《中级宏观经济学》

主讲:何樟勇博士

浙江大学经济学院

2023年春

第八讲　代际交叠模型

第一节　代际交叠模型

一、决策环境：偏好、技术、人口、禀赋与资源约束

基本环境

- 经济由许多本质上相同的、仅生活两期的消费者和大量本质相同的企业所组成，经济活动进行无限期。消费者通过寻求最优的两期消费组合来实现自己的效用最大化。

偏好

每个时期 t 出生的消费者的偏好由下式给定：

$$u(c_{1t}, c_{2t+1}) = u(c_{1t}) + \beta u(c_{2t+1}) \qquad （8.1）$$

这里， c_{1t} 和 c_{2t+1} 分别表示第 t 期的年轻人和第 t+1 期的老年人的消费，也就是同一个行为人在青年期和老年期的消费。当然，我们也假设期效用函数 $u(\cdot)$ 是一个连续可微，严格递增，严格凹的函数。它也满足稻田条件，即 $\lim_{c\to 0} u'(c) = \infty$ ， $\lim_{c\to\infty} u'(c) = 0$ 。

技术

代表性企业租用资本和雇佣劳动作为自己的投入要素来生产消费品，生产技术由下式给出：

$$Y_t = F(K_t, N_t) \qquad （8.2）$$

同时，我们也假定生产函数是一个严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量都是严格递增的函数。因此，我们仍可以使用密集形式的生产函数 $y_t = f(k_t)$ 来重新表述（8.2）式。

人口

经济在初始时有N_0个本质上相同的消费者（初始人口），并假设人口（也即劳动供给）以外生速率$\gamma_N = n$增长，这样有：

$$N_{t+1} = (1+n)N_t = (1+n)^{t+1} N_0 \qquad （8.3）$$

禀赋

在每一期里，有 N_t 个生活两期的消费者出生，每个消费者在第一期拥有一单位劳动禀赋，这一单位劳动禀赋将无弹性地提供到劳动市场上。而在第二期则拥有 0 单位的劳动禀赋。在 t=0 时期有 N_0 个新出生的人口（初始人口），也有 $N_0/(1+n)$ 个老年消费者活着，他们仅仅生活一期，不参与经济活动但集体拥有 K_0 单位的资本。这些资本即可以用于生产也可以用于消费，即消费品与资本品是可以一对一进行转换的。

表 8-1　人口的代际交叠结构示意图

时期 \ 代份	0	1	2	…	t	t+1
0	N_0					
1	N_0	$N_0(1+n)$				
2		$N_0(1+n)$	$N_0(1+n)^2$			
3			$N_0(1+n)^2$			
⋮				⋮		
t					$N_0(1+n)^t$	
t+1					$N_0(1+n)^t$	$N_0(1+n)^{t+1}$

资源约束

经济的资源约束为：

$$N_t c_{1t} + N_{t-1} c_{2t} + K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t \qquad (8.4)$$

这里，$0 \le \delta \le 1$代表资本存量的折旧率。

二、分散经济下的最优

年轻消费者的最优化行为

我们假定消费者的效用函数是一常相对风险回避型效用函数，具体形式如下：

$$u(c_t)=\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta},\theta>0 \qquad （8.5）$$

那么，出生在 t 期的代表性年轻消费者的最优化问题用数学语言表示出来就是：

$$\max_{c_{1t},c_{2t+1},s_t}\frac{c_{1t}^{1-\theta}-1}{1-\theta}+\beta\frac{c_{2t+1}^{1-\theta}-1}{1-\theta} \qquad (8.6)$$

$$s.t. \qquad c_{1t}+s_t=w_t \qquad （8.7）$$

$$c_{2t+1}=s_t(1+r_{t+1}) \qquad （8.8）$$

我们把约束条件（8.7）和（8.8）代入目标函数，消掉目标函数中的c_{1t}和c_{2t+1}，就可以得到一个仅含一个决策变量s_t的最优化问题。实现该最优化问题的一阶条件为：

$$\beta c_{2t+1}^{-\theta} = \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{1t}^{-\theta} \qquad （8.9）$$

或者

$$\frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} = \left[\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}\right]^{1/\theta} \qquad (8.10)$$

这里，我们再一次用到了$\beta = \frac{1}{1+\rho}$的定义。(8.10)式就是我们熟悉的欧拉方程。

另外，我们通过消掉预算约束条件中的储蓄 s_t，可以把（8.7)、（8.8）式合并成一个用现值表示的预算约束条件，为：

$$c_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{2t+1} = w_t \qquad (8.11)$$

（8.11）式表明，行为人一生消费的现值必须等于初始财富（此处为 0）加上一生劳动收入的现值。

现在，我们可以利用欧拉方程，也即(8.10)式替代掉预算约束方程(8.11)式中的c_{2t+1}，从而得到一个用劳动收入和利率表示的行为人第一期（也即年轻时）的消费函数，为：

$$c_{1t} = \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} w_t \qquad (8.12)$$

(8.12)式表明，利率决定了行为人的收入中用于第一期消费的比例。

再代(8.12)式进预算约束方程(8.7)中，我们可以把最优储蓄写成是一个关于工资率和资本的租金率的函数：

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}) = \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} w_t \qquad (8.13)$$

假设消费者在年轻时和年老时消费的商品都是正常商品，那么，根据（8.13）式我们知道 $\frac{\partial s}{\partial w_t} > 0$，也就是说，当工资收入上升，行为人的储蓄将增加。但是，$\frac{\partial s}{\partial r_{t+1}}$ 的符号是不确定的。

具体而言，（8.13）式表明，当且仅当$(1+r)^{(1-\theta)/\theta}$随 r 递增时，年轻人的储蓄才随着 r 递增。$(1+r)^{(1-\theta)/\theta}$对 r 的导数为$[(1-\theta)/\theta](1+r)^{(1-2\theta)/\theta}$。因此，如果$\theta<1$，则$s$随$r$递增；如果$\theta>1$，则$s$随$r$递减。

代表性企业的问题

企业只需要求解如下一个静态的最优化问题：

$$\max_{K_t, L_t}\left[F(K_t, N_t) - w_t N_t - (1+r_t)K_t + (1-\delta)K_t\right] \quad （8.14）$$

合并同类项以后，我们可以把（8.14）式简化为：

$$\max_{K_t, L_t}\left[F(K_t, N_t) - w_t N_t - (r_t + \delta)K_t\right] \quad (8.15)$$

最大化这个问题的一阶条件就是通常的边际条件：

$$F_1(K_t, N_t) - (r_t + \delta) = 0 \qquad (8.16)$$

$$F_2(K_t, N_t) - w_t = 0 \qquad (8.17)$$

因为生产函数是一次齐次的，我们能把这两个一阶条件改写为如下形式：

$$f'(k_t) - (r_t + \delta) = 0 \qquad （8.18）$$

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) - w_t = 0 \qquad （8.19）$$

竞争均衡

对于每一个时期$t=0,1,2,\ldots,$在给定初始的资本一劳动比率k_0的情况下，一个竞争均衡是一个具有如下的一个数量序列$\{k_{t+1},s_t\}_{t=0}^{\infty}$和一个价格序列$\{w_t,r_t\}_{t=0}^{\infty}$的均衡，它们满足（1）消费者最优；（2）企业最优；（3）市场出清。

在这里，我们一共有三个市场，劳动市场、资本市场和商品市场。根据瓦尔拉斯定理，三个市场只要两个市场出清，另一个市场会自动出清，在这里，我们就省略商品市场。消费者最优的行为由方程（8.13）式得到概括，这一方程实际上就是资本的供给函数，而方程（8.18）则隐性地给出了资本的需求函数；消费者的劳动供给是固定的，劳动的需求隐含在方程（8.19）式中。利用这两个出清条件可以求解出均衡的数量解和价格解。

但是，我们在这里重点关注的是稳定均衡解而不是每一期的均衡解，因此，我们可以利用 t 期年轻人的储蓄将成为下一期生产资本来源这一条件来获得稳定的资本存量解：

$$K_{t+1} = N_t s(w_t, r_{t+1}) \tag{8.20}$$

或者

$$(1+n)k_{t+1} = s(w_t, r_{t+1}) \tag{8.21}$$

代（8.18）式和（8.19）式进（8.21）式中，消掉其中的 w_t 和 r_{t+1}，可以得到：

$$k_{t+1}=\frac{\left(f'(k_{t+1})+1-\delta\right)^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+\left(f'(k_{t+1})+1-\delta\right)^{(1-\theta)/\theta}}\frac{[f(k_t)-k_t f'(k_t)]}{(1+n)} \quad （8.22）$$

