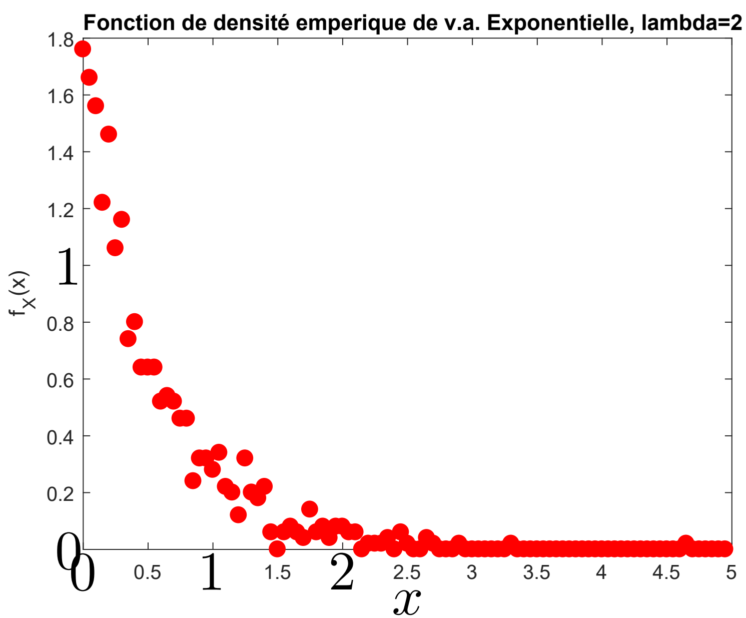
# Simulation Monte Carlo

## *TP 2: Simulation de Variables Aléatoires Continues.*

## *V.a. Exponentielle.*

Irina Kortchemski,     CYTECH



# Théorie

- Propriétés de fonction de repartitions.
  Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

dont l'inverse généralisé (appelé quantile) est défini par

$$\underline{F^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}.}$$

Pour appliquer la méthode d'inversion aux v.a. discretes !

• Alors

$$F^{-1}(U) \quad suit \quad la \quad loi \quad de \quad X.$$

Inversement, si $F_X$ est continue,
• alors

$$F_X(X) \quad suit \quad la \quad loi \quad U([0,1]).$$

Base de Méthode Invérion

# Théorie

- Propriétés de fonction de repartitions.
  Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

dont l'inverse généralisé (appelé quantile) est défini par

$$F^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}.$$

• Alors

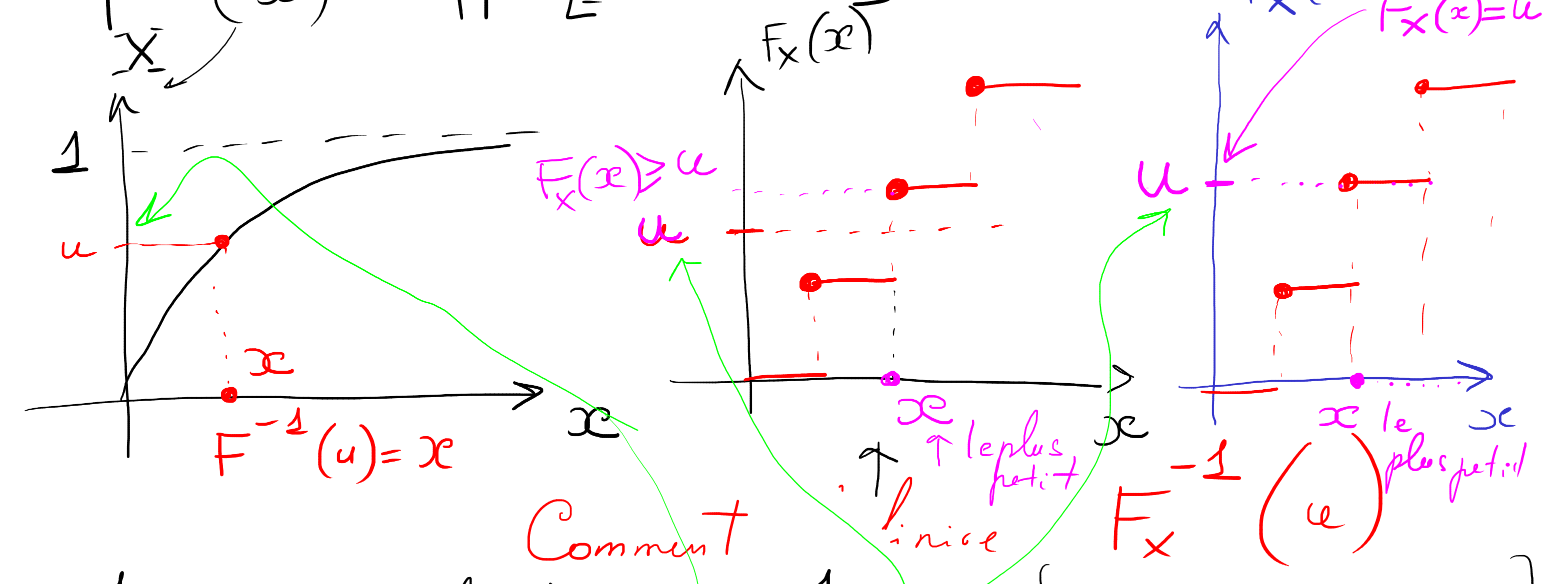
$$F^{-1}(U) \quad suit \quad la \quad loi \quad de \quad X.$$

