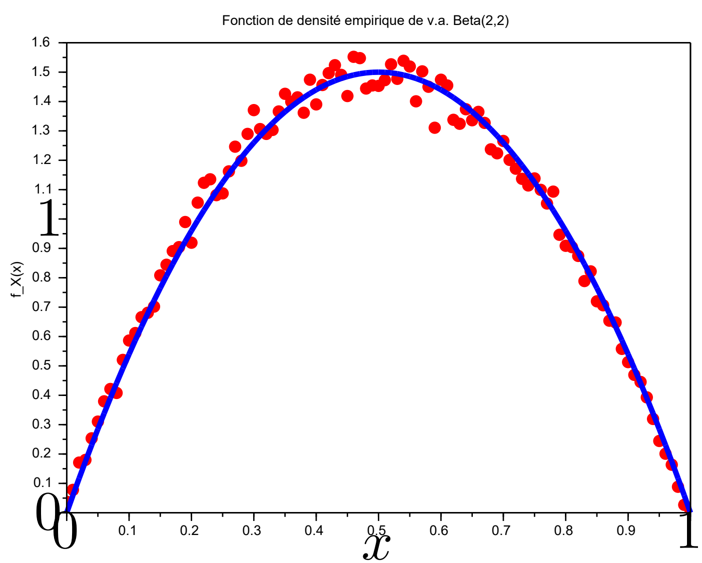
# Simulation Monte Carlo

## *TP 4: Méthode de Rejet.*

Irina Kortchemski, CY Tech



# Théorie

- Idées de Méthode de Rejet
  - On sait simuler la v.a. $Y \Rightarrow Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_{mc}\}$
  - On connaît la fonction de densité $g_Y(y)$ de v.a. $Y$
  - On connaît la fonction de densité $f_X(x)$ de v.a. $X$
  - On utilise quelques réalisations de $Y_i$ pour former $X$.

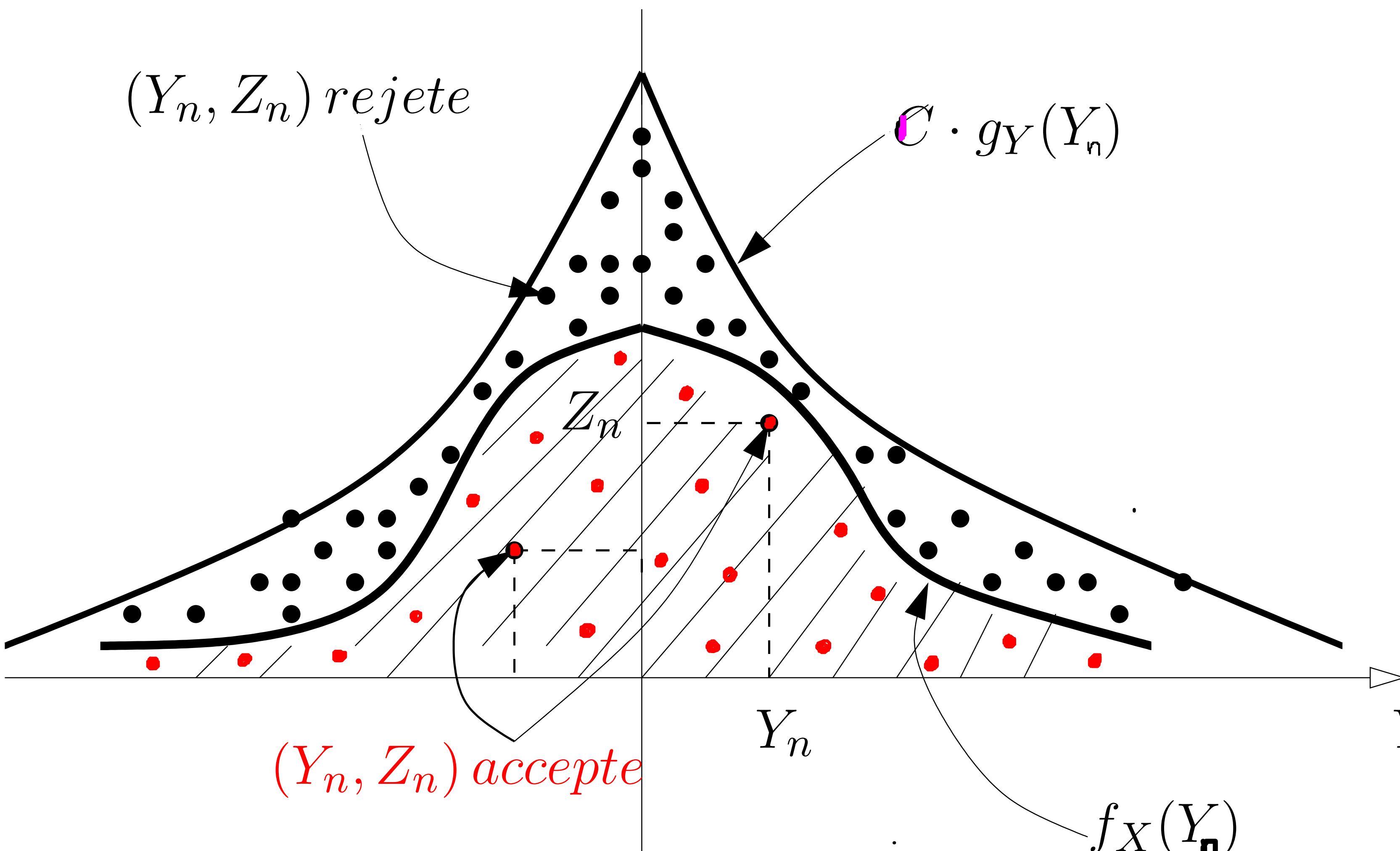
- Théorème 3
  - $X$ est la variable aléatoire à valeurs dans $R$ avec la fonction de densité $f_X$
  - $Y$ est la variable aléatoire à valeurs dans $R$ avec la fonction de densité $g_Y$
  - Il existe une constante $C(\geq 1)$ satisfaisant