（8.22）式隐性地给出了 k_{t+1} 和 k_t 之间的函数关系，我们把它描述为人均资本的运动轨迹。

对数效用与柯布—道格拉斯生产函数下k的动态学

当$\theta=1$时，效用函数退化为对数型。而如果生产函数为柯布-道格拉斯型生产函数，则 $f(k)=k^{\alpha}$，$f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}$。此时，方程（8.22）成为：

$$k_{t+1}=\frac{(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(1+n)(2+\rho)}\equiv Dk_t^{\alpha} \qquad (8.23)$$

其中，$D=\dfrac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}$。

如图 8-1 所示：经济从 k_0 出发，逐渐移向稳态的资本存量。

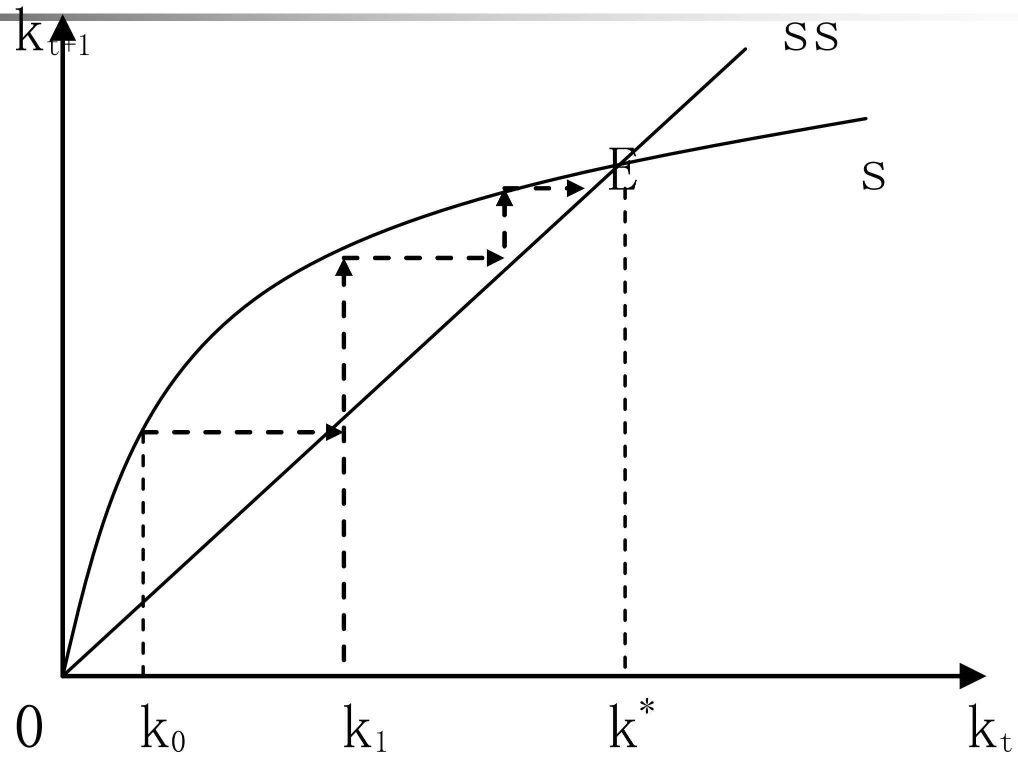


图 8-1　　资本存量动态调整

从图 8-1 中可以看到，k^*是全局稳定的：不管k从何处开始（0 处除外），它都收敛于k^*。例如，如果k的初始值小于k^*。此时，有$k_{t+1} > k_t$，所以$k_1 > k_0$。又由于k_{t+1}随k_t递增，因此，k将向k^*步步逼近。这一过程期期重复，从而k将平滑地收敛于k^*。当$k_0 > k^*$时分析相同。

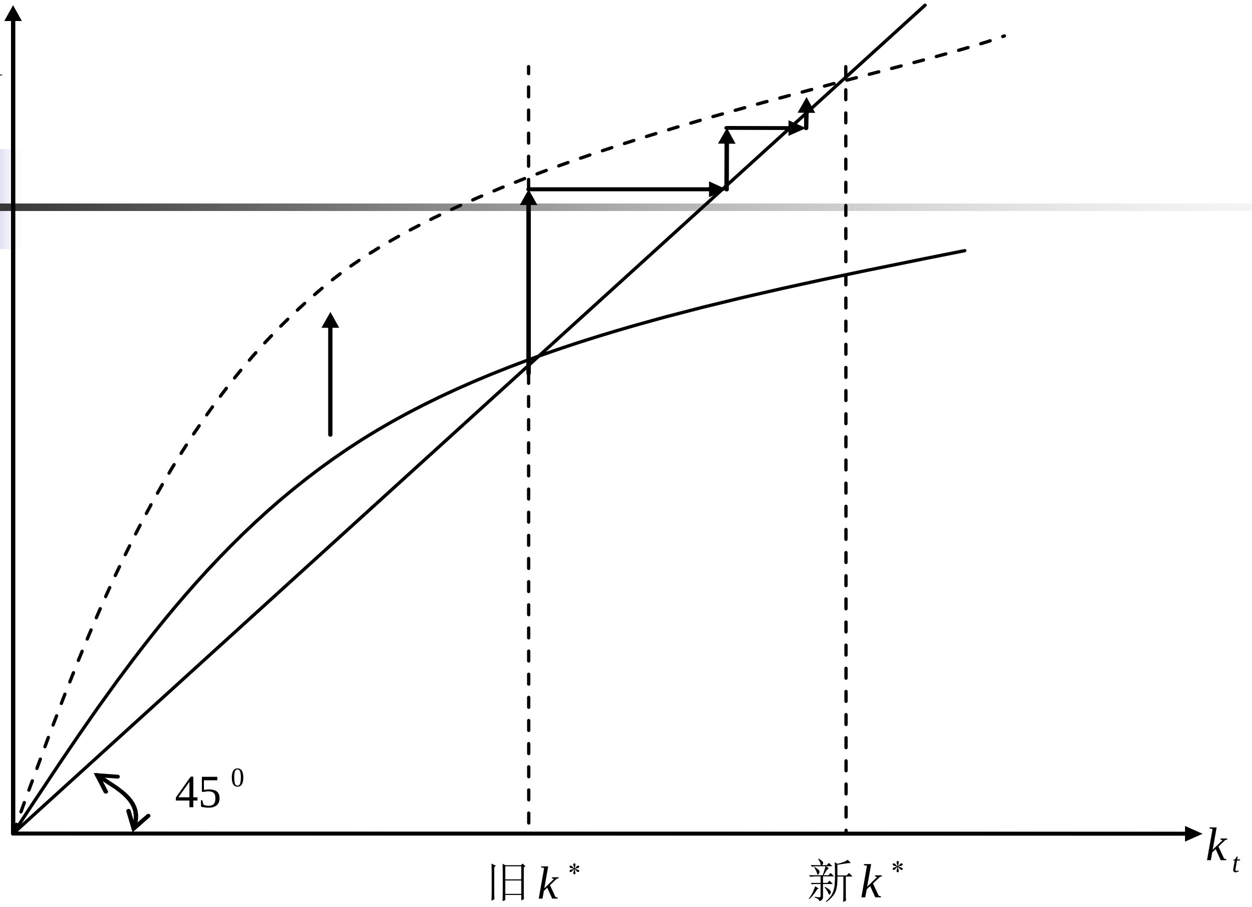
当经济实现稳定均衡时，有 $k_t = k_{t+1} = k^*$，利用这一特性，我们可以得到稳定均衡时人均资本的表达式，为：

$$k^* = \left[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad (8.24)$$

- 特别需要注意的是，一旦经济收敛至其平衡增长路径时，其特性就与处于平衡增长路径上的索洛模型和新古典增长模型完全相同：储蓄率不变，在不考虑技术进步的时候，所有人均变量的增长率均为零，总量层面的变量将按外生给定的人口增长速率n增长；在考虑技术进步的情形下，所有人均有效层面的变量的增长率将为零，而人均层面的变量的增长率将按外生给定的技术进步速率g增长，所有总量层面的变量将按（n+g)的速度增长。

贴现率下降的影响

现在，我们以贴现率下降为例来考察经济对外来冲击的反应。假设经济最初处于平衡增长路径上，然后贴现率 ρ 出现一个永久性下降。贴现率的下降使得年轻人将其劳动收入的更大比例用于储蓄。因此 k_{t+1} 函数向上移动，如图 8-2 所示。k_{t+1} 函数向上移动使 k^*，即处于平衡增长路径上的 k 值上升。


k_{t+1}
45^0
k_t
旧k^*
新k^*

- 可以看到，在代际交叠模型中的贴现率下降的影响与新古典模型中的贴现率下降的影响相似，也与索洛模型中储蓄率上升的影响相似。贴现率下降使人均资本和人均产出随时间的路径永久性地上移，但对这些变量的增长率却只造成暂时性的增加。

收敛速度

为了正规分析经济如何向其平衡增长路径收敛，我们将运动方程（8.23）式在k^*附近线性化，即在$k_t = k^*$处作一阶泰勒展开式，可得：

$$k_{t+1} \cong Dk^{*\alpha} + \left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t = k^*} \left(k_t - k^*\right) \qquad (8.25)$$