Inversement, si $F_X$ est continue,
• alors

$$F_X(X) \quad suit \quad la \quad loi \quad U([0,1]).$$

Fonction de répartition d'une v. a $X$

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$




Comment

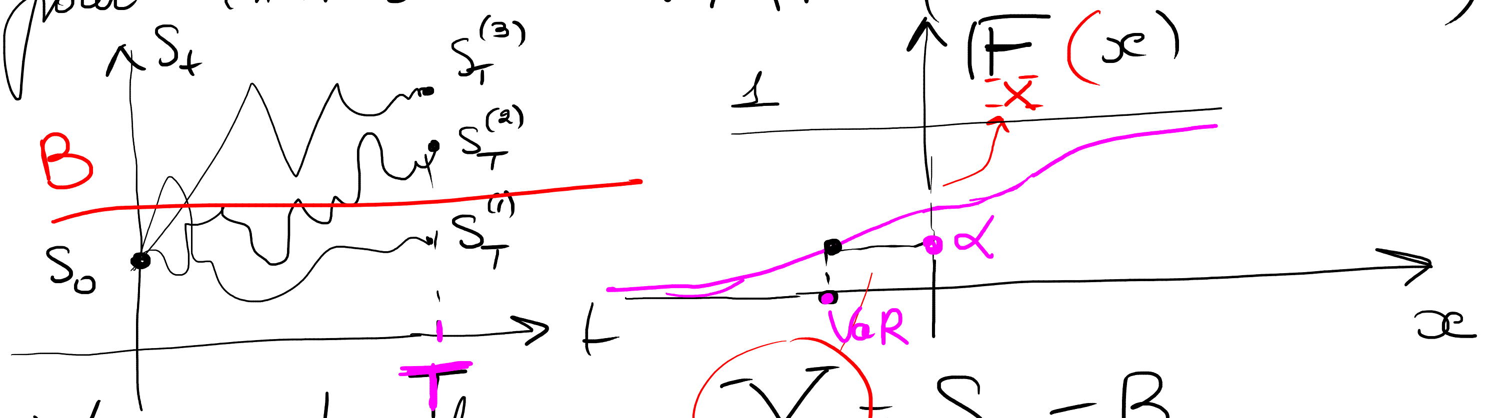
$F_X^{-1}$ généralisée : $F_X^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}$

Si $F_X(x)$ est continue :

$$F_X^{-1}(u) = \{x \text{ t.q } F_X(x) = u\}$$

Application en Finance.

$F_X^{-1}$ s'appelle quantile on l'utilise pour introduire VAR (value at risk)




Vous introduisez v.a $X = S_T - B$

Vous tracez la fonction de répartition impirique

$$\mathbb{P}[S_T - B < \text{VaR}] = \alpha$$

def. de $F_{S_T - B}(x)$

$$\mathbb{F}_{S_T - B}(VaR) = \alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{VaR = F^{-1}_{S_T - B}(\alpha)}$$

Nous sommes certain à la probabilité $(1-\alpha)$ que nous n'allons pas perdre plus que VaR euros sur T prochains jours

Théorème fondamental :

$$F^{-1}_{X}(u) = \{\inf x \,,\ F_X(x) \geq u\}$$

Soit $U$ une v. a uniforme :

- $\underbrace{F^{-1}_{X}(U)}_{\text{var. aléatoire !}}$ suit la loi de $X$
- $\underbrace{F_X(X)}_{\text{var. aléatore}}$ suit la loi de $U$.

