《中级宏观经济学》

主讲:何樟勇

浙江大学经济学院

2023年春

第四讲
三期动态模型

- 在这一讲中，我们把两期模型扩展到三期。从来不要小看这一简单的扩展，实际上，从这一扩展中，我们可以从中学会怎样去处理行为人生活任意期的问题。当然，还有非常重要的一点是，求解三期模型的方法可以让我们理解动态规划的本质。

一、决策环境

基本环境

- 经济仍由一个代表性的企业和一个代表性的消费者所组成，经济活动进行三期。消费者将决定最优的消费数量、储蓄数量（资本供给数量）和劳动供给数量；代表性企业将决定最合适的资本使用数量和劳动使用数量。消费者和企业的行为是竞争性的，也即他（她）们都是在视市场价格为既定的情况下来做决策的。消费者拥有企业。

偏好

我们用如下的一个简单的可分离效用函数来代表消费者的偏好：

$$v(c_1, c_2, c_3) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \beta^2 u(c_3) \qquad (4.1)$$

该效用函数具备在第三讲第一节中所描述的一切特征。

技术

出于简单考虑，我们假设企业生产只需要资本不需要劳动。企业根据如下的生产函数进行消费品的生产：

$$y = f(k) \tag{4.2}$$

其中，y 是产出，k 是资本投入。当然，我们假设生产函数一次齐次的并具有如下性质，即 $f'(k) > 0, f''(k) < 0$，同时，也满足稻田条件，即 $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$。

禀赋

代表性消费者拥有k_0单位的初始资本，这些资本是以消费品的形式存在的，也即商品和资本之间是可以一对一转换的。我们仍旧规定初始资本只能租给企业而不能直接用于自己消费。

二、计划经济下的最优

- 显然，对于这样一个三期的最优化问题，我们现在已经不陌生了，简单套用处理两期最优的方法，我们就可以处理这个三期最优问题。在这里，我们可以简单看一下计划最优的情况。

计划者在资源的约束下最大化消费者的最大效用。计划者实际上就是通过求解如下一个问题来实现效用的最大化：

$$\max_{c_1, c_2, c_3, k_1, k_2} \left\{ u(c_1) + \beta u(c_2) + \beta^2 u(c_3) \right\} \quad （4.3）$$

$s.t.$

$$c_1 + k_1 = f(k_0) \qquad (4.4)$$

$$c_2 + k_2 = f(k_1) \qquad （4.5）$$

$$c_3 + k_3 = f(k_2) \qquad (4.6)$$

这里，k_1、k_2、k_3分别表示每一期中消费者为下一期预留的资本数量。我们也可以注意到，在这里，我们同样已经使用了折旧率$\delta = 1$的假定。因为经济活动只进行三期，因此，$k_3 = 0$一定成立，否则，就不是最优的了。

显然，对于这样一个最优化问题，我们现在已经能很容易处理了：构建拉格朗日函数，分别对五个决策变量求一阶导数，并令其为零，可以得到两个资本供给函数，再加上三个预算约束条件，只要我们知道效用函数和生产函数的具体形式，我们就能求得最终的最优解。

虽然拉格朗日方法就可以方便地处理这个最优化问题，但是，为了能更好理解动态规划的思想，在这里，我们还要介绍另一种处理这个最优化问题的方法。

想像一下，假如计划者现在正处在第三期的开始时，计划者会怎样行为？此时，计划者唯一需要选择的决策变量是c_3，计划者面临的实际上是如下这样一个最优决策问题：

第三期 $\max u(c_3)$ (4.7)

$s.t.$ $c_3 + k_3 = f(k_2)$ (4.6)

这里，k_2 是在第二期已经决定了的变量。这个最优解是明显的，为：

$$k_3 = g(k_2) = 0 \qquad （4.8）$$

$$c_3^* = f(k_2) - g(k_2) = f(k_2) \qquad (4.9)$$

这里，方程（4.8）称为政策函数（Policy function），它反映的是如下这样一个事，即计划者准备为第下一期预留的资本数量实际取决于本期已有的资本数量，具体到我们这个三期模型里来，也即计划者准备为第四期预留的资本数量k_3是本期资本数量k_2的函数，即$k_3 = g(k_2)$。当然，因为在我们这个模型里，经济活动仅进行三期，因而不会为第四期预留资本，也即，$k_3 = 0$。

