif, et aucun n'influencera la note ;-). C'est pour mon information.