Etude du phénomène d’embouteillage automobile fantôme. (Phantom Traffic Jam)

Louis ROMAIN, Clément PREVOT

Introduction au sujet

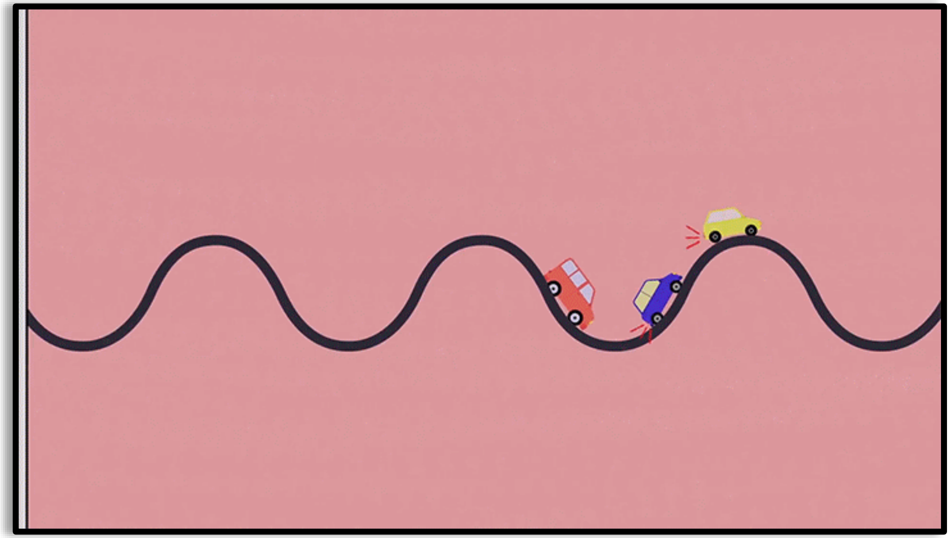


Illustration: TED-Ed

Pourquoi ce phénomène se produit-il ?

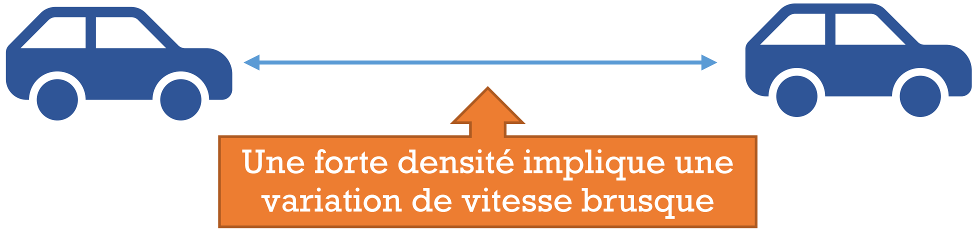
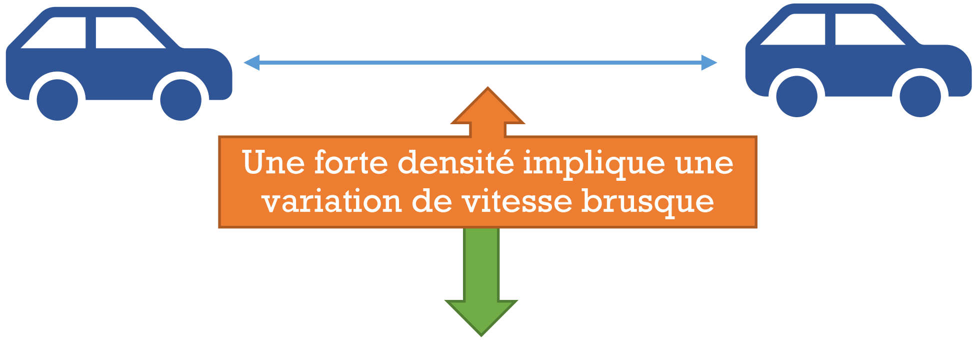
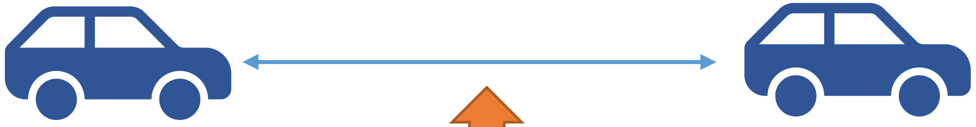



