Calcul Différentiel I

STEP, MINES ParisTech

8 octobre 2020 (`#bd0f014`)

Question 1 Déterminer le gradient et la matrice jacobienne de la fonction $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2 Déterminer en tout point la matrice jacobienne de l'application $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_2 - x_1^2, x_3 - x_2^2) \in \mathbb{R}^2$.

Question 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable. Dans l'expression $df(x) \cdot h$, à quels ensembles appartiennent $df(x)$ et h ? Que vaut l'expression en fonction de $f'(x)$?

Question 4 Soit $p : \mathbb{R}^n \to \,]0, +\infty[$ une fonction différentiable. Calculer le gradient de $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln p(x) \in \mathbb{R}$ en fonction du gradient de p.

Question 5 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, bijective et dont l'inverse $g := f^{-1}$ est également différentiable. Déterminer l'expression de la différentielle de g en $y \in \mathbb{R}^n$ en fonction de la différentielle de f.

Question 6 En exploitant la loi des gaz parfaits $PV = nRT$, donner une expression de dT en fonction de dP et dV (n et R sont des constantes).

Question 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0, 0) = 0$ et $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$ en tout point. Déterminer la valeur de $f(x_1, x_2)$ en tout point.

Question 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable et vérifiant $\|df(x_1, x_2)\| \leq 1$ quand $|x_1| \geq 1$ ou $|x_2| \geq 1$. Quelle(s) inégalité(s) êtes-vous en mesure de prouver ?

- ☐ A: $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$
- ☐ B: $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq 4$
- ☐ C: $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq \pi\sqrt{2} \approx 4.44$