《中级宏观经济学》

主讲:**何樟勇**

浙江大学经济学院

2023年春

第三讲　微观基础2：
两期动态模型

- 到目前为止，我们接触的模型是静态的，行为人仅在当期作决策。
- 对于宏观经济学家来说，更为吸引人的是行为人的动态行为。

为什么我们仅关心两期？

- 两期要比3，75甚至无限期更容易研究
- 更为重要的是两期模型的结论可以推广到多期。

我们仅仅需要当前和未来。

- 应用与以前一样的分析技巧：
- 首先讨论微观基础，然后，关注竞争均衡

第一节
纯交换的两期动态模型

一、决策环境：
偏好与禀赋

基本环境

- 经济活动进行两期，经济中有N个消费者，没有企业。经济是完全竞争的、信息是完全的、不存在不确定性。

偏好

我们用如下的一个简单的可分离效用函数来代表消费者的偏好：

$$v(c_1,c_2)=u(c_1)+\beta u(c_2) \tag{3.1}$$

其中，系数β常被称为贴现因子。如果我们定义ρ为贴现率，则有$\beta=\frac{1}{1+\rho}$，这里，$\rho>0$。β（0<β<1）仅是一个具体的数值，比方说 0.95。β<1 反应了消费者的如下一种偏好：相对于未来的消费，消费者更看重当前的消费。

我们假设效用函数$v(\cdot)$是一递增的严格凹函数。效用函数$u(\cdot)$一般称为期效用（Periodc utility function）函数，我们通常假设该效用函数是一个严格凹的、二次可微的函数，同时也满足稻田条件（Inada conditions），因而具有如下特征：

$$u'(c)>0, u''(c)<0, \lim_{c\to 0} u'(c)=\infty, \lim_{c\to\infty} u'(c)=0$$

禀赋

我们假设每一个消费者在第一期开始和第二期开始时都可以获得一个外生的收入，各自记为 y_1 和 y_2。进一步,我们假设每个消费者在所有两期获得的总收入是相等的，但在两期中的分布是不同的，即有的消费者可能在第一期获得的收入多一些,第二期获得的收入少一些，而有的消费者则相反，在第一期获得的收入少一些，在第二期获得的收入多一些。

另外，我们记所有 N 个消费者在第一期获得的外生收入为Y_1，在第二期获得的外生收入为Y_2。这些假设，可以借助数学语言简洁地表述为：

$$\sum_{i=1}^{N} y_{1i} = Y_1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} y_{2i} = Y_2 \qquad (3.2)$$

$$y_{1i} + y_{2i} = y_{1j} + y_{2j}, (i \neq j, i \in (1,2,\ldots N), j \in (1,2,\ldots N))$$

在这里，我们用下标 i 来代表具体的某个消费者，因此，y_{1i}、y_{2i}、y_{1j}和y_{2j}各自表示消费者 i 和消费者 j 在第一期和第二期所获得的外生收入。

之所以要作这样的假定，主要目的是为了引进债券市场，因为，如果所有消费者都是完全相同的，那么，就不会有债券市场存在。道理很简单，所有N个消费者要么都想借钱消费，但此时，他（她）们将找不到愿意借钱给他（她）们的人；反之，也有可能所有N个消费者都想把钱借给别人，此时，他（她）们将找不到愿意向他（她）们借钱的人。

我们假定消费者是通过购买债券的方式来进行储蓄的。我们用b_t来定义消费者在时期 t 购买的债券数量，这意味着他（她）能在时期 t+1 收回本金并获得利息rb_t。我们假设在初始期家庭不拥有任何债券，也就是说，$b_0 = 0$。当然，消费者也可以通过发行债券的方式进行借款消费。假如b_t是负的，那说明消费者是一个净借入者。

二、消费者最优化行为

消费者在时期 1 和时期 2 的预算约束方程如下：

$$c_1 + b_1 = y_1 \tag{3.3}$$

$$c_2 = y_2 + b_1(1+r) \tag{3.4}$$

这样，消费者面临的问题是在把利率 r 视为给定并且在预算的约束下，通过寻找一个合适的 (c_1, c_2, b_1) 组合来实现效用的最大化。

我们可以把消费者面临的问题正规化地表述如下：

$$\max_{c_1, c_2, b_1} \{u(c_1) + \beta u(c_2)\} \qquad (3.5)$$

$$s.t. \quad c_1 + b_1 = y_1$$

$$c_2 = y_2 + b_1(1+r)$$

我们可以通过构建拉格朗日函数来具体求解上述模型：

$$\ell = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda_1[y_1 - c_1 - b_1] + \lambda_2[y_2 + b_1(1+r) - c_2] \qquad (3.6)$$