Illustration: TED-Ed



Temps de réaction de l'Homme + forte densité de véhicules = Accélération brusque

Illustration: TED-Ed

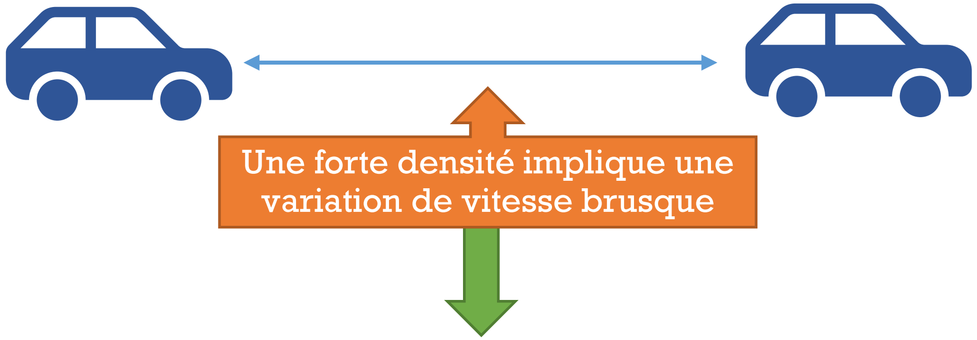


Une forte densité implique une variation de vitesse brusque

Temps de réaction de l'Homme + forte densité de véhicules = Accélération brusque

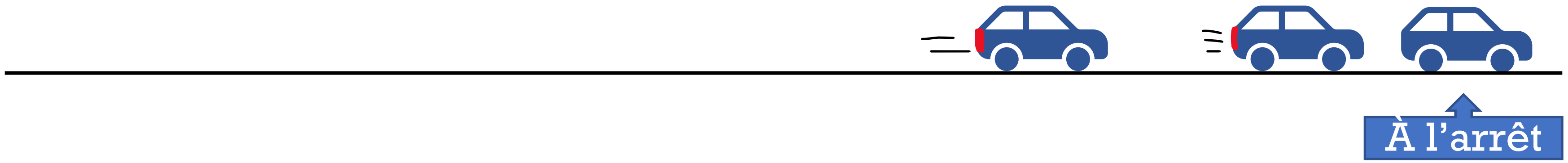
Illustration: TED-Ed

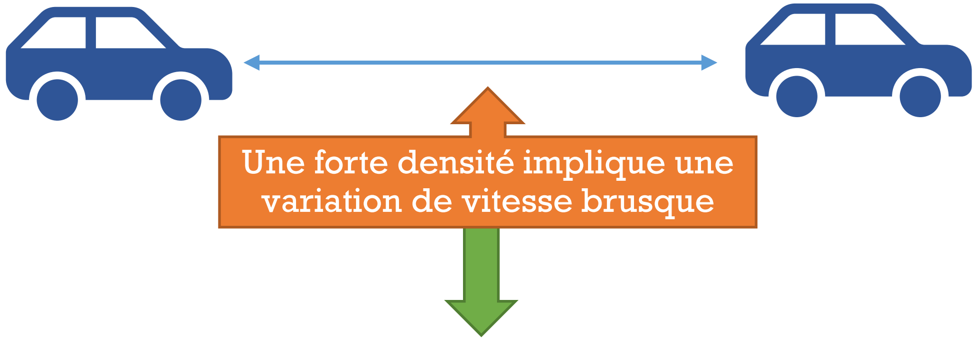
