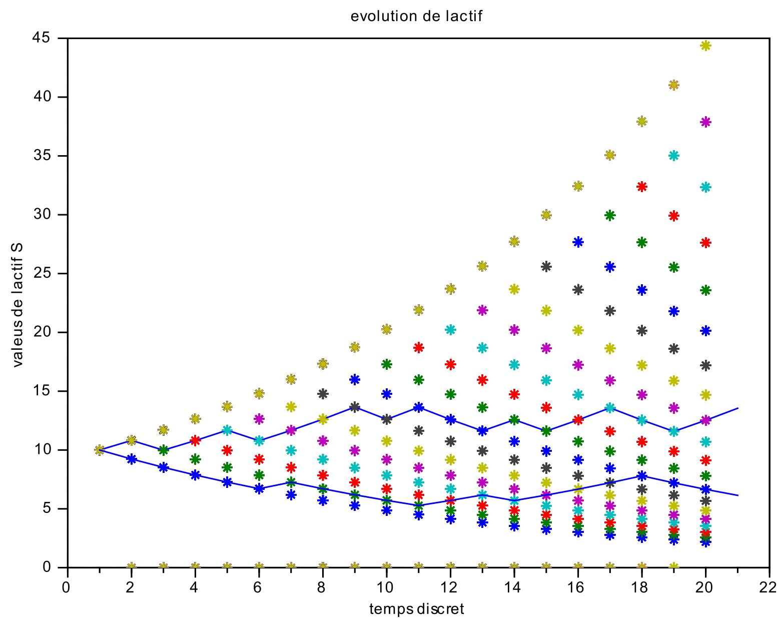
Option FinTech.
Mathématiques pour la Finance

Modèle Binomial et Modèle de Black et Scholes.

Irina Kortchemski, CY TECH



Mathématiques financières . Objectifs

- Modélisation du marché
- Marché:
  • Actifs (Bond, Obligation, Stock, Action) sont des contrats qui génèrent uniquement un flux d'argent
  • Produits Dérivés (Options, Forward, Future, Swaps...) sont des contrats dont les valeurs fluctuent en fonction de l'évolution du temps ou du prix d'un autre actif.
- Rôle des Dérivés
  ◦ Couverture (Hedging) des risques
  ◦ Gestion des portefeuilles
  ◦ Arbitrage
  ◦ Speculation

Mathématiques financières. Objectifs

- Pricing et Optimisation sont basés sur la modélisation du marché
- Modélisation du marché
  • Choix des objets mathématiques pour décrire des phénomènes aléatoires (risqués) et non aléatoires $\Rightarrow$
  ◦ Introduction des processus stochastiques $S_t, V_t, \ldots$ comme des familles de variables aléatoires.
  • Choix des lois de probabilité. $\Rightarrow$
  ◦ Introduction du Mouvement Brownien W_t
  • Choix des espaces où habitent les variables aléatoires. $\Rightarrow$
  ◦ Introduction des espaces de dimension infinie $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{W_t, \mathbb{E}[W_t^2] < \infty, ||W_t||^2 = \mathbb{E}[W_t^2]\}$$

Mathématiques financières. Objectifs

- Modélisation du marché
  - Principe fondamentale est un Principe d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage $\Rightarrow$ "Marché est honnête" $\equiv$ "No free lunch"
  - Introduction de Martingale
- Calcul des prix: $\mathbb{E}[V_T|\mathcal{F}_t]$
  - Introduction de Espérances conditionnelles.
  - Par rapport à quelle mesure de probabilité?
  - Par rapport à quelle condition? $\Rightarrow$
  - Introduction de la filtration $\mathcal{F}_t$ équivalente à l'information complete sur les processus: $\mathbb{E}[V_T|\mathcal{F}_t]$
  - Calcul des prix nécessite le calcul des différentiels $dV(t, S_t) \Rightarrow$
  - Application des series de Taylor aux fonctions de variables aléatoires $\Rightarrow$ Lemme d'Ito

Mathématiques financières. Objectifs

- Introduction des modèles
  - Modèles au temps discret
  Dates de trading sont discrets $t \in [0, 1, 2, ..., T-1, T]$
  - Modèles au temps continu
  Dates de trading $t \in [0, T]$
  - Modèle de Black et Scholes
  - Modèle de Merton
  - Modèle de Dupire
  - Modèle de Heston
  - Modèle de Vasicek, modèle de Ho-Lee, ...
  - Gamma Variance modèle

Mathématiques pour la finance

- Partie I: Modélisation probabiliste du marché au temps discret
  - Modèle Binomial
  - Calcul stochastique au temps discret
- Partie II: Modélisation probabiliste du marché au temps continu
  - Calcul stochastique au temps continu
    - Intégrale stochastique
    - Lemme d'Ito
- Partie III: Modélisation probabiliste du marché au temps continu
  - Modèle de Black et Scholes
  - EDP de Black et Scholes et sa solution

I: Calcul stochastique au temps discret

- Rappels de probabilités avec le Modèle Binomial à 1 période
  - Tribu, Mesure, Espace de probabilité
  - Espérances conditionnelles
  - Notion d’Arbitrage, Probabilité de Risque Neutre
  - Construction de portefeuille de couverture
  - Calcule du prix d’un Produit Dérivé (Call).
- Rappels de probabilités avec le Modèle Binomial à N périodes
  - Processus stochastique discret, Filtration, Martingale
  - Evaluation et couverture d’un produit dérivé

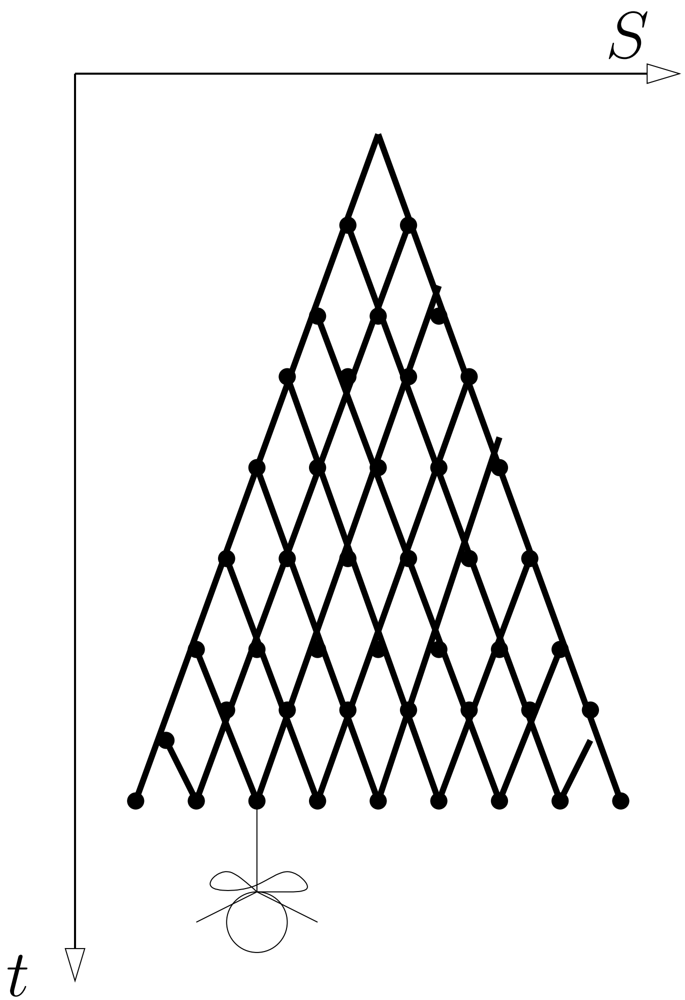
II: Calcul stochastique au temps continu

- Filtration, Espaces L^p
- Mouvement Brownien, Martingale
- Lemme d'Ito
  - • Variation Quadratique
  - • Intégrale Stochastique
  - • Formule d'Ito, Processus d'Ito
  - • Equations Différentielles Stochastiques et ses solutions

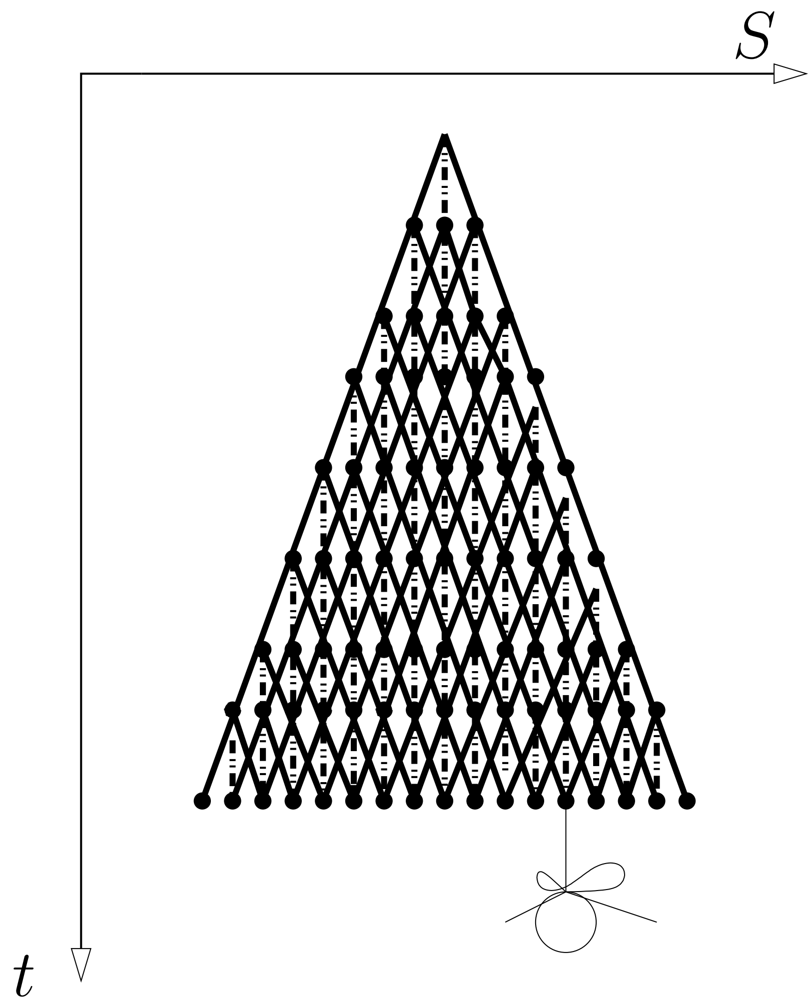
Partie III: Modèle de Black et Scholes

- Evolution d'un actif
- Hedging et la déduction de l'équation de Black et Scholes
- Théorème de Feynmann-Kac
- Solution de l'équation de Black et Scholes
- Théorème de Girsanov*
  - Changement de mesure de probabilité
  - Probabilité de Risque Neutre

Modèle binomial



Arbre Binomial

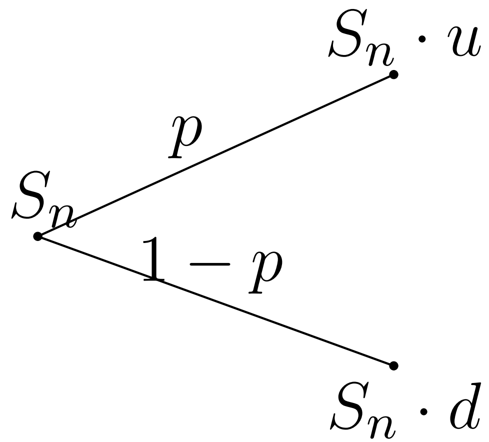


Arbre Trinomial

Arbre Binomial

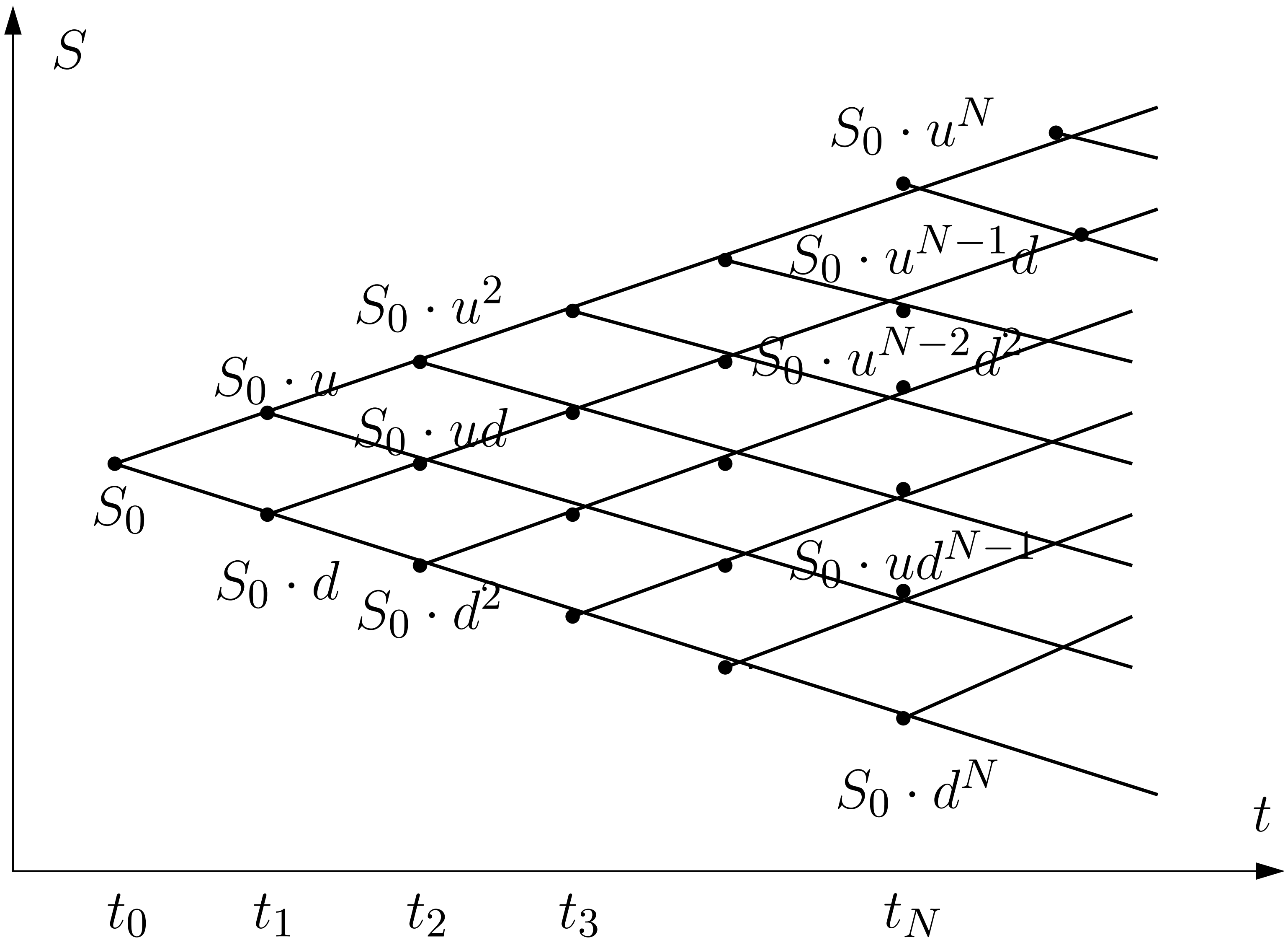
- L'evolution de l'actif sous-jacent est un processus stochastique discret.
  L'intervalle $[0, T]$ est discrétisé: $t_n = \Delta t \cdot n$. A chaque instant t_n on fait correspondre le prix S_n discret:
- $$t_n \to S_n, \qquad t_0 \to S_0$$
- L'idée principale de la méthode Binômiale:

$$S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n \\ d \cdot S_n \end{cases}$$



