

# Topologie


STEP, MINES ParisTech\*

8 octobre 2020 (#bd0f014)

## Table des matières

<b>Objectifs d'apprentissage</b>	<b>4</b>
<b>Conventions</b>	<b>5</b>
<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>6</b>
Norme . . . . .	6
Espace vectoriel normé . . . . .	6
Espace $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
Normes alternatives sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
Espace des matrices $\mathbb{R}^{m \times n}$ . . . . .	7
Normes alternatives sur $\mathbb{R}^{m \times n}$ . . . . .	9
Espace de fonctions bornées . . . . .	9
Normes alternatives pour les fonctions bornées . . . . .	10
<b>Espaces métriques</b>	<b>10</b>
Distance . . . . .	10
Espace métrique . . . . .	11
Sous-ensemble d'un espace vectoriel normé . . . . .	11
Distance point-ensemble et ensemble-ensemble . . . . .	12
Isométries . . . . .	12
Sous-espace métrique . . . . .	13
<b>Bestiaire topologique</b>	<b>13</b>
Adhérence, frontière, intérieur . . . . .	13
Ensemble fermé, ouvert . . . . .	14
Boules . . . . .	15

---

\*Ce document est un des produits du projet  boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

Voisinage . . . . .	15
Propriétés vraies dans un voisinage / localement . . . . .	16
<b>Suites, limites et continuité</b>	<b>16</b>
Limite d'une suite de points . . . . .	16
Unicité de la limite d'une suite . . . . .	17
Caractérisations séquentielles . . . . .	17
Limite d'une fonction en un point . . . . .	17
Unicité de la limite d'une fonction en un point . . . . .	18
Continuité . . . . .	18
Composition de fonctions continues . . . . .	18
Continuité de la distance . . . . .	18
Continuité et adhérence . . . . .	19
Continuité et image réciproque . . . . .	19
<b>Complétude</b>	<b>20</b>
Point fixe . . . . .	20
Points fixes et zéros . . . . .	20
Algorithmes et critères de convergence . . . . .	21
Suite de Cauchy . . . . .	21
Diamètre . . . . .	22
Suite de Cauchy et diamètre . . . . .	22
Toute suite convergente est de Cauchy . . . . .	22
Réciproque ? . . . . .	22
Espaces complets . . . . .	23
Complétude de l'espace euclidien . . . . .	23
Caractérisation des sous-espaces complets . . . . .	23
Existence d'un maximum . . . . .	24
Borne des fonctions continues . . . . .	24
Application contractante . . . . .	25
Théorème de point fixe de Banach . . . . .	25
<b>Annexe – Espaces produits</b>	<b>27</b>
Produit d'espaces vectoriels normés . . . . .	27
Produit d'espaces métriques . . . . .	27
Continuité des projections . . . . .	27
Continuité des injections . . . . .	27
Continuité de la distance . . . . .	28
<b>Annexe – Compacité</b>	<b>28</b>
Compacité séquentielle . . . . .	28
Théorème de Heine-Borel . . . . .	28
Image d'un compact . . . . .	29
Existence d'un maximum . . . . .	29
Complétude de l'espace des fonctions bornées . . . . .	30
Complétude de l'espace des fonctions continues . . . . .	30

Propriété de l'intersection finie . . . . .	31
Compacité et propriété de l'intersection finie . . . . .	31
Compacité et compacité séquentielle . . . . .	31
<b>Annexe – Espace topologique</b>	<b>33</b>
Structure topologique d'un espace métrique . . . . .	33
Test d'adhérence . . . . .	33
Espace topologique . . . . .	33
Sous-espace topologique . . . . .	33
Continuité . . . . .	34
Composée d'applications continues . . . . .	34
Les espaces métriques sont des espaces topologiques . . . . .	34
L'espace topologique généralise l'espace métrique . . . . .	35
Définitions topologiques . . . . .	35
Calcul topologique – Axiomes de Kuratowski . . . . .	36
Ouverts et fermés . . . . .	36
Continuité et image réciproque . . . . .	37
<b>Exercices</b>	<b>37</b>
Normes d'opérateurs . . . . .	37
Droite réelle achevée . . . . .	38
Localement fermé . . . . .	39
Distance entre ensembles . . . . .	40
Plongement de Kuratowski . . . . .	41
Le nombre d'or . . . . .	42
Spirale d'Euler . . . . .	42
Point fixe . . . . .	43
Résolution itérative de systèmes linéaires . . . . .	44
Équation différentielle . . . . .	44
<b>Solutions</b>	<b>45</b>
Exercices essentiels . . . . .	45
Normes d'opérateurs . . . . .	50
Droite réelle achevée . . . . .	53
Localement fermé . . . . .	55
Distance entre ensembles . . . . .	56
Plongement de Kuratowski . . . . .	59
Le nombre d'or . . . . .	60
Spirale d'Euler . . . . .	61
Point fixe . . . . .	62
Résolution itérative de systèmes linéaires . . . . .	63
Équation différentielle . . . . .	64
<b>Références</b>	<b>66</b>

## Objectifs d'apprentissage

Cette section s'efforce d'expliciter et de hiérarchiser les acquis d'apprentissages associés au chapitre. Ces objectifs sont organisés en paliers :

(o) Prérequis (•) Fondamental (••) Standard (•••) Avancé (••••) Expert

Sauf mention particulière, les objectifs “Expert”, les démonstrations du document<sup>1</sup> et les contenus en annexe ne sont pas exigibles (“hors-programme”).

### Généralités

- • savoir que la topologie est une branche de la géométrie,
- •• savoir que la topologie s'occupe en particulier de “proximité”,
- •• savoir que les notions de limite et de continuité relèvent de la topologie,
- ••• savoir reconnaître quand un problème est de nature topologique.

### Espaces vectoriels normés

- savoir exploiter les espaces vectoriels normés suivants :
  - o l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne,
  - • l'espace  $\mathbb{R}^{m \times n}$  muni de la norme d'opérateur,
  - •• l'espace des fonctions  $A \rightarrow \mathbb{R}^n$  bornées, muni de la norme du sup.
- ••• savoir adapter les espaces précédents aux normes non-euclidiennes,
- •• savoir définir et caractériser une norme, un espace vectoriel normé.

**Espaces métriques** L'accent est mis sur les espace métriques “concrets” : les sous-ensembles arbitraires d'espaces vectoriels normés, munis de la distance induite par la norme.

- o savoir construire une distance (entre points) à partir d'une norme,
- • savoir que tout sous-ensemble d'un e.v.n. “est” un espace métrique,
- • savoir définir la distance entre un point et un ensemble,
- savoir définir à partir d'une distance :
  - • adhérence, frontière, intérieur,
  - •• ensemble ouvert et fermé,
  - •• boule ouverte, boule fermée,
  - ••• propriété satisfaite dans un voisinage / localement,
- savoir exploiter des rudiments de calcul topologique :
  - •  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ ,  $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ ,
  - ••  $A \subset \overline{A}$ ,  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ,  $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$  (union disjointe),
  - ••/••• savoir deviner et prouver de nouvelles identités.

---

1. l'étude des démonstrations du cours peut toutefois contribuer à votre apprentissage, au même titre que la résolution d'exercices.

Ces connaissances se transposent aux espaces métriques “abstraites” tels que la droite réelle étendue  $[-\infty, \infty]$ , ou la collection des ensembles fermés bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$ .

- • connaître la définition générale d’espace métrique,
- •• savoir quels axiomes caractérisent une distance,
- ••• savoir vérifier qu’une fonction est une distance,
- •••• savoir construire une distance appropriée à un contexte donné.

**Suites, limites et continuité** Dans les espaces métriques, tous les concepts topologiques peuvent être caractérisés à travers l’étude des suites de points.

- savoir définir et exploiter les notions suivantes :
  - • limite d’une suite de points dans un espace métrique,
  - • limite d’une fonction  $A \subset X \rightarrow Y$  en un point adhérent à  $A$ ,
- •• connaître la caractérisation séquentielle des objets topologiques,
- savoir caractériser les fonctions continues (en un point, sur son domaine) :
  - • définition séquentielle :  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  quand  $x \rightarrow x_0$ ,
  - •• : par l’adhérence :  $x_0 \in \overline{A} \implies f(x_0) \in \overline{f(A)}$ ,
  - ••• : par le critère de l’image réciproque.
- • savoir exploiter que la composition de fonctions continues est continue.

### Espaces complets

- • comprendre les liens entre zéro de fonction et point fixe,
- ••• savoir définir et caractériser une suite de Cauchy,
- savoir caractériser un espace métrique complet, en exploitant :
  - • que  $\mathbb{R}^n$  est complet,
  - •• qu’un sous-espace fermé d’un espace complet est complet,
  - ••• directement la définition d’espace métrique complet.
- •• savoir quand une fonction scalaire continue admet un maximum,
- •• savoir caractériser une application contractante,
- •• savoir utiliser le théorème de point fixe de Banach.

## Conventions

On définit le *complémentaire de  $A$  dans  $X$*  comme l’ensemble

$$X \setminus A := \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Dans le cas où l’ensemble  $X$  est clairement déterminé par le contexte, on notera simplement  $A^c$  ce complémentaire :

$$A^c := X \setminus A.$$

## Espaces vectoriels normés

### Définition – Norme

Une *norme* sur un espace vectoriel  $E$  (sur  $\mathbb{R}$ ) est une application

$$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[$$

telle que pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $E$  et tous les scalaires  $\lambda$  on ait

1.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$  (*séparation*),
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (*homogénéité*),
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (*inégalité triangulaire*).

### Définition – Espace vectoriel normé

Un espace vectoriel  $E$  muni d'une norme sur  $E$  est un *espace vectoriel normé*.

### Proposition – Espace $\mathbb{R}^n$

L'espace  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la *norme euclidienne*  $\|\cdot\|_2$ , définie par

$$\|x\| := \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

est un espace vectoriel normé.

### Remarque – Normes alternatives sur $\mathbb{R}^n$

Par défaut, la norme privilégiée sur  $\mathbb{R}^n$  est la norme euclidienne ; elle se déduit du *produit scalaire* usuel

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

par la relation  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . On la notera simplement  $\|\cdot\|$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. Mais on peut doter  $\mathbb{R}^n$  d'autres normes ; par exemple la norme  $\|\cdot\|_1$ , définie par

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

et la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , définie par

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

**Proposition – Espace des matrices  $\mathbb{R}^{m \times n}$**

L'ensemble des matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , muni de la norme d'opérateur

$$\|A\| := \|A\|_{22} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_2}{\|x\|_2},$$

est un espace vectoriel normé.

**Démonstration** Démontrons tout d'abord que pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , le ratio  $\|A \cdot x\|_2 / \|x\|_2$  est borné. Soit  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Comme  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , on a

$$A \cdot x = A \cdot (x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^n x_i (A \cdot e_i).$$

Par l'inégalité triangulaire (p. 6) et par homogénéité de la norme (p. 6),

$$\|A \cdot x\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|A \cdot e_i\|_2.$$

Comme pour la norme euclidienne on a  $|x_i| \leq \|x\|_2$ , on en déduit que

$$\|A \cdot x\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|x\|_2 \|A \cdot e_i\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \|A \cdot e_i\|_2 \right) \|x\|_2,$$

le ratio  $\|A \cdot x\|_2 / \|x\|_2$  est donc majoré par  $\sum_{i=1}^n \|A \cdot e_i\|_2$ .

L'ensemble des matrices  $\mathbb{R}^{m \times n}$  est un espace vectoriel, muni des opérations

$$[A + B]_{ij} := A_{ij} + B_{ij} \text{ et } [\lambda A]_{ij} = \lambda A_{ij}.$$

De plus la valeur  $\|A\|$  est positive ; si  $\|A\| = 0$ , c'est-à-dire si

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = 0,$$

nécessairement  $A \cdot x$  est nulle pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Comme  $A \cdot 0 = 0$  par linéarité, la matrice  $A$  est nulle. On a également

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda A \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|A \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_2}{\|x\|_2} = |\lambda| \|A\|$$

et

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B) \cdot x\|_2}{\|x\|_2} \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x + B \cdot x\|_2}{\|x\|_2} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_2 + \|B \cdot x\|_2}{\|x\|_2} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_2}{\|x\|_2} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|B \cdot x\|_2}{\|x\|_2} \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la norme d'opérateur est bien une norme sur l'espace des matrices  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . ■

La norme d'opérateur  $\|A\|$  vérifie par construction les inégalités

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|A \cdot x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Plus précisément,  $\|A\|$  est la meilleure – c'est-à-dire la plus stricte, la plus petite – des bornes  $\kappa$  telles que  $\|A \cdot x\| \leq \kappa \|x\|$  pour tout  $x$  :

$$\|A\| = \min\{\kappa \in [0, +\infty[ \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \|A \cdot x\| \leq \kappa \|x\|\}.$$

**Exercice – Norme d'une matrice  $2 \times 3$  (•)** Montrer que la norme d'opérateur de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

vaut 1. (Solution p. 45.)

**Exercice – Matrice de rotation (•)** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer la norme d'opérateur de

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(Solution p. 46.)

**Exercice – Norme d'une matrice  $2 \times 2$  (••)** Calculer la norme d'opérateur de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Solution p. 46.)



**Exercice – Sous-multiplicativité de la norme d’opérateur (••)** Montrer que si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , alors la norme du produit des matrices  $A$  et  $B$  vérifie  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$ . (Solution p. 46.)

**Remarque – Normes alternatives sur  $\mathbb{R}^{m \times n}$**

Le résultat précédent est encore valable quand on muni  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  de normes arbitraires  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$  et que l’on définit la norme d’opérateur associée comme

$$\|A\| := \|A\|_{\mathbb{R}^m \mathbb{R}^n} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}.$$

Ce résultat nécessite un argument de compacité (cf. annexe (p. 28)) qui n’est valable que dans les espaces de dimension finie. Mais de façon plus générale si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés – pas nécessairement de dimension finie – l’espace des opérateurs linéaires de  $E$  dans  $F$  bornés, c’est-à-dire tels que

$$\|A\| := \|A\|_{FE} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_F}{\|x\|_E},$$

est également un espace vectoriel normé.

**Proposition – Espace de fonctions bornées**

Soit  $A$  un ensemble. L’espace vectoriel des fonctions bornées  $f$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ , muni de

$$\|f\| := \sup_{x \in A} \|f(x)\|_2 < +\infty$$

est un espace vectoriel normé.

**Démonstration** L’ensemble des fonctions bornées  $A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un espace vectoriel quand on le munit des opérations

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

De plus, si  $\|f\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_2 = 0$ , alors  $\|f(x)\|_2 = 0$  pour tout  $x \in A$  et donc par l’axiome de séparation (p. 6),  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in A$ , c’est-à-dire  $f = 0$ .

Si  $\lambda$  est un réel, on a par homogénéité de la norme  $\|\cdot\|_2$  (p. 6)

$$\sup_{x \in A} \|\lambda f(x)\|_2 = \sup_{x \in A} |\lambda| \|f(x)\|_2 = |\lambda| \sup_{x \in A} \|f(x)\|_2,$$

soit  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ .

Finalement,

$$\begin{aligned}\sup_{x \in A} \|(f+g)(x)\|_2 &= \sup_{x \in A} \|f(x) + g(x)\|_2 \\ &\leq \sup_{x \in A} \|f(x)\|_2 + \|g(x)\|_2 \\ &\leq \sup_{x \in A} \|f(x)\|_2 + \sup_{x \in A} \|g(x)\|_2,\end{aligned}$$

donc  $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ . La fonction  $\|\cdot\|$  est donc bien une norme sur l'espace des fonctions bornées de  $A$  dans  $\mathbb{R}^n$ . ■

### Remarque – Normes alternatives pour les fonctions bornées

Si  $E$  est un espace vectoriel muni de la norme  $\|\cdot\|_E$ , une démonstration en tout point similaire permet d'établir que

$$\|f\| := \sup_{x \in A} \|f(x)\|_E$$

définit une norme sur l'espace des fonctions bornées de  $A$  dans  $(E, \|\cdot\|_E)$ .

## Espaces métriques

Si  $X$  est un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé  $E$ , celui-ci "hérite" de  $E$  une mesure de la distance entre deux points  $x$  et  $y$  avec la grandeur

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Par contre, à moins que  $X$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$  les additions entre éléments de  $X$  ou la multiplication d'un élément de  $X$  par un scalaire n'ont plus de sens dans  $X$  ; nous ne pouvons plus définir une norme sur  $X$ .

La fonction  $d$  définie ci-dessus sur  $X$  vérifie automatiquement les axiomes qui nous autorisent à la qualifier de "distance" :

### Distance

Une *distance* sur un ensemble  $X$  est une fonction

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$$

telle que pour tous points  $x, y$  et  $z$  de  $X$ , on ait :

1.  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  (*séparation*),
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  (*symétrie*),
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (*inégalité triangulaire*).

