

1 Grundlagen

Allgemeines

$$x^k \bmod p \equiv (x \bmod p)^{k \bmod \varphi(p)} \bmod p$$
$$\gcd(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$$

Berechnung der Stellenzahl

Die Anzahl  $a$  der Ziffern der  $b$ -adischen Darstellung einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  berechnet sich wie folgt:

$$a = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n = 0 \\ \lfloor \log_b n \rfloor + 1, & \text{wenn } n \geq 1 \end{cases}$$

Teilbarkeit

Zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  werden als teilerfremd bezeichnet, wenn  $\gcd(a, b) = 1$  ist.

Ordnung

Die Ordnung eines Gruppenelementes  $g$  einer Gruppe  $(G, \cdot)$  ist die kleinste natürliche Zahl  $n > 0$  für die gilt  $g^n = e$ , wobei  $e$  das neutrale Element der Gruppe ist.

**Multiplikative Ordnung**  $\text{ord}_m(a)$  ist die multiplikative Ordnung modulo  $m$  des Elementes  $a$ , d.h. der kleinste positive Exponent  $n$  für den gilt:

$$x^n \equiv 1 \pmod{m}$$

Eine Erweiterung dessen ist:

$$\text{ord}(x^l) = \frac{\text{ord}(x)}{\gcd(\text{ord}(x), l)}$$

**Primzahlen** Die Ordnung für Primzahlen lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\text{ord}(p) = \varphi(p) = p - 1$$

1.1 Multiplikative Inverse

Das Multiplikative Inverse von  $a$  im Modul  $m$  lässt sich mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen. Der Algorithmus liefert die Linearkombination

$$\gcd(a, m) = u \cdot a + v \cdot m = 1$$

wenn  $a$  und  $m$  teilerfremd sind. Somit lässt sich das Inverse dann einfach ablesen:

$$a^{-1} \equiv u \bmod m$$

1.2 Eulersche Phi-Funktion

Die Eulersche Phi-Funktion gibt an, wie viele ganze Zahlen teilerfremd zu  $n$  sind. Wenn  $p$  eine Primzahl ist dann kann man folgende aussagen treffen:

$$\varphi(p) = p - 1$$
$$\varphi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p - 1)$$
$$\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$
$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Wobei  $p|n$ , die Primfaktoren der Zahl  $n$  sind.

1.3 Kontravalenz

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

1.4 Diskreter Logarithmus

Der diskrete Logarithmus ist die kleinste Lösung für  $x$  der Gleichung  $a^x \equiv m \bmod p$  mit  $m, a \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}_p$ . Da sich die diskrete Exponentiation leicht berechnen lässt, gilt das nicht für die Umkehrfunktion. (*Diffie-Hellman-Annahme*) Aufgrund dessen wird diese Einwegfunktion. a. im Diffie-Hellman-Key-Exchange, der ElGamal-Encryption und vielem mehr eingesetzt. Jedoch ist diese Funktion ungeeignet für Verschlüsselungsmethoden, da es keine "Falltürkum entschlüsselt gibt.

1.5 Modulares Potenzieren

Seien  $x, k, m \in \mathbb{N}$ , gesucht ist  $z = x^k \bmod m$

- 1. Binärdarstellung von  $k$
- 2. Ersetzen jeder 0 durch **Q** und jeder 1 durch **QM**
- 3. Dabei wird **Q** als Anweisung zum *Quadrieren* und **M** als Anweisung zum *Multiplizieren* mit der Basis  $x$  aufgefasst.
- 4. Begonnen wird mit 1 bzw. kann die erste **QM** Anweisung durch  $x$  substituiert werden.

1.6 Chinesischer Restsatz

Seien  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  paarweise teilerfremd, dann hat das System von Kongruenzen eine eindeutige Lösung  $x \in \mathbb{Z}_m$ , wobei  $m = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$  das Produkt der einzelnen Module ist.

$$x \equiv a_1 \bmod m_1, \dots, x \equiv a_n \bmod m_n$$

Eine Lösung  $x$  kann wie folgt ermittelt werden:

$$x = \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot M_i \cdot N_i \right) \bmod m$$

mit folgenden Voraussetzungen:

$$m = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$$
$$M_i = \frac{m}{m_i}$$
$$N_i = M_i^{-1} \bmod m_i$$

