《中级宏观经济学》

主讲:何樟勇博士

浙江大学经济学院

2023年春

第六讲 索洛经济增长模型

第一节　离散时间的索洛经济增长模型

一、决策环境：技术、人口与禀赋

- **基本环境**
- 经济是封闭的，生产惟一的一种最终产品，时间是离散的，资本品和消费品之间可以一对一转换。

技术

企业的生产技术由如下这个生产函数得到描述：

$$Y_t = F(K_t, A_t N_t) \qquad （6.1）$$

这里，Y_t 是最终产品的产量，K_t 是资本存量，N_t 是劳动投入数量，A_t 代表经济的技术水平状况。

我们假定技术以外生的速率 $\gamma_A = g$ 增长，并假设初始的技术水平为 A_0，这样就有：

$$A_{t+1} = (1+g)A_t = (1+g)^{t+1} A_0 \qquad （6.2）$$

我们也假定生产函数是一个严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量都是严格递增的函数，显然，这意味着生产函数是规模报酬不变的。因此下式对任意的$\lambda \succ 0$均成立：

$$F(\lambda K, \lambda AN) = \lambda F(K, AN) \qquad (6.3)$$

规模报酬不变的假定使我们可以使用密集形式（Intensive form）的生产函数。在方程（6.3）中，令 $\lambda = 1/AN$，可得：

$$F\left(\frac{K}{AN},1\right) = \frac{1}{AN}F(K,AN) \qquad （6.4）$$

我们称 K/AN 为每单位有效劳动的平均资本量，相应地，Y/AN 就是每单位有效劳动的平均产量。

若定义$k = K/AN$， $y = Y/AN$， $f(k) = F(k,1)$，那么，我们可以将（6.4）式写为：

$$y = f(k) \tag{6.5}$$

也就是说，我们可以把每单位有效劳动的平均产量写成每单位有效劳动的平均资本量的函数。

我们也假定密集形式的生产函数满足 $f(0)=0, f'(k)>0, f''(k)<0$。此外，我们也假定它满足稻田条件（Inada conditions）：$\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$，$\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$。

稻田条件表明，当资本存量足够小时，资本的边际产量很大；而当资本存量变得很大时，资本的边际产量变得很小。稻田条件的作用是保证经济的路径不发散。

人口

经济在初始时有N_0个本质上相同的消费者（初始人口），并假设人口（也即劳动供给）以外生速率$\gamma_N = n$增长，这样有：

$$N_{t+1} = (1+n)N_t = (1+n)^{t+1}N_0 \qquad (6.6)$$

禀赋

所有的生产要素由消费者拥有。也就是说，消费者拥有所有的劳动，他（她）们会无弹性地供给到劳动市场上去。同时，消费者也拥有经济中的初始资本，数量记为K_0。最后，经济中的技术是一种具有非排他性和非竞争性的公共产品，企业可以免费获得。

二、消费者行为

- 按照我们前几讲的惯例，描述消费者的行为首先是给出消费者的效用函数，然后分析消费者的最优化行为，即消费者在视工资和租金率为给定的情况下如何实现效用最大，并推导出消费者的劳动供给函数和资本供给函数。但在这里，我们将遵循索洛处理的方式，直接给出消费者的决策规则：
- 第一，消费者按一个外生的比率把收入储蓄起来。
- 第二，消费者无弹性地供给所有的劳动和资本。

三、索洛模型的动态学

在经济中，资本将以如下规则被积累：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \qquad （6.7）$$

这里，I_t 是总投资，δ 是折旧率。因为我们已经假设消费者将把产出中的 s 部分储蓄起来，因此，（6.7）式可以进一步写为：

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sY_t \qquad （6.8）$$

现在，我们在资本积累方程两边同除以$A_t N_t$，可以得到：

$$\frac{K_{t+1}}{A_t N_t}=(1-\delta)\frac{K_t}{A_t N_t}+s\frac{F(K_t,A_t N_t)}{A_t N_t} \qquad (6.9)$$

因为，生产函数是规模报酬不变的，因此，有：

$$\frac{K_{t+1}}{A_t N_t}=(1-\delta)\frac{K_t}{A_t N_t}+sF\left(\frac{K_t}{A_t N_t},1\right) \qquad (6.10)$$

在上式左边乘以$\dfrac{(1+g_A)A_t*(1+g_N)N_t}{A_{t+1}N_{t+1}}$，可以得到：

$$\frac{(1+g_A)(1+g_N)K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}=(1-\delta)\frac{K_t}{A_t N_t}+sF\left(\frac{K_t}{A_t N_t},1\right) \quad (6.11)$$

利用前面的定义，我们有：

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + sf(k_t)}{(1+g_A)(1+g_N)} \qquad (6.12)$$

