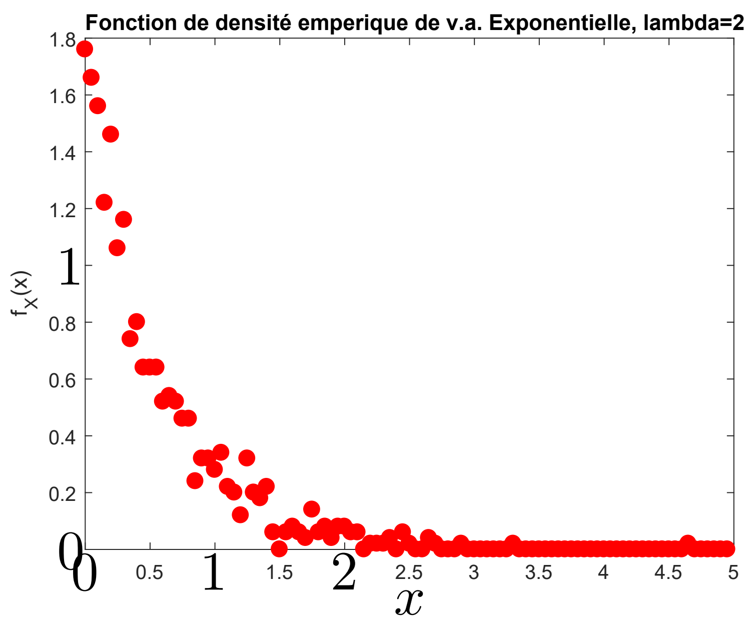
Simulation Monte Carlo

TP 2: Simulation de Variables Aléatoires Continues.

V.a. Exponentielle.

Irina Kortchemski, CYTECH



Théorie

- Propriétés de fonction de repartitions.
  Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

dont l'inverse généralisé (appelé quantile) est défini par

$$F^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}.$$

• Alors

$$F^{-1}(U) \quad suit \quad la \quad loi \quad de \quad X.$$

Inversement, si F_X est continue,
• alors

$$F_X(X) \quad suit \quad la \quad loi \quad U([0,1]).$$

Simulation de v.a. Exponentielle

- Nous souhaitons générer $X \sim Exp(\lambda)$.
  Dans ce cas,
  $$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$
  alors que $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} ln(1-u)$. Donc on établie l'algorithme suivant:
- Algorithme 5 de simulation d'une seule variable aléatoire exponentielle
  • function[X]=V_A_Exponentielle(λ)
  ◦ Générer U
  ◦ Set $X = -\frac{1}{\lambda} ln(1-U)$
  • endfunction
- On applique l'Algorithme 5 N_{mc} fois pour générer N_{mc} réalisations de v.a. X

Travail à faire pour v.a. Exponentielle

- Soient $\lambda = 2, N_{mc} = 10000$

  • Simuler la v.a. Exponentielle

  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  • Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 5], \Delta = 0.05, N_x = 100$

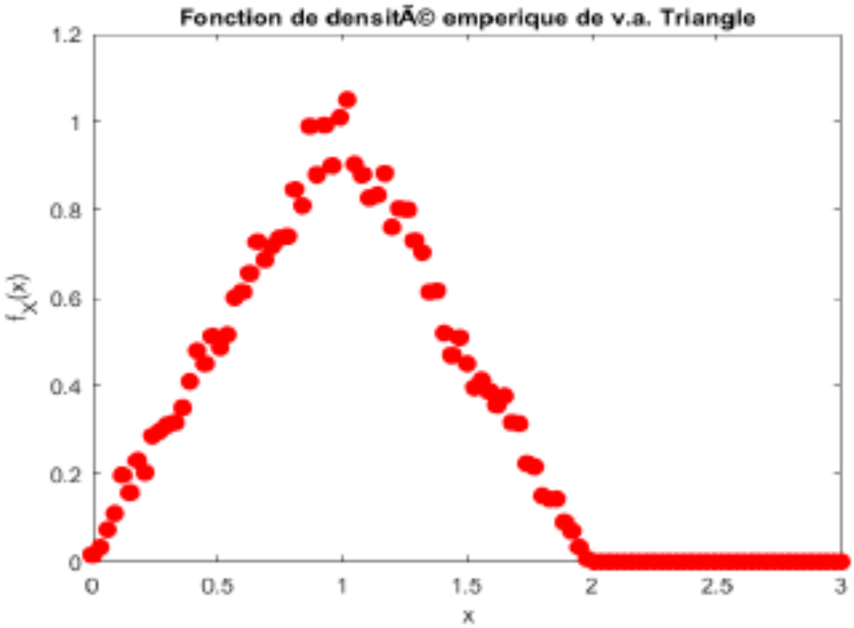
  • Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 5], \Delta = 0.5, N_x = 100$

