# 《中级宏观经济学》

主讲:**何樟勇**

**浙江大学经济学院**

**2023**年春

# 第三讲　微观基础2：两期动态模型

- 前面两个模型虽然简单，但是可以让我们很好地理解两期动态模型的基本实质。稍显不足的是这两个模型都没有考虑劳动的供给与需求问题，从而无法探讨影响就业的因素，在本节，我们将在模型中引入劳动市场，从而形成一个完整的宏观模型。虽然我们的模型只有两期，但是，在某种意义上说，它已经涵盖了多期甚至是无限期问题的基本经济直觉，所以，十分值得我们化些时间好好研究一番！

# 第三节

## 考虑资本和劳动的 两期竞争均衡模型

# 一、决策环境：
# 偏好、禀赋与技术

# 基本环境

- 经济仍由一个代表性的企业和一个代表性的消费者所组成，经济活动仅进行两期。消费者将决定最优的消费数量、储蓄数量（资本供给数量）和劳动供给数量；代表性企业将决定最合适的资本使用数量和劳动使用数量。消费者和企业的行为是竞争性的，也即他（她）们都是在视市场价格为既定的情况下来做决策的。消费者拥有企业。

# 偏好

我们用如下的一个简单的可分离效用函数来代表消费者的偏好：

$$v(c_1,c_2,l_1,l_2)=u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2)$$

$$=u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2) \qquad (3.57)$$

该效用函数具备我们在第一节中所描述的一切特征。

# 技术

企业根据如下的生产函数进行消费品的生产：

$$y = zf(k,n) \tag{3.58}$$

其中，y 是产出，k 是资本投入，n 是资本投入，z 是全要素生产率参数。我们仍假设生产函数是一个严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量都是严格递增的函数。同时，我们也假设生产函数满足稻田条件（Inada conditions）：$\lim_{k\to 0} f_1(k,n)=\infty$，$\lim_{k\to\infty} f_1(k,n)=0$ 以及 $\lim_{n\to 0} f_2(k,n)=\infty$，$\lim_{n\to\infty} f_2(k,n)=0$。

# 禀赋

代表性消费者在第一期期初拥有 $k_0$ 单位的资本，这些资本是以消费品的形式存在的，也即商品和资本之间是可以一对一转换的。同时，代表性消费者在每一期期初都拥有 h 单位的时间禀赋，它们既可以用于劳动也可以用于闲暇。

# 二、消费者最优化行为

消费者把$w$和$r$视为给定，在预算约束下寻求自己的效用最大化。也就是说，每个消费者都在求解如下这样一个最优化问题：

$$\max_{c_1,l_1,c_2,l_2,s_1}\left\{u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2)\right\} \quad (3.59)$$

$s.t.$

$$c_1+s_1=w_1(h-l_1)+(1+r_1)k_1^s \quad (3.60)$$

$$c_2+s_2=w_2(h-l_2)+(1+r_2)k_2^s \quad (3.61)$$

$$k_1^s = k_0 \qquad (3.62)$$

$$k_2^s = s_1 \qquad (3.63)$$

$$s_2 = 0 \qquad （3.64）$$

$$n_1^s + l_1 = h \qquad （3.65）$$

$$n_2^s + l_2 = h \qquad (3.66)$$

这里，$k_1^s$、$k_2^s$ 是消费者在第一期和第二期租给厂商的资本数量，(3.60)式和（3. 61）是预算约束方程；(3.62)式说明消费者在第一期租给厂商的资本数量等于消费者外生拥有的资本数量 $k_0$；(3.63)式说明消费者在第二期租给厂商的资本数量等于消费者在第一期的储蓄数量 $s_1$。因为行为人只生活两期，所以他（她）不会为第三期进行储蓄，因此约束条件（3.64）式是自然成立的。（3.65）式和（3.66）式是时间禀赋约束。

为了求解消费者的最优化问题，我们可以构建如下一个拉格朗日方程：

$$\ell = u(c_1) + u(l_1) + \beta u(c_2) + \beta u(l_2) \qquad (3.67)$$

$$+\lambda_1[w_1(h-l_1)+(1+r_1)k_0-c_1-s_1]+\lambda_2[w_2(h-l_2)+(1+r_2)s_1-c_2]$$

