MECANIQUE DES SOLS

Projet n°2 : Modélisation

Introduction

L'objectif de ce projet est de programmer une loi de comportement des sols qui est étudiée dans la deuxième partie du module de Mécanique des Sols, le modèle Camclay modifié[1]. Il s'agit d'un modèle élastoplastique écrouissable. Sa formulation est relativement simple mais permet de modéliser les grandes tendances du comportement des sols fins.

On adoptera une formulation du modèle dans l'espace des contraintes de Cambridge (p, q) mais le programme de calcul doit pouvoir prendre en compte en entrée des états de contrainte dans les directions principales. Typiquement, il s'agit de pouvoir modéliser des essais isotropes et triaxiaux, ou oedométriques.

Le projet est divisé en deux parties. La première est consacrée à la préparation des algorithmes et ne considérera qu'un comportement élastique linéaire et non-linéaire. La seconde partie consistera à programmer le modèle Camclay modifié en adaptant les algorithmes développés au cours de la première partie.

I – Algorithmes généraux – élasticité

En guise d'introduction, nous allons préparer la structure générale du programme en modélisant un comportement élastique linéaire puis non-linéaire.

On utilisera une formulation incrémentale explicite : les incréments de déformations / contraintes sont calculés à partir de l'état actuel des contraintes et des déformations.

États de contrainte considérés :

On se place dans des conditions dites triaxiales, en considérant une symétrie de révolution autour de l'axe vertical (direction 1) : les directions 2 et 3 sont donc équivalentes. On considèrera en outre que l'axe vertical est une direction principale. Dans l'espace des contraintes principales, les tenseurs des contraintes et des déformations peuvent se simplifier comme suit (notation vectorielle donnant les composantes de la diagonale des tenseurs complets) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

On définit les invariants de contrainte suivants (états triaxiaux avec $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3$$

et pour les déformations (états triaxiaux avec $\epsilon_2 = \epsilon_3$) :

[1] Schofield, A., Wroth, P., 1968. *Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill, London.

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$$
$$\epsilon_q = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3)$$

Lois élastiques considérées :

On considérera deux lois élastiques isotropes : (1) la loi de Hooke ainsi qu'une (2) loi non-linéaire pour laquelle les incréments de déformation élastique suivants seront considérés[2] :

$$d\epsilon_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0}\frac{dp}{p}$$
$$d\epsilon_q^e = \frac{1}{3G}dq$$

Paramètres :

Pour la loi de Hooke, on prendra : $E = 9$ MPa et $\nu = 0{,}3$.

Pour la loi élastique non-linéaire, on prendra $\kappa = 0{,}01$ et $G = 2$ MPa.

L'indice des vides initial est $e_0 = 0.80$ (pour une contrainte moyenne de 10 kPa).

L'idée générale, pour simuler le comportement du matériau lors d'une sollicitation mécanique, est :

- de partir de l'état initial (contraintes connues, indice des vides connu, déformations nulles) ;
- de subdiviser le chargement menant à l'état final prédéterminé en petits incréments (ne pas hésiter à faire de très petits incréments de chargement) ;
- de passer de l'état actuel *n* connu à un état *n+1* en appliquant les relations incrémentales entre contraintes et déformations. On détermine ainsi à chaque pas de calcul les nouvelles contraintes (invariants et contraintes principales), les déformations élastiques cumulées (invariants et déformations principales) ainsi que les autres variables d'état du sol, jusqu'à l'état final.

Indications :

Nous connaissons les lois de comportement incrémentales sous cette forme :

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_v^e \\ d\epsilon_q^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}$$

La matrice 2x2 ci-dessus correspond à la loi de comportement ; elle peut être nommée matrice de comportement (matrice tangente dans le cas des relations incrémentales données ici).

Par commodité, puisque les grandeurs contrôlées pendant les essais correspondent aux contraintes principales, il est recommandé de réécrire les relations incrémentales sous la forme suivante (on retiendra que $\sigma_2 = \sigma_3$ et $\epsilon_2 = \epsilon_3$) :

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_1^e \\ d\epsilon_3^e \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix}$$

On inversera partiellement ou totalement cette relation matricielle en fonction des incréments connus à l'état *n* (i.e. selon que l'on contrôle l'essai en contraintes, en déformations ou de façon mixte).

