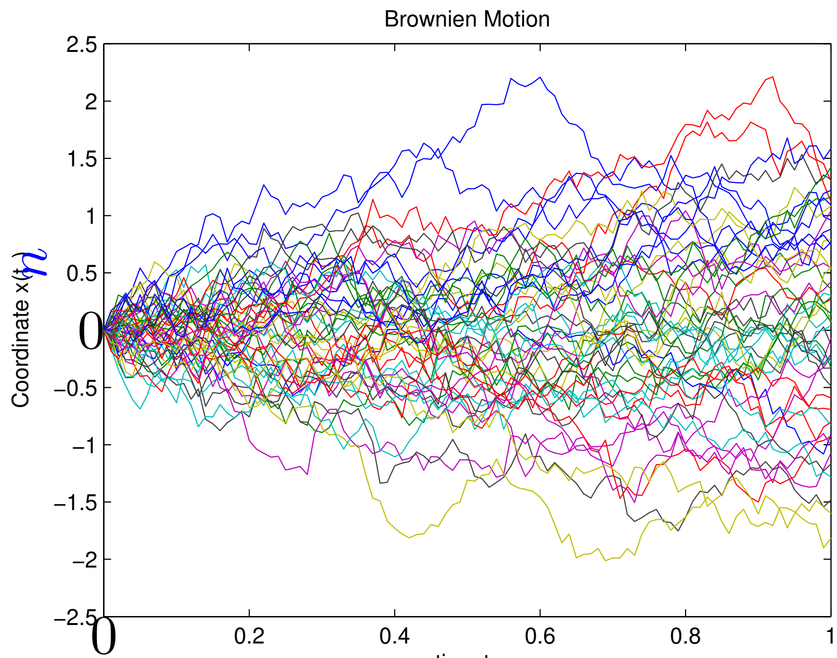
Option FinTech.
Mathématiques pour la Finance

Partie II: Calcul stochastique au temps continu

Irina Kortchemski,   CY TECH



Mathématiques pour la finance

- Modélisation probabiliste du marché au temps discret
  - Modèle binomial
- Modélisation probabiliste du marché au temps continu
  - Modèle de Black et Scholes

Calcul stochastique au temp discret

- Rappels de probabilités avec le Modèle binomial à 1 période
  - Tribu, Mesure, Intégrale de Lebesgue
  - Espace de probabilité
  - Espérances, Espérances conditionnelles
  - Changement de mesure
  - Notion d'Arbitrage
  - Probabilité de risque neutre
  - Construction de portefeuille de couverture.
- Rappels de probabilités avec le Modèle binomial à N périodes
  - Processus stochastique discret, Filtration, Martingale
  - Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Calcul stochastique au temps continu

- Filtration,   Espaces L^p
- Mouvement Brownien, Martingale
- Lemme d'Ito
  - Variation quadratique, Intégrale stochastique
  - Formule d'Ito, Processus d'Ito
  - Equations différentielles stochastiques et ces solutions

Modèle de Black et Scholes

- Modélisation probabiliste du marché au temps continue. Evolution d'un actif
- Hedging et l'équation de Black et Scholes
- Théorème de Feynmann-Kac
- Solution de l'équation de Black et Scholes
- Théorème de Girsanov
  - Changement de mesure de probabilité
  - Probabilité de risque neutre

Processus stochastique continu

- Définition d'un processus stochastique continu.
  On appelle processus continu X_t
  • toute collection de variables aléatoires $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- C'est une fonction de deux variables $X_t(w)$

$$X : \quad [0, T] \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

• On peut voir un processus comme une fonction qui à $w \in \mathcal{A}$ associe une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ appelée trajectoire du processus

$$t \to X_t(w)$$

Filtration

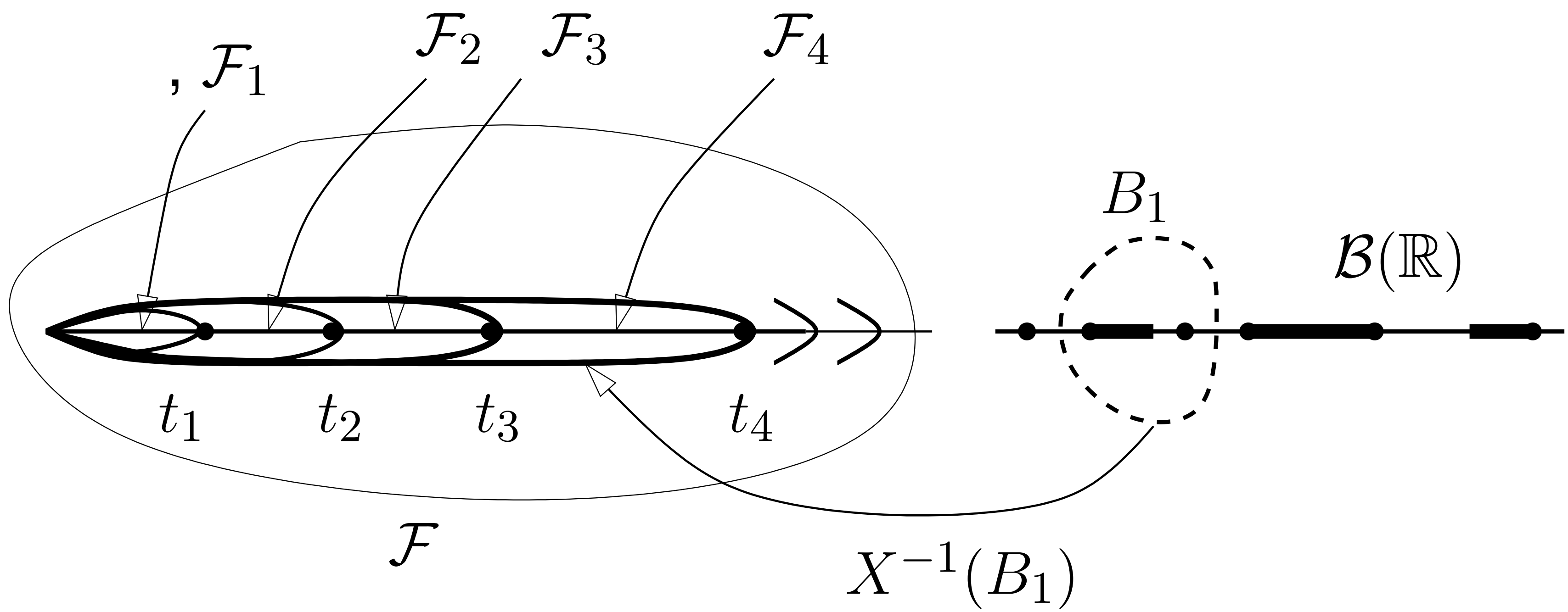
- Définition de Filtration. On appelle filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{[0,T]}$ toute collection croissante de sous-tribus de $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{t_1}, \mathcal{F}_{t_1}, ...\mathcal{F}_{t_s}, ...\}$:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}, \quad \forall s \leq t, \quad \forall t \in [0,T]$$