这个一阶差分方程描述了人均有效资本随时间演进的规律，我们能把它写成如下形式：

$$k_{t+1} = g(k_t) \qquad (6.13)$$

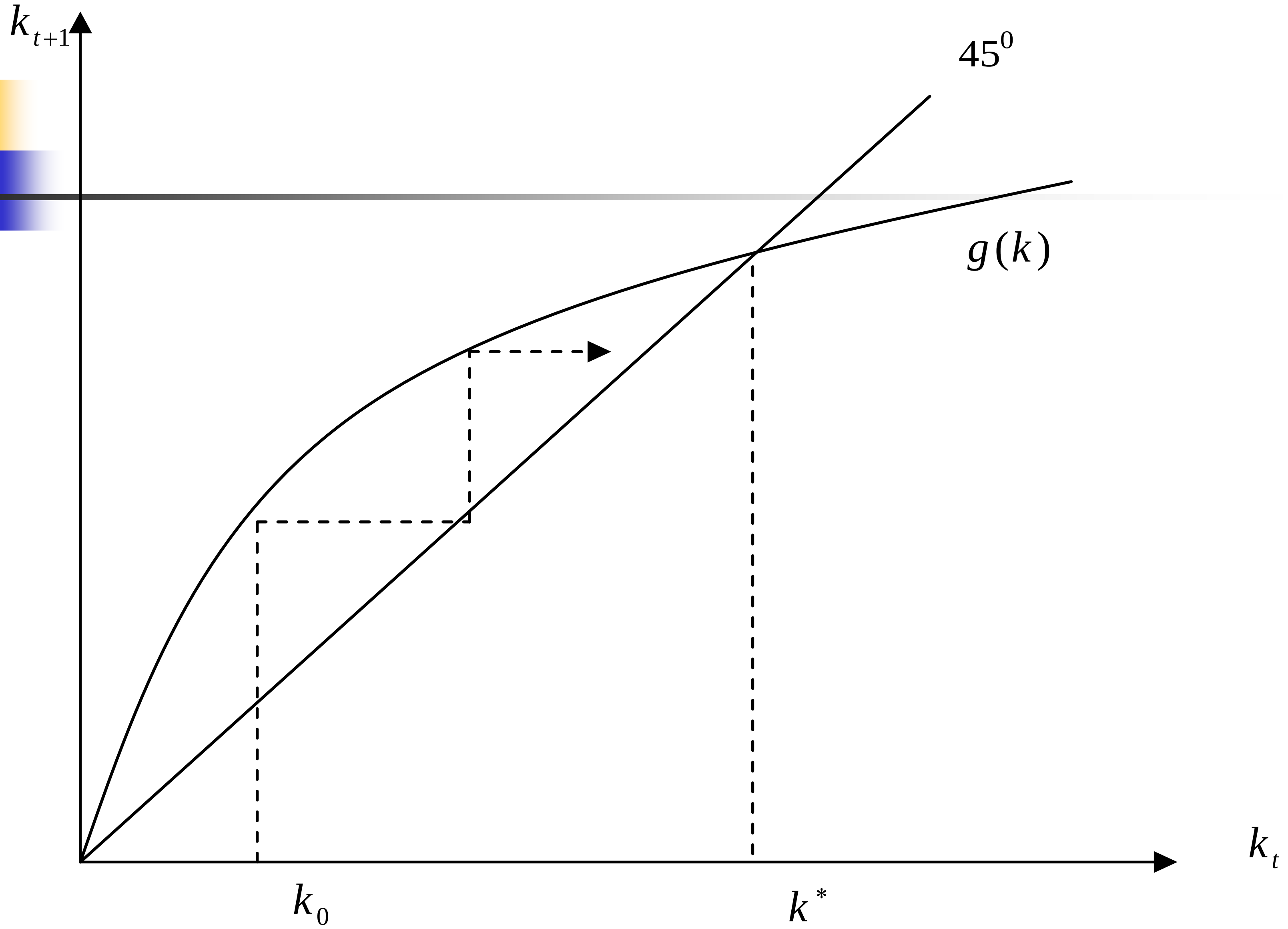
这里：

$$g(k) = \frac{(1-\delta)k + sf(k)}{(1+g_A)(1+g_N)} \qquad (6.14)$$

根据我们对函数 $f(k)$ 所作的假定，可以知道函数 $g(k)$ 具有如下性质： 第一， $g(0)=0$； 第二，该函数严格递增，即： $g'(k)>0$； 第三，该函数是严格凹函数，即： $g''(k)<0$； 第四，满足修正过的稻田条件： $\lim_{k \to 0} g'(k)=\infty$

$$\lim_{k \to \infty} g'(k)=\frac{1-\delta}{(1+g_A)(1+g_N)} \in [0,1]$$

根据这些性质，我们可以画出了函数 $g(k)$ 的图形，如图所示：



k_{t+1}
45^0
$g(k)$
k_t
k_0
k^*

当均衡时， $k_{t+1} = k_t$ ， 因而， 下式将成立：

$$k^* = \frac{(1-\delta)k^* + sf(k^*)}{(1+g_A)(1+g_N)} \qquad (6.15)$$

总结一下，从任意一个大于零的初始人均有效资本 k_0 出发， k_t 将一定会收敛到一个稳定值 k^* 上。 我们可以把经济处于稳定值 k^* 上的状态称为稳定状态。 需要注意的是，当经济达到稳定状态以后， 并不是说经济活动就停止了，而是说经济活动将在人均有效资本维持在 k^* 的水平上展开活动， 我们一般把经济在达到稳定状态以后所呈现出来的增长路径称为平衡增长路径（the balanced growth path）。下面， 我们就着重来分析经济处于平衡增长路径时三个层面的变量在增长方面所具有的特征：

首先，我们来分析人均有效层面的变量。最容易分析的当然是人均有效资本，因为它将一直保持在k^*的水平上，也即它的增长率为零。根据密集型生产函数的表达式，我们知道人均有效产出$y^* = f(k^*)$，因此，当k^*固定不变以后，y^*也将固定不变。另外，由于储蓄率s是固定不变的，而经济中的产出不是用于消费就是用于储蓄，因此，人均有效消费$c^* = (1-s)f(k^*)$。这样，当k^*固定不变以后c^*也将固定不变。由此我们可以得出如下结论：当经济处于平衡增长路径上时，所有人均有效层面的变量都将保持固定不变，也即增长率为零。

其次，我们来看人均层面的变量。如果我们用在变量上加一杠来代表人均层面的变量，并假设经济在 t 期达到稳定状态，结合我们对三个层面变量的定义，那么有 $k_t \equiv \overline{k}_t / A_t = k^*$ 和 $k_t = k_{t+i} = k^*$，其中 $i \in [1,+\infty)$。若记人均资本的增长率为 $\gamma_{\bar{k}}$，可以得到 $k_{t+i} = \dfrac{\overline{k}_{t+i}}{A_{t+i}} = \dfrac{(1+\gamma_{\bar{k}})^i}{(1+g)^i} \cdot \dfrac{\overline{k}_t}{A_t}$，

因为 $\dfrac{\overline{k}_t}{A_t} = k^* = k_{t+i}$，因此必然要求 $\gamma_{\bar{k}} = g$。这一分析也适合于人均产出和人均消费，由此我们能得到如下结论：当经济处于平衡增长路径上时，所有人均层面的变量都将以外生给定的技术进步速率 g 增长。

最后，我们来看总量层面的变量。同样假设经济在 t 期达到稳定状态，结合我们对三个层面变量的定义，那么有 $k_t \equiv K_t / A_t N_t = k^*$ 和 $k_t = k_{t+i} = k^*$，其中 $i \in [1,+\infty)$。若记总资本的增长率为 γ_K，可以得到 $k_{t+i} = \frac{K_{t+i}}{A_{t+i} N_{t+i}} = \frac{(1+\gamma_K)^i}{(1+g)^i (1+n)^i} \cdot \frac{K_t}{A_t N_t}$，

因为 $\frac{K_t}{A_t N_t} = k^* = k_{t+i}$，因此必然要求 $\frac{(1+\gamma_K)^i}{(1+g)^i (1+n)^i} = 1$，也即

$\gamma_K = n + g + ng$。如果 n 和 g 的数值比较小时我们可以忽略 ng 这一项（在连续时间下，这一项将会自动消失！）。这一分析也适合于总产出和总消费，由此我们能得出如下结论：当经济处于平衡增长路径上时，所有总量层面的变量都将以 $n+g$ 的速率增长。

- 这样，索洛模型意味着：不管出发点如何，经济向一平衡增长路径收敛，在平衡增长路径上，该模型中的每个变量的增长率都是常数。在该路径上，人均产量增长率仅仅取决于技术进步率。

第二节　　连续时间的索洛经济增长模型

基本决策环境与假定

基本决策环境与上面离散时间下的假定完全相同。不过，因为现在时间是连续的，所以关于技术和人口增长的表达式将会有所不同，现在为：

$$\dot{A}(t) = gA(t) \qquad （6.16）$$

$$\dot{N}(t) = nN(t) \qquad （6.17）$$

这里，一个变量上加一点表示该变量对时间求导数（也就是说，$\dot{X}(t)$ 是 $dX(t)/dt$ 的简写）。

方程（6.16）和（6.17）意味着 A 和 N 是指数增长。

也就是说，如果 $A(0)$ 和 $N(0)$ 表示在 0 时刻的值，

则（6.16）和（6.17）意味着 $A(t)=A(0)e^{gt}$，

$N(t)=N(0)e^{nt}$。

索洛模型的动态学

在连续时间下，资本的积累方程可表述为：

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \qquad （6.18）$$

利用上面这个方程，我们就能够刻画出 k 的动态学。利用链式法则可得：

$$\dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{A(t)N(t)} - \frac{K(t)}{\left[A(t)N(t)\right]^2}\left[A(t)\dot{N}(t) + N(t)\dot{A}(t)\right]$$

$$= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)N(t)} - \frac{K(t)}{A(t)N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} - \frac{K(t)}{A(t)N(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \qquad （6.19）$$