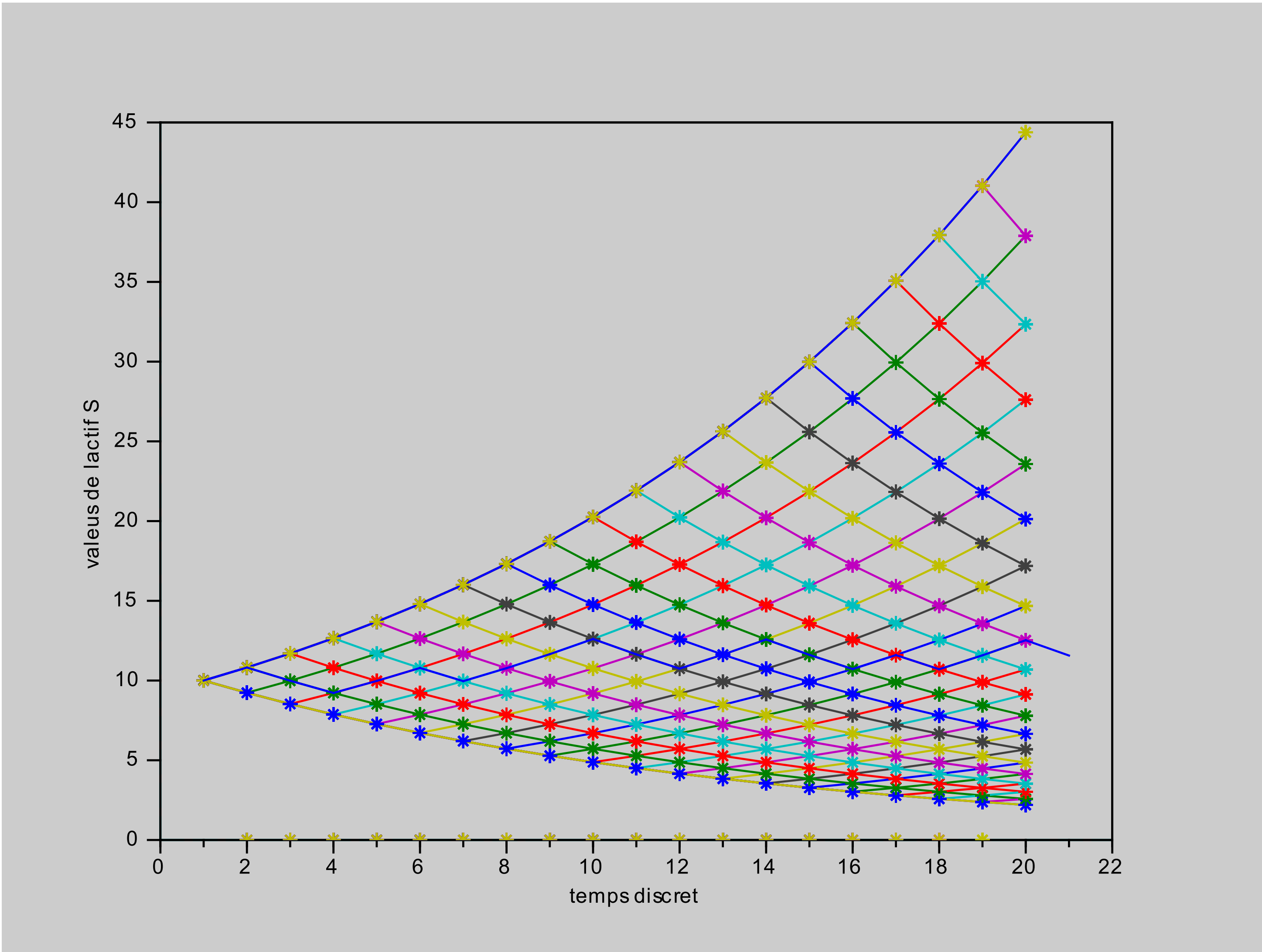
- $\mathbb{P}$ est la probabilité historique.

L’arbre Binomial pour l’actif.

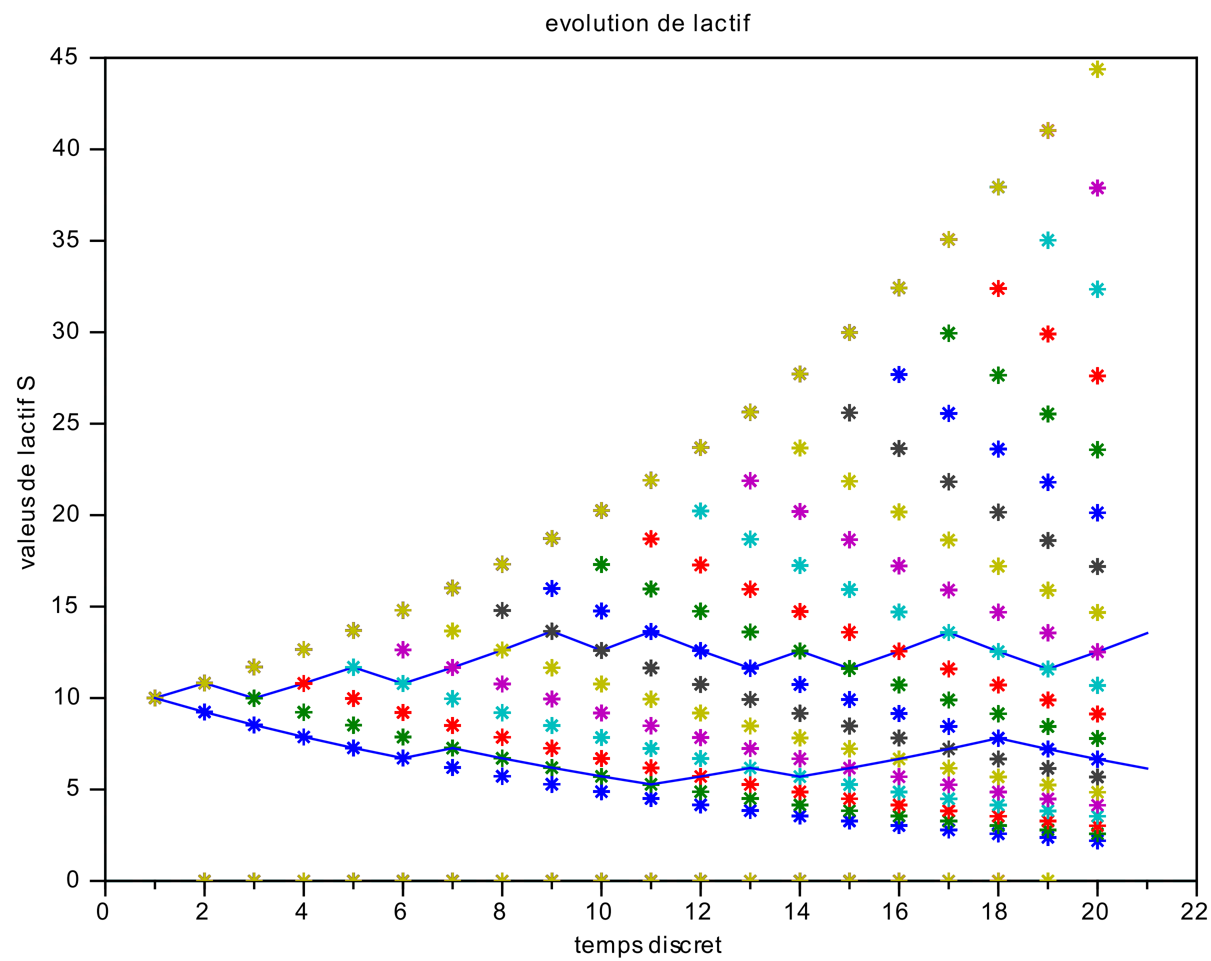


Calibration de l'arbre Binomial.

- Comment fixer les paramètres: u, d, p ?



Evolution d'un actif dans l'arbre.



Tribu

- La théorie de probabilité commence à partir de l'espace de probabilité.
  - Un espace de Probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où
  - Ω est un ensemble d'évènements
  - $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω
  - $\mathbb{P}$ est une Probabilité sur $\mathcal{F}$
- Définition d'une Tribu
  - On appelle tribu $\mathcal{F}$ sur Ω toute famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω vérifiant :
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$
  - $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
  - $(\forall n, \quad A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$

Tribu. Pourquoi?

- En finance ensemble d'événements Ω est infini.
- Tribu est nécessaire pour définir une Filtration et à chaque t (t varie!) une probabilité sur la Filtration.
- Filtration est une famille des évènements assosiés à chaque instant temporel, parmi eux il y a des événements intéressants.
- Les prix sont des espérances conditionnelles par rapport à une Filtration:

$$\mathbb{E}[V_T/\mathcal{F}_t], \quad \mathbb{E}[\mathbb{E}[V_T/\mathcal{F}_t]\mathcal{F}_s]$$

Tribu

- Définition d'une Tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par une famille $\mathcal{C}$
  • Tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par une famille $\mathcal{C}$ de parties de Ω est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. C'est également l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$.
- Définition de la Tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$
  La tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par les fermés de $\mathbb{R}$.

Tribu Borelien $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Vous vous interessez au prix d'un actif $S_t, \quad S_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exemple 1 d'une Tribu

- Tribu dans le Modèle Binomial à 1 période

• $\Omega = \{\emptyset, U, D\}$

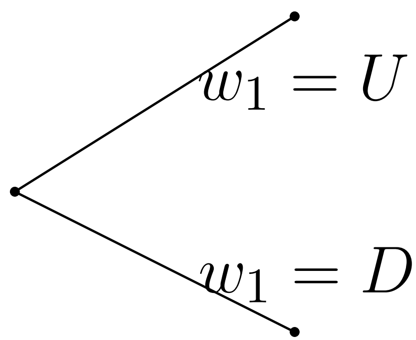
• En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information sur l'evolution de l'actif :$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,

• $A_U = \{w_1, w_1 = U\}$, $A_D = \{w_1, w_1 = D\}$

• On construit le tribu $\mathcal{F}_1 = \{A_U, A_D, \emptyset, \Omega\}$

• $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instants $t = 0$ et $t = t_1$.

• A $t = t_1$ on sait quel évènement de $\mathcal{F}$ s'est réalisé et lequel ne s'est pas réalisé



Exemple 2 d'une Tribu

- Modèle Binomial à 2 périodes

• Évènements élémentaires: Ω

$\Omega = \{\emptyset, (w_1, w_2), w_{1,2} = U \ ou \ D\} = \{\emptyset, (UU), (UD), (DU), (DD)\}$

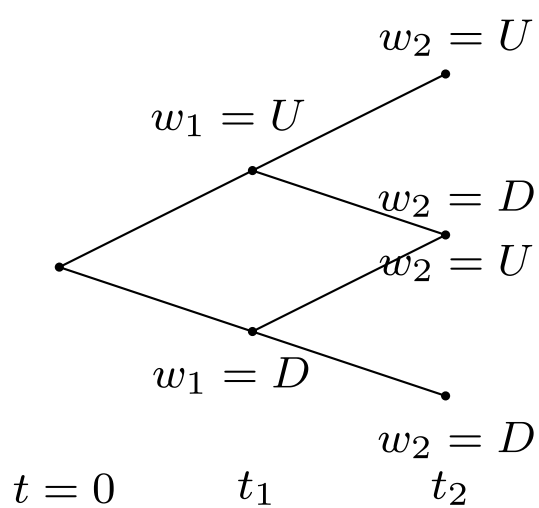
• $A_U = \{(UU, UD)\}$, • $A_D = \{(DU, DD)\}$

• $A_{UU} = \{(UU)\}, \quad A_{UD} = \{(UD)\}, \quad A_{DU} = \{(DU)\}, \quad A_{DD} = \{(DD)\}$

• $\mathcal{F}_2 = \{A_U, A_D, \emptyset, \Omega, A_{UU}, A_{UD}, A_{DU}, A_{DD}, A^c_{UU}, A^c_{UD}, A^c_{DU}, A^c_{DD},$
$A_{UU} \bigcup A_{DU}, A_{UU} \bigcup A_{DD}, A_{UD} \bigcup A_{DU}, A_{UD} \bigcup A_{DD}\}$

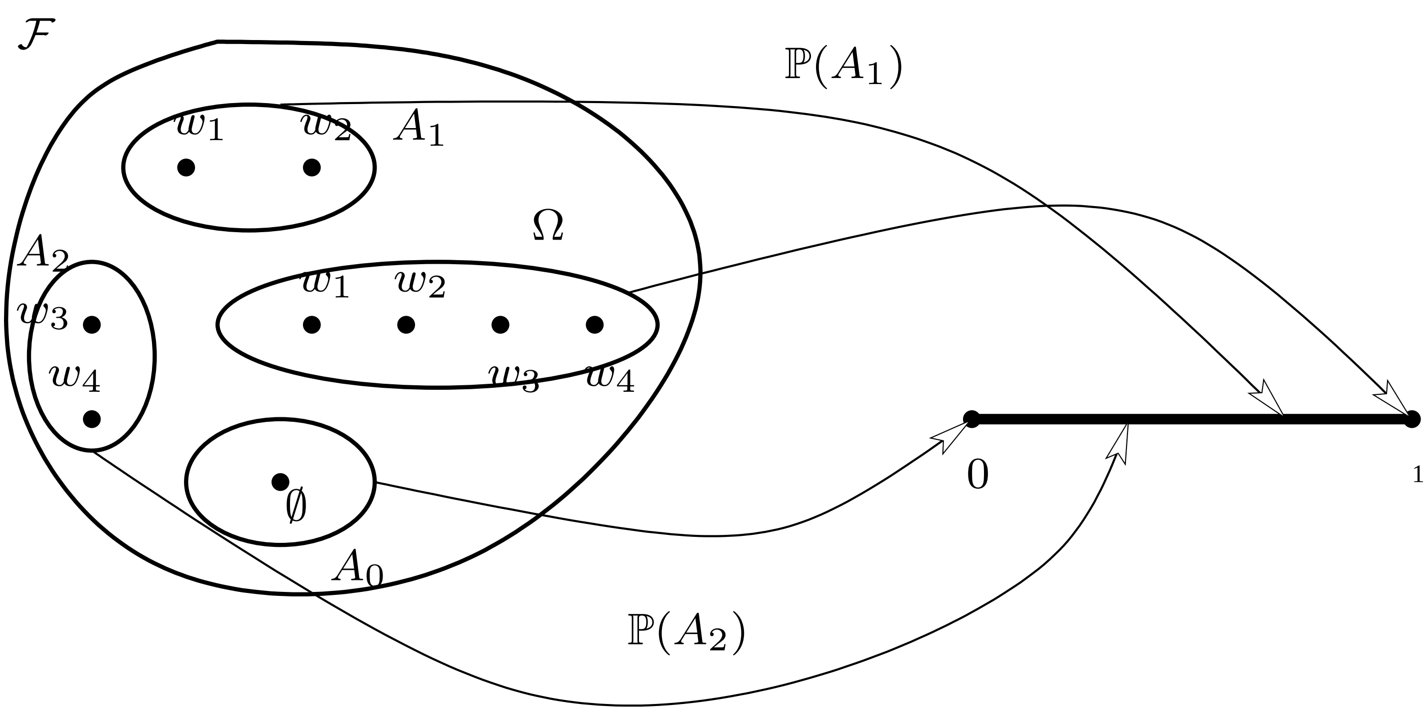
• A $t = t_2$ on s'interesse à un seul évènement (peut être composé des evenements elementaires, c'est pourquoi on utilise $\bigcup$) parmi 16

