《中级宏观经济学》

主讲:何樟勇博士

浙江大学经济学院

2023年春

第七讲　新古典经济增长模型

第二节　连续时间的新古典增长模型

一、基本决策环境与假定

基本决策环境与第一节离散时间下的假定完全相同。不过，为了分析经济的动态行为，在这里我们给出期效用函数的具体形式，为：

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \theta > 0 \qquad (7.47)$$

这一效用函数经常被称为常相对风险回避型效用函数。它之所以得此名字，是因为这一效用函数的相对风险回避系数（即$-cu''(c)/u'(c)$）为θ，与c无关。

在给出期效用函数的具体形式以后，我们可以写出代表性消费者一生的效用函数，为：

$$u = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \qquad (7.48)$$

这里，$\rho > 0$ 仍然代表消费者的时间偏好率或者说主观贴现率。

二、分散经济下的最优

消费者的最优化行为

- 代表性消费者储存资本并进行投资（也即，他们的财富是以资本的形式表示的），在每一时期里，代表性消费者都会把资本租给企业并向企业出售自己的劳动。因为劳动并不会给消费者带来任何负效用，因此，不论工资率为多少，劳动供给始终是1单位。

记 t 时刻所有消费者拥有的总资本为$K(t)$，并假设消费者具有完全的预见能力，也即他们都知道w和r的目前值和将来值。这样，所有消费者拥有的资本$K(t)$在 t 时刻可以为他们带来的收益就是$r(t)K(t)$。所有消费者在 t 时刻可以获得的劳动收益就是$w(t)N(t)$。

消费者的总收入除了用于消费以外，其余的就是用于储蓄以增加资本存量。记所有消费者的总消费水平为$C(t)$，那么，消费者面临的预算约束条件就是：

$$\dot{K}(t) = w(t)N(t) + r(t)K(t) - C(t) \qquad (7.49)$$

这里，$w(t)$表示工资率，$r(t)$代表资本的租金率。

当我们把有关的总量变量做人均化的处理以后，（7.49）式可以进一步改写为：

$$\dot{k}(t) = w(t) + r(t)k(t) - c(t) - nk(t) \qquad (7.50)$$

我们也可以从现值的角度来描述消费者的预算约束条件：消费者一生消费的现值不能超过其初始财富加上其一生劳动收入的现值。为了正规地写出这一预算约束条件，我们需要解释如下事实：r 可能随时间变化。为此，我们定义 $R(t)=\int_{\tau=0}^{t} r(\tau)d\tau$ 。

在 0 时刻投资的 1 单位在 t 时刻将产生 $e^{R(t)}$ 单位的产品；与此等价，以 0 时刻产品表示的 1 单位 t 时刻的产品的价值为 $e^{-R(t)}$。比如，如果 $r(t)$ 为固定 $\bar{r}$，则 $R(t)$ 就等于 $\bar{r}t$，而 1 单位 t 时刻的产品的价值为 $e^{-\bar{r}t}$。更一般地说，$e^{R(t)}$ 表示 1 单位产品在区间 $[0,t]$ 上连续以复利计算利息的结果。

现在，以现值形式表示的所有消费者的预算约束条件就为：

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) dt \leq K(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} W(t) dt \qquad （7.51）$$

（7.51）进一步可以表述为：

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} N(t) c(t) dt \leq K(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} N(t) w(t) dt$$

把（7.51）式中所有项都移到一边，并把两个积分结合起来，可以得到：

$$K(0)+\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} N(t)[w(t)-c(t)]dt \geq 0 \qquad （7.52）$$

我们可以把 t=0 到 $t=\infty$ 的积分写为一个极限。这样，（7.52）等价于：

$$\lim_{s\to\infty}\left\{K(0)+\int_{t=0}^{s} e^{-R(t)} N(t)[w(t)-c(t)]dt\right\} \geq 0 \qquad （7.53）$$