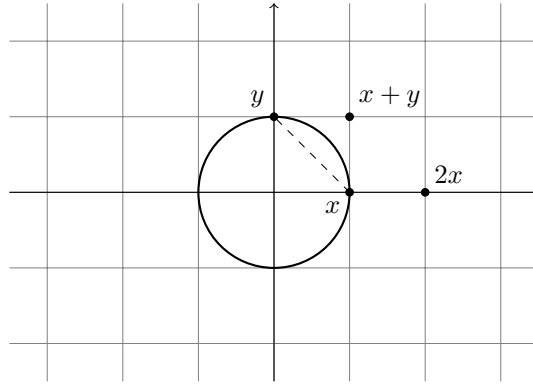


FIGURE 1 – Le cercle unité  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ . Bien que  $x = (1, 0)$  et  $y = (0, 1)$  appartiennent au cercle unité, ni  $x + y$  ni  $2x$  ne lui appartiennent. Il hérite néanmoins d’une distance  $d$  de l’espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  (telle que  $d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{2}$  quand  $x = (1, 0)$  et  $y = (0, 1)$ ), ce qui fait de lui un espace métrique.

### Définition – Espace métrique

Un *espace métrique* est un ensemble  $X$  muni d’une *distance*.

Une fonction distance est également appelée une *métrique*.

### Proposition – Sous-ensemble d’un espace vectoriel normé

Soit  $X$  un sous-ensemble d’un espace vectoriel normé  $E$ . La fonction  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  définie par

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

est une distance sur  $X$ .

Autrement dit, tout sous-ensemble d’un espace vectoriel normé “est” un espace métrique, c’est-à-dire qu’il existe une fonction distance “naturelle” dont on peut le doter, induite par l’espace vectoriel normé. Cela vaut en particulier pour l’espace vectoriel normé lui-même : tout espace vectoriel normé “est” un espace métrique.

Réciproquement, les espaces métriques ne sont pas plus généraux que les sous-ensembles d’espace vectoriels normés : tout espace métrique peut en effet être identifié au moyen d’une isométrie avec un tel sous-ensemble (cf. l’exercice “Plongement de Kuratowski (p. 59)”). Les espaces métriques n’exhibent donc aucune propriété qui ne soit déjà manifeste dans l’étude des sous-ensembles d’espaces vectoriels normés.

**Démonstration** Par construction, la fonction  $d$  est bien positive. De plus, pour tous points  $x, y$  et  $z$  de  $X$  :

1. Par l'axiome de séparation des normes (p. 6),

$$\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Cela entraîne que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ , soit l'axiome de séparation pour la distance  $d$  (p. 10).

2. Par homogénéité de la norme  $\|\cdot\|$  (p. 6), on a

$$\|x - y\| = \|(-1) \times (y - x)\| = |-1| \times \|y - x\| = \|y - x\|,$$

et donc  $d(x, y) = d(y, x)$ , d'où la symétrie de la fonction  $d$  (p. 10).

3. Par l'inégalité triangulaire pour les normes (p. 6), on a

$$\|x - z\| = \|x - y - (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

ce qui établit l'inégalité triangulaire pour la distance  $d$  (p. 10).

■

## Distance point-ensemble et ensemble-ensemble

Une distance  $d$  sur  $X$  associe à deux points de  $X$  un réel positif. Cette fonction peut servir de base pour définir une distance entre un point  $x$  de  $X$  et un ensemble de points de  $A$  de  $X$  :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a) \in [0, +\infty]$$

ou même entre deux ensembles  $A$  et  $B$  de points de  $X$  :

$$d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \in [0, +\infty].$$

Si  $A$  est l'ensemble vide, on a  $d(x, A) = +\infty$  et si  $A$  ou  $B$  est vide on a  $d(A, B) = +\infty$  ; ce sont les seuls cas où ces extensions de la distance entre points peuvent prendre des valeurs infinies.

## Définition – Isométries

Une application  $f : X \rightarrow Y$  définie entre deux espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  telle que :

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

est une *isométrie*.

Les isométries sont les *morphismes* des espaces métriques : les applications qui préservent la structure des espaces métriques. Construire des isométries peut aller de pair avec la construction d'une métrique sur un ensemble qui en est initialement dépourvu ; voir à ce propos l'exercice "Droite réelle achevée (p. 53)".

### Définition – Sous-espace métrique

Un sous-ensemble  $Y$  d'un espace métrique  $X$  est un *sous-espace métrique* de  $X$  lorsqu'il est muni de la distance de  $X$ , restreinte aux points de  $Y$ .

## Bestiaire topologique

### Définition – Adhérence, frontière, intérieur

Soit  $X$  un espace métrique et  $A$  un ensemble de points de  $X$ . On note

- $\overline{A}$  l'*adhérence* de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des *points adhérents* à  $A$  :

$$\overline{A} := \{x \in X \mid d(x, A) = 0\},$$

- $\partial A$  la *frontière* de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des *points frontières* de  $A$  :

$$\partial A := \{x \in X \mid d(x, A) = d(x, A^c) = 0\},$$

- $A^\circ$  l'*intérieur* de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des *points intérieurs* à  $A$  :

$$A^\circ := \{x \in X \mid d(x, A^c) > 0\}.$$

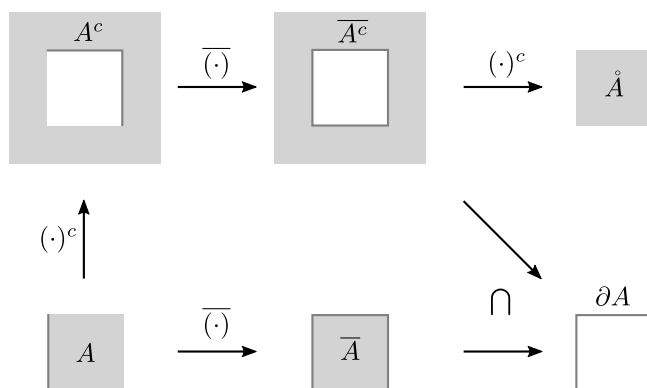


FIGURE 2 – Construction de l'intérieur  $A^\circ$  et de la frontière  $\partial A$  à partir de l'ensemble  $A$ , en utilisant l'opérateur d'adhérence  $\overline{(\cdot)}$  et des opérations ensemblistes.

**Exercice – Intervalles de  $\mathbb{R}$  (•)** Déterminer l'adhérence, la frontière et l'intérieur de  $[0, 1[$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Ensemble des rationnels (••)** Déterminer l'adhérence de  $\mathbb{Q}$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Inclusions (•)** Montrer que  $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Topologie basée sur l'adhérence (•)** Montrer que  $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$  et  $A^\circ = (\overline{A^c})^c$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Adhérence itérée (••)** Montrer que  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Décomposition de  $\overline{A}$  (••)** Montrer que  $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$  et  $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ . (Solution p. 47.)

**Exercice – Topologie basée sur la frontière (••)** Montrer que  $\overline{A} = A \cup \partial A$  et  $A^\circ = A \setminus \partial A$ . (Solution p. 48.)

### Définition – Ensemble fermé, ouvert

Un ensemble  $A$  est *fermé* si tous les points adhérents à  $A$  appartiennent à  $A$  :

$$A \text{ fermé} \Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow (d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A).$$

Un ensemble  $A$  est *ouvert* si la distance de tout point de  $A$  au complémentaire de  $A$  est strictement positive :

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A = A^\circ \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow d(x, A^c) > 0).$$

**Exercice – Ouvert  $\Leftrightarrow$  non fermé ? (•)** Est-ce que “ouvert” signifie la même chose que “non fermé” ? (Solution p. 48.)

**Exercice – L'adhérence est fermée, l'intérieur est ouvert (•)** Montrer que l'adhérence  $\overline{A}$  d'un ensemble  $A$  est fermée et que son intérieur  $A^\circ$  est ouvert. (Solution p. 48.)

**Exercice – Ensemble discret (••)** Soit  $A$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $X$  dont tous les points soient isolés : pour tout  $x \in A$ , la distance de  $x$  à  $A \setminus \{x\}$  est strictement positive. Est-ce que  $A$  est nécessairement fermé ? (Solution p. 48.)

### Définition – Boules

Soit  $X$  un espace métrique. Pour tout  $x \in X$  et  $r \geq 0$ , on définit la *boule ouverte* de centre  $x$  et de rayon  $r$  comme

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

et la *boule fermée* de centre  $x$  et de rayon  $r$  comme

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

**Exercice – Normes et boules (•)** Dans  $\mathbb{R}^2$ , représenter graphiquement les boules ouvertes centrées sur l'origine et de rayon 1 lorsque la distance est issue la norme euclidienne  $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , puis de la norme  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$  et enfin de la norme  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ . (Solution p. 48.)

**Exercice – C'est une boule ça ? (•)** On considère comme espace métrique le carré de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1\}$  muni de la distance euclidienne. Expliciter dans cet espace les boules ouvertes  $B((0, 0), 1)$ ,  $B((1, 0), 1)$  et  $B((0, 0), 2)$ . (Solution p. 49.)

### Définition – Voisinage

Soit  $X$  un espace métrique. Un ensemble  $V$  de  $X$  est un *voisinage* d'un point  $x$  de  $X$  si la distance de  $x$  au complémentaire de  $V$  est strictement positive :

$$V \text{ voisinage de } x \Leftrightarrow d(x, V^c) > 0.$$

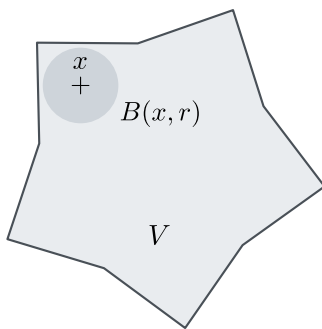


FIGURE 3 – Un voisinage  $V$  d'un point  $x$  du plan.

Autrement dit,  $V$  est un voisinage de  $x$  si et seulement si  $x$  est un point intérieur de  $V$ , ou encore, s'il existe une boule ouverte centrée en  $x$  de rayon  $r > 0$  incluse dans  $V$  :

$$x \in B(x, r) \subset V.$$

**Exercice – Dans le plan (•)** La droite  $D$  d'équation  $x_1 = x_2$  est-elle un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$ ? (Solution p. 49.)

**Exercice – Voisinages ouverts / fermés? (•)** Montrer que si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il existe un voisinage ouvert de  $x$  inclus dans  $V$  et un voisinage fermé de  $x$  inclus dans  $V$ . (Solution p. 49.)

### Définition – Propriétés vraies dans un voisinage / localement

Soit  $X$  un espace métrique et  $\mathcal{F}$  une collection d'ensembles de  $X$ . Une propriété  $P$ , dépendant d'un ensemble  $A$  appartenant à  $\mathcal{F}$

$$P : A \in \mathcal{F} \rightarrow \{\text{vrai, faux}\}$$

est *vraie au voisinage de*  $x \in X$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $V \in \mathcal{F}$  et  $P(V)$  soit vraie. Elle est *localement vraie* si elle est vraie au voisinage de tout  $x \in X$ .

**Exercice – Fonction localement bornée (••)** Montrer qu'une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas nécessairement bornée sur  $\mathbb{R}$ , mais qu'elle y est toujours localement bornée. (Solution p. 50.)

## Suites, limites et continuité

### Définition – Limite d'une suite de points

Une suite  $x_k$  de valeurs d'un espace métrique  $X$  a comme *limite* un point  $\ell$  de  $X$  – ou *converge vers*  $\ell$  – si  $x_k$  est arbitrairement proche de  $\ell$  à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que pour tout  $k \geq n$ ,  $d(x_k, \ell) \leq \varepsilon$ , ou encore si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_k, \ell) = 0.$$

On utilisera alors une des deux notations :

$$\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k \text{ ou } x_k \rightarrow \ell \text{ quand } k \rightarrow +\infty.$$

Une suite possédant une limite est dite *convergente*.



### Proposition – Unicité de la limite d’une suite

Si une suite  $x_k$  admet une limite, celle-ci est unique.

**Démonstration** Par l’inégalité triangulaire (p. 10), si les points  $\ell$  et  $\ell'$  sont des limites de la suite des  $x_k$ , alors pour tout entier  $k$  on a

$$d(\ell, \ell') \leq d(x_k, \ell) + d(x_k, \ell').$$

Comme il existe des rangs  $n$  et  $n'$  tels que lorsque  $k \geq n$  et  $k \geq n'$ , on a  $d(x_k, \ell) \leq \varepsilon/2$  et  $d(x_k, \ell') \leq \varepsilon/2$ , pour  $k = \max(n, n')$ , on a  $d(\ell, \ell') \leq \varepsilon$ . La valeur  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, on en déduit que  $d(\ell, \ell') = 0$ , soit par l’axiome de séparation (p. 10), que  $\ell = \ell'$ . Il n’existe donc qu’une limite possible pour la suite des  $x_k$ . ■

### Proposition – Caractérisations séquentielles

Soit  $X$  un espace métrique et  $A$  un ensemble de points de  $X$ .

- Un point adhère à  $A$  s’il existe une suite de points de  $A$  qui converge vers ce point.
- Un point  $x$  est *intérieur* à un ensemble  $A$  si toute suite convergeant vers  $x$  appartient à  $A$  à partir d’un certain rang.
- Un ensemble  $A$  est *fermé* si la limite de toute suite de points de  $A$  qui est convergente (dans  $X$ ) appartient à  $A$ .
- Un point est *frontière* de  $A$  s’il existe une suite de points de  $A$  qui converge vers ce point et une suite de points du complémentaire de  $A$  dans  $X$  qui converge vers ce point.
- Un ensemble  $V$  est un *voisinage* d’un point  $x$  de  $X$  si toute suite convergeant vers  $x$  appartient à  $V$  à partir d’un certain rang.
- Un ensemble  $A$  est *ouvert* si toute suite de points de  $X$  qui converge vers un point de  $A$  appartient à  $A$  à partir d’un certain rang.

### Définition – Limite d’une fonction en un point

Soit  $f : X \subset Y \rightarrow Z$  une application définie sur un sous-ensemble  $X$  d’un espace métrique  $Y$  et à valeurs dans un espace métrique  $Z$ . Soit  $x$  un point de  $Y$  adhérent à  $X$ . Le point  $\ell \in Z$  est la *limite* de  $f$  en  $x$  si pour toute suite  $x_k$  de points de  $X$  convergeant vers  $x$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \ell$ . On notera alors

$$\ell = \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ ou } f(y) \rightarrow \ell \text{ quand } y \rightarrow x.$$

S’il est nécessaire d’être explicite sur le domaine de  $f$ , on pourra noter

$$\ell = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in X}} f(y) \text{ ou } f(y) \rightarrow \ell \text{ quand } y \rightarrow x, y \in X.$$

### Proposition – Unicité de la limite d’une fonction en un point

Si la fonction  $f$  admet une limite en  $x$ , celle-ci est unique.

**Démonstration** Un corollaire de l’unicité de la limite des suites (p. 17). ■

### Définition – Continuité

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est *continue en*  $x \in X$  si et seulement si la limite de  $f$  existe en  $x$  et vaut  $f(x)$  :

$$f(y) \rightarrow f(x) \text{ quand } y \rightarrow x.$$

Elle est *continue (sur  $X$ )* si elle est continue en tout point  $x \in X$ .

Il est évident que si  $x_k$  est la suite constante égale à  $x$ , alors  $f(x_k)$  tend vers  $f(x)$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ . La valeur  $f(x)$  est donc la seule limite possible de  $f(y)$  quand  $y \rightarrow x$ . Par conséquent on peut également dire que  $f$  est continue en  $x \in X$  si et seulement si elle admet une limite en  $x$ , sans préciser sa valeur.

### Proposition – Composition de fonctions continues

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  des espaces métriques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  et soit  $g : Y \rightarrow Z$  des fonctions continues en  $x \in X$  et  $y = f(x) \in Y$  respectivement. Alors la fonction composée  $g \circ f$  est continue en  $x$ .

**Démonstration** Si la suite de points  $x_k$  de  $X$  converge vers  $x$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , alors par continuité, la suite  $y_k := f(x_k)$  de points de  $Y$  converge vers  $y = f(x)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Donc la suite  $g(y_k) = (g \circ f)(x_k)$  converge vers quand  $k \rightarrow +\infty$ . La fonction  $g \circ f$  est donc continue en  $x$ . ■

### Proposition – Continuité de la distance

Soit  $X$  un espace métrique,  $y$  un point de  $X$  et  $A$  un sous-ensemble non vide de  $X$ . Les fonctions “distance au point  $y$ ” :

$$d(\cdot, y) : x \in X \mapsto d(x, y) \in [0, +\infty[$$

et “distance à l’ensemble  $A$ ” :

$$d(\cdot, A) : x \in X \mapsto d(x, A) \in [0, +\infty[$$

sont des applications continues.

**Démonstration** Pour tout  $x_0 \in X$ , par inégalité triangulaire (p. 10) on a

$$|d(x, y) - d(x_0, y)| \leq d(x_0, x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow x_0,$$

la fonction  $d(\cdot, y)$  est donc continue en  $x_0$ .

Pour tout  $a \in A$ , par inégalité triangulaire (p. 10), on a  $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a)$  et donc par passage à l'inf sur  $A$ ,  $d(x, A) \leq d(x, x_0) + d(x_0, A)$ . En intervertissant  $x$  et  $x_0$ , on obtient également  $d(x_0, A) \leq d(x_0, x) + d(x, A)$ . Par symétrie de la distance (p. 10), ces deux inégalités entraînent

$$|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x_0, x)$$

et donc  $d(x, A) \rightarrow d(x_0, A)$  quand  $x \rightarrow x_0$ . ■

### Proposition – Continuité et adhérence

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est continue en  $x \in X$  si et seulement si pour tout  $A \subset X$ ,  $f(x)$  adhère à  $f(A)$  si  $x$  adhère à  $A$  :

$$x \in \overline{A} \implies f(x) \in \overline{f(A)}.$$

**Démonstration** Supposons que  $f$  soit continue en  $x$ , c'est-à-dire que  $f(y) \rightarrow f(x)$  quand  $y \rightarrow x$ . Soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$  tel que  $x$  adhère à  $A$ . Dans l'espace métrique  $X$ , cela signifie que  $d(x, A) = 0$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite de points  $x_k$  de  $A$  telle que  $d(x, x_k) \rightarrow 0$  quand  $x_k \rightarrow x$ . Par conséquent,  $f(x_k) \rightarrow f(x)$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , soit  $d(f(x_k), f(x)) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Comme l'ensemble  $\{f(x_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$  est un sous-ensemble de  $f(A)$ , nous en déduisons que  $d(f(x), f(A)) = 0$  : le point  $f(x)$  adhère à  $f(A)$ .

