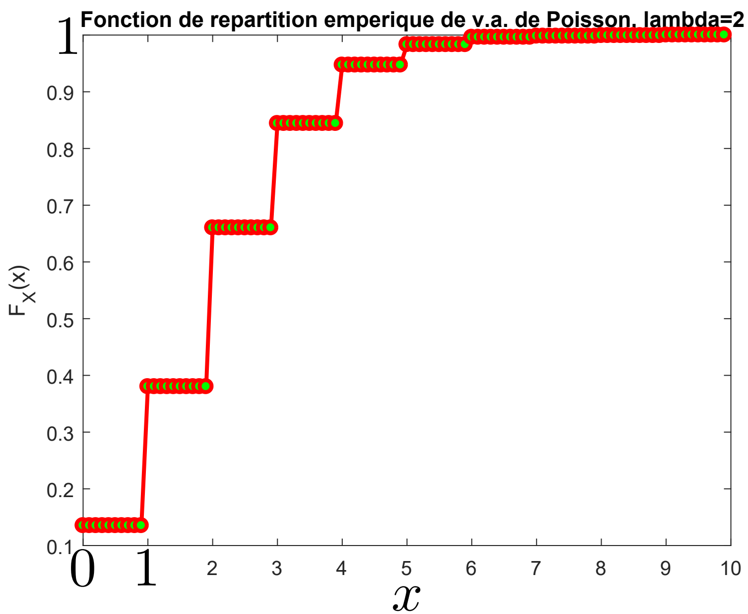
Simulation Monte Carlo

TP 1: Simulation de variables aléatoires discrètes

Irina Kortchemski, CYTECH



29/01/21

1 heure du cours
30 min de programmation

On va simuler : Var. aléat. discrètes.

- Bernoulli, Poisson ..., Var. aléatoires continues : Normale, Exponentielles
- Methods diff
- Applications : Calcul des integrales.

Simuler une loi de probabilité ≡ Simuler une var. aléatoire ≡ Générer une chaîne de valeurs de v. a

V. a de Bernoulli $X = \begin{cases} 1 & \text{avec proba } p_1 = 1/3 \\ 0 & \text{avec proba } p_2 = 2/3 \end{cases}$

Vous avez simulé Bernoulli =

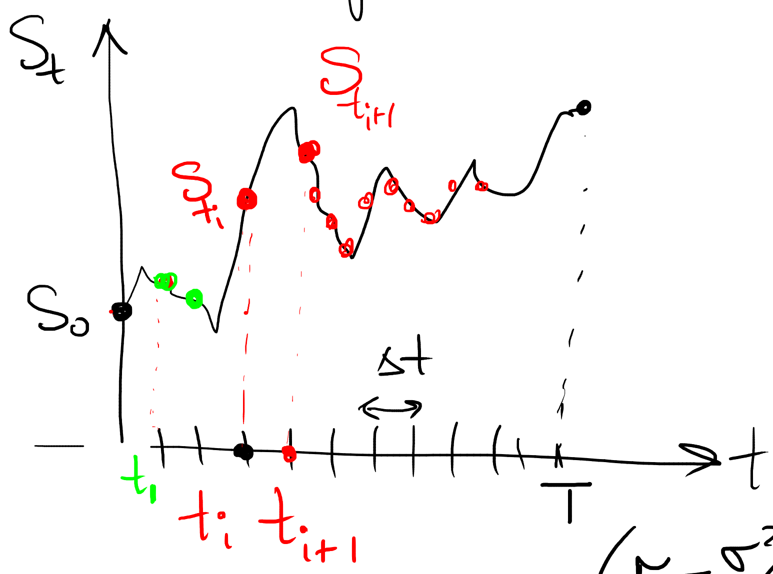
Vous possedez $\underbrace{\{1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\}}_{N_{me} = 10}$

- Comment utiliser les simulations MC en Finance et Assurance

1. Exemple 1.

Modèle de Black et Scholes

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$



Mouvement Brownien

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} \cdot e^{\left(r - \sigma^2/2\right)\Delta t + \sigma W_{\Delta t}}$$

ici les simulations arrivent!

suit la loi normale $N(0, \Delta t)$

Si vous savez simuler la loi Normale vous pouvez simuler des trajectoires de S_t

$N_{me} = 10^6$

i est un numéro d'un scénario

$$\mathbb{E}[S_T] = \frac{1}{N_{me}} \sum_{i=1}^{N_{me}} S_T^{(i)}$$

espérance empirique

Théorème de Grands Nombres :

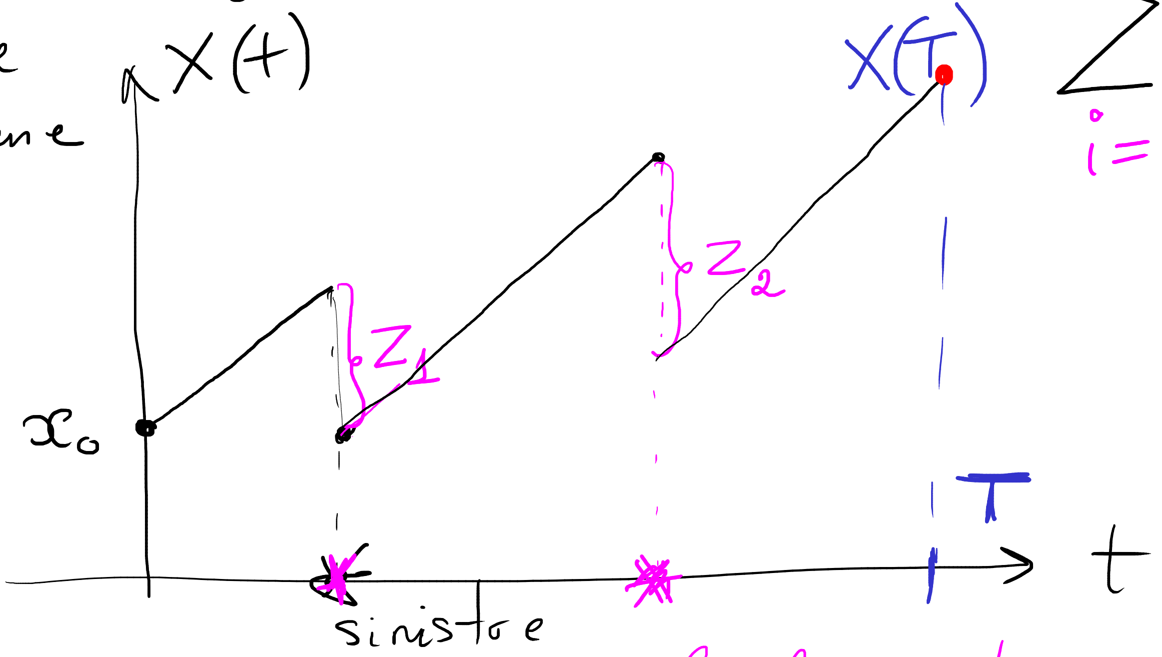
$$\frac{1}{N_{me}} \sum_{i=1}^{N_{me}} S_T^{(i)} \xrightarrow[N_{me}\to\infty]{} \underbrace{\mathbb{E}[S_T]}$$

espérance théorique que vous ne connaissez pas et vous calculez cette espérance par MC.