现在，如果我们把这个最优解（4.9）式代进目标函数，我们可以得到如下这样一个间接效用函数（更正规的名字为值函数（Value function））：

$$V_3(k_2) \equiv u(c_3^*) = u\big(f(k_2)\big) \qquad (4.10)$$

V_3表示的是如果给定计划者可获得的资本为k_2，那么，消费者能获得的最大的效用水平。上述值函数对k_2求导，可得：

$$\frac{\partial V_3}{\partial k_2}(k_2) = u'\big(f(k_2)\big)f'(k_2) \qquad (4.11)$$

现在，我们再回到第二期。在第二期得初始时，k_1是给定的，因为它是在第一期就被决定的。在第二期，计划者通过选择一个合适的（c_2、k_2）组合来最大化自己的效用，实际就是在求解如下这样一个最优化问题：

第二期 $$\max_{c_2,k_2}\{u(c_2)+\beta V_3(k_2)\} \qquad (4.12)$$

$s.t.$ $$c_2+k_2=f(k_1) \qquad (4.5)$$

因为计划者在第二期选择的k_2将被作为第三期的资本使用，因此，第二期选择的k_2将会对第三期的效用产生影响，所以，在第二期作决策时，当然需要把这种影响考虑进去。在上面的最大化问题中，我们借助值函数V_3来表示了这种经由k_2而产生的效用。

代约束条件进目标函数，并对k_2求导数，我们可以得到相应于这个最优化问题的一阶条件：

$$u'(c_2) = \beta \frac{\partial V_3}{\partial k_2}(k_2) \quad \Rightarrow u'(c_2) = \beta u'(c_3) f'(k_2) \qquad (4.13)$$

这个一阶条件就是欧拉方程。这个欧拉方程实际上隐含地给出了第二期政策函数：

$$k_2 = g(k_1) \qquad （4.14）$$

现在，有了这个政策函数，我们可以定义第二期的值函数了，它是：

$$V_2(k_1) \equiv u(c_2^*) + \beta V_3(k_2^*) \qquad (4.15)$$

注意，在（4.15）式所表示的值函数中，c_2、k_2上面都加了星号，这表示了当前的这个消费、储蓄组合是能够给消费者带来最大效用（当然是第二、第三两期的总效用）的消费、储蓄组合。但是，因为消费者的这个最优组合依赖于k_1，而这个k_1是计划者在第一期决定的，因此，现在还不能确定具体的值是多少！不过既然这个最优选择依赖于k_1，因此，我们可以让上述值函数对k_1求导，从而得到：

$$\frac{\partial V_2}{\partial k_1}(k_1) = u'(c_2^*)\left[f'(k_1) - \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1} \right] + \beta \frac{\partial V_3}{\partial k_2}(k_2^*) \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1} \quad (4.16)$$

上式重新整理后，为：

$$\frac{\partial V_2}{\partial k_1}(k_1) = u'(c_2^*) f'(k_1) + \left[\beta \frac{\partial V_3}{\partial k_2}(k_2^*) - u'(c_2^*) \right] \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1} \quad (4.16)$$

根据上面的（4.13）式，我们知道在大括号里的部分等于零。

在第一期的初始时，k_0给定，显然，我们能像第二期一样来处理第一期的最优化问题：

第一期 $$\max_{c_1,k_1}\{u(c_1)+\beta V_2(k_1)\} \qquad (4.17)$$

$$s.t. \qquad c_1+k_1=f(k_0) \qquad (4.4)$$

无论消费者选择怎样的一个k_1值，一旦k_1值被确定，它将以最恰当的方式在未来被使用，从而给消费者带来最大的效用。这一信息像前面一样被浓缩在值函数V_2里。同样，代约束条件进目标函数，我们可以得到如下的一阶条件：

$$u'(c_1)=\beta\frac{\partial V_2}{\partial k_1}(k_1)\quad\Rightarrow u'(c_1)=\beta u'(c_2)f'(k_1) \qquad (4.18)$$