1.7 Euklidischer Algorithmus

Setze  $r_0 := a, r_1 := b$

$$\begin{aligned} r_0 &= q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n + 0 \end{aligned}$$

Erweiterung

$x_0 = 1$	$x_1 = 0$	$y_0 = 0$	$y_1 = 1$
$x_2 = x_0 - q_2 \cdot x_1$		$y_2 = y_0 - q_2 \cdot y_1$	
$x_3 = x_1 - q_3 \cdot x_2$		$y_3 = y_1 - q_3 \cdot y_2$	
$x_n = x_{n-2} - q_n \cdot x_{n-1}$		$y_n = y_{n-2} - q_n \cdot y_{n-1}$	

dann gilt  $x_n a + y_n b = \gcd(a, b)$ .

1.8 Primitivwurzeln

Eine ganze Zahl  $a$  ist eine Primitivwurzel modulo  $m$  wenn gilt dass die Ordnung von  $a$  modulo  $m$  gleich der Gruppenordnung der primen Restklassengruppe ist:

$$\text{ord}_m(a) = \varphi(m)$$

**Primitivwurzeltest** Um festzustellen, ob eine Zahl  $g$  eine Primitivwurzel in der Restklassengruppe  $\mathbb{Z}_p^*$  mit  $p$  ist Primzahl ist, führe man folgende Schritte aus:

- 1. Primfaktorzerlegung von  $p - 1$ :  
 $p - 1 = p_1 \cdot \dots \cdot p_i$
- 2. Prüfe für alle  $q \in \{p_1, \dots, p_i\}$  ob gilt  $g^{(p-1)/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$
- 3. Sollten demnach alle Primfaktoren ungleich 1 mod  $p$  sein, dann ist  $g$  eine Primitivwurzel.

Falls  $g$  eine Primitivwurzel von  $\mathbb{Z}_p^*$  ist, dann ist auch  $a = g^t$  eine Primitivwurzel von  $\mathbb{Z}_p^*$  genau dann wenn gilt:  $\gcd(t, \varphi(p)) = 1$ . Somit lässt sich folgendes aussagen:

$$\gcd(t, \varphi(p)) = 1 \Rightarrow \langle g^t \rangle = \mathbb{Z}_p^*$$

2 Verschlüsselungsalgorithmen

2.1 Asymetrische Verfahren

2.1.1 RSA

Schlüsselerzeugung

- 1. Wähle zwei große Primzahlen  $p, q$  mit  $p \neq q$  und vorgegebener Bitlänge  $k$ .
- 2. Berechne  $n = p \cdot q$ .
- 3. Berechne  $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
- 4. Wähle  $e \in \{3, \dots, \varphi(n) - 1\}$ , wobei  $\gcd(e, \varphi(n)) = 1$ .  
Hier macht es sinn eine Zahl  $e$  zu wählen welche in der Binärdarstellung viele 0 hat, da dass Modulare Potenzieren so weniger Multiplikationen besitzt.
- 5. Berechne mit Hilfe des erweiterten Euklid das zu  $e$  multiplikativ-inverse Element  $d$  bezüglich  $\varphi(n)$ :  
 $\gcd(e, \varphi(n)) = 1 = e \cdot d + k \cdot \varphi(n)$
- 6.  $(pk, sk) \leftarrow ((n, e), (n, d))$ .

Verfahren

$$\text{ENC}(pk, m) = m^e \bmod n$$

$$\text{DEC}(sk, c) = c^d \bmod n$$

$$\text{SIG}(sk, m) = m^d \bmod n$$

$$\text{VER}(pk, m, \sigma) = 1 : \Leftrightarrow m = \sigma^e \bmod n$$

**Verschlüsselung mit RSA-OAEP** Die RSA-OAEP (*optimal asymmetric encryption padding*) Variante ist gegen deterministische Angriffe sicher! Die Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$  sind Hashfunktionen.