Réciproquement, si  $f(y) \not\rightarrow f(x)$  quand  $y \rightarrow x$ , il existe une suite de points  $x_k$  tendant vers  $x$  tels que  $f(x_k)$  ne tende pas vers  $f(x)$ . Par conséquent, on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  et une suite  $y_j$  extraite de  $x_k$  telle que  $y_j \rightarrow x$  et pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $d(f(y_j), f(x)) > \varepsilon$ . Donc  $x$  adhère à  $A = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ , mais  $f(x)$  n'adhère pas à  $\{f(y_j) \mid j \in \mathbb{N}\} = f(\{y_j \mid j \in \mathbb{N}\})$  ;  $f(x)$  n'adhère donc pas à  $f(A)$ . ■

### Continuité et image réciproque

Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  où  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ensemble fermé (resp. ouvert) de  $Y$  par  $f$  est un ensemble fermé (resp. ouvert) de  $X$ .

**Démonstration** La démonstration est donnée en annexe (p. 37) dans le cadre plus général des espaces topologiques. ■

**Exercice – Courbes de niveau (●)** Montrer que pour toute fonction continue  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et tout  $c \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$  est fermé. (Solution p. 50.)

**Exercice – Boules ouvertes et fermées (●●)** Montrer que toute “boule ouverte”  $B(x, r)$  est ouverte et que toute “boule fermée”  $\overline{B}(x, r)$  est fermée. (Solution p. 50.)

## Complétude

### Définition – Point fixe

Soit  $f : X \rightarrow X$  une application d'un ensemble  $X$  dans lui-même. Un élément  $x \in X$  est un *point fixe* de  $f$  si  $x = f(x)$ .

### Points fixes et zéros

Être un point fixe d'une fonction  $f : X \rightarrow X$ , c'est donc être déterminé **implicitement** par l'équation  $x = f(x)$ . Si  $X$  est un sous-espace d'un espace vectoriel, cela équivaut à dire que  $x$  est une solution de l'équation  $x - f(x) = 0$ , soit un *zéro* (appelé également une *racine*) de la fonction  $x \in X \mapsto x - f(x)$ .

La démarche inverse – qui consiste à caractériser les solutions d'une équation comme des point fixes – peut être utile pour établir des résultats d'existence et d'unicité de solutions ou obtenir des méthodes numériques pour leur calcul. Un exemple élémentaire de ce type de transformation : le nombre d'or est déterminé comme l'unique solution de l'équation

$$x^2 = x + 1, \quad x > 0$$

ou encore comme un zéro de fonction par l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x > 0;$$

il peut également être caractérisé comme un point fixe par l'équation

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Ce type de transformation n'est toutefois pas unique : un zéro de fonction peut être caractérisé par une infinité d'équations de type point fixe. Parmi cette multitude de choix, il faudra déterminer une reformulation qui soit utile aux objectifs poursuivis, ce qui n'a rien d'automatique. On se reportera à l'exercice “Le nombre d'or (p. 60)” pour prolonger l'étude de cet exemple particulier.

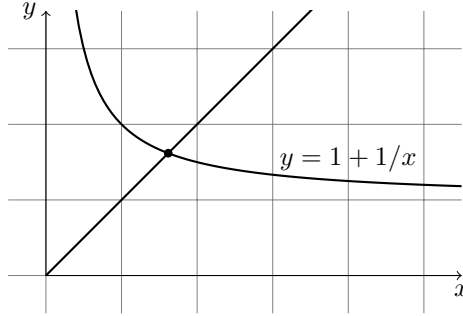


FIGURE 4 – Le nombre d’or comme point fixe de  $x \mapsto 1 + 1/x$ .

### Algorithmes et critères de convergence

Dans un algorithme (idéalisé) de calcul d’une suite de valeurs numériques, il n’est pas évident d’établir un critère de convergence qui garantisse exactement que la suite calculée ait une limite, quand cette limite potentielle est inconnue.

Vérifier que  $|x_{k+1} - x_k| \rightarrow 0$  par exemple est insuffisant pour garantir une limite comme en atteste la suite des  $x_k = \sum_{j=0}^k 1/(j+1)$ . Vérifier que la série de terme général  $|x_{k+1} - x_k|$  est bornée, c’est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x_{k+1} - x_k| < +\infty$$

va bien garantir la convergence, mais va par contre rejeter des suites convergentes telle que  $x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j/(j+1)$ . Un critère plus adapté serait d’examiner le développement décimal de  $x_k$  et de vérifier que quel que soit le nombre de décimales souhaité après la virgule, le développement de  $x_k$  finit par se stabiliser au-delà d’un certain rang  $m$  (qui dépend du nombre de décimales). Mais là aussi, il existe des cas pathologiques qui convergent sans respecter le critère, comme la suite des  $x_k = 1 + (-1)^k 2^{-k}$ , dont le développement avec 0 décimales après la virgule – c’est-à-dire la partie entière – oscille indéfiniment entre 0 et 1.

C’est la notion de suite de Cauchy qui capture le bon critère ; pour une suite numérique (à valeurs réelles ou dans  $\mathbb{R}^n$ ) “être de Cauchy” – ou “passer le test de Cauchy” ou encore “vérifier le critère de Cauchy” – est équivalent à être convergente.

### Définition – Suite de Cauchy

Une suite de points  $x_k$  d’un espace métrique  $X$  est de Cauchy si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $m$  tel que pour tous les entiers  $n \geq m$  et  $p \geq m$ ,  $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$ .

### Définition – Diamètre

Le diamètre d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace métrique  $X$  est donné par :

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x \in A, y \in A\}.$$

### Proposition – Suite de Cauchy et diamètre

Une suite de points  $x_k$  est de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{diam}(\{x_n \mid n \geq k\}) = 0.$$

### Proposition – Toute suite convergente est de Cauchy

Toute suite de points convergente dans un espace métrique est de Cauchy.

**Démonstration** Soit  $X$  un espace métrique et  $x_k$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$  ; il existe un rang  $m$  au-delà duquel on a  $d(x_k, \ell) \leq \varepsilon/2$ . Par conséquent, si  $n \geq m$  et  $p \geq m$ ,

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_p) \leq \varepsilon.$$

La suite  $x_k$  est donc de Cauchy. ■

### Réciproque ?

Il est parfois plus facile de vérifier qu'une suite de points dans un espace métrique satisfait le critère de Cauchy que de vérifier qu'elle est convergente, en particulier quand la limite de la suite est inconnue. Malheureusement, dans ce cadre très général, il n'est pas possible en général de déduire la convergence du fait que la suite vérifie le critère de Cauchy. Ainsi, dans  $\mathbb{Q}$ , considéré en tant que sous-espace métrique de  $\mathbb{R}$ , la suite qui définit le développement décimal de  $\sqrt{2}$  à l'ordre  $k$  :

$$x_k = \frac{a_k}{10^k} \text{ où } a_k = \max \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 2(10^k)^2\}$$

est de Cauchy – on peut prouver que  $|x_n - x_p| \leq 1/10^m$  quand  $n \geq m$  et  $p \geq m$  – mais n'est pas convergente. En effet, la suite converge dans  $\mathbb{R}$ , mais sa limite  $\sqrt{2}$  est irrationnelle ; cette suite n'a donc pas de limite dans  $\mathbb{Q}$  (une telle limite serait aussi une limite dans  $\mathbb{R}$ , ce qui contredirait son unicité.)

L'ensemble  $\mathbb{R}$  possède une propriété bien utile qui fait défaut à  $\mathbb{Q}$  : toute suite de Cauchy y est convergente.

### Définition – Espaces complets

Un espace métrique  $X$  est *complet* si et seulement si toute suite de Cauchy est convergente. Un espace vectoriel normé  $E$  complet est qualifié d'*espace de Banach*<sup>2</sup>.

### Proposition – Complétude de l'espace euclidien

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est complet.

**Démonstration** Dans les cas de  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire quand  $n = 1$ ), le résultat est une conséquence directe de la construction de  $\mathbb{R}$  comme complété de  $\mathbb{Q}$ <sup>3</sup>. Pour des valeurs de  $n > 1$ , si  $x_k$  est une suite de Cauchy, ses composantes  $x_k^1, \dots, x_k^n$  sont aussi de Cauchy car pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$|x_k^i - x_p^i| \leq \|x_k - x_p\|.$$

Comme  $\mathbb{R}$  est complet, chaque suite  $x_k^i$  admet donc une limite, notée  $\ell^i$ . Si l'on note  $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$ , on déduit de l'égalité

$$\|x_k - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^i - \ell^i)^2}$$

la convergence de  $x_k$  vers  $\ell$ . Toute suite de Cauchy de  $\mathbb{R}^n$  est donc convergente. ■

### Proposition – Caractérisation des sous-espaces complets

Soit  $X$  un espace métrique complet. Un sous-espace  $Y$  de  $X$  est complet si et seulement si  $Y$  est un sous-ensemble fermé de  $X$ .

**Démonstration** Si  $Y$  est complet, toute suite de point de  $Y$  qui converge dans  $X$  est de Cauchy (p. 22), donc a une limite dans  $Y$  puisque celui-ci est complet. L'ensemble  $Y$  est donc fermé dans  $X$ .

Réciproquement, si  $Y$  est fermé dans  $X$  et qu'une suite de points de  $Y$  est de Cauchy, elle converge dans  $X$  qui est complet et par conséquent dans  $Y$ . Le sous-espace  $Y$  est donc complet. ■

---

2. d'après Stefan Banach, un mathématicien polonais du 20ème siècle d'après lequel sont nommés de nombreux concepts et théorèmes.

3. bien sûr si l'on a utilisé une technique alternative pour construire  $\mathbb{R}$ , par exemple par les coupures de Dedekind, la complétude de  $\mathbb{R}$  n'a rien d'automatique.

### Proposition – Existence d'un maximum

Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est fermé et borné, toute fonction continue  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  atteint son maximum :

$$\text{il existe } a \in K \text{ tel que } f(a) = \max_{x \in K} f(x).$$

En composant une fonction continue vectorielle  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  et la fonction continue norme, on en déduit en particulier :

### Corollaire – Borne des fonctions continues

Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  est fermé et borné, toute fonction continue  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est bornée :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in K} \|f(x)\| = \max_{x \in K} \|f(x)\| < +\infty.$$

**Démonstration – Existence d'un maximum** Soit  $x_k$  une suite de valeurs de  $K$  maximisante pour  $f$ , c'est-à-dire telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup_{x \in K} f(x) \in ]0, +\infty].$$

S'il existe une valeur  $x \in K$  empruntée une infinité de fois par la suite  $x_k$ , la fonction  $f$  atteint son maximum en  $x$  et la preuve est achevée. Dans le cas contraire – ce que nous supposons désormais – toute suite extraite  $y_j$  de  $x_k$  prend une infinité de valeurs distinctes et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} f(y_j) = \sup_{x \in K} f(x)$ .

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $K$  étant borné, il peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles du pavage régulier  $\mathcal{P}_j$  de  $\mathbb{R}^n$  composé des pavés :

$$[i_1 2^{-j}, (i_1 + 1) 2^{-j}] \times \cdots \times [i_n 2^{-j}, (i_n + 1) 2^{-j}], \quad (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Dans la collection finie de pavé de  $\mathcal{P}_0$  nécessaire pour recouvrir  $K$ , il en existe nécessairement au moins un qui contient une infinité de valeurs de  $x_k$  ; notons  $P_0$  ce pavé et  $y_0$  la première valeur  $x_{k_0}$  de  $x_k$  qui soit dans  $P_0$ . Parmi les  $2^n$  pavés de  $\mathcal{P}_1$  qui suffisent pour couvrir  $P_0$ , l'un d'entre eux au moins contient une infinité de  $x_k$ ,  $k \geq k_1$  ; notons  $P_1$  ce pavé et  $y_1$  la première valeur  $x_{k_1}$  de  $x_k$ ,  $k > k_0$  qui soit dans  $P_1$ .

En itérant ce procédé, on construit une suite extraite  $y_j$  de  $x_k$  et de pavés  $P_j$  tels que

$$\text{pour tout } j \in \mathbb{N}, y_j \in P_j \in \mathcal{P}_j \text{ et } P_{j+1} \subset P_j.$$

Comme  $\text{diam}(P_j) = \sqrt{n} 2^{-j}$ , on a pour tout  $j \in \mathbb{N}$

$$\text{diam}(\{y_i \mid i \geq j\}) \leq \sqrt{n} 2^{-j} \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow +\infty.$$



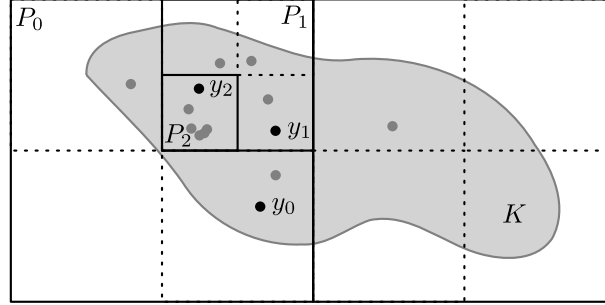


FIGURE 5 – Suite de pavés imbriqués  $P_j$  et suite  $y_j$  extraite des  $x_k$ .

La suite  $y_j$  est donc de Cauchy ; elle a donc une limite dans  $K$ , qui est complet comme sous-ensemble fermé dans l'espace complet  $\mathbb{R}^n$  (p. 23). Si  $\ell \in K$  est sa limite on a donc par continuité de  $f$

$$\sup_{x \in K} f(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} f(y_j) = f(\ell).$$

La fonction  $f$  admet donc un maximum en  $\ell$ . ■

### Définition – Application contractante

Soit  $X$  un espace métrique. Une fonction  $f : X \rightarrow X$  est  $\kappa$ -contractante, où  $\kappa \in [0, 1[$ , si pour tout couple de points  $x$  et  $y$  de  $X$ , on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y).$$

Une telle application est *contractante* si elle est  $\kappa$ -contractante pour un  $\kappa \in [0, 1[$ .

### Théorème – Théorème de point fixe de Banach

Soit  $f : X \rightarrow X$  une application contractante dans un espace métrique  $X$  complet. L'application  $f$  admet un unique *point fixe*  $x$ , c'est-à-dire une unique solution  $x \in X$  à l'équation

$$x = f(x).$$

**Démonstration** L'unicité du point fixe (l'existence d'au plus une solution à  $x = f(x)$ ) est simple à établir : si  $x$  et  $y$  sont deux points fixes de  $f$ , c'est-à-dire

si  $x = f(x)$  et  $y = f(y)$ , alors  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ . L'application  $f$  étant  $\kappa$ -contractante, on a donc

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y);$$

et puisque  $0 \leq \kappa < 1$ , cette inégalité entraîne  $d(x, y) = 0$ , soit  $x = y$ .

Quant à l'existence du point fixe, sa preuve est constructive : nous allons établir que quel que soit le choix de  $x_0 \in E$ , la suite de valeurs définie par

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers un point fixe. Le point crucial est d'établir que cette suite admet une limite  $\ell$  ; en effet, si ce résultat est acquis, en passant à la limite sur  $n$  dans la relation de récurrence et exploitant la continuité de l'application  $f$ , on obtient

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

À cette fin, nous allons prouver que la suite des  $x_n$  est de Cauchy ; l'existence d'une limite se déduira alors de la complétude de  $X$ . On remarque tout d'abord que pour tout entier  $n$ ,

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \kappa d(x_{n+1}, x_n),$$

ce qui par récurrence fournit pour tout  $n$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \kappa^n d(x_1, x_0).$$

Par l'inégalité triangulaire (p. 10), pour tout couple d'entiers  $n$  et  $p$ , on a

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \kappa^{n+k} d(x_1, x_0).$$

Dans le second membre apparaît une somme de termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \kappa^{n+k} = \kappa^n \frac{1 - \kappa^p}{1 - \kappa} \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa};$$

on en déduit

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} d(x_1, x_0).$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 indépendamment de  $p$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ; la suite des  $x_n$  est bien de Cauchy. ■

## Annexe – Espaces produits

### Définition – Produit d’espaces vectoriels normés

On appelle *produit des espaces vectoriels normés*  $E_1, \dots, E_n$ , munis des normes  $\|\cdot\|_{E_1}, \dots, \|\cdot\|_{E_n}$ , l’espace vectoriel  $E := \prod_{k=1}^n E_k := E_1 \times \dots \times E_n$ , muni de la norme

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{\|x_1\|_{E_1}^2 + \dots + \|x_n\|_{E_n}^2}.$$

### Définition – Produit d’espaces métriques

On appelle *produit des espaces métriques*  $X_1, \dots, X_n$ , munis des distances  $d_{X_1}, \dots, d_{X_n}$  le produit cartésien  $X = \prod_{k=1}^n X_k = X_1 \times \dots \times X_n$ , muni de la distance

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{d_{X_1}(x_1, y_1)^2 + \dots + d_{X_n}(x_n, y_n)^2}.$$

### Proposition – Continuité des projections

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des espaces métriques. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , l’application  $p_k : \prod_j X_j \rightarrow x_k \in X_k$  telle que

$$p_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_k$$

est continue.