同样的，这个一阶条件就是欧拉方程，它实际上隐含地给出了第一期政策函数：

$$k_1=g(k_0) \qquad （4.19）$$

有了这个政策函数，同上面一样，我们也能定义如下一个相应于第一期的值函数：

$$V_1(k_0)\equiv u(c_1^*)+\beta V_2(k_1^*) \qquad (4.20)$$

这一值函数实际上给出了当消费者在初始资本给定为k_0的情形下，所有三期能获得的总效用。

同样的，我们可以注意到，在（4.20）式所表示的值函数中，c_1、k_1上面都加了星号，这表示了当前的这个消费、储蓄组合是能够给消费者带来最大效用（当然是所有三期的总效用）的消费、储蓄组合。一旦知道k_0，利用（4.14）、（4.19）所示的政策函数，我们就可以求得最优的k_1^*、k_2^*，同时，借助预算约束条件，我们也能求得最优的c_1^*、c_2^*、c_3^*。

总结一下，在这个简单的三期模型中，我们通过不断地从后往前迭代，最后发现，行为人（消费者）最大的三期总效用贴现值只依赖于第一期的初始资本——外生给定的k_0。显然，如果我们把模型扩展到四期、五期乃至更多期，套用处理三期模型方法，通过不断地从后往前迭代，最终我们仍可以发现，行为人在任意多期里的最大总效用贴现值只取决于第一期的初始资本。

并且，通过仔细观察（4.15）、（4.20）式，我们可以发现，实际上，对于任意一个多期的最优化问题来说，我们可以一般化地写出时期 t 的值函数：

$$v(k_t) = u(c_t) + \beta v(k_{t+1}) \qquad (4.21)$$

三、一个例子：吃蛋糕问题

现在，考虑一个生活三期的个人，他(她)的偏好由如下效用函数给出：

$$\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln c_t \qquad (4.22)$$

这里，c_t 是时期 t 的消费，$0<\beta<1$ 是主观贴现率。行为人在第一期的开始有 $A_0>0$ 单位的消费品（蛋糕），该消费品（蛋糕）可以无成本地储藏。该消费者没有其他收入来源。

试解释消费者在生命周期中的蛋糕消费模式。特别的，如果我们假设$A_0 = 1$，也即行为人在生命的初始期有一个蛋糕。并且假设$\beta = 0.5$。试求在时期 1 结束时，有多少蛋糕剩余？在时期 2 结束时和时期 3 结束时又各由多少蛋糕剩余？

具体求解

（1）给定 A_2，行为人在第三期的最优规划问题为：

$$v_3(A_2) = \max_{c_3, A_3} \ln c_3 \qquad (4.23)$$

$$s.t. \qquad c_3 + A_3 = A_2 \qquad (4.24)$$

要使第三期的消费尽可能地大，解是非常清楚的，即：

$$A_3 = g(A_2) = 0 \text{ 和 } c_3 = A_2 - g(A_2) = A_2 \qquad (4.25)$$

把这一决策规则代入目标函数可以求得值函数：

$$v_3(A_2) = \ln A_2 \qquad (4.26)$$

（2）给定A_1，行为人在第二期的最优规划问题为：

$$v_2(A_1)=\max_{c_2,A_2}\ln c_2+\beta v_3(A_2) \qquad (4.27)$$

$$s.t. \quad c_2+A_2=A_1 \qquad (4.28)$$

把预算约束代入目标函数，消掉c_2，结合从第三期中已经求得的值函数，我们可以得到时期 2 如下的一个贝尔曼方程：

$$v_2(A_1)=\max_{A_2}\ln(A_1-A_2)+\beta\ln A_2 \qquad (4.29)$$

对应于贝尔曼方程右边的最大化问题的

一阶条件为：

$$-\frac{1}{A_1 - A_2} + \frac{\beta}{A_2} = 0 \qquad (4.30)$$

我们能求解出相应的 A_2：

$$A_2 = g(A_1) = \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) A_1 \qquad (4.31)$$

代 $g(A_1)$ 进预算约束方程可以得到时期 2 的消费决策规则：

$$c_2 = A_1 - g(A_1) = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)A_1 \qquad (4.32)$$

