DS optimisation
non-linéaire.

Exercice n°1 :

1) On cherche d'abord à définir les variables d'optimisation :

les variables sont : H, r

Car on définit la fonction objectif :

$F_{obj} = 100 \times V + 50 \times S_c + 25 \times S_s$

Concernant les contraintes on a seulement celle-ci pour les contraintes d'égalité :

$V_{utile} = 50\,m^3$

Soit $V_{utile} = \pi r^2 \frac{H}{3}$

~~et pour les contraintes~~

Pour les contraintes d'inégalité on a : $r > 0$ et $H > 0$

2) On cherche à réduire le problème à un problème à une seule variable :

Ainsi on sait que $V = \pi r^2 \frac{H}{3}$

Or d'après la contrainte : $V_{utile} = 50\,m^3$

On peut en déduire

$50 = \pi r^2 \frac{H}{3} \Rightarrow \frac{150}{\pi r^2} = H$

On a donc exprimé H en fonction de r.

On obtient une nouvelle fonction objectif :

$$F_{obj} = 100 \times V + 50 \times S_c + 25 \times S_s$$

$$= 100 \times \frac{150}{3\pi r^2} \times \pi r^2 + 50 \times \pi r \left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{150}{\pi r^2}\right)^2}\right) + 25 \times \pi r^2$$

$$= 5000 + 50 \pi r \left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{150}{\pi r^2}\right)^2}\right) + 25 \pi r^2$$

Soit $r^*$ la solution, alors par définition, $r^*$ devra vérifier

$f_{obj}(r^*) = \min f_{obj}$

Maintenant dérivons :

$$f_{obj} = 5000 + 50\pi r\sqrt{r^2 + \left(\frac{150}{\pi r^2}\right)^2} + 25\pi r^2$$

$$= 5000 + 50\pi r \sqrt{\frac{1}{r^2}\left(r^4 + \frac{150^2}{\pi^2 r^2}\right)} + 25\pi r^2$$

$$= 5000 + 50\pi \sqrt{r^4 + \frac{150^2}{\pi^2 r^2}} + 25\pi r^2$$

Donc

$$f'_{obj} = \frac{50\pi \times \left(4r^3 - \frac{2\times 150^2}{\pi^2 r^3}\right)}{\sqrt{r^4 + \frac{150^2}{\pi^2 r^2}}} + 50\pi r$$

La recherche des points stationnaire passe par :

$f'_{obj} = 0$

Enfin nous ne ferons pas le calcul de $f''_{obj}$ par raison de temps car l'expression est trop longue.

Ainsi soit $r^*$ la solution, elle devra nécéssairement vérifier :

- $f'_{obj}(r^*) = 0$
- $f''_{obj}(r^*) > 0$

3) On utilise la fonction fminbnd car notre problème est monovariable et sans contraintes.
Or fminbnd permet de trouver le minimum d'une fonction à variable unique sur un intervalle fixe.

4) ~~Lt~~ Soit $F_{obj}$ la fonction objectif et $C$ la fonction contrainte

$$\mathcal{L}(r, H, \lambda) = F_{obj}(r, H) - \lambda C(r, H)$$
$$= 100 \cdot \pi r^2 \frac{H}{3} + 50 \pi r \sqrt{r^2 + H^2} + 25 \pi r$$
$$- \lambda\left(\pi r^2 \frac{H}{3} - 50\right)$$

Donc
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = \dfrac{200 \pi H}{3} r + 50 \pi \sqrt{r^2+H^2} + 50\pi \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2+H^2}} \\ \quad + 50 \pi r - \lambda\left(\dfrac{2}{3} \pi H r\right) \\ \dfrac{\partial L}{\partial H} = \dfrac{100}{3} \pi r^2 + 50 \pi r \dfrac{H}{\sqrt{r^2+H^2}} - \dfrac{\lambda \pi r^2}{3} \end{cases}$$

De même on ne calculera pas les dérivée seconde pour raison de temps mais on définit $(r_0, H_0)$ les solutions

Ainsi elles devront vérifier :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r}(r_0, H_0) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial H}(r_0, H_0) = 0 \end{cases}$$

~~et~~

De plus on pos $x_0, y_0$, $z_0$ telque

~~Alors~~ :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial r^2}(r_0, H_0) = x_0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial r \partial H}(r_0, H_0) = y_0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial H^2}(r_0, H_0) = z_0 \end{cases}$$

Alors pour obtenir un minimum on devra avoir

$(x_0 z_0 - y_0^2) > 0$ et $x_0 > 0$ pour avoir un minimum local.

5) On définit X = [r, h]

```
function [coûts] = coûts(X) ;
    coût = (100*pi*(X(1)^2)*X(2)/3)
        + 50*pi*X(1)*sqrt(X(1)^2 + X(2)^2)
        + 25*pi*X(1)^2 ;
end

function [C, ceq] = contraintes_non_lineaires(X)
    C = [ ] ;
    Ceq = (pi*(X(1)^2)*X(2)/3) - 50 ;

end

% Code principal

A = [ ]
B = [ ]
Aeq = [ ]

Beq = [ ]

Lb = [0 0]

Ub = [2000 ; 2000]   % pour être sûr de l'intervalle
X0 = [5 ; 30/pi] .
```

6) Pour vérifier l'optimalité de cette solution initialisée avec celle-ci et on relance le programme. Si l'on obtient le même résultat alors c'est bon ~~[illegible]~~ .

Exercice n° 3 :

Q.9 : $f(x,y) = \exp(x) \times ((4x^2) + 2y^2 + 4xy + 2y + 1)$

Q10 : Non il n'y a pas de contraintes non linéaire d'égalité

Q11 : Oui qui sont :

$C_1(x,y) := 1,5 + xy - x - y \leq 0$

$C_2(x,y) = -xy - 10 \leq 0$

Q12 : Oui qui sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y = 10 \end{cases}$$

13) Non il n'y a pas de contraintes linéaire d'inégalité.