**Verschlüsselung**

1. Wähle  $r$  zufällig

2. Berechne  
 $x = m \oplus g(r)$  und  $y = r \oplus h(x)$

3. Verschlüssele  
 $\text{ENC}_{\text{OAEP}}(pk, m) = (x||y)^e \bmod n$

**Entschlüsselung**

1. Rekonstruiere  $(x||y) = \text{DEC}(sk, c)$

2. Rekonstruiere  $r$  mit  $r = y \oplus h(x)$

3. Berechne  $m$  mit  $m = x \oplus g(r)$

**Signieren und Entschlüsseln mit dem Chinesischen Restsatz**

$$i = \begin{cases} c & \text{für Entschlüsseln} \\ m & \text{für Signieren} \end{cases}$$
$$o = \begin{cases} m & \text{für Entschlüsseln} \\ s & \text{für Signieren} \end{cases}$$

1.  $d_p = d \bmod (p-1)$  ,  $d_q = d \bmod (q-1)$

2.  $i_1 = i^{d_p} \bmod p$  ,  $i_2 = i^{d_q} \bmod q$

3.  $h = \begin{cases} q^{-1} \cdot (i_1 - i_2) & \text{falls } i_1 > i_2 \\ q^{-1} \cdot (i_1 - i_2 + p) & \text{falls } i_1 < i_2 \end{cases}$

4.  $h = h \bmod p$

5.  $o = i_2 + (h \cdot q)$

**2.1.2 ElGamal Schlüsselerzeugung**

1. Wähle eine große Primzahlen  $p$  mit vorgegebener Bitlänge  $k$

2. Suche eine Primitivwurzel  $g$  in der Gruppe  $\mathbb{Z}_p$

3. Wähle einen zufälligen Exponenten  $x \in \{2, \dots, p-2\}$

4. Berechne  $y = g^x \bmod p$

5.  $(pk, sk) \leftarrow ((p, g, y), (p, g, x))$

**Verfahren**

$k \in \{1, \dots, p-2\}$  wird für jedes Verfahren erneut zufällig gewählt.

$$\text{ENC}(pk, m) = ((g^k), (y^k \cdot m)) \pmod p$$
$$\text{DEC}(sk, (g^k, c)) = (g^k)^{p-1-x} \cdot c \pmod p$$
$$\text{SIG}(sk, m) = (s_1, s_2)$$
$$\text{VER}(pk, m, \sigma) = 1 : \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

Für SIG gilt zudem dass  $\text{gcd}(k, p-1) = 1$

$$s_1 := g^k \bmod p$$
$$s_2 := k^{-1} \cdot (m - a \cdot x) \bmod (p-1)$$

Für VER gilt zudem dass  $1 \leq s_1 \leq p-1$

$$v_1 := g^m \bmod p$$
$$v_2 := y^{s_1} \cdot s_1^{s_2} \bmod p$$

**2.2 Symmetrische Verfahren**

**2.2.1 DES**

Struktur	Feistelchiffre
Schlüssellänge	56 Bit
Blocklänge	64 Bit
Rundenanzahl	16

**2.2.2 AES**

Struktur	Substitutionschiffre
Schlüssellänge	128, 192 oder 256 Bit
Blocklänge	128 Bit
Rundenanzahl	10, 12 oder 14

**2.3 Blockverschlüsselung**

Blockorientiert	Stromorientiert
ECB	CFB
CBC	OFB

Stromorientierte Betriebsarten erfordern kein Padding das Klartextes, und unterstützen keine asymetrische Verschlüsselung. Um einen Klartext  $m$  verschlüsseln zu können muss diser in Blöcke der Länge  $r \leq n$  eingeteilt werden. Dabei ist  $n$  die Blocklänge des Verschlüsselungsverfahren,  $r$  die Länge der Klartextblöcke.  $m_i$  bezeichnet dabei einen Block des Klartextes  $m$ .

$n$  = Die Blocklänge des Verschlüsselungsverfahren

$r$  = Die Blocklänge der Nachrichtenfragmente

**2.3.1 ECB**

$$r = n$$
$$c_i = \text{ENC}_k(m_i)$$
$$m_i = \text{DEC}_k(c_i)$$

**Übertragungsfehler**

**Bitfehler** in  $c_i \Rightarrow m_i$  ist zufällig, alle anderen werden korrekt entschlüsselt.

**Verlust** von  $c_i \Rightarrow m_i$  ist verloren, alle anderen werden korrekt entschlüsselt.

**Angriff** ist möglich da gleiche verschlüsselte Blöcke die selbe Nachricht enthalten.

**2.3.2 CBC**

$$r = n$$
$$c_0 = \text{Initialisierungsvektor}$$
$$c_i = \text{ENC}_k(m_i \oplus c_{i-1})$$
$$m_i = \text{DEC}_k(c_i) \oplus c_{i-1}$$

**Übertragungsfehler**

**Bitfehler** in  $c_i \Rightarrow m_i$  ist zufällig und  $m_{i+1}$  hat den Bitfehler an gleicher Stelle wie  $c_i$ , alle anderen werden korrekt entschlüsselt.