- $\mathcal{F}_t$ représente la quantité d'information disponible à l'instant t. Il est donc logique que cette quantité augmente avec le temps
- $\mathcal{F}_t$ est une information sur des évènements générés X_t. Sachant $\mathcal{F}_t$ on sait exactement si un évènement s'est réalise ou pas. On sait aussi toutes les valeurs de X_t (et toutes propriétés de X_t) jusqu'au l'instant t
- Les valeurs de X_t sont des constantes par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ (T. Bjork)

Processus adapté

- Définition d'un processus adapté Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté à la filtration $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}$-adapté) si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- Théorème Si $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est $\mathcal{F}$ -adapté, la v.a. (X_s) est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $s \leq t$, $t \in [0,T]$



Filtration engendrée par un processus

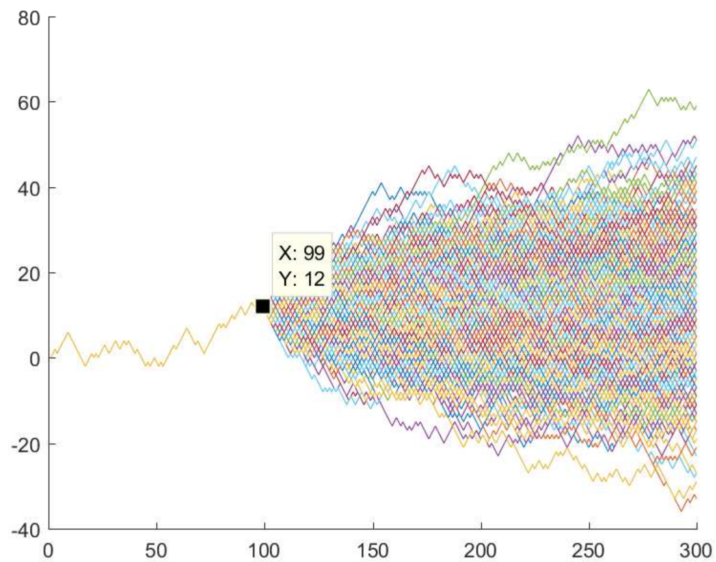
- Définition d'une filtration engendrée par un processus
  La filtration engendrée par un processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$, notée $\mathcal{F}^X$ (par la suite noté simplement $\mathcal{F}$)est la suite croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X$ engendrées par $(X_s)_{s\leq t}$:

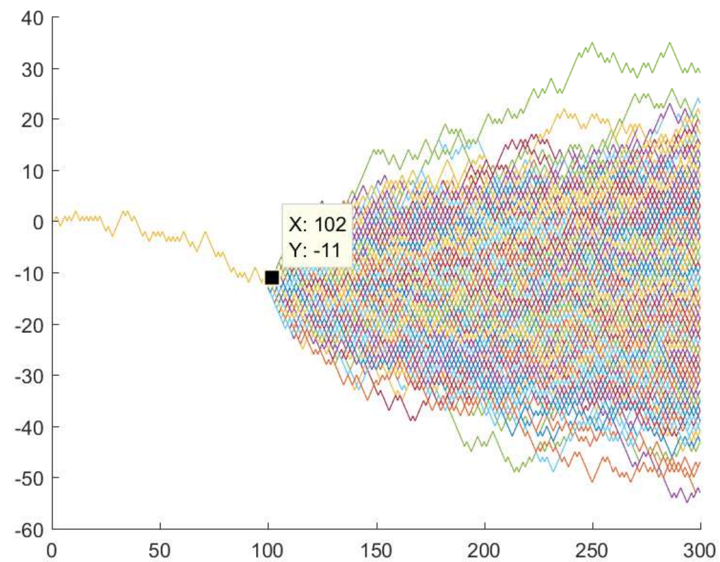
$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t) \quad \forall t \in [0, T]$$

- Définition d'un martingale. Un processus aléatoire $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{P}$ s'il vérifie :
  - $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout $t \leq T$,
  - M_t est $\mathcal{F}$-adapté,
  - $$\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s \qquad \forall s \leq t$$

Martingale

- Définition d'un martingale:
  $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s \qquad \forall s \leq t$





- M_s est une variable aléatoire dont une valeur dépend d'un scenario de $\mathcal{F}_s$ réalisé. M_s est une constante par rapport à la filtration $\mathcal{F}_s$. Les simulations montrent deux scénarios avec les deux différentes valeurs de $M_s = 12$ et $M_s = -11$.

Mouvement Brownien

- Mouvement Brownien est un processus W_t vérifiant :

  • $\mathcal{F}$ une filtration

  • W_t est $\mathcal{F}$-adapté

  • $W_0 = 0$ p.s.

  • W_t est à accroissements indépendants : $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$

  • W_t est à accroissements stationnaires et gaussiens:

  ○ $W_t - W_s \sim W_{t-s} \sim N(0; t - s)$ pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$

  • W_t est continu, i.e. $t \to W_t(w)$ est continue pour presque tout w.