一阶条件如下：

$$(FOC_{c_1}) \qquad u'(c_1)-\lambda_1=0 \qquad (3.7)$$

$$(FOC_{c_2}) \qquad \beta u'(c_2)-\lambda_2=0 \qquad (3.8)$$

$$(FOC_{b_1}) \qquad -\lambda_1+\lambda_2(1+r)=0 \qquad (3.9)$$

在这里，我们漏掉了对拉格朗日乘数 λ_1 和 λ_2 反应的一阶条件，因为我们知道他们其实就是预算约束方程。

合并上述三个一阶条件，我们能得到一个如下的表达式：

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \beta(1+r) \qquad （3.10）$$

方程（3.10）称为**欧拉方程**（Euler equation）。

- 它的经济学含义是：假如消费者放弃一单位今天（第一期）的消费，进行“投资”，在第二期，他（她）能获得1＋r单位消费品，也即他（她）能在明天（第二期）消费1＋r单位。为了实现效用最大化，消费者会一直调整两期的消费，直到当他（她）放弃第一期的最后一单位消费而引起的效用损失等于他（她）在第二期因这一单位消费而给他带来的效用增加为止，当然，为了能与今天消费的效用具有可比性，明天消费的效用必须贴现到今天来。欧拉方程无非是借用数学语言把这一直观道理表述出来罢了。

只要给出效用函数的一般形式，我们就能借助欧拉方程和两个预算约束方程来求解消费者的最优选择组合(c_1, c_2, b_1)。

比如，我们假定效用函数采用如下的特殊形式：

$$u(c_t) = \ln(c_t) \qquad (3.11)$$

这样一来，$u'(c_t)=1/c_t$，进而，方程（3.10）就成为：

$$\frac{c_2}{c_1}=\beta(1+r) \qquad (3.12)$$

联立方程（3.3）和方程（3.4）、（3.12），我们可以得到一个含有三个未知变量(c_1,c_2,b_1)的方程组，显然，可以求得这些未知变量的具体解析解：

$$c_1 = \frac{y_2 + y_1(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} \qquad (3.13)$$

$$c_2 = [y_2 + y_1(1+r)]\left[\frac{\beta}{1+\beta}\right] \qquad (3.14)$$

$$b_1 = y_1 - \frac{y_2 + y_1(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} \qquad (3.15)$$

显然，我们能把消费者的这些选择写成是 r 的函数，也就是$c_1(r), c_2(r), b_1(r)$。

这样我们就能进一步分析当利率 r 发生变化时，会对消费者的选择产生怎样的影响。这种方法是我们在微观经济学里经常使用的**“比较静态”分析**方法。要得到结论，我们只需要对利率 r 求导就行了。例如：

$$\frac{\partial c_2}{\partial r}=\frac{y_1\beta}{1+\beta}>0 \qquad (3.16)$$

它告诉我们，第二期的消费将随利率 r 的上升而增加。

其背后的**经济含义**是这样的：第二期消费品的价格为$\dfrac{1}{1+r}$，利率 r 上升意味着第二期的消费价格下降了，这时会有两种效应产生，即替代效应和收入效应，如果我们假定消费是正常商品，因此，两种效应都为正，第二期的消费当然会增加。

三、市场均衡

到目前为止，我们还主要是关注单个消费者的决策行为。而事实上，经济中有 N 个消费者。因此，我们需要把这 N 个消费者整合在一起，看看会发生一些什么。

回忆一下，在前面我们曾经指出，消费者既可以借钱消费，也可以把钱贷出，主要是视 b_1 是正还是负而定。

因此，从整个市场的角度看，借入的钱的总量必须等于借出的钱的总量，因而市场出清的条将必然是：

$$\sum_{i=1}^{N} b_{1i} = 0 \qquad （3.17）$$

在这里，我们重新引入了代表具体某个消费者的下标，b_{1i} 表示的是消费者 i 在时期 1 发行的或者购买的债券量。

- 一般均衡分析的目标是要确定经济中所有变量的解，这可以采用如下两步进行分析：
- （i）消费者把价格视为外生给定的情况下，寻求效用的最大化；
- （ii）所有市场出清。