利用运动方程（8.23）式，即$k_{t+1} \equiv Dk_t^{\alpha}$可以求得：

$$\left.\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right|_{k_t = k^*} = D\alpha k^{*(\alpha-1)} \qquad (8.26)$$

同时，运动方程（8.23）式也表明在 $k_{t+1}=k_t$ 时的 k^* 值为：

$$k^*=D^{1/(1-\alpha)} \qquad （8.27）$$

或者

$$D=k^{*(1-\alpha)} \qquad (8.28)$$

将（8.28）、（8.26）两式代入（8.25）式，消掉其中的 D，可以得到：

$$k_{t+1}\cong k^*+\alpha(k_t-k^*) \qquad （8.29）$$

把（8.29）式向前挪一期，并把右边的k^*项移到左边，可以进一步得到：

$$k_t - k^* \cong \alpha(k_{t-1} - k^*) \tag{8.30}$$

这是一个具有递归结构的差分方程，利用重复替代，可以得到：

$$k_t - k^* \cong \alpha^t(k_0 - k^*) \tag{8.31}$$

如果$\alpha = 1/3$，从(8.31)式中可以看到，k每期将向k^*移动其与k^*之间距离的 2/3。当然，需要注意的是在我们这个代际交叠模型中，一期相当于一个人寿命的一半。

三、社会计划最优

- 分析了分散经济的最优化行为以后，我们再来看看社会计划最优的情况。在社会计划者经济下，社会计划者控制着生产、资本积累以及消费品在年轻人和年老人之间分配，社会计划者的目标则是实现社会所有消费者效用的最大化。

在时期 t，社会计划者面临的资源约束条件可描述如下：

$$c_{1t}N_t + c_{2t}N_{t-1} + K_{t+1} = F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t \qquad （8.32）$$

方程（8.32）式的右边是时期 t 可以获得的商品数量，由生产出来的消费品和生产发生以后留下的资本品两部分组成。方程左边的前两部分表示 t 期年轻人和年老人的消费，后一部分是 t+1 期的生产资本。

按照以前同样的处理方式，我们把每个变量都表示成人均的形式将会使我们的分析更为方便。定义

$k_t \equiv \dfrac{K_t}{N_t}$， $f(k_t) \equiv F(k_t, 1)$，这样，我们能重写（8.32）

式为：

$$(1+n)k_{t+1} + c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} = f(k_t) + (1-\delta)k_t \qquad (8.33)$$

尽管帕雷托最优为我们提供了一个很好的评价消费者福利的标准，但是，在我们的模型里要把帕雷托最优分配序列计算出来是非常复杂的。我们将通过关注稳定状态来简化我们的分析。在稳定状态下，有 $k_t = k^*$， $c_{1t} = c_1^*$ 和 $c_{2t} = c_2^*$，其中，k^*，c_1^* 和 c_2^* 都是固定不变的。当然，我们需要注意，在作这样的处理时，我们隐含地假定稳定状态一定会存在，而实际上，这个稳定状态有可能会不存在的，或者说，是需要我们去证明的。

在给定约束条件（8.33）式下，社会计划者要实现在稳定状态下每个消费者的效用最大化，实际上就相当于在求解如下一个最大化问题：

$$\max\{u(c_1)+u(c_2)\} \qquad (8.34)$$

$$s.t. \qquad c_1+\frac{c_2}{1+n}=f(k)-(n+\delta)k \qquad (8.35)$$

代约束条件进目标函数，消掉目标函数中的c_2，我们可以得到如下一个无约束的最大化问题：

$$\max_{c_1,k}\left\{u(c_1)+u\left[(1+n)\left(f(k)-(n+\delta)k-c_1\right)\right]\right\} \quad (8.36)$$

相应于该最大化问题的两个一阶条件分别为：

$$u'(c_1)-(1+n)u'(c_2)=0 \quad (8.37)$$

以及

$$f'(k)=n+\delta \quad (8.38)$$

- （8.38）式就是确保产生黄金律资本存量的条件。显然，如果分散经济下稳定的资本存量与黄金资本存量不同的话，那么，我们就可以说，分散经济不是帕累托最优的。下面我们就通过一个具体的例子来看一下在代际交叠模型中，分散经济究竟是不是帕累托最优的。

例子

假　　设　　$u(c_{1t}, c_{2t+1}) = \ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}$　，$F(K_t, N_t) = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$，其中，$\beta > 0$，$0 < \alpha < 1$。试求均衡的价格以及数量解。

这里，年轻的消费者求解如下一个最大化问题：

$$\max_{s_t} \left[\ln(w_t - s_t) + \beta \ln(1 + r_{t+1}) s_t \right] \qquad (8.39)$$

求解这个最优化问题，可以得到如下一个最优的储蓄函数：

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t \qquad (8.40)$$

因为生产函数是科布道格拉斯型生产函数，因此有 $f(k)=k^{\alpha}$ 和 $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}$。根据（8.18）式和（8.19）式，我们可以得到如下两个企业实现利润最大化时的一阶条件：

$$r_t=\alpha k_t^{\alpha-1}-\delta \qquad (8.41)$$

$$w_t=(1-\alpha)k_t^{\alpha} \qquad (8.42)$$

利用（8.23)和（8.42)，我们能得到：

$$k_{t+1}(1+n)=\frac{\beta}{1+\beta}(1-\alpha)k_t^{\alpha} \qquad (8.43)$$

现在，在给定k_0的情况下，方程（8.43）决定了唯一的一个资本序列$\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$，这一序列将收敛于一个唯一的稳定状态k^*，我们可以通过令$k_{t+1}=k_t=k^*$，并利用（8.43）式求解出k^*的具体解：

$$k^*=\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad （8.44）$$

一旦求得稳定状态的人均资本解，我们能利用（8.41）式和（8.42）式求出稳定状态下的价格解：

$$r^* = \frac{\alpha(1+n)(1+\beta)}{\beta(1-\alpha)} - \delta \qquad (8.45)$$

$$w^* = (1-\alpha)\left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (8.46)$$

当然我们也可以利用预算约束条件求出稳定状态下的消费解：

$$c_1^* = w^* - \frac{\beta}{1+\beta} w^* = \frac{w^*}{1+\beta} \qquad (8.47)$$

$$c_2^* = \frac{\beta}{1+\beta} w^* (1+r^*) \qquad (8.48)$$

现在，我们可以注意到在社会计划最优下，稳定状态下的资本存量$\hat{k}$由（8.38）式所决定，也即：

$$\alpha \hat{k}^{\alpha-1} = n + \delta \qquad (8.49)$$

或者

$$\hat{k} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (8.50)$$

注意，在一般情况下，（8.44）式与（8.50）式并不相同，也即$k^* \neq \hat{k}$。这说明，在一般情况下，稳定状态下的竞争均衡一般不是社会最优的，因而经济遭遇了动态无效。稳定状态下的竞争均衡可能会出现过多或过少的资本存量，究竟是偏多还是偏少则取决于参数的值。

动态无效的探析

- 上面的这个具体的例子告诉我们，在竞争均衡状态下，经济也有可能出现动态无效。具体而言，代际交叠模型出现动态无效可能源于如下情况：世代的无限性使计划者拥有一条满足老年人消费的途径，而这条途径通过市场的方式是得不到的。市场经济中，一个人如果想在年老时有消费，其惟一的选择是持有资本，即使资本的报酬率非常低。然而，计划者无需使老年人的消费取决于其资本存量以及资本报酬率。相反，该计划者可以以任何方式将用来消费的资源在年轻人和老年人之间进行分配。

比如，该计划者可以从每个年轻人那里拿走1单位劳动收入并将其转移给老年人；由于年轻人与老年人数量之比为1+n，所以这使每个老年人的消费增加了1+n单位。若不希望有人因这一变化而境况变坏，计划者可以要求下一代年轻人在下一期做同样的事情，并每期继续进行同一过程。计划者通过这样一种资源配置的方式是有可能提高整个社会的福利的。如果资本的边际产品小于n——也就是如果资本存量超过黄金资本存量——则在年轻人与老年人之间转移资源的这种方式会比储蓄会比储蓄更有效率，因此计划者可以对市场的配置资源方式加以改进。

- 上述这种资源配置的无效率与传统的无效率来源不同，且由于它源于经济的跨期结构，因此，常被称作动态无效率。
- 动态无效的根源在于市场的某种不完全性：当前活着的行为人不能与未出生的行为人进行交易。要修正这种动态无效，必须引入某种机制，这种机制可以允许老年人和青年人之间进行交易。

第二节　政府债务

- 与在新古典增长模型中一样，对代际交叠模型要问的一个自然的问题就是，如果我们引入一个进行购买、征税并发行债务的政府，将会出现什么情况。为了简单，我们着重考察对数效用函数和柯布-道格拉斯生产函数的情形。