À l'arrêt



Temps de réaction de l'Homme + forte densité de véhicules = Accélération brusque

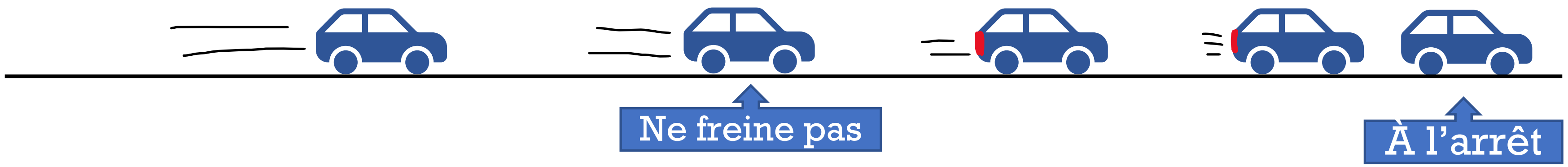
Illustration: TED-Ed





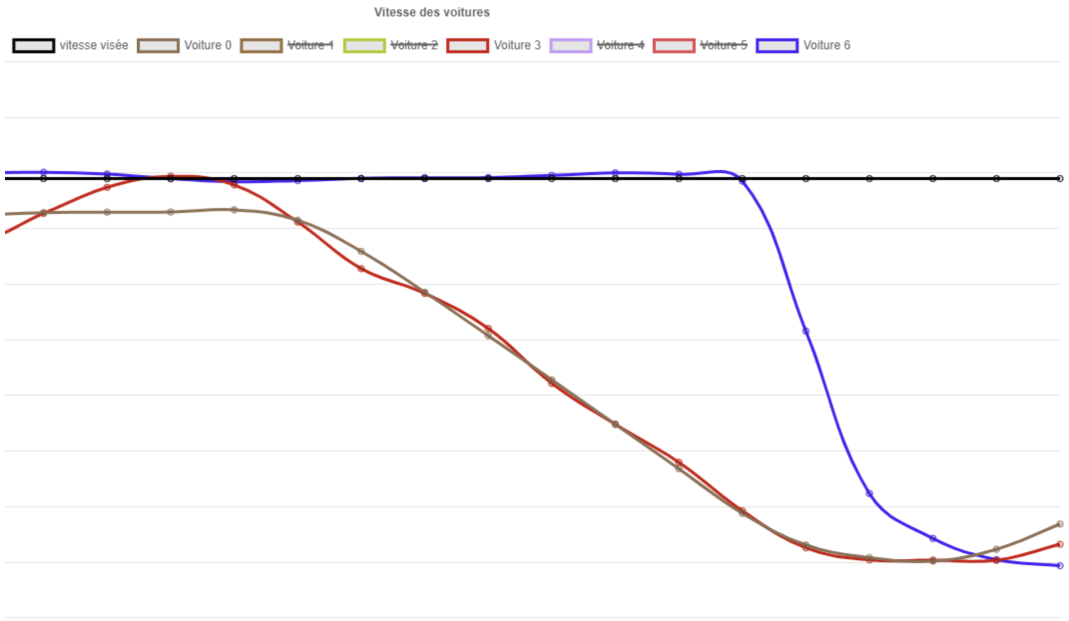
Temps de réaction de l'Homme + forte densité de véhicules = Accélération brusque

Illustration: TED-Ed



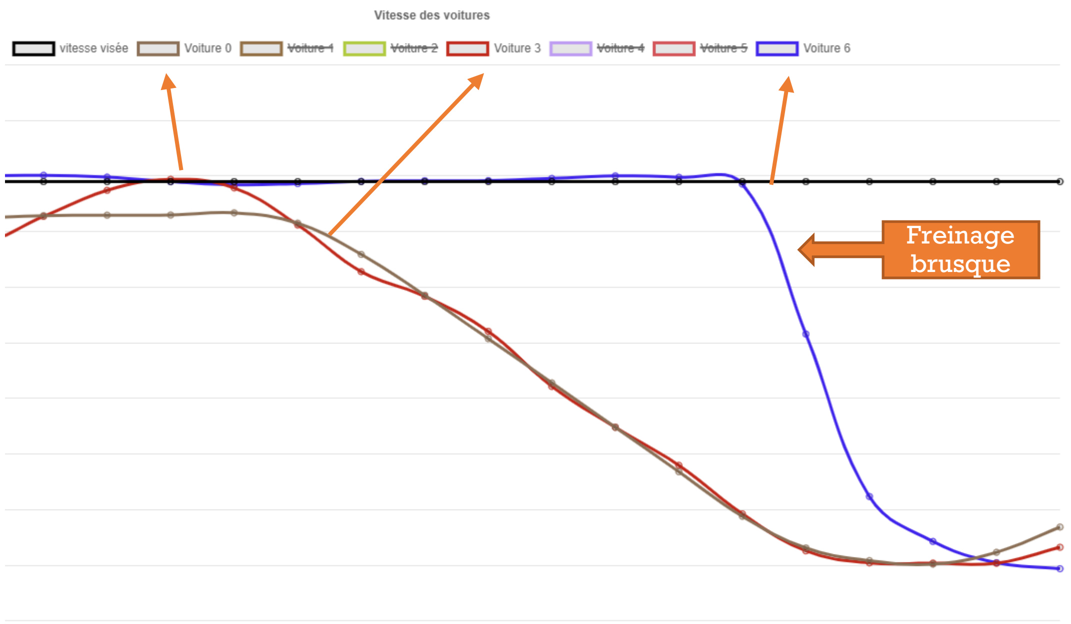
Peut-on modéliser ce phénomène ?