$$C \cdot g_Y(x) \geq f_X(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

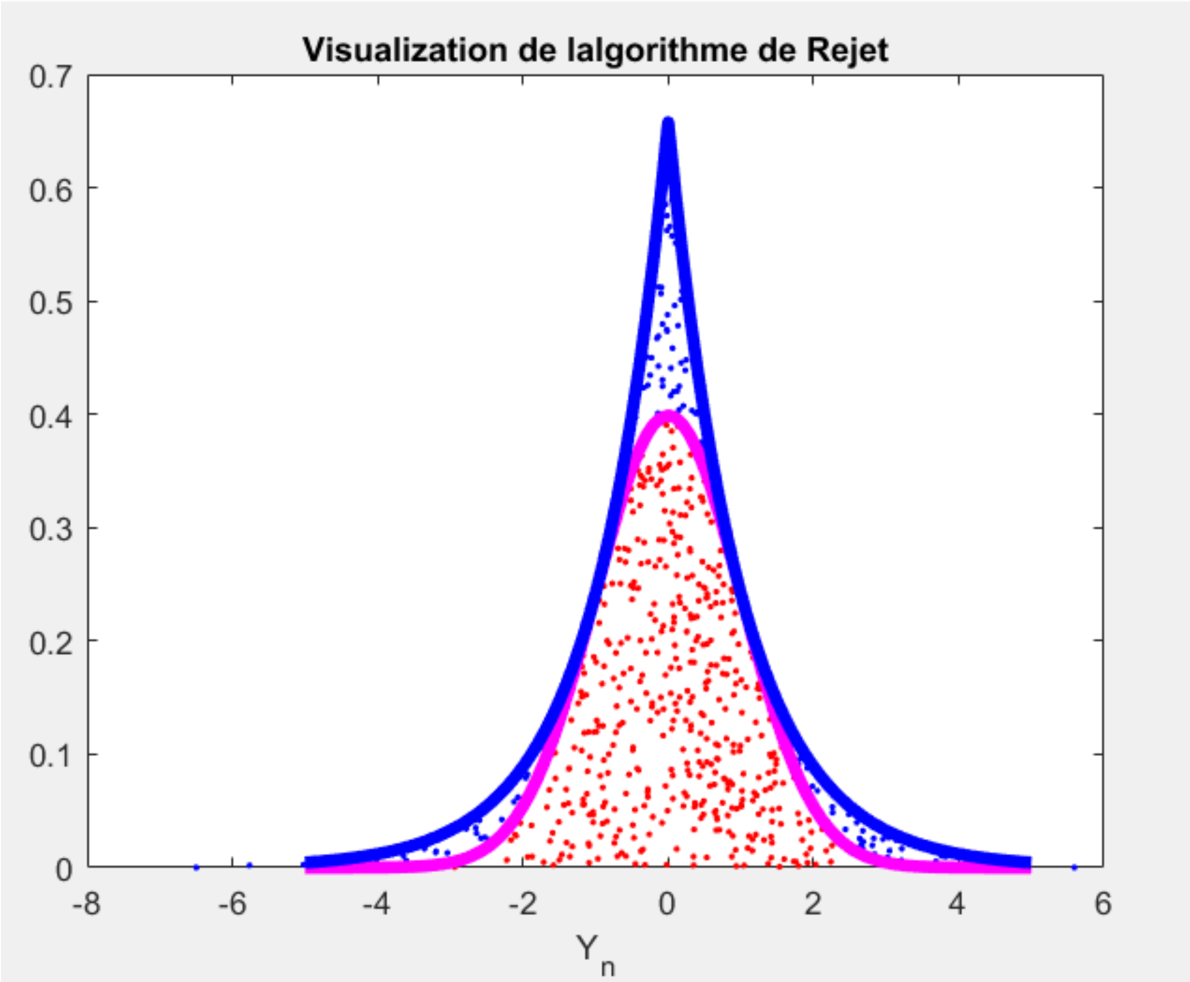
  - $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur [0, 1] indépendante de $Y$ .
  - Alors la loi de Y sachant $\{U < \frac{f_X(Y)}{C \cdot g_Y(Y)}\}$ est la loi de $X$.