现在，注意 s 时刻所有消费者的资本持有量为：

$$K(s)=e^{R(s)}K(0)+\int_{t=0}^{s}e^{R(s)-R(t)}N(t)[w(t)-c(t)]dt \qquad (7.54)$$

表达式（7. 54）右边部分就是$e^{R(s)}$乘以（7.53）式中大括号内的表达式。因此，我们可以把以现值形式表达的预算约束简写为：

$$\lim_{s\to\infty}e^{-R(s)}K(s)\geq 0 \qquad (7.55)$$

（7.55）式表明，所有消费者持有的资本的现值的极限不能为负。由于 $K(s)=N_0e^{ns}k(s)$，（7.55）也可以进一步写为：

$$\lim_{s\to\infty}e^{-R(s)}e^{ns}k(s)\geq 0 \qquad (7.56)$$

描述完消费者的预算约束条件以后，我们现在可以来分析消费者的最优化问题了。消费者实际上是要寻求一个最优的消费路径和资本演进路径来实现自己一生效用的最大化（当然是以现值表示的）。消费者为了追求自己一生效用的最大化，实际上就相当于在求解如下一个最优化问题：

$$\max \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta} dt \qquad （7.57）$$

$$s.t. \quad \dot{k}(t) = w(t) + r(t)k(t) - c(t) - nk(t)$$

我们可以借助汉密尔顿（Hamilton）系统来求解上述这个最优化问题，对应于这个最优化问题的汉密尔顿方程为：

$$H(t)=e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}+\lambda(t)[w(t)+r(t)k(t)-c(t)-nk(t)] \quad (7.58)$$

这里，变量λ叫做与状态变量k连在一起的协态变量，它表示资本的现值影子价格。$\lambda(t)$的值就代表从 0 时刻来看，在 t 时刻增加一单位的资本存量所能带来的效用的增加量。

这样，实现消费者一生效用最大的充分必要条件就是：

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \qquad (7.59)$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} \qquad (7.60)$$

再加上横截条件：

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0 \qquad (7.61)$$

利用汉密尔顿方程的定义，我们能进一步求得：

$$e^{-\rho t}c(t)^{-\theta} = \lambda(t) \qquad (7.62)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -(r(t)-n)\lambda(t) \qquad (7.63)$$

让（7.62）式两边对时间求导数，然后再结合（7.63）式，消掉其中的 $\dot{\lambda}(t)$，经过计算可以得到：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-\rho-n}{\theta} \qquad (7.64)$$

方程（7.64）式就是对应于该最大化问题的欧拉方程。直观地说，欧拉方程告诉我们在给定 $c(0)$ 的情况下，c 应该如何随时间变动：如果 c 不按照（7.64）式变动，消费者就可以调整其消费，从而在不改变一生支出的现值的情况下增加一生的效用。

而事实上我们知道$c(0)$并不是给定的，而是一个可以由消费者自己控制的选择变量，这样，欧拉方程也告诉我们，消费者要想实现自己一生效用的最大化，就必须选择一个最恰当的$c(0)$。如果消费者所选择的$c(0)$太低，沿满足（7.64）式的路径进行消费时，一生消费的现值就会小于一生财富的现值，因而选择另一更高的消费路径就是可能的；如果$c(0)$太高，一生消费的现值就会大于一生财富的现值，因而该消费路径就是不可行的。

现在，我们再来看横截条件(7.61)式的含义。根据(7.62)式我们知道 $\lambda(t)$ 实际上就等于 $e^{-\rho t}u'(c(t))$。这样，横截条件(7.61)式可以进一步改写为：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u'(c(t))k(t)=0 \qquad （7.65）$$

根据稻田条件，我们知道只有在 $c(t)$ 趋于无穷大时 $u'(c(t))$ 的极限才会趋于零。一般来说，$c(t)$ 是不可能趋于无穷大的。另外，根据（7.64）式可以知道，当经济稳定以后，也即 $\dot{c}(t)=0$ 时有 $\rho=r(t)-n$。

这样，我们可以进一步把（7.65）式改写为：

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(r(t)-n)t}k(t)=0 \qquad (7.66)$$

（7.66）的表达式与（7.56）的表达式完全相同，只不过在（7.56）式那里是取大于等于号，而在（7.66）式这里是取等号。（7.56）式是消费者的预算约束条件，它要求消费者一生消费的现值必须小于等于一生收入的现值。而现在，横截条件则更直接地告诉我们，消费者想要实现自己一生效用的最大化，在最优路径上，其一生消费的现值能而且只能等于其一生收入的现值。背后的道理也很好理解，如果不取等号就意味着消费者在经济活动结束时仍留有一些收入，这当然不满足效用最大化的规定。

