《中级宏观经济学》

主讲:何樟勇博士

浙江大学经济学院

2023年春

第七讲 新古典经济增长模型

- 早期的经济增长理论研究工作，特别是在Solow（1956）那里，是借助一个没有跨期最优行为的模型来进行的。也就是说，行为人被假定以一个外生给定的固定比率把自己的收入储蓄起来。后来，Cass(1965)和Koopmans(1965)发展出第一个最优化经济增长模型（实际就是考虑微观基础的增长模型），因为它们的模型通常假设存在一个社会计划者，由社会计划者选择一个最优的增长路径。

- 就对长期经济增长的有关论断而言，其实，最优增长模型所得到的结论并没有超越索洛模型的结论，但是，最优增长模型通过把行为人的最优化行为引入模型，一个最大的优点是我们可以借助这些模型去得到很多规范性的结论（例如，我们可以对福利问题发表评论）。

- 在这里，我们将给出一个非常简单的增长模型，通过这一简单模型的介绍来揭示一些这类模型的最重要的特征。本讲的另一个主要目的是要介绍并展示一下离散时间的动态规划模型是怎样被运用的，这种运用对于求解许多动态问题是非常有帮助的。

第一节　离散时间的新古典增长模型

一、决策环境：偏好、技术、人口、禀赋与资源约束

基本环境

- 经济由许多本质上相同的、生活无限期的消费者和大量本质相同的企业所组成，经济活动进行无限期。消费者通过寻求最优的消费序列和资本序列来实现自己的效用最大化。

偏好

消费者的偏好如下：

$$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \qquad (7.1)$$

其中，$0<\beta<1$是贴现因子，c_t是人均消费。期效用函数$u(\cdot)$是一个连续可微，严格递增，严格凹的函数。它满足稻田条件，即$\lim_{c\to 0}u'(c)=\infty$，$\lim_{c\to\infty}u'(c)=0$。

技术

生产技术由下式给出：

$$Y_t = F(K_t, N_t) \qquad (7.2)$$

其中，Y_t是总产出，K_t是总资本存量，N_t是经济活动中的总人口（也就是消费者的人数）。

同时，我们也假定生产函数是一个严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量都是严格递增的函数。因此，我们可以使用密集形式的生产函数来重新表述（7.2）式：

$$y_t = f(k_t) \qquad (7.3)$$

人口

经济在初始时有N_0个本质上相同的消费者（初始人口），并假设人口（也即劳动供给）以外生速率$\gamma_N = n$增长，这样有：

$$N_{t+1} = (1+n)N_t = (1+n)^{t+1}N_0 \qquad (7.4)$$

禀赋

在每一期，消费者拥有一单位的时间禀赋，这一单位时间禀赋将作为劳动无弹性地提供出来。同时，消费者也拥有K_0单位的初始资本，这些资本即可以用于生产也可以用于消费，即消费品与资本品是可以一对一进行转换的。

资源约束

经济的资源约束为：

$$N_t c_t + K_{t+1} = (1-\delta)K_t + Y_t \qquad (7.5)$$

这里，$0 \le \delta \le 1$代表资本存量的折旧率。

二、计划经济下的最优

- 因为帕雷托最优和竞争均衡是相同的，因此，我们可以通求解社会计划者的最优问题来求解经济的竞争均衡解。社会计划者的问题是在（7.3）-（7.5）式的约束下最大化（7.1）式。现在，借助动态规划的方法，我们可以方便地处理这个问题。

为了简化我们的分析，我们先对有关变量做一些适当的处理将。我们把所有涉及总量的变量都利用劳动进行处理从而转化为人均变量，例如，定义 $y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t}$ 为人均产量，$c_t \equiv \frac{C_t}{N_t}$ 为人均消费，等等。在作了这样处理之后，我们再把（7.2）—（7.5）式，并都转换成人均的形式，社会计划者的最优化问题就成为：

$$v(k_t)=\max_{c_t,k_{t+1}}\left[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})\right] \qquad (7.6)$$

$$s.t. \qquad c_t+(1+n)k_{t+1}=(1-\delta)k_t+f(k_t) \qquad (7.7)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^{t+1}k_{t+1}}{(1+\rho)^t}=0 \qquad （7.8）$$

这是一个以k_t为状态变量，c_t和k_{t+1}为选择变量的动态规划问题。把约束条件（7.7）代入目标函数中，我们有：

$$v(k_t)=\max_{k_{t+1}}\left\{u\left[f(k_t)+(1-\delta)k_t-(1+n)k_{t+1}\right]+\beta v(k_{t+1})\right\} \quad (7.9)$$

（7.9）式右边最大化问题的一阶条件是：

$$-(1+n)u'\left[f(k_t)+(1-\delta)k_t-(1+n)k_{t+1}\right]+\beta v'(k_{t+1})=0 \qquad (7.10)$$