把这一决策规则 $g(A_1)$ 代入目标函数可以求得值函数：

$$v_2(A_1) = \ln\left(\frac{A_1}{1+\beta}\right) + \beta\ln\left(\frac{\beta A_1}{1+\beta}\right)$$

$$= (1+\beta)\ln(A_1) + \beta\ln\beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) \qquad (4.33)$$

（3）给定A_0，行为人在第一期的最优规划问题为：

$$v_1(A_0) = \max_{c_1, A_1} \ln c_1 + \beta v_2(A_1) \qquad (4.34)$$

$$s.t. \qquad c_1 + A_1 = A_0 \qquad (4.35)$$

把预算约束代入目标函数，消掉c_1，结合从第二期中已经求得的值函数，我们可以得到时期 1 的如下一个贝尔曼方程：

$$v_1(A_0) = \max_{A_1} \ln(A_0 - A_1) + \beta[(1+\beta)\ln(A_1)$$

$$+\beta \ln \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta)] \qquad (4.36)$$

从对应于贝尔曼方程右边的最大化问题的一阶条件为中可以得到如下的决策规则：

$$A_1 = g(A_0) = \left(\frac{\beta + \beta^2}{1 + \beta + \beta^2} \right) A_0 \qquad (4.37)$$

$$c_1 = A_0 - g(A_0) = \left(\frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \right) A_0 \qquad (4.38)$$

把这一决策规则 $g(A_0)$ 代入目标函数可以求得值函数：

$$v_1(A_0) = \ln\left(\frac{1}{1 + \beta + \beta^2} \right) A_0 + \beta \left[(1+\beta)\ln\left(\frac{\beta + \beta^2}{1 + \beta + \beta^2} \right) A_0 + \beta \ln \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) \right]$$

$$= (1 + \beta + \beta^2)\ln A_0 + (\beta + 2\beta^2)\ln \beta - (1 + \beta + \beta^2)\ln(1 + \beta + \beta^2) \qquad (4.39)$$

因为在第一期的期初 $A_0=1$，利用决策规则可以计算每一期的蛋糕存量：

$$A_1=g(1)=\left(\frac{0.5+0.5^2}{1+0.5+0.5^2}\right)(1)\approx 0.429 \qquad (4.40)$$