企业的最优化行为

企业的行为相对来说比较简单。企业的目标就是实现各时点上的利润最大化。企业实现利润最大化的两个一阶条件我们在前面第一节离散时间下的新古典模型中已经推导过，这两个一阶条件在连续时间下可以表述为：

$$r(t) = f'(k(t)) - \delta \qquad (7.67)$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \qquad (7.68)$$

经济的动态学

描述经济行为的最方便方式是依据c和k的变动。

c的动态学

由于所有消费者是相同的，因而方程（7.64）不仅描述了单个家庭的c的变动，而且也描述了整个经济的c的变动。由于$r(t)=f'(k(t))-\delta$我们可以把（7.64）式重新写为：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\rho-n-\delta}{\theta} \qquad (7.69)$$

因此，当 $f'(k)$ 等于 $\rho+n+\delta$ 时，$\dot{c}$ 为零。令 k^* 表示 $\dot{c}=0$ 时 k 的水平。当 k 大于 k^* 时，$f'(k)$ 小于 $\rho+n+\delta$，因而 $\dot{c}$ 为负；当 k 小于 k^* 时，$\dot{c}$ 为正。

这一信息总结在图 7-1 中。图中箭头表示 c 的运动方向。这样，如果 $k<k^*$,则 c 上升；如果 $k>k^*$,则 c 下降。$k=k^*$ 时的 $\dot{c}=0$ 线表示 $k=k^*$ 时 c 不变。

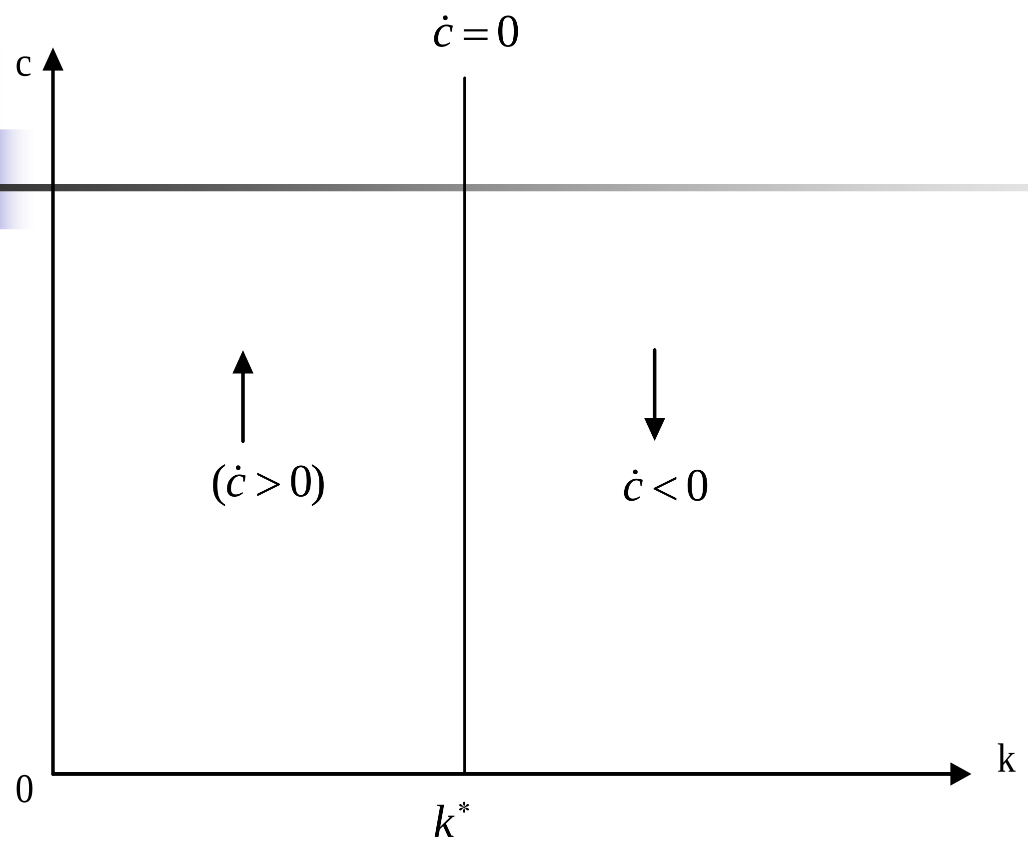

图 7-1　　c 的动态学

k的动态学

资本的运动方程由方程(7.50)式给出。现在代厂商实现利润最大化的两个一阶条件(7.67)、(7.68)式进(7.50)式，消掉其中的 r 和 w，可以进一步把(7.50)式改写为：

