MINES ParisTech
http://campus.mines-paristech.fr 2020-2021

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...).

Rangement d'un tuyau de jardin

On cherche dans ce sujet à déterminer comment disposer un tuyau de jardin sur une pelouse afin qu'il encombre la jardin au minimum. Ce tuyau est relié à une extrémité à un robinet d'eau et doit permettre d'arroser un parterre de fleurs. Il ne peut excéder une valeur maximale de courbure sous peine de rompre.

Fig.1 : Un rangement sans doute pas optimal...

On modélise la position du tuyau comme une courbe de longueur L dans le plan. On représente cette courbe par $N+1$ points (x_i, y_i) $(i = 0, \dots, N)$ uniformément espacés d'une longueur $dx = L/N$

$$(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 = dx^2\,, \quad i = 0, \dots, N \tag{1}$$

On suppose que le robinet d'eau est situé au point $(0, 0)$ tandis que le parterre de fleur doit être arrosé au point $(L/2, 0)$. Ceci amène à se fixer

$$x_0 = y_0 = y_N = 0 \tag{2}$$

Le robinet limite l'angle initial pris par le tuyau, ce que l'on modélise par $y_1 \geq 0$. En supposant que le courbe suivie par le tuyau peut être paramétrée par rapport à son abscisse x, cad en imposant

$$x_{i+1} \geq x_i\,, \quad i = 0, \dots, N \tag{3}$$

on cherche alors à minimiser la fonction

$$K\left(x_N - \frac{L}{2}\right)^2 + dx^2 \sum_{i=0}^{N} y_i^2 \tag{4}$$

où $K >> dx$ est un paramètre constant.

Enfin, on impose une courbure maximale via la condition suivante

$$(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})^2 \leq dx^4 \gamma^2 \tag{5}$$

1 Etude du problème d'optimisation

1. Interpréter le coût (4). Que cherche-t-on à minimiser ?
2. Pourquoi n'a-t-on pas plutôt imposé la contrainte $x_N = L/2$? (Indice : on pourra considérer la condition initiale qu'il faudrait alors fournir au solveur pour la résolution numérique d'un tel problème.)
3. Interpréter géométriquement la condition de courbure (5)
4. Formuler le problème d'optimisation à résoudre sous la forme

$$\min_{c_{eq}(z)=0\,,\; c_{ineq}(z)\leq 0} f(z) \tag{6}$$

On précisera les variables de décision z, leur nombre n, les contraintes c_{eq} et c_{ineq} ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

2 Etude et résolution numériques

5. Quelles méthodes de résolution peuvent être envisagées pour ce problème ?
6. Développer un algorithme de résolution pour les valeurs numériques suivantes

$$L = 10\,, \quad N = 60\,, \quad K = 10 \quad \text{et} \quad \gamma = 3 \tag{7}$$

en utilisant comme courbe initiale un triangle isocèle rectangle, dont l'hypothénuse, de longueur $L/\sqrt{2}$, est sur l'axe des abscisses, cad d'abscisses $x(0) = 0 : (dx/\sqrt{2}) : L/\sqrt{2}$ et d'ordonnées $y(0) = [0 : (dx/\sqrt{2}) : L/2\sqrt{2} \quad L/2\sqrt{2} - (dx/2\sqrt{2} : (dx/\sqrt{2}) : L/2\sqrt{2})]$.
7. Reprendre les simulations avec $K = 100$ et $K = 10^5$. Comment les résultats obtenus et conclure sur l'effet de ce paramètre.
8. Pour $K = 10^5$, comparer les résultats et en particulier la valeur du terme $dx^2 \sum_{i=0}^{N} y_i^2$ pour $N = 60$, $N = 160$ et $N = 260$. Interpréter.
9. Pour $N = 60$ et $K = 10$, comparer les résultats obtenus en prenant pour condition initiale une droite sur l'axe des abscisses (abscisses $x(0) = 0 : dx : L$ et ordonnées $y(0) = 0$). Quelle est la caractéristique du problème qui explique les résultats obtenus ? A quoi est-elle due ?

3 Minimum global

On considère maintenant le fait que le tuyau ne peut traverser un autre parterre de fleur circulaire situé à proximité du tuyau, afin de ne pas l'abîmer. Ceci se traduit par la condition

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \geq R^2 \tag{8}$$

10. Ajouter cette contrainte au problème nominal. Modifie-t-elle la caractéristique identifiée à la question précédente ?
11. Reprendre les simulations de la question 9 avec les valeurs $x_P = 2$, $y_P = 0.2$ et $R = 0.3$. Les résultats obtenus confirment-ils votre analyse précédente ?
12. On se propose de mettre en place une génération aléatoire de conditions initiales. Pour ce faire, on modifie la fonction objectif comme suit

$$K_1\,(x_N - L/2)^2 + K_2 y_N^2 + dx^2 \sum_{i=0}^{N} y_i^2 \tag{9}$$

où $K_1, K_2 >> 1$ sont de grands paramètres constants, et où l'on ne considère plus la contrainte $y_N = 0$.
   (a) Justifier ce choix.
   (b) Proposer un algorithme visant à obtenir le minimum global de cette fonction, en générant des conditions initiales aléatoires mais satisfaisant les contraintes. On pourra considérer une mise à jour appropriée de ce caractère aléatoire en fonction des résultats obtenus.