[2] Il s'agit de la partie

Vous simulerez, avec la loi de Hooke et avec la loi élastique non-linéaire :

- Un essai de compression simple en contrôlant les contraintes axiale et radiale : *passage de* $\sigma_1 = 10$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ kPa *à* $\sigma_1 = 500$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ kPa*.*
- Le même essai de compression simple mais cette fois en contrôlant la déformation axiale ainsi que la contrainte radiale (maintenue constante, égale à zéro). On pourra stopper le chargement à déformation imposée lorsque la contrainte axiale aura atteint $\sigma_1 = 500$ kPa.
- Vous profiterez de cette partie pour valider les algorithmes ainsi que pour discuter l'influence de la taille des incréments sur les résultats obtenus.

II – Élastoplasticité

Résumé des principales équations du modèle Cam-Clay modifié (cf. séance 11)

Courbe de consolidation vierge :

$$v = 1 + e = N - \lambda \ln(p'/p_{ref})$$

Courbe d'état critique :

$$v = 1 + e = \Gamma - \lambda \ln(p'/p_{ref})$$

avec $p_{ref} = 1$ kPa.

Incréments de déformation élastique :

$$d\epsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \frac{dp'}{p'}$$

$$d\epsilon_q^e = \frac{1}{3G} dq$$

Surface de charge :

$$f = q^2 - M^2 p'(p'_0 - p')$$

Règle d'écrouissage :

$$d\epsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{dp'_0}{p'_0}$$

Loi d'écoulement plastique : $d\epsilon_v^p = d\Lambda \frac{\partial g}{\partial p'}$ & $d\epsilon_q^p = d\Lambda \frac{\partial g}{\partial q}$

On prendra une loi d'écoulement associée : $g = f$

Données d'entrées (paramètres du modèle et état initial du sol) :

- Indice des vides initial $e_0 = 0.8$ (pour une contrainte moyenne de 10 kPa) ;
- Préconsolidation initiale $p'_{0,ini} = 100$ kPa ;
- Paramètres du modèle : $\lambda = 0{,}2$; $\kappa = 0{,}01$; $M = 1{,}0$; $G = 2$ MPa.

Indications :

- On pourra se reporter au corrigé de l'exercice 2 du TD11 pour le détail des équations incrémentales.
- Le choix d'un algorithme de résolution n'est pas unique. Il est tout de même recommandé de calculer les matrices de comportement élastique et élastoplastique, en prenant garde d'utiliser la matrice adéquate selon la position du point représentatif de l'état de contrainte vis-à-vis de la surface de charge.

- Ces matrices devront être partiellement inversées lorsque le contrôle sera mixte, mêlant déformation (dans une direction) et contrainte (dans une autre).
- Lors de la prise en compte de la plasticité, il est utile de vérifier les valeurs de la surface de charge *f* à la fin de l'incrément (avec les nouvelles valeurs des contraintes et de la pression de préconsolidation) : elles doivent être « proches » de zéro. On pourra ajouter une figure représentant l'évolution de *f* au cours du chargement.

Vous simulerez :
- Un essai oedométrique (contrôle des déformations) :
  passage de [$\sigma_1 = 10$ kPa et $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.5\ \sigma_1$] à une déformation axiale de 20% ;
- Un essai isotrope drainé (contrôle des contraintes) :
  passage de $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10$ kPa à $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 250$ kPa ;
- Un essai triaxial drainé (C.D.) normalement consolidé ou faiblement surconsolidé pour illustrer le régime contractant (contrôle des contraintes) :
  Après la pré-consolidation de l'étape précédente, décharge isotrope à 200 kPa puis cisaillement passant de $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 200$ kPa (état isotrope) à une valeur de contrainte σ_1 qui permet d'atteindre la rupture (on maintient $\sigma_2 = \sigma_3 = 200$ kPa) ;
- Un essai triaxial drainé (C.D.) dans le domaine très surconsolidé pour illustrer le régime dilatant (contrôle mixte contrainte radiale constante et déformation axiale croissante) :
  Après la pré-consolidation précédente à 250 kPa, déchargement à un état initial à choisir et chargement jusqu'à la rupture du sol.

<u>Rendu par binôme à l'intérieur des petites classes</u> :
- Description des algorithmes retenus et des principaux résultats pour les deux parties I et II ;
- Les résultats sont à tracer dans les plans suivants : (σ_1, σ_3), (p, q), (p, e), $(\ln p, e)$, (ϵ_1, ϵ_v), (ϵ_1, q) ;
- Le détail du programme développé (au choix : python, matlab, excel, etc.).

<u>Echéance</u> : 13 février 2022.