由（6.16）、（6.17）式可知，$\dot{N}(t)/N(t)=n$，$\dot{A}(t)/A(t)=g$ 。$\dot{K}(t)$ 由（6.18）式给出。将这些代入（6.19）式，可得：

$$\dot{k}(t)=\frac{sY(t)-\delta K(t)}{A(t)N(t)}-nk(t)-gk(t)$$

$$=s\frac{Y(t)}{A(t)N(t)}-\delta k(t)-nk(t)-gk(t) \qquad （6.20）$$

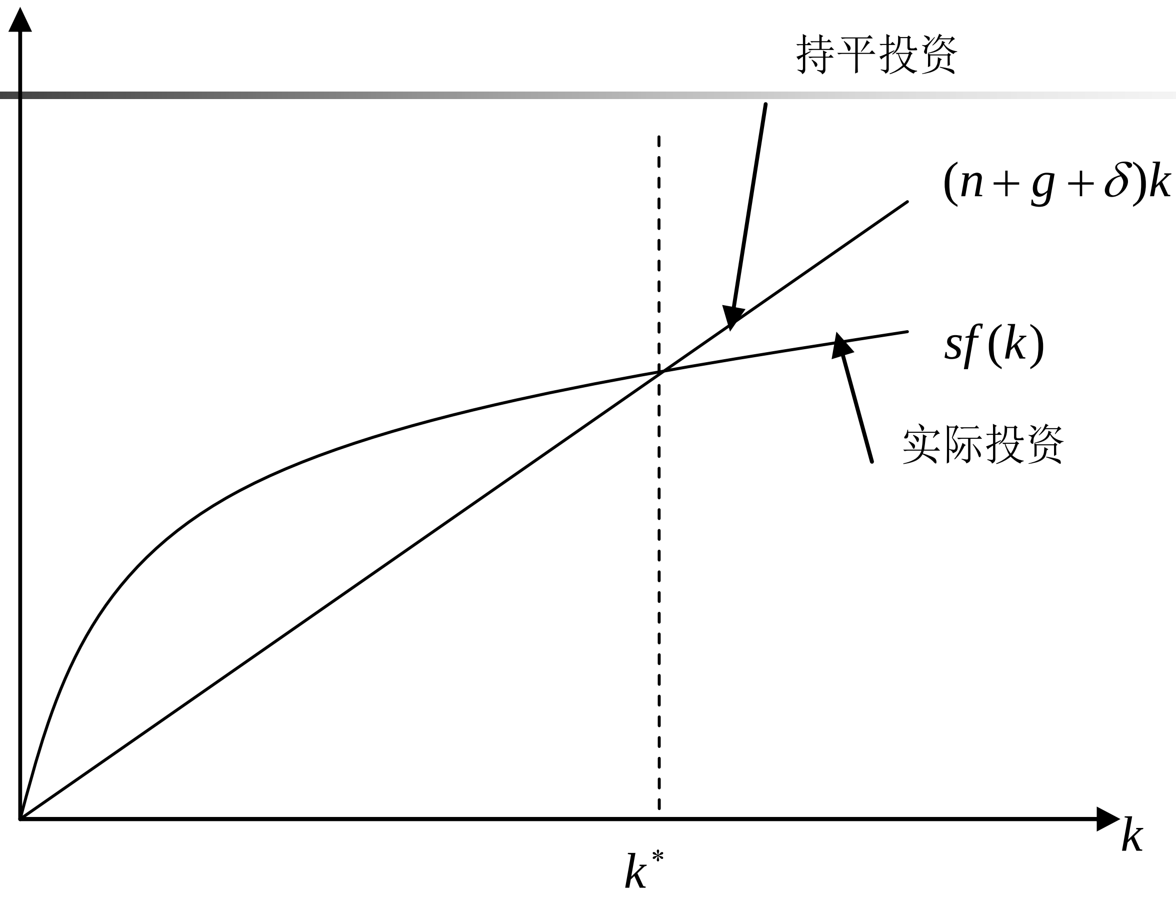
最后，应用$Y/AN=f(k)$这一事实，有：

$$\dot{k}(t)=sf(k)-(n+g+\delta)k(t) \qquad （6.21）$$

方程（6.21）是索洛模型的关键方程。它表明，每单位有效劳动的平均资本存量的变动率是两项之差。第一项 $sf(k)$ 是每单位有效劳动的平均实际投资：每单位有效劳动的平均产量为 $f(k)$，该产量中用于投资的比例为 s。第二项 $(n+g+\delta)k$ 是持平投资（Break-even investment），即使得 k 保持在其现有水平上所必须的投资量。

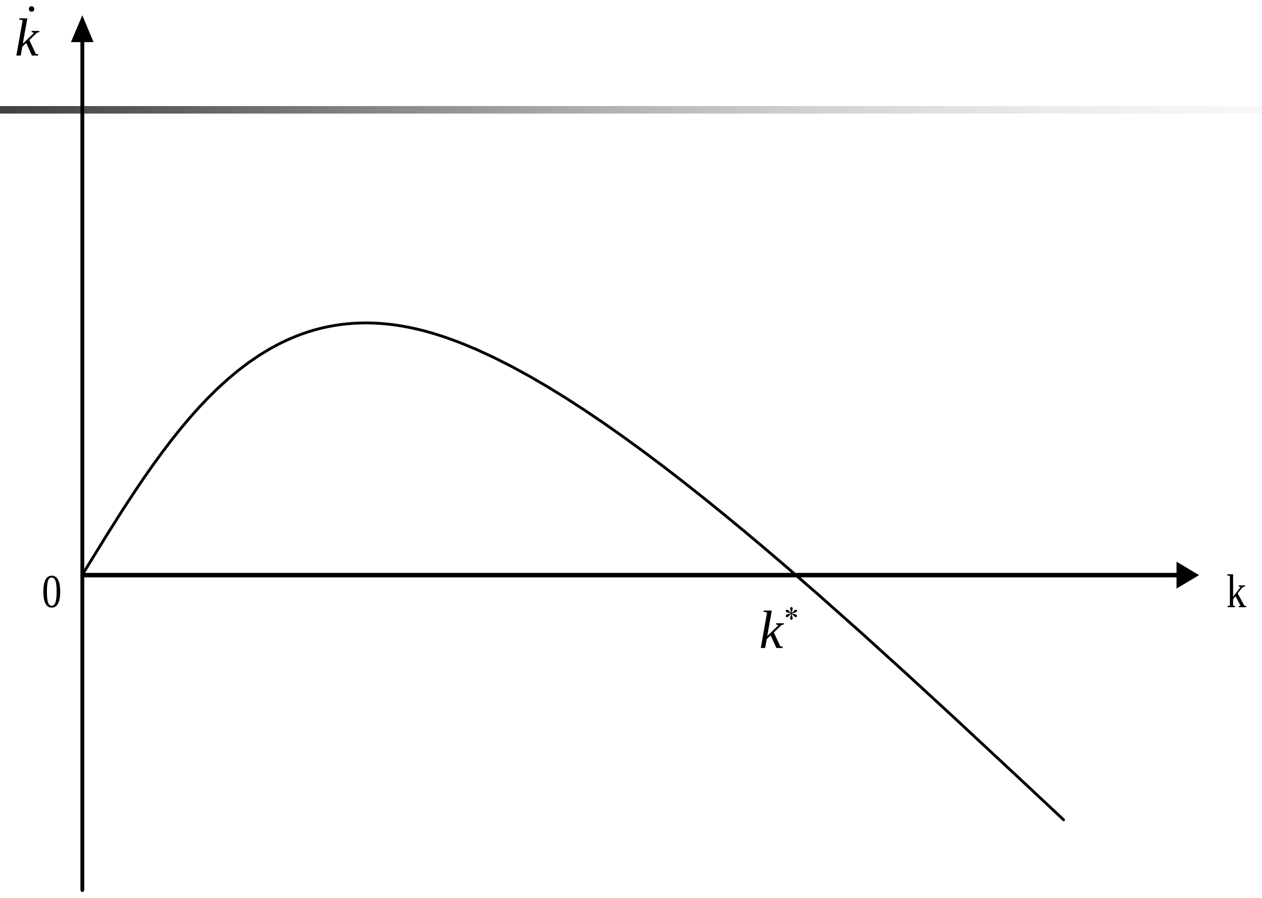
如果每单位有效劳动的平均实际投资大于所需的持平投资，则 k 上升。如果实际投资低于持平投资，则 k 下降。如果二者相等则 k 不变。