**Démonstration** Pour tout couple  $x$  et  $x^0 \in \prod_{j=1}^n X_j$ , on a

$$d_{X_k}(x_k, x_k^0) \leq \sqrt{d_{X_1}(x_1, x_1^0)^2 + \dots + d_{X_n}(x_n, x_n^0)^2} = d(x, x^0),$$

par conséquent,  $x_k \rightarrow x_k^0$  quand  $x \rightarrow x^0$ . ■

### Proposition – Continuité des injections

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des espaces métriques. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , l’application  $i_k : X_k \rightarrow \prod_{j=1}^n X_j$  telle que

$$i_k(x_k) = (0, \dots, 0, x_k, 0 \dots 0)$$

est continue.

**Démonstration** Pour tout couple  $x_k$  et  $x_k^0 \in X_k$ , on a

$$\begin{aligned} d(i_k(x_k), i_k(x_k^0)) &= d((0, \dots, x_k, \dots, 0), (0, \dots, x_k^0, \dots, 0)) \\ &= \sqrt{0 + \dots d(x_k, x_k^0)^2 + \dots + 0} \\ &= d_{X_k}(x_k, x_k^0), \end{aligned}$$

donc  $i_k(x_k) \rightarrow i_k(x_k^0)$  quand  $x_k \rightarrow x_k^0$ . ■

### Proposition – Continuité de la distance

La fonction distance  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$  est une application continue pour tout espace métrique  $(X, d)$ .

**Démonstration** Soient  $(x_0, y_0)$  et  $(x, y)$  deux points de l'espace produit  $X \times X$ . Par l'inégalité triangulaire (p. 10),  $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y)$  et  $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y) + d(y, y_0)$ , donc

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_0, x) + d(y_0, y).$$

Or la distance sur le produit  $X \times X$  est définie comme

$$d_{X \times X}((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{d(x, x_0)^2 + d(y, y_0)^2},$$

donc

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq 2d_{X \times X}((x, y), (x_0, y_0))$$

et  $d(x, y) \rightarrow d(x_0, y_0)$  quand  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ,  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ . ■

## Annexe – Compacité

### Définition – Compacité séquentielle

Un ensemble  $K$  d'un espace métrique est (*séquentiellement*) *compact* si toute suite de points de  $K$  admet une sous-suite qui converge dans  $K$ .

### Théorème – Théorème de Heine-Borel

Un ensemble  $K$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est compact si et seulement s'il est fermé et borné.

**Démonstration** Supposons  $K$  compact ; soit  $x_k$  une suite de points de  $K$  qui converge dans  $\mathbb{R}^n$ , vers une limite notée  $\ell$ . Il existe alors une sous-suite  $y_k$  de  $x_k$  qui converge dans  $K$ ; or comme cette sous-suite a la même limite que  $x_k$ ,  $\ell$  appartient à  $K$ . L'ensemble  $K$  est donc fermé.

Si  $K$  est non-borné, il existe une suite  $x_k$  non-bornée de points de  $K$ . Toute sous-suite de  $x_k$  étant également non-bornée, elle ne peut donc converger et par conséquent  $K$  ne peut pas être compact.

Finalement, supposons  $K$  fermé et borné. La construction d'une sous-suite convergente extraite d'une suite arbitraire  $x_k$  de  $K$  est identique à celle effectuée dans la démonstration de l'existence d'un maximum d'une fonction scalaire continue définie sur un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$  (p. 24). ■

### **Théorème – Image d'un compact**

L'image d'un ensemble compact par une application continue est un ensemble compact.

**Démonstration** Soit  $f : K \subset X \rightarrow Y$  où  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques et  $K$  un sous-ensemble compact de  $X$ . Soit  $y_k$  une suite de points de  $f(K)$ ; par construction, il existe une suite de points  $x_k$  de  $K$  tels que  $f(x_k) = y_k$ . Soit  $z_k$  une sous-suite de  $x_k$  qui converge vers un  $\ell \in K$ ; par continuité de  $f$  en  $\ell$ , la suite des  $f(z_k)$  – qui est une suite extraite des  $y_k$  – converge vers  $f(\ell) \in f(K)$ . L'ensemble  $f(K)$  est donc compact. ■

### **Corollaire – Existence d'un maximum**

Une fonction continue  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble compact  $K$  admet un maximum global.

**Démonstration** Soit  $x_k \in K$  une suite maximisante de  $f$ , c'est-à-dire telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Il existe une suite  $y_k$  extraite de  $x_k$  qui converge vers un point  $\ell$  de  $K$ . Par continuité de  $f$  en  $\ell$ , on a

$$f(\ell) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_k) = \sup_{x \in K} f(x).$$

La fonction  $f$  admet donc un maximum en  $\ell$ . ■

### Proposition – Complétude de l'espace des fonctions bornées

Soit  $X$  un ensemble et  $Y$  un espace vectoriel normé complet. L'ensemble des fonctions  $f$  de  $X$  dans  $Y$  bornées – telles qu'il existe un  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\|f(x)\| \leq M$  – muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est complet.

**Démonstration** Soit  $f_k$  une suite de fonctions bornées qui soit de Cauchy pour la norme de la convergence uniforme. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $m \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq m$  et  $p \geq m$ , on ait

$$\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout  $x \in X$ , on a  $\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$ , donc la suite des  $f_k(x)$  est de Cauchy dans  $Y$ . L'espace  $Y$  étant par hypothèse complet, cette suite a une limite, que nous notons  $f_\infty(x)$ . Par continuité de la distance (p. 18), pour tout  $x \in X$  et tout  $n \geq m$ , on a

$$\|f_n(x) - f_\infty(x)\| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$$

et donc  $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f_\infty(x)\| \leq \varepsilon$ . La fonction  $f_\infty$  est donc bornée, car

$$\|f_\infty(x)\| \leq \|f_n(x)\| + \varepsilon,$$

et est la limite uniforme de la suite des  $f_k$ . ■

### Proposition – Complétude de l'espace des fonctions continues

Soit  $X$  un espace métrique compact et  $Y$  un espace vectoriel normé complet. L'ensemble des fonctions continues de  $X$  dans  $Y$  muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

est complet.

**Démonstration** En préambule : pour toute fonction  $f$  continue de  $X$  dans  $Y$ , la fonction

$$x \in X \mapsto \|f(x)\| = d(f(x), 0) \in \mathbb{R},$$

continue (p. 18) et définie sur un compact, et donc admet un maximum (p. 29) ; la fonction  $f$  est donc bornée. L'espace des fonctions continues de  $X$  dans  $Y$  est donc un sous-espace métrique de l'espace des fonctions bornées de  $X$  dans  $Y$ .

Soit  $f_k$  une suite de Cauchy de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ . Cette suite est convergente dans l'espace des fonctions bornées en raison de la complétude de ce dernier (p. 30). Il nous suffit de montrer que sa limite (uniforme) est continue pour conclure la preuve.

Soit  $f$  la limite des  $f_k$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $k$  tel que

$$\sup_{x \in X} \|f_k(x) - f(x)\| \leq \varepsilon/3.$$

Pour tout  $x \in X$ ,  $f_k$  étant continue en  $x$ , pour  $y$  assez proche de  $x$  on a  $\|f_k(x) - f_k(y)\| \leq \varepsilon/3$ . Or, par l'inégalité triangulaire (p. 6),

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(y)\| + \|f_k(y) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $f$  est donc continue. ■

La notion de compacité peut également être définie dans des espaces topologiques généraux, sans recourir à une distance ou aux suites de points.

### Définition – Propriété de l'intersection finie

Une collection d'ensembles vérifie la propriété de l'intersection finie si toute sous-collection finie est d'intersection non vide.

### Définition – Compacité et propriété de l'intersection finie

Un ensemble  $K$  d'un espace topologique est *compact* si pour toute collection de sous-ensembles de  $K$  vérifiant la propriété de l'intersection finie, il existe un point adhérent à tous les ensembles de la collection.

Autrement dit, si pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $A$  est un sous-ensemble de  $K$  et si pour toute suite finie  $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$  il existe un  $x \in K$  tel que  $x \in A_1 \cap \dots \cap A_k$ , alors il existe un  $x \in K$  adhérent à tout  $A \in \mathcal{A}$ .

### Compacité et compacité séquentielle

Dans les espaces métriques, compacité et compacité séquentielle sont équivalentes.

**Démonstration** Supposons que  $K$  est un sous-ensemble compact de l'espace métrique  $X$ . Soit  $x_k$  une suite de points de  $K$ . Considérons la collection d'ensembles  $\mathcal{A}$  définie par

$$\mathcal{A} = \{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ où } A_k = \{x_j \mid j \geq k\}.$$

La collection  $\mathcal{A}$  vérifie la propriété d'intersection finie : en effet, si  $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_p} \in \mathcal{A}$ , alors

$$A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_p} = A_k \text{ avec } k = \max(k_1, \dots, k_p)$$

et donc leur intersection est non-vide. Par conséquent, il existe un  $x \in K$  tel que pour tout rang  $k$ ,  $x$  adhère à  $A_k = \{x_j \mid j \geq k\}$ , c'est-à-dire  $d(x, \{x_j \mid j \geq k\}) = 0$ . En particulier, il existe un  $y_0 := x_{k_0} \in A_0$  tel que  $d(x, y_0) \leq 2^{-0}$ , un  $y_1 := x_{k_1} \in A_{k_0+1}$  tel que  $d(x, y_1) \leq 2^{-1}$ , etc. La suite  $y_k$  est extraite de  $x_k$  et vérifie  $d(x, y_k) \leq 2^{-k}$ , elle converge donc vers  $x$ . De toute suite de points de  $K$  on peut donc extraire une sous-suite qui converge dans  $K$  :  $K$  est donc séquentiellement compact.

Réciproquement, supposons  $K$  séquentiellement compact. Nous allons montrer que si  $\mathcal{A}$  est une collection d'ensembles de  $K$  telle que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} = \emptyset,$$

où  $\overline{A}$  désigne l'adhérence de  $A$  dans  $K$ , alors il existe un nombre fini d'ensemble de  $\mathcal{A}$  dont l'intersection est vide ; nous aurons alors établi la contraposée de la propriété qui définit la compacité de  $K$  et donc la compacité de  $K$ . Au préalable, nous allons montrer que sous l'hypothèse ci-dessus d'intersection vide des adhérences, il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , on peut trouver un  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $B(x, \varepsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$ . En effet, si cette propriété n'était pas vérifiée, on pourrait construire une suite  $x_k$  de points de  $K$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , il existe un  $a_k^A \in \overline{A}$  tel que  $d(x_k, a_k^A) < 2^{-k}$ . Mais une telle suite aurait alors une sous-suite convergente ; la limite serait dans l'adhérence de chacun des  $A \in \mathcal{A}$ , en contradiction avec l'hypothèse initiale. On utilise ce résultat de la façon suivante : on sélectionne un  $x_0 \in K$  et un  $A_0 \in \mathcal{A}$  tel que  $\overline{A_0} \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$ , puis un  $x_1 \in K \setminus B(x_0, \varepsilon)$  et un  $A_1 \in \mathcal{A}$  tel que  $\overline{A_1} \cap B(x_1, \varepsilon) = \emptyset$ , ce qui induit

$$(\overline{A_0} \cap \overline{A_1}) \cap (B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)) = \emptyset,$$

puis un  $x_2 \in K \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon))$  et un  $A_2 \in \mathcal{A}$  tel que  $\overline{A_2} \cap B(x_2, \varepsilon) = \emptyset$ , etc. Le procédé s'arrête en un nombre fini d'étapes, dès que  $B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_k, \varepsilon)$  recouvre  $K$ . Cela arrive nécessairement puisque les  $x_k$  ainsi construits vérifient  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  si  $i \neq j$  ; si cette suite était infinie, elle ne pourrait admettre de suite extraite convergente, en contradiction avec l'hypothèse de compacité séquentielle. Par conséquent, il existe un rang  $k$  tel que

$$K \subset B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_k, \varepsilon)$$

et comme

$$(\overline{A_0} \cap \dots \cap \overline{A_k}) \cap (B(x_0, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_k, \varepsilon)) = \emptyset,$$

on en déduit que  $\overline{A_0} \cap \dots \cap \overline{A_k} = \emptyset$  et donc que  $A_0 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$ , ce qui conclut la preuve. ■



## Annexe – Espace topologique

### Structure topologique d'un espace métrique

Dans un espace métrique, il est possible de se livrer à un exercice d'abstraction en considérant le test d'adhérence entre un point et un ensemble associé à la distance

$$x \text{ adhère à } A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

et en “oubliant” ensuite la distance qui a servi à construire ce test. On remplace ainsi une mesure quantitative de proximité entre points et ensembles par une mesure uniquement qualitative (on teste si “ $x$  est à distance nulle de  $A$ ”).

Alternativement, on peut doter un ensemble  $X$  directement d'un test d'adhérence, tant que celui-ci vérifie les axiomes suivants :

### Définition – Test d'adhérence

Un *test d'adhérence* sur l'ensemble  $X$  est une relation entre éléments de  $X$  et sous-ensembles de  $X$  telle que :

1. Aucun point n'adhère à l'ensemble vide,
2. Tout point d'un ensemble adhère à cet ensemble,
3. Un point adhère à l'union de deux ensembles si et seulement s'il adhère à l'un des deux ensembles,
4. Un point qui adhère à l'ensemble des points adhérents à un ensemble adhère à cet ensemble.

### Définition – Espace topologique

Un *espace topologique* est un ensemble muni d'un test d'adhérence (p. 33). Les éléments de l'ensemble sont appelés des *points*, ses sous-ensembles des *ensembles de points*.

### Définition – Sous-espace topologique

Un sous-ensemble  $Y$  d'un espace topologique  $X$  est un *sous-espace topologique* de  $X$  lorsqu'il est muni du test d'adhérence de  $X$ , restreint aux points et sous-ensembles de  $Y$ .

### Définition – Continuité

Une application  $f : X \rightarrow Y$  définie entre deux espaces topologiques est *continue* en  $x \in X$  si, lorsque  $x$  adhère à  $A$  dans  $X$ ,  $f(x)$  adhère à  $f(A)$  dans  $Y$ . Une application continue en tout point  $x \in X$  est *continue (sur  $X$ )*.

Les applications continues sont les *morphismes* des espaces topologiques : elle préservent la structure des espaces topologiques.

Cette caractérisation “abstraite” des fonctions continues est compatible avec celle adoptée dans les espaces métriques, puisque cette définition y est également une caractérisation de la continuité (p. 19).

Elle se prête à des preuves concises de certains résultats ; ainsi :

### Composée d’applications continues

La composée de fonctions  $f : X \rightarrow Y$  continue en  $x \in X$  et  $g : Y \rightarrow Z$  continue en  $f(x) \in Y$  est continue en  $x$ .

**Démonstration** Si  $x$  adhère à  $A$ , par continuité de  $f$  en  $x$ ,  $f(x)$  adhère à  $f(A)$  ; donc par continuité de  $g$  en  $y = f(x)$ ,  $g(y) = (g \circ f)(x)$  adhère à  $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$ . La composée de  $f$  et de  $g$  est donc continue en  $x$ . ■

### Les espaces métriques sont des espaces topologiques

Soit  $X$  un espace métrique muni d’une distance  $d$ . La relation définie par

$$x \text{ adhère à } A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

est un test d’adhérence sur  $X$ .

### Démonstration

1. Le point  $x$  adhère à l’ensemble vide si et seulement si  $d(x, \emptyset) = 0$ , mais

$$d(x, \emptyset) = \inf_{y \in \emptyset} d(x, y) = +\infty,$$

par conséquent aucun point d’adhère à l’ensemble vide.

2. Si  $x \in A$ , on a

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, x) = 0,$$

donc  $x$  adhère à  $A$ .

3. Si  $x$  adhère à  $A$ , c'est-à-dire si  $d(x, A) = 0$ , alors

$$0 \leq d(x, A \cup B) = \inf_{y \in A \cup B} d(x, y) \leq \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, A) = 0$$

et donc  $x$  adhère à  $A \cup B$ . De la même façon, du fait de la symétrie des rôles des ensembles  $A$  et  $B$ , si  $x$  adhère à  $B$  alors  $x$  adhère à  $A \cup B$ .

Réciproquement, si  $x$  adhère à  $A \cup B$ , alors il existe une suite de points  $x_k$  de  $A \cup B$  telle que  $d(x, x_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Cette suite  $x_k$  admet une suite extraite de points de  $A$  et/ou une suite extraite de points de  $B$ . Dans le premier cas on a donc  $d(x, A) = 0$  et dans le second  $d(x, B) = 0$ , c'est-à-dire que  $x$  adhère à  $A$  et/ou à  $B$ .