Example 2. Assurance

Théorie de la Ruine

$$\underbrace{X(t)}_{\text{richesse d'une compagnie d'assurance}} = \underbrace{x_0}_{\text{réserve initiale}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cotisations}}}{c} \cdot t - \underbrace{(Z_1 + Z_2 + \dots)}_{\sum_{i=1}^{N_t} Z_i}$$



Z - v.a qui modélise le volume d'un sinistre (suit la loi Gamma)

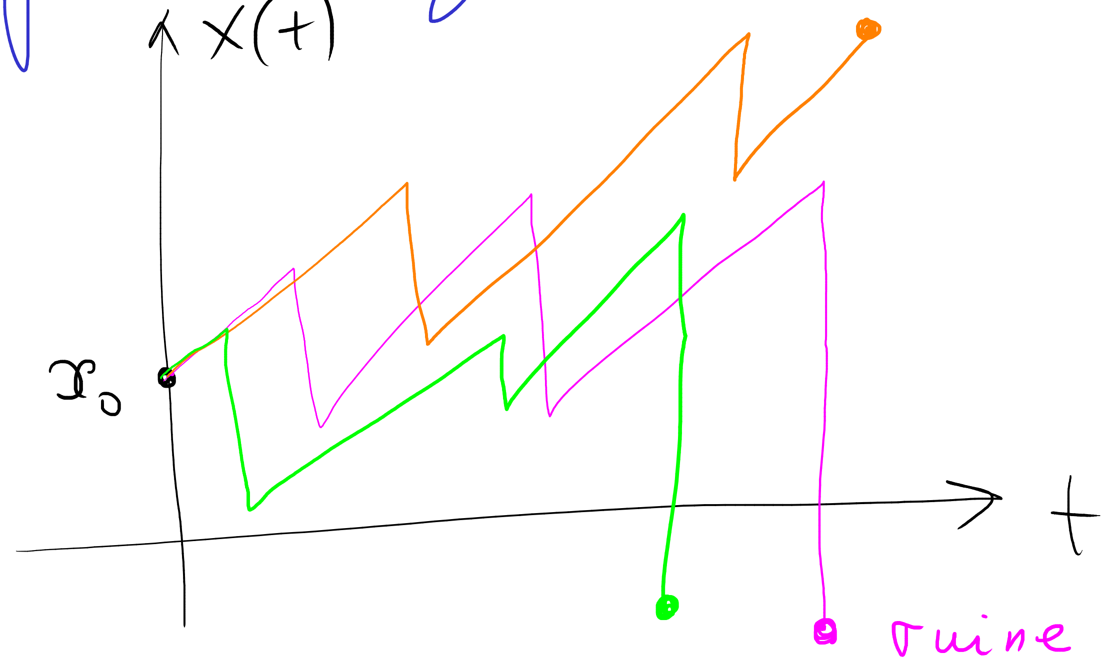
N_t - v.a qui modélise le nombre

des sinistres sur $[0,t]$

$$\mathbb{P}[X(T)<0] = \frac{N_r}{N_{mc}}$$

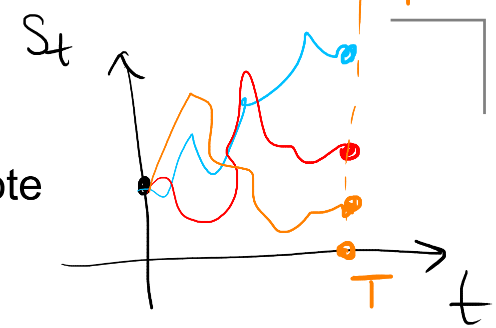
la probabilité de la ruine

N_r – le nombre des trajectoires pour lesquelles $X(T)<0$.



Théorie

$X = S_T$



- **Loi forte des grands nombres**

  Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires de même loi. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mathbb{E}(X) \quad \textit{presque} \quad \textit{surement}$$

$$\frac{1}{N_{me}} \sum_{i=1}^{N_{me}} S_T^{(i)} \xrightarrow[N_{me}\to\infty]{} \mathbb{E}[S_T] \text{ théorique}$$

- **Théorème Central Limite**

  Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2.

  Alors la loi de

$$Y_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$$

  tend vers la loi normale centrée réduite. En d'autre termes, pour tous a et b réels,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[a \le \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \le b] = \mathbb{P}[a \le Z \le b]$$

  ou Z est une variable gaussienne centrée réduite, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Intervalle de confiance

- On choisi $a = -1.96, b = 1.96$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}| \leq 1.96] = 0.95$$

- Un échantillon de n valeurs de v.a. X_i est utilisé pour estimer l'espérance inconnue $\mathbb{E}(X) = \mu$.
  Pour grand n la probabilité que μ se trouve dans l'intervalle de confiance:

$$\overline{X}_n - \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{1.96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

  est égale à 0.95.

- Pour grand n ce résultat reste vrai quand σ est remplacé par l'quart-type de variance empirique $\sqrt{\mathbb{V}ar_{emp}(X)} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$\overline{X}_n - \frac{1.96\sqrt{\mathbb{V}ar_{emp}(X)}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{1.96\sqrt{\mathbb{V}ar_{emp}(X)}}{\sqrt{n}}$$

Simulation d'une v.a. de Bernoulli X

- V.a. de Bernoulli X modélise des succès et des échecs:

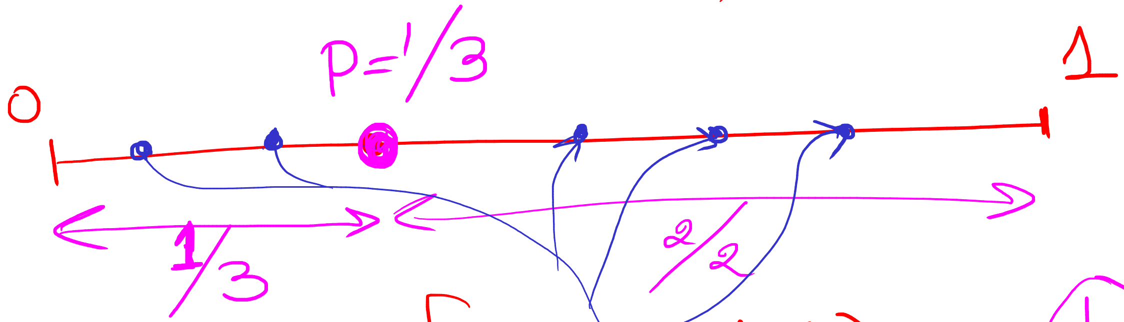
$$X = \begin{cases} 1\ (succes) & avec\ \ proba\ \ p_1 = 1/3 \\ 0\ (echec) & avec\ \ proba\ \ p_2 = 2/3 \end{cases}$$

- Simuler une v.a. X signifie simuler un échantillon des valeurs (réalisations indépendantes) de X.
- Comment simuler une chaîne de valeurs (N_{mc} valeurs) 0 et 1 telle que les fréquences d'apparition de 1 et de 0 sont respectivement 1/3 et 2/3?
- Soit une probabilité $0 \leq p \leq 1$
  IDEE PRINCIPALE $\mathbb{P}[rand() \leq p] = p$
  C'est la définition de la v.a. uniforme U par sa fonction de répartition: $[0,\ 1] \to [0,\ 1]:\quad x \to F_U(x) = x$

Comment simuler une probabilité p ?

