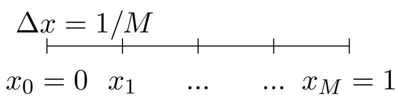
Projet MOPSI

Louis Hémadou et Louis Lesueur

1 Exemple en 1D

On considère $\Omega = [0, 1]$ et $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$
Les densités ρ_1 et ρ_2 sont discrétisées (cf. pixelisation)



On pose donc : $\rho_i(x) = \rho_i^j$ pour chaque $x \in [x_{j-1}, x_j[$ (densités de proba constantes par morceaux, telles que $\Delta x \sum_{j=1}^{M} \rho_i^j = 1$)

Remarque Pour une image, l'espace sera en 2D (N_y pixels de haut, N_x pixels de large). Dans le cas d'une image en noir et blanc 1=Noir, 0=blanc et gris entre 0 et 1.

1.1 Formalisation du problème

On cherche une sorte d'interpolation entre ρ_1 et rho_2, une sorte de $\lambda \in [0, 1]$ qui permettrait de trouver une densité du type $(1-\lambda)\rho_1 + \lambda\rho_2$. Mais c'est plus compliqué, donc on va remplacer le "$(1 - \lambda)$" par une équation.

Pour ça, on se fixe un $\epsilon > 0$ et on se donne W_ϵ une distance sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et on va chercher un barycentre pour cette distance. C'est-à-dire un $\bar{\rho_\lambda}$ tel que pour $\lambda \in [0, 1]$ [1]

$$\bar{\rho_\lambda} \in \underset{\rho \in \mathcal{P}}{argmin} \;\; \lambda W_\epsilon(\rho, \rho_1)^2 + (1 - \lambda) W_\epsilon(\rho, \rho_2)^2 \tag{1}$$

Remarque On peut vérifier que pour $\lambda = 1$, ρ_1 est bien solution et que pour $\lambda = 0$, ρ_2 est aussi solution.

Exercice Si on choisit une distance induite par une norme pour W_ϵ dans un espace vectoriel normé (ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{P}(\Omega)$!), montrer que $\bar{\rho_\lambda}$ est unique et que $\bar{\rho_\lambda} = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$, ce qui justifie le nom de barycentre !

1. cf formule (8) du papier

1.2 Distance de Wasserstein régularisée

Pour le W_ϵ on va considérer la distance de Wasserstein régularisée [2] :

$$W_\epsilon(\rho_1, \rho_2) = \underset{\pi \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)}{min} \int_{\Omega \times \Omega} (x-y)^2 \pi(x,y) dx dy + \epsilon KL(\pi|\xi) \tag{2}$$

Avec :
- $KL(\pi|\xi) = \int_{\Omega \times \Omega} \pi(x,y)(\log(\frac{\pi(x,y)}{\xi(x,y)}) - 1) dx dy$
- $\xi \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$ mesure de proba de référence (on peut choisir $\xi = 1$ ou $\xi(x,y) = \rho_1(x)\rho_2(y)$ par exemple)

Propriétés de $\pi \in \mathcal{P}(\Omega \times \Omega)$
- $\pi(x,y) \geq 0$
- $\int_{\Omega \times \Omega} \pi(x,y) dx dy = 1$
- $\int_{\Omega \times \Omega} \pi(x,y) dy = \rho_1(x)$ est la première marginale
- $\int_{\Omega \times \Omega} \pi(x,y) dx = \rho_2(y)$ est la seconde marginale

1.3 Retour sur le cas discret sur $[0,1]$

On pose, pour $1 \leq j \leq M$: $\tilde{x_j} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$

À partir d'ici on peut abandonner les "Δx" grâce aux simplexes, comme dans le papier.

1.4 Discrétisations des outils définis ci-dessus

On définit $(\pi_{ij})_{1 \leq i,j \leq M}$ tel que :
- $\pi_{j,j'} \geq 0$
- $\sum_{j,j'} \pi_{jj'} = 1$
- $\sum_{j'} \pi_{jj'} = \rho_1^j$
- $\sum_{j} \pi_{jj'} = \rho_2^{j'}$

Norme de Wasserstein discrétisée :

$$W_\epsilon(\rho_1, \rho_2) = \sum_{1 \leq j,j' \leq M} c_{jj'} \pi j j' + \epsilon \sum_{1 \leq j,j' \leq M} \pi_{jj'} (\log(\frac{\pi_{jj'}}{\xi_{jj'}}) - 1) \tag{3}$$

avec $c_{jj'} = (\tilde{x_j} - \tilde{x_{j'}})^2$ Faut-il mettre des Δx ? En reparler à Virginie quand on rencontrera le problème.

Cette norme se calcule avec la section 2 du papier

2. cf section 3.1 du papier

2 À faire pour la prochaine fois

— Lire le papier jusqu'à la page 11
— Implémenter un algo pour générer des densités de proba discrètes
— Calculer des W_ϵ et regarder ce qu'il se passe pour différentes valeurs de ϵ (reproduire ce qu'il se passe sur la Figure 1 du papier où ρ_1 est en bleu et ρ_2 est en rouge)
— prochain rdv le 07/11 à 17^h30