4. Les points  $y$  qui adhèrent à l'ensemble  $A$  sont caractérisés par  $d(y, A) = 0$ . Par conséquent, l'ensemble des points  $x$  qui adhèrent à cet ensemble sont caractérisés par

$$d(x, \{y \in X \mid d(y, A) = 0\}) = 0.$$

Pour tout  $x$  de ce type et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $y$  tel que  $d(y, x) \leq \varepsilon/2$  et  $d(y, A) = 0$  et donc un  $z \in A$  tel que  $d(y, z) \leq \varepsilon/2$ . L'inégalité triangulaire (p. 10) fournit donc

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varepsilon$$

et comme  $\varepsilon > 0$  est arbitraire,  $d(x, A) = 0$  :  $x$  adhère à  $A$ .

■

## L'espace topologique généralise l'espace métrique

Les espaces métriques "sont" donc des espaces topologiques (c'est-à-dire héritent automatiquement d'un test d'adhérence, défini à partir de leur distance). À l'inverse, les espaces topologiques qui peuvent être munis d'une distance compatible avec leur test d'adhérence sont dits *métrisables*<sup>4</sup>. Toutefois, tous les espaces topologiques ne sont pas métrisables<sup>4</sup>; la notion d'espace topologique est donc strictement plus générale que la notion d'espace métrique.

## Définition – Définitions topologiques

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un ensemble de points de  $X$ .

- L'*adhérence*  $\overline{A}$  d'un ensemble  $A$  est constituée des points qui adhèrent à l'ensemble  $A$ .

---

4. Par exemple, l'espace formé de deux points  $\{0, 1\}$  où  $x$  adhère à  $A$  si  $x$  appartient à  $A$  ou  $x = 0$  et  $A = \{1\}$  – c'est-à-dire l'espace de Sierpiński – est un espace topologique qui n'est pas métrisable. En effet, si  $d$  était une distance sur cet ensemble, telle que  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $x$  adhère à  $A$ , alors on aurait  $d(0, \{1\}) = d(0, 1) = 0$ , ce qui contredirait l'axiome de séparation pour les distances (p. 10).

- Un ensemble  $A$  est *fermé* s'il est égal à son adhérence :

$$A = \overline{A} \text{ ou } (x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in A).$$

- Un point est *frontière* de  $A$  s'il appartient à l'adhérence de  $A$  et à celle de son complémentaire :

$$x \in \partial A \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{A^c}).$$

- Un point  $x$  est *intérieur* à un ensemble  $A$  s'il n'adhère pas au complémentaire de  $A$

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow x \notin \overline{A^c}.$$

- Un ensemble  $V$  est un *voisinage* d'un point  $x$  de  $X$  si  $x$  est intérieur à  $V$

$$V \text{ voisinage de } x \Leftrightarrow x \notin \overline{V^c}.$$

- Un ensemble  $A$  est *ouvert* s'il est un voisinage de chacun de ses points

$$A = A^\circ \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A^c}).$$

### Calcul topologique – Axiomes de Kuratowski

Avec l'opération d'adhérence  $\overline{(\cdot)}$ , les axiomes définissant un test d'adhérence (p. 33) – et donc un espace topologique – prennent une forme symbolique simple :

1.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ,
2.  $A \subset \overline{A}$ ,
3.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,
4.  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .

### Théorème – Ouverts et fermés

Un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé ; un ensemble est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

**Démonstration** En raisonnant par équivalence, le complémentaire  $F = U^c$  d'un ensemble ouvert  $U$  – qui vérifie aussi  $U = F^c$  – est caractérisé par

$$x \in F^c \Rightarrow x \notin \overline{F^c}^c,$$

soit  $x \in F^c \Rightarrow x \notin \overline{F}$ . La contraposée de cette implication – qui est une proposition logiquement équivalente – est  $x \in \overline{F} \Rightarrow x \in F$ . Comme  $F \subset \overline{F}$ , cela équivaut  $\overline{F} = F$ , c'est-à-dire au caractère fermé de  $F$ .

La démonstration de la seconde partie de l'énoncé est immédiate (le complémentaire du complémentaire d'un ensemble est cet ensemble). ■

### **Théorème – Continuité et image réciproque**

Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  où  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ensemble fermé (resp. ouvert) de  $Y$  par  $f$  est un ensemble fermé (resp. ouvert) de  $X$ .

**Démonstration** Supposons  $f$  continue. Si  $B$  est un ensemble fermé de  $Y$ , par continuité,

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B.$$

Prendre l'image réciproque des deux membre de cette équation fournit

$$\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B),$$

par conséquent  $f^{-1}(B)$  est fermé.

Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout ensemble fermé est un ensemble fermé. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$ ; l'ensemble  $\overline{f(A)}$  étant fermé,

$$\overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} = f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Comme  $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ , on a  $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ , donc

$$f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}.$$

Comme  $A$  est arbitraire,  $f$  est continue.

Montrons la variante avec des ensembles ouverts plutôt que fermés. Supposons  $f$  continue; si  $C$  est un ensemble ouvert de  $Y$ , son complémentaire  $B = Y \setminus C$  est un ensemble fermé. Comme

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B),$$

son image réciproque est le complémentaire d'un fermé dans  $X$  et donc ouverte. La réciproque est établie de façon similaire. ■

## **Exercices**

### **Normes d'opérateurs**

La fonction `norm` du module `numpy.linalg` peut calculer des normes de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , mais également de matrices carrées de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Ainsi, on a par exemple :

```

>>> from numpy import inf
>>> from numpy.linalg import norm
>>> A = [[1.0, 2.0], [3.0, 4.0]]
>>> norm(A)
5.477225575051661
>>> norm(A, 1)
6.0
>>> norm(A, 2)
5.464985704219043
>>> norm(A, inf)
7.0

```

En étudiant la documentation de cette fonction, déterminer pour les quatres exemples d'usage ci-dessus s'il existe une norme  $\|\cdot\|_?$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  dont la norme d'opérateur associée correspond à cette norme de matrice, c'est-à-dire telle que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|_?}{\|x\|_?}.$$

**Etude de `norm(A)` (••)** (Solution p. 50.)

**Etude de `norm(A, 1)` (••)** (Solution p. 51.)

**Etude de `norm(A, 2)` (••)** (Solution p. 51.)

**Etude de `norm(A, inf)` (••)** (Solution p. 52.)

## Droite réelle achevée

La *droite réelle achevée* (ou *droite réelle étendue*) est composée des nombres réels et de  $-\infty$  et  $+\infty$ . Le but de cet exercice est de doter cet ensemble  $[-\infty, +\infty]$ <sup>(5)</sup> d'une distance aux propriétés "raisonnables". A cette fin, on introduit l'espace métrique  $X$  des points du cercle unité de  $\mathbb{R}^2$  d'ordonnée positive :

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ et } y \geq 0 \right\},$$

muni de la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  puis la fonction  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} -\infty & \text{si } (x, y) = (-1, 0), \\ x/y & \text{si } y > 0, \\ +\infty & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

---

5. **Pilule rouge.** Dans le monde réel, on trouvera fréquemment la notation  $\overline{\mathbb{R}}$  pour désigner l'ensemble des réels étendus ; mais cette convention se heurte alors avec la désignation de l'adhérence de  $\mathbb{R}$  dans lui-même, une interprétation selon laquelle on aurait  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ .

**Question 1 (•)** Pouvez-vous donner une interprétation géométrique simple à la grandeur calculée par la fonction  $f$  ?

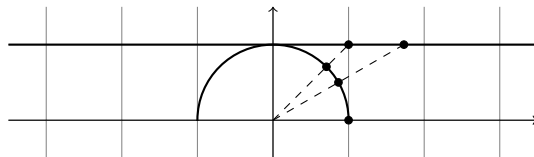


FIGURE 6 – Construction d’une métrique pour la droite réelle achevée.

(Solution p. 53.)

**Question 2 (•)** Montrer que  $f$  est une bijection. (Solution p. 53.)

**Question 3 (••)** En déduire qu’il existe une et une seule fonction distance sur  $[-\infty, +\infty]$  qui fasse de  $f$  une isométrie ; on note  $d^{\pm\infty}$  cette distance. (Solution p. 53.)

**Question 4 (•)** Calculer  $d^{\pm\infty}(0, +\infty)$ ,  $d^{\pm\infty}(-\infty, +\infty)$ ,  $d^{\pm\infty}(-1, 1)$ . (Solution p. 54.)

**Question 5 (•)** Montrer que l’injection canonique  $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in [-\infty, +\infty]$  est une fonction continue. (Solution p. 54.)

**Question 6 (•••)** Yoda a dit “deux façons d’interpréter  $x_k \rightarrow +\infty$  désormais il y a”. Qu’est-ce qu’il a voulu dire ? Est-ce que c’est un problème ? (Solution p. 54.)

**Question 7 (••••)** Suggérer une variante de la construction précédente pour doter l’ensemble  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ( $\infty$  sans signe : ni +, ni -) d’une métrique  $d^\infty$  telle  $|x_k| \rightarrow +\infty$  si et seulement si  $d^\infty(x_k, \infty) \rightarrow 0$ . En déduire que cet ensemble est compact. (Solution p. 54.)

## Localement fermé

Dans un espace métrique<sup>6</sup>  $X$ , un ensemble  $A$  est *localement fermé* si chaque point de  $A$  a un voisinage ouvert  $V$  tel que  $A \cap V$  soit fermé dans  $V$  (Sato 1959).

6. ou plus généralement dans un espace topologique.

**Question 0 (●●●)** Expliquer l’expression “fermé dans  $V$ ” dans la définition ci-dessus ; est-ce que cela fait une différence si l’on remplace cette expression par “fermé” ? (Solution p. 55.)

**Question 1 (●●●)** Montrer que dans  $\mathbb{R}$ , l’intervalle  $[0, 1[$  est localement fermé et que l’image de toute suite convergente est localement fermée. Donner un exemple de sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  qui ne soit pas localement fermé. (Solution p. 55.)

**Question 2 (●●●)** Montrer que tout ensemble fermé est localement fermé, mais aussi que tout ensemble ouvert est localement fermé. Montrer que l’intersection de deux ensembles localement fermés est localement fermé. (Solution p. 56.)

**Question 3 (●●●●)** Montrer qu’un ensemble est localement fermé si et seulement s’il est l’intersection d’un ensemble fermé et d’un ensemble ouvert. (Solution p. 56.)

## Distance entre ensembles

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles fermés bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$  ; on souhaite évaluer à quel point les deux ensembles  $A$  et  $B$  diffèrent – en mesurant à quelle distance les points de  $A$  peuvent être éloignés de l’ensemble  $B$  et réciproquement.

**Question 1 (●)** Est-ce que la distance entre ensembles classique

$$d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b)$$

fait l’affaire ? (Solution p. 56.)

On définit la grandeur

$$d[A, B] = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}.$$

appelée *distance de Hausdorff* entre  $A$  et  $B$ .

**Question 2 (●●)** Calculer  $d[A, B]$  lorsque  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $B = [0, 2] \times [0, 2]$ .

(Solution p. 57.)

**Question 3 (●●●)** Cette terminologie de “distance” de Hausdorff est-elle légitime ? (Solution p. 57.)



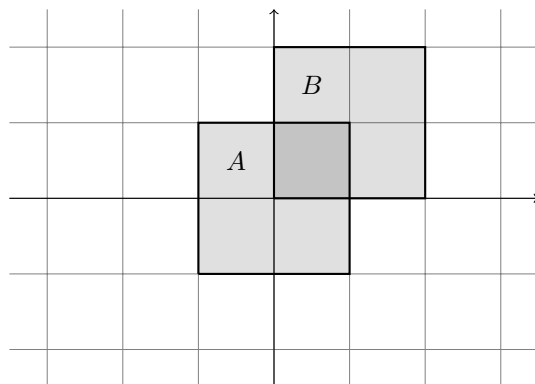


FIGURE 7 – Ensembles  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $B = [0, 2] \times [0, 2]$ .

**Question 4 (••••)** La somme de Minkowski de deux ensembles  $A$  et  $B$  est définie comme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Vérifier que la somme de Minkowski de deux ensembles fermés bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble fermé borné non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Cette opération est-elle continue pour la distance de Hausdorff? (Solution p. 58.)

## Plongement de Kuratowski

Nous souhaitons établir le résultat suivant : tout espace métrique peut être identifié à un sous-ensemble d'un espace vectoriel normé d'une façon qui préserve la distance entre points.

Soit  $X$  un espace métrique et  $x_0$  un point de  $X$ . On associe à l'élément  $x$  de  $X$  la fonction  $f_x : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y).$$

**Question 1 (••)** Montrer que la fonction  $x \mapsto f_x$  est injective. (Solution p. 59.)

**Question 2 (••)** Montrer que pour tout point  $x$  la fonction  $f_x$  est bornée. (Solution p. 59.)

**Question 3 (•••)** Montrer que  $x \mapsto f_x$  est une isométrie de  $X$  dans l'espace des fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , c'est-à-dire que pour tout  $x$  et  $y$  dans  $X$ , on a

$$d(x, y) = \|f_x - f_y\|_\infty.$$

(Solution p. 59.)

## Le nombre d'or

Le but de cet exercice est de montrer l'existence d'un unique réel positif  $x$  tel que  $x^2 = x + 1$  – le *nombre d'or* – et de produire une méthode itérative pour l'évaluer.

**Question 1 (•)** Montrer l'existence d'un unique point fixe associé à l'application

$$f : x \in ]0, +\infty[ \mapsto 1 + \frac{1}{x}$$

et établir qu'il se situe dans l'intervalle fermé  $[4/3, 2]$ . (Solution p. 60.)

**Question 2 (••)** Montrer que la suite de réels définie par  $x_0 \in [4/3, 2]$  et  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge vers le nombre d'or. (Solution p. 60.)

**Question 3 (•••)** Etudier la fonction  $f \circ f$  et en exploitant le résultat de l'exercice “Point fixe” (p. 43), en déduire que la suite des  $x_n$  converge vers le nombre d'or pour toute valeur initial  $x_0$  strictement positive. (Solution p. 60.)

## Spirale d'Euler

La spirale d'Euler est la courbe paramétrée du plan déterminée pour  $t \geq 0$  par les coordonnées

$$x(t) = \int_0^t \cos s^2 ds \text{ et } y(t) = \int_0^t \sin s^2 ds$$

Nous souhaitons établir que cette spirale a un point limite quand  $t \rightarrow +\infty$ <sup>(7)</sup>.

**Question 1 (•)** Montrer que si pour toute suite de valeurs  $t_k$  tendant vers l'infini, la suite de points de coordonnées  $(x_k, y_k) := (x(t_k), y(t_k))$  a une limite dans le plan – limite qui peut dépendre a priori de la suite  $t_k$  – alors le point de coordonnées  $(x(t), y(t))$  a une limite dans le plan quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . (Solution p. 61.)

---

7. Cette courbe a été introduite par Euler en 1744. Il lui apparait alors manifeste que la courbe est une spirale qui s'enroule après un nombre de tours infinis autour d'un centre bien défini, mais que ce point est très difficile à déterminer par cette construction. Il faudra attendre 1781 pour qu'Euler puisse calculer analytiquement les coordonnées de ce point (cf. Levien (2008)).

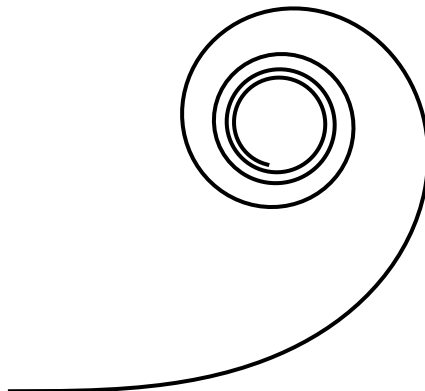


FIGURE 8 – Spirale d'Euler ( $0 \leq t \leq 5$ )

**Question 2 (●●●)** Montrer que pour tout couple  $(a, b)$  de réels tels que  $0 < a \leq b$ , les grandeurs

$$I(a, b) := \int_a^b \cos s^2 ds \text{ et } J(a, b) := \int_a^b \sin s^2 ds$$

vérifient les inégalités

$$|I(a, b)| \leq \frac{1}{a} \text{ et } |J(a, b)| \leq \frac{1}{a}.$$

(Solution p. 61.)

**Question 3 (●●●)** Conclure. (Solution p. 62.)

## Point fixe

On souhaite montrer que si  $X$  est un espace métrique complet et qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que la composée  $n$  fois d'une application  $f : X \rightarrow X$  avec elle-même – notée  $f^n$  – est contractante, alors la conclusion du théorème de point fixe de Banach (p. 25) est toujours valable (bien que les hypothèses considérées ici soient plus générales).

**Question 1 (●●●)** Soit  $X$  un ensemble et  $f : X \rightarrow X$ . Montrer que tout point fixe de  $f$  est également un point fixe de  $f^n$ ; montrer que si  $f^n$  admet un unique point fixe, il est également l'unique point fixe de  $f$ . (Solution p. 62.)

**Question 2 (•••)** On suppose désormais que  $X$  est un espace métrique complet et que  $f^n$  est contractante. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe et que le procédé habituel pour calculer ce point fixe comme une limite est toujours valable. (Solution p. 63.)

## Résolution itérative de systèmes linéaires

Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est *diagonalement dominante* si les coefficients  $a_{ij}$  associés vérifient pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|.$$

Soit  $D$  la matrice diagonale issue de  $A$  :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Question 1 (•)** Montrer que deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  vérifient  $A \cdot x = y$  si et seulement si

$$x = D^{-1} \cdot (D - A) \cdot x + D^{-1} \cdot y.$$

(Solution p. 63.)