**Verlust** von  $c_i \Rightarrow m_i$  ist verloren und  $m_{m+1}$  ist zufällig,  $m_{i+2}$  und folgende werden korrekt entschlüsselt.

**Angriff** ist nicht möglich.

**2.3.3 CFB**

$$r \geq 1$$
$$n \geq r$$
$$x_0 = \text{Initialisierungsvektor}$$
$$x_{i+1} = \text{lsb}_{n-r}(x_i) || c_i$$
$$c_0 = x_0$$
$$c_i = m_i \oplus \text{msb}_r(\text{ENC}_k(x_i))$$
$$m_i = c_i \oplus \text{msb}_r(\text{DEC}_k(x_i))$$

**Übertragungsfehler**

**Bitfehler** in  $c_i \Rightarrow m_i$  hat den Bitfehler an gleicher Stelle wie  $c_i$ , und alle folgenden  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$  Blöcke sind zufällig.

**Verlust** von  $c_i \Rightarrow m_i$  ist verloren, und alle folgenden  $\lceil \frac{n}{r} \rceil$  Blöcke sind zufällig.

**Angriff** ist nicht möglich.

**2.3.4 OFB**

$$r \geq 1$$
$$n \geq r$$
$$x_0 = \text{Initialisierungsvektor}$$
$$x_{i+1} = \text{ENC}_k(x_i)$$
$$c_0 = x_0$$
$$c_i = m_i \oplus \text{msb}_r(x_i)$$
$$m_i = c_i \oplus \text{msb}_r(x_i)$$

**Übertragungsfehler**

**Bitfehler** in  $c_i \Rightarrow m_i$  hat den Bitfehler an gleicher Stelle wie  $c_i$ .

**Verlust** von  $c_i \Rightarrow m_i$  ist verloren, und alle folgenden Blöcke sind zufällig (korrigierbar).

**Angriff** ist nicht möglich.

**2.3.5 CTR**

$$r \geq 1$$
$$n \geq r$$
$$ctr_i = \text{Initialisierungsvektor}$$
$$c_i = m_i \oplus \text{ENC}_k(ctr_i)$$
$$m_i = c_i \oplus \text{ENC}_k(ctr_i)$$

**Übertragungsfehler**

**Bitfehler** in  $c_i \Rightarrow m_i$  hat den Bitfehler an gleicher Stelle wie  $c_i$ .

**Verlust** von  $c_i \Rightarrow m_i$  ist verloren, und alle folgenden Blöcke sind korrekt.

**Angriff** ist nicht möglich.

Vorteile zum OFB: Wahlfreien Zugriff auf jeden verschlüsselten Block und ENC und DEC können parallel durchgeführt werden.

3 Angriffe gegen Verschlüsselungsalgorithmen

3.1 RSA  
Common-Modulus-Attack

Möglich wenn die selbe Nachricht mit zwei unterschiedlichen Exponenten verschlüsselt wird, jedoch die Primfaktoren identisch sind. Die beiden Exponent sind dabei jedoch teilerfremd zu einander sind.

$pk$	$c$	$m$
$(n, e_1)$	$c_1 = m^{e_1} \bmod n$	$m$
$(n, e_2)$	$c_2 = m^{e_2} \bmod n$	$m$

- 1. Berechne mit dem erweiterten Euklid  $a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = 1$ .  
 $a$  oder  $b$  wird negativ sein.
- 2. Berechne nun folgendes:

$$\begin{aligned} m &= m^1 \\ &= m^{a \cdot e_1 + b \cdot e_2} = (m^{e_1})^a \cdot (m^{e_2})^b \\ &= (c_1)^a \cdot (c_2)^b \bmod n \end{aligned}$$

- 3. Der negative Exponent kann nun auch wie folgt geschrieben werden:  
 $x^{-2} = (x^{-1})^2$  wobei  $x^{-1}$  dem Inversen entspricht.
- 4. Sollte es kein Inverses geben (d.h.  $\gcd(c_{1|2}, m) \neq 1$ ) dann lassen sich die Primfaktoren wie folgt berechnen:

$$n = \underbrace{\gcd(c_{1|2}, m)}_p \cdot \underbrace{\frac{n}{p}}_q$$

Low-Encryption-Exponent-Attack

Möglich bei einem kleinen Abstand zwischen den Primfaktoren von  $n$ .