就我们目前分析的两期模型而言，价格只有一个，即利率 r；行为主体是 N 个消费者；有两个市场必须出清。第一个是商品市场，出清条件是：

$$\sum_{i=1}^{N} c_{1i} + \sum_{i=1}^{N} c_{2i} = Y_1 + Y_2 \qquad (3.18)$$

第二个是债券市场，出清条件由方程(3.17)表示。根据瓦尔拉斯定理，一个经济有 n 个市场，只要 n−1 个市场出清，剩余的一个市场自动会出清。

具体求解："

在求消费者最大化的过程中，我们已经知道

债券需求是利率 r 的函数：

$$b_{1i} = y_{1i} - \frac{y_{2i} + y_{1i}(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} \qquad (3.15')$$

利用债券市场出清条件（3.17），我们能求

得均衡的利率 r^*：

$$r^* = \frac{Y_2}{\beta Y_1} - 1 \qquad (3.19)$$

这一结论有一个很有用的解释。如果我们定义 $Y_2/Y_1=1+g$，这里，g 可以看作是经济增长率。

然后，我们有：

$$1+r^*=\frac{1+g}{\beta}=(1+\rho)(1+g) \qquad (3.20)$$

或者，近似地：

$$r^*\approx\rho+g \qquad (3.21)$$

这里，我们利用了前面给出的 $\beta=\dfrac{1}{1+\rho}$ 的定义。

这是一个我们在最优增长理论中非常熟悉的结论。在那里，修正的黄金定律就是用这一形式表述的。

当然，我们也能根据这一等式来进行比较静态分析。例如：

$$\frac{\partial r^*}{\partial Y_2} = \frac{1}{\beta Y_1} > 0 \qquad (3.22)$$

- 它告诉我们，当第二期的外生总收入增加，均衡的利率也将增加。背后的经济直觉是：假如第二期外生收入增加，消费者将愿意增加第一期债券的发行量（借钱消费）以平滑两期的消费。但在均衡时，这是不可能发生的，因为净债券持有量必须等于零，因此，均衡的利率必须上升，以此来抑制消费者发行债券（借钱消费）以平滑两期消费的冲动。
- 一旦求得均衡的利率，我们也可以求得相应的其他变量的均衡解。

作业

1. 在我们的讲义的实例中曾描述了一个两期模型，现在，若在这个两期模型中的期效用函数成为：

$$u(c_t) = c_t^{\frac{1}{2}}$$

1. 试推导出欧拉方程。

2. 试求代表性消费者的最优消费组合(c_1^*, c_2^*, b_1^*)。

3. 试求均衡的利率r^*。

2. 假设玛丽只生活两期。在每一期里她都可以不劳而获地得到一些消费品：第一期记为e_1；第二期记为e_2。她对两期消费品的偏好可由如下的效用函数来表达：$u(c_1,c_2)=\ln(c_1)+\beta\ln(c_2)$，其中，$c_1$和$c_2$分别是她在第一期和第二期的消费；$\beta$是一个间于 0 和 1 之间的参数，表示的是时间偏好。当然，如果玛丽觉得第一期的禀赋，也即e_1太多，她是可以把它储蓄起来，以供第二期消费的。

我们把她储蓄的数量记为s。非常不幸，老鼠会偷吃她储蓄的物品，因此，假如她在第一期储蓄s单位的物品，在第二期她只能得到$(1-\delta)s$单位，其中，δ是一个间于 0 和 1 之间的参数。

a.试写出玛丽的最优化问题。（你应该描述出她的选择变量、目标函数和约束条件。）

b.试求解最优化问题的解。（当然，你应给把诸如e_1、e_2、β、δ等参数看作外生给定的。）

c.假如玛丽现在发现了一种可以减少老鼠偷吃的方法，这会对她的最优选择产生怎样的影响？（无非是对δ的变化作一个比较静态分析!）