Autoroute:
130 km/h

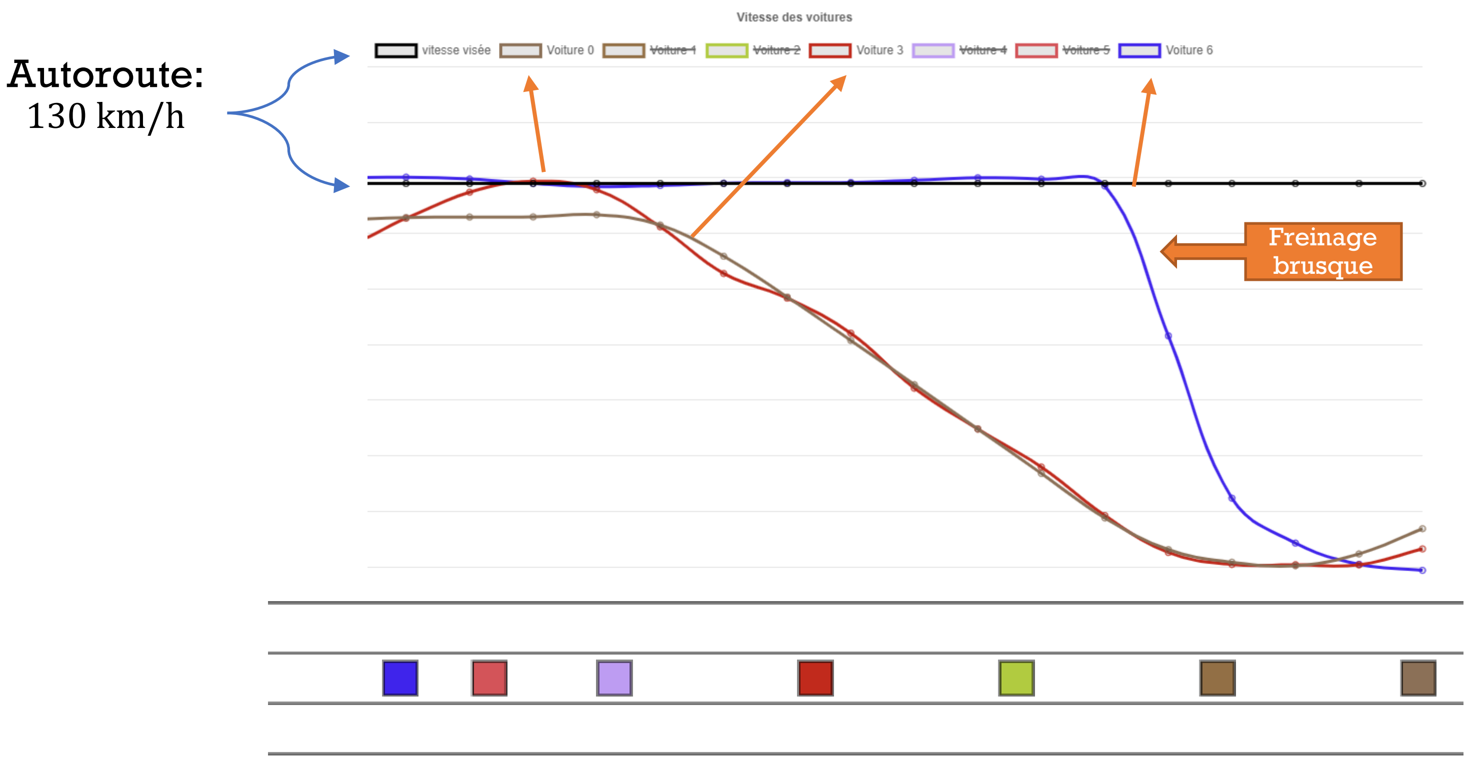


Peut-on modéliser ce phénomène ?