让（7.9）式两边对 k_t 求偏导，并应用包洛定理，可以得到：

$$v'(k_t)=u'\left[f(k_t)+(1-\delta)k_t-(1+n)k_{t+1}\right]\left[f'(k_t)+(1-\delta)\right] \quad (7.11)$$

我们把上面这个等式往前挪一期，就为：

$$v'(k_{t+1})=u'\left[f(k_{t+1})+(1-\delta)k_{t+1}-(1+n)k_{t+2}\right]\left[f'(k_{t+1})+(1-\delta)\right] (7.12)$$

现在，用（7.12）式代替掉（7.10）式中的 $v'(k_{t+1})$，得到：

$$-(1+n)u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})\left[f'(k_{t+1})+(1-\delta)\right]=0 \qquad (7.13)$$

(7.13)式就是相应于计划最优问题的欧拉方程。

现在，我们来定义“平衡增长路径”，在平衡增长路径上，经济处于稳定状态，此时，$c_t = c_{t+1} = c^*$，$k_t = k_{t+1} = k^*$，且c^*和k^*是常数。这样，利用（7.13）式，我们知道稳定状态下的资本存量一定要满足下式：

$$f'(k^*) = \frac{(1+n)}{\beta} - (1-\delta) \qquad (7.14)$$

如果我们利用定义$\beta=\dfrac{1}{1+\rho}$以及如下的一个近似，即：

$$(1+n)(1+\rho)\approx 1+n+\rho \qquad (7.15)$$

则（7.14）式可以进一步简化为：

$$f'(k^*)=\rho+n+\delta \qquad (7.16)$$

因为在平衡增长路径上，(7.16)式必须得到满足，因此，我们如果给出效用函数和生产函数的具体形式，我们也能借助该式求解出k^*的具体解析解。

三、分散经济下的最优

- 虽然我们借助计划者最优问题可以求得最优的均衡资本数量，但是，为了决定竞争均衡的价格，我们还是需要通过分别分析消费者和企业的最优化问题，从而得到一些求解的有用信息。

消费者的最优化行为

消费者储存资本并进行投资（也即，它们的财富是以资本的形式表示的），在每一时期里，消费者都会把资本租给企业并向企业出售自己的劳动。因为劳动并不会给消费者带来任何负效用，因此，不论工资率为多少，劳动供给始终是1单位。这样，现在，经济的资源约束条件成为：

$$N_t c_t + K_{t+1} = w_t N_t + (1+r_t)K_t \qquad （7.17）$$

这里，w_t表示工资率，r_t代表资本的租金率。

当我们对有关总量的变量作了人均化处理以后，可以看到，消费者为了追求效用最大化，实际上就相当于在求解如下一个最优化问题：

$$v(k_t)=\max_{c_t,k_{t+1}}\left[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})\right] \qquad (7.18)$$

$$s.t. \qquad c_t+(1+n)k_{t+1}=w_t+(1+r_t)k_t \qquad (7.19)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^{t+1}k_{t+1}}{\prod_{t=0}^{t}(1+r_t)}=0 \qquad （7.20）$$

这是一个以 k_t 为状态变量， c_t 和 k_{t+1} 为选择变量的动态规划问题。

把约束条件（7.19）代入目标函数中，我们有：

$$v(k_t)=\max_{k_{t+1}}\left\{u\left[w_t+(1+r_t)k_t-(1+n)k_{t+1}\right]+\beta v(k_{t+1})\right\} \quad (7.21)$$

（7.21）式右边最大化问题的一阶条件是：

$$-(1+n)u'\left[w_t+(1+r_t)k_t-(1+n)k_{t+1}\right]+\beta v'(k_{t+1})=0 \quad (7.22)$$

让（7.21）式两边对k_t求偏导，并应用包洛定理，可以得到：

$$v'(k_t)=u'\left[w_t+(1+r_t)k_t-(1+n)k_{t+1}\right](1+r_t) \quad (7.23)$$

我们把上面这个等式往前挪一期，就为：

$$v'(k_{t+1})=u'\left[w_{t+1}+(1+r_{t+1})k_{t+1}-(1+n)k_{t+2}\right](1+r_{t+1}) \quad (7.24)$$

现在，用（7.24）式代替掉（7.22）式中的 $v'(k_{t+1})$，

得到：

$$-(1+n)u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})(1+r_{t+1})=0 \qquad (7.25)$$

方程(7.25)就是实现消费最优的欧拉方程。把这一方程和计划最优的欧拉方程进行比较，可以发现，只要下式成立，消费的变动路径将是完全相同的：

$$r_t = f'(k_t)-\delta \qquad （7.26）$$

现在，让我们转到厂商问题上，看看上述等式是否会成立。

企业的最优化行为

厂商的问题比较简单，只需要最大化每期的利润就可，厂商的利润函数为：

$$\pi = F(K_t, N_t) - w_t N_t - (1 + r_t) K_t + (1 - \delta) K_t$$

$$= F(K_t, N_t) - w_t N_t - r_t K_t - \delta K_t \qquad （7.27）$$

相应于上述利润最大化的一阶条件分别为：

$$r_t = f'(k_t) - \delta \qquad (7.28)$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \qquad (7.29)$$