**Question 2 (•••)** En déduire que  $A$  est inversible et une méthode itérative de calcul de  $A^{-1}$ . (Solution p. 63.)

## Équation différentielle

Soit  $A$  une matrice de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . On souhaite montrer que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe une unique fonction dérivable  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  à l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) \text{ pour tout } t \geq 0,$$

assortie de la condition initiale  $x(0) = x_0$ .

**Question 1 (•)** Montrer que la fonction  $x : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est solution du problème ci-dessus si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout  $t \geq 0$  la relation

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A \cdot x(s) ds.$$

(Solution p. 64.)

**Question 2 (•••)** Soit  $T > 0$ ; on note  $E$  l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|.$$

A quelle condition simple l'application  $\Phi : E \rightarrow E$  définie par

$$\Phi(x) = \left( t \mapsto x_0 + \int_0^t A \cdot x(s) ds \right)$$

est-elle contractante? Quelle conclusion (partielle) quant au problème initial peut-on en tirer? (Solution p. 64.)

**Question 3 (•••)** Soit  $\alpha > 0$ . On note

$$\|x\|_\infty^\alpha = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-\alpha t} x(t)\|.$$

Montrer que  $\|\cdot\|_\infty^\alpha$  est une norme sur l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$  et que muni de cette norme, l'espace  $E$  est complet. (Solution p. 65.)

**Question 4 (•••)** Reprendre la question 2 avec la norme  $\|\cdot\|_\infty^\alpha$  au lieu de  $\|\cdot\|_\infty$  et conclure quant à l'existence d'une solution au problème initial. (Solution p. 65.)

## Solutions

### Exercices essentiels

**Norme d'une matrice  $2 \times 3$**  Pour tout vecteur non nul  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , on a  $A \cdot x = (x_1, -x_2)$  et donc

$$\frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{(x_1)^2 + (-x_2)^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \leq 1,$$

soit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \leq 1.$$

De plus, on a  $A \cdot (1, 0, 0) = (1, 0)$ , donc

$$\frac{\|A \cdot (1, 0, 0)\|}{\|(1, 0, 0)\|} = \frac{\|(1, 0)\|}{\|(1, 0, 0)\|} = \frac{1}{1} = 1,$$

donc

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} \geq 1.$$

Par conséquent,  $\|A\| = 1$ .

**Matrice de rotation** Un rotation  $A$  est une isométrie : pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\|A \cdot x\| = \|x\|$ , donc

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = 1.$$

**Norme d'une matrice  $2 \times 2$**  Soit  $x = (x_1, x_2)$  un vecteur non-nul de  $\mathbb{R}^2$ . On a  $A \cdot x = (2x_1, -x_2)$ , donc

$$\frac{\|A \cdot x\|}{\|x\|} = \frac{\sqrt{4x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

En formant  $r = (x_1/x_2)^2$ , on obtient donc

$$\|A\| = \sup_{(x_1, x_2) \neq 0} \frac{\sqrt{4x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \sup_{r \in [0, +\infty]} \frac{\sqrt{r+4}}{\sqrt{r+1}} = \sup_{r \in [0, +\infty]} \sqrt{1 + \frac{3}{r+1}}.$$

La fonction  $r \in [0, +\infty] \mapsto \sqrt{1 + 3/(r+1)}$  étant décroissante, son supremum est sa valeur 0, soit

$$\|A\| = \sup_{r \in [0, +\infty]} \sqrt{1 + \frac{3}{r+1}} = \sqrt{1 + \frac{3}{0+1}} = \sqrt{4} = 2.$$

**Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur** On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^p$

$$\|(A \cdot B) \cdot x\| = \|A \cdot (B \cdot x)\| \leq \|A\| \|B \cdot x\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|.$$

Par conséquent,

$$\|A \cdot B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A \cdot B) \cdot x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|.$$

**Intervalles de  $\mathbb{R}$**  Posons  $I := [0, 1[$ . Des calculs élémentaires établissent que

$$d(x, I) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases} \quad \text{et} \quad d(x, I^c) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Par conséquent,  $d(x, I) = 0$  si et seulement si  $x \in [0, 1]$ , donc  $\bar{I} = [0, 1]$ . On a  $d(x, I) = d(x, I^c) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $x = 1$  donc  $\partial A = \{0, 1\}$ . Finalement,  $d(x, I^c) > 0$  si et seulement si  $0 < x < 1$ , donc  $I^\circ = ]0, 1[$ .

**Ensemble des rationnels** Tout nombre réel  $x$  peut être approché par un rationnel avec une précision arbitraire : si  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction partie entière, on a par exemple

$$\left| \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - x \right| < 10^{-n}.$$

Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $d(x, \mathbb{Q}) = 0$  et donc  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Inclusions** Si  $d(x, A^c) > 0$ , alors  $x \notin A^c$ , donc  $x \in A$ ; donc  $A^\circ \subset A$ . Si  $x \in A$  alors  $d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ , donc  $x$  est adhérent à  $A$ ; soit  $A \subset \bar{A}$ .

**Topologie basée sur l'adhérence** La relation  $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$  résulte directement de la définition d'adhérence et de frontière. Pour ce qui est de l'intérieur, on peut noter que  $\overline{A^c} = \{x \in X \mid d(x, A^c) = 0\}$  et donc

$$(\overline{A^c})^c = \{x \in X \mid d(x, A^c) \neq 0\} = \{x \in X \mid d(x, A^c) > 0\} = A^\circ.$$

**Adhérence itérée** De l'inclusion  $A \subset \bar{A}$  on déduit que  $\bar{A} \subset \overline{\bar{A}}$ . Réciproquement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $x \in \overline{\bar{A}}$ , il existe un  $y \in \bar{A}$  tel que  $d(x, y) \leq \varepsilon/2$  et de même un  $z \in A$  tel que  $d(y, z) \leq \varepsilon/2$ . Par l'inégalité triangulaire (p. 10), on a donc

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varepsilon.$$

Le réel positif  $\varepsilon$  étant arbitraire, on a  $d(x, A) = 0$ , soit  $x \in \bar{A}$ .

**Décomposition de  $\bar{A}$**  Aucun point  $x$  ne peut vérifier simultanément  $d(x, A^c) > 0$  et  $d(x, A^c) = 0$ , donc  $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ . Ensuite, il est clair d'après la définition de la frontière que  $\partial A \subset \bar{A}$ ; comme tout point  $x$  de  $A^\circ$  vérifie  $d(x, A^c) > 0$ , on a  $x \notin A^c$ , soit  $x \in A$  et donc  $d(x, A) = 0$ , soit  $x \in \bar{A}$ ; donc  $A^\circ \cup \partial A \subset \bar{A}$ . Finalement, si  $x \in \bar{A}$ , soit  $d(x, A^c) > 0$ , auquel cas  $x \in A^\circ$ , soit  $d(x, A^c) = 0$ , auquel cas  $d(x, A) = 0$  et  $d(x, A^c) = 0$ , c'est-à-dire  $x \in \partial A$ . On a donc bien  $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$ .

**Topologie basée sur la frontière** Il est clair d'après les définitions que  $A \subset \overline{A}$  et que  $\partial A \subset \overline{A}$ ; de plus si  $x \in \overline{A}$ , soit  $x \in A$ , soit  $x \in A^c$ ; dans le premier cas  $x \in A$ , dans le second cas  $d(x, A^c) = 0$ , donc  $x \in \partial A$ . On a donc bien  $\overline{A} = A \cup \partial A$ .

Les points  $x \in A^\circ$  vérifient  $d(x, A^c) > 0$  et donc  $x \notin A^c$ , soit  $x \in A$ , donc  $A^\circ \subset A$ . De plus, un point frontière  $x$  – qui vérifie  $d(x, A^c) = 0$  – ne peut appartenir à l'intérieur de  $A$ . Par conséquent,  $A^\circ \subset A \setminus \partial A$ . Réciproquement, un point de  $A$  qui n'appartient pas à  $\partial A$  vérifie  $d(x, A) > 0$  – ce qui est impossible – ou  $d(x, A^c) > 0$ , donc appartient à  $A^\circ$ . Par conséquent,  $A \setminus \partial A \subset A^\circ$ . On a donc bien  $A^\circ = A \setminus \partial A$ .

**Ouvert  $\Leftrightarrow$  non fermé ?** Non ! De nombreux ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés. Par exemple dans  $\mathbb{R}$ , l'intervalle  $I = ]0, 1[$  n'est ni ouvert (car que  $I^\circ = ]0, 1[ \neq I$ ) ni fermé (car  $\overline{I} = [0, 1] \neq I$ ).

**L'adhérence est fermée, l'intérieur est ouvert** L'adhérence  $\overline{A}$  d'un ensemble  $A$  vérifie  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ , elle est donc fermée. De façon similaire on a  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$  et l'intérieur de  $A$  est ouvert.

**Ensemble discret** Non. Un contre-exemple est l'ensemble  $A = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Il est bien discret : on a  $d(2^{-n}, A \setminus \{n\}) = 2^{-n-1} > 0$ . Mais  $x = 0$  est à distance nulle de  $A$  et n'appartient pas à  $A$ . L'ensemble  $A$  n'est donc pas fermé.

**Normes et boules** Pour toute norme  $\|\cdot\|$ , on a

$$B((0, 0), 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\},$$

d'où les représentations graphiques associées aux différentes normes.

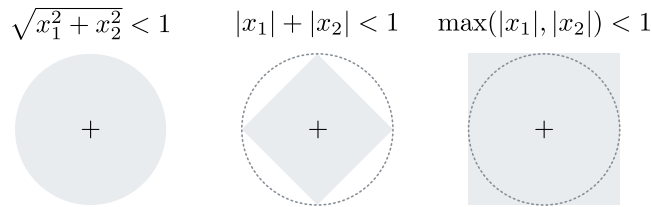


FIGURE 9 – Boules ouvertes unitaires associées à  $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$



**C'est une boule ça ?** Dans  $X$ , la boule centrée en  $(0,0)$  et de rayon 1 est constituée des points de  $x \in X$  tels que  $d((0,0), x) < 1$ . Comme tous les points  $x$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant cette inégalité satisfont  $|x_1| \leq 1$  et  $|x_2| \leq 1$ , on a donc

$$B((0,0),1) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \right\}.$$

Pour la boule de même rayon centrée en  $(1,0)$ , on peut se convaincre que tous les points de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $d((1,0), x) < 1$  satisfont  $x_1 \geq -1$  et  $|x_2| \leq 1$ , mais pas nécessairement  $x_1 \leq 1$ . On a donc

$$B((1,0),1) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 1 \text{ et } \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} < 1 \right\}.$$

Concernant la boule ouverte  $B((0,0),2)$ , si  $x \in X$ , alors la condition  $d((0,0), x) < 2$  est automatiquement satisfaite, car

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} < 2.$$

Par conséquent,  $B((0,0),2) = X$ .

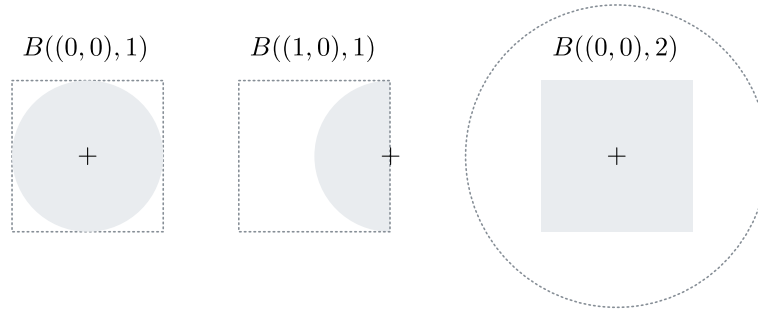


FIGURE 10 – Boules ouvertes dans le carré  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq 1 \text{ et } |x_2| \leq 1\}$

**Dans le plan** Non, car tous les points de la forme  $(0, x_2)$ ,  $x_2 \neq 0$  n'appartiennent pas à  $D$ . Donc toute boule ouverte  $B((0,0), r)$  est d'intersection non vide avec le complémentaire de  $D$ .

**Voisinages ouverts / fermés ?** Si  $V$  est un voisinage de  $x$ , il contient une boule ouverte non vide  $B(x, r)$ , qui est ouverte et un voisinage de  $x$ , car  $d(x, B(x, r)^c) = r > 0$  ce qui répond à la première partie de la question. La boule fermée  $\overline{B}(x, r/2)$  est également un voisinage de  $x$  (car  $d(x, \overline{B}(x, r)^c) = r/2 > 0$ ) et de plus  $\overline{B}(x, r/2) \subset B(x, r) \subset V$ .

**Fonction localement bornée** La fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$  est continue mais pas bornée par exemple. Mais si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par continuité de  $f$  en  $x$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que

$$y \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \implies |f(y) - f(x)| \leq 1.$$

Par conséquent, sur l'intervalle ouvert  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$  qui est un voisinage de  $x$ , la fonction  $f$  est bornée par  $|f(x)| + 1$ . Elle est donc localement bornée.

**Courbes de niveau** L'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$  est l'image réciproque du singleton  $\{c\}$ , un ensemble fermé de  $\mathbb{R}$ , par la fonction continue  $f$  (p. 19), il est donc fermé.

**Boules ouvertes et fermées** On a  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ ; L'ensemble  $I = [0, r[$  est ouvert dans l'espace métrique  $[0, +\infty[$  car  $d(x, I^c) = d(x, [r, +\infty[) = r - x > 0$  quand  $x \in [0, r[$ . La boule ouverte en question est donc l'image réciproque par l'application continue (p. 18)  $d(x, \cdot) = d(\cdot, x)$  d'un ouvert. Elle est donc ouverte par le critère de l'image réciproque (p. 19). La preuve que toute "boule fermée" est fermée est similaire.

## Normes d'opérateurs

**Etude de `norm(A)`** En l'absence de second argument, la fonction `norm` calcule la norme de Frobenius de l'opérateur  $A$ , donnée comme

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Il s'agit bien d'une norme sur matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , car on peut la calculer comme la norme euclidienne du vecteur de  $\mathbb{R}^{n^2}$  obtenu par "mise à plat" de la matrice  $A$ , c'est-à-dire après avoir opéré la transformation (linéaire et bijective)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Mais elle n'est induite par aucune norme de vecteur; en effet, s'il existait une norme  $\|\cdot\|_?$  telle que  $\|A\|_F = \sup_{x \neq 0} \|A \cdot x\|_? / \|x\|_?$ , alors on aurait en particulier

$$\|I\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|I \cdot x\|_?}{\|x\|_?} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_?}{\|x\|_?} = 1.$$

Or, on peut constater que la norme de Frobenius de la matrice associée à la matrice identité dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  est  $\sqrt{n}$ , qui diffère de 1 si  $n > 1$ .

**Etude de `norm(A, 1)`** L'expression `norm(A, 1)` calcule d'après la documentation de `norm` la grandeur

$$\|A\|_1 = \max_{j=1 \dots n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Le fait que le second argument de l'appel à `norm` soit 1 peut laisser penser que cette norme de matrice est induite par la norme de vecteurs

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Vérifions cela ; si  $y = A \cdot x$ , on a

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &= \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \\ &\leq \max_{j=1 \dots n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &= \|A\|_1 \|x\|_1. \end{aligned}$$

Pour conclure, il nous suffit désormais d'exhiber un  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|A \cdot x\| = \|A\|_1 \|x\|_1$ . Si le maximum de  $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  est réalisé en  $j$ , il nous suffit de considérer le  $j$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x = e_j$ . En effet, on a alors  $\|e_j\|_1 = 1$  et

$$\|A \cdot e_j\|_1 = \|(a_{1j}, \dots, a_{nj})\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \|A\|_1.$$

**Etude de `norm(A, 2)`** La norme en question est définie par NumPy comme  $\sigma_1$ , la plus grande valeur singulière de  $A$ . Les valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  associées à la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont définies à travers une décomposition de  $A$  de la forme

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

où  $\Sigma \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_n x_n)$  et  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont matrices orthogonales (inversibles et dont l'inverse est la transposée). Pour montrer que  $\sigma_1(\cdot)$  constitue la norme d'opérateur  $\|\cdot\|_{22}$  induite par la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , on constate au préalable que pour toute application orthogonale  $U$ ,

$$\|U \cdot x\| = \sqrt{\langle U \cdot x, U \cdot x \rangle} = \sqrt{\langle U^T \cdot U \cdot x, x \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|_2,$$

puis que

$$\begin{aligned}
\|A\|_{22} &= \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|(U \cdot \Sigma \cdot V^\top) \cdot x\|_2 \\
&= \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|U \cdot (\Sigma \cdot (V^\top \cdot x))\|_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \|\Sigma \cdot y\|_2 \\
&= \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \sqrt{\sigma_1^2 y_1^2 + \dots + \sigma_n^2 y_n^2} \\
&= \sigma_1.
\end{aligned}$$

**Etude de `norm(A, inf)`** On constate que l'expression donnée dans la documentation de `norm`, à savoir

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1 \dots n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

entretient une troublante ressemblance avec la norme  $\|\cdot\|_1$  pour les opérateurs. Plus précisément, si  $A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  désigne l'opérateur adjoint de  $A$ , alors on a

$$\|A\|_\infty = \|A^\top\|_1.$$

C'est un peu trop gros pour être une coïncidence ... Pour montrer que  $\|\cdot\|_\infty$  est la norme d'opérateur  $\|\cdot\|_{\infty\infty}$  associée à la norme de vecteurs  $\|\cdot\|_\infty$ , on peut d'abord constater que pour les vecteurs,

$$\|x\|_\infty = \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \langle y, x \rangle \quad \text{et} \quad \|x\|_1 = \sup_{\|y\|_\infty \leq 1} \langle y, x \rangle$$

puis en déduire que

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\infty\infty} &= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|A \cdot x\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \langle y, A \cdot x \rangle \\
&= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \langle A^\top \cdot y, x \rangle \\
&= \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \langle x, A^\top \cdot y \rangle \\
&= \sup_{\|y\|_1 \leq 1} \|A^\top \cdot y\| \\
&= \|A^\top\|_1 \\
&= \|A\|_\infty,
\end{aligned}$$

et donc  $\|\cdot\|_{\infty\infty} = \|\cdot\|_\infty$ .