Autoroute:
130 km/h



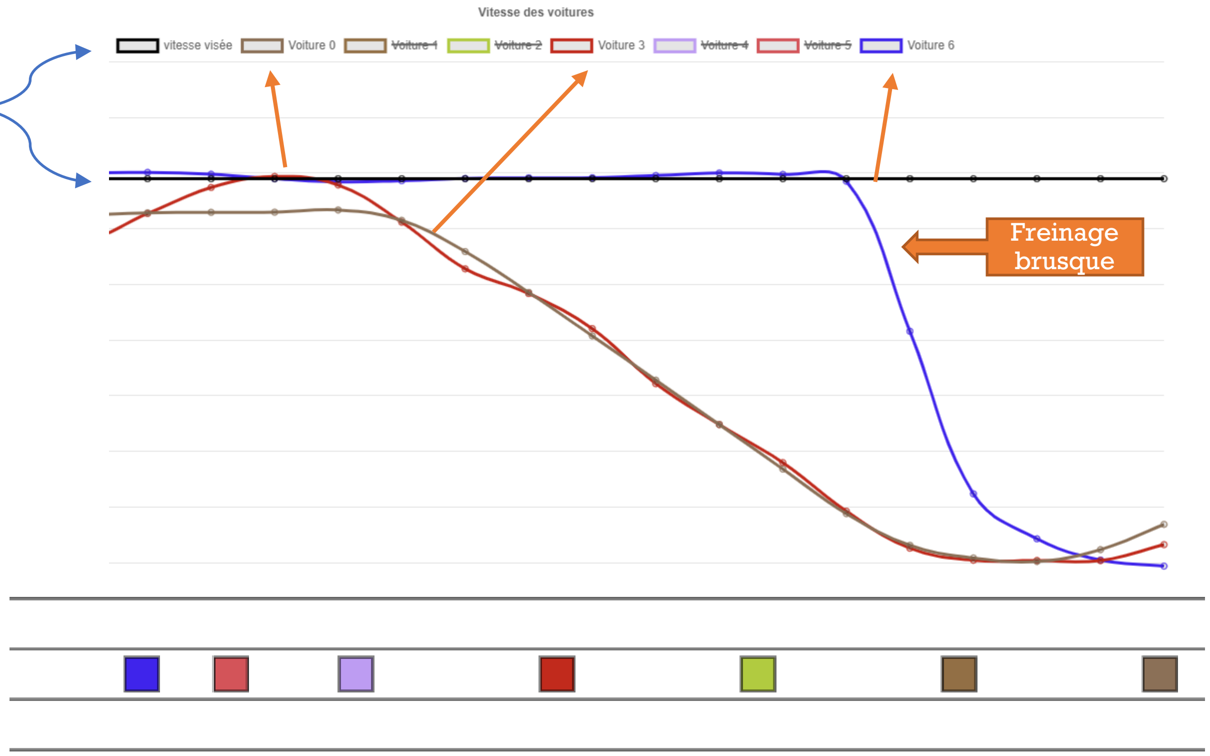
Peut-on modéliser ce phénomène ?



Peut-on modéliser ce phénomène ?

```
var voitures = [];

class Voiture {
  constructor(ide) {
      this.id = ide;
      this.twoEl;
      this.position = 0;
      this.speed = 0;
      this.freine = false;
  }
  get voitureAhead(){
    if(this.id==0){
      return voitures[0];
    }
    return voitures[this.id-1];
  }

  get distanceAhead(){
    return (this.voitureAhead.position - this.position) - 20;
  }

  randomSpeed(){
    var newspeed = this.speed + getRandomInt(2)/10;
    if(newspeed > (DefaultSpeed + 1)){
      newspeed = newspeed - 0.5;
    }
    if(newspeed <= (DefaultSpeed - 1)){
      newspeed = newspeed + 0.5;;
    }
    if(this.id==0&&frein){
      newspeed = this.speed;
    }
    if(this.freine){
      newspeed = this.speed;
    }
    this.speed = newspeed;
  }
```