一、以税收融资的政府购买的影响

令g_t表示 t 期人均政府购买。先假定政府是通过向年轻人征收一次性税收来为自己的购买融资的。

如果政府完全以税收为其购买融资，则消费者在 t 期税后收入就是$(1-\alpha)k_t^{\alpha}-g_t$，而非$(1-\alpha)k_t^{\alpha}$。人均资本$k$的运动方程（8.23）式因而成为：

$$k_{t+1}=\frac{1}{(1+n)(2+\rho)}\left[(1-\alpha)k_t^{\alpha}-g_t\right] \qquad (8.51)$$

因此，对于给定的k_t，g_t越高则k_{t+1}越低。

为了更好理解政府购买的影响，现假定经济处在平衡增长路径上，并假定人均政府购买g有一个永久性增加。从（8.51）式中可以看出，这将使得k_{t+1}函数向下移动。k_{t+1}函数下移降低了k^*。因此，经济将从初始的平衡增长路径平滑地移至新的平衡增长路径。

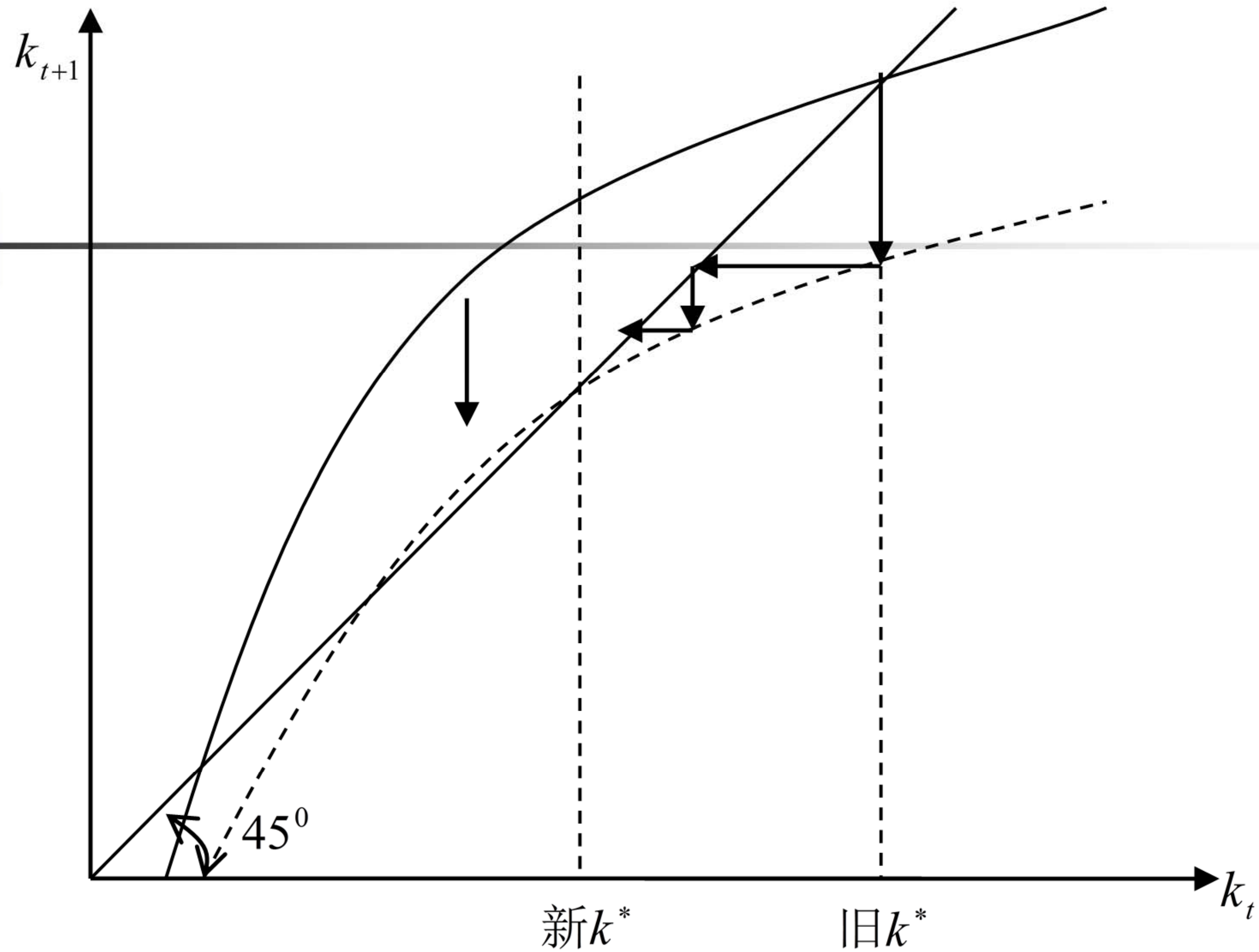


图 8-3　政府购买永久性增加的影响

二、以税收与债券融资的政府购买的影响

- 要使经济中代际间的交易成为可能，一种可行的方法是引入政府债债券。政府就相当于是一个金融中介，它向当前期的年轻人借债，把这部分融资转移给当前期的老年人，然后，政府通过向下一期的年轻人征税来偿还本金及利息。

我们用 B_{t+1} 来代表政府在时期 t 发行的期限为一期的债券的数量。这些债券承诺到时期 t+1，将支付 $1+r_{t+1}$ 单位的消费品给债券的拥有者。显然，政府债券的利率一定是与资本租金率相同的，因为只有这样，行为人才愿意或者持有资本或者持有债券。我们假设：

$$B_{t+1} = bN_t \qquad (8.52)$$

这里，b 是一个固定的数，也就是说，人均政府的债券是固定的。

政府的预算约束是：

$$(1+r_t)B_t + G_t = B_{t+1} + T_t \qquad (8.53)$$

我们假定对年轻行为人征的是总额税，以 τ_t 表示每个年轻行为人被征的税收，则有：

$$T_t = \tau_t N_t \qquad (8.54)$$

代（8.54）式进（8.53）式，并将变量人均化可以得到：

$$\tau_t = g_t + \frac{(r_t - n)}{(1+n)} b \qquad (8.55)$$

如果我们假定人均政府购买为固定的常数 g ，也即 $g_t = g$ ，那么，从（8.55）式中可以看到，当经济处于初始时期，此时，一般地说，人均资本会比较小，对应的资本的边际报酬相对就会比较大，这样，要使（8.55）式成立的 τ_t 就必须比较大。随着时间的推移，人均资本逐渐增加，对应的资本的边际报酬也会逐步下降，这样，确保（8.55）式成立的 τ_t 也会逐渐减少。特别地，当资本的边际报酬 $r_t = n$ 时，也即当资本存量处于黄金资本存量时，人均的政府税收就等于人均政府购买的数量 g 。

这也说明政府总是可以借助税收和债券并举的措施来实现资源在年轻人和年老人之间的转移。我们以初始资本小于黄金资本存量的情形为例，在这种情形下，初始的资本报酬会非常高，也即$r_t > n$，而政府每期发行的债券数量是固定的，这意味着政府在下一期还本付息支付给老年人的支出也会比较高，政府为了满足自己的预算约束，就必须向年轻人征比较高的总额税，这实际上就是政府通过征税实现了资源从年轻人向年老人的转移。随着人均资本慢慢增加，资本的边际报酬逐渐下降，政府需要还本付息支付给老年人的支出也会逐渐下降，这样，政府为了满足自己的预算约束而必须向年轻人征的税收数量也会逐渐下降。

- 特别有意思的一点是，根据上面的分析，我们可以发现，政府总是可以通过选择一个合适的债券数量来使得稳定状态下的资本存量收敛在黄金资本存量的位置。我们已经做了人均政府购买为常数的假定，既然人均政府购买是常数，为什么我们不能假定这个常数就等于零呢？回答当然是肯定的。当假定人均政府购买等于零以后会大大简化我们的分析，但又不妨碍我们对这一问题本质特征的认识。

当我们做了人均政府购买等于零的假定以后，那么，政府的预算约束条件（8.55）式就可以进一步改写为：

$$\tau_t = \left(\frac{r_t - n}{1+n}\right)b \qquad (8.56)$$

在描述完政府的行为以后，让我们在来看消费者的最优化行为。出生在t 期的代表性年轻消费者实际上是在求解如下一个最优化问题：

$$\max_{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t} \left\{\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}\right\} \qquad (8.57)$$

$$s.t. \qquad c_{1t} + s_t + b = w_t - \tau_t \qquad (8.58)$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})(s_t + b) \qquad (8.59)$$

代约束条件（8.58）、(8.59)式进目标函数，可以求得年轻消费者的最优储蓄方程为：

$$s_t = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(w_t - \tau_t) - b \qquad （8.60）$$

现在，资本市场的均衡条件为：

$$(1+n)k_{t+1} = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(w_t - \tau_t) - b \qquad （8.61）$$