Vous utilisez le générateur des nombres aléatoires qui suit la loi Uniforme : $rand() \in [0,1]$

$$U = rand()$$



$$\frac{1}{3} = \mathbb{P}\left[rand() < \frac{1}{3}\right]$$

$\forall p$
$$\boxed{p = \mathbb{P}\left[rand() \leq p\right]}$$

"En réalité c'est la déf. de fonction de répartition de la loi, Uniforme."

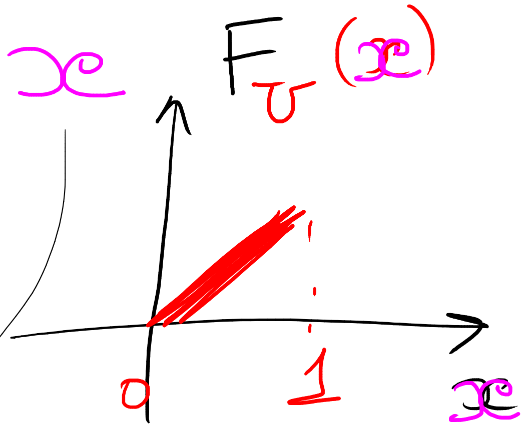
Théorie

Déf. de la fonction de répartition d'une v.a X

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Si $X = U$, $U = \text{rand}()$

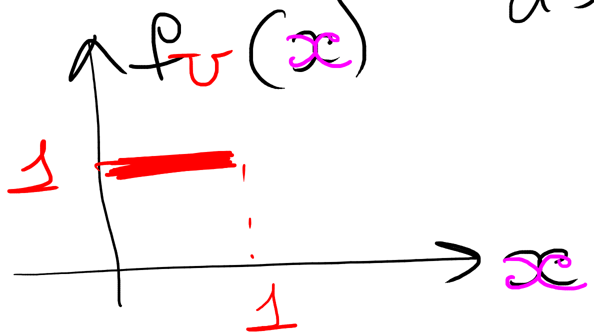
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{rand}() \le x) = x$$



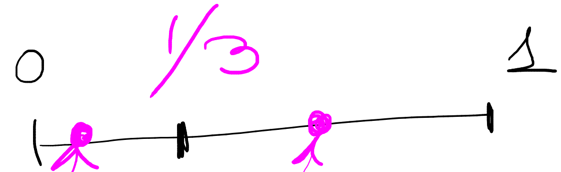
$$F_U(x) = x$$

De plus la fonction de densité

$$f_U(x) = \frac{d}{dx} F_U(x) = 1$$



Simulation d'une v.a. de Bernoulli X



- Intuitivement:
  - for $n = 1 : N_{mc}$
  - U= rand()
  - if U <1/3

    $X(n) = 1$ ✓

    else $X(n) = 0$
  - end if
  - end for
- Display(X)

- L'autre possibilité
  - U= rand(N_{mc})
  - $X = (U < 1/3)$

vous simulez le fait que la valeur 1 arrive avec la probabilité 1/3

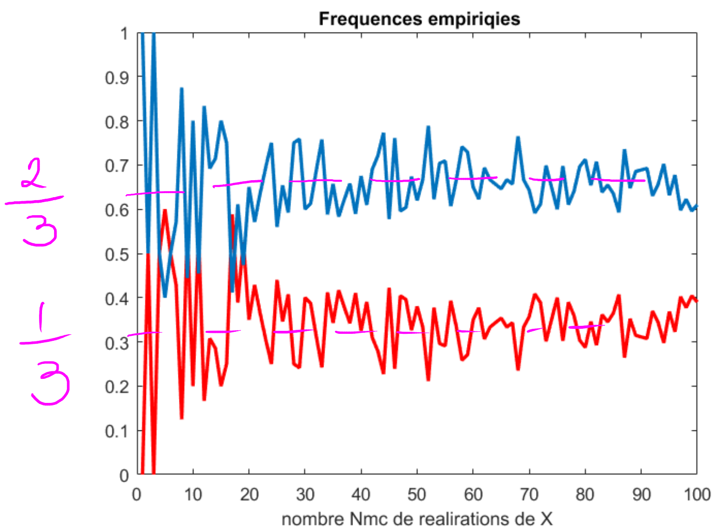
```
clear;
clc;
function[X]=Bernulli(Nmc)
for n=1:Nmc
    U=rand();
    if U<1/3
        X(n)=1;
        else
        X(n)=0;
     end
end
disp(X)
endfunction
Bernulli(100)
```

Vérification de la simulation.