$\mathcal{F}_2 = \{(UU, UD), \ (DU, DD), \emptyset, \Omega, \ (UU), (UD), (DU), (DD), \ (UD, DU, DD),$
$(UU, DU, DD), \ (UD, UU, DD), \ (UD, DU, UU), \ (UU, DU), \ (UU, DD),$
$(UD, DU) \ (UD, DD)\}$



Mesure de Probabilité

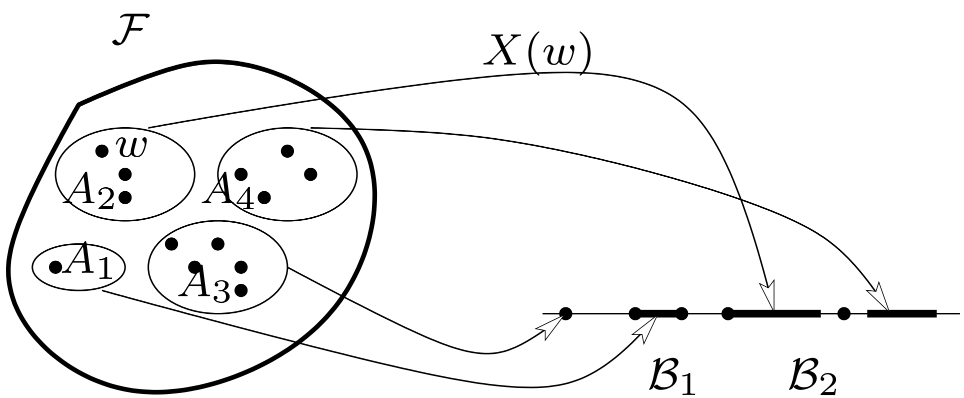
- On cherche toujours des évènements intéressants parmi ceux qui sont dans la tribu $\mathcal{F}$
- Sur une tribu $\mathcal{F}$ on définit la mesure de Probabilité
- Définition de la Probabilité:
  - Mesure de Probabilité est une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow R^+$ vérifiant
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
  - Pour (A_n) suite d'élements de $\mathcal{F}$, deux a deux disjoints, $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

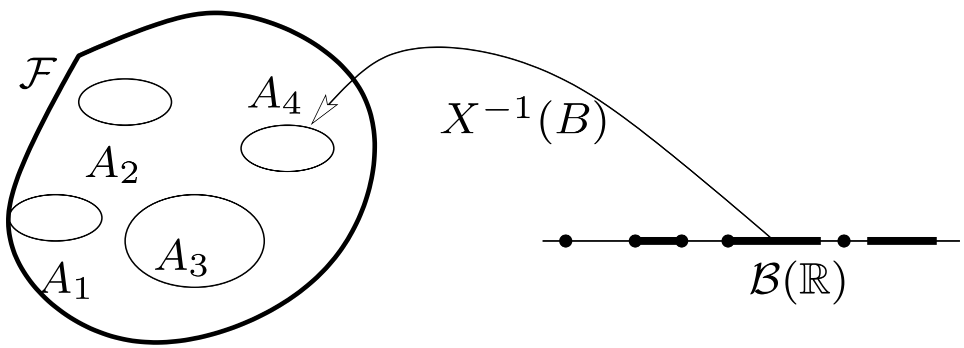


Variable aléatoire

Définition d'une variable aléatoire

- Soit l'espace de Probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Variable aléatoire est une application $X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ vérifiant
- $\forall$ borelien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ l'évènement défini par $\{X \in B\} = \{w \in \Omega, X(w) \in B\}$ est dans la tribu $\mathcal{F}$
- On peut dire que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$



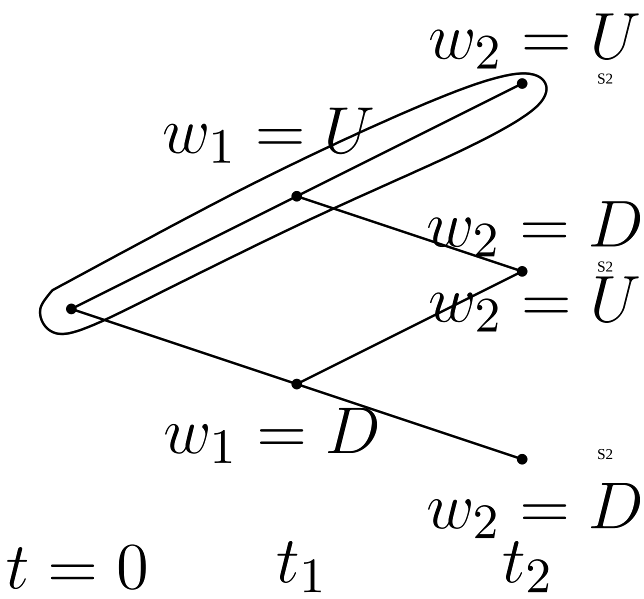


Variable aléatoire S_1 et tribu $\mathcal{F}_1$

- "Tribu est une information"
  - $\Omega = \{\emptyset, U, D\}$
  - En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$,
  - $A_U = \{w_1, w_1 = U\}, \quad A_D = \{w_1, w_1 = D\}$
  - $\mathbb{P}(S_1 = S_0 \cdot u) = p, \quad \mathbb{P}(S_1 = S_0 \cdot d) = 1 - p$
  - $\mathcal{F}_1 = \{U, D, \emptyset, \Omega\}$ est la tribu représentant l'information globale (tous les évènements possibles) disponible sur le marché à instant t_1.
- Tous les scenarios qui auraient pu arriver à S_1 sont dans $\mathcal{F}_1$.
  Conclusion: $\mathcal{F}_1$ est la tribu engendrée par S_1: $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$
- Une variable S_1 aléatoire est $\mathcal{F}_1$-mesurable si son image réciproque de tout Borélien $\mathcal{B}$ est dans $\mathcal{F}_1$: $\{S_1^{-1}(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\}$
- Conclusion: la variable aléatoire S_1 est bien $\mathcal{F}_1$-mesurable
- Définition heuristique de la mesurabilité: Une variable aléatoire est $\mathcal{F}_1$-mesurable si on connait tous ses scenarios et toutes ses valeurs grace à l'information donnée par $\mathcal{F}_1$, i.e. disponible à l'instant t_1.

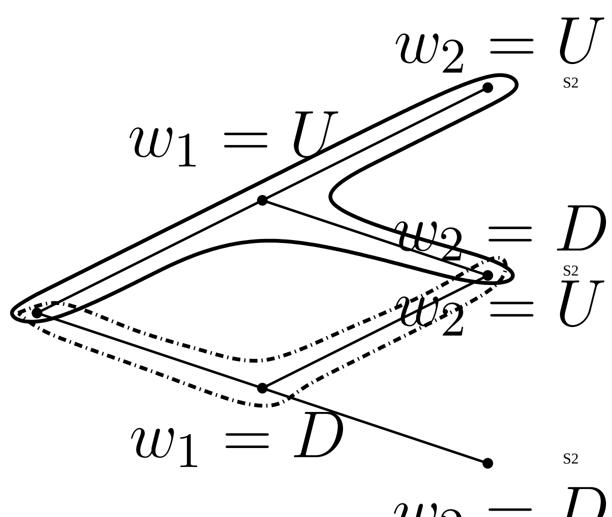
Variable aléatoire S_2 et tribu $\mathcal{F}_2$

- Tribu $\mathcal{F}_2 =$
  $\{(UU, UD),\ (DU, DD), \emptyset, \Omega,\ (UU), (UD), (DU), (DD),$
  $(UD, DU, DD), (UU, DU, DD),\ (UD, UU, DD),\ (UD, DU, UU),$
  $(UU, DU),\ (UU, DD),\ (UD, DU)\ (UD, DD)\}$
- Évènement (UU) impose le prix $(u^2 S_0)$ au S_2
- A chaque valeur S_2 (ou à un ensemble des valeurs) correspond un évènement du tribu $\mathcal{F}_2$



Variable aléatoire S_2 et tribu $\mathcal{F}_2$

- Tribu $\mathcal{F}_2 =$
$\{(UU, UD),\ (DU, DD), \emptyset, \Omega,\ (UU), (UD), (DU), (DD),$
$(UD, DU, DD), (UU, DU, DD),\ (UD, UU, DD),\ {\color{red}(UD, DU, UU)},$
$(UU, DU),\ (UU, DD),\ (UD, DU)\ (UD, DD)\}$
- Évènement ${\color{red}(UD, DU, UU)}$ impose le prix le plus élevé $(u^2 S_0)$ ou moyen (udS_0) au S_2
- A chaque prix de S_2 (ou à un ensemble des prix) correspond un évènement de la tribu $\mathcal{F}_2$



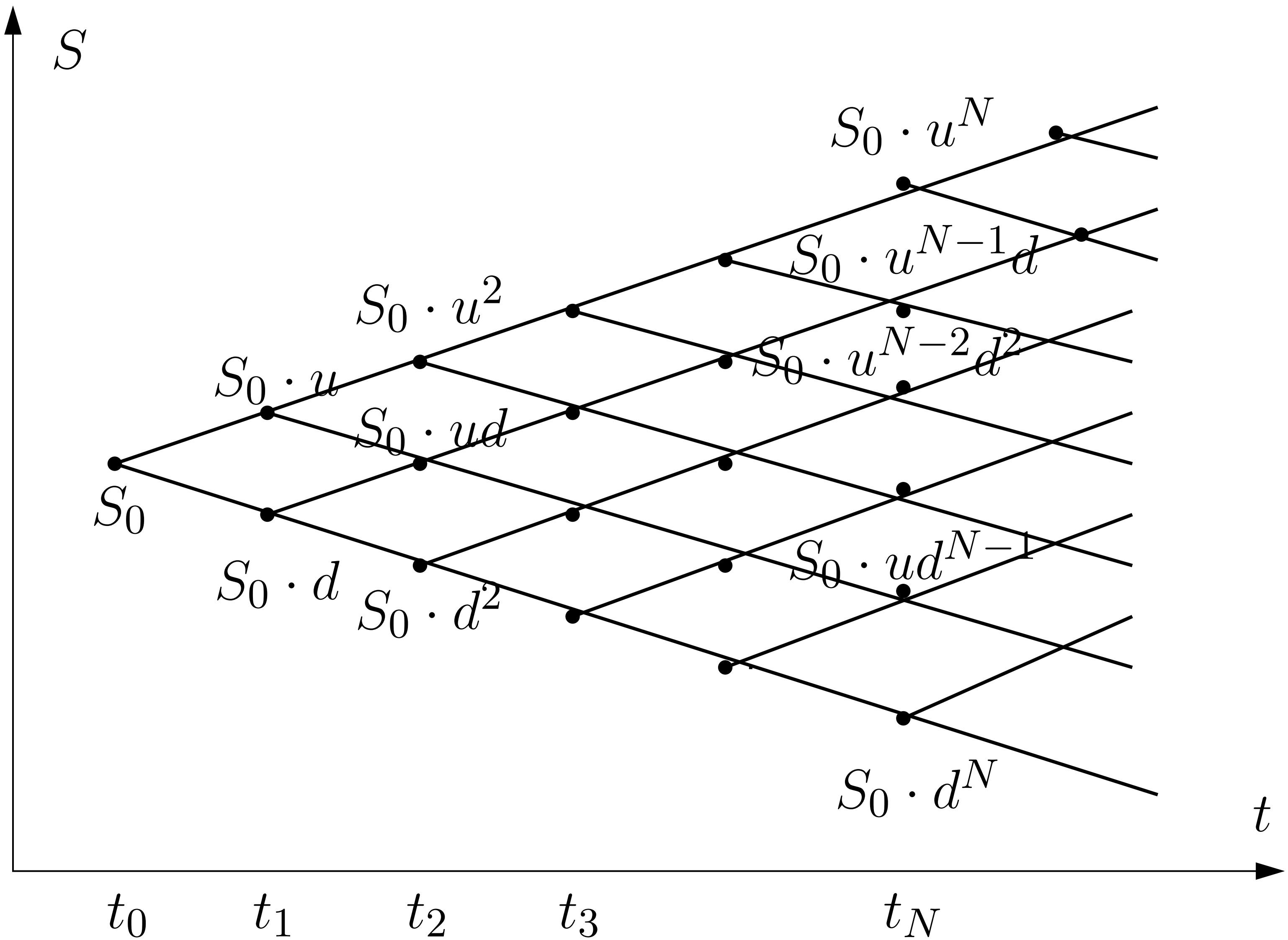
Tribu $\mathcal{F}_2$ est engendrée par S_2

- A chaque prix de S_2 (ou à un ensemble des prix de S_2) on associe un évènement de la tribu $\mathcal{F}_2$.
- On dit que $\mathcal{F}_2$ est engendrée par S_2: $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_2)$
- S_2 est $\mathcal{F}_2$ mesurable.