如果我们仍旧假定生产函数为柯布–道格拉斯型，也即$f(k)=k^{\alpha}$。利用（8.18）（8.19）和（8.56）式消掉（8.61）式中的w_t、τ_t和r_{t+1}，我们可以得到：

$$(1+n)k_{t+1}+b=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left[(1-\alpha)k_t^{\alpha}-\frac{(\alpha k_t^{\alpha-1}-\delta-n)b}{1+n}\right] \qquad (8.62)$$

通过令方程（8.55）中的$k_t=k_{t+1}=k^*(b)$，我们可以借助下式来求得稳定状态下的人均资本$k^*(b)$：

$$(1+n)\left(k^*(b)\right)+b=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)\left[(1-\alpha)\left(k^*(b)\right)^{\alpha}-\frac{\left(\alpha\left(k^*(b)\right)^{\alpha-1}-\delta-n\right)b}{1+n}\right] \qquad (8.63)$$

现在，假如我们希望发现最优的债券政策，也即通过调整 b 来使得稳定状态下的竞争均衡解与社会计划者的最优解相同，无非就是要寻找到一个合适的$\hat{b}$，使得$k^*(\hat{b})=\hat{k}$。

现在，给定$f'(\hat{k})=n+\delta$，有$\alpha\hat{k}^{(\alpha-1)}=n+\delta$或者$\hat{k}=\left(\dfrac{\alpha}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha}$，

利用（8.63）式，我们能求解出最优的债券数量$\hat{b}$为：

$$\hat{b}=\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-(1+n)\left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (8.64)$$

根据（8.56）式，我们知道在当经济收敛到处于黄金资本存量的稳定状态时有 $\tau_t = 0$。此时，政府债务的规模增加将保持在这样一个适度的水平，只要能支付政府在上一期发行的债券的本金和利息就行了，也就是说，政府债务将以速率n增加，这个速率实际上也等于利率。

简单总结

- 基于我们上面已经提及的原因，在代际交叠模型里，竞争均衡在一般情况下会是次优的，而不是最优。因此，政府债务的税收与债券融资显得十分重要。当然，政府税收与债券融资只是实现资源在代际间进行转移的方式之一，实际上，还有其他实现代际间资源转移的机制，比如社会保障等，这些机制也能起到与我们模型中所分析的政府税收与债券融资同样的功能。

第三节 社会养老保险问题

- 虽然社会养老保险制度的实施有其自身的目的：一方面是出于收入分配的原因，以保证行为人退休以后的最低收入水平；另一方面是政府担心行为人缺乏足够的远见，从而不为自己退休以后的生活预留适当的东西。不管出于何种原因，社会养老保险制度引入的目的肯定不是用来影响资本积累的。但是，任何对行为人收入路径会产生影响的计划，都很可能会对行为人的储蓄产生影响，进而影响到资本积累。本节重点关注的正是这种影响，而代际交叠模型则为我们分析社会养老保险制度对资本积累所产生的影响提供了理论基础。

- 社会养老保险有两种基本的筹资模式，即现收现付制（pay-as-you-go system）和基金制(Fully funded system)。现收现付制因是通过征收收入税的方式为养老金进行融资，并以当前在职工人的缴费支付当前退休工人的养老金。相反，基金制是在职工工作期间缴费，并建立一个专门的延期支付的养老基金，从职工退休时开始支付，直至其死亡。

- 在本节中，我们将重点探讨这两种不同的养老保险筹资模式会对宏观经济产生怎样不同的影响。另外，伴随着老龄化趋势的日益加重，实行社会养老保障筹资模式的转型，也即从现收现付制向基金制转变也是各个国家竞相在开展的工作，因此，我们也将从理论上分析一下老龄化对宏观经济的影响。

一、基本决策环境

基本决策环境与第一部分中介绍的完全相同。我们也仍旧假设效用函数为对数型函数，生产函数为柯布-道格拉斯型来简化我们的分析。现在假设政府强制性地要求 t 期的年轻消费者必须从收入中拿出一部分提供到社会养老保险制度中去，我们记年轻消费者的这个贡献为 d_t。当然，当年轻消费者成为老年人以后，他（她）也可以从养老保险制度中获得相应的收益，我们记他（她）获得的收益为 b_{t+1}。

这样，在基金制下，因为 t 期年轻消费者的贡献是被作为资本用于投资的，所以他（她）在年老时，也即

t+1 期获得的收益就为 $b_{t+1}=(1+r_{t+1})d_t$。在现收现付

制度下，政府直接把当期从年轻消费者那里征收来的养老保险贡献转移给当期的老年人，因为当期年轻人

与老年人的人数比为 $\dfrac{N_t}{N_{t-1}}=1+n$，因此，t 期出生的

年轻人在老年时的收益就为 $b_{t+1}=(1+n)d_{t+1}$。

二、基金制

在基金制下，出生在 t 期的代表性年轻消费者实际上是在求解如下一个最优化问题：

$$\max_{c_{1t},c_{2t+1},s_t} \{\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}\} \qquad (8.65)$$

$$s.t. \qquad c_{1t} + s_t^f = w_t - d_t \qquad (8.66)$$

$$c_{2t+1} = (1+r_{t+1})s_t^f + b_{t+1} \qquad (8.67)$$

这里，s_t^f 代表基金制下消费者的私人储蓄。

代约束条件（8. 66)、(8. 67)式进目标函数，可以求得年轻消费者的最优储蓄方程为：

$$s_t^f + d_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t \qquad (8.68)$$

资本市场出清的均衡条件现在成为：

$$(1+n)k_{t+1} = s_t^f + d_t \qquad (8.68)$$

从（8.68）、（8.68）式中可以看到，由于d_t和s_t^f的作用完全相同，我们可以把d_t看作储蓄的一部分。只要d_t小于没有养老保险制度之前的最优储蓄规模，容易证明完全基金制养老保险制度对行为人的最优储蓄和最优消费不会产生任何影响。

当我们把消费者的预算约束转化成以现值表达的形式时，可以清楚看出这一点。合并（8.66）、（8.67）两式，消掉其中的 s_t^f，我们可以把消费者的预算约束以现值形式表达出来，为：

$$c_{1t} + \frac{c_{2t+1}}{1+r_{t+1}} = w_t \qquad (8.70)$$

（8. 70）式实际上与没有引入基金制时的预算约束是完全相同的。

我们可以这样来理解这一结论：社会养老保险储蓄的增加 d_t，正好被以这种方式的私人储蓄的减少所抵消，总量 $s_t^f + d_t$ 恰好等于没有引入基金制养老保险制度时的储蓄水平 s_t。原因也很清楚：社会保险系统提供的收益率等于私人储蓄的收益率，这样，就好像社会保险系统取出各个人储蓄的一部分，并投资同等数量。可是，消费者对对谁储蓄并不关心，他只关心收益率；这意味着消费者通过私人储蓄抵消了社会保险系统代表他们所作的任何储蓄。

由此可见，只要行为人是完全理性的，基金制养老保险制度引入与否，并不会改变行为人的最优决策。但在现实中——作为一种强制性储蓄的养老保险制度——基金制还是有其存在的理由。一方面在于现实中的行为人并不都是完全理性的，也即并不是所有的人均具有非常强的自我保障意识。更为关键的是，即使行为人是完全理性的，只要他预期到政府最终是不会坐视自己在老年时贫困潦倒而不管，则在这种由行为人与政府参与的博弈中，行为人将会选择在年轻时尽可能地消费掉自己的收入。此时，强制储蓄与自愿储蓄将产生不同的经济后果：前者将维持自我保障理性下的自愿储蓄后果；后者将使自愿储蓄偏离最优的稳态路径。

三、现收现付制度

在现收现付制下，出生在 t 期的代表性年轻消费者实际上是在求解如下一个最优化问题：

$$\max_{c_{1t},c_{2t+1},s_t} \{\ln c_{1t} + \beta \ln c_{2t+1}\} \qquad (8.71)$$

$$s.t. \qquad c_{1t} + s_t^p = w_t - d_t \qquad (8.72)$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t^p + (1 + n)d_{t+1} \qquad (8.73)$$

这里，s_t^p 代表在现收现付制度下消费者的私人储蓄。

代约束条件（8.72）、（8.73）式进目标函数，可以求得年轻消费者的最优储蓄方程为：

$$s_t^p = \frac{\beta(1+r_{t+1})(w_t - d_t) - (1+n)d_{t+1}}{(1+\beta)(1+r_{t+1})} \qquad (8.74)$$

