Markov Chain Monte Carlo

TP 5: Méthode de Monte Carlo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\beta X_i}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-(X_i)^2/2}$$

Théorie

- Théorème 3
  - Y est la variable aléatoire à valeurs dans R avec la fonction de densité g_Y
  - X est la variable aléatoire à valeurs dans R avec la fonction de densité f_X
  - Il existe une constante $C(\geq 1)$ satisfaisant

$$f_X(x) \leq C \cdot g_Y(x) \quad x \in \mathbb{D}(X) \cap \mathbb{D}(Y)$$

  - U une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1] indépendante de Y .
  - Alors la loi de Y sachant $\{U \cdot C \cdot g_Y(Y) < f_X(Y)\}$ est la loi de X.
- Idées de Méthode de Rejet
  - On sait simuler la v.a. $Y \Rightarrow Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{mc}\}$
  - On connaît la fonction de densité $g_Y(y)$ de v.a. Y
  - On connaît la fonction de densité $f_X(x)$ de v.a. X
  - On utilise quelques réalisations de Y_i pour former X.

Simulation de la loi Beta (α, β)

- Une variable aléatoire de loi Beta $B(\alpha, \beta)$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) a pour densité

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} 1_{0 \leq x \leq 1}$$

- On utilise la méthode de rejet avec $Y = U([0,1])$ (loi uniforme) dont la fonction de densité est égale $g_Y(x) = 1$.
- La constante de rejet vaut

$$C = sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

- En dérivant la fonction $f_X(x)$ pour trouver le point de max x_0 on montre

$$x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

et

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x_0^{\alpha-1}(1-x_0)^{\beta-1}.$$

Simulation de la loi Beta (α, β)

- On forme le vecteur X sans les 'zeros' par l'introduction d'un nouveau indice k.

• function[X]=Rejet_Beta(α, β)
◦ Calculer $x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$,
◦ Calculer C=Beta(x_0, α, β)
◦ $k = 1;$
◦ for $n = 1 : N_{mc}$
◦ Y=rand();
◦ Simuler $U[0, 1]$ indépendant de Y
◦ Simuler f=Beta(Y, α, β);
◦ if $U \leq \frac{f}{C}$
◦ $X(k) = Y; \quad k = k + 1;$
◦ endif
◦ endfor
• endfunction

• function[f]=Beta(x, α, β)
$f = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x.^{(\alpha-1)} . \cdot (1-x).^{(\beta-1)}$
• endfunction

Calcules des Intégrales I

- Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad \beta = 2$
  - function$[I_n]$=IntegraleI(n)

    ∘ Simuler n fois par l'algorithme de Box-Muller v.a. Normale $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$

    ∘ Calculer $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\beta X_i}$
  - endfunction
- On étudie la convergence de I_n
  - function[ ]=Convergence( )

    ∘ for $n = 1 : N_{mc}$

    ∘ valeurs(n)= IntegraleI(n)

    ∘ endfor

    ∘ plot(valeurs)
  - endfunction

Calcules des Intégrales II

- Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta x} \frac{e^{-x^2/2}}{\beta\sqrt{2\pi}} dx, \quad \beta = 2$
  - function$[I_n]$=IntegraleII(n)
  - ◦ Simuler n fois v.a. exponentielle $X_i \sim$ Exp$(\lambda = 2)$
  - ◦ Calculer $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(X_i)^2/2}}{\beta\sqrt{2\pi}}$
  - endfunction
- On étudie la convergence de I_n
  - function[ ]=Convergence2( )
  - ◦ for $n = 1 : N_{mc}$
  - ◦ valeurs(n)= IntegraleII(n)
  - ◦ endfor
  - ◦ plot(valeurs)
  - endfunction

Simulation 1 de v.a. Cauchy

- Simulation d'un échantillon de v.a. Cauchy à l'aide de deux v.a. Normales Y et Y.

  function[Z]=Cauchy( )

  ◦ for $n = 1 : N_{mc}$

  ◦ [X, Y]= Box_Muller()

  ◦ $Z(n) = \frac{X}{Y}$

  ◦ endfor

  - endfunction

Travail à faire pour v.a. Cauchy

- Soient $N_{mc} = 10000$
- Tracer les fonctions de repartition de X:

$[a, b] = [-5, 5], \Delta = 0.1, N_x = 100$

- Tracer les fonctions de densité de X :

$[a, b] = [-5, 5], \Delta = 0.1, N_x = 100$