$$\dot{k}(t)=f\left(k(t)\right)-c(t)-(n+\delta)k(t) \qquad (7.70)$$

因此：对于一给定的k，$\dot{k}$=0 时的c值由 $f(k)-(n+\delta)k$ 给定；$\dot{k}$=0 时的c值随k递增，直至 $f'(k)=n+\delta$（黄金资本存量水平），然后随k递减。当c超过使得$\dot{k}$=0 时的水平时，k下降；当c低于此水平时，k上升。这一信息总结于图 7-2 中；同样，图中的箭头反映k的运动方向。

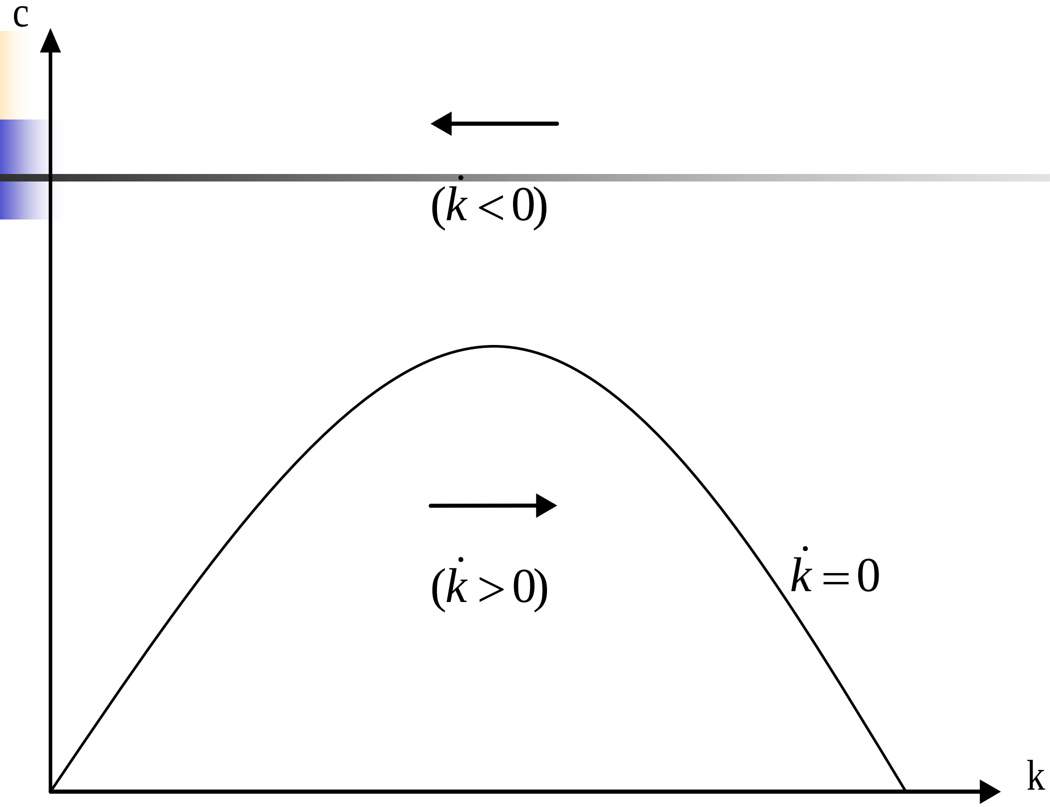

图 **7-2　　k** 的动态学

相图

图 7-3 将图 7-1 和图 7-2 结合在一起。箭头现在表示 c 和 k 的运动方向。比如，在 $\dot{c}$ =0 线的左方和 $\dot{k}$ =0 线的上方， $\dot{c}$ 为正， $\dot{k}$ 为负， 因而 c 在上升而 k 在下降，因而箭头指向上方 和左方。该图其他部分的`箭头所依据的道理相同。而在 $\dot{c}$ =0 和 $\dot{k}$ =0 线上， c 和 k 中只有一个在变。比如，处于 $\dot{k}$ =0 线上方且在 $\dot{c}$ =0 线上， c 不变 k 下降；因而箭头指向左方。最后， 在 E 点 $\dot{c}$ 和 $\dot{k}$ 均为 0； 因此没有偏离此点的运动。