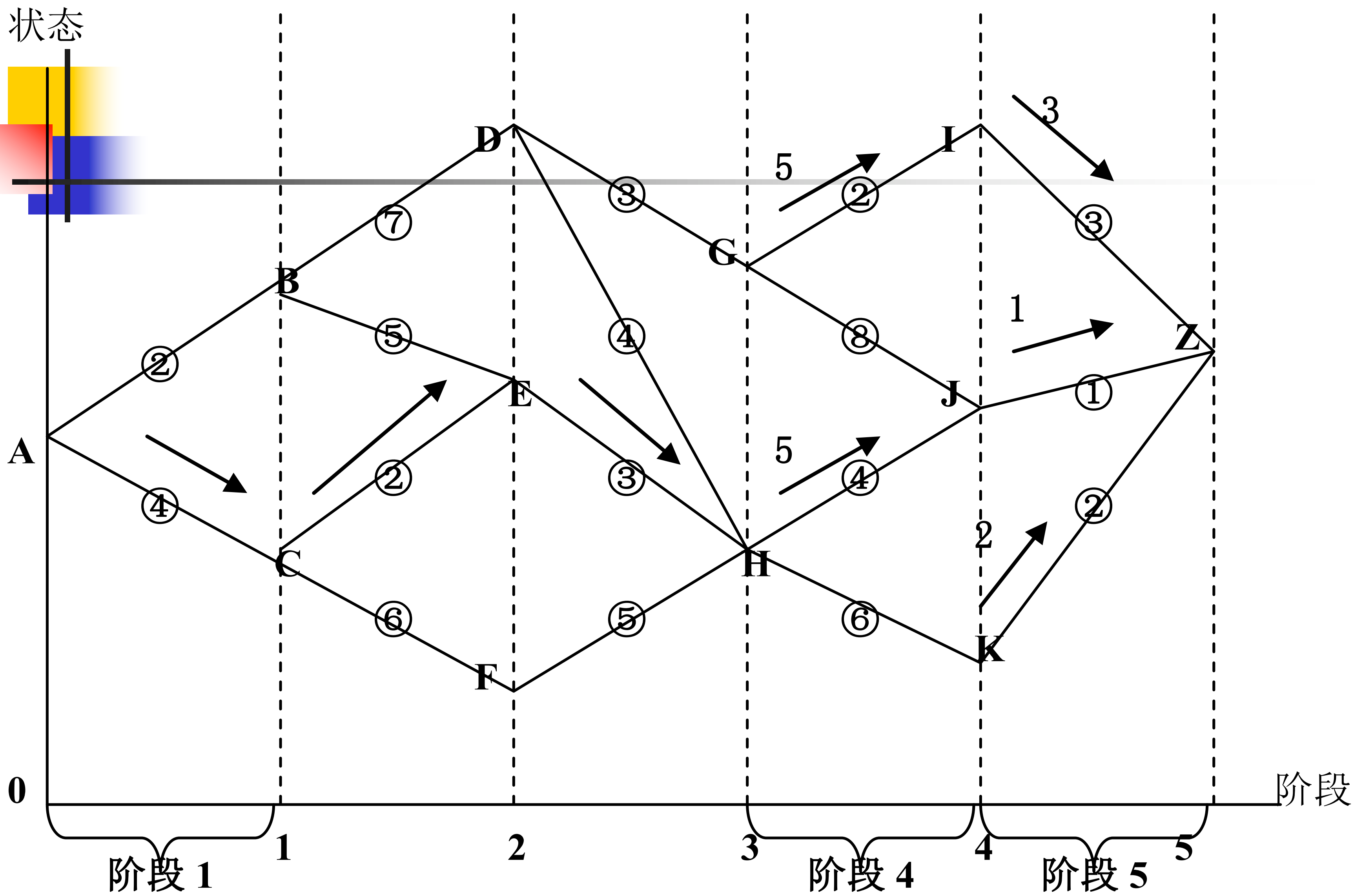
$$A_2=g(0.429)=\left(\frac{0.5}{1.5}\right)(1)\approx 0.143 \qquad (4.41)$$

$$A_3=g(0.143)=0 \qquad (4.42)$$

因而，大多数蛋糕将在第一期被消费掉（≈ 0.571），在随后期的消费将逐期减少，第二期约为 0.286，第三期约为 0.143。这是因为有时间贴现的缘故 $(0<\beta<1)$。因为行为人偏好目前的效用，她在第一期将吃掉大部分蛋糕，随后，逐期减少。

动态规划基本思想简介

- 尽管动态最优化问题是用时间序列来描述，但是也可以把计划水平设想为经济过程中的一个阶段序列。动态最优化的多阶段特征可以用一个简单的离散例子予以说明。
- 假设一家企业致力于把某种材料从初始状态A（原材料状态）经过五个阶段生产过程转化为终结状态Z（最终产品状态）。该企业面临着在几种可能的备选子过程中选择的问题，每个子过程对应一个特定的成本。



状态
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
Z
0
1
2
3
4
5
阶段
阶段 1
阶段 4
阶段 5

- 在图5B-1中，我们通过水平地画出各阶段并垂直地画出各状态来说明这一问题。初始状态A用最左端的点来表示（在阶段1的开始处）；终结状态Z用最右端的点来表示（在阶段5的结束处）。其他各点B，C，…K表示了各种中间状态。为了表明从状态A可以转化到状态B，我们从点A到点B画一条弧。另一条弧AC表明这种材料业可以转换到状态C而不是状态B。每一条弧被赋予一个具体值——在这里是成本——它显示在图中的圆圈中。

- 第一阶段决策是决定把原材料转化为状态B（成本为2元）还是状态C（成本为4元），既是选择弧AB还是弧AC。一旦此决策做出，将出现第二阶段的另一个选择问题，如此等等，直到状态Z被到达。我们的问题是选择从左到右的一个相连的弧序列（也即，从A开始到Z结束），使得各部分弧上的值的总和达到最小。这样一个弧序列将构成一条最优路径。