- 1.  $x = \lceil \sqrt{n} \rceil$
- 2.  $y = \sqrt{x^2 - n}$
- 3.  $\begin{cases} \text{gehe zu 2} & \text{wenn } y \text{ nicht ganzzahlig} \\ \text{gehe zu 4} & \text{wenn } y \text{ ganzzahlig} \end{cases}$
- 4.  $p = x + y, q = x - y$

Small-Message-Space-Attack

Wenn die Anzahl der möglichen Nachrichten klein ist und der mögliche Inhalt im Voraus

bekannt ist, dann kann der Angreifer eine Liste führen, in welcher die möglichen Nachrichten zusammen mit dem  $pk$ -verschlüsselten Nachricht aufgeführt werden. Sollte dann eine Nachricht abgefangen werden, muss lediglich in der Liste gesucht werden. Durch den Einsatz von OAEP (Optimal Asymmetric Encryption Padding) kann dies verhindert werden.

3.2 ElGamal  
Berechnungen

Ermitteln von  $k$ , wenn es mehrmals benutzt wurde um eine Nachricht zu signieren:

$$k = (s_{2_1} - s_{2_2})^{-1} \cdot (m_1 - m_2) \bmod (p - 1)$$

Bei bekannten  $k$  das  $x$  berechnen (Funktioniert nur, wenn das Inverse existiert):

$$x = s_1^{-1} \cdot (m - sk) \bmod (p - 1)$$

Existenzielles Fälschen

- 1. Wähle  $c$  zufällig mit  $\gcd(c, p - 1) = 1$
- 2. Wähle  $b$  zufällig
- 3.  $s_1 = g^b \cdot y^c$
- 4.  $s_2 = -s_1 \cdot (c^{-1}) \bmod (p - 1)$
- 5.  $m = -s_1 \cdot b \cdot (c^{-1}) \bmod (p - 1)$

Angriff mit Bleichenbacher

Falls eine Signatur  $(s_1, s_2)$  zur Nachricht  $m$  bekannt ist kann wie folgt eine Signatur gefälscht werden:

- 1. Berechne  $m^{-1} \bmod (p - 1)$
- 2. Wähle eine zufällige Nachricht  $m'$
- 3.  $u = m' \cdot m^{-1} \bmod (p - 1)$
- 4.  $v = s_1 \cdot u \bmod (p - 1)$
- 5.  $s'_1 = (s_1 \cdot (p - 1)^2) + (v \cdot p) \bmod (p \cdot (p - 1))$  Chinesischer Restsatz
- 6.  $s'_2 = s_2 \cdot u \bmod (p - 1)$

Das Ergebnis:  $(m', s'_1, s'_2)$ , dabei ist zu beachten das  $m'$  nicht  $\bmod p$  genommen wird, d.h. es größer als  $p$ . Ohne den ersten Schritt in der Verifizierung ( $1 \leq s_1 \leq p - 1$ ) wäre diese Signatur gültig.

4 Hashfunktionen

Hashfunktionen sind Funktionen die von einer großen, potentiell unbeschränkten Menge in eine kleinere Menge abbilden, also:

$$h_k : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^k$$

4.1 Sicherheitseigenschaften

4.1.1 Starke Kollisionsresistenz

Die Kollisionsresistenz (*collision resistance*) bedeutet dass, es praktisch unmöglich ist zwei verschiedene Eingabewerte  $x$  und  $x'$  zu finden, die denselben Hashwert ergeben.

$$x \neq x', h(x) = h(x')$$

4.1.2 Einwegeigenschaft

Die Einwegeigenschaft (*pre-image resistance*) bedeutet dass, es praktisch unmöglich ist zu einem Hashwert  $y$  einen Eingabewert  $x$  zu finden, den die Hashfunktion auf  $y$  abbildet.