Tribu est une information

- Tribu $\mathcal{F}_n$ contient l'information sur tous les scenarios d'evolution (evenements interessants) de la variable aléatoire S_n.
- A $t = t_n$ on connaît exactement quel scenario s'est réalisé.
- Les tribus sont souvent construites à partir des variables aléatoires S_n et servent à décrire l'information codée par ces variables. On les note $\sigma(S_n)$.
- $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\quad \mathcal{F}_2 = \sigma(S_2)$, ... $\quad \mathcal{F}_n = \sigma(S_n)$

Modèle Binomial à n-périodes



Processus stochastique discret

- Définition d'un processus stochastique discret.
  On appelle processus discret
  • toute collection finie de variables aléatoires $(S_n)_{1 \leq n \leq N}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  • (S_n) est une fonction de deux variables
  $S_{t_n}(w_i) = S(t_n, w_i)$
- Définition de Filtration. On appelle filtration $\mathcal{F}$ toute collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...\mathcal{F}_N\}$:

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}, \quad \forall n$$

- Définition d'un processus adapté. Un processus discret $(S_n)_{1 \leq n \leq N}$ est dit adapté à la filtration $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}$-adapté) si pour tout $n \leq N$, S_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable

Processus stochastique discret

- Définition d'une filtration engendrée par un processus discret $(S_n)_{1\leq n\leq N}$
  • C'est la plus petite filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...\mathcal{F}_N\}$ qui rend le processus $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ $\mathcal{F}$-adapté.
  • On note $\mathcal{F} = \sigma(S_1, S_2, ...S_N)$
- Exemples
  • $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \{(U), (D), \emptyset, ((U), (D))\}$
  • $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_2) =$
  $\{(UU, UD),\ (DU, DD), \emptyset, \Omega,\ (UU), (UD), (DU), (DD),$
  $(UD, DU, DD), (UU, DU, DD),\ (UD, UU, DD),\ (UD, DU, UU),$
  $(UU, DU),\ (UU, DD),\ (UD, DU)\ (UD, DD)\}$

Rappels sur la théorie de la probabilité.

Loi d'une variable aléatoire

- Loi d'une variable aléatoire X
  Application $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une loi de variable aléatoire X vérifiant

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(w \in \Omega / X(w) = B)$$

  • $\forall$ borelien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

- Densité d'une v. a. continue
  Application $f_X(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\mu_X(B) = \int_B f_X(x)dx$$

  • X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

Fonction de répartition

- Définition de la fonction de répartition
  • Application $F_X(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
  $F_X(x) = \mathbb{P}(w \in \Omega / X(w) \leq x)$
  • $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy$
- Définition de $d\mathbb{P}(w)$ - intégration sur "probabilité"!
  • $d\mathbb{P}(w) = \mathbb{P}(x < X(w) \leq x + dx)$
  • $\mu_X(B) = \mathbb{P}(w \in \Omega / X(w) \in B)$, si $B = [x, x + dx] \Rightarrow$

  $d\mu_X(x) = \mathbb{P}(x < X(w) \leq x + dx)$
  • Donc $d\mathbb{P}(w) = d\mu_X(x)$ soit $d\mathbb{P} = f_X(x)dx$
- Notation $d\mathbb{P}(w)$ s'utilise dans des demonstrations liées au changement de mesure: Théorème de Girsanov, Théorème d'Escher ...

$$d\mathbb{P} = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} d\mathbb{Q}$$

Exemples des lois de probabilité

- Loi uniforme $X: \quad U([a,b])$
  - Fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & x \in [a,b] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

  - $d\mu_X(x) = f_X(x)dx = \frac{dx}{(a-b)}$
  -

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{(a-b)}, & x \in [a,b[\\ 1, x \geq b \end{cases}$$

  - Espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \frac{(a+b)}{2}$
  - Variance de X est donnée par $\mathbb{V}ar(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

Exemples des lois de probabilité

- Loi Normale $\mu_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X : \quad \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  - $d\mu_X(x) = f_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad x \in \mathbb{R}$
  - $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$
  - Espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \mu$
  - Variance de X est donnée par $\mathbb{V}ar(X) = \sigma^2$
- Prix de l'actif dans le modèle Black Scholes
  $S_T = S_0 \cdot exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\mathcal{N}(0,1))$

Exemples des lois de probabilité

- Loi Exponentielle X: $Exp(\theta)$
  - Fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta \cdot x} & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & sinon \end{cases}$$

  - $d\mu_X(x) = f_X(x)dx = \theta e^{-\theta \cdot x} dx, \quad x \in \mathbb{R}^+$
  - $F_X(x) = 1 - e^{-\theta \cdot x}$
  - Espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$
  - Variance de X est donnée par $\mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\theta^2}$

Exemples des lois de probabilité

- Loi Bernoulli X: $B(p)$
  - $\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
  - Espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = p$
  - Variance de X est donnée par $\mathbb{V}ar(X) = p(1 - p)$

Exemples des lois de probabilité

- Loi de Poisson X: $\quad P(\lambda)$
  - $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
  - Fonction de masse

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & sinon \end{cases}$$

  - Espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \lambda$
  - Variance de X est donnée par $\mathbb{V}ar(X) = \lambda$
- Dans une théorie d'assurance $\lambda = \theta T$, et θ modélise le nombres des sinistres par unité de temps.

Espérance, Variance...

- Soient X et Y deux variables aléatoires
- Espérance de X est donnée par
  $\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(w)d\mathbb{P}(w) = \int_\mathbb{R} x d\mu_X(x) = \int x f_X(x)dx$
- Variance de $Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- Écart type $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$
- Covariance de X et Y $cov(X,Y) =$
  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Définition de Probabilité conditionnelle
  Soient A et B deux événements. La probabilité conditionnelle de A par rapport à B est définie par
  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}^2$

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de Probabilité
- On note $\mathcal{L}^2(\Omega)$ espace vectoriel de variables aléatoires de carré sommable au sens de Lebesgue

$$\mathbb{E}[X^2] =< \infty$$

- On définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2$
  - Soit un couple de variables aléatoire $(X, Y) \in \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$
  - Produit scalaire $\langle X, Y \rangle = E[X \cdot Y]$
  - Norme $||X||^2 = E[X^2]$

Espérance conditionnelle

V.A. discrete

- On définit une nouvelle mesure de probabilité appelée probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.
  • Soit les v.a. X, Y discrètes $\in \mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X = x/Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

  • $\sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$

- Espérance sous la probabilité conditionnelle d'une variables aléatoire discrete
  • $\mathbb{E}(X/Y = y) = \sum_{x \in E} x\mathbb{P}(X = x/Y = y)$
  • La fonction $\mathbb{E}(X/Y = y)$ ne dépend que de y et elle fournit une information plus précise que $\mathbb{E}(X)$.
  • On définit l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$ comme la fonction de Y qui prend la valeur $\mathbb{E}(X/Y = y)$ quand $Y = y$. Il existe donc une variable aléatoire $h(Y)$ telle que

$$h(Y) = \mathbb{E}(X/Y) \quad et \quad \forall y, \quad h(y) = \mathbb{E}(X/Y = y)$$

Espérance et l'estimation. V.A. discrete.

- L'espérance $\mathbb{E}(X)$ peut être vue comme la meilleure estimation de X par une constante.

• En effet elle minimise la distance quadratique:

$$\inf_{C \in R} \{\mathbb{E}((X - C)^2)\} = \inf_{C \in \mathbb{R}} \{\mathbb{E}(X^2) - 2C \cdot \mathbb{E}(X) + C^2)\}$$

• Minimum du polynôme est atteint en $C = \mathbb{E}(X)$.
• L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X/Y)$ s'interprète aussi comme la meilleure estimation (pour la distance quadratique) de la variable Xpar la variable Y. Si Y prend ses valeurs dans l'espace discret E^*, on cherche à déterminer la fonction $h: \quad E^* \to \mathbb{R}$ qui réalise le minimum de :

$$\mathbb{E}((X - h(Y))^2) = \inf_{h \in R} \{\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(h(Y)X) + \mathbb{E}(h(Y)^2)\}$$

• La distance quadratique est minimisée par la projection orthogonal de X sur l'espace des variables engendrée par Y : $\mathcal{F} = \{h(Y); \quad h : E^* \to \mathbb{R}\}$.
• Pour déterminer cette projection faisons un petit calcul:

Esp. conditionnelle. V.A. discrete.

- Pour déterminer cette projection faisons un petit calcul:

$$\mathbb{E}(h(Y)\mathbb{E}(X/Y)) = \sum_{y \in E^*} \mathbb{P}(Y=y)h(y)\mathbb{E}(X/Y=y) =$$

$$\sum_{x \in E} \sum_{y \in E^*} x h(y) \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{E}(h(Y)X)$$

- Le calcul prouve la relation d'orthogonalité

$$\mathbb{E}(h(Y)(X - \mathbb{E}(X/Y)) = 0$$

- En s'inspirant des variables aléatoires à valeurs dans un espace discret on définit la notion d'espérance conditionnelle pour des variables aléatoires continues comme une projection orthogonale.

Fin des rappels

Construction d’un modèle Binomial

- On construit une théorie mathématique (Modèle Binomial) dans laquelle le marché vérifie l’hypothèse d’absence d’opportunités d’arbitrage (AOA en abrégé et NFL en anglais pour "no free lunch").
- On cherche une procedure (idée) pour définir les prix des Produits Dérivés.
- On a besoin des notions:
  - Espérance conditionnelle
  - Taux d’intérêt, Rendement
  - Produit dérivé
  - Arbitrage
  - Probabilité de Risque Neutre $\mathbb{Q}$
  - Portefeuille autofinançant
  - Martingale

Esp. conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}$

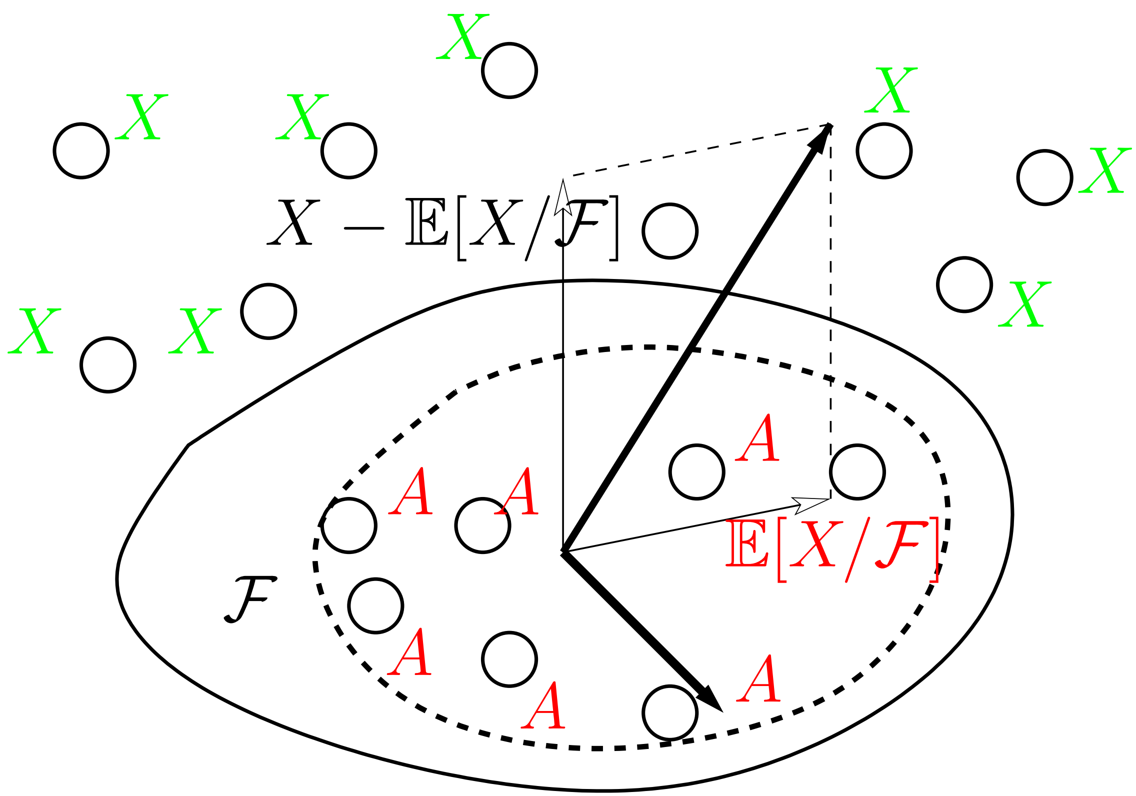
- Définition de Espérance conditionnelle par rapport à une tribu $\mathcal{F}$
  • Variable aléatoire $X : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$
  • Tribu $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, un évènement $A \in \mathcal{F}$
  • $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}$- mesurable
  • $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ vérifie la relation:

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] \cdot \mathbb{I}_A], \qquad A \in \mathcal{F}$$

- Cette définition illustre que
  • $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est de la projection orthogonale de v.a. X sur la tribu $\mathcal{F}$
  • $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est la meilleur estimation de X sachant l'information contenue dans $\mathcal{F}$

Espérance et projection orthogonale

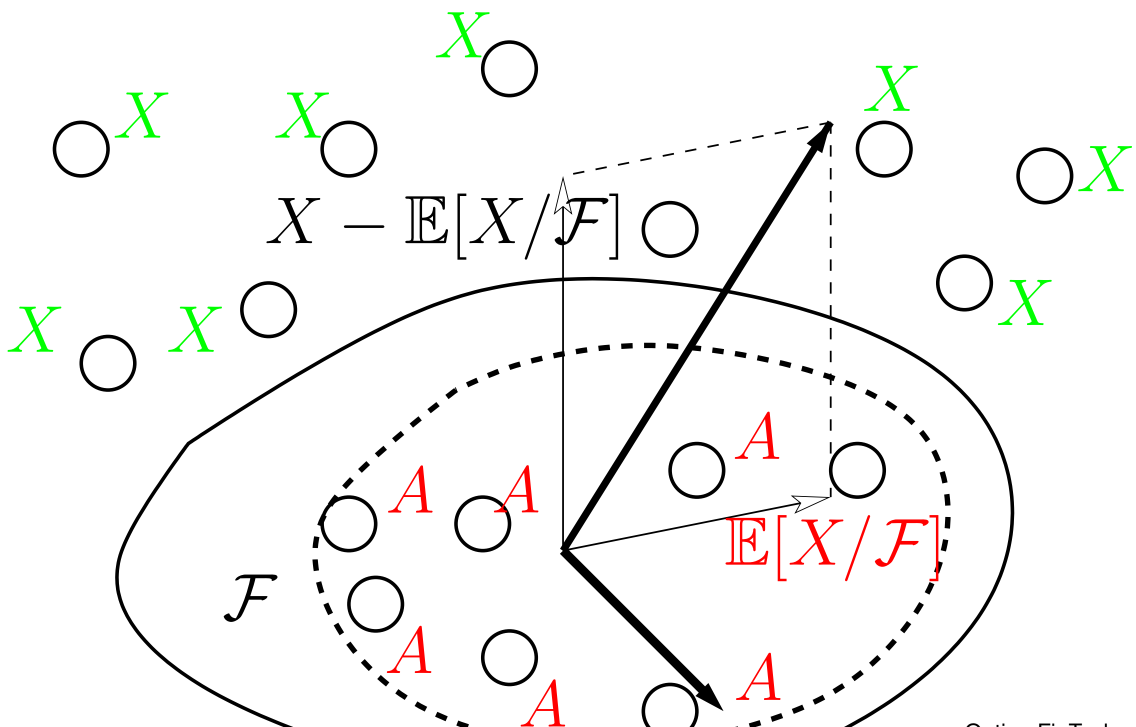
- $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est la meilleur estimation de X sachant l'information contenue dans $\mathcal{F}$



$\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est une variable aléatoire habitant dans $\mathcal{F}$.