## Droite réelle achevée

**Question 1** Quand l'ordonnée  $y$  du point  $p = (x, y)$  est strictement positive,  $f(p)$  représente l'abscisse de l'unique point  $q$  de l'intersection de la demi-droite  $D$  issue de l'origine  $(0, 0)$  et passant par  $p$  avec la droite horizontale des points d'ordonnée  $y = 1$ .

En effet, les points de  $D$  sont de la forme  $(\lambda x, \lambda y)$  pour  $\lambda \geq 0$ . On a donc  $\lambda y = 1$  si et seulement si  $\lambda = 1/y$ , auquel cas  $\lambda x = x/y$ .

Dans les cas limites où  $p = (1, 0)$  et  $p = (-1, 0)$ , la demi-droite  $D$  est horizontale, partant vers la droite de l'origine ou vers sa gauche selon le cas. Il n'y a donc pas d'intersection avec la droite horizontale d'équation  $y = 1$  dans  $\mathbb{R}^2$ , mais des intersections "à l'infini".

**Question 2** La fonction  $f$  peut être décomposée comme  $f = \psi \circ \phi$  où l'application  $\phi : (x, y) \in X \rightarrow x \in [-1, 1]$  est bijective, d'inverse  $\phi^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$  et l'application  $\psi : [-1, 1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$  définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x = -1, \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1 < x < 1, \\ +\infty & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

est également bijective, d'inverse

$$\psi^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = -\infty, \\ \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} & \text{si } -\infty < x < +\infty, \\ +1 & \text{si } x = +\infty. \end{cases}$$

La fonction  $f$  est donc bijective comme composée de fonctions bijectives.

**Question 3** La fonction  $f$  sera une isométrie quand  $[-\infty, +\infty]$  est muni de la distance  $d^{\pm\infty}$  – et  $X$  la distance induite par la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  – si et seulement si pour toute paire de points  $p_1$  et  $p_2$  dans  $X$

$$d^{\pm\infty}(f(p_1), f(p_2)) = d(p_1, p_2),$$

ce qui rend nécessaire le choix de

$$d^{\pm\infty}(x_1, x_2) := d(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)).$$

On vérifiera facilement que ce choix détermine bien une distance sur la droite réelle achevée.

**Question 4** On a  $f^{-1}(-\infty) = (-1, 0)$ ,  $f^{-1}(-1) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ,  $f^{-1}(0) = (0, 1)$ ,  $f^{-1}(1) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  et  $f^{-1}(\infty) = (1, 0)$ , donc  $d^{\pm\infty}(0, +\infty) = d((0, 1), (1, 0)) = \sqrt{2}$ ,  $d^{\pm\infty}(-\infty, +\infty) = d((-1, 0), (1, 0)) = 2$  et  $d^{\pm\infty}(-1, 1) = \sqrt{2}$ .

**Question 5** Soit  $i : x \in \mathbb{R} \rightarrow x \in [-\infty, +\infty]$ . Pour montrer que  $i$  est continue, il nous faut prouver que pour tout  $x_1 \in \mathbb{R}$ , quand  $d(x_2, x_1) \rightarrow 0$ , alors  $d^{\pm\infty}(i(x_2), i(x_1)) = d^{\pm\infty}(x_2, x_1) \rightarrow 0$ . Or,

$$\begin{aligned} d^{\pm\infty}(x_2, x_1) &= d\left(\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}}\right), \left(\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}\right)\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}}\right)^2}, \end{aligned}$$

et cette expression est une fonction continue de ses arguments  $x_1$  et  $x_2$ , nulle quand  $x_1 = x_2$ ; cette propriété est donc bien vérifiée.

**Question 6** Quand  $x_k$  est une suite de réels,  $x_k \rightarrow +\infty$  est à interpréter classiquement comme : pour tout  $M \in \mathbb{R}$ , il existe un rang  $m \in \mathbb{N}$  tel que si  $k \geq m$ , alors  $x_k \geq M$ .

Mais il existe maintenant une seconde interprétation si l'on considère  $x_k \in \mathbb{R}$  comme une suite de points dans l'espace métrique  $[-\infty, +\infty]$ . Cela signifie alors que  $d^{\pm\infty}(x_k, +\infty) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Or, comme

$$\begin{aligned} (d^{\pm\infty}(x_k, +\infty))^2 &= \left(\frac{x_k}{\sqrt{1+x_k^2}} - 1\right)^2 + \frac{1}{1+x_k^2} \\ &= \left(\text{sign}(x_k) \sqrt{\frac{x_k^2}{1+x_k^2}} - 1\right)^2 + \frac{1}{1+x_k^2}, \end{aligned}$$

ces deux conditions sont équivalentes.

**Question 7** On admettra sans preuve (la démarche est très similaire à celle menée dans les questions précédentes) que la construction graphique ci-dessous permet de doter  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  d'une métrique telle que  $|x_k| \rightarrow +\infty$  si et seulement si  $d^\infty(x_k, \infty) \rightarrow 0$  et que l'injection canonique associée est continue. On constate graphiquement que dans cette variante, quand le point de la droite d'ordonnée  $y = 2$  s'éloigne vers l'infini vers la droite ou vers la gauche, le point correspondant du cercle centré en  $(0, 1)$  et de rayon 1 converge vers l'origine  $(0, 0)$ .

Si l'on considère une suite de points  $x_k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , soit il existe une suite de points réels bornée que l'on peut extraire de  $x_k$  – auquel cas par compacité des

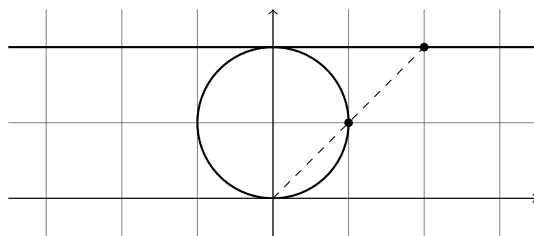


FIGURE 11 – Construction du compactifié de  $\mathbb{R}$ .

fermés bornés dans  $\mathbb{R}$  il existe une sous-suite extraite des  $x_k$  convergeant dans  $\mathbb{R}$  (et donc dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ) – soit  $|x_k| \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$  – auquel cas  $x_k \rightarrow \infty$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Dans les deux cas, la suite admet une suite extraite convergente, l'espace est donc compact.

## Localement fermé

**Question 0** Un sous-ensemble  $B$  d'un ensemble  $A$  de points d'un espace topologique  $X$  est “fermé dans  $A$ ” s'il est fermé **comme ensemble de points de l'espace topologique**  $A$ , muni de la topologie (ou le cas échéant la métrique) induite par  $X$ . Et cette propriété peut être différente de être “fermé” (sous-entendu comme ensemble de points de  $X$ ).

Par exemple, si  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = ]0, +\infty[$  et  $B = ]0, +\infty[$ ,  $B$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}$ , car la suite  $x_k = 2^{-k}$  appartient à  $B$ , mais  $x_k \rightarrow 0 \notin B$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Par contre, toute suite de  $B$  convergeant dans  $A$  converge dans  $B$  car les deux ensembles sont identiques. Par conséquent,  $B$  est fermé dans  $A$ .

**Question 1** Soit  $x \in A := ]0, 1[$ ; si  $x > 0$ , on peut prendre  $V = ]x/2, 1[$ . C'est bien un voisinage ouvert de  $x$  et  $A \cap V = V$ . L'ensemble  $A \cap V$  est donc fermé dans  $V$ . Si  $x = 0$ , on peut prendre  $V = ]-1, 1/2[$ ; c'est un voisinage ouvert de  $x$  et  $A \cap V = ]0, 1/2[$  est bien fermé dans  $V$ .

Soit  $x_k$  une suite de  $\mathbb{R}$  qui converge vers  $\ell$  et  $A = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Si  $a \in A$  et que  $a \neq \ell$ , alors il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $V = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  vérifie  $A \cap V = \{a\}$ .  $V$  est un voisinage ouvert de  $a$  et  $A \cap V$  est bien fermé dans  $V$ . Si la valeur limite  $\ell$  n'est pas atteinte par un  $x_k$ , cela conclut la preuve que  $A$  est localement fermé. Dans le cas contraire, pour  $a = \ell$ , on peut prendre  $V = \mathbb{R}$ ; en effet,  $A$  est alors fermé.

L'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  n'est pas localement fermé. En effet si  $V$  est un voisinage de 0 il contient nécessairement un ensemble de la forme  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  pour un  $\varepsilon > 0$ . Or cet intervalle contient des irrationnels, qui peuvent être obtenus comme limite de rationnels dans  $]-\varepsilon, \varepsilon[$  et donc de  $V$ . Par conséquent,  $\mathbb{Q} \cap V$  ne peut pas être fermé dans  $V$ , donc  $\mathbb{Q}$  n'est pas localement fermé.

**Question 2** Si  $A$  est fermé, on peut prendre  $V = X$  qui est un voisinage ouvert de tout point de  $A$ . On a alors  $A \cap V = A$  et donc  $A \cap V$  est bien fermé dans  $V = X$ .

Si  $A$  est ouvert, on peut prendre  $V = A$  qui est un voisinage ouvert de tout point de  $A$ . On a alors  $A \cap V = A$  et donc  $A \cap V$  est bien fermé dans  $V = A$ .

Si  $A$  et  $B$  sont localement fermés et  $x \in A \cap B$ , il existe des voisinages ouverts  $U$  et  $V$  de  $x$  tels que  $A \cap U$  soit fermé dans  $U$  et  $B \cap V$  soit fermé dans  $V$ . Par construction,  $U \cap V$  est un voisinage ouvert de  $x$ ; en effet, d'une part cette intersection contient  $x$  et d'autre part pour tout  $y$  dans  $U \cap V$ ,  $d(y, X \setminus U) > 0$  et  $d(y, X \setminus V) > 0$ ; or

$$\begin{aligned} d(y, X \setminus (U \cap V)) &= d(y, (X \setminus U) \cup (X \setminus V)) \\ &= \min(d(y, X \setminus U), d(y, X \setminus V)) \\ &> 0. \end{aligned}$$

donc  $U \cap V$  est ouvert. L'ensemble  $A$ , qui est fermé dans  $U$ , est donc fermé dans  $U \cap V$  (si une suite de  $A$  converge dans  $U \cap V$ , elle converge dans  $U$  et donc sa limite appartient à  $A$ ); de la même façon,  $B$  est fermé dans  $U \cap V$ . Par conséquent,  $A \cap B$  est fermé dans  $U \cap V$ .

**Question 3** Si un ensemble est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé dans  $X$ , il est l'intersection de deux ensembles localement fermés, donc il est localement fermé (par les résultats de la question précédente (p. 40)).

Réciproquement, supposons que l'ensemble  $A$  soit localement fermé. En tout point  $a \in A$ , il existe un voisinage ouvert  $V_a$  de  $a$  tel que  $A \cap V_a$  soit fermé dans  $V_a$ . L'ensemble  $V_a \setminus (A \cap V_a) = V_a \setminus A$  est donc ouvert dans  $V_a$  et donc dans  $X$ . Par construction, la collection des  $V_a$  recouvre  $A$ , c'est-à-dire que  $A \subset \cup_{a \in A} V_a$ , donc

$$A = \bigcup_{a \in A} V_a \setminus \left( \bigcup_{a \in A} V_a \setminus A \right).$$

Posons  $V = \cup_{a \in A} V_a$ ; le complémentaire dans  $X$  de  $\bigcup_{a \in A} V_a \setminus A$  est un ensemble fermé  $F$ ; de l'équation ci-dessus on déduit donc que  $A = V \cap F$  où  $V$  est ouvert dans  $X$  et  $F$  est fermé dans  $X$ .

## Distance entre ensembles

**Question 1** Non, la distance usuelle  $d(A, B)$  en convient pas. En effet, cette distance est nulle dès que l'intersection de  $A$  et  $B$  est non vide, même si des points de  $A$  sont très éloignés de  $B$ .



**Question 2** Lorsque  $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $B = [0, 2] \times [0, 2]$ , il est possible de calculer  $d(a, B)$  pour tout  $a \in A$ . Plus précisément,  $B$  étant fermé, l'infimum qui définit la distance est un minimum. Dans ce cas précis, il existe un unique projeté  $\pi_B(a)$  de  $a$  sur  $B$ , qui minimise la distance

$$d(a, \pi_B(a)) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Il est donné quadrant par quadrant par

$$\pi_B((x, y)) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } (x, y) \in [-1, 0] \times [0, 1] \\ (x, y) & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) \in [-1, 0] \times [-1, 0] \\ (x, 0) & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times [-1, 0] \end{cases}$$

Par conséquent, on a

$$d((x, y), B) = \begin{cases} |x| & \text{si } (x, y) \in [-1, 0] \times [0, 1] \\ 0 & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in [-1, 0] \times [-1, 0] \\ |y| & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times [-1, 0] \end{cases}$$

Cette fonction est maximale sur  $A$  pour  $(x, y) = (-1, -1)$ . On a donc

$$\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) = \sqrt{2}.$$

On montre de la même façon que

$$\sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) = \sqrt{2}.$$

La distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$  vaut donc  $\sqrt{2}$ .

**Question 3** Vérifions que la “distance” de Hausdorff est effectivement une distance sur l'espace des sous-ensembles fermés bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Axiome de séparation. Si

$$d[A, B] = \max(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)) = 0,$$

alors pour tout  $a \in A$ ,  $d(a, B) = 0$  et pour tout  $b \in B$ ,  $d(b, A) = 0$ , c'est-à-dire  $a \in \overline{B}$  et  $b \in \overline{A}$ . Par conséquent, puisque  $A$  et  $B$  sont fermés,  $A \subset \overline{B} = B$  et  $B \subset \overline{A} = A$  et donc  $A = B$ .

2. Axiome de symétrie. Il est clair par construction que pour tous les ensembles fermés bornés non vides  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $d[A, B] = d[B, A]$ .

3. Pour tout  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ , l'inégalité triangulaire fournit  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ . Par conséquent,  $\inf_{c \in C} d(a, c) \leq d(a, b) + \inf_{c \in C} d(b, c)$  et donc

$$\begin{aligned} \inf_{c \in C} d(a, c) &\leq \inf_{b \in B} d(a, b) + \inf_{b \in B} \inf_{c \in C} d(b, c) \\ &\leq \inf_{b \in B} d(a, b) + \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} d(b, c), \end{aligned}$$

inégalité dont on déduit

$$\sup_{a \in A} \inf_{c \in C} d(a, c) \leq \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) + \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} d(b, c)$$

et par conséquent

$$\sup_{a \in A} \inf_{c \in C} d(a, c) \leq d[A, B] + d[B, C].$$

De façon similaire, on a

$$\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} d(a, c) \leq \sup_{c \in A} \inf_{b \in B} d(c, b) + \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(b, a)$$

et par conséquent

$$\sup_{c \in C} \inf_{a \in A} d(a, c) \leq d[A, B] + d[B, C]$$

et donc  $d[A, C] \leq d[A, B] + d[B, C]$ .

**Question 4** Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles non vides de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A+B$  est clairement non vide. Si de plus  $A$  et  $B$  sont fermés et bornés, et que l'on considère une suite  $x_k$  de points de  $A+B$ , alors il existe des  $a_k$  de  $A$  et  $b_k$  de  $B$  tels que  $x_k = a_k + b_k$ . Par compacité de  $A$ , il existe une suite  $a_{\sigma(k)}$  – où  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est croissante – qui converge vers un  $a \in A$ ; par compacité de  $B$ , il existe une suite  $b_{\tau(\sigma(k))}$  – où  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est croissante – qui converge vers un  $b \in B$ . Par continuité de la somme dans  $\mathbb{R}^n$ , la suite des  $x_{\tau(\sigma(k))}$ , qui est extraite des  $x_k$ , converge vers  $a + b \in A+B$ .

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre ensembles fermés bornés non vides de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$  et  $d \in D$ , on a

$$d(a+b, c+d) = \|a+b-c-d\| \leq \|a-c\| + \|b-d\|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A+B} \inf_{y \in C+D} d(x, y) &= \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} \inf_{d \in D} \|a+b-c-d\| \\ &\leq \sup_{a \in A} \sup_{b \in B} \inf_{c \in C} \inf_{d \in D} \|a-c\| + \|b-d\| \\ &\leq \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} \|a-c\| + \sup_{b \in B} \inf_{d \in D} \|b-d\| \\ &\leq d[A, C] + d[B, D]. \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que

$$\sup_{y \in C+D} \inf_{x \in A+B} d(x, y) \leq d[A, C] + d[B, D]$$

et par conséquent  $d[A+B, C+D] \leq d[A, C] + d[B, D]$ . Si  $A_k \rightarrow A$  et  $C_k \rightarrow C$ , comme  $d[A_k+C_k, A+C] \leq d[A, A_k] + d[C, C_k]$ , on en déduit que  $A_k+C_k \rightarrow A+C$ . La somme de Minkowski est donc continue.