由于在现收现付制度中社会养老保险纯为一种转移安排，它一点也不储蓄，因此，在这一制度中，资本的惟一来源是私人储蓄 s_t^p 。这样，资本市场出清的均衡条件现在成为：

$$(1+n)k_{t+1} = s_t^p \qquad (8.75)$$

为了进一步分析社会养老保险对私人储蓄的影响，我们保持工资和利率不变并假设 $d_t = d_{t+1}$，通过让 s_t^p 对 d_t 求偏导数，利用（8.74）式可得：

$$\frac{\partial s_t^p}{\partial d_t} = \frac{-\beta(1+r_{t+1})-(1+n)}{(1+\beta)(1+r_{t+1})} < 0 \qquad (8.76)$$

由（8.76）式可知，社会保险贡献将会使私人储蓄减少，也即产生所谓的“挤出效应”。虽然在现收现付制度下，社会养老保险制度的引入将会挤出社会储蓄，但这只是局部均衡分析。实际上，储蓄减少会导致资本减少，而这将使得工资减少和利率增加。工资的减少又进一步使储蓄减少。利率增加对资本存量的一般均衡影响还必须进行具体分析。总之，为了分析现收现付社会养老保险制度对经济产生的影响，我们必须进行一般均衡分析。

根据（8.18）、（8.19）式所示的企业实现利润最大化的两个一阶条件 $f'(k_t)=r_t+\delta$ 和 $f(k_t)-k_t f'(k_t)=w_t$ 可以看出，r_{t+1} 实际上是 k_{t+1} 的一个函数，而 w_t 则是 k_t 的一个函数。这样，我们可以把资本的运动方程（8.74）式以隐函数的形式重新表达出来，为：

$$(1+n)k_{t+1}=s_t^p=s[w(k_t),r(k_{t+1}),d_t] \qquad (8.76)$$

要想知道，当 d_t 从 0 增加时，资本的运动轨迹将如何变动，只要对（8.76）式进行全微分，并假设 $d_t = d_{t+1}$，即可得到答案：

$$\frac{dk_{t+1}}{dd_t} = \frac{\partial s / \partial d_t}{1 + n - s_r f''(k_{t+1})} \qquad (8.77)$$

这里，s_r 表示储蓄 s^p 对利率 r 的偏导数。在（8.77）式中，分子由（8.75）式已知是负的；分母的符号不能确定，但只要我们假定经济存在惟一的、稳定的、非振荡的均衡，那么，分母的符号必须是正的。这样，整个全微分的符号就是负的。

这意味着在现收现付制度下， d_t 的增加将使得资本运动轨迹向下移动，从而使稳定状态下的资本存量减少。我们可以把资本运动轨迹因 d_t 的变化而发生的变化借助图 8-4 直观地描述出来。

在现收现付体制下，社会养老保险对经济动态调整的影响是减慢资本积累， 同时也减少稳态资本存量。设在 z 期引入现收现付社会养老保险，此时的资本存量是 k_z。经济原来沿着实线路径向稳态资本存量 k^*前进，现在则沿着虚线路径移到 $\bar{k}$ 。稳态的资本存量减少了，未来各期的资本存量相对于它原本应该的值也一样减少了。

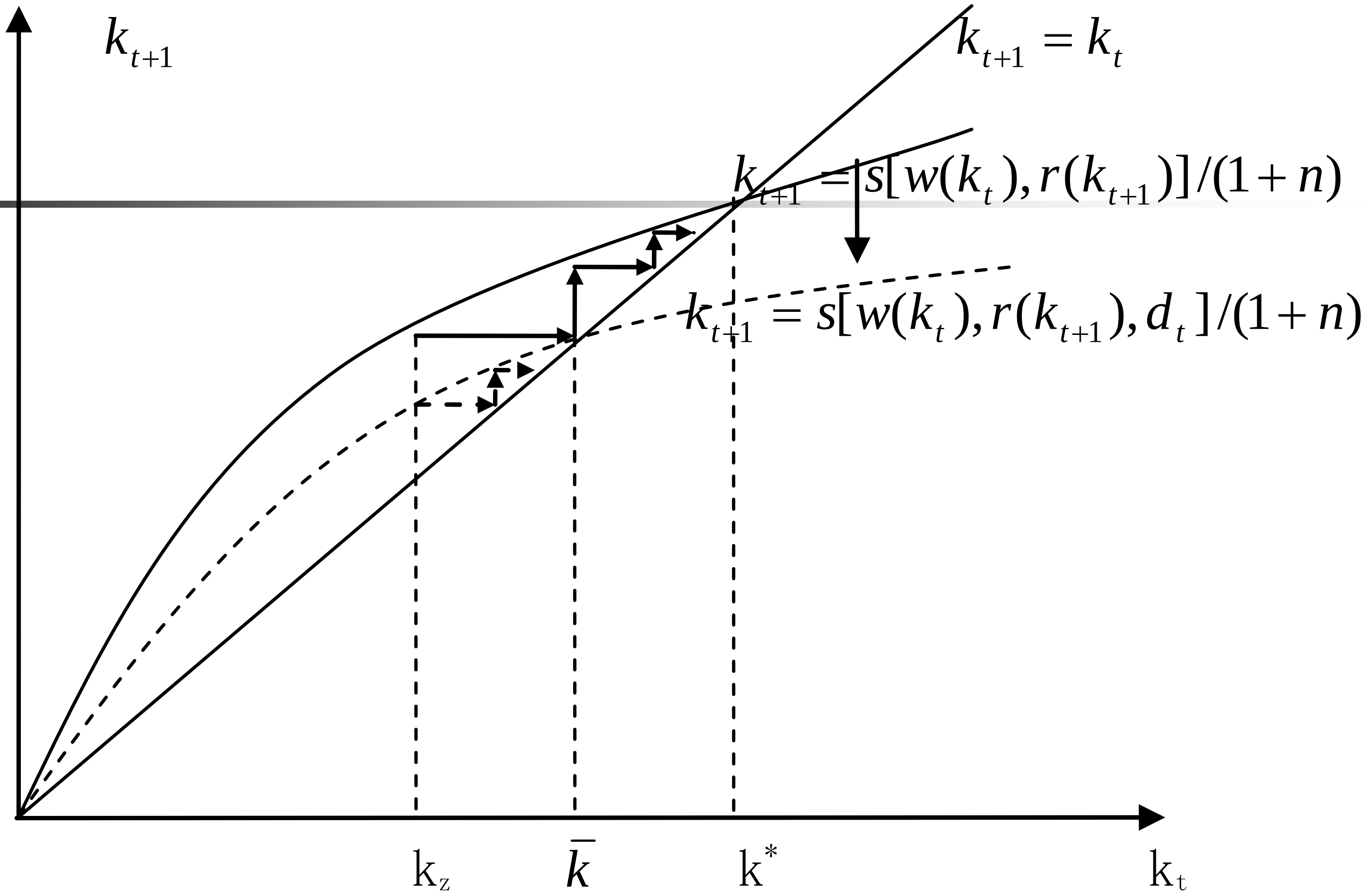


图 8-4　现收现付制下社会养老保险对经济的影响

现在我们已经得到结论：现收现付养老保险制度的引入会降低稳定状态的人均资本存量。一个自然要问的问题就是这一结果是否是合宜的。这个问题的答案取决于经济在稳定时所处的状态。如果经济在稳定时处于动态无效区域，也即处在$r^* < n$的状态，那么，现收现付制度的引入因为可以减少人均资本存量，从而使稳定状态下的资本存量更加接近黄金资本存量，因此是一种帕累托改进。反之，如果经济在稳定时处于动态有效区域，也即处在$r^* > n$的状态，现收现付制度的引入将不会是一种帕累托改进。

四、人口老龄化的影响

到目前为止，在我们的模型中始终假定年轻一代的人口与年老一代的人口比率为固定的常数，也即

$\frac{N_t}{N_{t-1}}=1+n$。但在现实中，随着经济的发展，人口的

生育率和死亡率都会下降。这就意味着两代人口之间的比率并不是固定不变的，而是会下降的，也即社会会遭遇人口老龄化问题。这样，两代人口之间的比率

就成为 $\frac{N_t}{N_{t-1}}=1+n_t$。现在，我们感兴趣的是当 n_t 发生

下降以后会对经济产生怎样的影响。

- 让我们首先回到第一节介绍的内容中，分析一下没有引入社会养老保障制度时，当人口增长率下降时会对经济产生怎样的影响，然后再回来分析引入社会养老保障制度以后人口增长率下降会对经济产生的影响。
- 我们仍旧假定效用函数是对数型的而生产函数是柯布-道格拉斯型的。根据第一节的介绍，我们知道行为人的最优化行为实际上是浓缩在如下四个方程中：