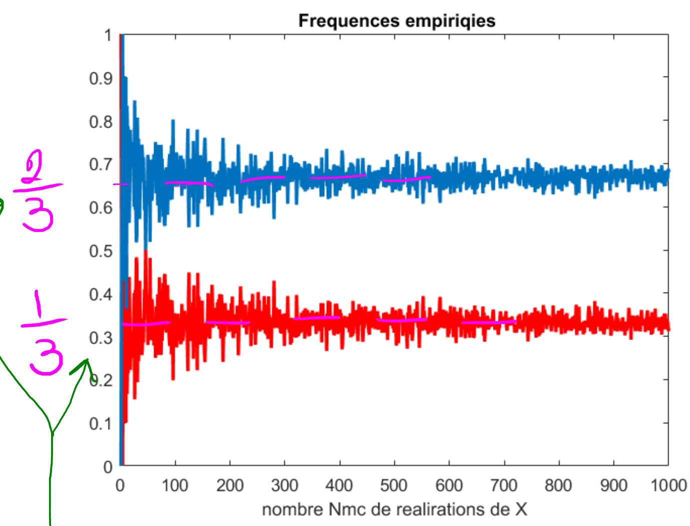
- On vérifie que les probabilités des succès et des échecs dans la chaîne sont en effet 1/3 et 2/3.
- Plus N_{mc} est élevé plus les fréquences sont proches aux probabilités théoriques.
- • function[proba1, proba2]=Freq(N_{mc})
  ○ counter1=0; counter2=0
  • for $n = 1 : N_{mc}$ Vecteur X stocke les réalisations de v. a Bernoulli
  • U= rand()
  • if U <1/3
  ○ $X(n) = 1$
  ○ counter1=counter1+1
  ○ else $X(n) = 0$
  ○ counter2=counter2+1
  • end if
  • end for
  • proba1=counter1/N_{mc} – fréquence empirique d'apparition de 1.
  • proba2=counter2/N_{mc}
  • endfunction
- • for $N_{mc} = 1 : 200$
  • [proba1(N_{mc}),proba2(N_{mc})]= Freq(N_{mc})
  • end for
  • plot(proba1,'r')
  • plot(proba2,'g')

```matlab
Taille=1000;
Proba1=zeros(1,Taille);
Proba2=zeros(1,Taille);


for Nmc=1:Taille
    [Proba1(Nmc), Proba2(Nmc)]=Frequence(Nmc);
end
figure;
    plot(Proba1,'r','LineWidth',2);
    hold on
    plot(Proba2,'LineWidth',2);
    xlabel 'nombre Nmc de realirations de X'
    title ' Frequences empiriqies'


function[proba1, proba2]=Frequence(Nmc)
X=zeros(1,Nmc);
counter1=0;
counter2=0;
for n=1:Nmc
    U=rand();
    if U<1/3
        X(n)=1;
        counter1=counter1+1;
        else
        X(n)=0;
        counter2=counter2+1;
    end
end
proba1=counter1/Nmc; % frequence empirique
proba2=counter2/Nmc;
end
```

```python
from numpy.random import rand
import matplotlib.pyplot as plt

def Frequence(Nmc):
    counter1=0.0
    counter2=0.0
    X=[]

    for n in range(0,Nmc):
        U=rand()

        if U<1/3.0:
            X.append(1)
            counter1=counter1+1
        else:
            X.append(0)
            counter2=counter2+1
    prob1=counter1/Nmc
    prob2=counter2/Nmc
    return (prob1, prob2)

Nmc_lim=10000

proba1=[]
proba2=[]

for Nmc in range(1,Nmc_lim+1):

    Y=Frequence(Nmc)
    proba2.append(Y[1])
    proba1.append(Y[0])

fig=plt.figure()

plt.plot(proba1)
plt.plot(proba2,"r")
```



$N_{mc} = 1:100$



$N_{mc} = 1:1000$

Conclusion : Plus la taille de l'échantillon est élevée plus les simulations MC sont precises.

Fréquences empiriques approchent les probabilités théoriques si $N_{me} \to \infty$

Nous avons vérifié la loi de Grands Nombres !

05/02/21 Cours N 2

Simulation d'une v.a. discrete X

- Variable aléatoire X est définie par un tableau:

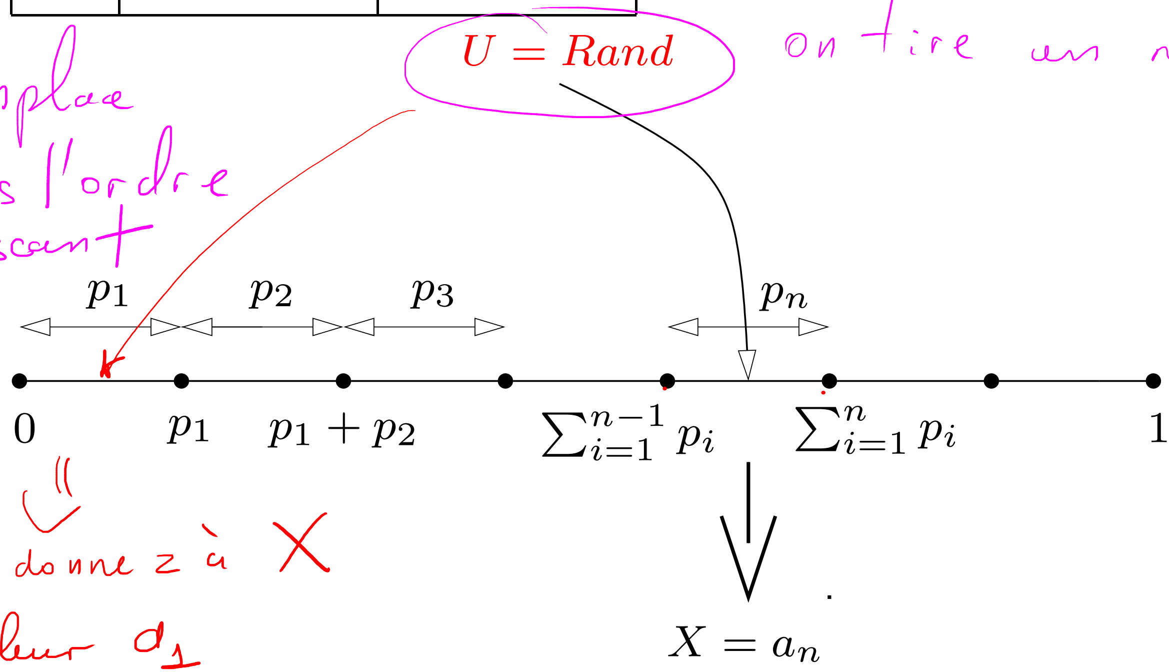
$\mathbb{P}$	$p_1 = 0.25$	$p_2 = 0.3$	$p_3 = 0.1$	$p_4 = 0.18$	$p_5 = 0.05$	$p_6 = 0.08$
X	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 3$	$a_4 = 4$	$a_5 = 5$	$a_6 = 6$

$\mathbb{P}$	$p_7 = 0.02$	$p_8 = 0.02$
X	$a_7 = 7$	$a_8 = 8$

on place a_i dans l'ordre croissant

$\mathbb{P}[X = a_i] = p_i \quad , \quad i = 1:8$

on tire un nombre rand() (Uniform de $[0,1]$)



vous donnez à X la valeur a_1

On tire $U = \text{rand}()$

Si $U \leq P_1$

$X = a_1$

sinon on vérifie si

$U \leq P_1 + P_2$

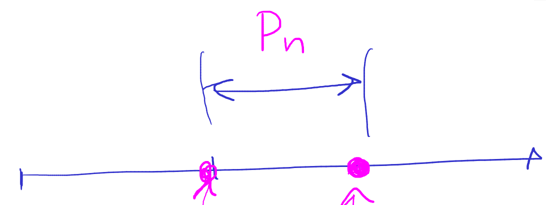
- Idée de simulation: on cherche dans quel intervalle tombe une v.a. uniforme U.

si oui $X = a_2$

si non on vérifie si

$U \leq P_1 + P_2 + P_3$

Inversion de la fonction de répartition.