Mouvement Brownien

- Théorème. Si W_t est un Mouvement Brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle (engendré par W_t), les processus
  - W_t
  - $M_t = W_t^2 - t$
  - $M_t = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}}$

  sont $\mathcal{F}$ martingales.
- Demonstration : exercice

Simulation du Mouvement Brownien

- Simulation d'une trajectoire du Brownian motion :
  • Discrétisation de l'interval $[0, T]$ en N parties: :
  ($\Delta t = T/N, \quad t_n = n\,\Delta t$).
  • Nombre aléatoire $N(0, \Delta t)$ suit la même loi que
  $\sqrt{\Delta t} \cdot N(0,1)$

  • $$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_{t_1} &= g_1 \sqrt{\Delta t} \\ W_{t_2} &= W_{t_1} + g_2 \sqrt{\Delta t} \\ W_{t_n} &= W_{t_n} + g_n \sqrt{\Delta t} \\ W_{t_N} &= W_{t_{N-1}} + g_N \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

  ou les nombres $\{g_i\}$ suintent la loi Normale $N(0,1)$.
- On trace le graphe de W_t : $\quad t_n - > W_{t_n}$.

Résumé sur le Mouvement Brownien

Théorie

- Fonction de densité

$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

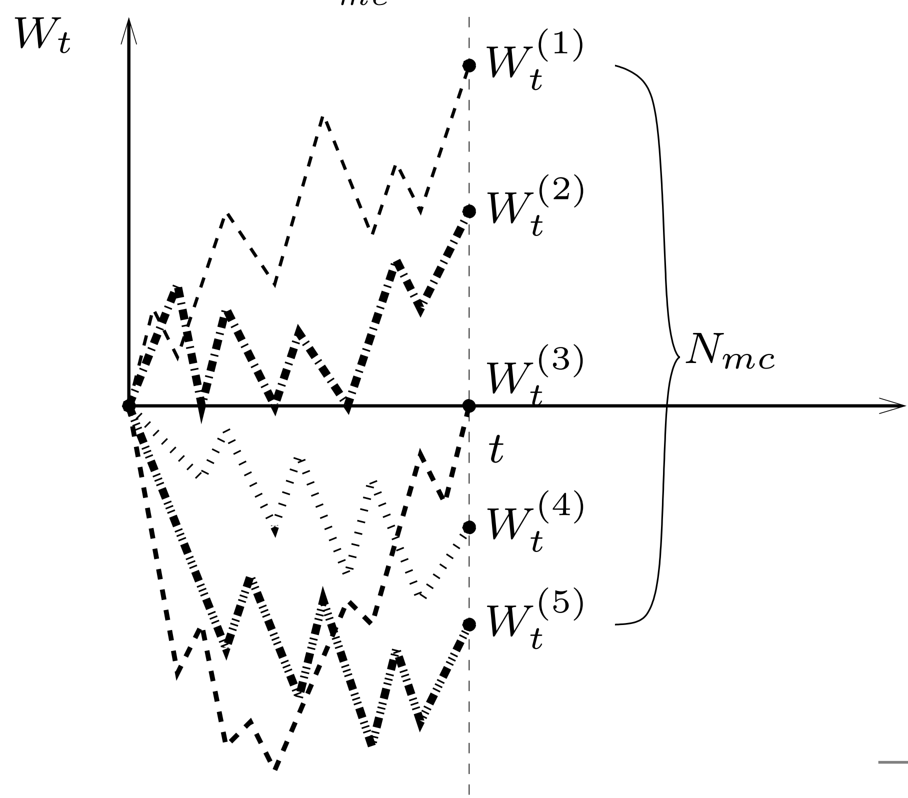
- $$\mathbb{E}[W_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{W_t}(x) dx = 0$$

- $$\mathbb{V}ar[W_t] = \mathbb{E}[(W_t)^2] - (\mathbb{E}[W_t])^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{W_t}(x) dx = t$$

Simulation

- On vérifie les formules théoriques par simulation si $N_{mc} \to \infty$
- $\mathbb{E}[W_t] \simeq \frac{1}{N_{mc}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} W_t^{(k)} = 0$ (TGN)
- $\mathbb{V}ar[W_t] \simeq \frac{1}{N_{mc}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} (W_t^{(k)})^2 = t$



MB est un martingale. Simulation

- Programme

```
function [W_Fk,W] = processus_W(k,delta_t)
W(1)=0;
for i=1:k-1
W(i+1)=W(i)+sqrt(delta_t)*randn;
end
%xlabel 'indice de temps i'
%ylabel 'processus W_t'
%title 'Trajectoire du mouvement Brownien '
%figure
hold on
plot(W,'g');
W_Fk=W(k);
end
```