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t \qquad (8.78)$$

$$(1+n)k_{t+1} = s(w_t, r_{t+1}) \qquad (8.79)$$

$$f'(k_t) - (r_t + \delta) = 0 \qquad (8.80)$$

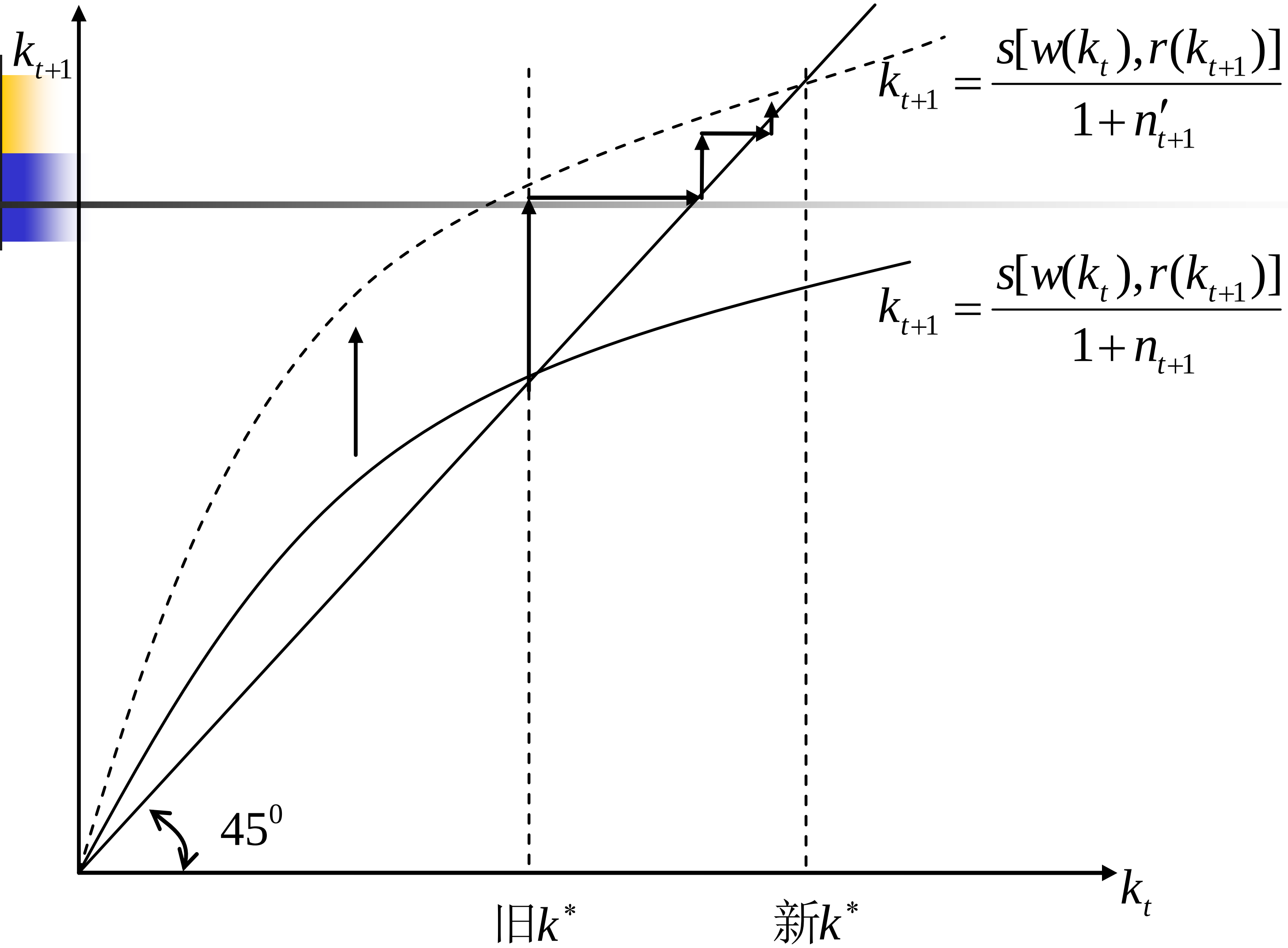
$$f(k_t) - k_t f'(k_t) - w_t = 0 \qquad (8.81)$$

其中，（8. 78）式是行为人的最优储蓄函数，实际上就是在给定具体效用函数形式以后的欧拉方程的显性表达式；（8. 79）式是资本的运动方程；（8.80）、（8.81）两式是企业实现利润最大化的两个一阶条件。

从（8. 78）式中可以看出，行为人的最优储蓄并不受人口增长率 n 的影响。但（8. 79）式中可以看出，资本的运动方程会受 n 的影响。代（8.80）、（8.81）两式进（8. 79）式，我们可以把资本运动方程进一步改写为：

$$k_{t+1}=\frac{s\big(\big(f(k_t)-k_t f'(k_t)\big),f'(k_{t+1}-\delta)\big)}{1+n_{t+1}} \qquad （8. 82）$$

在图 8-5 中，我们画出了方程（8. 82）的几何图形。根据（8. 82）式可以知道，当人口增长率下降，也即 n_{t+1} 变小，会使资本的运动轨迹发生向上的移动。



k_{t+1}
$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{1+n'_{t+1}}$
$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{1+n_{t+1}}$
45^0
k_t
旧k^*
新k^*

从图 8-5 中可以看出，当人口增长率发生一个永久性下降以后，也即经济经历了老龄化以后，资本运动轨迹会往上移动，从而使稳定状态的人均资本存量发生增加，从图中的旧 k^* 点移到新 k^* 点。背后的道理也很简单：因为年轻消费者的储蓄决策并不受 n 的影响，而 n 的下降意味着经济中拥有资本的老年人的人口相对于年轻人在增加，这样，自然的结果是社会的人均资本存量会发生增加。

- 现在再让我们来分析引入社会养老保险制度以后人口老龄化对经济的影响。在前面的分析中我们已经得出结论：基金制养老保险制度的引入与否，并不会改变行为人的最优储蓄决策。既然行为人的最优储蓄不会受老龄化的影响，那么，在基金制下，人口增长率下降对经济的影响就与没有这一制度时的分析是完全一样的。现在让我们重点来分析现收现付制度下，人口老龄化对经济的影响。

我们可以通过分析由（8.73）式给出的在现收现付制度下年轻消费者的最优储蓄方程来判断人口增长率下降对储蓄的影响。不过，在（8.73）式中，人口增长率 n 是固定的，现在我们已经放松了这一假定，因此，（8.73）式可以进一步改写为：

$$s_t^p = \frac{\beta(1+r_{t+1})(w_t - d_t) - (1+n_{t+1})d_{t+1}}{(1+\beta)(1+r_{t+1})} \quad （8.83）$$

要分析人口老龄化对私人储蓄的影响，我们只要保持工资、利率和社会养老保险的贡献额不变，通过让 s_t^p 对 n_{t+1} 求偏导数就可以知道结果。利用（8.73）式可得：

$$\frac{\partial s_t^p}{\partial n_{t+1}} = \frac{-d_{t+1}}{(1+\beta)(1+r_{t+1})} < 0 \qquad (8.84)$$

由（8.84）式可知，人口老龄化将会使私人储蓄增加。需要注意的是，虽然在现收现付制度下，人口老龄化会增加社会储蓄，但这只是局部均衡分析。实际上，储蓄增加会导致资本增加，而这将使得工资增加和利率减少。工资的增加又进一步使储蓄增加。利率增加对资本存量的一般均衡影响还必须进行具体分析。

