《中级宏观经济学》

主讲:**何樟勇**

浙江大学经济学院

2023年春

第三讲　微观基础2：两期动态模型

- 纯交换动态模型虽然可以帮助我们很好地理解行为人的储蓄行为，但是，如果我们想深入理解经济增长问题，我们必须考虑资本积累问题，因此，我们需要在两期模型中引入资本。

第二节
考虑资本的两期动态模型

一、决策环境：偏好、禀赋与技术

基本环境

- 经济由一个代表性的企业和一个代表性的消费者所组成，经济活动仅进行两期。消费者将决定最优的消费数量和储蓄数量（资本供给数量）；代表性企业将决定最合适的资本使用数量。消费者和企业的行为是竞争性的，也即他（她）们都是在视市场价格为既定的情况下来做决策的。消费者拥有企业。

偏好

我们仍用如下的一个简单的可分离效用函数来代表消费者的偏好：

$$v(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2) \qquad (3.1)$$

该效用函数具备在第一节中所描述的一切特征。

技术

出于简单考虑，我们假设厂商生产只需要资本不需要劳动。厂商根据如下的生产函数进行消费品的生产：

$$y = zf(k) \qquad (3.23)$$

其中，y 是产出，k 是资本投入，z 是全要素生产率参数。我们假设生产函数具有如下性质，即 $f'(k) > 0, f''(k) < 0$，同时，也满足稻田条件，即 $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$。

禀赋

代表性消费者在第一期期初拥有 k_0 单位的商品禀赋，这些商品既可以消费也可以作为资本使用，也即商品和资本之间是可以一对一转换的。同样，我们也规定初始资本只能租给企业而不能直接用于自己消费。

二、消费者最优化行为

- 需要注意，在目前这个模型里，我们并没有假设生产函数是规模报酬不变的，因而均衡时厂商的利润就可能不为零。因为我们曾假设厂商由消费者所拥有，所以，厂商的利润也将归消费者所有。但是，我们假定消费者在做决策时，是把利润看作外生变量的，也即，他（她）们并不知道自己的决策与利润之间的联系。这样，消费者在时期1和时期2的预算约束方程分别如下：

$$c_1 + s_1 = (1+r_1)k_1^s + \pi_1 \qquad (3.24)$$

$$c_2 = (1+r_2)s_1 + \pi_2 \qquad (3.25)$$

这里，k_1^s 表示消费者在第一期的资本供给。因为，我能已经强行规定初始资本只能租给企业而不能直接用于消费，因此，理性的消费者必然会把所有的初始资本都提供到第一期的资本市场上去。因而，一定有 $k_1^s = k_0$。s_1 是消费者在第一期的储蓄，这一储蓄也是第二期生产的资本来源，因此，它也代表了消费者在第二期的资本供给 k_2^s。

消费者面临的问题是在把利率r视为给定并且在预算的约束下，通过寻找一个合适的(c_1,c_2,s_1)组合来实现效用的最大化。我们可以把消费者面临的问题正规化地表述如下：

$$\max_{c_1,c_2,s_1}\{u(c_1)+\beta u(c_2)\} \qquad (3.26)$$

$s.t.$

$$c_1+s_1=(1+r_1)k_1^s+\pi_1$$

$$c_2=(1+r_2)s_1+\pi_2$$

我们可以通过构建拉格朗日函数来具体求解上述模型：

$$\ell = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda_1[(1+r_1)k_1^s + \pi_1 - c_1 - s_1] + \lambda_2[(1+r_2)s_1 + \pi_2 - c_2]$$

(3.27)

该最大化问题的一阶条件如下：

(FOC_{c_1}) $$u'(c_1) - \lambda_1 = 0 \quad (3.28)$$

(FOC_{c_2}) $$\beta u'(c_2) - \lambda_2 = 0 \quad (3.29)$$

(FOC_{s_1}) $$-\lambda_1 + (1+r_2)\lambda_2 = 0 \quad (3.30)$$

在这里，我们同样漏掉了对拉格朗日乘数 λ_1 和 λ_2 反应的一阶条件，因为我们知道他（她）们其实就是预算约束方程。

合并上述三个一阶条件，我们能得到一个如下的表达式：

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}=\beta(1+r_2) \qquad （3.31）$$

方程（3.31）与方程（3.10）完全相同，就是我们熟悉的欧拉方程。代预算约束方程（3.24）和（3.25）进方程（3.31），消掉c_1和c_2，我们可以看到，方程（3.31）实际上也是消费者的储蓄函数（资本供给函数）。

三、企业的最优化行为

企业的利润函数可以表述为：

$$\pi_1 = zf(k_1^d) - (1+r_1)k_1^d + (1-\delta)k_1^d \qquad (3.32)$$

$$\pi_2 = zf(k_2^d) - (1+r_2)k_2^d + (1-\delta)k_2^d \qquad (3.33)$$

其中，k_1^d 和 k_2^d 分别代表企业在第一期和第二期的资本需求，δ 代表折旧率。在这里，出于简单化考虑，我们仍旧假设 $\delta = 1$。

企业在把r_1、r_2视为外生给定的情况下，通过选择一个恰当的资本投入数量组合（k_1^d, k_2^d）来最大化利润。显然，这个最优化问题的两个一阶条件分别为：

$$zf'(k_1^d) = 1 + r_1 \tag{3.34}$$

$$zf'(k_2^d) = 1 + r_2 \tag{3.35}$$

对应于每一个实际利率 r，企业都会根据$zf'(k^d) = 1 + r$的原则选择一个相应的资本使用数量k^d。这意味着，企业的资本边际产出曲线也就是企业的资本需求曲线。