这里，$\lambda$ 是拉格朗日乘子。我们已经对效用函数作了一系列限定，这可以确保产生一个唯一的最优解，这个最优解可以通过如下的五个一阶条件得到描述：

$$(FOC_{c_1}) \qquad u'(c_1) - \lambda_1 = 0 \qquad (3.68)$$

$$(FOC_{c_2}) \qquad \beta u'(c_2) - \lambda_2 = 0 \qquad (3.69)$$

$$(FOC_{l_1}) \qquad u'(l_1) - \lambda_1 w_1 = 0 \qquad (3.70)$$

$$(FOC_{l_2}) \qquad \beta u'(l_2) - \lambda_2 w_2 = 0 \qquad (3.71)$$

$$(FOC_{s_1}) \qquad -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0 \qquad (3.72)$$

结合（3.68）、（3.69）、(3.72)式，可以得到：

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \beta(1+r_2) \qquad (3.73)$$

结合（3.68）、（3.70）式，可以得到：

$$\frac{u'(l_1)}{u'(c_1)} = w_1 \qquad (3.74)$$

结合（3.69）、（3.71）式，可以得到：

$$\frac{u'(l_2)}{u'(c_2)} = w_2 \qquad (3.75)$$

代预算约束条件进（3.73）、（3.74）、（3.75）式，消掉其中的$c_1$和$c_2$，我们可以看到，（3.73）式实际上隐性地描述了消费者的储蓄函数$s_1$，也即消费者第二期的资本供给函数$k_2^s$；（3.74）式则隐性地描述了消费者的第一期的闲暇需求函数，或者说第一期的劳动供给函数；同理，（3.75）式则隐性地描述了消费者的第二期的闲暇需求函数，或者说第二期的劳动供给函数。

# 三、企业的最优化行为

企业第一期和第二期的利润函数分别为：

$$\pi_1 = zf(k_1^d, n_1^d) - w_1(n_1^d) - (1+r_1)k_1^d + (1-\delta)k_1^d \quad (3.76)$$

$$\pi_2 = zf(k_2^d, n_2^d) - w_2(n_2^d) - (1+r_2)k_2^d + (1-\delta)k_2^d \quad (3.77)$$

其中，$k_1^d$、$k_2^d$ 和 $n_1^d$、$n_2^d$ 各自代表企业在第一期和第二期的资本需求以及在第一期和第二期的劳动需求。在这里，同样出于简单化考虑我们仍假定资本折旧率 $\delta = 1$ 。

企业在把$w$和$r$视为既定的情况下，通过选择恰当的资本投入数量和劳动投入数量来最大化利润。企业的利润最大化的可由如下的四个一阶条件来描述：

$$zf_1(k_1^d, n_1^d) = 1 + r_1 \qquad (3.78)$$

$$zf_2(k_1^d, n_1^d) = w_1 \qquad (3.79)$$

$$zf_1(k_2^d, n_2^d) = 1 + r_2 \qquad (3.80)$$

$$zf_2(k_2^d, n_2^d) = w_2 \qquad (3.81)$$

对应于每一个实际利率$r_1$，企业都会根据$zf_1(k_1^d, n_1^d) = 1 + r_1$的原则选择一个相应的资本使用数量$k_1^d$，对应于每一个实际利率$r_2$， 企业都会根据$zf_1(k_2^d, n_2^d) = 1 + r_2$的原则选择一个相应的资本使用数量$k_2^d$。这意味着，第一期与第二期企业的资本边际产出曲线实际上也就是企业的**资本需求曲线**。同理，根据（3. 79）式和(3.81)式我们知道，第一期与第二期企业的劳动边际产出曲线实际上也就是企业的**劳动需求曲线**。

# 四、市场均衡

在我们这个完整的两期模型中，总共有五个市场必须出清：

第一个是第一期资本市场，出清条件是：

$$k_1^s = k_0 = k_1^d \qquad (3.82)$$

第二个是第二期资本市场，出清条件是：

$$k_2^s = s_1 = k_2^d \qquad (3.83)$$

第三个是商品市场，出清条件为：

$$c_1 + c_2 = zf(k_1^d, n_1^d) + zf(k_2^d, n_2^d) - k_2^d \qquad (3.84)$$

第四个是第一期的劳动市场，出清条件为：

$$n_1^s = h - l_1 = n_1^d \qquad (3.85)$$

第五个是第二期的劳动市场，出清条件为：

$$n_2^s = h - l_2 = n_2^d \qquad (3.86)$$

- 再一次，根据瓦尔拉斯定理，一个经济有n个市场，只要n－1个市场出清，剩余的一个市场自动会出清。因为其中一个市场可以被标准化。这里，我们就忽略商品市场出清条件。