图 7-3 中的k^*($\dot{c}$=0 时的k值)小于黄金律资本存量k_{GR}值(与$\dot{k}$=0 曲线的最高点对应的k值)。为明白这一点，回忆一下：k^*由$f'(k^*)=\rho+n+\delta$定义，而黄金律k_{GR}值由$f'(k_{GR})=n+\delta$定义。由于$f''(k)$为负，因此一定有k^*小于k_{GR}。这样，k^*就处于$\dot{k}$=0 曲线最高点的左侧。

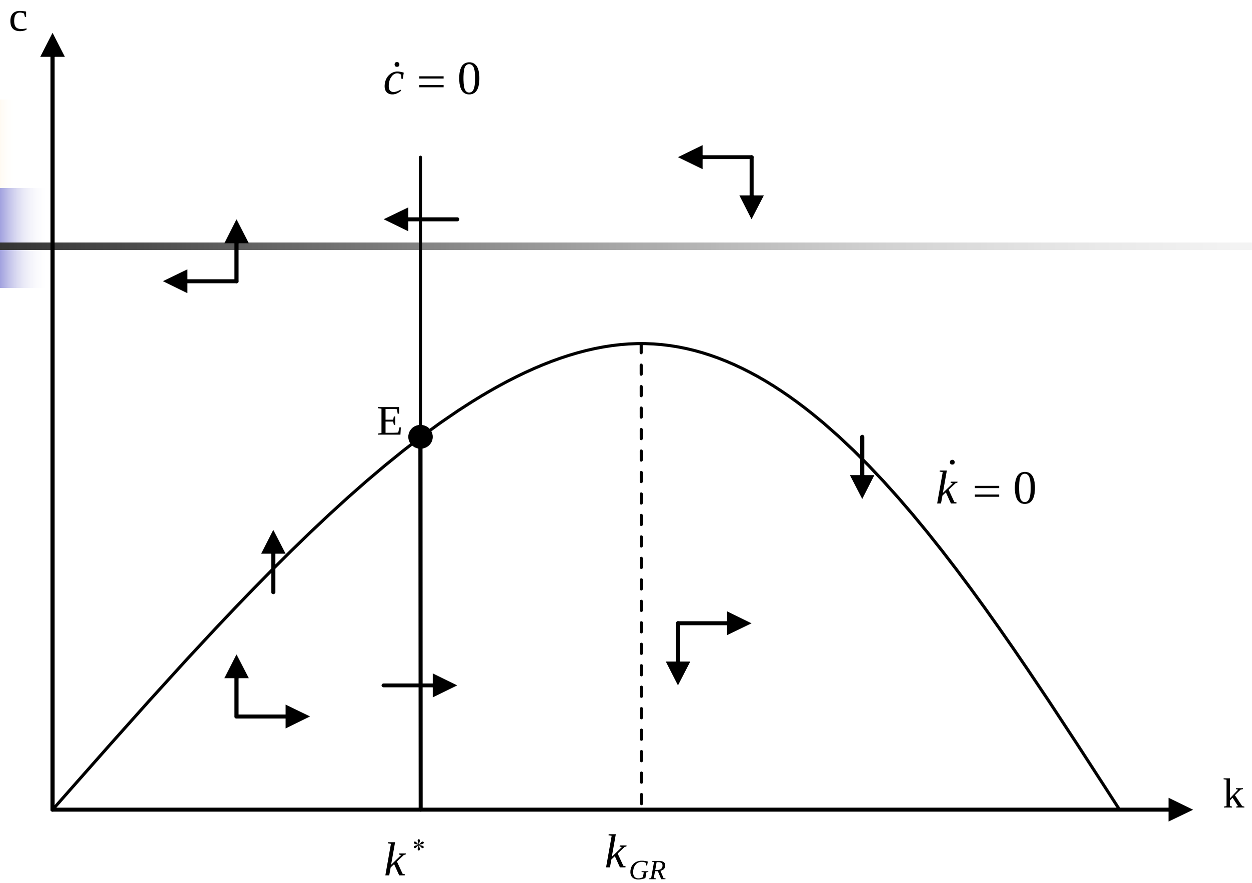

图 7-3　　c 和 k 的动态学

c的初始值

图 7.3 所示为给定c和k的初始值的情况下，c和k必须如何随时间变动以满足家庭的跨期最优化条件（方程〔7.69〕）以及将k的变化与产量和消费联系起来的方程（方程〔7.70〕）。k的初始值是给定的；而c的初始值必须被确定。