Example : $X$ v. a exponentielle

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F_X(X) = 1 - e^{-\lambda X} = U$$

Pour exprimer $X$ on inverse la fonction de répartition

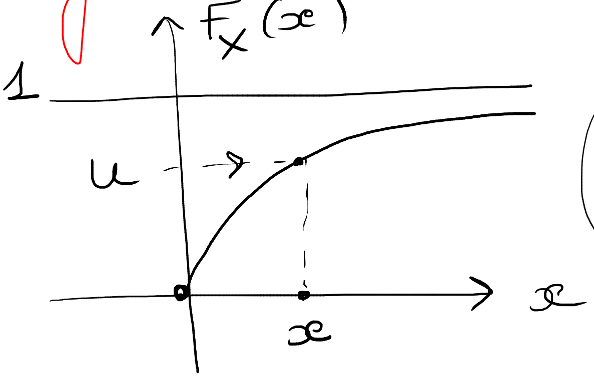
$$1 - e^{-\lambda x} = U \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - U$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$$

$-\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$ suit la loi de $X$

$$\boxed{X = F_X^{-1}(U)}$$

On va montrer le th. Fondamental pour une v.a $X$ continue.




$$F_X^{-1}(u) \overset{\text{def}}{=} \{ x \text{ t.q } F_X(x) = u \}$$

nombre nombre

- On va montrer que $F_X^{-1}(U)$ suit la loi de $X$. (v.a)

Soit $Z = F_X^{-1}(U)$

Quelle loi suit $Z$ ?

On va chercher sa fonction de répartition

$$F_Z(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}[Z \leq x] = \mathbb{P}[F_X^{-1}(U) \leq x]$$

$$= \begin{cases} \text{Si } a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \\ \text{si } F \text{ est croissante} \end{cases}$$

def $F^{-1} \Rightarrow FF^{-1} = 1$

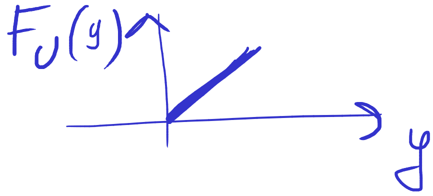
$$= \mathbb{P}[F_X(F_X^{-1}(U)) \leq F_X(x)]$$

croissante

$$= \mathbb{P}[U \leq \underbrace{F_X(x)}_{\text{"}y\text{"}}] = \underbrace{F_X(x)}_{\text{"}y\text{"}}$$

par def. de la fonction de répartition de $U$

$\mathbb{P}[U \leq y] = y$




Conclusion : $F_Z(x) = F_X(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Z et X suit la même loi}}$

• On va montrer que $F_X(X)$ suit la loi de $U$ (uniforme)

Soit $Z = F_X(X)$

v.a !

Quelle loi suit $Z$ ? Pour répondre

On construit sa fonction de répartition

$$F_Z(x) = \mathbb{P}[Z \leq x] = \mathbb{P}[F_X(X) \leq x]$$

$$= \mathbb{P}[F_X(F_X^{-1}(U)) \leq x] =$$

car nous avons démontré que $X$ suit la loi de $F_X^{-1}(U)$

def $F^{-1}$

$$= \mathbb{P}[U \leq x] = F_U(x)$$

Conclusion : $\mathbb{F}_Z(x) = \mathbb{F}_U(x)$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \mathbb{F}_X(X) \text{ suit la loi } U}$$

# Simulation de v.a. Exponentielle

- Nous souhaitons générer $X \sim Exp(\lambda)$.
  Dans ce cas,
  $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
  $1 - e^{-\lambda x} = u$

  alors que $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} ln(1-u)$. Donc on établie l'algorithme suivant:
- Algorithme 5 de simulation d'une seule variable aléatoire exponentielle
  - function[$X$ ]=V_A_Exponentielle($\lambda$)
  - ◦ Générer $U$ – suit la loi uniforme
  - ◦ Set $X = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - U)$ $\boxed{= -\frac{1}{\lambda} \ln(U)}$
  - endfunction

