CY TECH Option FINTECH

Irina Kortchemski

Lemme d'Ito, l'Equation de Black et Scholes et la Couverture des Produits Dérivées

1. Deduction de l'Equation de Black et Scholes à l'aide de Delta- Hedging.

On étudie la pérformence de la stratégie de delta-couverture dans le modèle de Black et Scholes. Le trading a lieu uniquement aux dates discrétes t_i et le portefeuille n'est rebalancé que dans le nombre denombrable de points temporels pendant la vie de l'option.

On applique une stratégie de portefeuille autofinancante qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'action et de preêts ou d'emprunts à la banque, donc la valeur du portefeuille n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

P& L (profit and loss) de la stratégie de delta-couverture est mesuré par la différence entre le prix de l'option á la maturité et la valeur finale du portefeuille de couverture.

1 Modèle de Black et Scholes

1.1 L'équation Différentielle stochastique pour l'actif

Supposons que le processus stochastique S_t représente l'évolution du prix d'un actif risqué. Nous ne connaissons pas, en général, la loi qui gouverne un tel processus, mais nous avons peut-être une idée de son comportement local. Par exemple, sur un court intervalle de temps de longueur Δt, il est possible que ce prix ait tendance à varier proportionnellement à la longueur de la période et au prix de l'actif au début de la période. Nous écrivons, pour débuter,

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t.$$

Si, en général, les prix augmentent, alors μ est une constante positive et si les prix tendent à diminuer, alors μ est négative. Il y a cependant un problème avec cette dernière équation : nous ne sommes pas certain que le prix varie proportionnellement à la longueur de la période et au prix de l'actif, nous prétendons seulement qu'il a tendance à le faire. Il faut donc incorporer à notre équation une erreur non prévisible.

C'est pourquoi nous ajoutons un terme stochastique à notre équation de départ. Le terme stochastique à ajouter à notre équation initiale nous mène à l'équation

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \xi_t.$$

où σ est une constante positive et ξ_t est une variable aléatoire de loi $\mathbb{N}(0,1)$ indépendante de $S_u : \{0 \leq u \leq t\}$.

Cette dernière condition est importante, car nous ne devons pas être capable de prédire l'erreur ξ_t en observant le comportement du prix de l'actif risqué antérieurement à la date t.

Si nous ne voulons pas être en mesure de prédire l'erreur, il faut que cette dernière soit indépendante de $S_u : \{0 \leq u \leq t\}$ Pour cette raison, nous introduisons le mouvement Brownien puisqu'il est un processus gaussian dont les incréments sont mutuellement indépendants :

$$S_{t+\Delta t} - S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t (W_{t+\Delta t} - W_t).$$

Notons que la loi de $(W_{t+\Delta t} - W_t)$ est la même que la loi de $W_{\Delta t}$: elle est de loi $\mathbb{N}(0, \Delta t)$.

Lorsque les intervalles de temps de longueur Δt deviennent de longueur infinitésimale, nous obtenons une équation du type

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Cette dernière équation est un exemple d'équation différentielle stochastique et elle devrait soulever quelques interrogations :

1. Le terme $\sigma S_t dW_t$ n'est pas bien défini, particulièrement si nous nous rappelons que les trajectoires du mouvement Brownien sont nulle part differentiable!

2. Existe-t-il une solution à cette équation ?

3. Si cette solution existe, est-elle unique et comment faisons-nous pour la trouver ? Notons que la solution à une équation différentielle stochastique n'est pas, comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, une fonction mais est un processus stochastique.

1.2 Résolution de l'équation différentielle stochastique pour l'actif

Pour répondre à ces questions nous considérons une équation différentielle stochastique sous une forme plus générale:

$$dX_t = \Phi(t, X_t)dt + \Theta(t, X_t)dX_t, \quad X(0) = X_0$$

Concéderons W_t le mouvement Brownien avec la filtration générée $\mathcal{F}$,

Φ_s et Θ_s deux processus $\mathcal{F}$-adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^T \Theta_s^2 ds < \infty \ p.s. \quad \int_0^T \Phi_s^2 ds < \infty \ p.s.$$

$$f : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad (t,x) \to f(t,x)$$

.

La notation infinitésimale du Lemme d'Ito:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X \rangle_t$$

soit

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\Theta_t^2 dt$$

Prenons au lieu de X_t actif S_t:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t).$$

Notre but est de résoudre cette équation grace à la lemme d'Ito.

Choisissons la fonction f de façon convenable:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \to ln(x)$$

.