这个问题参见图 7.4。为了具体一点，假定$k(0)$小于k^*。该图给出了c的初始值$c(0)$处于不同位置时，c和k的轨迹。如果$c(0)$高于$\dot{k}$曲线，（如点 A），那么$\dot{c}$为正的而$\dot{k}$为负的；因此在图中经济持续向上、向左移动。如果$c(0)$处于 B 点，此时$\dot{k}$最初为 0，那么经济开始时在(k,c)空间中向上直移；随后$\dot{c}$为正的$\dot{k}$为负，因而经济又是向上、向左移动。

如果经济开始时稍微低于$\dot{k}$=0 线（如点 C），那么$\dot{k}$最初为正但较小（因为$\dot{k}$是c的连续函数），且$\dot{c}$仍为正。因此在这种情况下经济开始时向上、稍偏右的方向移动；一旦它越过$\dot{k}$=0 线，$\dot{k}$就变为负的，经济的路径又一次变为c上升、k下降。

点 D 表示初始消费极低的情形，此时$\dot{c}$和$\dot{k}$最初均为正。由（7.69）可知，$\dot{c}$与c成比例；如果c小，则$\dot{c}$也小。因此c一直较低，从而经济最终穿过$\dot{c}$=0 线。在穿过时的交点处，$\dot{c}$变为负，而$\dot{k}$仍为正，因此经济向下、向右移动。

$\dot{c}$ 和 $\dot{k}$ 为 c 和 k 的连续函数。因此在点 C 和点 D 之间必有一临界点——图中的点 F——使得当 $c(0)$ 处于该临界点时，经济向稳定点（the Stable point）点 E 收敛。当 $c(0)$ 高于该临界点时，经济的路径未及达到 $\dot{c}=0$ 线就穿过 $\dot{k}$ 曲线，从而经济最后归于一条消费永恒上升、资本永恒下降的路径。而当 $c(0)$ 低于该临界点时，经济的路径首先达到 $\dot{c}=0$ 线，因而经济从此走上一条消费下降、资本上升的路径。若 $c(0)$ 恰好处于该临界点，则经济收敛于 c 和 k 都不变的那一点。