图 6-2 把$\dot{k}$的表达式中的两项表示为 k 的函数。持平投资$(n+g+\delta)k$与 k 成正比。实际投资$sf(k)$等于一个常数乘以每单位有效劳动的平均产量。


持平投资
$(n+g+\delta)k$
$sf(k)$
实际投资
k
k^*

由于 $f(0)=0$，因此，当 $k=0$ 时，实际投资于持平投资相等。稻田条件意味着当 $k=0$ 时，$f'(k)$ 很大，因而曲线 $sf(k)$ 陡于 $(n+g+\delta)k$ 线。这样，如果 k 值较小，则实际投资大于持平投资。稻田条件也意味着随着 k 变大 $f'(k)$ 趋向于零。在某一点上，实际投资线的斜率必将低于持平投资线的斜率。随着 $sf(k)$ 线变得比 $(n+g+\delta)k$ 线平坦，这两条线最终将相交。最后，$f''(k)<0$ 意味着在 $k>0$ 时这两条线只相交一次。我们用 k^* 表示当实际投资于持平投资相等时 k 的值。

图 6-3 以相图的形式对此做了总结。在相图中，$\dot{k}$ 被表示为 k 的一个函数。如果 k 最初小于 k^*，实际投资大于持平投资，因而 $\dot{k}$ 为正——也就是说，k 在增加。如果 k 大于 k^*，$\dot{k}$ 是负的。最后，如果 k 等于 k^*，$\dot{k}$ 为零。因此，不管 k 从何处开始，它都向 k^* 收敛。

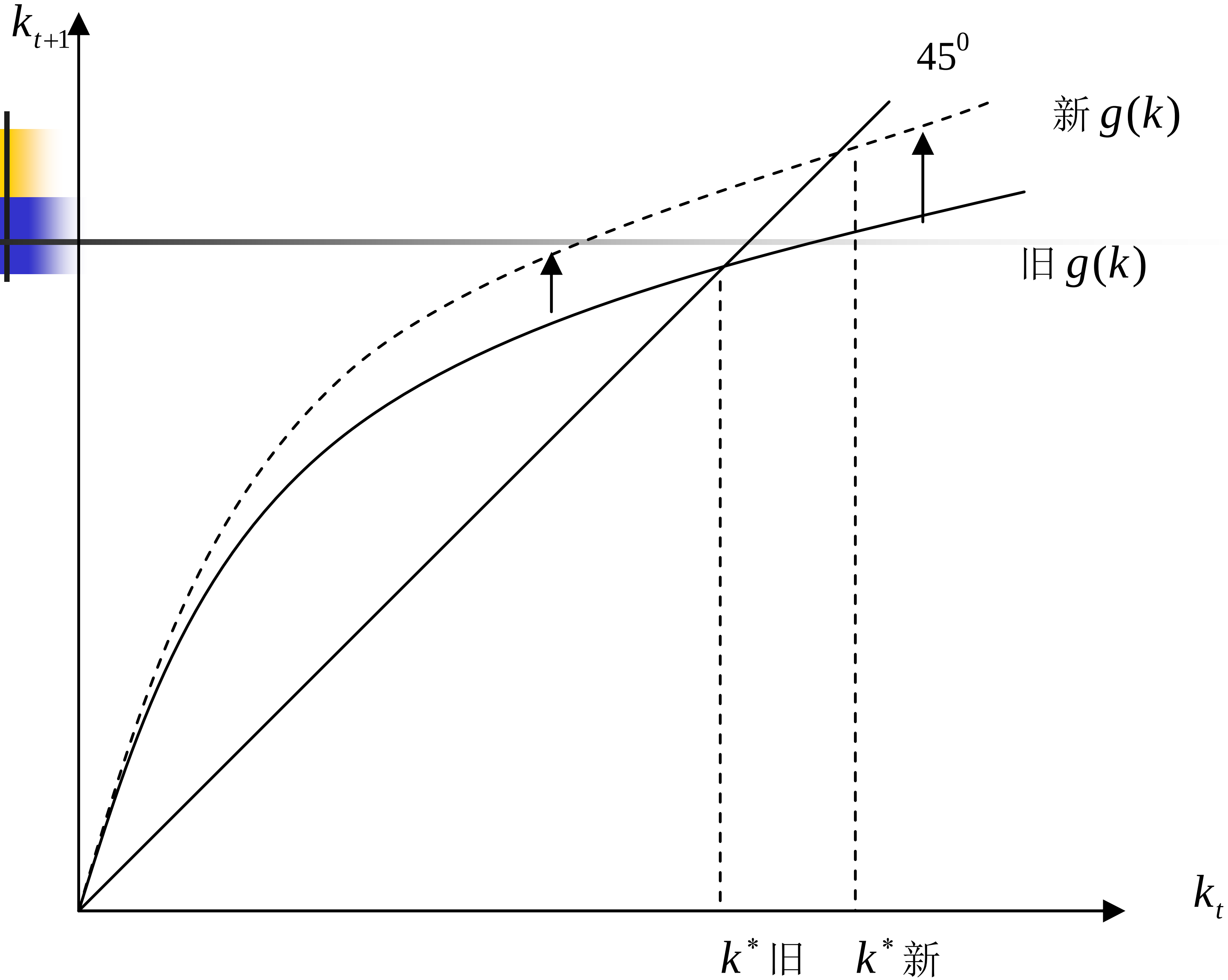

$\dot{k}$
0
k
k^*

第三节　索洛模型的比较静态分析

- 在索洛模型中，政策最有可能影响的参数是储蓄率，因此，有必要考察一下储蓄率变化的效应。具体一点，我们集中关注一个处于平衡增长路径上的索洛模型，并假定有一永久性增加。

（1）对产出的影响

如下图所示，s 增加将使 $g(k)$ 曲线向上移动，因此，k^* 将增加。当然，当 s 有一永久性增加后，k 并不会立即跳至 k^* 的新值。开始时，k 等于 k^* 的旧值，此时，根据（6.12）式的人均有效资本随时间演进规律，我们知道，下一期的人均有效资本仍将增加，这样，k 开始上升，直至达到 k^* 的新值。在这个值上它将保持不变。


k_{t+1}
45^0
新 $g(k)$
旧 $g(k)$
k_t
k^* 旧
k^* 新

现在，我们感兴趣的是人均变量的变化情况。人均产量Y/N等于$Af(k)$。若k不变，则人均产量将以速率g增长，g为A的增长率。若k增加，则人均产出同时由于A和k的增长而增长。这时，其增长率将超过g。但是，如果k达到新的k^*值，又只有A的增长对人均产出的增长有贡献，因而其增长率又重新为g了。因此，储蓄率的一个永久性会导致人均产出增长率产生一个暂时性的增加，但当k达到新的k^*值时，人均产出的增长率就稳定为g。

- 简言之，储蓄率的变化有水平效应，但没有增长效应：它能改变经济的平衡增长路径，因而改变任一时点上人均产量的水平，但并不影响出于平衡增长路径时人均产量的增长率。更一般地说，在索洛模型中只有技术进步率的变化有增长效应，所有其他外生变量的变化都只有水平效应。