Sens de $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$

- Si on calcule $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ on effectue la moyenne des valeurs de X sur les evenements hors $\mathcal{F}$.
- $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est une v.a. basée sur les evenements de $\mathcal{F}$.
- Si X est $\mathcal{F}$ mesurable alors $\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] = X$.
- On dit que X est une constante par rapport à $\mathcal{F}$.



Espérance et projection orthogonale

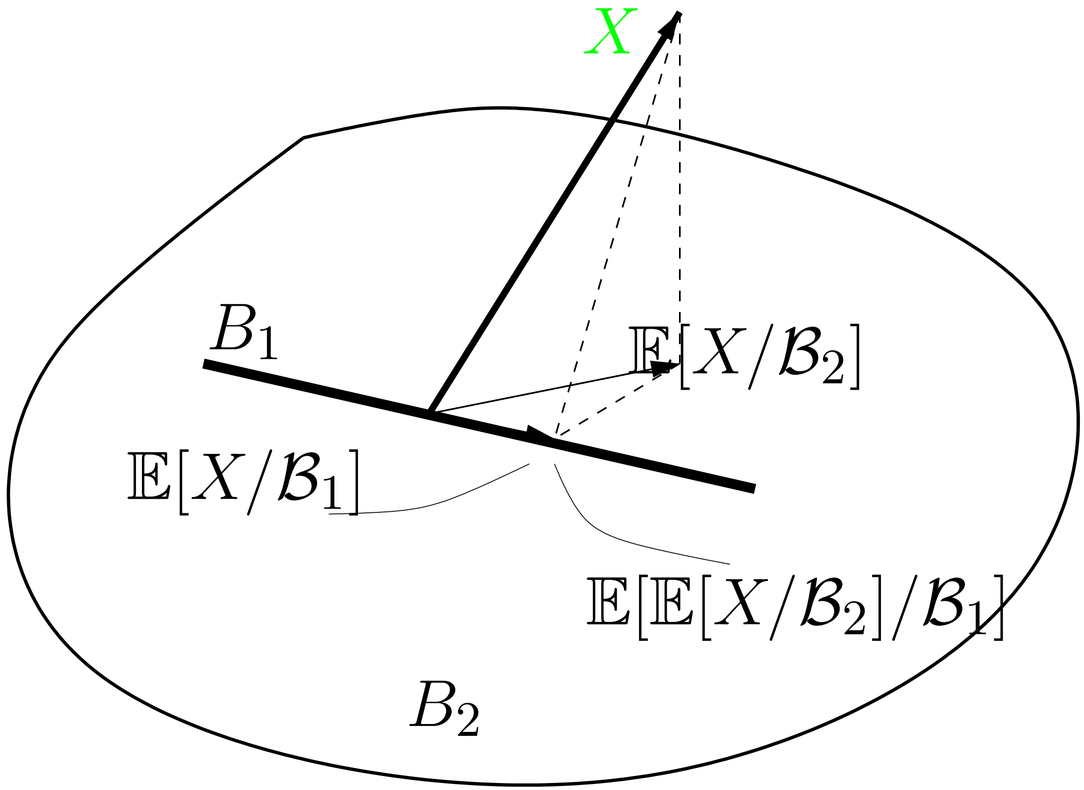
- Demonstration
  • On réécrit la propriété $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{I}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{F}] \cdot \mathbb{I}_A]$ de la forme

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X/\mathcal{F}]) \cdot \mathbb{I}_A] = \langle X - \mathbb{E}[X/\mathcal{F}], \mathbb{I}_A \rangle = 0$$

  • donc $\quad X - \mathbb{E}[X/\mathcal{F}] \perp \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F})$
  • donc $\quad \mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est la projection orthogonale de la variable aléatoire X sur la tribu $\mathcal{F}$
  • la projection orthogonale est la meilleur approximation d'un vecteur X sur un sous espace vectoriel
  • donc $\quad \mathbb{E}[X/\mathcal{F}]$ est la est la meilleur estimation de X sachant l'information contenue dans $\mathcal{F}$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

- $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}_2]$ est la meilleur estimation de X sachant l'information contenue dans $\mathcal{B}_2$
- Tower Property:
  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{B}_2]/\mathcal{B}_1] = \mathbb{E}[X/\mathcal{B}_1]$
- Espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}_2]$ et $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}_1]$ sont modélisées par la projection orthogonale



Esp. conditionnelle dans M. Binomial

- $\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1]$ est meilleur l'estimation de S_2 sachant l'information contenue dans $\mathcal{F}_1$
  - $\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1]$ est la variable aléatoire
  - $\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1]$ est la variable aléatoire basée sur les évènements décrits dans $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$
  - Evènements de $\mathcal{F}_1$ sont codés par S_1

$$\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1] = uS_1 \cdot p + dS_1 \cdot (1-p)$$

- On continue l'estimation:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1]] = u \cdot \mathbb{E}[S_1] \cdot p + d \cdot \mathbb{E}[S_1] \cdot (1-p) =$$

$$(uS_0 \cdot p + dS_0 \cdot (1-p)) \cdot (up + d(1-p))$$

Esp. conditionnelle dans M. Binomial

- $\mathcal{F}_1$ est engendrée par S_1: $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$. Toute information sur les valeurs de S_1, sur tous les évènements que S_1 aurait pu vivre sont dans $\mathcal{F}_1$

$$\Longleftrightarrow$$

- S_1 est $\mathcal{F}_1$ mesurable
- Variable aléatoire $\mathbb{E}[S_1/\mathcal{F}_1]$ aurait pu vivre aussi les évènements décrits dans $\mathcal{F}_1$
  - Donc ils sont de la même nature

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{E}[S_1/\mathcal{F}_1] = S_1$$

Espérance cond dans M. Binomial

- Toute l'information sur les valeurs de S_1 est dans $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathbb{E}[S_1/\mathcal{F}_2] = S_1$
- Toute l'information sur les valeurs de S_2 est dans $\mathcal{F}_2 \Rightarrow \mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_2] = S_2$
- Tower Property: $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_2]/\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_1]$

Propriétés de l'espérance conditionnelle

- $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]$ est la meilleur estimation de X sachant l'information contenue dans $\mathcal{G}$
- $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]$ est une variable aléatoire
- Conservation de l'espérance : Pour v. a. X t.q. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ $\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
- Sort ce que tu connais : Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, X est $\mathcal{F}$-mesurable et Y est $\mathcal{G}$-mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$
- L'indépendance rend le conditionnement inutile : Soient $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et X v.a. tels que la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X et $\mathcal{G}$ sont indépendantes. Alors, on a : $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Interêt d'un Actif sans risque

- Les dates de trading sont discretes:
  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, ..., t_n = n$
- Différence temporele $t_{n+1} - t_n = 1$
- r est le taux d'intérêt annuel
- Intérêts payé chaque année
  • dans un an la richesse est $S(1) = S(0)(1 + r)$
  • dans deux ans la richesse est
  $S(2) = S(1) + rS(1) = S(0)(1 + r)^2$
  • dans n années la richesse est $S(n) = S(0)(1 + r)^n$
  • le prix de l'actif actualisé est $\hat{S} = \frac{S}{(1+r)^n}$

Interet d'un Actif sans risque

- Les dates de trading sont discretes:
  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, ..., t_n = n$
- Différence temporele $t_{n+1} - t_n = \Delta t \to 0$
- "Continuous compounding"
- r est le taux d'intérêt annuel
  • dans 1 mois la richesse $S(1/12) = S(0)(1 + \frac{r}{12})$
  • Intérêts payés chaque intervalle temporel Δt pendant la periods $[0, t]$, $\Delta t = \frac{t}{n}$
  • Au bout de Δt la richesse $S(t_1) = S(0)(1 + r \cdot \Delta t)$
  • Au bout de $2\Delta t$ la richesse
  $S(t_2) = S(t_1)(1 + r \cdot \Delta t) = S(0)(1 + r \cdot \Delta t)^2$
  • La richesse à l'instant t

$$S(t) = S(0)(1 + r \cdot \Delta t)^n = S(0)(1 + r \cdot \frac{t}{n})^n \sim_{n \to \infty} S(0)e^{r \cdot t}$$

Actif sans risque

- **Modèle continue**
  Nous ne connaissons pas, en général, la loi qui gouverne $S(t)$, mais nous avons peut-être une idée de son comportement local: $S(t + \Delta t) = S(t)(1 + r \cdot \Delta t)$

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = rS(t), \qquad \frac{dS(t)}{dt} = rS(t)$$

  - Solution:

$$S_t = S_0 e^{rt}$$

  "Investment grows according to a continuously compounded interest rate"

- **Rendement sur l'intervalle $[t_1, t_2]$**

$$R = \ln(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}), \quad ou \quad R = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)}$$

endement et la théorie de Black et Scholes

- Supposons que l'évolution de l'actif S_t satisfait l'équation différentielle stochastique:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$$

- Solution du Modèle continue:

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

- Rendement sur l'intervalle $[0, t]$

$$\ln(\frac{S(t)}{S(0)}) = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

suit la loi Normale.

Calcul du Rendement des actifs

- Prix des actifs $S^{(j)}(t_i)$ modelisés par une matrice $S(i,j)$
  i est i'indice temporel, j est l'indice de l'actif

$$\begin{pmatrix} S(1,1) & S(1,2) & ... & S(1,N_{path}) \\ S(2,1) & S(2,2) & ... & S(2,N_{path}) \\ & & ... & \\ & & ... & \\ S(N,1) & S(N,2) & ... & S(N,N_{path}) \end{pmatrix}$$

- Rendement
  for $i = 1 : N$
  for $j = 1 : N_{path}$
  $R(i,j) = ln(S(i+1,j)/S(i,j))$

Produit Dérivé

- Un contrat financier $V(t, S_t)$ dont le prix dépend uniquement de la valeur d'autres variables plus fondamentalles telles que le prix des actions ou des obligations, de temps,... etc s'appelle un produit dérivé.
- La valeur d'un produit dérivé V dépend de l'état réalisé à la date $t = T$, c'est à dire de la tribu $\mathcal{F}_T = \sigma(S_T)$.
- Option Call Européen est un produit dérivé dont le prix à la maturité $t = T$ est $V(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$
- Option Put Européen est un produit dérivé dont le prix à la maturité $t = T$ est $V(T, S_T) = \max(K - S_T, 0)$
- Fonction $\Phi(S_T) = V(T, S_T)$ s'appele la fonction pay-off:

$$\Phi(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

Option.

- Equation de Black et Scholes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t=T,S) = max(S-K,0) \end{array} \right.$$

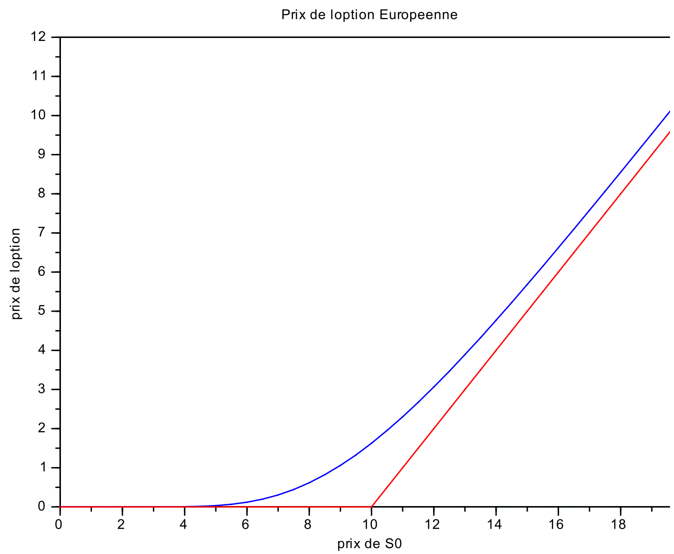
• $V(S,t)$ est le prix d'un contrat avec une banque pour pouvoir acheter au prix K une action à la date T.
• S est le prix d'une action • r est le taux d'intêret
• σ est une volatilité • K est le prix d'exércice
• T est le temps d'exércice

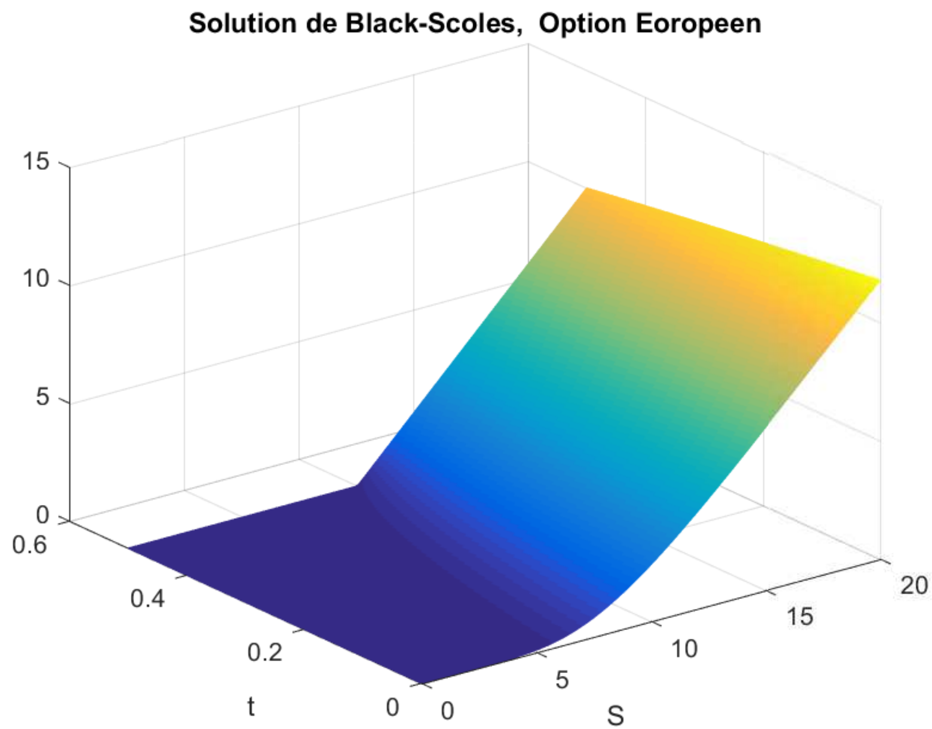
- Vous achetez au prix K une action qui vaut S à la date $t = T$

Si $S > K$ vous gagnez $S - K$
Si $S < K$ vous n'exercez pas le contrat.