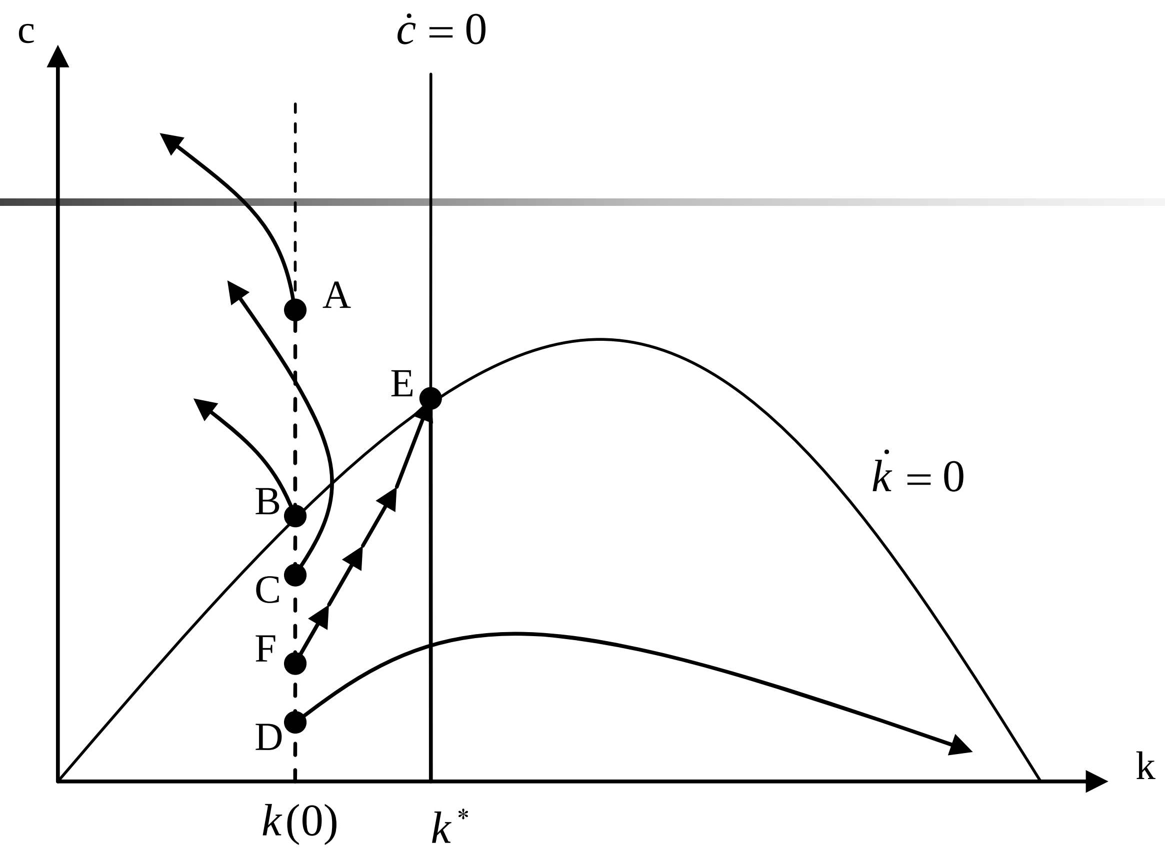

图 **7-4**　**c** 的不同初始值下，**c** 和 **k** 的变化情形

所有这些轨迹均满足方程（7.69）和(7.70)。但我们尚未引入如下要求：家庭满足其预算约束。我们也还未引入如下要求：经济中的资本存量不能为负。这些条件决定了这些轨迹中的哪一个描述了经济的实际行为。

如果经济开始处于高于 F 的一点，k 必然最终为负，以使（7.69）和(7.70)持续得到满足。由于这是不可能的，我们可以排除这些路径。

为排除初始点低于 F 的路径，我们应用以资本持有量的极限行为表示的预算约束，即横截条件（7.66）。如果经济济始于像点 D 这样的点，则k会最终超过黄金律资本存量。此后，真实利率$r = f'(k) - \delta$小于n，从而$e^{-(r-n)t}$上升。由于k也是上升的，所以$e^{-(r-n)t}k(t)$发散。因此$\lim_{t \to \infty} e^{-(r-n)t}k(t)$为无穷大；由横截条件（7.66）的经济含义可知，这等价于如下命题：家庭一生收入的现值无穷大于其一生消费的现值。因此，家庭可以得到更高的效用，因而这样一条路径不可能是一个均衡。

最后，如果经济始于点F，则k收敛于k^*，而r收敛于$f'(k^*)=\rho+n+\delta$。这样$e^{-(r-n)t}k(t)$最终以速率$\rho>0$下降，从而$\lim\limits_{t\to\infty}e^{-(r-n)t}k(t)$为0。因此始于点F的路径是可能的，且只有这条路径是可能的。

鞍点路径

尽管所有这些讨论都是围绕k的一个初始值来进行的，但其思想是有普遍性的。对于k的任意正的初始值，都存在唯一的c的初始值，它满足家庭的跨期最优化、资本存量的动态学、家庭的预算约束，和k不能为负的要求。将这一c的初始值表示为k的函数，即得所谓鞍点路径，如图 7-5 所示。