稳定状态与竞争均衡解

如果模型存在稳定状态的话（这是需要我们证明的，在下面连续时间部分我们将给出详细的证明），那么，利用稳定状态下 $c_{t+1}=c_t=c^*$ 以及 $k_{t+1}=k_t=c^*$ 的特性，再结合（7.25）式所示的欧拉方程以及（7.28）式，在效用函数和生产函数的具体形式给出以后，我们就可以容易地求得稳定状态下 c^* 和 k^* 的解。

如果我们要想知道每一期的竞争均衡解，那么，就必须借助猜测法、值函数迭代法或者政策函数迭代法把值函数和政策函数求解出来。一旦求得了政策函数，也即人均资本的最优决策规则 $k_{t+1}=g(k_t)$。在 k_0 给定的情况下，我们可以利用这一决策规则求得竞争均衡下的资本储存序列 $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$。然后，再利用约束条件（7.19）式求出最优消费的序列 $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$。一旦我们求得资本和消费的序列解，那么，求解竞争均衡的价格序列解就非常容易了。我们可以利用厂商和消费者实现最大化时必须满足的一阶条件来做到这一点。要求解实际均衡的工资序列和资本租金率序列，只要代均衡数量进（7.28）式和（7.29）式就可以了。当然，因为在无限期模型中，我们关注的是模型是否存在稳定状态，因此，我们一般不去求解每一期的竞争均衡解。

另外，需要注意的是，当消费者在求解他（她）的最优化问题时，我们假设他（她）是知道整个价格序列$\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$的。也就是说，我们分析的是一种“理性预期”或者“完全预见”的竞争均衡。在这种均衡中，在每一期里，消费者都要对未来的价格作一个预测，并基于这个预测的价格来最优化自己的行为，而在均衡时，这些预测都是对的。在一个含有不确定性的经济中，理性预期均衡会具有这样的一个特征：消费者和厂商可以出现预期错误，但是这些错误不会是系统性的。

四、一个具体例子

现在我们给出代表性消费者的具体效用函数形式为：

$$u(c_t) = \frac{c_t^{\theta}}{\theta} \qquad （7.30）$$

生产函数的具体形式为：

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t N_t)^{1-\alpha} \qquad （7.31）$$

这里，A_t 代表的是劳动深化型的技术进步，满足：

$$A_t = (1+g)^t A_0 \qquad (7.32)$$

其中，g 为一外生给定的常数，代表的是技术进步的速率，

A_0 给定。生产函数是标准的新古典生产函数。

同样的，出于简化分析的目的，我们也对有关变量做一些适当的处理。我们把所有涉及总量的变量都利用有效劳动进行标准化处理，例如，定义 $y_t \equiv \dfrac{Y_t}{A_t N_t}$ 为人均有效劳动的产量，$x_t \equiv \dfrac{c_t}{A_t}$ 为人均有效劳动的消费，等等。

在作了这样处理之后，社会计划者的最优化问题就成为：

$$\max_{\{x_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta(1+g)^{\theta}\right]^t \left(\frac{x_t^{\theta}}{\theta}\right) \quad （7.33）$$

$$s.t. \qquad x_t + (1+n)(1+g)k_{t+1} = k_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t \quad （7.34）$$

这个最优化问题能够被重新表述为一个以 k_t 为状态变量， x_t 和 k_{t+1} 为选择变量的动态规划问题。

也就是说，给定值函数$v(k_t)$，贝尔曼方程就是：

$$v(k_t)=\max_{x_t,k_{t+1}}\left[\frac{x_t^{\theta}}{\theta}+\beta(1+g)^{\theta}v(k_{t+1})\right] \qquad (7.35)$$

$$s.t. \qquad x_t+(1+n)(1+g)k_{t+1}=k_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t$$

在这里，需要注意的是，为了保证行为人一生效用的贴现值不发散，我们需要强行规定贴现因子必须小于 1，也即要求

$\beta(1+g)^{\theta}<1$。

代约束条件进目标函数，消掉x_t，有：

$$v(k_t)=\max_{k_{t+1}}\left\{\frac{\left[k_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t-(1+n)(1+g)k_{t+1}\right]^{\theta}}{\theta}+\beta(1+g)^{\theta}v(k_{t+1})\right\}$$