# Visualisation de Rejet

$$Z_n = U_n \cdot C \cdot g_Y(Y_n) \leq C \cdot g_Y(Y_n)$$




$Z_n = U_n \cdot C \cdot g_Y(Y_n) \leq f_X(Y_n) \Rightarrow$ on accepte $Y_n$ et $X = Y_n$




```
clear;
k=0; C=sqrt(2*exp(1)/pi); Nmc=100; a=-5; delta=0.1; N_x=100;
for i =1:N_x+1
x(i)=a+delta*(i-1);
end
figure
plot(x, exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi),'m','LineWidth',4)  % plot de fonction de densite theorique
hold on
plot(x, C*exp(-abs(x))/2,'b','LineWidth',4)  % plot de fonction de densite Laplace
hold on;
for n=1:Nmc

    U_1=rand();
    if U_1<1/2
    Y=log(rand());
    else
    Y=-log(rand());
    end


 f_X=exp(-Y^2/2)/sqrt(2*pi);
 g_Y=exp(-abs(Y))/2;
 U_2=rand();
    if U_2 <= f_X/(C*g_Y)
        Z=U_2*C*g_Y;
        plot(Y,Z,'.r','LineWidth',6)
        hold on;
    else
        Z=U_2*C*g_Y;
        plot(Y,Z,'.b','LineWidth',6)
        hold on;
    end
  xlabel 'Y_n'
  title  'Visualization de lalgorithme de Rejet'
end
```

# Théorie

- Il faut montrer que la fonction de densité de v.a. $X$ est bien $f_X(x)$ :

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx.$$

Plus précisément
en posant l'évènement

$$A = \{U \cdot C \cdot g_Y(Y) < f_X(Y)\}$$

il faut montrer que

$$\mathbb{P}(Y \leq x | A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx.$$

# Théorie

- En posant l'évènement

$$A = \{U \cdot C \cdot g_Y(Y) < f_X(Y)\}$$

il faut montrer que

$$\mathbb{P}(Y \leq x | A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) dx.$$

$\bullet$ Partons de la définition de la probabilité conditionnelle:

$$\mathbb{P}(Y \leq x | A) = \frac{\mathbb{P}((Y \in A) \bigcap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