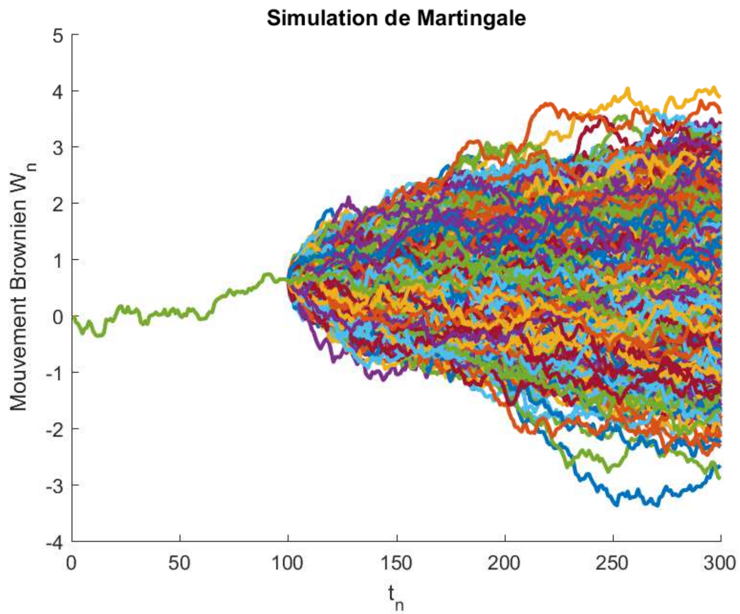
MB est le martingale. Simulation

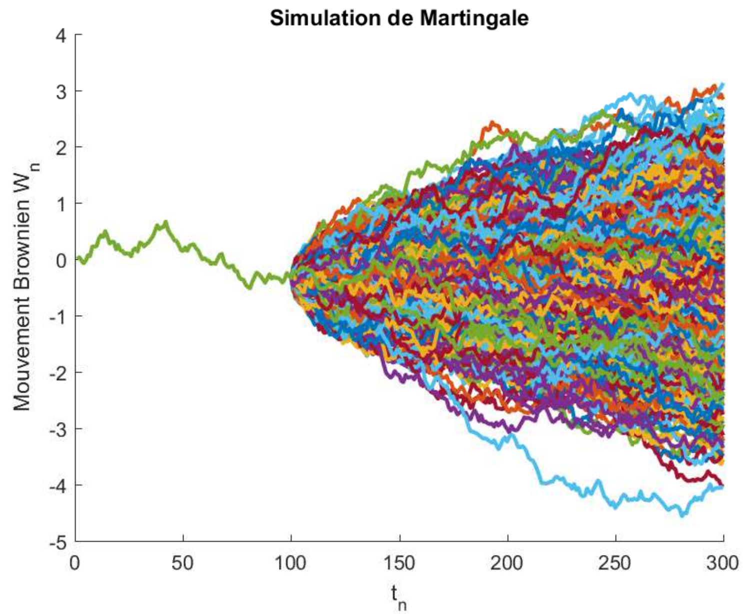
- Programme

```
k=100; n=300; Nmc=2000; T=2; delta_t=T/(n+k);
function [esperance_Wn,W_Fk] = martingale(k,n
% Simulation de W_i de  k jusquau  n
[W_Fk,W] = processus_W(k,delta_t);
for j=1:Nmc
for i=k:(n-1)
W(i+1)=W(i)+sqrt(delta_t)*randn;
end
last_value(j)=W(n);
end
plot(W,'LineWidth',2)
esperance_Wn=sum(last_value)/Nmc;
end
```

MB est un Martingale

- Définition d'un martingale: $\mathbb{E}[W_t/\mathcal{F}_s] = W_s \qquad \forall s \leq t$





- W_s est une constante par rapport à la filtration $\mathcal{F}_s$. En réalité W_s est une variable aléatoire dont une valeur dépend d'un scenario de $\mathcal{F}_s$ réalisé. Simulations montrent deux différentes scenarios avec deux différentes valeurs de $W_s = 0.62$ et $W_s = -0.34$.

Variation Quadratique

- Définition de la variation quadratique à $t = T$: Soit
  - X_t processus sur $[0, T]$
  - Une subdivision $\pi_n = (t_0, t_2, ...t_N)$ de l'intervalle $[0, T]$
  - Variation quadratique s'appelle la limite

$$\langle X \rangle_T = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^2$$

  - On définit la limite dans le sens convergence $\mathcal{L}^2$ lorsque $||\pi_n|| = \max |t_{n+1} - t_n| \to 0$
  - Limite ne dépend pas de la subdivision choisie
  - On introduit Q_N (pour les simulations)

$$Q_N = \sum_{n=1}^{N} (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^2, \quad \langle X \rangle_T = \lim_{N \to \infty} Q_N$$

Variation Quadratique de MB

- Théorème. Variation quadratique du MB sur l'intervalle $[0, T]$

$$\langle W \rangle_T = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (W_n - W_{n-1})^2 = T$$

  - Fonction: $t \to \langle W \rangle_t$ est une droite

- On vérifie le Th. de Var. Qu. par les simulations.
  On trace les graphes (• discrétisation de l'interval $[0, T]$ en N parties!)
  - $t_k \to \sum_{n=1}^{k-1} (W_{n+1} - W_n)^2$ pour $N = 10$
  - $t_k \to \sum_{n=1}^{k-1} (W_{n+1} - W_n)^2$ pour $N = 100$

  et on observe que la variance de $\langle W \rangle_T$ tend vers zero quand $N \to \infty$ et la variation quadratique approche une variable non aléatoire T.

Variation quadratique de MB

- Théorème. Variation quadratique du MB sur l'intervalle $[0, T]$

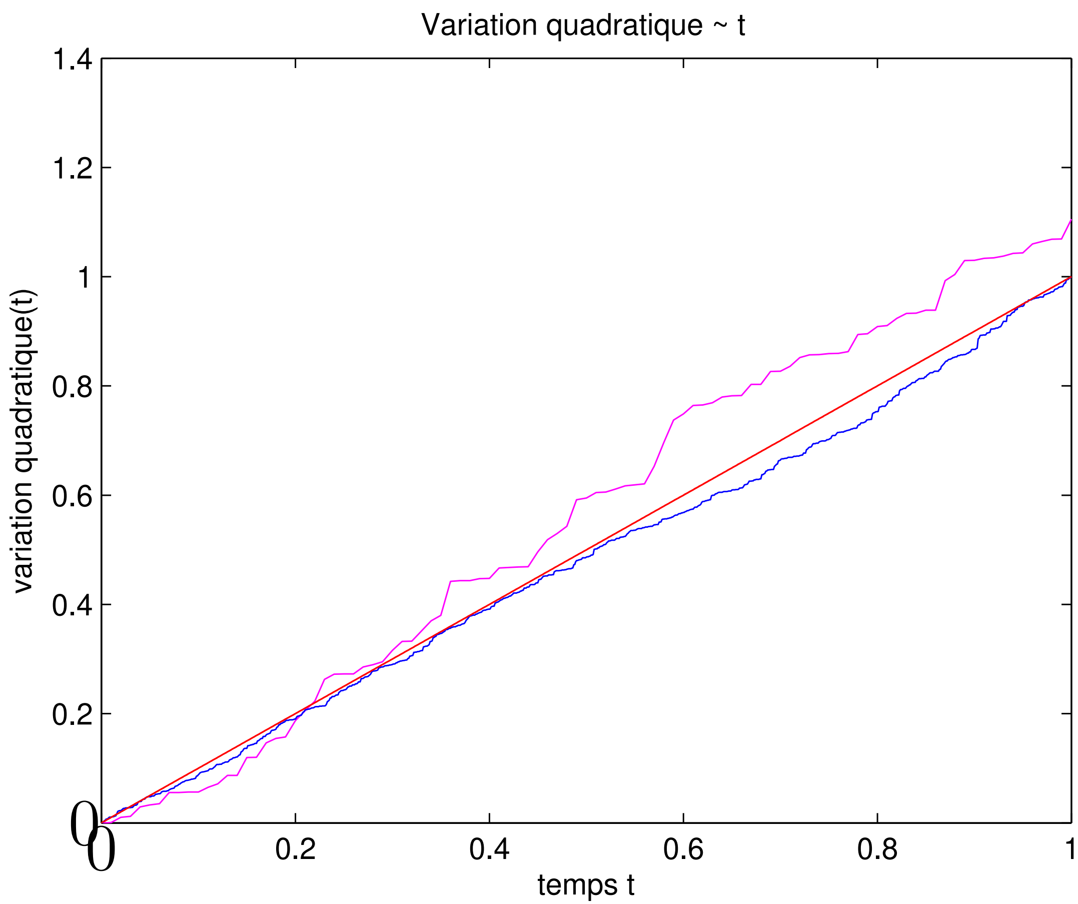
$$\langle W \rangle_T = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (W_n - W_{n-1})^2 = T$$