(2)对消费的影响

若将消费者引入模型，其福利将取决于消费而非产出。因此，在多数情况下，我们很可能更关心消费的变动而非产量的变动。

每单位有效劳动的平均消费等于每单位有效劳动的平均产量 $f(k)$ 乘以该产量中用于消费的比例（1－s）。现在记 c^* 为处于平衡增长路径上的每单位有效劳动的平均消费，则有下式：

$$c^* = f(k^*) - sf(k^*) \qquad （6.22）$$

当经济处于平衡增长路径时，每单位有效劳动的人均资本将稳定在k^*处不变，也即$\dot{k}(t) = 0$。此时，根据（6.21）式，我们能得到：

$$sf(k^*) = (n + g + \delta)k^* \qquad （6.23）$$

代（6.23）式进（6.22）式，有：

$$c^* = f(k^*) - (n + g + \delta)k^* \qquad （6.24）$$

因为稳定值k^*取决于储蓄率 s 和模型中的其他外生变量n、g和δ，因此我们可以写出$k^* = k^*(s,g,n,\delta)$。

这样（6.24）式意味着：

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f'\left(k^*(s,n,g,\delta)\right) - (n+g+\delta)\right]\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \quad (6.25)$$

我们知道，k^*随 s 的增加而增加。因此，s 增加是否在长期中提高每单位有效劳动的平均消费，就取决于（6.25）式右边大括号中的符号：当 $f'(k)$大于$(n+g+\delta)$，储蓄率 s 的提高将增加每单位有效劳动的平均消费；反之，当 $f'(k)$小于$(n+g+\delta)$，储蓄率 s 的提高将减少每单位有效劳动的平均消费。

当然，在我们这个模型里，因为储蓄率是外生任意给定的，所以，大括号里的符号取正取负都很正常，因而，我们也就不能给出一个关于储蓄率变动对每单位有效劳动的平均消费影响的确定回答。不过，在这里我们对第三种情况，即两者相等时的情况却颇为感兴趣。当两者相等时，有：

$$f'\left(k^*(s,n,g,\delta)\right)=n+g+\delta \qquad (6.26)$$

当 $f'(k)$ 等于 $(n+g+\delta)$ 时，有 $\partial c^*/\partial s=0$，即一阶导数为零，此时，$c^*$ 将取其最大值，也即每单位有效劳动的平均消费将达到最大。进一步，利用(6.26)式我们能求得一个具体的 k^* 值，这一 k^* 值与我们利用（6.15）式或者(6.21)式求出来的 k^* 值含义不太一样，它不仅仅是一个稳定值，而且还是一个能确保在经济达到平衡增长路径以后每单位有效劳动的平均消费达到最大水平的稳定值。我们把这一 k^* 称为黄金律资本存量。而把确保产生黄金律资本存量的条件，也即（6.26）式称为黄金定律。

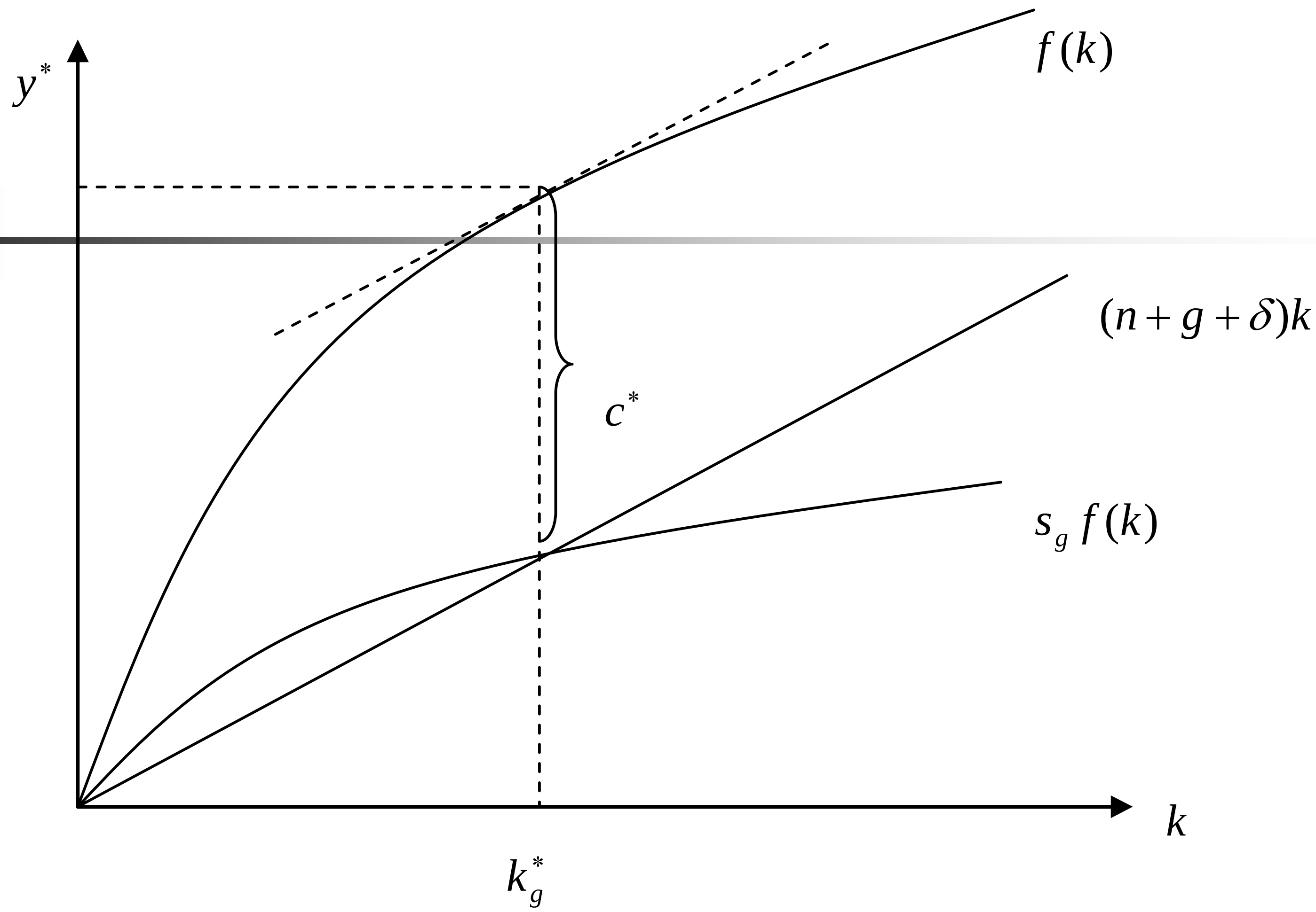


图 6-5　黄金律资本存量示意图

另外，如果我们记满足黄金资本存量的储蓄率为s_g，黄金资本存量为k_g^*，根据（6.23）式，有：

$$s_g = \frac{(n+g+\delta)k_g^*}{f(k_g^*)} \qquad (6.27)$$

利用（6.26）式，上式可以进一步写为：

$$s_g = \frac{f'(k_g^*)k_g^*}{f(k_g^*)} \qquad （6.28）$$

（6.28）式告诉我们，当一个经济处于平衡增长路径时，要确保稳定状态下的资本存量等于黄金资本存量，行为人必须把所有的资本收入都储蓄起来而仅消费劳动收入

- 当然，因为在索洛模型中，没有微观基础，因而我们还无法分析这个黄金律资本存量是否是合意的，同时，因为储蓄率是外生的，所以黄金定律被满足的可能性并不会多于不被满足的可能性。但当我们把消费者引入模型，为索洛模型建立起微观基础，我们就可以探讨如下这样有意义的问题：黄金资本存量事实上是否是合意的，以及一个具有内生储蓄率的分散经济达到稳定时是否会收敛于黄金资本存量水平等等。

(3)对产出影响的定量分析

- 在前面的分析中我们已经得出结论：储蓄率的变化只有水平效应而没有增长效应，也即储蓄率的变动能改变经济的平衡增长路径，因而改变任一时点上人均产量的水平，但并不影响处于平衡增长路径时人均产量的增长率。现在，我们要从定量的角度来分析一下储蓄率变化的这种水平效应究竟有多大。