$$h(x) = y$$

4.1.3 Schwache Kollisionsresistenz

Einen Zwischenschritt zwischen Kollisionsresistenz und Einwegeigenschaft stellt die schwache Kollisionsresistenz (*second preimage resistance*) dar, dass bedeutet das es praktisch unmöglich ist zu einem gegebenen Eingabewert  $x$  einen davon verschieden Eingabewert  $x'$  zu finden, der den selben Hashwert ergibt.

$$x \neq x', h(x) = h(x')$$

4.2 Angriffe

Kollisionsresistenz

**Starke Kollisionsresistenz** Der Angreifer generiert eine zufällige Nachricht und berechnet für diese den Hashwert. Nach etwa  $n^{\frac{2}{3}}$  Nachrichten kann davon ausgegangen werden das der Angreifer eine Kollision findet.

Aufgrund dessen ist die Hashfunktion MD5 nicht mehr sicher, da diese eine Länge  $n = 128$  hat.

**Schwache Kollisionsresistenz** Der Angreifer generiert eine zufällig Nachricht und berechnet für diese den Hashwert und vergleicht diesen mit einem vorgegebenen Hashwert. Nach  $2^n$  Nachrichten kann davon ausgegangen werden das der Angreifer eine Nachricht findet welche den selben Hashwert besitzt.

Diesbezüglich ist die Hashfunktion MD5 immernoch sicher.

4.3 Modification Detection Code

*Modification Detection Code* (MDC) ist ein Hashwert, welcher der Integritätsprüfung dient.

Nachrichten Integritätsprüfung

- Asymmetrisch: Signatur
- Symmetrisch: MAC

4.4 Message Authentication Code

*Message Authentication Codes* (MAC) sind ein symmetrisches Verfahren, um die Authentizität einer Nachricht sicherzustellen. Hierzu gibt es einen Signatur- und einen Verifikationsalgorithmus welche beide eine gemeinsames Geheimnis benötigen.

4.4.1 Hash-MAC

Um einen HMAC  $\sigma$  zu prüfen, erstellt der Empfänger selbst einen HMAC und prüft, ob diese identisch ist zu  $\sigma$ .

$$opad = 0x5C \quad ipad = 0x36$$

$$\text{SIG}(k, m) = h((k \oplus opad) || h((k \oplus ipad) || m))$$

4.4.2 CBC-MAC

Das Verfahren ist zu großen Teilen identisch mit dem normalen CBC-Verfahren, jedoch ist der Initialisierungsvektor fest. Der letzte Geheimtext ist der eigentliche MAC Code.

Zu beachten ist jedoch das diese Verfahren zum einen **symmetrisch** ist und zum anderen die **Länge für die Nachrichten festgesetzt** ist.

4.5 Gebrochene Algorithmen

Algorithmus	Gebrochene Eigenschaft
MD5	starke Kollisionsresistenz
SHA-1	starke Kollisionsresistenz

5 Protokolle

5.1 Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch

Alice und Bob haben einen gemeinsamen öffentlichen Schlüssel  $(p, g)$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist und  $g$  eine Primitivwurzel von  $\mathbb{Z}_p$ .

1. Alice wählt zufälliges  $a \in [0; p - 2]$  und berechnet  $c = g^a \bmod p$  und übermittelt  $c$  an Bob.
2. Bob wählt zufälliges  $b \in [0; p - 2]$  und berechnet  $d = g^b \bmod p$  und übermittelt  $d$  an Alice.
3. Alice berechnet nun  $k = d^a \bmod p$
4. Bob berechnet nun  $k = c^b \bmod p$

5.2 Station-to-Station-Protokoll

Eine Erweiterung des Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch um einen Man-in-the-Middle-Angriff auszuschließen.

1. Alice wählt zufälliges  $a \in [0; p - 2]$  und berechnet  $c = g^a \bmod p$  und übermittelt  $c$  an Bob.
2. Bob wählt zufälliges  $b \in [0; p - 2]$  und berechnet  $k = g^{ab} \bmod p$
3. Bob sendet nun  $g^b$  sowie  $z = \text{ENC}_k(s)$  mit  $s = \text{SIG}_{sk_B}(g^a || g^b)$
4. Alice  $k = g^{ab} \bmod p$  und  $s = \text{DEC}_k(z)$  sowie  $\text{VER}((g^a || g^b), s, pk_B)$
5. Alice sendet nun  $z = \text{ENC}_k(s)$  mit  $s = \text{SIG}_{sk_A}(g^b || g^a)$
6. Bob entschlüsselt  $s = \text{DEC}_k(z)$  und verifiziert  $\text{VER}((g^b || g^a), s, pk_A)$