- Justification à partir de la théorie:

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i < \color{red}{Rand(\,)} \leq \sum_{i=1}^{\color{blue}{n}} p_i \Rightarrow X = a_{\color{blue}{n}}$$

- Fonction de répartition apparaît:

$$F_X(a_{n-1}) < \color{red}{Rand(\,)} \leq F_X(a_{\color{blue}{n}}) \quad \Rightarrow X = a_{\color{blue}{n}}$$

- Théorème:
  - $\boxed{F_X(X) \quad suit \quad la \quad loi \quad \color{red}{Uniforme}}$
  - $F_X^{-1}(\color{red}{Rand(\,)}) = X$

variable aléatoire!

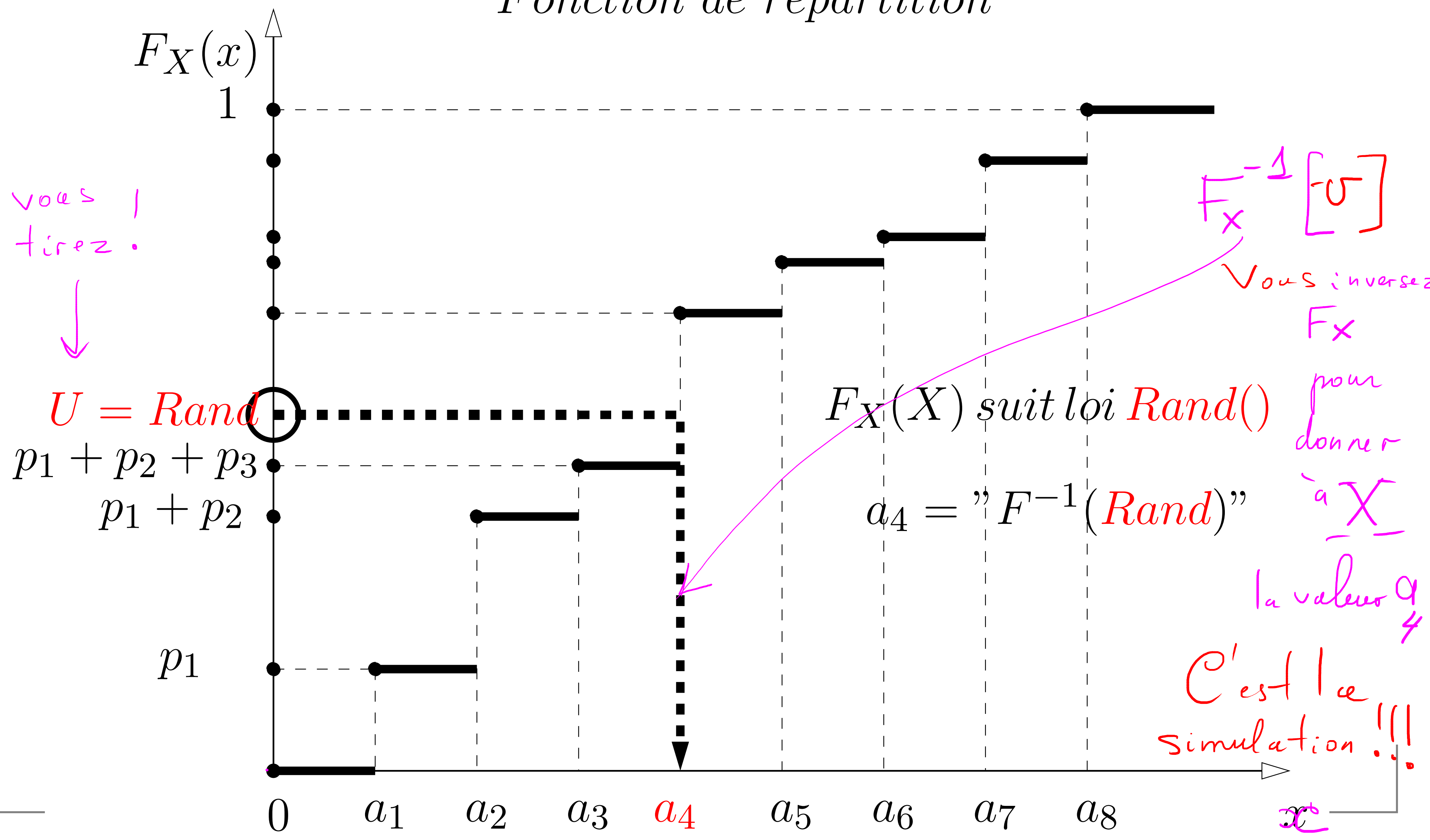
Fondamentale!

- Définition de la fonction de répartition inverse $F_X^{-1}(u) = \{\inf x : F_X(x) \geq u\}.$

Discussion : Indispensable pour calculer VAR value at risk

Simulation d'une v.a. discrete X

$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$

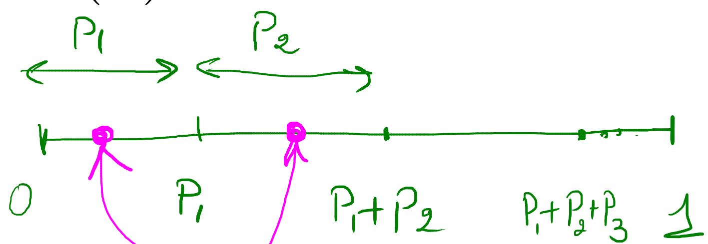


Simulation d'une v.a. discrete X

- Algorithme 1A: Simulation d'une réalisation de variable aléatoire discrete

  ∘ Définir le vecteur de probabilité $p(n)$

  ∘ Définir le vecteur a des réalisations $a(n)$ de la variable aléatoire X.



Vous Tirez une seule valeur U et vous générez une seule valeur de X

  - function[X]=V_A_Discrete(p, a)

  ∘ Set $n = 1, \quad F = p(1)$

  ∘ Générer U % U=rand()

  ∘ While $U > F$

  ∘ Set $F = F + p(n+1), \quad n = n+1$

  ∘ end while

  ∘ Set $X = a(n)$

  - endfunction

Si: $U \leq F = P(1)$

$X = a(1)$

Si non

$F = P(1) + P(2)$

Si $U \leq P(1) + P(2)$

$X = a(2)$

- On applique l'Algorithme 1A N_{mc} fois pour générer N_{mc} réalisations de X

MATLAB

```
clear;

clc;

p=[0.25 0.3 0.1 0.18 0.05 0.08 0.02 0.02];
a=[1 2 3 4 5 6 7 8];
```