储蓄率上升对产出的长期影响为：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \qquad (6.29)$$

其中，$y^* = f(k^*)$ 为处于平衡增长路径上的每单位有效劳动的平均产出水平。我们知道当经济处于平衡增长路径时的 k^* 满足（6.23）式，让（6.23）式两边同时对 s 求导数，可得：

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \qquad (6.30)$$

这里，出于简洁性考虑，我们已经省去了影响 k^* 值的外生变量。

整理上式后，可得：

$$\frac{\partial k^*}{\partial s}=\frac{f(k^*)}{(n+g+\delta)-sf'(k^*)} \qquad (6.31)$$

代（6.31）式进（6.29）式，可得：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}=\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta)-sf'(k^*)} \qquad (6.32)$$

显然，我们很难直接描述（6.32）式的经济学含义，不过，我们对上式进行两个变化以后，就可以很好地理解该式的经济学含义了。第一个变化是两边同时乘上一个s/y^*，从而把上式左边部分转化为弹性的形式；第二个变化是应用（6.23）式替代掉方程右边的s。进行这些变化以后，可以得到：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*}=\frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{\left[(n+g+\delta)-sf'(k^*)\right]}$$

$$=\frac{(n+g+\delta)k^*f'(k^*)}{f(k^*)\left[(n+g+\delta)-(n+g+\delta)k^*f'(k^*)/f(k^*)\right]}$$

$$=\frac{(n+g+\delta)k^*f'(k^*)}{f(k^*)(n+g+\delta)\left[1-k^*f'(k^*)/f(k^*)\right]}$$

$$=\frac{k^*f'(k^*)/f(k^*)}{1-k^*f'(k^*)/f(k^*)} \qquad （6.33）$$

上式中， $k^* f'(k^*)/f(k^*)$ 为 $k=k^*$ 处的资本产出弹性。若我们用 $\alpha_K(k^*)$ 来表示资本产出弹性，则上式可以进一步简化为：

$$\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*}=\frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)} \qquad (6.34)$$

如果市场是竞争性的，且无外部性，那么资本将获得其边际产品。在此情况下，在平衡增长路径上每单位有效劳动的平均资本获得的总收入就为 $k^* f'(k^*)$。这样，如果资本获得其边际产品，那么，在平衡增长路径上资本收入占总收入的份额就为 $k^* f'(k^*)/f(k^*)$，或 $\alpha_K(k^*)$。

在大多数国家，资本收入所占份额大约为 1/3。如果我们把它作为对$\alpha_K(k^*)$的一个估算值，可知在长期，产出的储蓄率弹性大约为 1/2。这样，比如说储蓄率增加10％（从产量的 20％增加到 22％），将使每单位有效劳动的平均产出在长期内提高大约 5％（与储蓄率不变时相比）。即使储蓄率增加 50％，也仅使y^*增加大约 22％。这样，储蓄率的显著变化对于平衡增长路径上的产量水平只有较小影响。

(4)对产出影响的速度分析

- 通过上一部分的分析，我们已经知道储蓄率的变化对平衡增长路径上的产量水平影响并不大。但是，还有一个问题我们还没有讨论，也即这种影响效果出现的速度究竟是快的还是慢的。下面，我们就利用对长期均衡的近似来探讨这一问题。

为简单起见，我们着重考虑k的行为，而非y的行为。我们的目的是确定k以多快的速度趋近k^*。我们知道，$\dot{k}$ 决定于k（见(6.21)式）；因此，我们可以写出$\dot{k}=\dot{k}(k)$。如果k等于k^*，$\dot{k}$为0。因此在$k=k^*$处对$\dot{k}(k)$作一阶泰勒级数近似，可得：

$$\dot{k} \cong \left(\left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} \right)(k-k^*) \qquad (6.35)$$

从（6.35）式可以看出，$\dot{k}$近似等于k与k^*之差与$k=k^*$处$\dot{k}$对k的导数值的乘积。

就表达式（6.21）对 k 求导，并对所得表达式在 $k=k^*$ 处赋值，可得：

$$\left.\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}\right|_{k=k^*} = sf'(k^*)-(n+g+\delta)$$

$$=\frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)}-(n+g+\delta) \qquad （6.36）$$

$$=\left[\alpha_k(k^*)-1\right](n+g+\delta)$$

其中第二行应用了 $sf(k^*)=(n+g+\delta)k^*$ 以代换 s，第三行应用了 α_k 的定义。

将（6.36）代入（6.35），可得：

$$\dot{k}(t) \cong -\left[1-\alpha_k(k^*)\right](n+g+\delta)\left[k(t)-k^*\right]。\qquad（6.37）$$

方程（6.37）表明，在平衡增长路径的邻近，每单位有效劳动的平均资本向k^*收敛的速度与其与k^*的距离成比例。由于k^*是一常数，所以$\dot{k}(t) = k(t) \dot{-} k^*$（也就是说，$dk(t)/dt = d(k(t)-k^*)/dt$）。这样，(6.37)是可以进一步写为：

$$k(t) \dot{-} k^* \cong -\left[1-\alpha_k(k^*)\right](n+g+\delta)\left[k(t)-k^*\right] \qquad（6.38）$$

现在，定义 $x(t)=k(t)-k^*$ 和 $\lambda=(1-\alpha_k)(n+g+\delta)$。（6.38）式意味着 $\dot{x}(t)\cong-\lambda x(t)$： x 的增长率为常数且等于 $-\lambda$。 x 的路径因而为 $x(t)\cong x(0)e^{-\lambda t}$，其中 $x(0)$ 为 x 的初始值。用 k 表示，这就成为：

$$k(t)-k^* \cong e^{-(1-\alpha_k)(n+g+\delta)t}(k(0)-k^*) \qquad (6.39)$$

因为生产函数是规模报酬不变的， k 增加多少，人均有效产出 y 也会增加多少，因此， y 趋近 y^* 的速度与 k 趋近 k^* 的速度是相同，也就是说， $y(t)-y^* \cong e^{-\lambda t}(y(0)-y^*)$。

我们可就（6.39）式作一校准试验，看看经济实际上以多快的速度趋近其平衡增长路径。$n+g+\delta$一般为每年6%（比如，若人口增长率为1~2%，技术进步率为1~2%，折旧率为3~4%）。资本的收入份额大致为1/3，这样，$(1-\alpha_k)(n+g+\delta)$大致为 4%。因此，k和y每年向k^*和y^*移动剩余距离的 4%，要走完到其平衡增长路径值的距离的一半约需18年的时间。

- 因此，在我们的例子中，如果储蓄率增加10%，那么在一年后产量高于其以前路径0.04(5%)=0.2%；18年后高出0.5（5%）=2.5%；且此比例渐趋近5%。这样，不仅储蓄率变化较大时的总体影响较小，而且其作用的出现也不很快。

第四节　索洛模型的经验应用

一、趋同

- 经济中初始水平的资本存量会对经济增长率产生怎样的影响当然是大家关心的一个问题。如果初始资本存量小的经济将会比初始资本存量大的经济有更快的增长，那就意味着贫穷国家将会有比富裕国家有更快的增长，这就意味着世界经济将趋同；反之，则意味着各国间的经济发展水平差距将越来越大。