Prix du Call Europénne

- Call Europénne en 2 et 3 dimensions





Arbitrage

- L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant,
  • 1. sans investissement net de capital,
  • 2. sans aucun risque,
  d'acquérir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée absence d'opportunités d'arbitrage.
- Sur cette hypothèses fondamentales est basé le pricing en finance.
- Cette hypothèses permet d'introduire la mesure speciale de probabilité (Mésure Martingele Equivalente $\mathbb{Q}$)

Conséquences d'Arbitrage.

- Temps continue, r est le taux annuel
- • 1. Un actif sans risque produit des intérêts

$$B_T = e^{r(T-t)} B_t$$

- • 2. Un actif risqué devrait en moyenne produire la même performance qu'un investissement dans l'actif sans risque. Donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T/\mathcal{F}_t] = e^{r(T-t)} B_t, \quad si \quad B_t = S_t$$

- On en déduit le prix de l'actif risqué à un instant t

$$S_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T/\mathcal{F}_t]$$

- $\mathbb{Q}$ est la probabilité de risque neutre.

Conséquences d'Arbitrage

- Temps continue, r est le taux annuel
- • 1. Un actif sans risque produit des intérêts

$$B_T = e^{r(T-t)} B_t$$

• 2. En utilisant des produits dérivés on ne peut pas gagner d'argent sans aucun risque

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_t] = e^{r(T-t)} B_t, \quad si \quad B_t = V_t$$

- On en déduit le prix d'un produit derivé à un instant t

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Pay\_off(S_T)/\mathcal{F}_t]$$

Conséquences d' Arbitrage.

- Temps discret, $t_{n+1} = t_n = 1$an, $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, ..., t_n = n$, r est le taux annuel
- • 1. Un actif sans risque produit des intérêts

$$B_T = (1+r)^n B_0$$

- • 2. Un actif risqué devrait en moyenne produire la même performance qu'un investissement dans l'actif sans risque. Donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] = (1+r)^n B_0, \quad si \quad B_0 = S_0$$

- On en déduit le prix de l'actif risqué à l'instant $t = 0$

$$S_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T / \mathcal{F}_0]$$

Conséquences d' Arbitrage

- Temps discret,
  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, ..., t_n = n$, r est le taux annuel
- • 1. Un actif sans risque produit des intérêts

$$B_T = (1+r)^n B_0$$

• 2. En utilisant des produits dérivés on ne peut pas gagner d'argent sans aucun risque

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_0] = (1+r)^n B_0, \quad si \quad B_0 = V_0$$

- On en déduit le prix d'un produit derivé à l'instant $t = 0$

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_0] = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Pay\_off(S_T)/\mathcal{F}_0]$$

Théorème fondamentale

- Théorème fondamentale du pricing.
  Le prix d'un produit dérivé à un instant t est donné par la formule:
  • Modèle à temps discret:

$$V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Pay\_off(S_T)/\mathcal{F}_t]$$

  • Modèle à temps continu:

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T/\mathcal{F}_0] = \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Pay\_off(S_T)/\mathcal{F}_0]$$

- Q est la probabilité de risque neutre.
- Toutes les théorie inventées doivent satisfaire ce théorème.

Construction d'un modèle

- Contruction d'une théorie mathématique (Modèle Binomial) dans laquelle le marché vérifie l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA en abrégé et NFL en anglais pour "no free lunch").
- Définition des prix de Produits Dérivés à partir d'une procedure applée Hedging (Couverture, Replication)
- Démonstration que chaque Produit Dérivé est replicable par un portefeuille composé des actifs, donc le marché est complet.
- On a besoin:
  - Espérance conditionnelle
  - Probabilité de Risque Neutre $\mathbb{Q}$
- On a besoin un Portefeuille autofinançant

Portefeuille autofinançant

- Un portefeuille autofinançant est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. Fixer un portefeuille revient donc simplement à se donner un capital initial et une stratégie dynamique d'investissement dans les actifs du marché à partir de ce capital de départ.
- Quelles sont les stratégies d'investissement ?
- Qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage ?

Notre objectif

- On va montrer que le marché dans le cadre du modèle Binomial à une periode safisfait l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage.
- Nous allons montrer que le prix d'un produit dérivé V_t est donné par la stratégie de son portefeuille de couverture ou par la procedure de Hedging.
- Imaginons qu'on vend un produit dérivé au prix V_0. On cherche à trouver ce prix V_0 à $t = 0$.
- Idée: Nous allons construire un portefeuille de couverture (Π_0, Δ) composé des Δ actifs risqués et ceux sans risque et trouver son prix.
- On définit le prix de l'option V_0 à partir du prix fu portefeuille Π_0

$$V_0 = \Pi_0$$

Stratégie de portefeuille simple

- Définition d'une stratégie de portefeuille simple.
  La stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date $t_0 = 0$ de Δ actifs risqués et de $\Pi_0 - \Delta \cdot S_0$ actifs sans risque.(Pour simplicité $T = 1$)

- Valeur du portefeuille est :
  • en $t_0 = 0$ $\qquad \Pi_0 = \Delta \cdot S_0 + (\Pi_0 - \Delta \cdot S_0)$
  • en $t = t_1 = T$ $\qquad \Pi_T = \Delta \cdot S_1 + (\Pi_0 - \Delta \cdot S_0)(1 + r)$
  • Autofinancement: le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent.

Couverture d'un Produit Dérivé

- On cherche aussi à définir la valeur (le prix) du produit dérivé V_0 en $t_0 = 0$
- La stratégie de couverture consiste à trouver (Π_0, Δ) tels que les valeurs de portefeuille et d'un produit dérivé coïncident à chaque instant:
  - en $t = 0$ $\quad \Pi_0 = V_0$
  - en $t = t_1 = T$ $\quad \Pi_T = V_T$
  - Valeur du produit dérivé en $t_0 = 0$ est V_0
  - $V(S_1)$ est une variable aléatoire et sa valeur en $t = t_1$

$$V_T = \begin{cases} V_U, & w_1 = U \\ V_D, & w_1 = D \end{cases}$$

Couverture ou Hedging

- Théorème. Tout produit dérivé V est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (Π_0, Δ)
- On dit que le marché est complet
- Démonstration: On résout un système linéaire:

$$\begin{cases} \Delta \cdot uS_0 + (\Pi_0 - \Delta \cdot S_0)(1+r) = V_U \\ \Delta \cdot dS_0 + (\Pi_0 - \Delta \cdot S_0)(1+r) = V_D \end{cases}$$

- Exercise: On vend un Call. Trouver le prix du Call, la valeur initiale de portefeuille de la couverture, la quantité des actifs risqués et celle sans risque. Données:$S_0 = K = 100, r = 0.05, d = 0.9, u = 1.1$

Couverture ou hedging

- Valeur d'un produit dérivé en $t = 0$

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{(u-d)}V_U + \frac{u-1-r}{(u-d)}V_D\right]$$

  Le prix d'un produit dérivé s'écrit comme une somme pondérée de ses valeurs futures (à la maturité $t = T$)

- On achète Δ actifs risqués

$$\Delta = \frac{V_U - V_D}{S_0(u-d)}$$

- On place dans une banque (ou on emprunte) la somme

$$V_0 - S_0 \cdot \Delta$$

Théorème Fondamentale du Pricing

- Introduisons la probabilité de risque neutre $\mathbb{Q}$ définie sur Ω par :
  $\mathbb{Q}(U) = \frac{1+r-d}{u-d} = q, \qquad \mathbb{Q}(D) = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1-q$
  • On impose $d < 1+r < u, \quad q \in]0;1[\Rightarrow \mathbb{Q}$ est bien une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.

- Valeur du produit dérivé en $t=0$ ou valeur initiale du portefeuille
  •
  $$\Pi_0 = V_0 = \frac{1}{1+r}(q \cdot V_U + (1-q) \cdot V_D)$$
  s'écrit aussi sous la forme d'espérance
  • Valeur du produit dérivé en $t=0$ est l'espérance actualisée des flux (pay-off) qu'il génère
  $$\Pi_0 = V_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[V_T] = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[\Phi(S_1)]$$

- Nous avons montré que le modèle Binomial à une periode vérifie l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage: $V_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[V_T]$

- Nous avons construit l'espace de probabilité de risque neutre Q:
  $\mathbb{Q}(U) = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad \mathbb{Q}(D) = \frac{u-(1+r)}{u-d}$

Conclusions

- Nous avons montré que le modèle Binomial à une periode vérifie l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^{Q}[V_T]$$

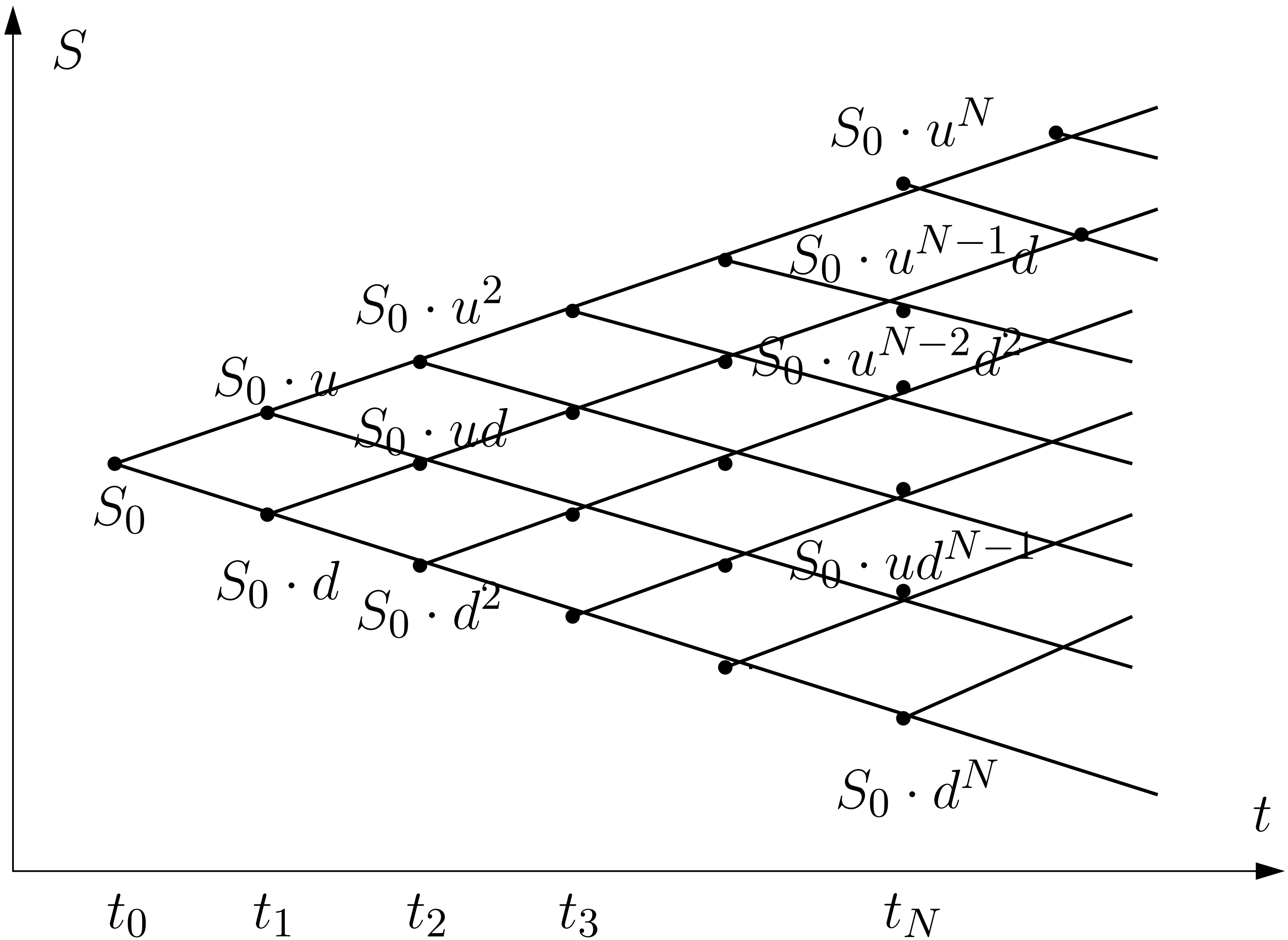
- Nous avons construit l'espace de probabilité de risque neutre $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}(U) = \frac{1+r-d}{u-d}, \qquad \mathbb{Q}(D) = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

- Nous avons monté que à chaque instant t le prix d'un produit dérivé est repliqué par un portefeuille autofinancant.

$$V_t = \Pi_t$$

Modèle Binomial à n-périodes



Processus stochastique discret

- Définition d'un processus stochastique discret.
  On appelle processus discret
  • toute collection finie de variables aléatoires $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  • (S_n) est une fonction de deux variables
  $S_{t_n}(w_i) = S(t_n, w_i)$
- Définition de Filtration. On appelle filtration $\mathcal{F}$ toute collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...\mathcal{F}_N\}$:

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}, \quad \forall n$$

- Définition d'un processus adapté. Un processus discret $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ est dit adapté à la filtration $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}$-adapté) si pour tout $n \leq N$, S_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable

Processus stochastique discret.

- Définition d'une filtration engendrée par un processus discret
  - C'est la plus petite filtration qui rend le processus $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ $\mathcal{F}$-adapté.
  - $\mathcal{F}_N = \sigma(S_1, S_2, ...S_N)$
- Exemples
  - $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \{(U), (D), \emptyset, ((U), (D))\}$
  - $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) =$
  $\{(UU, UD), (DU, DD), \emptyset, \Omega, (UU), (UD), (DU), (DD),$
  $(UD, DU, DD), (UU, DU, DD), (UD, UU, DD), (UD, DU, UU),$
  $(UU, DU), (UU, DD), (UD, DU)\,(UD, DD)\}$

Martingale

- Définition d'une martingale.
  Un processus discret $(M_n)_{1 \leq n \leq N}$ est un $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{P}$ s'il vérifie :
  • $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ pour tout $n \leq N$,
  • M_n est $\mathcal{F}$-adapté,
  • M_n vérifie la propriété de martingale:

$$\mathbb{E}[M_n/\mathcal{F}_k] = M_k \qquad \forall k \leq n$$

- Meilleur estimation de M_n à $t = t_n$ et sa valeur à $t = 0$
- On va montrer que dans chaque modèle un processus actualisé decrivant un prix est une Martingale.