Calculons $df(S_t) = d\,ln(S_t)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

La règle de multiplication permet de calculer le différentiel de la variation quadratique de S_t

$$d\langle S\rangle_t = (dS_t)^2 = S_t^2(rdt + \sigma dW_t)^2 = S_t^2((dt)^2 + 2\sigma dt dW_t + \sigma^2(dW_t)^2) = \sigma^2 S_t^2 dt$$

Appliquons le Lemme d'Ito:

$$dln(S_t) = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}d\langle S\rangle_t = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt$$

$$dln(S_t) = \frac{1}{S_t}S_t(rdt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

On intègre chaque membre entre 0 et T :

$$\int_0^T d(ln(S_t))dt = \int_0^T (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

$$ln(S_T) - ln(S_0) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma(W_T - W_0)$$

On obtien la solution:

$$S_T = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T}$$

Si on intègre chaque membre entre des instants t_i et t_j :

$$\int_{t_i}^{t_j} d(ln(S_t))dt = \int_{t_i}^{t_j} (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

$$ln(S_{t_j}) - ln(S_{t_i}) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_i) + \sigma(W_{t_j} - W_{t_i})$$

On obtien la solution:

$$S_{t_j} = S_{t_i} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(t_j - t_i) + \sigma(W_{t_j} - W_{t_i})}$$

2 Deduction de l'Equation de Black et Scholes à l'aide de Delta - Hedging.

2.1 Delta-Hedging continue

On se place dans un univers où les investisseurs sont insensibles au risque ("neutres" au risque), donc où le rendement attendu des actifs risqués est celui de l'actif sans risque : r. Cette étude se fera dans le cadre du modèle Black-Scholes standard, donc avec volatilitè constante σ, où le prix à l'instant t, S_t, d'un actif vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t).$$

Nous vendons une option, un call européen avec le prix $V(S,t)$. Nous allons mettre en place une stratégie de couverture d'un produit dérivé, un Call européen, avec un portefeuille constitué d'une part de l'actif sous - jacent, une action, et d'autre part de l'actif sans risque, du cash placé en banque. Le portefeuille de couverture π_t s'écrit par la formule:

$$\pi_t = \Delta_t \, S_t + B_t$$

où

- Δ_t est la quantité d'actions (ou le nombre de parts) dans le portefeuille
- B_t est la quantité d'argent, solde du compte.

Ce portefeuille est construit d'une combinaison d'actions et de l'argent de telle facon qu'il ait le même risque que celui de l'option à chaque instant t.

Dans la litérature on peut rencontrer un portefeuille

$$\Pi_t = \Delta_t \, S_t + B_t - V_t$$

"Hedging portofolio is composed of

- *Short position in an option:* $-V_t$
- *Long position in* Δ_t *shares*
- *An amount of the cash* B_t

A short option hedging portfolio starts with some initial capital and invest in the stock and money market account so that the portfolio $\Delta_t \, S_t + B_t$ *at each time* t *agrees with* V_t

On dit que le portefeuille Π_t doit être Delta neutre:

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial S} = \Delta - \frac{\partial V_t}{\partial S} = 0$$

Dans ce cours nous utilisons le portefeuille $\pi_t = \Delta_t \, S + B_t$, nous étudions la différence entre le portefeuille et l'option à couvrir

$$\pi_t - V_t = \Delta_t \, S_t + B_t - V_t.$$

On vend l'option pour le prix $V(S_t,t)$ et on utilise cette quantité de l'argent pour construire le portefeuille de couverture:

- $\pi_0 = V_0$ à $t = 0$.
- $\pi_t = V_t$ à chaque instant t.

Notre objectif est d'étudier les variations dV_t et $d\pi_t$ afin d'assure $\pi_t = V_t$.

A t=0 on achète la quantité Δ_0 du stock de valeur S_0.

De la condition $\pi_0 = V_0$ on déduit que la valeur du cash est bien définie: $B_0 = V_0 - \Delta_0\, S_0$.

On utilise la lemme d'Ito pour calculer la variation de l'option:

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2}d\langle S\rangle_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 dt$$

et le différentiel de la variation quadratique

$$d\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt.$$

La variation de portefeuille est

$$d\pi_t = \Delta_t dS_t + dB_t$$

Notez que dans l'équation, nous n'avons pas inclus un terme $d\Delta_t$. C'est en fait un point assez subtil, car nous allons le voir (plus tard) que la quantité des actions Δ_t dépend en fait de S_t. Cependant, si nous pensons à une situation réelle, à tout instant de temps, il faut choisir Δ_t, puis le maintenir dans le portefeuille alors que l'actif se déplace aléatoirement. Donc, l'équation est en fait la variation de la valeur du portefeuille, pas un diférentiel. Si nous prenions une vraie équation différentielle on a

$$\pi_t = \Delta_t dS_t + d\Delta_t\, S_t + dB_t$$

mais nous devons nous rappeler que Δ_t ne change pas avec un petit intervalle de temps, puisque nous choisissons Δ_t, et alors S_t change aléatoirement. Nous ne sommes pas autorisés à regarder dans l'avenir, (sinon, nous pourrions devenir riche sans risque, ce qui n'est pas autorisé par la condition de non-arbitrage) et donc Δ_t n'est pas autorisée á contenir toute informations sur l'évolution future des prix des actifs. C'est pourquoi calcul stochastique d'Ito est utilisé.

Donc on vend ou on achète des actions aux instants $t \;\; t+dt \;\; t+2dt...$ et entre ces moments la quantité d'actions Δ_t ne varie pas : $d\Delta_t = \Delta(S_t + dS_t, t+dt) - \Delta(S_t,t) = 0$.