- 由美国数学家理查德•贝尔曼（Richard E. Bellman）所开创的动态规划给出了寻找这种最优路径的一种解决办法。这种方法的特点是把给定的问题嵌入一簇问题中，结果，在求解给定问题的过程中，我们实际上求解了整簇的问题。现在，结合上面这个例子，让我们首先看一看如何完成一个问题的嵌入。

给定初始问题是寻求从点 A 到点 Z 的最小成本路径，我们考虑更大的一个问题，寻找从集合$\{A,B,C,\cdots Z\}$中每一点到终结点 Z 的最小成本路径。于是存在一簇分支问题，每个问题与不同的初始点相联系。这里，我们把每一个可能的点当作就其自身而言的合法初始点。即，除了真正的初始点 A 之外，我们采用了许多伪初始点（B，C，等等）。我们的原始问题就这样被“嵌入”到一簇有意义的问题当中。

由于每一个分支问题都有惟一的最优路径，所以，可以写出一个最优值函数：

$$V^* = V^*(i) \qquad (i = A, B, \ldots, Z)$$

这表明我们可以针对每一个可能的初始点决定一个最优路径值。由此，我们可以构造一个最优政策函数，它告诉我们，为了通过适当选择从点 i 到总结点 Z 的一序列弧达到$V^*(i)$，从任何特定的初始点 i 出发，如何前进才是最好的。

- 最优值函数和最优政策函数的目的很容易理解，但是，令人困惑的是我们为什么要自寻麻烦来嵌入这个问题，从而使求解的任务倍增？理由是这样的：嵌入过程导致了求解原始问题的系统迭代可以得以进行。

再次回到我们的例子中来。设想我们当前的问题仅仅是决定第五阶段的最优值，相关的有三个初始点 I、J 和 K。答案和容易看出：

$$V^*(I)=3 \qquad V^*(J)=1 \qquad V^*(K)=2 \qquad (1)$$

一旦找出了 I、J 和 K 的最优值，寻找最小成本值 $V^*(G)$ 和 $V^*(H)$ 的任务就变得更容易了。

向前移到第四个阶段并利用（1）式中得到的最优值信息，我们可以用下述方式决定$V^*(G)$和最优路径 GZ（从 G 到 Z）：

$$V^*(G)=\min\{\text{弧}GI\text{的值}+V^*(I),\text{弧}GJ\text{的值}+V^*(J)\}$$

$$=\min\{2+3,8+1\}$$

$$=5 \qquad (2)$$

(2) 式告诉我们最优路径 GZ 是 GIZ。从 G 到 Z 的最优路径经过 I 可以通过从 G 出发的箭头来标明；箭头上的数字表示最优路径值$V^*(G)$。

同理，可以得到：

$$V^*(H)=\min\{弧HJ的值+V^*(J),弧HK的值+V^*(K)\}$$

$$=\min\{4+1,6+2\}$$

$$=5 \qquad (3)$$

（3）式告诉我们最优路径 HZ 是 HJZ。再次注意从 H 指向 J 的箭头以及它上面的数字。这组所有的这样的箭头构成了最优政策函数，并且这组所有的箭头上的数字构成了最优值函数。

有了$V^*(G)$和$V^*(H)$，我们可以继续向更前的阶段移动来计算$V^*(D)$、$V^*(E)$和$V^*(F)$以及最优路径DZ、EZ 和 FZ，方法同上。同样，在进行两步，我们就返回到第一阶段，在此我们就可以决定$V^*(A)$和最优路径 AZ，即，求解原始给定的问题。

- 迭代求解过程的精髓被贝尔曼的最优性原理所揭示。粗略说，就是如果你从最优的弧序列中砍掉第一段弧，剩下的被删节的序列就其自身而言仍是最优的——作为从它自身的起点到终结点的最优路径。例如，如果EHJZ是从E到Z的最优路径，那么HJZ一定是从H到Z的最优路径。

- 反过来，如果已知HJZ是从H到Z的最优路径，那么经历H的更长的最优路径一定在其结尾处采用阶段序列HJZ。这一道理隐藏在（2）式和（3）式的计算背后。但是要注意的是，为了应用最优性原理和迭代过程以描绘出从A到Z的最优路径，我们必须找出与图一中每个可能点相联系的最优值。这就说明为什么我们必须嵌入原始问题。