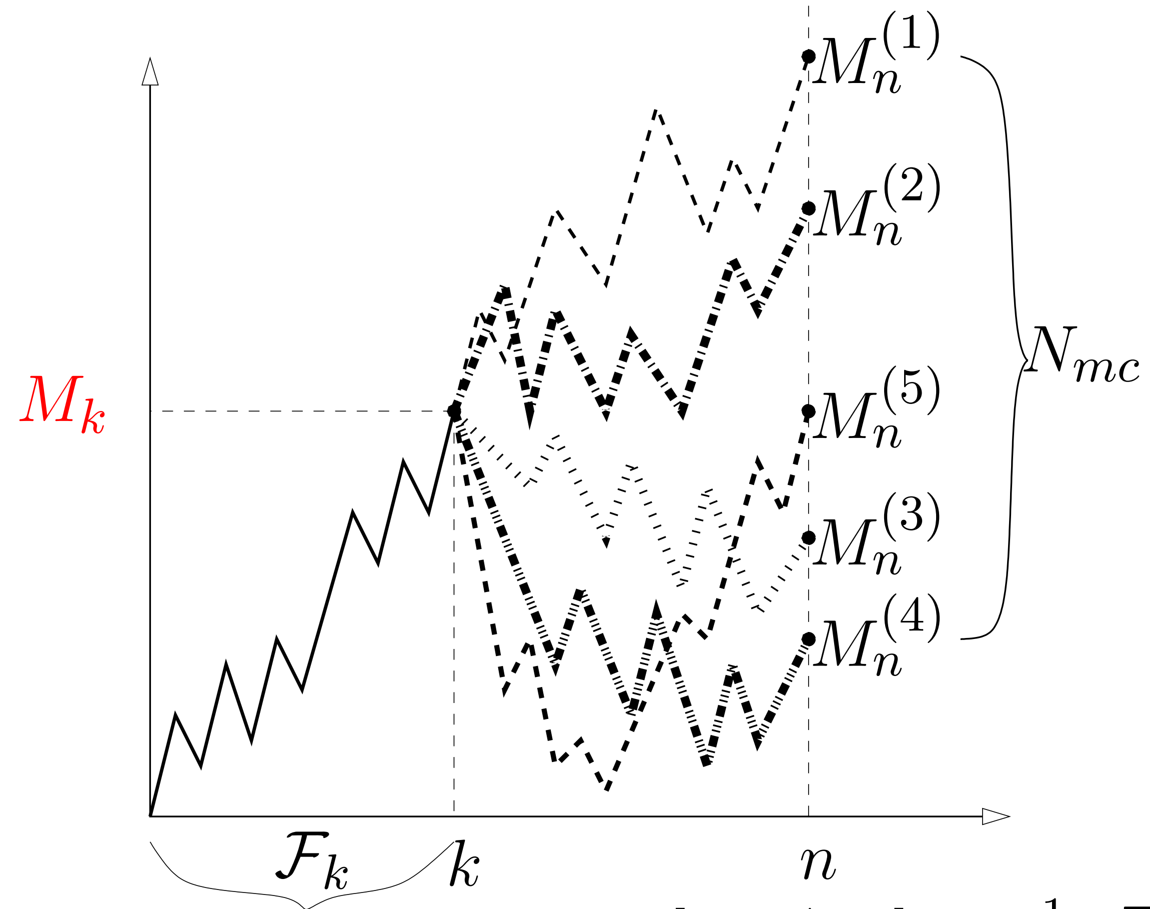
Exemple d'une Martingale

- Soit sur l'espace de Probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une famille de variables aléatoire de Bernoulli indépendantes
  • $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$
- Soit $\mathcal{F}$ la filtration naturelle générée par le processus X_n
- On définit le processus stochastique qui s'appelle une promenade aléatoire

$$M_0 = 0, \qquad M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Montrer
  • processus M_n est $\mathcal{F}$ martingale
  • processus $M_n^2 - n$ est $\mathcal{F}$ martingale

Simulation d'une martingale

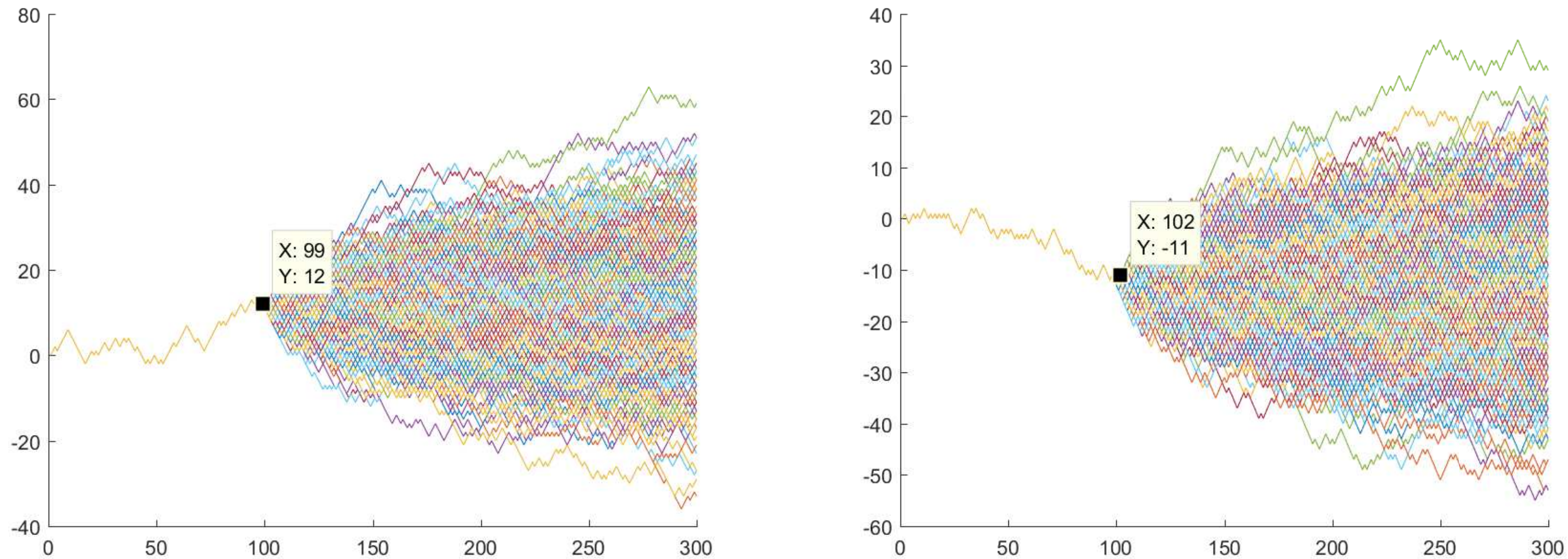


$$M_k = \mathbb{E}[M_n/\mathcal{F}_k] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{p=1}^{N_{mc}} M_n^{(p)}$$

Meilleur estimation de M_n à $t = t_n$ est M_k

Martingale

- $$\mathbb{E}[M_n/\mathcal{F}_k] = M_k \qquad \forall k \leq n$$



- M_k est une variable aléatoire dont une valeur dépend d'un scenario de $\mathcal{F}_k$ réalisé. M_k est une constante par rapport à la filtration $\mathcal{F}_k$. Pour le moment $k = 100$ les simulations montre deux différentes valeurs de $M_k = 12$ et $M_k = -11$.

Modélisation du marché

- $\Omega = \{\emptyset, (w_1, w_2, ...w_n), w_i = U \; ou \; D\}$
  • Probabilité historique:
  $\mathbb{P}(w_i = U) = p, \mathbb{P}(w_i = D) = 1 - p$
  • L'information disponible à toute date t_n est donnée par la filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq N\}$ définie par :

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, S_2, ..., S_n)$$

  c'est une filtration engendrée par les variables aléatoires $(S_n)_{1 \leq n \leq N}$

- Une variable aléatoire $\mathcal{F}_n$-mesurable est naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'à l'instant t_n. Elle s'écrit donc comme une fonction de $(S_1, ..., S_n)$.

Notre objectif

- On va montrer que le marché dans le cadre du modèle Binomial à n periodes vérifie l'hypothèse d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage
- On cherche à trouver le portefeuille de couverture Π_n d'un produit dérivé et son prix V_0.
- On va montrer que le prix d'un produit dérivé V_0 est donnés par la stratégie de son portefeuille de couverture (ou duplication).
- On se base sur le fait qu'un produit dérivé (ou actif contingent) $V(S_1, S_2, ..., S_n)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ - mesurable et que son prix à la maturité est définie par la fonction Pay-off Φ: $\quad V_T = \Phi(S_1, ..., S_N)$ avec Φ application borélienne.

Stratégie de portefeuille

- Définition d'une stratégie de portefeuille simple (Π_0, Δ).
  Stratégie est donnée par
  • un capital initial Π_0 et
  • d'un processus discret $\Delta = (\Delta_0, ...\Delta_{N-1})$ qui est
  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq N\}$ -adapté.
- La stratégie consiste à tout instant t_n en l'investissement dans une quantité Δ_n d'actifs risqués.
  • Le processus Δ_n est $\mathcal{F}$-adapté, car la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant t_n est déterminée avec l'information accumulée jusqu'à l'instant t_n.
- Valeur du portefeuille est :
  • en $t = t_n$ $\quad \Pi_n = \Delta_n \cdot S_n + (\Pi_n - \Delta_n \cdot S_n)$
  • en $t = t_{n+1}$ $\quad \Pi_{n+1} = \Delta_n \cdot S_{n+1} + (\Pi_n - \Delta_n \cdot S_n)(1 + r)$

Stratégie du portefeuille

- On introduit les processus actualisés:
  $\hat{\Pi}_n = \frac{\Pi_n}{(1+r)^n}, \qquad \hat{S}_n = \frac{S_n}{(1+r)^n}$
- Relation d'autofinancement :

$$\hat{\Pi}_{n+1} - \hat{\Pi}_n = \Delta_n \cdot (\hat{S}_{n+1} - \hat{S}_n)$$

  soit

$$\hat{\Pi}_{n+1} = \Pi_0 + \sum_{k=0}^{k=n} \Delta_k \cdot (\hat{S}_{k+1} - \hat{S}_k)$$

- Le processus de valeur du portefeuille Π_n est bien sur $\mathcal{F}$ -adapté.

Probabilité de risque neutre et martingale

- Introduisons la probabilité de risque neutre $\mathbb{Q}$ définie sur Ω
  $\mathbb{Q}(w_1, w_2, ..., w_n) = q^{\#(j, w_j = U)} \cdot (1-q)^{\#(j, w_j = D)}$,
  $$q = \frac{1+r-d}{u-d}$$
- Une probabilité risque neutre est une probabilité équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale.
- Theorems:
- 1. Actif actualisé $\hat{S}_n$ est une $\mathcal{F}$ -martingale sous $\mathbb{Q}$.
- 2. La valeur de portefeuille actualisé $\hat{\Pi}_n$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.

Démonstration des propriétés

- Actif actualisé $\hat{S}_n$ est une $\mathcal{F}$ -martingale sous $\mathbb{Q}$.
  - $\hat{S}_n$ est intégrable, $\mathcal{F}$-adapté
  - $\mathbb{E}^Q[\hat{S}_{n+1}/\mathcal{F}_n] = \frac{1}{(r+1)^{n+1}}\mathbb{E}^Q[S_{n+1}/\mathcal{F}_n] =$

$\frac{1}{(r+1)^{n+1}}(q \cdot uS_n + (1-q) \cdot dS_n) = \frac{1}{r+1}(q \cdot u\hat{S}_n + (1-q) \cdot d\hat{S}_n) =$

$$\frac{1}{r+1}(\frac{1+r-d}{u-d}u \cdot \hat{S}_n + \frac{u-(1+r)}{u-d}d \cdot \hat{S}_n) = \hat{S}_n$$

- La valeur actualisée $\hat{\Pi}_n$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.
  $\mathbb{E}^Q[(\hat{\Pi}_{n+1} - \hat{\Pi}_n)/\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^Q[\Delta_n \cdot (\hat{S}_{n+1} - \hat{S}_n)/\mathcal{F}_n] =$
  $\Delta_n \cdot \mathbb{E}^Q[(\hat{S}_{n+1} - \hat{S}_n)/\mathcal{F}_n] = 0$
- $\mathbb{E}^Q[\hat{\Pi}_{n+1}/\mathcal{F}_n] = \hat{\Pi}_n$

Analyse du thèoreme de duplication

- Théorème : Tout produit dérivé V est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (Π_0, Δ)

- Analyse du Théorème:
  - En $t = T$ on impose $\quad \hat{\Pi}_N = \Phi(S_1, S_2, ..., S_N)$
  - Portefeuille $\hat{\Pi}_n$ est une martingale $\Rightarrow \hat{\Pi}_n = \mathbb{E}^Q[\hat{\Pi}_N / \mathcal{F}_n] \quad \Rightarrow$

$$\Pi_n = \frac{1}{(1+r)^{(N-n)}} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)/\mathcal{F}_n]$$

  - $\mathbb{E}^Q[\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)/\mathcal{F}_n]$ en tant que v. a. $\mathcal{F}_n$-mesurable, se réécrit sous la forme $V_n(S_1, ..., S_n)$ avec V_n une fonction déterministe.
  - Donc on cherche à montrer que V_n est bien le prix d'une option défini à partir de Π_n:

$$V_n(S_1, ..., S_n) = \Pi_n = \frac{1}{(1+r)^{(N-n)}} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)/\mathcal{F}_n]$$

  - Nous proposons donc le processus de couverture Δ défini par

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(S_1, ..., S_n, u \cdot S_n) - V_{n+1}(S_1, ..., S_n, d \cdot S_n)}{u \cdot S_n - d \cdot S_n}, \quad \forall n \in [0, N-1]$$

Idées de la démonstration

- On se propose de montrer que la stratégie de portefeuille (Π_0, Δ) avec

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(S_1, ..., S_n, u \cdot S_n) - V_{n+1}(S_1, ..., S_n, d \cdot S_n)}{u \cdot S_n - d \cdot S_n}$$

  duplique notre produit dérivé, soit :

$$\Pi_k = V_k(S_1, S_2, ..., S_k), \quad \forall k \leq n$$

- Démonstration par récurrence sur $k \in [1, 2, ...N]$
  • Pour $k = 0$ (Modèle Binomiale à 1 période)
  $\Pi_0 = V_0(S_0)$ et la stratégie de couverture a été construite
- Supposons $\Pi_k = V_k(S_1, S_2, ..., S_k)$ est vrai
- Montrons $\Pi_{k+1} = V_{k+1}(S_1, S_2, ..., S_{k+1})$ est vrai

Démonstration du théorème.

