Heuristic Algorithms using Tree Decompositions

Report 4 22/10/2021

De afgelopen weken heb ik verder gedaan met de literatuurstudie, waarbij ik enkele interessante papers gevonden heb.

Khanafer, Ali, François Clautiaux, and El-Ghazali Talbi. "Tree-decomposition based heuristic approaches for the bin packing problems with conflicts." ***Computers and Operations Research*** **(2010).**

De paper beschrijft een framework voor het oplossen van problemen mbv een tree decomposition. Hierbij wordt de tree decomposition gebruikt om een partitie te maken zodat elke blok van de partitie een deelverzameling is van een bag in de tree decomposition. Vervolgens bewijzen de auteurs dat er zo'n partitie bestaat die optimaal het 2D-bin packing problem kan oplossen.

Uiteindelijk geven de auteurs geen algoritme om een optimale partitie te vinden, enkel een greedy algoritme en het bewijs dat zo'n optimale partitie bestaat. Volgens mij loont het dan ook niet de moeite om een tree decomposition te moeten berekenen om een niet-optimale partitie te gebruiken. Ook het feit dat de auteurs deze strategie als een framework promoten lijkt mij wat optimistisch, want hun manier om de oplossingen van de sub problemen te mergen is heel specifiek aan het 2D-bin packing probleem, alsook het bewijs van het bestaan van de optimale partitie.

Vervolgens heb ik nog wat verder gezocht naar het Maximum Happy Vertices Problem en heb volgende twee papers gevonden. Beide zijn heel gelijkaardig opgebouwd (ook van zelfde auteurs) maar in de tweede paper wordt een variant van het probleem besproken.

Lewis, Rhyd, Dhananjay Thiruvady, and Kerri Morgan. "Finding happiness: an analysis of the maximum happy vertices problem." ***Computers & Operations Research*** **103 (2019): 265-276.**
Lewis, Rhyd, D. Thiruvady, and Kerri Morgan. "The maximum happy induced subgraph problem: Bounds and algorithms." ***Computers & Operations Research*** **126 (2021): 105114.**

De papers geven eerst upper en lower bounds op het aantal happy vertices in een graaf. Vervolgens wordt er een manier besproken om de graaf op te delen in verschillende componenten door een separator te vinden. In de beschrijving moet de separator bestaan uit vertices waarvan het al zeker is of deze happy of unhappy zijn. Vervolgens kan het probleem opgelost worden op de kleinere componenten. De papers geven geen verdere uitleg over deze strategie en beschrijven vervolgens andere algoritmes. Ook schenken de auteurs geen aandacht aan het vinden van de separator omdat *"The problem of identifying separating sets in graphs is readily solvable by various polynomial-time algorithms"* (quote van eerste paper). Het is echter niet zeker dat zo'n algoritme een separator kan vinden waarvoor dat de happiness van alle vertices al vaststaat.

In dit geval kan een tree decomposition in dit geval gebruikt worden om een separator te vinden, met behulp van het volgende theorema (uit het boek van Cygan et al):

> **Lemma 7.3.** *Let $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ be a tree decomposition of a graph G and let ab be an edge of T. The forest $T - ab$ obtained from T by deleting edge ab consists of two connected components T_a (containing a) and T_b (containing b). Let $A = \bigcup_{t \in V(T_a)} X_t$ and $B = \bigcup_{t \in V(T_b)} X_t$. Then $\partial(A), \partial(B) \subseteq X_a \cap X_b$. Equivalently, (A, B) is a separation of G with separator $X_a \cap X_b$.*

Dus elke edge in de tree decomposition komt overeen met een separator van de graaf. Vervolgens zou het dus mogelijk zijn om voor al deze separators een kwaliteit te berekenen (via een heuristiek) en dan de separator met de hoogste kwaliteit te kiezen. Daarna kan het algoritme op elke kleinere component een bestaand (exact of heuristisch) algoritme gebruiken om het probleem op te lossen, of op recursieve wijze de componenten verder opsplitsen tot dat deze klein genoeg zijn om exact op te lossen.

Volgens mij kan dit een goede aanpak zijn om een algoritme te schrijven. Ik zal nu eerst nog wat verder kijken indien er andere onderzoekers al op een gelijkaardig idee zijn gekomen en hoe hun approach dan werkt.