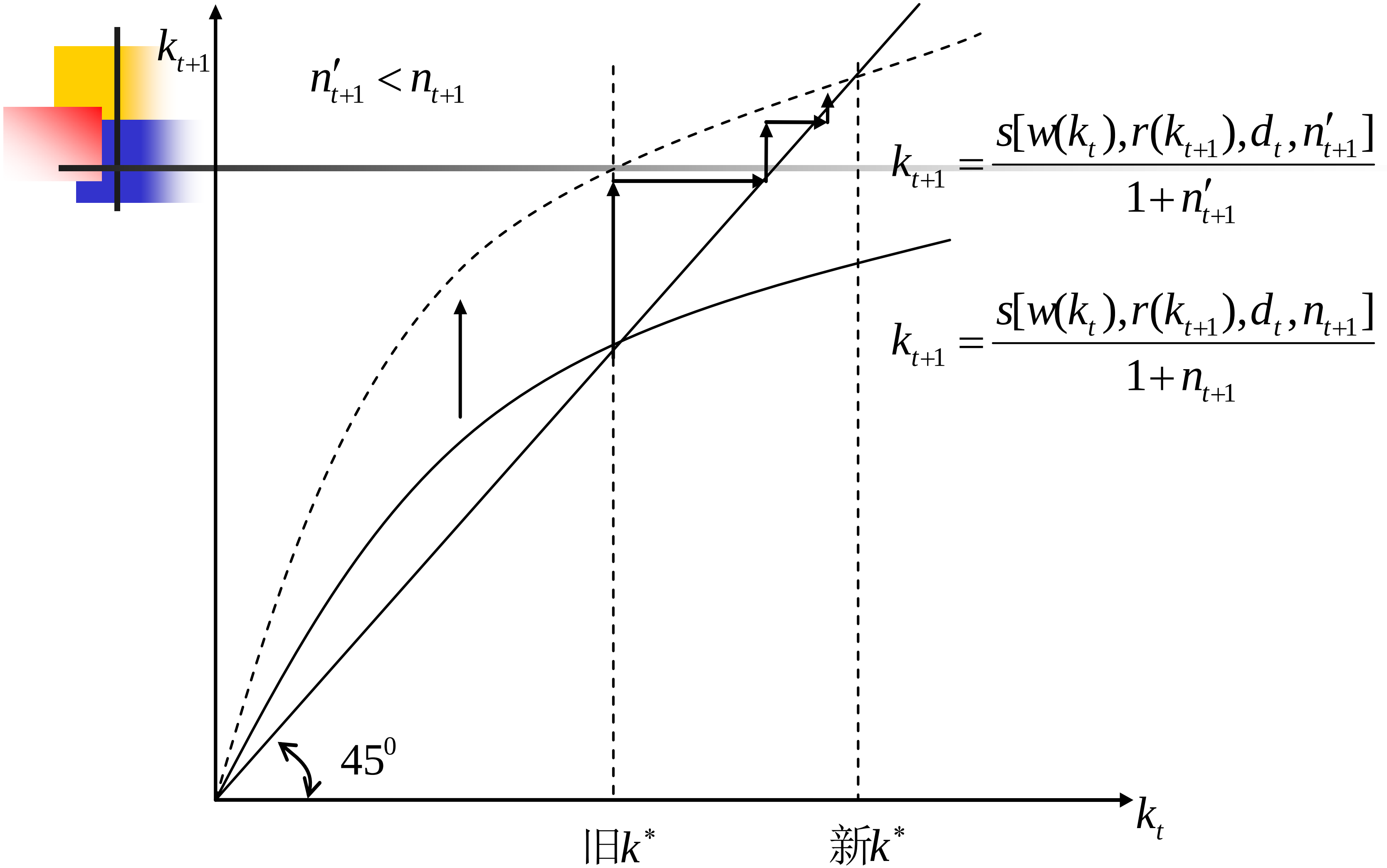
为了进行一般均衡分析，我们把在现收现付制度下的资本运动方程（8.76）式进一步改写为：

$$(1+n_{t+1})k_{t+1}=s_t^p=s[w(k_t),r(k_{t+1}),d_t,n_{t+1}] \qquad （8.85）$$

要想知道，当 n_{t+1} 发生一个突然的下降会对资本的运动轨迹产生怎样的影响，只要对（8. 85）式进行全微分，即可得到答案：

$$\frac{dk_{t+1}}{dn_{t+1}}=-\frac{k_{t+1}-\partial s/\partial n_{t+1}}{1+n_{t+1}-s_r f''(k_{t+1})} \qquad （8. 86）$$

这里，s_r 表示储蓄 s^p 对利率 r 的偏导数。在（8.86）式中，分子由（8.84）式已知是正的；分母的符号不能确定，但只要我们假定经济存在惟一的、稳定的、非振荡的均衡，那么，分母的符号必须是正的。这样，整个全微分的符号就是负的。这意味着在现收现付制度下，n_t 的下降将使得资本运动轨迹向上移动，从而使稳定状态下的人均资本存量增加。我们可以把资本运动轨迹因 n_t 的变化而发生的变化借助图 8-6 直观地描述出来。



k_{t+1}
$n'_{t+1} < n_{t+1}$
$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1}), d_t, n'_{t+1}]}{1+n'_{t+1}}$
$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1}), d_t, n_{t+1}]}{1+n_{t+1}}$
45^0
k_t
旧k^*
新k^*

- 需要特别注意的是，我们得出这一结论是建立在如下这样一个隐含的假定之上的，即当人口老龄化发生以后，年轻人向社会养老保险制度所做的贡献是不变的，这样，老年人从养老保险制度中所得到的收益就必然会下降。而在现实中，要减少老年人从养老保险制度中所获得的收益似乎是很有政治阻力的，如果不减少老年人从养老保险制度中所获得的收益，那么，年轻人向社会养老保险制度所做的贡献就必须增加。在这种情形下，人口老龄化会对经济产生怎样的影响就需要重新分析 。

进一步阅读的文献

- Diamond, P. 1965. “National Debt in a Neoclassical Growth Model，” American Economic Review 55, 1126-1150.
- Feldstein, M. 1985. “The Optimal Level of Social Security Benefits.” *Quarterly Journal of Economics* 100, 303-320.
- Samuelson, P. 1958. "An Exact ConsumptionLoan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money," *Journal of Political Economy* LXVI，467-482.

配套练习

1. 一些经济学家认为之所以东亚国家的经济能实现快速增长是因为这些国家的劳动参与率非常高。在这里，我们试着用OLG 模型来看一看这一论断的真实性。

考虑一个行为人仅生活两期的 OLG 模型。当行为人年轻时，他（她）们参加工作，工资为w_t，储蓄为s_t，消费为c_{1t}。当他（她）们到了老年以后，消费为c_{2t+1}。他（她）们的最大化

$$U = \ln(c_{1t}) + 0.9\ln(c_{2t+1})$$

$$s.t. \quad c_{1t} + s_t = w_t n_t$$

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t$$

我们把年轻行为人的数目标准化为 1。并假设每个行为人有一半时间用于工作，也即劳动供给为$n_t = 0.5$。生产函数为：

$$y_t = K_t^{0.5} n_t^{0.5}$$

假定折旧率为零，市场出清条件为：

$$K_{t+1} = s_t$$

（a）把储蓄表示为实际工资的函数。

（b）试求稳定均衡状态下的 w 和 r 的解析解。

（c）现在假设劳动参与率永久性地上升到 $n_t = 1$。试分析这一变化对稳定状态下的 y、w 和 r 的影响。

（d）劳动参与率提高会导致劳动供给发生一个未被预期到的增加。请描述当这一情况发生时，当经济向新的稳定状态过渡的时候，w 和 r 会发生怎样的变化。

2. 考虑一个引入现收现付养老保障制度的代际交叠模型。我们假定效用函数是对数型的，也即 $u(c_{1t},c_{2t+1})=\ln c_{1t}+\beta\ln c_{2t+1}$；

也假定生产函数是柯布-道格拉斯型的，也即 $f(k)=k^{\alpha}$。现在

假如从 t 期开始，人口增长率有一个永久性地下降，也即社会遭遇了老龄化问题。在讲义中我们分析了年轻人向社会养老保障体系多做的贡献 d_t 不变，因而老年人从社会养老保险制度中所获得收益 b_t 减少的情形。现在，假设要减少老年人的收益受到了政治阻力，政府不得不通过提高年轻人的贡献 d_t 来维持老年人的收益 b_t 不变。试分析在这种情形下，人口增长率的下降对经济造成的影响。

3. 考虑如下一个代际交叠增长模型。我们用 $t=0,1,2,\ldots,\infty$ 来表示时间。在时期 t 期里，有 N_t 个生活两期的消费者出生，这里，$N_t=N_0(1+n)^t$，其中，N_0 外生给定，$n>0$ 代表人口增长率。在 $t=0,1,2,\ldots,\infty$ 时期里，每个年轻消费者都拥有 y 单位的消费品，而每个老年消费者（包括在初始期的老年消费者）却没有任何消费品。假定存在一种储存技术，从而能把 t 期的 1 单位消费品转换为 t+1 期的 $(1+r)$ 单位消费品。

在时期 t，政府从每个年轻的消费者和老年消费者那里各自征收 τ_t^y 和 τ_t^o 单位的总额税。时期 t 出生的消费者的偏好由下式给定：

$$u(c_t^y, c_{t+1}^0) = 2(c_t^y)^{1/2} + 2(c_{t+1}^o)^{1/2}$$

这里，c_t^y 和 c_{t+1}^o 分别表示第 t 期的年轻人和第 t+1 期的老年人的消费，也就是同一个行为人在青年期和老年期的消费。

a. 请写出政府的预算约束条件。

b. 假设存在一种现收现付的社会养老保障制度，在这种制度中，政府向每个年轻的消费者征收税收并把之转移给当期的老年消费者。并假定政府把每一期向年轻消费者征收的税设定为 $\tau_t^y = \tau$ 。

i. 试分析税收 τ 的增加会对年轻人的储蓄以及每一代人的福利产生怎样的影响。

ii. 试求出帕累托最优的征税额 τ 并解释你的结论。

c. 现在假设存在一种基金制的社会养老保障制度，在这种制度中，政府在时期 t 向每个年轻的消费者征收税收并把它储存到 t+1 期，然后再把它转移给 t+1 期的老年消费者。我们仍假定政府把每一期向年轻消费者征收的税设定为 $\tau_t^y = \tau$ 。

i. 试分析税收 τ 的增加会对年轻人的储蓄、每一代年轻人和老年人的储蓄以及每一代人的福利产生怎样的影响。

ii. 试求出帕累托最优的征税额 τ 并解释你的结论。