## Plongement de Kuratowski

**Question 1** Soit  $x, x'$  deux points de  $X$ . Pour tout  $y$  dans  $X$  on a :

$$\begin{aligned} f_x(y) - f_{x'}(y) &= d(x, y) - d(x_0, y) - (d(x', y) - d(x', x_0)) \\ &= d(x, y) - d(x', y), \end{aligned}$$

par conséquent, si  $f_x = f_{x'}$ , on a en particulier  $f_x(x') = f_{x'}(x')$ , soit  $d(x, x') - d(x', x') = d(x, x') = 0$ , c'est-à-dire  $x = x'$  par l'axiome de séparation (p. 10).

**Question 2** Pour tout  $x, y \in X$ , on a

$$|f_x(y)| = |d(x, y) - d(x_0, y)| \leq d(x, x_0)$$

par l'inégalité triangulaire (p. 10).

**Question 3** Soient  $x, y \in X$  ; on a

$$f_x(z) - f_y(z) = d(z, x) - d(z, x_0) - (d(z, y) - d(z, x_0)) = d(z, x) - d(z, y).$$

Par conséquent, par l'inégalité triangulaire (p. 10),

$$\|f_x - f_y\|_\infty = \sup_{y \in X} |d(z, x) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

et d'autre part

$$\|f_x - f_y\|_\infty = \sup_{y \in X} |d(z, x) - d(z, y)| \geq |d(x, x) - d(x, y)| = d(x, y).$$

Finalement, on a bien

$$\|f_x - f_y\|_\infty = d(x, y)$$

et  $x \mapsto f_x$  est une isométrie.

## Le nombre d'or

**Question 1** L'existence d'un unique point fixe associé à l'application

$$f : x \in ]0, +\infty[ \mapsto 1 + \frac{1}{x}$$

peut être établi par des méthodes classiques d'analyse d'une fonction d'une variable réelle. La fonction  $g : x \in ]0, +\infty[ \rightarrow x - f(x)$  est dérivable. Sa dérivée en  $x$  vaut  $1 + 1/x^2$ , qui est strictement positive, donc la fonction  $g$  est strictement croissante et il existe donc au plus un zéro de  $g$ . De plus,  $g(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow 0$  et  $g(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Comme  $g$  est continue (puisque dérivable), par le théorème des valeurs intermédiaires,  $g$  admet bien un zéro sur  $]0, +\infty[$ . La fonction  $f$  admet donc un unique point fixe. Comme  $g(4/3) = 4/3 - 1 - 3/4 = -5/12 < 0$  et  $g(2) = 2 - 1 - 1/2 = 1/2 > 0$ , le point fixe de  $f$  se situe dans l'intervalle  $[3/2, 2]$ .

**Question 2** Soit  $x_k$  la suite de réels définie par  $x_0 \in [4/3, 2]$  et  $x_{k+1} = f(x_k)$ . La fonction  $f$  est continue et décroissante croissante ; de plus

$$f(4/3) = 1 + \frac{1}{4/3} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$$

et

$$f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in \left[\frac{4}{3}, 2\right].$$

Par conséquent,  $f([4/3, 2]) \subset [4/3, 2]$ . Comme  $f'(x) = -1/x^2$ , pour tout  $x \in [4/3, 2]$ ,  $|f'(x)| < 9/16 < 1$ . Par le théorème des accroissements finis, la restriction de  $f$  à  $[4/3, 2]$  est donc contractante. L'ensemble  $[4/3, 2]$  est un ensemble fermé de  $\mathbb{R}$  qui est complet ; il est donc complet (p. 23). L'existence et l'unicité du point fixe de  $f$  sur  $[4/3, 2]$  ainsi que son obtention comme limite de la suite  $x_k$  résultent du théorème de point fixe de Banach (p. 25).

**Question 3** Compte tenu des résultats de l'exercice "Point fixe" (p. 43), il suffit d'établir que sur un sous-ensemble complet  $X$  de  $]0, +\infty[$  tel que  $f(X) \subset X$ ,  $f \circ f$  est contractante pour conclure que  $f$  possède un unique point fixe sur  $X$ , obtenu comme limite de la suite définie par  $x_{k+1} = f(x_k)$  pour tout  $x_0 \in X$ .

Posons  $X = [1, +\infty[$  ;  $X$  est complet car c'est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}$  qui est complet (p. 23). De plus, comme pour tout  $x > 0$ ,  $1 + 1/x > 1$ , on a bien  $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ . Pour tout  $x \geq 1$ , on a

$$f(f(x)) = 1 + \frac{1}{(1 + 1/x)} = 1 + \frac{x}{x+1} = 1 + \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

et donc

$$(f \circ f)'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

ce qui entraîne que  $|(f \circ f)'(x)| \leq 1/4 < 1$  si  $x \geq 1$ . La restriction de  $f \circ f$  à  $[1, +\infty[$  est donc contractante. Nous avons donc établi toutes les hypothèses garantissant que la suite  $x_{k+1} = f(x_k)$  tend vers le nombre d'or si  $x_0 \geq 1$ . Notons finalement que si  $x_0 \in ]0, 1[$ ,  $f(x_0) \in [1, +\infty[$ ; par conséquent le résultat vaut non seulement pour tout  $x_0 \in [1, +\infty[$  mais bien pour tout  $x_0 \in ]0, +\infty[$ .

## Spirale d'Euler

**Question 1** Montrer que  $(x(t), y(t))$  à une limite quand  $t \rightarrow +\infty$  suppose de montrer qu'il existe un point  $T \in \mathbb{R}^2$  tel que pour toute suite de valeurs  $t_k$  tendant vers  $+\infty$ , la suite  $(x(t_k), y(t_k))$  tende vers  $T$ . Compte tenu de l'hypothèse, cela revient à montrer que la limite d'une telle suite est indépendante du choix de la suite des  $t_k$ .

Considérons deux suites  $s_k$  et  $r_k$  de réels positifs tendant vers  $+\infty$  et notons  $S$  et  $R$  les limites de  $(x(s_k), y(s_k))$  et  $(x(r_k), y(r_k))$ . La suite  $t_k$  des réels  $s_0, r_0, s_1, r_1, \dots$  est positive et tend vers  $+\infty$ . Les  $(x(t_k), y(t_k))$  admettent donc une limite  $T$  quand  $k \rightarrow +\infty$ ; toute sous-suite étant convergente et de même limite, on a nécessairement  $T = S = R$ , ce qui prouve le résultat cherché.

**Question 2** Nous traitons le cas de  $I(a, b)$ , celui de  $J(a, b)$  étant similaire. Pour tout  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a \leq b$ , le changement de variable  $\tau = s^2$  fournit :

$$I(a, b) = \int_a^b \cos s^2 ds = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos \tau}{2\sqrt{\tau}} d\tau.$$

Par intégration par parties, on obtient alors

$$I(a, b) = \frac{\sin b^2}{2b} - \frac{\sin a^2}{2a} + \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin \tau}{4\tau^{3/2}} d\tau.$$

Comme pour tout  $\tau \geq 0$ ,  $|\sin \tau| \leq 1$ , on a

$$\left| \frac{\sin b^2}{2b} - \frac{\sin a^2}{2a} \right| \leq \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}$$

et par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin \tau}{4\tau^{3/2}} d\tau \right| \leq \int_{a^2}^{b^2} \frac{d\tau}{4\tau^{3/2}} = -\frac{1}{2b} + \frac{1}{2a}.$$

On en déduit donc

$$|I(a, b)| \leq \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

**Question 3** Pour établir l'existence d'un point limite à la spirale d'Euler, compte tenu du résultat de la question 1, il nous suffit de montrer que pour toute suite de valeurs  $t_k$  tendant vers  $+\infty$ , la suite des  $(x_k, y_k) = (x(t_k), y(t_k))$  est convergente. Comme nous ne connaissons pas la valeur de cette limite, nous allons établir que cette suite est de Cauchy ; l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  étant complet, cela prouvera la convergence de la suite.

Or, pour tout couple d'entier  $n$  et  $p$ , on a

$$\begin{aligned} x_n - x_p &= x(t_n) - x(t_p) = \int_0^{t_n} \cos s^2 ds - \int_0^{t_p} \cos s^2 ds \\ &= \int_{t_p}^{t_n} \cos s^2 ds \\ &= I(t_p, t_n) \end{aligned}$$

et de façon similaire,

$$y_n - y_p = \int_{t_p}^{t_n} \sin s^2 ds = J(t_p, t_n).$$

En exploitant le résultat de la question 2, on peut alors en déduire que

$$\begin{aligned} \|(x_n, y_n) - (x_p, y_p)\| &= \sqrt{I(t_p, t_n)^2 + J(t_p, t_n)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{\min(t_p, t_n)^2} + \frac{1}{\min(t_p, t_n)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\min(t_p, t_n)}. \end{aligned}$$

Pour un  $\varepsilon > 0$  donné, il suffit de choisir un rang  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$t_k \geq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}, \text{ quand } k \geq m$$

pour avoir la garantie que si  $p \geq m$  et  $n \geq m$ , alors

$$\|(x_n, y_n) - (x_p, y_p)\| \leq \varepsilon.$$

La suite des  $(x_k, y_k)$  est donc de Cauchy.

## Point fixe

**Question 1** Si  $x$  est un point fixe de  $f$ ,  $f(x) = x$ , par conséquent

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(x) = x,$$

puis

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x) = x,$$

etc. Par récurrence, il est clair que l'on peut établir que pour tout  $n \geq 1$ , on a  $f^n(x) = x$  :  $x$  est un point fixe de  $f^n$ .

Supposons désormais que la fonction itérée  $f^n$  admette un unique point fixe  $x$ . Comme tout point fixe de  $f$  est un point fixe de  $f^n$ ,  $f$  admet au plus un point fixe. De plus, comme  $f^n(x) = x$ , en appliquant  $f$  aux deux membres de cette équation, on obtient

$$f(f^n(x)) = f^n(f(x)) = f(x).$$

Par conséquent,  $f(x)$  est un point fixe de  $f^n$  ; c'est donc l'unique point fixe  $x$  de  $f^n$ . On a donc  $f(x) = x$ , c'est-à-dire que  $x$  est un point fixe de  $f$ .

**Question 2** Si  $X$  est un espace métrique complet et que  $f^n$  est contractante, par théorème du point fixe de Banach (p. 25),  $f^n$  admet un unique point fixe  $x$ , calculable comme limite de toute suite  $y_k$  telle que  $y_{k+1} = f^n(y_k)$  et  $y_0 \in X$ .

Par les résultats de la question 1 (p. 43),  $x$  est l'unique point fixe de  $f$ . Le "procédé habituel pour construire un point fixe de  $f$ " consiste à prendre un  $x_0 \in X$  quelconque et à construire par récurrence la suite des  $x_{k+1} = f(x_k)$  ; on souhaite donc montrer que cette suite converge vers l'unique point fixe  $x$  de  $f$ . La suite  $(x_{kn})_k$  – extraite des  $x_k$  – converge vers  $x$ , car  $x_{(k+1)n} = f^n(x_{kn})$ . Il en est de même pour la suite extraite  $(x_{kn+1})_k$ , construite à partir du même procédé mais en initialisant la séquence avec la valeur  $x_1$ , pour la suite  $(x_{kn+2})_k$ ,  $\dots$ , jusqu'à  $(x_{kn+(n-1)})_k$ . Ces  $n$  suites convergent toutes vers  $x$ , donc la suite des  $(x_k)_k$  converge également vers le point fixe  $x$ .

## Résolution itérative de systèmes linéaires

**Question 1** La relation  $A \cdot x = y$  est vérifiée si et seulement si  $D \cdot x + (A - D) \cdot x = y$ , soit

$$D \cdot x = (D - A) \cdot x + y.$$

L'opérateur  $A$  étant diagonalement dominant,  $a_{ii} > 0$  pour tout  $i$  ; l'opérateur  $D$  est donc inversible. La relation ci-dessus est donc équivalente à

$$x = D^{-1} \cdot (D - A) \cdot x + D^{-1} \cdot y.$$

**Question 2** La question 1 établit que pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  est solution de  $A \cdot x = y$  si et seulement s'il est un point fixe de l'application

$$\phi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto D^{-1} \cdot (D - A) \cdot x + D^{-1} \cdot y \in \mathbb{R}^n.$$

Cette application est affine : pour tout couple  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\phi(x_1) - \phi(x_2) = D^{-1} \cdot (D - A) \cdot (x_1 - x_2).$$

Notons qu'avec  $B := D^{-1} \cdot (D - A)$  et  $[B]_{ij} = b_{ij}$ , on a  $b_{ii} = 0$  et si  $i \neq j$ ,  $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ . Par conséquent, pour tout  $i$ ,  $\sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$ , soit

$$\max_{i=1 \dots n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1.$$

On reconnaît au membre de gauche de cette inégalité la norme d'opérateur  $\|B\|_\infty$  de l'exercice "Normes d'opérateurs" (p. 38) ; on a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|B \cdot x\|_\infty \leq \kappa \|x\|_\infty \text{ avec } \kappa := \|B\|_\infty < 1$$

(on peut aussi établir ce résultat directement). Si l'on munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  (l'espace est alors complet puisque  $\|\cdot\|_\infty$  est équivalent à la norme euclidienne : on a  $\|\cdot\|_2/\sqrt{n} \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2$ ), l'application  $\phi$  est contractante. Par le théorème du point fixe de Banach (p. 25), elle admet donc un unique point fixe  $x$ , qui est la solution de  $A \cdot x = y$ . L'opérateur  $A$  est donc inversible et  $A^{-1} \cdot y$  peut être calculé comme la limite de la suite  $x_{k+1} = B \cdot x_k + D^{-1}y$  pour un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  arbitraire.

## Équation différentielle

**Question 1** Si la fonction  $x$  est continue et vérifie pour tout  $t \geq 0$  l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A \cdot x(s) ds,$$

alors nécessairement

$$x(0) = x_0 + \int_0^0 A \cdot x(s) ds = x_0,$$

et sa dérivée satisfait  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ .

Réciproquement, si  $x(0) = x_0$  et pour tout  $t \geq 0$  on a  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ , alors comme le second membre de cette équation est continue comme composée de fonctions continues,  $\dot{x}$  est continue, et par intégration entre 0 et  $t$  on retrouve l'équation intégrale souhaitée.

**Question 2** Par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur  $A$ , pour tout couple  $x$  et  $y$  de fonctions continue de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$(\Phi(x) - \Phi(y))(t) = \int_0^t A \cdot (x(s) - y(s)) ds,$$



et donc

$$\begin{aligned}\|(\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t))\| &\leq \int_0^t \|A \cdot (x(s) - y(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t \|A\| \|x - y\|_\infty ds \\ &= (\|A\|T) \times \|x - y\|_\infty,\end{aligned}$$

soit

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq (\|A\|T) \times \|x - y\|_\infty.$$

L'application  $\Phi$  est donc contractante si  $\|A\| < 1/T$ . Le théorème du point fixe de Banach (p. 25) prouve alors l'unicité d'une fonction continue telle que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A \cdot x(s) ds$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Question 3** Le fait que  $\|\cdot\|_\infty^\alpha$  soit une norme se déduit facilement du fait que  $\|\cdot\|_\infty$  en soit une. On peut constater que pour toute fonction  $x$  continue sur  $[0, T]$ , on a

$$\|e^{-\alpha T} x\|_\infty^\alpha \leq \|x\|_\infty^\alpha \leq \|x\|_\infty.$$

Les deux normes sont donc équivalentes. En particulier, les notions de convergence de suite de points et de suites de Cauchy sont les mêmes dans les deux espaces. L'espace vectoriel  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  étant complet, c'est également le cas pour  $E$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty^\alpha$ .

**Question 4** Pour tout couple  $x$  et  $y$  de fonctions continue de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$e^{-\alpha t}(x - y)(t) = e^{-\alpha t} \int_0^t A \cdot (x - y)(s) ds = \int_0^t A \cdot e^{-\alpha s}(x - y)(s) e^{-\alpha(t-s)} ds$$

et donc

$$\begin{aligned}|e^{-\alpha t}(x - y)(t)| &\leq \int_0^t \|A\| \|e^{-\alpha s}(x - y)(s)\| e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\leq \left( \|A\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \right) \|x - y\|_\infty^\alpha.\end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds = \left[ \frac{e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \right]_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha},$$

on en déduit que

$$\|x - y\|_\infty^\alpha \leq \frac{\|A\|}{\alpha} \|x - y\|_\infty^\alpha.$$

L'application  $\Phi$  est donc contractante dès lors que  $\alpha > \|A\|$ . Pour tout  $T > 0$ , le théorème du point fixe de Banach (p. 25) prouve donc, en sélectionnant un  $\alpha$  adapté, l'unicité d'une fonction continue telle que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A \cdot x(s) \, ds$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Le problème original admet donc une solution unique.

## Références

Levien, Raph. 2008. “The Euler Spiral: A Mathematical History.”

Sato, Mikio. 1959. “Theory of Hyperfunctions. I.” *Journal of the Faculty of Science. Section I* 8: 139–93.