— probabilités

— valeurs de X

```
Nmc=1000;
disp(sum(p));
V_A_Discrete(p,a);
X=Chaine_valeurs_V_A(p,a,Nmc);
disp(X)

function[X]=V_A_Discrete(p,a)
    n=1;
    F=p(1);
    U=rand();
    while U>F
        F=F+p(n+1);
        n=n+1;
    end
    X=a(n);
end


function[X]=Chaine_valeurs_V_A(p,a,Nmc)
   esp=0;
   var=0;
    for n=1:Nmc
```

on génère N_{mc} valeurs de X

```
        X(n)=V_A_Discrete(p,a);
        esp=esp+X(n);
        var=var+X(n)^2;
    end
    esperance=esp/Nmc;
```

$$\sum_{i=1}^{N_{mc}} a_i / N_{mc}$$ — moyenne empirique ou esperance empirique

```
    variance=var/Nmc-(esperance)^2;
```

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

puis on calcule la variance empirique

```
    disp('esperance empirique');
    disp(esperance);
    disp('variance empirique');
    disp(variance);

    esperance_th=p*a';
```

$$= \sum_i^8 p_i a_i$$ — espérance théorique

```
   % variance_th=(a- esperance_th).^2*p';
    variance_th=a.^2*p'-esperance_th^2;
    disp('esperance theorique');
    disp(esperance_th);
    disp('variance empirique');
    disp(variance_th);

end
```

a' — vecteur transposé

Algo 1B: Simulation d'un échantillon

- On répète l'algorithme 1A N_{mc} fois pour simuler une chaîne de N_{mc} valeurs.
- Algorithme 1B de simulation d'une chaîne de valeurs de v.a. discrete.

  - function [X]= Chaine_valeurs_V_A_Discrete (p, a)
    - for $n = 1 : N_{mc}$
    - $X(n)$=V_A_Discrete(p, a)
    - end
  - endfunction
- Simuler et visualiser une chaîne de réalisations de X.

Verification de simulation.

- On vérifie que la loi simulée est bien la loi demandée. Il existe trois tests de validation.
- Test1 On compare l’espérance d’un échantillon simulé avec l’espérance théorique.
- Test2 On compare la variance d’un échantillon simulé avec la variance théorique.
- Test3 On construit la fonction de repartition et la fonction de densité d’un échantillon simulé (les fonctions de repartition et de densité empiriques) et on les compare avec les fonctions de repartition et de densité analytiques da la loi demandée.

Verification de simulation.

Espérance et variance

- Calcul théorique pour l'espérance et la variance.
  • Calculer l'espérance théorique : $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{8} p_i a_i$
  • Calculer la variance théorique $\mathbb{V}ar(X) = \sum_{i=1}^{8} p_i a_i^2 - \mathbb{E}(X)^2$
- Travail à faire. Calcul empirique. Soit $N_{mc} = 100$
  • Calculer l'espérance empirique : $\mathbb{E}_{emp}(X) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i$
  • Calculer la variance empirique :
  $\mathbb{V}ar_{emp}(X) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} (X_i)^2 - (\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i)^2$
- Est-ce que le résultat est coherent avec la loi des Grands Nombres?

$$\lim_{N_{mc}\to\infty} \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i = \mathbb{E}(X)?$$

espérance théorique

$$\lim_{N_{mc}\to\infty} \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} (X_i)^2 - (\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i)^2 = \mathbb{V}ar(X)?$$

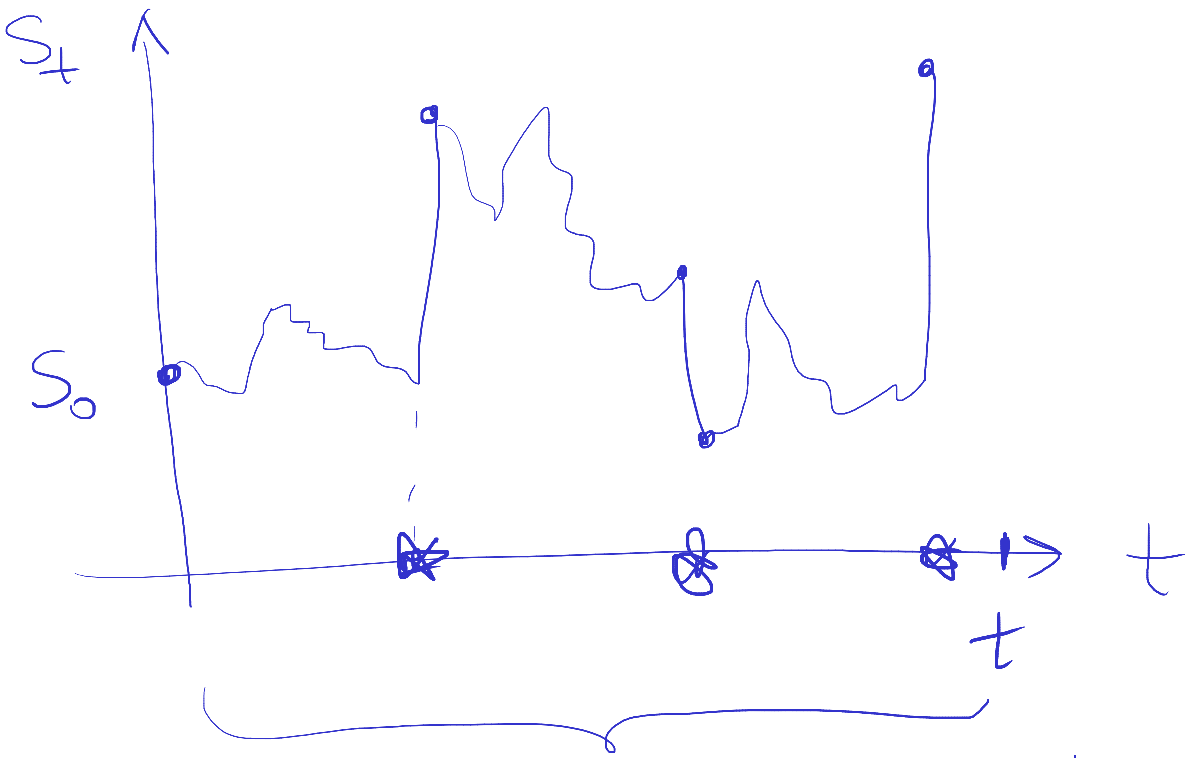
- Faites les mêmes calculs pour $N_{mc} = 1000$, $N_{mc} = 100000$. Conclure.