- Idees de demonstration
  • On montre la convergence par rapport à la norme $\mathcal{L}^2$ de l'espace
  $\mathcal{L}^2(\Omega) = \{W_t, \mathbb{E}[W_t^2] < \infty, ||W_t||^2 = \mathbb{E}[W_t^2]\}$
  • Introduisons $Q_N = \sum_{n=1}^{N} (W_n - W_{n-1})^2$
  • On va montrer que $\lim_{N \to \infty} ||Q_N - T||^2 = 0$
  • Il est facile de montrer que $\mathbb{E}[Q_N] = T$
  • On reconnaît dans $||Q_N - \mathbb{E}[Q_N]||^2 = \mathbb{E}[(Q_N - \mathbb{E}[Q_N])^2]$ la variance de Q_N
  • $\mathbb{V}ar[Q_N] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{V}ar[(W_n - W_{n-1})^2] = 2N(\Delta t)^2$
  • $\lim_{N \to \infty} \mathbb{V}ar[Q_N] = \lim_{N \to \infty} 2N(T/N)^2 = 0$

- Il est possible de montrer la convergence p.s. (à l'aide de l'inégalité de Markov) et utiliser la théorème pour $\forall t$

Variation quadratique de MB

- On observe à l'aide des simulations que la variation quadratique $t_i \to \langle W \rangle_{t_i}$ quand $N \to \infty$ approche la droite: $t \to W_t$.



Simulation de VQ de MB

- Programme

```
function [] = varioation\_quadratique()
N=10000; T=1; W(1)=0;
variation(1)=0;
delta_t=T/N;
t=(0:N)*delta_t;
for i=1:N
W(i+1)=W(i)+ sqrt(delta_t)*randn;
variation(i+1)=variation(i)+(W(i+1)-W(i))^2;
end
figure
plot(t,variation,'g','LineWidth',2);
hold on;
lot(t,t,'r','LineWidth',2); % objet non alati
end
```

Variation quadratique de MB

- On a montré théoriquement et par les simulations de Monte-Carlo que la Variation quadratique du MB sur l'intervalle $[0, t]$ est égale à t.

$$\langle W \rangle_t = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (W_k - W_{k-1})^2 = t$$

- Ce fait implique la chaîne logique suivante:

$$\int_0^t ds = t = \langle W \rangle_t = \int_0^t (dW_s)^2$$

- Règle heuristique de Calcul Stochastique est

$$(dW_s)^2 = ds \qquad\qquad d\langle W \rangle_s = ds$$

Idée de calcul stochastique

- Règle heuristique de Calcul Stochastique est

$$(dW_t)^2 = dt$$

- On a utilisé le fait que $\sum_{k=1}^{n} (W_k - W_{k-1})^2$ se comporte comme un intégral $\int_0^t (dW_s)^2$
- Ce qu'il faut retenir est que lorsque l'on applique la decomposition une fonction stochastique $f(W_t)$ en série de Taylor dW_t se comporte comme $\sqrt{dt} \cdot N(0,1)$:

$$l'ordre\ de\ grandeur\ de\ dW_t \sim \sqrt{dt},$$

il faut garder un terme en plus dans le développement de Taylor.

Règles de multiplications

- On utilise ces règles dans les calculs stochastiques
- $$dW_t \cdot dW_t = dt$$
- $$dt \cdot dt = 0$$
- $$dW_t \cdot dt = 0$$

Intégrale stochastique

- On veut donner un sens à une variable aléatoire qui s'appelle l'intégrale stochastique:

$$\int_0^T \Theta_t dW_t$$

- En générale Θ_t dépend de t et W_t: $\Theta_t \equiv \Theta(t, W_t)$
- Il est naturel de définir l'intégrale par rapport à une trajectoire de Mouvement Brownien

Comparaison des intégrales

- Définition de l'intégrale de Riemann

$$\int_0^T \Theta_t dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} \Theta_{\xi_i}(t_{i+1} - t_i), \quad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

  - Condition d'existence - Θ_t est continue

- Comment définir l'intégrale stochastique?
  - Discrétisation?
  - Quel espace?
  - Quelle limite?

Intégrale stochastique

- Définition de l'intégral stochastique

$$\int_0^T \Theta_t dW_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- On impose sur le processus stochastique $\Theta_t \equiv \Theta(t, W_t)$:
  • Processus stochastique $\Theta_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, [0,T])$
  • Θ_t est $\mathcal{F}$ adapté pour que Θ_{t_i} soit indépendant de $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$
  • $\mathcal{L}^2(\Omega, [0,T]) = \{\Theta(s)_{s\in[0,T]}$ t.q. $\mathbb{E}[\int_0^T \Theta_s^2 ds] < \infty\}$
- Dans les applications en finance, Θ_t représentera la quantité d'actif risqué contenue dans un portefeuille à l'instant t et dW_t la variation infinitésimale de cet actif risqué. Il est donc naturel de vouloir imposer que Θ_t soit $\mathcal{F}$ -adapté.

