

# Calcul Intégral III

STEP, MINES ParisTech

8 octobre 2020 (#bd0f014)

**Question 1** Déterminer l'aire des pavés suivants du plan étendu :

Ensemble de $[-\infty, +\infty]^2$	Aire (mesure de Lebesgue)
$[0, 1] \times ]-1, 1[$	.....
$\mathbb{R}^2$	.....
$\{+\infty\} \times [-\infty, +\infty]$	.....

**Question 2 (réponse multiple)**

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$  la diagonale principale de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

- ☐ A: pour tout  $r > 0$ ,  $D \cap [-r, r]$  est négligeable,
- ☐ B: l'ensemble  $D$  est négligeable,
- ☐ C: l'aire de l'ensemble  $D$  est nulle.

**Question 3 (réponse multiple)** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

est bien définie, alors

- ☐ A: l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$  est nécessairement définie pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,
- ☐ B: l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$  est bien définie,
- ☐ C: l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$  est bien définie,
- ☐ D: si  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$  est également bien définie, alors les deux intégrales sont égales,

**Question 4 (réponse multiple)** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  deux fonctions intégrables. Alors,

- ☐ A: la fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$  est mesurable,
- ☐ B: la fonction  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)g(y)$  est intégrable,
- ☐ C: on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y) dx dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy \right).$$

**Question 5 (réponse multiple)** Soient  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y - x) \, dx dy$$

- ☐ A: est définie si  $f$  est mesurable et positive,
- ☐ B: est égale à  $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx dy$  si  $f$  est intégrable.