# Demonstration

- $$A = \{U < f_X(Y)/(C \cdot g_Y(Y)\}$$

$$\mathbb{P}((Y \leq x) \bigcap A) =$$

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{(y \leq x),\ u < f_X(y)/(C \cdot g_Y(y))\}} \quad f_U(u) \cdot g_Y(y) du dy =$$

$$\int_0^{\frac{f_X(Y)}{C \cdot g_Y(Y)}} \int_{-\infty}^{x} g_Y(y) dy du =$$

- On utilise l'independence des variables aléatoires $U$ et $Y$

$$f_{U,Y}(u,y) = f_U(u) \cdot g_Y(y)$$

# Demonstration

- $$\int_{-\infty}^{x} g_Y(y)dy \int_0^{\frac{f_X(y)}{Cg_Y(y)}} du = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_X(y)}{Cg_Y(y)} g_Y(y)dy =$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{C} f_X(y)dy = \frac{F_X(x)}{C}.$$

# Demonstration

Si $(x = +\infty)$ on peut calculer en répétant le raisonnement précédant que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(U < \frac{f_X(Y)}{Cg_Y(Y)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{C} f_X(y)dy = \frac{1}{C}$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y \leq x|A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = F_X(x)$$

ce qu'il fallait démontrer.

# Algorithme de Rejet

- Quelles realisations de $Y$ choisir, les quelles rejeter?
  - function[X]=$Reject()$
  - ∘ $k = 1$;
  - ∘ for n=1: $N_{mc}$
  - ∘ Simuler v.a. $Y$
  - ∘ Simuler $U[0, 1]$
  - ∘ if $U \leq \frac{f_X(Y)}{C \cdot g_Y(Y)}$
  - ∘ $X(k) = Y$; $\quad k = k + 1;$
  - ∘ endif
  - ∘ endfor
  - endfunction
- La constante $C$ vérifie la condition:

$$\forall x \in [a, b], \quad \frac{f_X(x)}{g_Y(x)} \leq C$$

# Simulation de v.a. Normale par Rejet

- On veut simuler v.a. Normale de densité $f_X(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
- On sait simuler le loi de Laplace de densité $g_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$
- On calcule la constante $C = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$:

$$\frac{f_X(y)}{g_Y(y)} \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

# Simulation de v.a. Laplace

- V. a. Laplace est définie par sa fonction de densité ou de repartition:

$$g_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y}, & y \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{y}, & y < 0 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-y} & y \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{y} & y < 0 \end{cases}$$

- Inversion de $F_Y(y)$ :

$$\begin{cases} u < 1/2 \\ y = ln(2u) \end{cases} \qquad \begin{cases} u \geq 1/2 \\ y = -ln(2(1-u)) \end{cases}$$

# Simulation de v.a. Laplace

- Simulation par l'inversion:

$$\begin{cases} U = rand() \\ if \quad U < 1/2 \\ Y = ln(2U) \\ else \\ Y = -ln(2(1-U)) \end{cases}$$

- On remarque que $2U \in [0, 1]$ et $Y = ln(2U)$ est une v.a. exponentielle multipliée par (-1), on remarque aussi que $2(1-U) \in [0, 1], \quad Y = -ln(2(1-U))$ suit la loi exponentielle. Donc on peut simuler $Y$ par l'algorithme suivant

$$\begin{cases} if \quad rand() < 1/2 \\ Y = -V.A.exponentielle \quad (Y = ln(rand()) \\ else \\ Y = V.A.exponetielle \quad (Y = -ln(rand()) \end{cases}$$

# Simulation 1 de v.a. Normale par Rejet

- Simulation d'un échantillon de v.a. Normale $X \in \mathbb{R}$ à l'aide de v.a. Laplace $Y$.
  - function[X ]=Rejet_Normale_1(  )
  - ○ $C = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$
  - ○ $k = 1;$
  - ○ for n=1: $N_{mc}$
  - ○ $U$=rand()
  - ○ if $U < 1/2$

    $Y = -ln(2U)$

    else $Y = -ln(2(1 - U))$
  - ○ endif
  - ○ Simuler U[0,1] (indépendante)
  - ○ $f = (\frac{e^{-Y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}); \quad g = \frac{1}{2}e^{-|Y|}$
  - ○ if $U \leq \frac{f}{(C \cdot g)}$
  - ○ $X(k) = Y; \quad k = k + 1;$
  - ○ endif
  - ○ endfor
  - endfunction

# Simulation 2 de v.a. Normale par Rejet

- Simulation d'un échantillon de v.a. Normale $X \in \mathbb{R}$ à l'aide de v.a. Laplace $Y$.