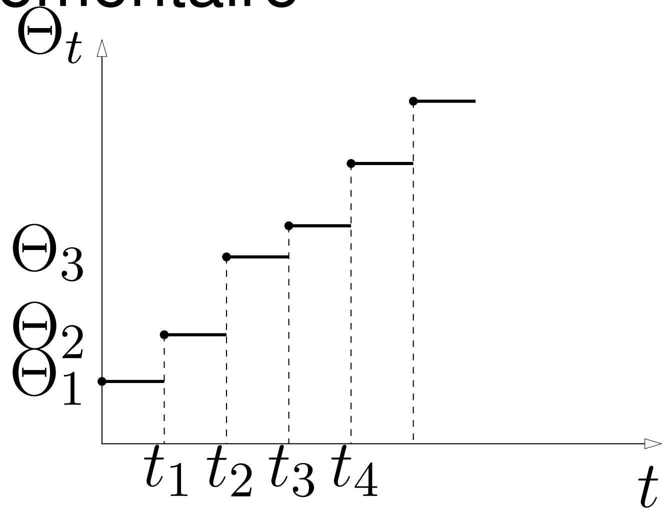
Processus élémentaire

- On introduit $(\Theta_N(t))_{0\leq t\leq T}$ processus élémentaire pour pouvoir définir limite dans la definition de l'intégrale stochastique
- Un processus $(\Theta_N(t))_{0\leq t\leq T}$ est appelé processus élémentaire s'il existe une subdivision $\pi_n = (0 = t_0 \leq t_1 \leq, ..., \leq t_N = T)$ et un processus discret $(\Theta_i)_{0\leq i\leq N}$ tel que Θ_i est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_i}$ et dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\Theta_N(t) = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$$

Processus élémentaire

- Visualisation de Processus élémentaire



$\Theta_N(t) = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$

- Définition de l'intégrale stochastique pour le processus élémentaire

$$I(\Theta_N) = \int_0^T \Theta_N(t) dW_t = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Comparaison des intégrales

- Définition de l'intégrale stochastique pour le processus élémentaire

$$\int_0^T \Theta_N(t)dW_t = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- Définition de l'intégrale de Riemann

$$\int_0^T \Theta_t dt = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{\xi_i}(t_{i+1} - t_i), \qquad \xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$$

• Dans IS la fonction Θ_{t_i} est prise en point t_i, car ne peut dépendre que des évènements arrivés jusqu'au t_i.
• On voie l'importance d'introduction de la filtration $\mathcal{F}_t$ comme l'accumulation de l'information.

$\Theta_N(t)$ approche un processus Θ_t

- On note l'espace de processus adapté à $\mathcal{F}$
  $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) = \{\Theta(t)_{0\leq t<T}$, t.q. $\mathbb{E}[\int_0^T \Theta_t^2 dt] < \infty\}$
- Théorème fondamental:
  L'ensemble des processus élémentaires (à l'escalier) $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout $\Theta_t \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T])$ il existe une suite $\Theta_{t_i} \in \mathcal{E}$, $i \in [0,N]$ telle que
  $\Theta_N(t) = \sum_{i=0}^N \Theta_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ approche Θ_t en norme quadratique.
  $\Theta_N(t) \to \Theta_t$ signifie
  $||\Theta_N(t) - \Theta_t||_2^2 = \mathbb{E}[\int_0^T (\Theta_N(t) - \Theta_t)^2 dt] \to 0 \quad si \quad N \to \infty$

Construction de l'intégrale stochastique

- Théorème fondamental:
  - On définit l'intégrale stochastique en escalier

$$I(\Theta_N) = \sum_{i=0}^{N} \Theta_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

  - On définit l'intégrale stochastique comme limite dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega)$ des intégrales stochastiques en escalier

$$I(\Theta_N) \to I(\Theta) = \int_0^T \Theta_t dW_t$$

$$||I(\Theta_N) - I(\Theta)||_2^2 = \mathbb{E}[(I(\Theta_N) - I(\Theta))^2] = 0, \; N \to \infty$$

Propriétés de l'intégrale stochastique

- L'intégrale stochastique satisfait les propriétés :
- $\Theta \to \int_0^t \Theta_s dW_s$ est linéaire
- $t \to \int_0^t \Theta_s dW_s$ est continue p.s.
- $(\int_0^t \Theta_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté.
- $\mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s dW_s] = 0$
- Propriété d'Isométrie : $\mathbb{E}[(\int_0^t \Theta_s dW_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s^2 ds]$
- Théorème de Fubini : $\mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s^2 ds] = \int_0^t \mathbb{E}[\Theta_s^2] ds$

Simulation de l'intégrale stochastique

- Programme

```
function [esperance_Integrale] = Esperance_In
% teta_t=W_t
N=100; Nmc=100000; T=1; delta_t=T/N; W(1)=0;
t=(0:N)*delta_t;
   for k=1:Nmc
   I=0;
       for i=1:N
       W(i+1)=W(i)+sqrt(delta_t)*randn;
       I=I+W(i)*(W(i+1)-W(i));
       end
   Integrale(k)=I;
   end
esperance_Integrale=mean(Integrale);
end
```

Simulation d'Isometrie

```
function [esperance_Integrale_stoch_carre,esperance_Integrale_Teta] =
function[f]=Teta(t,w)
        f=t^2*w^2 + sin(w)+ t;
end
N=100; Nmc=100000; T=2; W(1)=0; delta_t=T/N; t=(0:N)*delta_t;
for k=1:Nmc
I_stoch=0; I_Teta=0;
   for i=1:N
   W(i+1)=W(i)+sqrt(delta_t)*randn;
   I_stoch=I_stoch+Teta(t(i),W(i))*(W(i+1)-W(i));
   I_Teta=I_Teta+ (Teta(t(i),W(i)))^2*delta_t;
   end
 Integrale_stoch_carre(k)=I_stoch^2;
 Integrale_Teta(k)= I_Teta;
end
esperance_Integrale_stoch_carre=mean(Integrale_stoch_carre);
esperance_Integrale_Teta=mean(Integrale_Teta);
end
```

Propriétés de l'intégrale stochastique

- Propriété d'Isométrie de façon generale :

$$\mathbb{E}[(\int_s^t \Theta_u dW_u)^2/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t \Theta_u^2 du/\mathcal{F}_s]$$

- $I_t = (\int_0^t \Theta_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ est $\mathcal{F}$-martingale
- Processus $((\int_0^t \Theta_s dW_s)^2 - \int_0^t \Theta_s^2 ds)_{0\leq t\leq T}$ est le $\mathcal{F}$ martingale
- Covariance quadratique entre les deux intégrales stochastiques: $\langle\int_0^t \Theta_s dW_s, \quad \int_0^u \Phi_s dW_s\rangle = \int_0^{t\wedge u} \Theta_s \cdot \Phi_s ds$