Simulation de v.a. de Poisson,1

la def au lieu de tableau

- Soit X est v.a. de Poisson $\quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. $\quad n = 0, 1, 2 .. \infty$
- Montrer $\mathbb{P}(X = n+1) = \frac{\lambda}{(n+1)} \cdot \mathbb{P}(X = n)$
- Algorithme 2A de simulation de v.a. de Poisson
  - function[X]=V_A_Poisson(λ) — modelise la fonction de repartition
  - ∘ Set $n = 0, \quad proba = \underbrace{e^{-\lambda}}_{p(1)}, \quad F = proba;$
  - ∘ Générer U
  - ∘ While $U > F$
  - ∘ Set $proba = \frac{\lambda}{(n+1)} \cdot proba, \quad F = F + proba, \quad n = n + 1$
  - ∘ end — on definit $p(n+1)$
  - ∘ Set $X = n$
  - ∘ end
  - endfunction

Si $U \leq e^{-\lambda}$ vous n'entrez pas dans While et vous donnez à X la valeur 0.



le nombre des sauts sur $[0,t]$ suit la loi de Poisson avec le paramètre λt

Simulation de v.a. de Poisson,2

- Algorithme 2B de simulation de N_{mc} valeurs de v.a. de Poisson
  - function [X]= Chaine_valeurs_V_A_Poisson (λ)
  - ○ for $n = 1 : N_{mc}$
  - ○ $X(n)$=V_A_Poisson(λ)
  - ○ end
  - endfunction
- Visualiser un échantillon simulé: $N_{mc} = 100$ terms, $\lambda = 2$
- Calcul théorique.
  - L'espérance théorique : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda$
  - La variance théorique $\mathbb{V}ar(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda$
- Travail à faire. Calcul empirique. Soit $N_{mc} = 10000, \lambda = 2$
  - Calculer l'espérance empirique : $\mathbb{E}_{empirique}(X) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i$ et comparer avec λ
  - Calculer la variance empirique : $\mathbb{V}ar_{empirique}(X) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} (X_i)^2 - (\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} X_i)^2$ et comparer avec λ.
- Conclure.

Python

```
import numpy as np
from numpy.random import rand
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
#import matplotlib.colors as colors

lambd=10.0
Nmc=10000
a=0.0
delta=0.2
print delta

def V_A_Poisson(lambd):
    n=0
    proba=exp(-lambd)
    F=proba
    U=rand()
    while U>F:
        proba=proba*lambd/(n+1)
        F=F+proba
        n=n+1
    return n
```

$\rightarrow X = n$

```
def Chaine_Valeurs_Poisson(lambd,Nmc):
    X=[]
    for n in range(0,Nmc):
        X.append(V_A_Poisson(lambd))
    return X

Y=Chaine_Valeurs_Poisson(lambd,Nmc)


print(Y)
print('Esperance empirique')
print(np.mean(Y))
```

$$\frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} Y_i$$

```
print('Esperance théorique')

print(lambd)
```

Verification de simulation.

Fonction de repartition.

- Il y a un échantillon de N_{mc} v.a. de Poisson. Nous utilisons la définition de la fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x], \quad x \in R$ est une variable classique,
- On choisit un intervalle $[a, b]$ sur lequel on veut tracer la fonction de repartition, on discrétise cet intervalle en N_x parties :

$$\Delta x = \frac{b-a}{N_x}, \quad x_i = a + \Delta x \cdot i, \quad 0 \leq i \leq N_x$$

On définit $F_X(x)$ en chaque point discrete x_i:

$$F_X(x_i) = \mathbb{P}[X \leq x_i].$$

- On définit la fonction empirique de répartition $F_X(x)$ en chaque point discrete x_i:

$$F_X(x_i) = \mathbb{P}[X \leq x_i] = \mathbb{E}[1_{X \leq x_i}] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} 1_{X_n \leq x_i}$$

12/02/21

Verification de simulation.

Fonctions de repartition.

$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$

- On calcule le nombre de réalisation n_{x_i} de v.a. X qui tombe dans l'intervalle $]-\infty, x_i]$, puis on calcule la probabilité: $\mathbb{P}[X \leq x_i] = \frac{n_{x_i}}{N_{mc}}$.
- On répète cette procedure pour chaque intervalle $]-\infty, x_i], \quad i = 1 : N_x$.

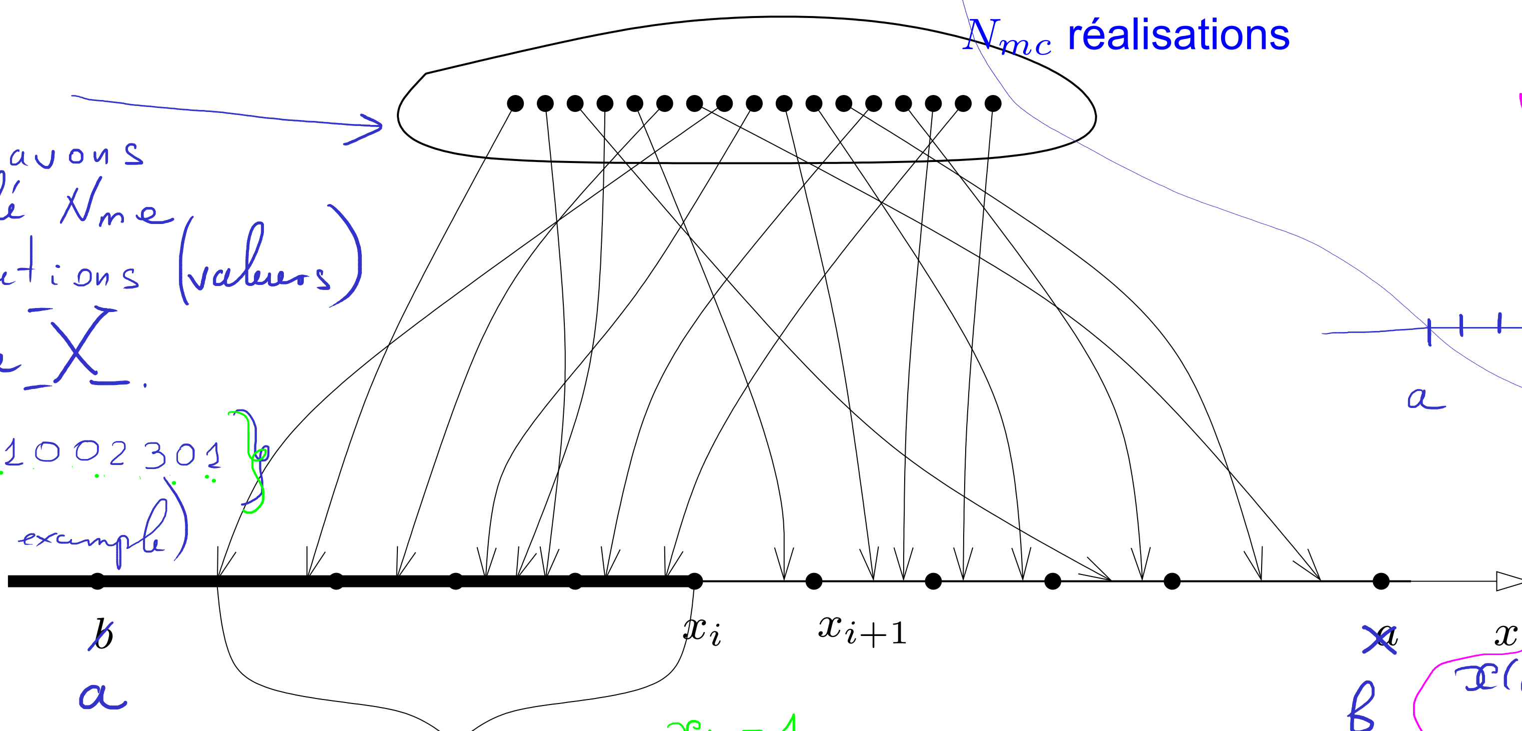
$\frac{n_{x_i}}{N_{mc}}$

N_{mc} réalisations

nous avons simulé N_{mc} réalisations (valeurs) de v.a X.