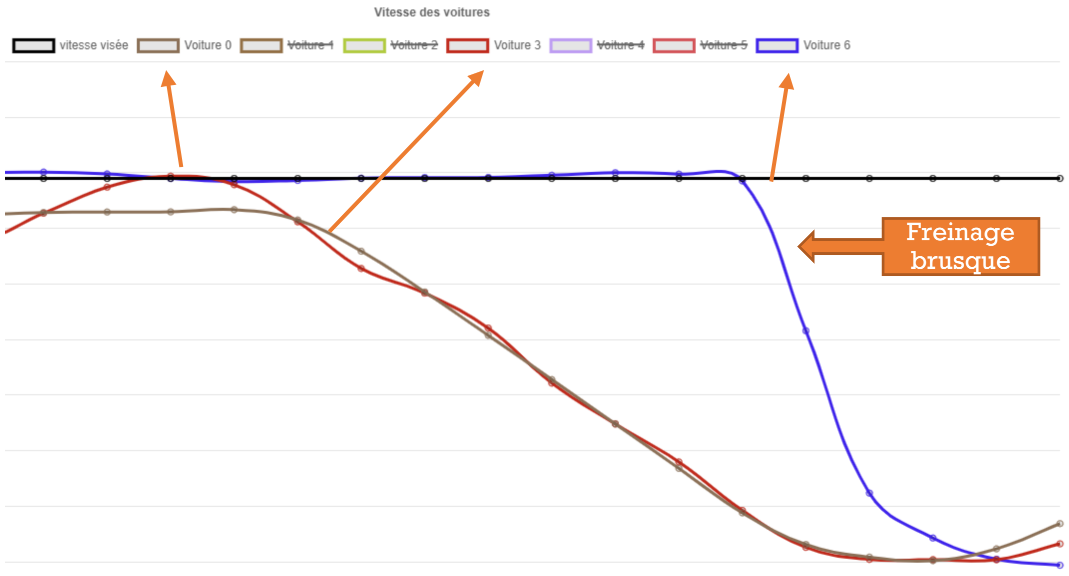
Autoroute:
130 km/h

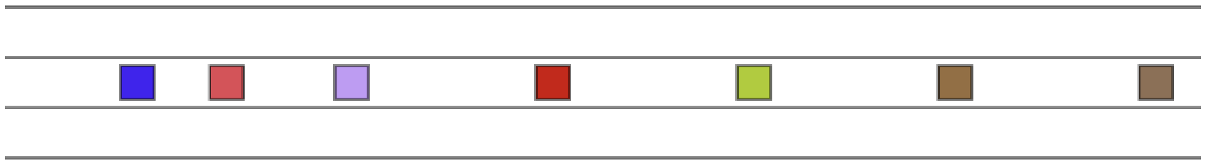


Peut-on modéliser ce phénomène ?

```
var voitures = [];

class Voiture {
  constructor(ide) {
      this.id = ide;
      this.twoEl;
      this.position = 0;
      this.speed = 0;
      this.freine = false;
  }
  get voitureAhead(){
    if(this.id==0){
      return voitures[0];
    }
    return voitures[this.id-1];
  }

  get distanceAhead(){
    return (this.voitureAhead.position - this.position) - 20;
  }

  randomSpeed(){
    var newspeed = this.speed + getRandomInt(2)/10;
    if(newspeed > (DefaultSpeed + 1)){
      newspeed = newspeed - 0.5;
    }
    if(newspeed <= (DefaultSpeed - 1)){
      newspeed = newspeed + 0.5;;
    }
    if(this.id==0&&frein){
      newspeed = this.speed;
    }
    if(this.freine){
      newspeed = this.speed;
    }
    this.speed = newspeed;
  }
```