四、市场均衡

就我们目前分析的两期模型而言，价格有两个，即利率r_1、r_2；总共有三个市场必须出清：

第一个是第一期的资本市场，出清条件为：

$$k_1^s = k_0 = k_1^d \qquad (3.36)$$

第二个是第二期的资本市场，出清条件为：

$$k_2^s = k_2^d \qquad (3.37)$$

第三个是商品市场，出清条件为：

$$c_1+c_2=k_0+[zf(k_1^d)-k_1^d]+[zf(k_2^d)-k_2^d] \qquad （3.38）$$

（3.38）式右边的第一项为初始的资本存量；大括号中的两项分别表示第一期与第二期的净产出。根据（3.36）式所示的第一期资本市场出清的条件可知 $k_0=k_1^d$，因此，商品市场的出清条件可以进一步简化为：

$$c_1+c_2=zf(k_1^d)+zf(k_2^d)-k_2^d \qquad （3.39）$$

- 再一次，根据瓦尔拉斯定理，一个经济有n个市场，只要n－1个市场出清，剩余的一个市场自动会出清。因为其中一个市场可以被标准化。这里，我们就忽略商品市场出清条件。

现在，我们有八个未知数需要求解，它们分别是c_1、c_2、r_1、r_2、k_1^s、k_2^s、k_1^d和k_2^d。而相应的，我们也有两个预算约束条件、两个均衡条件、两个个资本供给函数、两个资本需求函数。八个方程组恰好可以求解八个未知数。

如果我们假设效用函数和生产函数的具体形式如下：

$$u(c_t) = \ln(c_t) \qquad (3.11')$$

$$y = zf(k) = zk^{\alpha} \qquad (3.40)$$

我们可以求解出均衡时具体的解析解，它们各自为：

$$r_1^* = \alpha z k_0^{\alpha-1} - 1 \qquad (3.41)$$

$$r_2^* = z\alpha\left[\frac{\alpha\beta z k_0^{\alpha}}{1+\alpha\beta}\right]^{\alpha-1} - 1 \qquad (3.42)$$

$$c_1^* = \frac{z k_0^{\alpha}}{1+\alpha\beta} \qquad (3.43)$$

$$c_2^* = z\left[\frac{\alpha\beta z k_0^{\alpha}}{1+\alpha\beta}\right]^{\alpha} \qquad (3.44)$$

$$k_1^* = k_0 \qquad (3.45)$$

$$k_2^* = \frac{\alpha\beta z k_0^{\alpha}}{1+\alpha\beta} \qquad (3.46)$$

一旦我们求得了两期各自的均衡利率和均衡资本使用数量，代这些均衡解进两期的利润函数中，我们也可以进一步求得两期的最大利润，分别为：

$$\pi_1^* = z(1-\alpha)k_0^\alpha \tag{3.47}$$

$$\pi_2^* = z(1-\alpha)\left(\frac{\alpha\beta z k_0^\alpha}{1+\alpha\beta}\right)^\alpha \tag{3.48}$$

五、计划最优

计划者在资源的约束下最大化消费者的最大效用。

计划者实际上就是通过求解如下一个问题来实现效用的最大化：

$$\max_{c_1,c_2,k}\{u(c_1)+\beta u(c_2)\} \qquad (3.49)$$

$s.t.$

$$c_1 = zf(k_0)-k_2 \qquad (3.50)$$

$$c_2 = zf(k_2) \qquad (3.51)$$

利用预算约束条件替换掉目标函数中的c_1和c_2，上述最优化问题可简化为：

$$\max_{k_2}\{u(zf(k_0)-k_2)+\beta u(zf(k_2))\} \qquad (3.52)$$

该最优化问题的一阶条件为：

$$-u'(zf(k_0)-k_2)+z\beta u'(zf(k_2))f'(k_2)=0 \qquad (3.53)$$

方程（3.53）实际就是我们熟悉的欧拉方程。

和上面一样，一旦我们给定具体的效用函数和生产函数，利用欧拉方程和两个预算约束条件组成的方程组，我们能进一步求得计划最优的解：

$$c_1^* = \frac{zk_0^\alpha}{1+\alpha\beta} \qquad (3.54)$$

$$c_2^* = z\left[\frac{\alpha\beta zk_0^\alpha}{1+\alpha\beta}\right]^\alpha \qquad (3.55)$$

$$k_1^* = k_0$$

$$k_2^* = \frac{\alpha\beta zk_0^\alpha}{1+\alpha\beta} \qquad (3.56)$$

- 注意，我们通过社会计划方式得到的最优解与通过市场的方式产生的解是完全相同的。也就是说，在我们的这个简单的模型里，竞争均衡解与计划最优解（帕累托最优）是完全相同的。

作业

1. 在讲义中，我们假设行为人在初始时拥有外生给定的资本k_0，并且这些资本是不能直接用于消费的。现在如果我们取消资本不能直接用于消费这一强制性规定（这样，第一期的收入就不需要自己去生产了）。效用函数与生产函数的具体形式仍与讲义中的相同，试求每一期的均衡数量解和价格解。