（7.36）

（7.36）式右边的最大化问题的一阶条件是：

$$-(1+n)(1+g)x_t^{\theta-1}+\beta(1+g)^{\theta}v'(k_{t+1})=0 \qquad (7.37)$$

让（7.36）式两边对k_t求偏导，并应用包洛定理，可以得到：

$$v'(k_t)=\left[\alpha k_t^{\alpha-1}+(1-\delta)\right]x_t^{\theta-1} \qquad (7.38)$$

现在，我们把上面这个等式往前挪一期，可以得到：

$$v'(k_{t+1}) = \left[\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] x_{t+1}^{\theta-1} \qquad (7.39)$$

代（7.39）进（7.37）式，并简化，可以得到如下的欧拉方程：

$$-(1+n)(1+g)^{1-\theta} x_t^{\theta-1} + \beta\left[\alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] x_{t+1}^{\theta-1} = 0 \qquad (7.40)$$

现在，我们来定义“平衡增长路径”，在平衡增长路径上，经济处于稳定状态，此时，$x_t = x_{t+1} = x^*$，$k_t = k_{t+1} = k^*$，且 x^* 和 k^* 是常数。

因为在平衡增长路径上，（7.40）式必须得到满足，因此，我们能借助该式求解k^*，即：

$$k^* = \left[\frac{\beta\alpha}{(1+n)(1+g)^{1-\theta} - \beta(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad （7.41）$$

同样，我们能用（7.34）式求解x^*：

$$x^* = \left[\frac{\alpha\beta}{(1+n)(1+g)^{1-\theta} - \beta(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\left[\frac{(1+n)(1+g)^{1-\theta} - \beta(1-\delta)}{\alpha\beta} - (1+n)(1+g) + (1-\delta)\right] \qquad （7.42）$$

同时，因为$y_t = k_t^{\alpha}$，因此，在平衡增长路径上，人均有效劳动的产出为：

$$y^* = (k^*)^{\alpha} = \left[\frac{\beta\alpha}{(1+n)(1+g)^{1-\theta} - \beta(1-\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad （7.43）$$

另外，储蓄率为：

$$s_t = \frac{K_{t+1} - (1-\delta)K_t}{Y_t} = \frac{k_{t+1}(1+n)(1+g) - (1-\delta)k_t}{k_t^{\alpha}} \qquad (7.44)$$

因此，在平衡增长路径上，储蓄率是：

$$s^* = (k^*)^{1-\alpha}\left[(1+n)(1+g) - (1-\delta)\right] \qquad (7.45)$$

利用（7.41）式，消掉k^*，可以得到均衡时的储蓄率为：

$$s^* = \frac{\alpha\beta\left[(1+n)(1+g)-(1-\delta)\right]}{(1+n)(1+g)^{1-\theta}-\beta(1-\delta)} \qquad (7.46)$$

现在，在这个考虑技术进步的具体例子中，我们可以看到，因为在平衡增长路径上，x^*，k^*和y^*都是常数，因而，总资本存量K_t，总消费$N_t c_t$和总产出Y_t，所有的都将以相同的速率$(n+g)$增长。

因此，总变量的长期增长率将完全由外生的人口增长率和技术进步率所决定；而人均变量的增长率则完全由技术进步率所决定。

参数$\beta, \alpha, \theta, \delta$的变化将不会影响长期经济增长率。

需要注意，参数$\beta,\alpha,\theta,\delta$中有任何一个发生变化，将会产生水平效应。例如，参数β的增加，将导致代表性消费者以更高的贴现因子把未来的效用贴现过来,这会导致储蓄率的增加(根据(7.46)式)，而根据（7.41）和（7.43）式可以知道，这又会增加k^*和y^*。

前面我们已经说明，$\beta(1+g)^{\theta}<1$，而这意味着稳定状态的k^*的增加将导致稳定状态的x^*增加。因此，参数β的增加，将导致长期中的产出水平、消费和资本增加。

习题

1. 考虑一个如下的新古典增长模型，其中，代表性的家庭的偏好由如下的效用函数给出：

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}$$

这里，$0 < \beta < 1$，c_t 是人均消费，$\gamma < 1$。人口以固定速率 n 增长，因此：

$$N_t = (1+n)^t N_0$$

这里，$N_0 > 0$。

生产技术由下述函数所代表：

$$Y_t = K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

这里，$0<\alpha<1$，Y_t 是总产出，K_t 是总资本存量。资本使用一期就完全折旧，初始资本存量是正的：$K_0>0$。

政府通过向家庭征收总额税的方式来为自己的购买融资，其数量为 gN_t，其中，$g>0$。出于简单化，我们假设政府把它所购买的商品均扔入大海里。

(1). 以动态规划的形式构建社会计划者的最优化问题。这一规划能被用作去求竞争均衡解吗？为什么可以或不可以？

(2). 求解均衡路径上的资本劳动比率、人均消费和储蓄率。

(3). 在第(2)部分的解是否依赖g？解释原因。