现在，我们有十四个未知数需要求解，它们是

$c_1$、$c_2$、$l_1$、$l_2$、$k_1^d$、$k_2^d$、$k_1^s$、$k_2^s$、$n_1^d$、$n_2^d$、$r_1$、$r_2$、$w_1$、$w_2$。而相应的，我们也有两个预算约束条件、四个均衡条件、两个资本供给函数、两个闲暇需求函数或者劳动供给函数、两个资本需求函数和两个劳动需求函数，共有十四个方程组恰好可以求解十四个未知数。

# 五、计划最优

计划者在资源的约束下最大化消费者的最大效用。计划者实际上就是通过求解如下一个问题来实现效用的最大化：

$$\max_{c_1,l_1,c_2,l_2,k_2}\left\{u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2)\right\} \tag{3.87}$$

$s.t.$

$$c_1+k_2=zf\left[k_0,(h-l_1)\right] \tag{3.88}$$

$$c_2=zf\left[k_2,(h-l_2)\right] \tag{3.89}$$

## 构建如下拉格朗日函数：

$$\ell = u(c_1) + u(l_1) + \beta u(c_2) + \beta u(l_2) \tag{3.90}$$

$$+\lambda_1\left\{zf\left[k_0,(h-l_1)\right]-c_1-k_2\right\}+\lambda_2\left\{zf\left[k_2,(h-l_2)\right]-c_2\right\}$$

该最大化问题的最优解体现在如下七个一阶条件中：

$$(FOC_{c_1}) \qquad u'(c_1)-\lambda_1=0 \qquad (3.91)$$

$$(FOC_{c_2}) \qquad \beta u'(c_2)-\lambda_2=0 \qquad (3.92)$$

$$(FOC_{l_1}) \qquad u'(l_1)-\lambda_1 z f_2\left[k_0,(h-l_1)\right]=0 \qquad (3.93)$$

$$(FOC_{l_2}) \qquad \beta u'(l_2)-\lambda_2 z f_2\left[k_2,(h-l_2)\right]=0 \qquad (3.94)$$

$$(FOC_{k_2}) \qquad -\lambda_1+\lambda_2 z f_1\left[k_2,(h-l_2)\right]=0 \qquad (3.95)$$

$$(FOC_{\lambda_1}) \qquad zf\left[k_0,(h-l_1)\right]-c_1-k_2=0 \qquad (3.96)$$

$$(FOC_{\lambda_2}) \qquad zf\left[k_2,(h-l_2)\right]-c_2=0 \qquad (3.97)$$

结合（3.91）、（3.92）、(3.95)式，可以得到：

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = zf_1\left[k_2, (h - l_2)\right] \qquad (3.98)$$

上式就是我们熟悉的欧拉方程。

结合（3.91）、（3.93）式，可以得到：

$$\frac{u'(l_1)}{u'(c_1)} = zf_2\left[k_0, (h - l_1)\right] \qquad (3.99)$$

结合（3.92）、（3.94）式，可以得到：

$$\frac{u'(l_2)}{u'(c_2)} = zf_2\left[k_2, (h - l_2)\right] \qquad (3.100)$$

现在两个预算约束方程（3.88）、（3.89）式加上（3.98）、（3.99）和（3.100）三式，可以得到由五个方程组成的联立方程组，对应着五个未知数：$c_1$、$c_2$、$l_1$、$l_2$、$k_2$，恰好可以求解。

# 简单总结

- 通过上面对完整的两期动态模型的介绍，我们可以看到，在一个动态模型的每一期中——不管它是几期的——行为人首先要像在静态模型中一样，要在消费和闲暇之间作出选择，这是动态模型与静态模型相同的地方。但是，动态模型毕竟是不同于静态模型的，行为人除了要在每一期内部做消费与闲暇之间的选择以外，还要考虑消费如何在相邻两期之间进行分配以实现所有期效用的最大化。

- 特别需要注意的是，行为人是需要做相邻两期之间的消费选择，也就是说，如果是一个三期模型，就必须有两个欧拉方程，一个指导消费者如何在第一与第二期之间做消费选择，另一个指导消费者如何做第二与第三期之间的消费选择。依此类推，如果有N期，那么就一定会有N-1个欧拉方程来指导消费者做相邻两期之间的消费选择。

# 进一步阅读的文献

- Lucas, R.E. Jr. and L.J. Rapping. 1969. “Real Wages, Employment, and Inflation.” *Journal of Political Economy* 77, 721-754.