Idée des démonstrations

- Pour la simplicité nous allons montrer les propriétés de l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires ou processus en escalier
- Cette astuce nous permet d'enlever limite dans la définition de l'intégrale stochastique.
- On généralise toutes les propriétés de processus élémentaires au processus adapté à $\mathcal{F}$

Démonstrations

- Montrons: $\mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s dW_s] = 0$
- Prenons $t = t_k$

$$\mathbb{E}[\int_0^{t_k} \Theta_s dW_s] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Theta_i (W_{i+1} - W_i)] =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_i (W_{i+1} - W_i)/\mathcal{F}_i]] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Theta_i \mathbb{E}[(W_{i+1} - W_{t_i})/\mathcal{F}_i]] = 0$$

- En effet les accroissements $(W_{i+1} - W_i)$ sont indépendants de $\mathcal{F}_i$ et

$$\mathbb{E}[(W_{i+1} - W_i)/\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[(W_{i+1} - W_i)] = 0$$

Démonstrations

- Montrons: $\mathbb{E}[(\int_0^t \Theta_s dW_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s^2 ds]$
- Prenons $t = t_k$

$$\mathbb{E}[(\int_0^{t_k} \Theta_s dW_s)^2] =$$
$$\sum_{i,j=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Theta_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\Theta_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Theta_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] +$$
$$2\sum_{i<j} \mathbb{E}[\Theta_{t_i}\Theta_{t_j}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_{t_i}^2 (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}]] +$$
$$+2\sum_{i<j} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta_{t_i}\Theta_{t_j}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) / \mathcal{F}_{t_j}]] =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Theta_{t_i}^2 \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}]] +$$
$$+2\sum_{i<j} \mathbb{E}[\Theta_{t_i}\Theta_{t_j}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\mathbb{E}[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) / \mathcal{F}_{t_j}]] =$$
$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{k-1} \Theta_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)] + 0 = \mathbb{E}[\int_0^t \Theta_s^2 ds]$$

Lemme d'Ito

- Soit • $\mathcal{F}$ la filtration générée par W_t
  • Fonction $f : x \to f(x)$ avec les dérivées $f'(x), f''(x)$ continues, $\mathcal{F}$ mesurables
  • $\mathbb{E}[f'(W_s)^2] < \infty$

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)d\langle W\rangle_s$$

=

$$f(W_0) + \int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

- La notation infinitésimale de cette relation:
  $df(W_s) = f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}f''(W_s)ds$

Exemple du Lemme d'Ito

- $f(x) = x^2 \quad f(W_0) = W_0^2 = 0$

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2$$

$$f(W_t) = W_t^2, f'(W_s) = 2W_s, \quad f''(W_s) = 2$$

En remplaçant dans le Lemme d'Ito, nous obtenons

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + \int_0^t ds$$

ce qui implique

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$$

Taylor pour une fonction classique

- Soit $x_i \in [x_0 = a, x_N = b], \quad x_i = \Delta x \cdot i = \frac{x}{n} \cdot i$
- On utilise la formule de Taylor:
  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - x_{i-1})^2,$
  • $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\quad \xi_i$ est une variable classique à valeur dans $[x_{i-1}, x_i]$
  • $f(x_N) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$
- On somme chaque membre
  $\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) =$
  $\sum_{i=1}^{n} [f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(x_{\xi_{i-1}})(x_i - x_{i-1})^2]$
  soit $f(x_N) - f(x_0) =$
  $\sum_{i=1}^{n} [f'(x_{i-1})\Delta x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(x_{\xi_{i-1}})(\Delta x)^2]$

Taylor pour une fonction classique

- $f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(x_{i-1})\Delta x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_{i-1})(\Delta x)^2$
- Si $N \to \infty$ $\quad \sum_{i=1}^{n} f'(x_{i-1})\Delta x \to \int_a^b f'(x)dx$
- Le terme $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_{i-1})(\Delta x)^2 \sim n \cdot (\Delta x)^2 \to 0$
- On a obtenu une identité: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$!
- Dans le cas stochastique de la même façon $\sum_{i=1}^{n} f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) \to \int_0^t f'(W_s)dW_s$
- Cependant on ne peut pas négliger par le terme

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2$$

car il GRAND . Il ne tend pas vers 0 si $n \to \infty$.

Taylor pour une fonction aléatoire

- Soit $t_i \in [0, t], \quad t_i = \Delta t \cdot i = \frac{t}{n} \cdot i$
- On utilise la formule de Taylor:
  $f(W_i) - f(W_{i-1}) =$
  $f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(W_i - W_{i-1})^2,$
  • $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad \xi_i$ est une variable aléatoire à valeur dans $[t_{i-1}, t_i]$
  • $f(W_t) - f(W_0) = \sum_{i=1}^{n} (f(W_i) - f(W_{i-1})$
- On somme chaque membre
  $\sum_{i=1}^{n} (f(W_i) - f(W_{i-1}) =$
  $\sum_{i=1}^{n} [f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2]$
  soit $f(W_t) - f(W_0) =$
  $\sum_{i=1}^{n} [f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2]$

Lemme d'Ito

- La convergence $\mathcal{L}^2$ impliquant la convergence $\mathcal{L}^1$, on a finalement la convergence dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ de
  $f(W_t) - f(W_0) =$

  $$\sum_{i=1}^{n} f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2$$

  vers

  $$\int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$$

  Ceci entraîne donc l'égalité presque sûre entre les deux v.a. On intervertit ensuite le $\forall t$ et le $p.s.$ grâce à la continuité de chacun des processus.