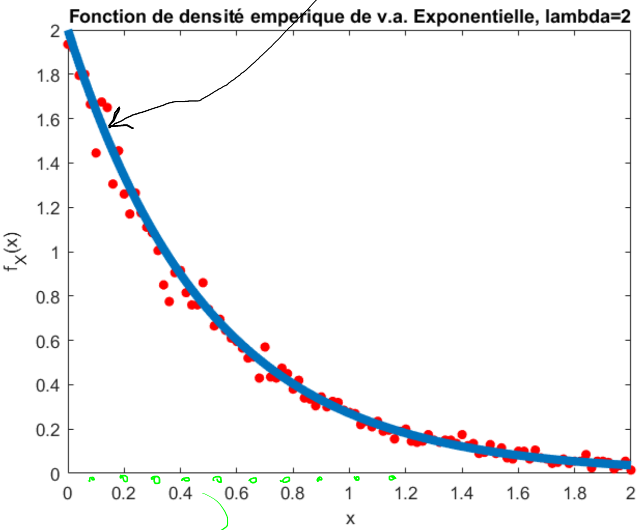
  $U$ – uniforme

  $1 - U$ – uniforme
- On applique l'Algorithme 5 $N_{mc}$ fois pour générer $N_{mc}$ réalisations de v.a. $X$

$Y$ suit la loi exponentielle

$$f_X(x_i) = \lambda e^{-\lambda x_i} \quad \text{théorique}$$

```
clear;
Nmc=1000000;
lambda=2;
a=0;
delta=0.02;

Y=Chaine_valeurs_Exp(lambda,Nmc);
x=densite_graphe(a,delta,Y);
hold on;
plot(x, lambda*exp(-lambda*x),'LineWidth',2)  % plot de fonction de densite théorique

function[Y]=V_A_Exponentielle(lambda)
  Y=-log(rand())/lambda;
end

function[Y]=Chaine_valeurs_Exp(lambda,Nmc)

    for n=1:Nmc
        Y(n)=V_A_Exponentielle(lambda);
    end
end

function[P,x]=fonction_densite(Y,a,delta)
N_x=100;
for i =1:N_x+1
x(i)=a+delta*(i-1);
cont=0;
  for n=1:length(Y)
if Y(n)<x(i)+delta  &&    Y(n)>=x(i)
    cont=cont+1;
end
  end
P(i)=cont/(length(Y)*delta);
end
end

function[x]=densite_graphe(a,delta,Y)
[P,x]=fonction_densite(Y,a,delta);
figure;
plot(x,P,'ro','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor', 'r' );
xlabel 'x'
ylabel 'f_X(x)'
title 'Fonction de densité emperique de v.a. Exponentielle, lambda=2'
end
```




$x_i$

$$\Delta x \cdot f_X(x_i) = \mathbb{P}\left[x_i < X \leq x_i + \Delta x\right]$$

$$f_X(x_i) = \frac{\mathbb{P}\left[x_i < X \leq x_i + \Delta x\right]}{\Delta x}$$

# Travail à faire pour v.a. Exponentielle

- Soient $\lambda = 2, N_{mc} = 10000$
  - Simuler la v.a. Exponentielle
  - Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
  - Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 5], \Delta = 0.05, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 5], \Delta = 0.5, N_x = 100$
- Soient $\lambda = 100, N_{mc} = 10000$
  - Simuler la v.a. Exponentielle
  - Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 0.07], \Delta = 0.0007, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 07], \Delta = 0.0007, N_x = 100$

# Simulation de v.a. Gamma$(\alpha, \beta)$

- Algorithme 6 de simulation d'une seule variable aléatoire $Gamma(\alpha, \beta)$

• On définit la v.a. Gamma $X$ par la somme de $n = \alpha$ v.a.indépendantes Exponentielles $Y_i$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

• function[X]=V_A_Gamma$(n, \beta)$
∘ Simuler $Y = -\frac{1}{\beta} ln(1-U)$
∘ $i = 1$
∘ While $i < n$ % on somme n v. a. exponentielles
∘ $Y = Y - \frac{1}{\beta} ln(1-U)$
∘ $i = i + 1$
∘ end
∘ Set $X = Y$
• endfunction

# Travail à faire pour v.a. Gamma

- Soient $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$

• Simuler la v.a. Gamma( $\alpha = 9, \beta = 2$)

• Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

• Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$

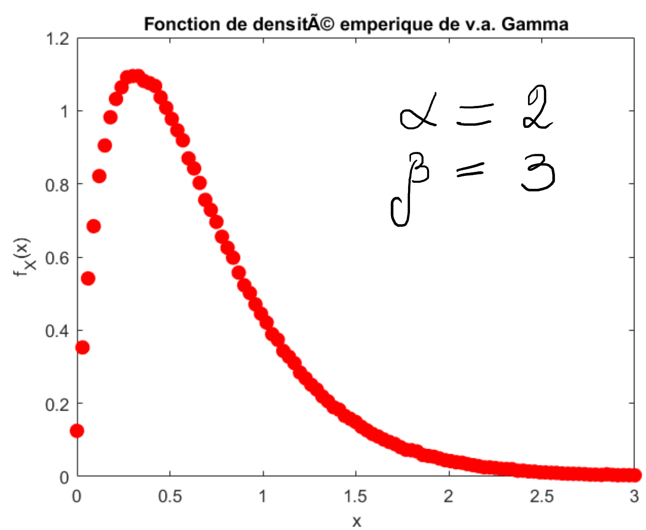
• Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$

• Simuler la v.a. Gamma( $\alpha = 2, \beta = 1/2$)

• Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques

• Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$

• Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$



# Simulation de loi de Pareto $(a, b)$

- $(a, b) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$
  La fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \mathbb{I}_{x \geq b}$$

Calculer $F_X(x)$

- Calculer le fonction de repartition

Inverser $F_X(x)$

- Inverser la fonction de repartition et simuler la variable de Pareto:

$F_X(x) = u$

$x = F_X^{-1}(u)$

- Algorithme de simulation la v.a. de Pareto
  - function[X]=$V\_A\_Pareto(a, b)$
  - $X = \frac{b}{U^{\frac{1}{a}}}$
  - endfunction

$F_X^{-1}(U)$ suit la loi $X$

Montrer !

# Travail à faire pour v.a. Pareto

- Soient $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$

  • Simuler la v.a. Pareto( $a = 9, b = 2$)

  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

  • Tracer sa fonction de repartition: $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité: $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Simuler la v.a. Pareto( $a = 2, b = 1$)

  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques

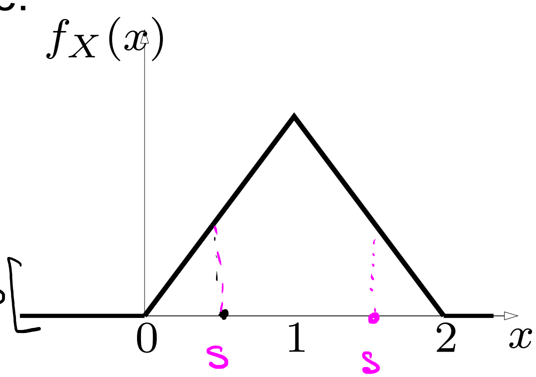
  • Tracer sa fonction de repartition: $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité: $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$

# Simulation de v. a. "Triangulaire"

- V. a. continue "Triangulaire" est définie par sa fonction de densité:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2-x, & 1 < x \leqslant 2 \\ 0, & x \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[ \end{cases}$$




Il faut vérifier $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

- Montrer que la fonction de repartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 < x \leqslant 1 \\ -(2-x)^2/2+1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

- Justifier la simulation de cette v.a.

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U}, & 0 \leqslant U < 1/2 \\ 2-\sqrt{2(1-U)}, & 1/2 < U \leqslant 1 \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 1$ $\quad \bullet\ F_X(x) = \int_0^x s\,ds = \frac{x^2}{2}$

$1 < x \leq 2$

$$\bullet\ F_X(x) = \int_0^x f_X(s)\,ds = \int_0^1 s\,ds + \int_1^x (2-s)\,ds$$

$$= -1 + 2x - \frac{x^2}{2} = -\frac{(2-x)^2}{2} + 1$$

carré parfait

On inverse la fonction de repartition

$\bullet\ 0 \leq x \leq 1$ $\quad F_X(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2u} = F^{-1}(u)$$

Quels U tirer ? $\quad 0 \leq \sqrt{2u} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq U \leq 1/2$

Conclusion $X$ suit la loi de $F^{-1}(U)$

$\Rightarrow$ $\boxed{X \text{ suit la loi de } \sqrt{2U},\ 0 \leq U \leq 1/2}$

$\bullet\ 1 < X \leq 2$ $\quad F_X(x) = 1 - \frac{(2-x)^2}{2} \Rightarrow u = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}$

$$-(2-x)^2 = 2(u-1) \Rightarrow (2-x)^2 = 2(1-u)$$

$$|2-x| = \sqrt{2(1-u)}$$

$1 < x \leq 2 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow 2-x = \sqrt{2(1-u)}$

$$\boxed{X = 2 - \sqrt{2(1-u)}}$$

Il faut verifier $\quad 1 < 2 - \sqrt{2(1-u)} \leq 2$

$$-1 < -\sqrt{2(1-u)} \leq 0$$

$$0 \leq \sqrt{2(1-u)} < 1$$

$$0 \leq 2(1-u) < 1 \Rightarrow 0 \leq 1-u < 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u \leq 1$$