Autoroute:
130 km/h

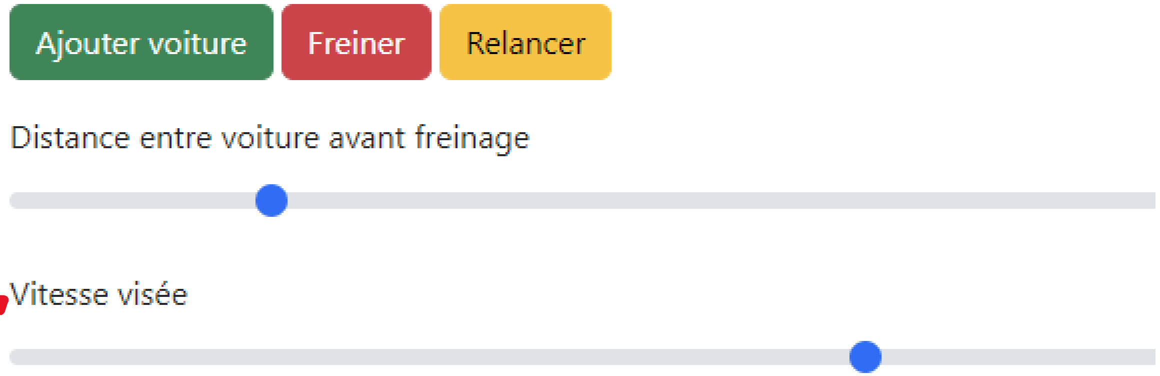




Testez notre modélisation disponible en ligne:

Peut-on modéliser ce phénomène ?

```
updateCarSpeed(){
  if(this.id≠0){
  if(this.speed ≤ 0){
     this.speed = 0;
  }
  if(this.distanceAhead≤0){
    this.speed = 0; // collision
  } else if(this.distanceAhead < DA){
    this.speed = this.speed - neglieagable(10/this.distanceAhead);
    this.freine = true;
  } else if(this.speed < DefaultSpeed){
    this.speed = this.speed + 0.02;
  } else {
    this.freine = false;
  }
  } else {
    if(frein){
      if(this.speed ≤ 0){
        this.speed = 0;
      } else {
      this.speed = this.speed - 0.02;
      }
    }
  }
 }

}
```



Peut-on représenter cet algorithme autrement ?

1. Représentation mathématiques

Nous pouvons nous appuyer sur la théorie de la stabilité en mathématiques

Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion

1. Représentation mathématiques

Nous pouvons nous appuyer sur la théorie de la stabilité en mathématiques

Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion

```
  updateCarSpeed(){
    if(this.id≠0){
    if(this.speed  ⩽  0){
        this.speed = 0;
    }
    if(this.distanceAhead⩽0){
      this.speed = 0; // collision
    } else if(this.distanceAhead < DA){
      this.speed = this.speed - neglieagable(10/this.distanceAhead);
      this.freine = true;
    } else if(this.speed < DefaultSpeed){
      this.speed = this.speed + 0.02;
    } else {
      this.freine = false;
    }
    } else {
      if(frein){
        if(this.speed  ⩽  0){
          this.speed = 0;
        } else {
        this.speed = this.speed - 0.02;
        }
      }
    }
  }

}
```

1. Représentation mathématiques

Nous pouvons nous appuyer sur la théorie de la stabilité en mathématiques

Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Notre hypothèse ?

Soit la suite $(x_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la position de la i-ème voiture à un temps t avec $i \in [\![0; n-1]\!]$ et n le nombre de voitures.

1. Représentation mathématiques

Nous pouvons nous appuyer sur la théorie de la stabilité en mathématiques

Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion

Notre hypothèse ?

Soit la suite $(x_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la position de la i-ème voiture à un temps t avec $i \in [\![0; n-1]\!]$ et n le nombre de voitures.

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

1. Représentation mathématiques

Nous pouvons nous appuyer sur la théorie de la stabilité en mathématiques

Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Notre hypothèse ?

Soit la suite $(x_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la position de la i-ème voiture à un temps t avec $i \in [\![0; n-1]\!]$ et n le nombre de voitures.

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Nous allons surtout nous intéresser à la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ pour étudier la stabilité

1. Représentation

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

1. Représentation

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

Chaque voiture commence à l'arrêt donc $(\alpha_i)_{t=0} = 0$

Soit $\delta_{min} > 0$ la constante représentant la distance minimale avant que la voiture freine

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

1. Représentation

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Chaque voiture commence à l'arrêt donc $(\alpha_i)_{t=0} = 0$

Soit $\delta_{min} > 0$ la constante représentant la distance minimale avant que la voiture freine

Soit la fonction $\tau_i(t)$ la quantité à ajouter à $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} \text{Si } |(\alpha_i)_t - \mu| < \varepsilon \Rightarrow \tau_i(t) \leq 0 \\ \text{Sinon } \tau_i(t) > 0 \end{cases}$
(représentant $\pm$ l'accélération)