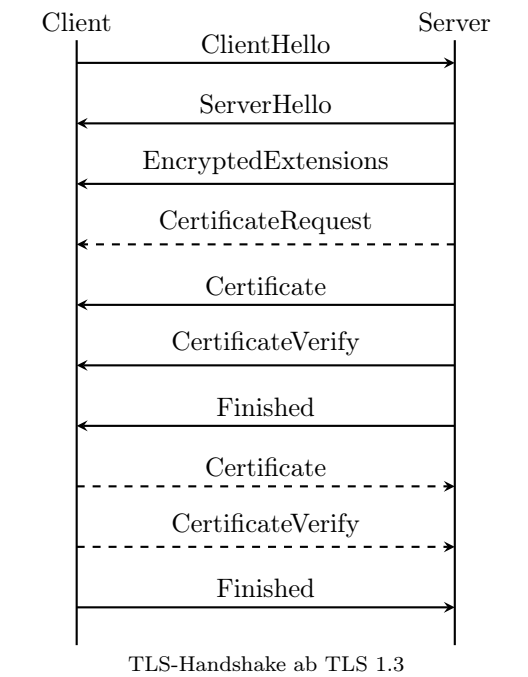
Sollte die letzte Überprüfung korrekt sein, dann ist ein gemeinsamer Schlüssel gewählt.

5.3 SSL und TLS

TLS (*Transport Socket Layer*) ist eine Weiterentwicklung des von Netscape entwickelten Protokolls SSL (*Secure Socket Layer*). Das Protokoll besteht aus 5 Teilprotokollen. TLS setzt auf die Transportschicht des OSI-Modell auf. Dadurch kann TLS unabhängig von Anwendungen auf TCP aufgesetzt werden. Den Teilprotokollen kommen dabei verschiedene Funktionen zu:

- Das *TLS Handshake Protocol* initialisiert die Verschlüsselung. Dieses Protokoll führt den Schlüsselaustausch durch.
- Das *TLS Change Cipher Spec Protocol* enthält bloß ein Byte mit dem Inhalt „1“. Dies dient dazu, die ausgehandelte Verschlüsselung zu aktivieren.
- Das *TLS Alert Protocol* meldet Fehler, die im Betrieb aufgetreten sind.
- Das *TLS Record Protocol* ist ein Dummy-Protokoll, dass die Daten der Anwendungen weiterreicht.
- Das *TLS Application Data Protocol* dient dazu, Daten mit den ausgehandelten Konfigurationen zu verschlüsseln.

5.3.1 TLS-Handshake



Die hervorgehobenen Nachrichten nur bei der Client-Authentifizierung.

**ClientHello** Enthält die unterstützten:

- TLS-Versionen
- Cipher-Suites
- Signaturverfahren
- Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH) Gruppen oder Ephemeral Diffie-Hellman (EDH) Gruppen
- Diffie-Hellman *key shares*
- Referenzen auf Pre-shared keys (PSK)
- 32-Bit `client_random`

**ServerHello** enthält die ausgewählte:

- TLS-Version
- Cipher-Suite (Server wählt die stärkste)
- ECDH Gruppe oder EDH Gruppe
- Referenze auf PSK
- 32-Bit `server_random`

**EncryptedExtensions**

- `max_fragment_size`
- `cookies`
- `certificate_authorities`

**Certificate** Server (bzw. Client) schickt seinen öffentlichen Schlüssel in einem Zertifikat, der Client (bzw. Server) prüft das Zertifikat.

**CertificateVerify** Der Server (bzw. Client) schickt seine Unterschrift auf das Transkript der vorangegangenen Handshake-Nachrichten. Die Challenge `client_random` des Clients (bzw. die challenge `server_random` des Servers) ist im Transkript enthalten und wird damit mit unterschrieben.

**Finished** Sie enthalten jeweils einen mit dem gemeinsamen Geheimnis gebildeten MAC über alle vorher beim handshake ausgetauschten Nachrichten. Mit diesen MACs können Client und Server die Integrität und den Absender aller Nachrichten im Handshake verifizieren.

6 Primzahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417