Conclusion :

$$x = 2 - \sqrt{2(1-u)} = F_X^{-1}(u)$$

$$\boxed{X \text{ suit la loi de } 2-\sqrt{2(1-U)} \quad \frac{1}{2} \leq U \leq 1}$$

```
U = rand()
if U < 1/2
    X = sqrt(2U)
else
    X = 2 - sqrt(2(1-U))
end
```

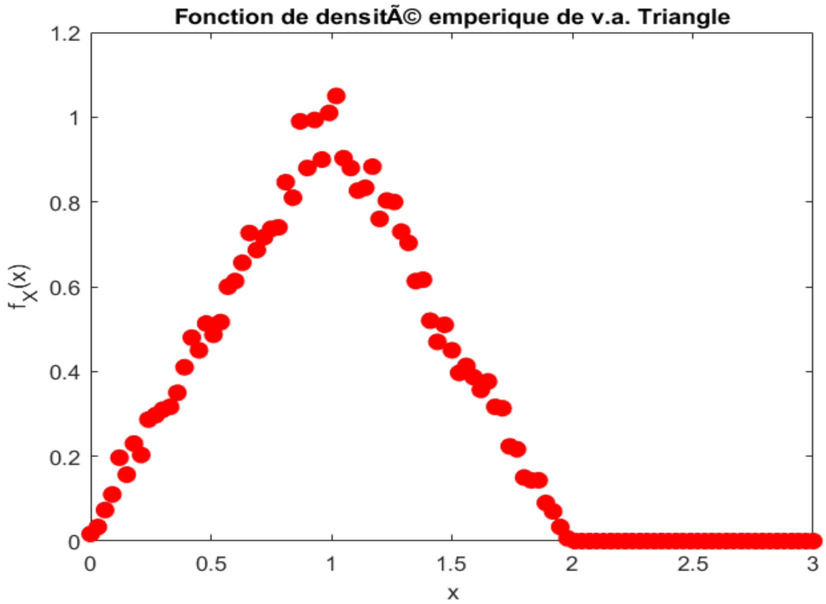
vous simulez une seule valeur de X.

1) Vous calculez $\mathbb{E}[X]_{\text{empirique}}$

Vous la comparez avec $\mathbb{E}[X]_{th}$ (à calculer)

2) Avec variance

3) Vous construisez la fonction de densité empirique et la fonction de répartition empirique



$$\underset{\text{théorique}}{\mathbb{E}[X]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x \cdot x \, dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx$$

$$\underset{\text{théorique}}{\mathrm{Var}[X]} = \mathbb{E}[X^2] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot f_X(x)\,dx + \int_1^2 x^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

$$\underset{\text{empirique}}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{N_{me}} \sum_{i=1}^{N_{me}} X_i$$

# Th. de Grand Nombre

$$\mathbb{E}[X] \xrightarrow[N_{mc} \to \infty]{} \mathbb{E}_{th}[X]$$

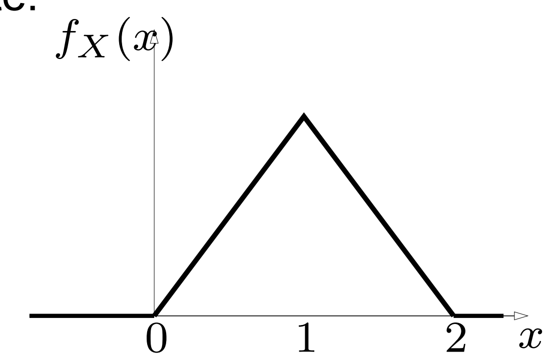
empirique — théorique

↓

par simulation MC

# Simulation de v. a. "Triangulaire"

- V. a. continue "Triangulaire" est définie par sa fonction de densité:




$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

- Montrer que la fonction de repartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 < x \leqslant 1 \\ -(2-x)^2/2 + 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

- Justifier la simulation de cette v.a.

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U}, & 0 \leqslant U < 1/2 \\ 2 - \sqrt{2(1-U)}, & 1/2 < U \leqslant 1 \end{cases}$$