$\mu > 0$ la vitesse visée et
$\varepsilon > 0$ la marge de tolérance

1. Représentation

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

Chaque voiture commence à l'arrêt donc $(\alpha_i)_{t=0} = 0$

Soit $\delta_{min} > 0$ la constante représentant la distance minimale avant que la voiture freine

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Soit la fonction $\tau_i(t)$ la quantité à ajouter à $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} \text{Si } |(\alpha_i)_t - \mu| < \varepsilon \Rightarrow \tau_i(t) \leq 0 \\ \text{Sinon } \tau_i(t) > 0 \end{cases}$
(représentant $\pm$ l'accélération)

$\mu > 0$ la vitesse visée et
$\varepsilon > 0$ la marge de tolérance

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

1. Représentation

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

Chaque voiture commence à l'arrêt donc $(\alpha_i)_{t=0} = 0$

Soit $\delta_{min} > 0$ la constante représentant la distance minimale avant que la voiture freine

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Soit la fonction $\tau_i(t)$ la quantité à ajouter à $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} \text{Si } |(\alpha_i)_t - \mu| < \varepsilon \Rightarrow \tau_i(t) \leq 0 \\ \text{Sinon } \tau_i(t) > 0 \end{cases}$
(représentant $\pm$ l'accélération)

$\mu > 0$ la vitesse visée et
$\varepsilon > 0$ la marge de tolérance

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

Que se passe-t-il si $\delta_i(t) \leq \delta_{min}$?

1. Représentation

$$\begin{cases} (x_0)_{t=0} = 0 \\ (x_i)_t \geq (x_{i+1})_t \\ (x_i)_{t+1} = (x_i)_t + (\alpha_i)_t \end{cases}$$

Soit la suite $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ représentant la quantité à ajouter à la position de la i-ème voiture à un instant t (représentant $\pm$ la vitesse)

Chaque voiture commence à l'arrêt donc $(\alpha_i)_{t=0} = 0$

Soit $\delta_{min} > 0$ la constante représentant la distance minimale avant que la voiture freine

Soit la fonction $\delta_i(t) = (x_i)_t - (x_{i-1})_t > 0$ représentant l'écart entre la i-ème voiture et la $(i-1)$-ème à un instant t

Soit la fonction $\tau_i(t)$ la quantité à ajouter à $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} \text{Si } |(\alpha_i)_t - \mu| < \varepsilon \Rightarrow \tau_i(t) \leq 0 \\ \text{Sinon } \tau_i(t) > 0 \end{cases}$
(représentant $\pm$ l'accélération)

$\mu > 0$ la vitesse visée et
$\varepsilon > 0$ la marge de tolérance

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

Que se passe-t-il si $\delta_i(t) \leq \delta_{min}$?

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) \leq \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t - \frac{1}{\delta_i(t)} \times \varphi}$$

avec φ un coefficient de freinage

1. Que peut-on dire ?

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) \leq \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t - \frac{1}{\delta_i(t)} \times \varphi}$$

Si nous étudions la stabilité de ces propositions ?

1. Que peut-on dire ?

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) \leq \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t - \frac{1}{\delta_i(t)} \times \varphi}$$

Si nous étudions la stabilité de ces propositions ?

- Nous remarquons que $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ est stable en μ (vitesse visée)

1. Que peut-on dire ?

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) > \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t + \tau_i(t)}$$

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \delta_i(t) \leq \delta_{min} \Rightarrow\ (\alpha_i)_{t+1} = (\alpha_i)_t - \frac{1}{\delta_i(t)} \times \varphi}$$

Si nous étudions la stabilité de ces propositions ?

- Nous remarquons que $(\alpha_i)_{t\in\mathbb{N}}$ est stable en μ (vitesse visée)

Conclusion:

Il faut une densité de voitures suffisante, un δ_{min} plus petit que μ. (δ_{min} pourrait être en fonction de la vitesse)
Notre modélisation est encore très primitive mais permet une visualisation du phénomène.

Comment résoudre ce problème ?

1. Voitures autonomes

L'usage de voitures autonomes permet réguler la vitesse et les variations de vitesses brusques.