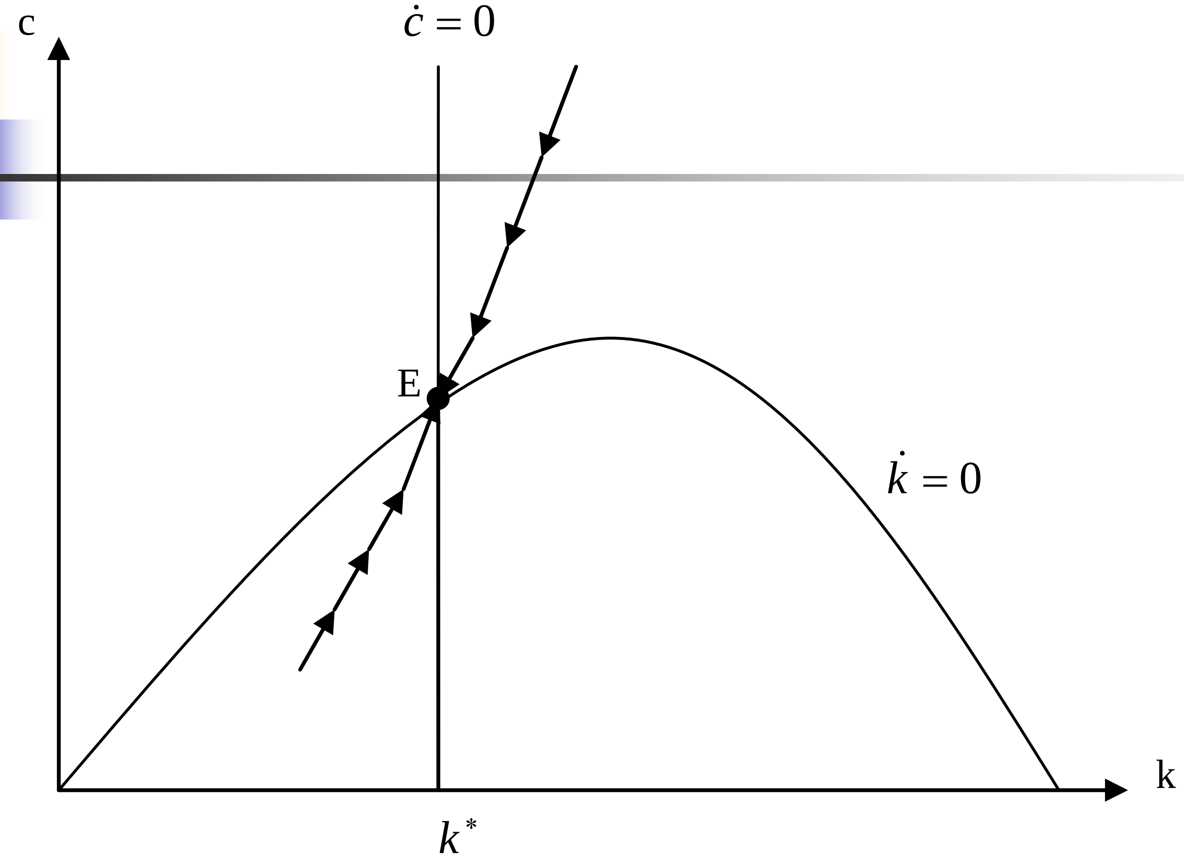

图 **7-5**　　鞍点路径

对于k的任意初始值，c的初始值必等于其鞍点路径上的值。然后，经济沿鞍点路径收敛于点 E。

当经济沿着鞍点路径收敛到稳定值以后，也就是说当经济实现稳定均衡以后，其所表现出来的特征与前面我们在离散时间中介绍的是完全一样的，这里就不作赘述了。

习题

1. 考虑一个如教材中描述的连续时间下的新古典增长模型，消费者的效用函数由（7.47）、(7.48)两式给出。假定真实利率r不变，并用W表示该所有消费者的初始财富加其一生劳动收入的现值（[7.51]式的右边项）。给定r、W和效用函数中的诸参数，试求效用最大化时的消费c的路径。

2.考虑一个经济处于平衡增长路径上的时间是连续的新古典增长模型。效用函数与生产函数均与教材中的相同。现在假设政府在某一期，比如说 t_0 时期宣布他（她）将在未来的某一期，比如说 t_1 期开始将向行为人征收投资所得税，税率为 τ 。因此，行为人的实际利率将成为 $r(t)=(1-\tau)\left(f'(k(t))-\delta\right)$。并且假设政府会把他（她）征收来的税收一次性地返还给行为人。

a. 试画出t_1时期以后的人均消费和人均资本的动态演进的相位图。

b. 在t_1时期人均消费会出现非连续的变化吗？为什么会或者不会？

c. 试画出t_1时期以前的人均消费和人均资本的动态演进的相位图。

d. 根据你对前三个问题的回答，你认为在t_0时期，人均消费必须做出怎样的调整？

e.请根据你的分析，画出人均消费和人均资本随时间推移的演进草图。

3. 说明下列各因素如何影响连续时间下的新古典增长模型中的 $\dot{c}=0$ 曲线和 $\dot{k}=0$ 曲线，从而如何影响平衡增长路径上的 c 值和 k 值。

a. θ 上升。

b. ρ 上升。

c. 折旧率 δ 下降。

d. 人口增长率 n 下降。