De plus on applique une stratégie de portefeuille autofinançant, donc la valeur de π_t n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

$$dV_t - d\pi_t = d(V_t - \pi_t) = 0$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt - (\Delta_t dS_t + rB_t dt) = 0$$

Afin de maintenir $dV_t = d\pi_t$ il faut éliminer le risque localement (à chaque instant temporel). Pour cela on choisit

$$\Delta_t = \frac{\partial V_t}{\partial S}$$

On remplace aussi B_t par

$$B_t = V_t - \Delta_t S_t = V - S\frac{\partial V_t}{\partial S}$$

et on obtient l'équation de Black et Scholes pour le prix de l'option:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V_t}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} - rV_t = 0$$

soit

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0.$$

Dans cette équation le prix de l'option $V(t,S)$ est décrit par une fonction de deux variables indépendantes t et S. Il est sous entendu que S est le prix de l'actif à l'instant t. On tien compte du fait qu'avant on a utilisé la description du prix de l'option par un processus stochastique $V_t \equiv V(t,S_t)$.

En conclusion: Si l'option vérifie l'équation de Black et Scholes alors elle peut être couverte à chaque instant et l'erreur de la couverture est exactement zero. Le marché est complet. On écrit l'equation de Black et Scholes avec la condition finale:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t=T,S) = max(S-K,0) \end{cases} \tag{1}$$

3 Prix de l'option

On a montré que le portefeuille de coverture actualisé π_t est le martingale:

$$\mathbb{E}[\widehat{\pi}_T/\mathcal{F}_t] = \widehat{\pi}_t$$

Nous avons montré aussi la couverture à chaque instant

$$\pi_t = V_t.$$

Donc le prix le l'option actualisé est aussi martingale:

$$\mathbb{E}[\widehat{V}_T/\mathcal{F}_t] = \widehat{V}_t \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[e^{rT}V_T/\mathcal{F}_t] = e^{rt}V_t \quad \Rightarrow \quad V_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[V_T/\mathcal{F}_t]$$

Le mouvement Brownien est un processus Markovien donc le prix ne dépend pas du chemin d'evolution d'actif. C'est pourquoi on peut remplacer la filtration $\mathcal{F}_t$ qui contient toute l'information sur les chemins d'évolution d'actif par la simple condition initiale: $S(t) = S$.

$$V(t,S) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(S_T-K,0)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(S_T-K,0)|S(t)=S] =$$

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K,0)|S(t)=S] =$$

$$e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\cdot x} - K,0)\frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}dx =$$

Nous avons utilisé le fait que le mouvement Brownien est stationnaire à savoir $(W_T - W_t)$ suit la même loi que W_{T-t} et que la fonction de densité de mouvement Brounien W_{T-t} est

$$f_{W_{T-t}}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

Nous allons maintenant de supprimer max et intégrer sur x pour lesquels

$$Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)+\,\sigma\cdot x} - K \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{ln(K/S) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma}$$

On note $A = \frac{ln(K/S)-(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma}$. Le prix de l'option devient

$$V(t,S) = e^{-r(T-t)} \int_A^{+\infty} (Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)+\,\sigma\cdot x} - K) \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, dx = I_2 - I_1$$

$$I_1 = e^{-r(T-t)} K \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, dx,$$

$$I_2 = e^{-r(T-t)} S \int_A^{+\infty} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)+\,\sigma\cdot x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\, dx$$

On calcule l'intégrale I_1:

$$I_1 = e^{-r(T-t)} K \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = (\ \textit{changement de variable } z = \frac{x}{\sqrt{T-t)}}) =$$

$$e^{-r(T-t)} K \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz =$$

$$e^{-r(T-t)} K\mathcal{N}(-\frac{A}{\sqrt{T-t}}) = e^{-r(T-t)} K\mathcal{N}(\frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

Pour calculer I_2 en fait apparaître dans l'argument de l'exponentielle un carreé parfait.

$$I_2 = e^{-r(T-t)} S \int_A^{+\infty} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\,(T-t)+\,\sigma\cdot x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = e^{-r(T-t)} S e^{-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} \int_A^{+\infty} \frac{e^{\sigma\cdot x - \frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx =$$

$$e^{-r(T-t)} S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \int_A^{+\infty} \frac{e^{\frac{(x-\sigma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx =$$

On fait changement de variable

$$z = \frac{x - \sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}, \quad B = (A - \sigma(T-t))\frac{1}{\sqrt{T-t}}$$

On obtient

$$I_2 = \int_B^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = \mathcal{N}(-B) = S\mathcal{N}(\frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

En conclusion le prix de l'option Call Européenne à l'instant t calculé à l'aide de calcule stochastique est

$$V(t,S) = S\mathcal{N}(\frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - e^{-r(T-t)}K\mathcal{N}(\frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

On aurait pu réduire l'equation de Black et Scholes à l'équation de la chaleur et résoudre directement l'equation BS à l'aide de fonction de Green de l'équation de la chaleur.

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \\ V(t=T,S) = max(S-K,0) \end{array} \right. \tag{2}$$