• function[X ]=Rejet_Normale_2(  )

∘ $C = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$

∘ $k = 1;$

∘ for n=1: $N_{mc}$

∘ if rand() <1/2

$Y$= - V_A_Exp(1)

else $Y$= V_A_Exp(1)

∘ endif

∘ Simuler U[0,1] (indépendante)

∘ $f = (\frac{e^{-Y^2/2}}{\sqrt{2\pi}});\quad g = \frac{1}{2}e^{-|Y|}$

∘ if $U \leq \frac{f}{(C \cdot g)}$

∘ $X(k) = Y; \quad k = k + 1;$

∘ endif

∘ endfor

• endfunction

# Travail à faire pour v.a. Normale

- Montrer que $C = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$

  Pour cela considerer deux $y \geq 0$ et $y < 0$.

  Pour $y \geq 0$ introduire la fonction

$$h(y) = \frac{f_X(y)}{g_Y(y)} = (\frac{2e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}})/(e^{-y}),$$

  deriver cette fonction par rapport à $y$, trouver un point de max et montrer que $C = h(y_{max})$.

- Verifier les simulations
  - Soient $N_{mc} = 10000$
  - Tracer les fonctions de repartition de $X$: $[a, b] = [-5, 5], \Delta = 0.1, N_x = 100$
  - Tracer les fonctions de densité de $X$ : $[a, b] = [-5, 5], \Delta = 0.1, N_x = 100$

# Simulation de la loi Beta $(\alpha, \beta)$

- Une variable aléatoire de loi Beta $B(\alpha,\beta)$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) a pour densité

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} 1_{0 \le x \le 1}$$

- On utilise la méthode de rejet avec $Y = U([0,1])$ (loi uniforme) dont la fonction de densité est egale $g_Y(x) = 1$.
- La constante de rejet vaut

$$C = sup_{0 \le x \le 1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

- En dérivant la fonction $f_X(x)$ pour trouver le point de max $x_0$ on montre

$$x_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}$$

et

$$C = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x_0^{\alpha-1}(1-x_0)^{\beta-1}.$$

# Simulation de la loi Beta $(\alpha, \beta)$

- On forme le vecteur $X$ sans les 'zeros' par l'introduction d'un nouveau indice $k$.

• function[X ]=Rejet_Beta$(\alpha, \beta)$

∘ Calculer $x_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$,

∘ Calculer $C$=Beta$(x_0, \alpha, \beta)$

∘ $k = 1;$

∘ for $n = 1 : N_{mc}$

∘ $Y$=rand();

∘ Simuler $U[0, 1]$ indépendant de $Y$

∘ Simuler $f$=Beta$(Y, \alpha, \beta)$;

∘ if $U \leq \frac{f}{C}$

∘ $X(k) = Y; \quad k = k + 1;$

∘ endif

∘ endfor

• endfunction

• function[f ]=Beta$(x, \alpha, \beta)$

$f = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x.^{(\alpha-1)}. \cdot (1-x).^{(\beta-1)}$

• endfunction

# Travail à faire pour v.a. Beta $(\alpha, \beta)$

- Simuler la v.a. Beta $(2, 2)$, Beta $(2, 5)$, Beta $(1.5, 3.5)$,
- Soient $N_{mc} = 10000$
- Tracer les fonctions de repartition de $X$:
  $[a, b] = [0, 1], \Delta = 0.01, N_x = 100$
- Tracer les fonctions de densité de $X$ :
  $[a, b] = [0, 1], \Delta = 0.01, N_x = 100$
- Vous confirmez que v.a. $X \in [0, 1]$