因为存在资本边际报酬递减规律，因此，直觉上我们能预期初始资本小的国家将有更快的增长率，问题是，我们是否能正规地证明这一点？回答是肯定的。

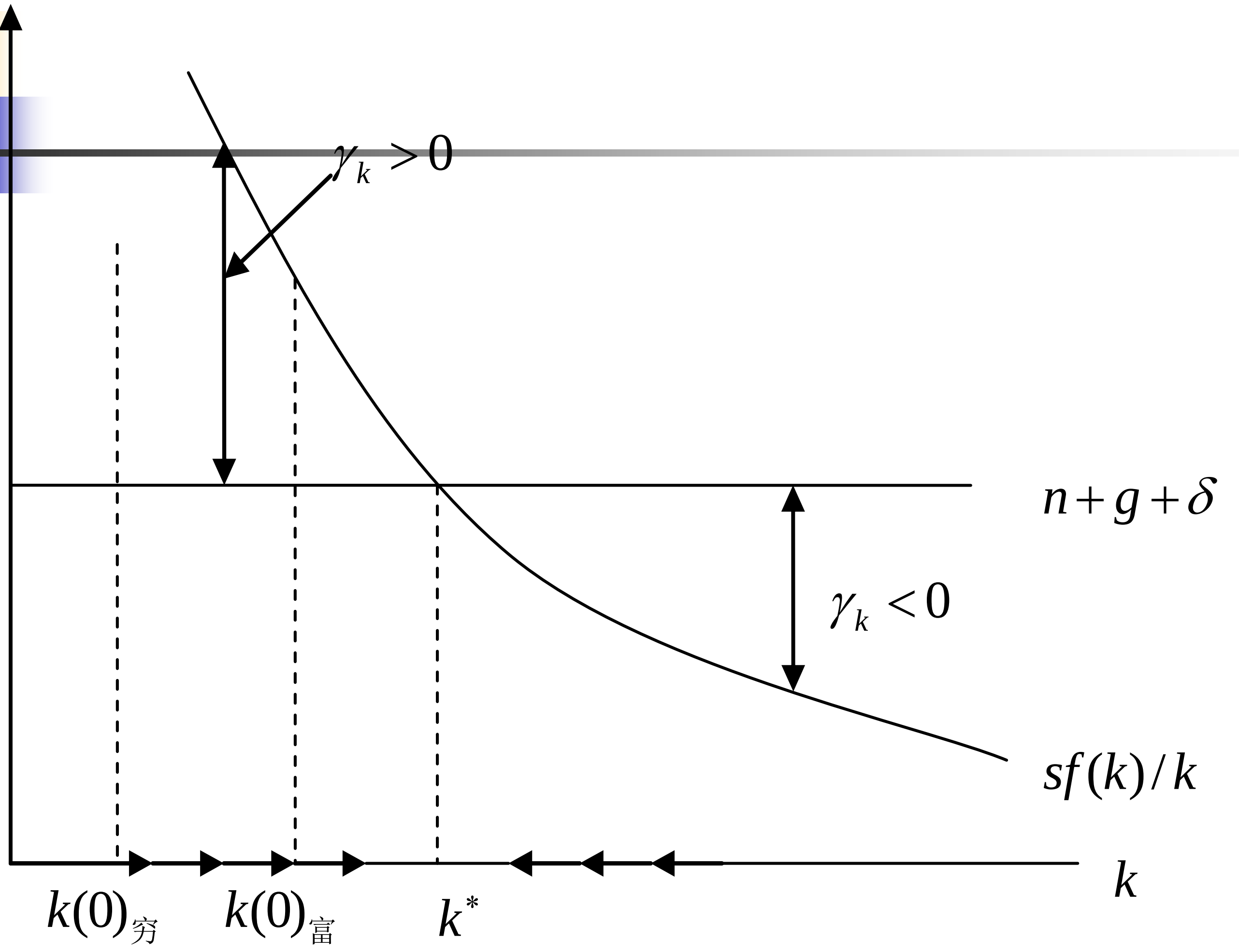
前面的(6.21)式给出了索洛模型中k的运动方程，现在，为我们在该式的两边同除以k，就可以得到k的增长率：

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf\left(k(t)\right)}{k(t)} - (n+g+\delta) \quad （6.40）$$

（6.40）式说明 γ_k 等于 $\frac{sf(k)}{k}$ 与 $(n+g+\delta)$ 两项之差。其中的第一项，因为 $\frac{\partial}{\partial k}\frac{f(k)}{k} = \frac{kf'(k)-f(k)}{k^2} < 0$，所以会随着 k 的增加而减少。在图 6-6 中，我们画出了第一项的示意图，可以看到它是一条斜率为负的曲线，它在 $k=0$ 时渐进于无穷大，而随着 k 趋于无穷大它接近于零。

（6.40）式中的第二项，在图 6-6 中是一条水平线。

两条曲线之间的垂直距离就是人均有效资本的增长率，其交点则对应于稳定状态。由于 $n+g+\delta>0$ 且 $\frac{sf(k)}{k}$ 从无穷大单调下降到零，因此，这两条曲线必然相交且仅相交一次。也就是说，稳态的人均有效资本 k^* 存在且是惟一的。



$\gamma_k > 0$
$n+g+\delta$
$\gamma_k < 0$
$sf(k)/k$
k
$k(0)_{穷}$
$k(0)_{富}$
k^*

图 6-6 表明，在稳态的左边，$\frac{sf(k)}{k}$ 曲线位于 $(n+g+\delta)$ 之上。因此 k 的增长率为正，而且 k 持续上升。随着 k 的增加，γ_k 下降，当 k 趋近于 k^* 时 γ_k 趋近于零。这意味着人均有效资本的增长率将随着 k 的增加而下降。这也证实了初始资本存量小的国家将会比初始资本存量大的国家有更快的经济增长率。

造成这一结果的根源是资本的边际报酬递减规律：当 k 相对低时，人均有效资本的平均产量 $\frac{f(k)}{k}$ 相对较高。根据假设，消费者将储蓄并投资这一产出的一个固定比例 s。因此，当 k 相对较低时，人均有效资本的总投资 $\frac{sf(k)}{k}$ 相对较高。而人均有效资本 k 的折旧率是固定不变的，为 $(n+g+\delta)$。结果，人均有效资本的增长率 γ_k 自然会比较高。

二、增长因素分解

- 虽然在索洛模型中，人均产量的长期增长仅仅取决于技术进步率。但是在短期里，经济增长的来源则是多重的，既有可能来自于技术进步，也有可能来源于资本积累和劳动供给。现在的问题是我们能否把这些因素对经济增长的贡献识别出来。由阿布拉莫维茨（1956）和索洛（1957）首开先河的增长因素分析，为解决这一问题提供了一条途径。下面我们就简单予以介绍。

为了解增长因素分析，再次考虑生产函数 $Y(t)=F\big(K(t),N(t),A(t)\big)$。如果我们让生产函数的两边同时对时间求导，可以得到：

$$\dot{Y}(t)=\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}\dot{K}(t)+\frac{\partial Y(t)}{\partial N(t)}\dot{N}(t)+\frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)}\dot{A}(t)\text{。} \qquad (6.41)$$

两边同除以 $Y(t)$，并重写上述公式的右端，可得：

$$\begin{aligned}\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}&=\frac{K(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)}\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}+\frac{N(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}+\frac{A(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\\&\equiv\alpha_K(t)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}+\alpha_L(t)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}+R(t)\end{aligned} \qquad (6.42)$$

Y、N 和 K 的增长率都是易于测量的。且我们知道，如果资本获得其边际产品，α_K 就可用资本的收入份额数据

来计算。$R(t)$ 用（6.43）的剩余来衡量。因此，（6.43）

把每工人平均产量的增长分解为每工人平均资本增长的贡献和一个余项即索洛剩余(solow residual)。索洛剩余有时被解释为对技术进步的贡献的测度。然而，正如推导过程中可以看出的那样，它反映了所有的其他增长源泉——除资本积累通过其私人收益所做贡献之外的所有其他增长源泉，因此，索洛剩余又经常被称为全要素生产率（total factor productivity）。