- Soient $\lambda = 100, N_{mc} = 10000$

  • Simuler la v.a. Exponentielle

  • Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 0.07], \Delta = 0.0007, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 07], \Delta = 0.0007, N_x = 100$



c_i $= f_Y(x_i)$

:tion de densite théorique

rand())/λ

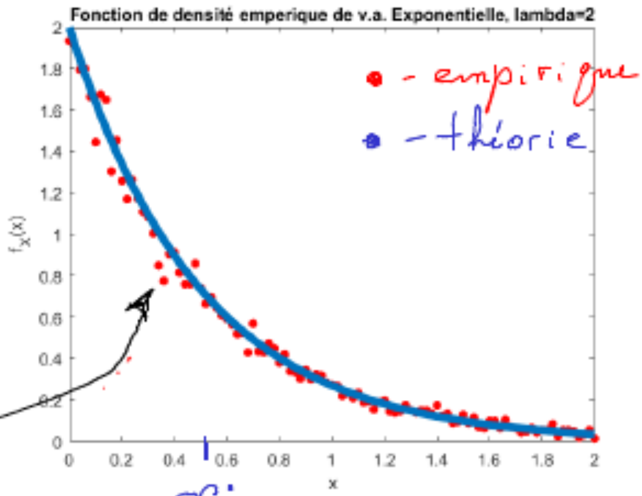
```
    for n=1:Nmc
        Y(n)=V_A_Exponentielle(lambda);
    end
end

function[P,x]=fonction_densite(Y,a,delta)
N_x=100;
for i =1:N_x+1
x(i)=a+delta*(i-1);
cont=0;
  for n=1:length(Y)
if Y(n)<x(i)+delta  &&   Y(n)>=x(i)
    cont=cont+1;
end
  end
P(i)=cont/(length(Y)*delta);
end
end

function[x]=densite_graphe(a,delta,Y)
[P,x]=fonction_densite(Y,a,delta);
figure;
plot(x,P,'ro','MarkerSize',5,'MarkerFaceColor', 'r' );
xlabel 'x'
ylabel 'f_X(x)'
title 'Fonction de densité emperique de v.a. Exponentielle, lambda=2'
end
```

densite de probabilité

$f_Y(x_i)$



x_i

Y v.a exponentielle

Discussion $\mathbb{F}_Y(x) = \int_0^x f_Y(s)\,ds =$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda s}\,ds = -e^{-\lambda s}\Big|_0^x = -\left(e^{-\lambda x} - 1\right) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Simulation de v.a. Gamma(α, β)

Algorithme 6 de simulation d'une seule variable aléatoire $Gamma(\alpha, \beta)$

• On définit la v.a. Gamma X par la somme de $n = \alpha$ v.a.indépendantes Exponentielles Y_i:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

• function[X]=V_A_Gamma(n, β)
∘ Simuler $Y = -\frac{1}{\beta} ln(1 - U)$
∘ $i = 1$
∘ While $i < n$ % on somme n v. a. exponentielles
∘ $Y = Y - \frac{1}{\beta} ln(1 - U)$
∘ $i = i + 1$
∘ end
∘ Set $X = Y$
• endfunction

Travail à faire pour v.a. Gamma

- Soient $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$
  • Simuler la v.a. Gamma($\alpha = 9, \beta = 2$)
  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
  • Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
  • Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
  • Simuler la v.a. Gamma($\alpha = 2, \beta = 1/2$)
  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques
  • Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$
  • Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1.5, N_x = 100$

Simulation de loi de Pareto (a, b)

- $(a, b) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$
  La fonction de densité est
  $$f_X(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \mathbb{I}_{x \geq b}$$
- Calculer le fonction de repartition
- Inverser la fonction de repartition et simuler la variable de Pareto:
- Algorithme de simulation la v.a. de Pareto
  - function[X]=$V\_A\_Pareto(a, b)$
  - ○ $X = \frac{b}{U^{\frac{1}{a}}}$
  - endfunction

Travail à faire pour v.a. Pareto

- Soient $\alpha = 9, \beta = 2, N_{mc} = 10000$

  • Simuler la v.a. Pareto($a = 9, b = 2$)

  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

  • Tracer sa fonction de repartition: $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité: $[a_0, b_0] = [2, 12], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Simuler la v.a. Pareto($a = 2, b = 1$)

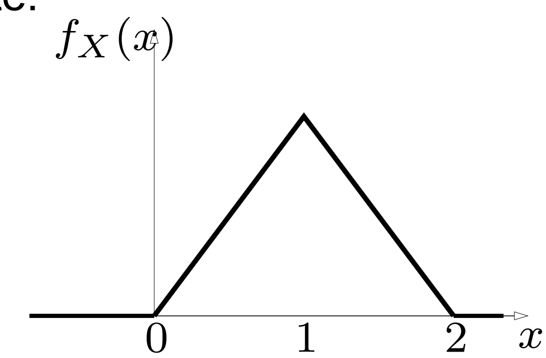
  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques

  • Tracer sa fonction de repartition: $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité: $[a_0, b_0] = [1, 11], \Delta = 0.1, N_x = 100$

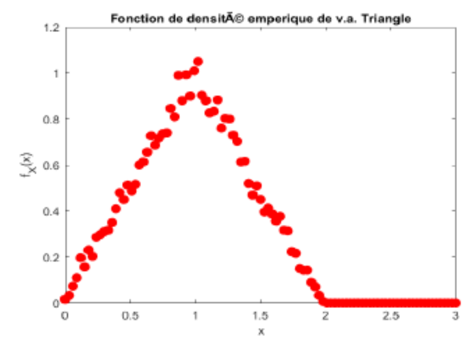
Simulation de v. a. "Triangulaire"

- V. a. continue "Triangulaire" est définie par sa fonction de densité:



$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

- Montrer que la fonction de repartition est



$$F_X(x) = \begin{cases} x^2/2, & 0 < x \leqslant 1 \\ -(2-x)^2/2 + 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

- Justifier la simulation de cette v.a.

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U}, & 0 \leqslant U < 1/2 \\ 2 - \sqrt{2(1-U)}, & 1/2 < U \leqslant 1 \end{cases}$$