Démonstration du Lemme d' Ito

- $f(W_t) - f(W_0) =$

$$\sum_{i=1}^{n} [f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2]$$

- Comme f est derivable à dérivée bornée, la densité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2$ nous donne :

$$|| \sum_{i=1}^{n} f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) - \int_0^t f'(W_s) dW_s ||_2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

- Il reste à montrer
$||\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2 - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds||_2 \rightarrow 0$

Démonstration du Lemme d'Ito

- Il reste à contrôler le dernier terme:
  $U_n = \sum_{i=1}^n f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2$
  Nous allons successivement remplacer ξ_{i-1} par t_{i-1} puis $(W_i - W_{i-1})^2$ par $t_i - t_{i-1}$
- On montre convergence en $\mathcal{L}^1$. On utilise aussi le fait que la convergence en $\mathcal{L}^2$ entraîne la convergence en $\mathcal{L}^1$. On cherche à calculer
  $\lim_{n\to\infty} ||\sum_{i=1}^n f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2 - \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds||_1$
- Introduisons : $I = \frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$
  $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2$
  $V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f''(W_{i-1})(W_i - W_{i-1})^2$
  $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f''(W_{i-1})(t_i - t_{i-1})$
- Il faut montrer $\lim_{n\to\infty} ||U_n - I||_1 = 0$

Démonstration du Lemme d'Ito

- $||U_n - I||_1 \leq ||U_n - V_n||_1 + ||V_n - Z_n||_1 + ||Z_n - I||_1$
- 1. On montre que $||U_n - V_n||_1 = 0$ si $n \to \infty = 0$
  $||U_n - V_n||_1 = \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^{n}(f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2 - f''(W_{i-1})(W_i - W_{i-1})^2)|] \leq$
  $\mathbb{E}[\sup_i |f''(W_{i-1}) - f''(W_{\xi_{i-1}})| \sum_{i=1}^{n}(W_i - W_{i-1})^2] \leq$
  $(\mathbb{E}[\sup_i |f''(W_{i-1}) - f''(W_{\theta_i})|^2])^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n}(W_i - W_{i-1})^2)^2])^{\frac{1}{2}}$
  On a utilisé l'inégalité de Schwartz. Pour toute trajectoire, $s \to f''(W_s(\omega))$ est continue sur un compact, donc uniformément continue et le $\sup$ converge donc vers 0. La convergence vers 0 de l'espérance est assurée par le théorème de Lebesgue car f'' est bornée.

Démonstration du Lemme d'Ito

- Le deuxième terme $(\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n}(W_i - W_{i-1})^2)^2])^{\frac{1}{2}}$ est la racine de la variance de variation quadratique du mouvement Brownien qui converge vers $2\Delta t$. Donc on a

$$||U_n - V_n||_1 n \to \infty = 0.$$

Démonstration du Lemme d'Ito

- 2. On montre que $||V_n - Z_n||_2$ =0 si $n \to \infty$
  $||V_n - Z_n||_2^2 =$
  $\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n}(f''(W_{i-1})(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})))^2] \leq$
  $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(f''(W_{i-1})(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2] \leq$
  $||f''||^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar[(W_i - W_{i-1})^2] =_{n\to\infty} 0$
  Donc on a
  $\lim_{n\to\infty} ||V_n - Z_n||_2 = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||V_n - Z_n||_1 = 0$
- 3. On montre que $||Z_n - I||_1 =_{n\to\infty} 0$
  Par définition de l'intégrale de Lebesgue, comme f'' est bornée, on a :$||Z_n - I||_1 = ||\sum_{i=1}^{n} f''(W_{i-1})(t_i - t_{i-1})^2 - \int_0^t \frac{1}{2} f''(W_s)ds||_1 = 0 \ si \ n \to \infty$

Démonstration du Lemme d'Ito

- La convergence $\mathcal{L}^2$ impliquant la convergence $\mathcal{L}^1$, on a finalement la convergence dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$ de $f(W_t) - f(W_0) =$

$$\sum_{i=1}^{n} f'(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(W_{\xi_{i-1}})(W_i - W_{i-1})^2$$

vers

$$\int_0^t f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s)ds$$

Ceci entraîne donc l'égalité presque sûre entre les deux v.a. On intervertit ensuite le $\forall t$ et le $p.s.$ grâce à la continuité de chacun des processus.

Lemme d'Ito. Généralisation I

- Soit W_t, un mouvement brownien construit sur l'espace probabilisé $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  • $f : (t, x) \to f(t, x)$
  • Les dérivées partielles f_t, f_x, f_{xx} sont continues et mesurables sur $\mathcal{F}$
  • $\mathbb{E}[(\frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t))^2] < \infty \quad \forall t$
- Forme intégrale
  $f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, W_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s)ds$
- Forme différentielle

$$df(t, W_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t)dt$$

Processus Ito.

- Introduisons une nouvelle classe de processus par rapport auxquels nous pourrons encore définir une intégrale stochastique et appliquer la lemme d'Ito
- Définition d'un processus d'Ito

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s ds + \int_0^t \Theta_s dW_s$$

- Version infinitésimale:

$$dX_t = \Phi_t dt + \Theta_t dW_t$$

• avec X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\Phi_s = \Phi_s(W_s, s)$ et $\Theta_s(W_s, s)$ deux processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité $\quad \mathbb{E}[\int_0^T \Theta_s^2 ds] < \infty, \quad \int_0^T |\Phi_s| ds < \infty$

Lemme d'Ito. Généralisation II.

- Pour toute fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues et un processus d'Ito

$$dX_t = \Phi_t dt + \Theta_t dW_t$$

tel que
$\bullet\ \mathbb{E}[(\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\Theta_t)^2] < \infty$

- $$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s$$

$$d\langle X\rangle_s = \Theta_s^2 ds$$

- $$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)(\Phi_s ds + \Theta_s dW_s) +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\Theta_s^2 ds$$

Martingale classique

- L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité fortes sur les processus Φ_t et Θ_t.

$$dX_t = \Phi_t dt + \Theta_t dW_t$$

• avec X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable, Φ_s et Θ_s deux processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\mathbb{E}[\int_0^T \Theta_s^2 ds] < \infty, \quad \int_0^T |\Phi_s| ds < \infty p.s.$$

Equations Différentielles Stochastiques

- Forme générale des EDS

$$dX_t = \Phi(t, X_t)dt + \Theta(t, X_t)dW_t, \quad X(0) = X_0$$

• Φ_t et Θ_t deux processus $\mathcal{F}$-adaptés, la filtration $\mathcal{F}$ est générée par le mouvement Brownien.

- Modèle de Black et Scholes:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

• Solution: $S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}$

- Modèle de Vasicek (Ornstein-Uhlenbeck)

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma dW_t$$

• Solution: $Y_t = Y_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$