- 连续时间下的方程（6.43）式虽然非常精确，但是在实际应用时却存在一点问题，因为连续时间下的变量增长率指的是变量的瞬间增长率，而在实际生活中，变量的数据一般是离散时间下的数据，比如月度数据、季度数据或者年度数据，因此，为了便于实际的运用，我们还需要知道离散时间下的增长因素分解方法，下面也做一个简单介绍。

首先我们分别在时期（t+1）处和时期 t 处对稳定状态的产出作一阶泰勒近似，可以得到：

$$Y_{t+1} = Y^* + \left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|_{K_{t+1}=K^*}\left(K_{t+1} - K^*\right) + \left.\frac{\partial Y}{\partial N}\right|_{N_{t+1}=N^*}\left(N_{t+1} - N^*\right) + \left.\frac{\partial Y}{\partial A}\right|_{A_{t+1}=A^*}\left(A_{t+1} - A^*\right)$$

（6.44）

$$Y_t = Y^* + \left.\frac{\partial Y}{\partial K}\right|_{K_t=K^*}\left(K_t - K^*\right) + \left.\frac{\partial Y}{\partial N}\right|_{N_t=N^*}\left(N_t - N^*\right) + \left.\frac{\partial Y}{\partial A}\right|_{A_t=A^*}\left(A_t - A^*\right)$$

（6.45）

其次，让（6.44）式减去（6.45）式，可以得到：

$$Y_{t+1} - Y_t = \frac{\partial Y}{\partial K}\left(K_{t+1} - K_t\right) + \frac{\partial Y}{\partial N}\left(N_{t+1} - N_t\right) + \frac{\partial Y}{\partial A}\left(A_{t+1} - A_t\right) \qquad (6.46)$$

现在，在上式两边同除以Y_t，可以得到：

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t}=\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\Delta K_t}{Y_t}+\frac{\partial Y}{\partial N}\frac{\Delta N_t}{Y_t}+\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\Delta A_t}{Y_t} \qquad (6.47)$$

现在我们注意到：

$$\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\Delta K_t}{Y_t}=\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{\Delta K_t}{K_t}\frac{K_t}{Y_t}=\alpha_K\frac{\Delta K_t}{K_t}=\alpha_K\gamma_K \qquad （6.48）$$

这里，我们利用了前面给出的资本产出弹性定义：

$\frac{\partial Y}{\partial K}\frac{K_t}{Y_t}=\alpha_K$。同样，如果我们定义劳动产出弹性为

$\frac{\partial Y}{\partial N}\frac{N_t}{Y_t}=\alpha_N$；定义技术进步产出弹性为$\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{A_t}{Y_t}=\alpha_A$，那么，

我们有：

$$\frac{\partial Y}{\partial N}\frac{\Delta N_t}{Y_t}=\frac{\partial Y}{\partial N}\frac{\Delta N_t}{N_t}\frac{N_t}{Y_t}=\alpha_K\frac{\Delta N_t}{N_t}=\alpha_N\gamma_N \qquad (6.49)$$

和

$$\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\Delta A_t}{Y_t}=\frac{\partial Y}{\partial A}\frac{\Delta A_t}{A_t}\frac{A_t}{Y_t}=\alpha_A\frac{\Delta A_t}{A_t}=\alpha_A\gamma_A \qquad (6.50)$$

其中，γ_K、γ_N和γ_A分别表示资本的增长率、人口的增长率和技术进步率。代（6.48）-(6.50)式进（6.47）式，可以得到：

$$\gamma_Y=\alpha_K\gamma_K+\alpha_N\gamma_N+\alpha_A\gamma_A \qquad （6.51）$$

或者

$$\alpha_A\gamma_A=\gamma_Y-\alpha_K\gamma_K-\alpha_N\gamma_N \qquad (6.52)$$

- 显然，如果我们知道产出、劳动供给、资本存量的增长率，就可以估算出技术进步对经济增长的贡献率。方程（6.52）式左边部分就是索洛剩余。
- 上述这种基本框架可以多种方式予以扩展。最常见的扩展方式是考虑不同类型的资本和劳动，并就投入品质量的变化作出调整。但更复杂的调整也是可能的，比如，如果有不完全竞争存在的证据，我们可以试图调整收入份额数据，以更好地估计产出对于不同投入品的弹性。
- 增长因素分析已被用于许多问题。比如，杨（A.Young, 1994）应用详尽的增长因素数据分析论证道，过去30多年来中国香港、新加坡、韩国和中国的台湾异常迅速的增长几乎全部是由于投资增加、劳动力参与率提高和劳动力素质的改善（用教育程度衡量）而引起的，而不是由于技术进步或影响索洛剩余的其他因素造成的。

- 进一步阅读的文献

- Hall, Robert E. and Charles I. Jones. 1999. "Why Do Some Countries Produce So Much More Output per Worker than Others?" Quarterly Journal of Economics 114:83-116.
- Lucas, R.E.1990. “Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?” *American Economic Review* 80, 92-96.
- Mankiw, N. Gregory, David Romer, and David N. Weil. 1992. "A Contribution to the Empirics of Economic Growth" *Quarterly Journal of Economics* 107:407-437.
- Solow, Robert. 1956. "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Quarterly Journal of Economics 70:65-94.
- Solow, Robert. 1957. "Technical Change and the Aggregate Production Function" Review of Economics and Statistics 39:312-320.
- Young, Alwyn. 1994.“Lessons from the East Asian NICs: a contrarian view”, *European Economic Review.*

配套习题

1. 假定生产函数为柯布—道格拉斯函数。

（a）. 将k^*、y^*和c^*表示为模型的参数 s、n、g、δ和α的函数。

（b）. k 的黄金值是多少？

(c).为得到黄金资本存量，所需要的储蓄率是多少？

2. 假定对资本和劳动均按其边际产品支付报酬。用 w 表示 $\partial F(K,AN)/\partial N$，$r$ 表示 $\partial F(K,AN)/\partial K$。

（a）试证明劳动的边际产出 w 为 $A[f(k)-kf'(k)]$。

（b）试证明如果劳动和资本均按其边际产出取得报酬，规模报酬不变意味着：生产要素总收入等于总产量。也就是证明在规模报酬不变的情形下，$wN+rK=F(K,AN)$。

（c）如果生产函数的具体形式为一柯布-道格拉斯型生产函数，也即$F(K,AN)=K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$，试证明这里$\alpha$就是资本这种生产要素所获得的收入在总收入（也即总产出）中所占的份额。

3. 考虑不变替代弹性（CES）生产函数，

$Y=[K^{(\sigma-1)/\sigma}+(AL)^{(\sigma-1)/\sigma}]^{\sigma/(\sigma-1)}$，其中，$0<\sigma<\infty$ 且 $\sigma\neq 1$。

（a）.证明：该生产函数为规模报酬不变的。

（b）.求出该生产函数的密集形式。

(c).在什么条件下该密集形式满足 $f'(\cdot)>0, f''(\cdot)<0$？

(d).在什么条件下该密集形式满足稻田条件？

4.设生产函数为$Y=K^{\alpha}(AL)^{\beta}R^{1-\alpha-\beta}$，其中 R 为土地数量。

假设 $\alpha>0,\beta>0$，且 $\alpha+\beta<1$。生产要素按照

$\dot{K}=sY-\delta K$、$\dot{A}=gA$、$\dot{L}=nL$ 和 $\dot{R}=0$ 变动。

（a）.该经济是否有唯一且稳定的平衡增长路径？也就是说，该经济是否收敛于这样一种情形：在此情形下，Y、K、L、A和R均以不变（但不必相同）速率增长？如果这样，其增长率各为多少？若非如此，为什么？

（b）.根据你的答案，土地存量不变这一事实是否意味着持久增长是不可能的？请直观地解释。