- $k = 0$, par construction la relation est vrai pour $t_0 = 0$
- On écrit une relation pour Π_k du fait que Π_k est une martingale:
  $\Pi_k = V_k(S_1, S_2, ..., S_k) = \frac{1}{(1+r)^{(N-k)}} \mathbb{E}^Q[\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)/\mathcal{F}_k]$
  = $\frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^Q[\mathbb{E}^Q \frac{1}{(1+r)^{(N-k-1)}} [\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)/\mathcal{F}_{k+1}]\mathcal{F}_k]$ =
  $\frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^Q[V_{k+1}(S_1, S_2, ..., S_{k+1})/\mathcal{F}_k] =$
  $\frac{1}{(1+r)} (q \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, u \cdot S_k) + (1-q) \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, d \cdot S_k))$
- On utilise par la suite $(1 + r)\Pi_k =$

  $(q \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, u \cdot S_k) + (1 - q) \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, d \cdot S_k))$

Démonstration du théorème.Suite

- De l'autofinancement:

$$\Pi_{k+1} = S_{k+1}\Delta_k + (1+r)(\Pi_k - S_k\Delta_k) = (1+r)\Pi_k + \Delta_k(S_{k+1} - S_k(1+r))$$

$$\Pi_{k+1} = (p \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, u \cdot S_k) + (1-p) \cdot V_{k+1}(S_1, ..., S_k, d \cdot S_k)) +$$

$$\frac{V_{k+1}(S_1, ..., S_k, u \cdot S_k) - V_{k+1}(S_1, ..., S_k, d \cdot S_k)}{u \cdot S_k - d \cdot S_k}(S_{k+1} - S_k(1+r)) =$$

$$V_{k+1}(S_1, ..., S_k, u \cdot S_k)\left(\frac{\frac{S_{k+1}}{S_k} - d}{u-d}\right) + V_{k+1}(S_1, ..., S_k, d \cdot S_k)\left(u - \frac{\frac{S_{k+1}}{S_k}}{u-d}\right) =$$

$$\begin{cases} V_{k+1}(S_1, S_2, ..., S_{k+1}), & S_{k+1} = u \cdot S_k \\ V_{k+1}(S_1, S_2, ..., S_{k+1}), & S_{k+1} = d \cdot S_k \end{cases}$$

$=V_{k+1}(S_1, ..., S_{k+1})$

Conclusion

- Pour le modèle Binomial à n periodes nous avons montré l'Absence d'Opportunités d'Arbitrage:
- Tout actif actualisé est un martingale sous une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$
- Toute stratégie de portefeuille simple actualisée est martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$
- Tout produit dérivé actualisé est martingale sous la probabilité $\mathbb{Q}$
- Valeur de l'option à t=0 est définie par la valeur initiale Π_0 de son portefeuille de duplication:

$$V_0 = \Pi_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\mathbb{E}^Q[\Phi(S_1, S_2, ..., S_N)]$$

Conclusion

- Valeur de l'option à un instant t est repliqué par la valeur Π_t de son portefeuille de duplication (couverture):

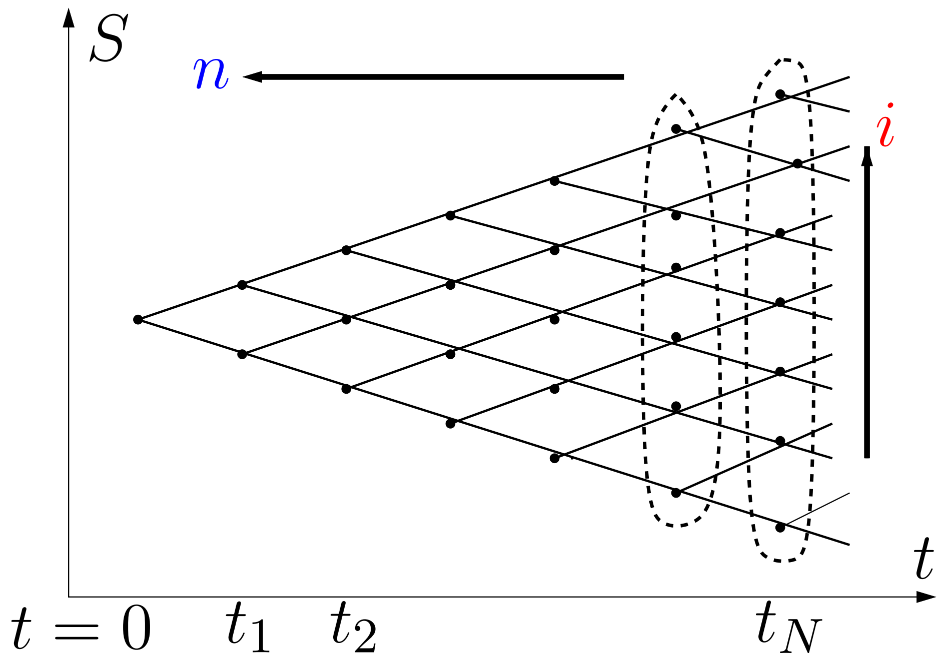
$$V_n = \Pi_n, \quad \forall n \leq N$$

- $$\hat{V}_{n+1} = \hat{\Pi}_{n+1} = \Pi_0 + \sum_{k=0}^{k=n} \Delta_k \cdot (\hat{S}_{k+1} - \hat{S}_k)$$

- Si un certain produit dérivé est accessible avec un portefeuille de réplication, alors, d'un point de vue financier, il n'y a pas de différence entre détenir produit dérivé ou détenir le portefeuille d'actifs et d'obligations.
- Donc le matché est complet.

Option dans le modèle Binomial.

- L'option est un produit dérivé de l'actif: $V(t,S)$
- t est discret: $t \to t_n$, l'actif S_t est discret: $t \to S(n,i)$



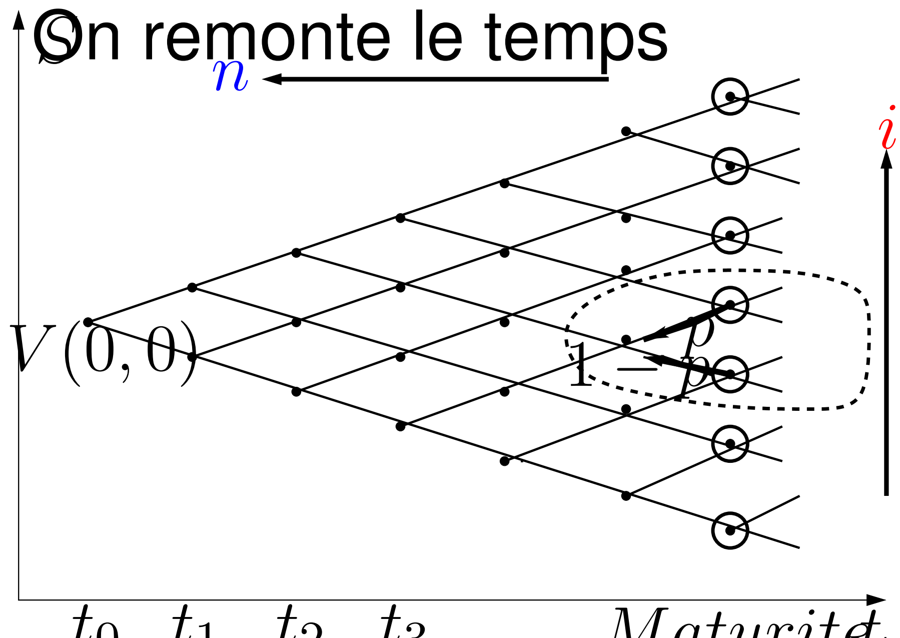
- Option $V(t_n, S(n,i))$ est une MATRICE

$$V(t(n), S(n,i)) \equiv V(n,i)$$

Programmation de M. Bin. à $T = 2, N = 2$

- Equation dynamique
  $V(n,i) = \frac{1}{1+r}(pV(n+1,i+1) + (1-p)V(n+1,i))$
- Equation dynamique est équivalente au théorème fondamental de valorisation de l'option.

$$V_n = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^Q[V_{n+1}/\mathcal{F}_n]$$



Programmation de M. Bin. à $T = 2, N = 2$

- Equation dynamique $V(n,i) = \frac{1}{1+r}(pV(n+1,i+1) + (1-p)V(n+1,i))$
- Programme

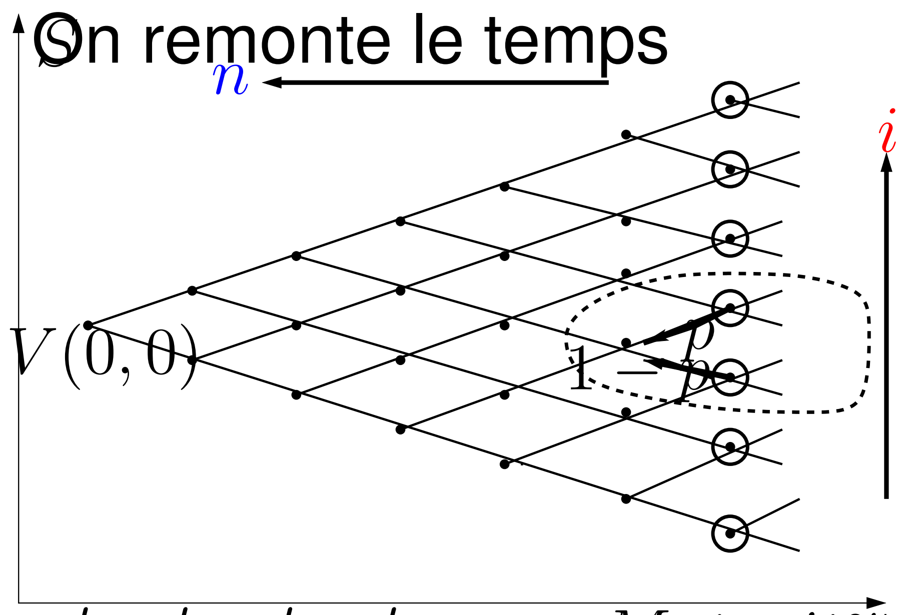
```
function [prix]=Option_Eu_S0_fixe_Bin(S0)
N=10; r=0.05; T=N; K=100; S=zeros(N+1,N+1); u=1.1; d=0.9;
q=(1+r-d)/(u-d); v=zeros(N+1,N+1);
for n=1:N+1
for i=1:n
S(n,i)=u^(i-1)*d^(n-i)*S0;
v(N+1,i)=max(S(N+1,i)-K,0);
end
end
for n=N:-1:1
for i=1:n
v(n,i)=(q*v(n+1,i+1)+(1-q)*v(n+1,i))/(1+r);
delta(n,i)=(v(n+1,i+1)-v(n+1,i))/(S(n+1,i+1)-S(n+1,i));
end
end
prix=v(1,1);
disp('Stock S'); disp(S'); disp('Option V'); disp(v'); disp('Delta');
end
```

Programmation de M. Bin. à N pèriodes

- $t \in [0, T], \Delta t = T/N, q = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d}, N \to \infty$
- Théorème fondamental de valorisation de l'option:

$$V_n = e^{-r\Delta t}\mathbb{E}^Q[V_{n+1}/\mathcal{F}_n]$$

- Equation dynamique
$V(n, i) = e^{-r\Delta t}(qV(n+1, i+1) + (1-q)V(n+1, i))$



Prog. de M. Bin. à $T = 2, N = 2$

- Equation dynamique $V(n,i) = \frac{1}{1+r}(pV(n+1,i+1) + (1-p)V(n+1,i))$
- Programme

```
function [prix]=Option_Eu_S0_fixe(S0)
sigma=0.5; N=10; r=0.05; T=1; K=100; S=zeros(N+1,N+1);
delta_t=T/(N);v=zeros(N+1,N+1);u=exp(sigma*sqrt(delta_t));
d=exp(-sigma*sqrt(delta_t)); q=(exp(r*delta_t)-d)/(u-d);
for n=1:N+1
for i=1:n
S(n,i)=u^(i-1)*d^(n-i)*S0; v(N+1,i)=max(S(N+1,i)-K,0);
end
end
for n=N:-1:1
for i=1:n
v(n,i)=exp(-r*delta_t)*(q*v(n+1,i+1)+(1-q)*v(n+1,i));
end
end
prix=v(1,1);
disp('S'); disp(S') disp('V'); disp(v');
end
```

TD1

- Notion d'une tribu
  1. On définit un evenement $A = \{S_n \leq 10, \forall n \leq 9\}$
  Est-que $A \in \mathcal{F}_9$? Est-que $A \in \mathcal{F}_{10}$?
  2. On définit un evenement $A = \{S_3 \leq 10, S_5 > 8\}$
  Est-que $A \in \mathcal{F}_4$?
- Modèle Binomial
  3. Calculer $\mathbb{E}[S_2/\mathcal{F}_0]$ à partir de la définition et à l'aide de l'espérance conditionnelle.
  4. Calculer $\mathbb{E}[S_6/\mathcal{F}_4]$
  5. Calculer $\mathbb{E}[S_n/\mathcal{F}_0]$
- Intérêts
  6. Soit le capital placé $P_0 = 100, r = 0.06$. Calculer la somme sur le livret épargne aprés 1 ans en utilisant :
  a) Classical méthode
  b) Continuous compounding

TD2. Options. Hedging.

- 1. On vend un Call. Trouver le prix du Call, la valeur initiale de portefeuille de la couverture, la quantité des actifs risqués et celle sans risque. Données: $S_0 = K = 100, r = 0.05, d = 0.9, u = 1.1.$ utiliser le modèele à $N = 1$ période, $T = 1.$
- 2. On vend un Call. Trouver le prix du Call, la valeur initiale de portefeuille de la couverture, la quantité des actifs risqués et celle sans risque. Utiliser le modèele à $N = 2$ périodes, $T = 2.$
- On vend un Bear Spread
  La fonction Pay-off de l' option BEAR SPREAD est montré sur la figure, elle est aussi donnée par la formule suivante:

$$Pay\_off\_Bear(S, K) = \begin{cases} K, & S < K \\ 2K - S, & K \leq S \leq 2K \\ 0, & S > 2K \end{cases}$$

1. Tracer la fonction Pay-off
2. Trouver le prix de cette option, la valeur initiale de portefeuille de la couverture, la quantité des actifs risqués et celle sans risque.

Données:$S_0 = K = 100, r = 0.05, d = 0.9, u = 1.1.$ Utiliser le modèele à 1 période, $T = 1..$

TD2. Options. Hedging.

On vend l'option Butterfly. La fonction Pay-off de l' option Buttrefly est est aussi donnée par la formule suivante:

$$Pay\_off\_Butterfly(S,K) = \max(S-K,0) + \max(S-3K,0) - 2\max(S-2K,0)$$

1. Tracer la fonction Pay-off 2. Trouver le prix de cette option, la valeur initiale de portefeuille de la couverture, la quantité des actifs risqués et celle sans risque. Données:$S_0 = 100, K = 50, r = 0.05, d = 0.9, u = 1.1.$ Utiliser le modèele à 1 période, $T = 1.$.

TD3. Martingale

- 1. Simuler une Marche Aléatoire
- 2. Montrer que le processus stochastique appllé Marche Aléatoire M_n est une martingale.
- 3. Montrer que le processus stochastique appllé $\Phi_n = (M_n)^2 - n$ est une martingale.

TD4. Programmation dynamique

- Ecrire un programme qui calcule le prix d'un Call Européen dans le Modèle Binomial à $N = 100$ périodes. $T = 1$.