{0 1 2 0 1 1 0 0 2 3 0 1}

v.a (par exemple) Poisson



$x(1) = a$

n_{x_i} réalisations

$x_i = 1$

$N_{mc} = 12$

$\mathbb{P}[X \leq 1] = \frac{9}{12}$, $\mathbb{P}[X \leq 2] = \frac{3}{12}$

$x(N_x+1) = b$

$\Delta x = \frac{b-a}{N_x}$

for $i = 1 : N_x + 1$
$x(i) = a + \Delta x \cdot (i-1)$
end

$N_x = 100$

Verification de simulation.

- Algorithme de simulation de la fonction de repartition

● Simuler un échantillon de N_{mc} réalisations de v.a. $\cancel{X}$ Y et utiliser le vecteur $\cancel{X}$ Y comme l'entrée.

● function [ ]= Repartition_Poisson ($\cancel{X}$ Y)

$\Delta x = \frac{b-a}{N_x}$, $N_x = 100$

○ Définir a, Δx et N_x

○ for $i = 1 : N_x + 1$ % Par une boucle définir les points x_i d'un vecteur x

○ $x(i) = a + \Delta x \cdot (i - 1)$

○ counter =0 % Initialisation du Compteur

○ for $n = 1 : N_{mc}$

○ if $\cancel{X}$ Y$_n \leq x_i = x(i)$

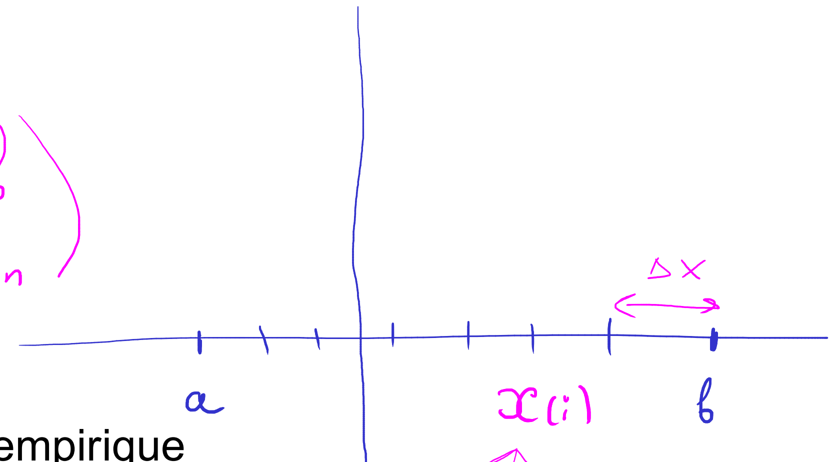
(Y(n) Matlab
Y[n] en Python)

○ counter = counter +1

○ end if

○ end for

Proba(i)= $\frac{Counter}{N_{mc}}$ % Calcul la probabilité empirique



○ end for

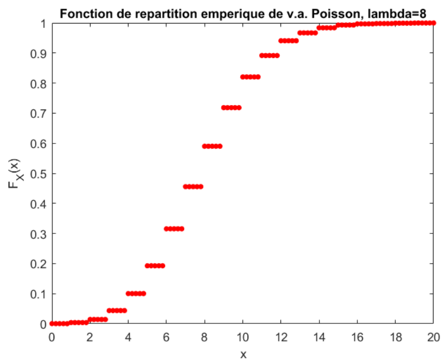
○ plot(x, Proba) % Tracer le graphe de la fonction de repartition

● endfunction

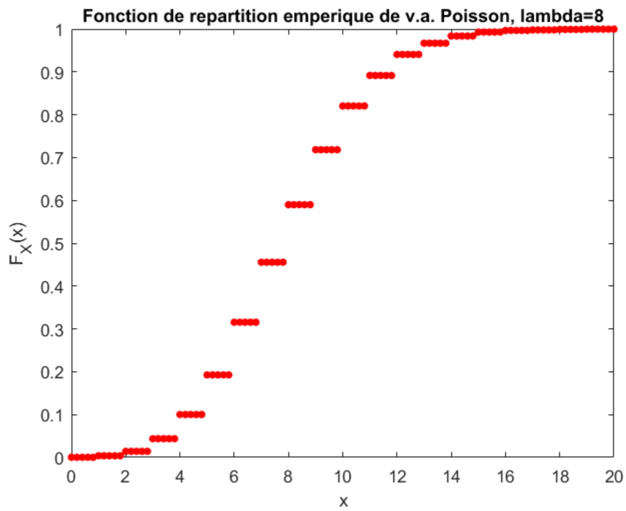
vous comptez les réalisations pour lesquelles $Y_n < x(i)$
pour chaque point discret $x(i)$

```
clear;
Nmc=10000;
lambda=8;
a=0;
delta=0.2;
X=Chaine_valeurs_Poisson(lambda,Nmc);
repartition_graphe(a,delta,X);

function[X]=V_A_Poisson(lambda)
   n=0;
   proba=exp(-lambda);
   F=proba;
   U=rand();
   while U>F
      proba=proba*lambda/(n+1);
      F=F+proba;
      n=n+1;
   end
   X=n;
end

function[X]=Chaine_valeurs_Poisson(lambda,Nmc)

   for n=1:Nmc
      X(n)=V_A_Poisson(lambda);
   end
end
```

— une seule realisation




```
function[P,x]=fonction_repartition(X,a,delta)
N_x=100;
for i =1:N_x+1
x(i)=a+delta*(i-1);
cont=0;
  for n=1:length(X)
if X(n)<=x(i)
   cont=cont+1;
end
  end
P(i)=cont/(length(X));
end
end

function[]=repartition_graphe(a,delta,X)
tic;

[P,x]=fonction_repartition(X,a,delta);
figure;
plot(x,P,'ro','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor', 'r' );
xlabel 'x'
ylabel 'F_X(x)'
title 'Fonction de repartition emperique de v.a. Poisson, lambda=2'

disp(toc);
% 'LineWidth',1,
end
```



les abscisses x(i)

Verification de simulation.

- Algorithme de simulation de la fonction de repartition

• Simuler un échantillon de N_{mc} réalisations de v.a. X et utiliser le vecteur X comme l'entrée.

• function [ ]= Repartition_Poisson (X)

○ Définir a, Δx et N_x

○ for $i = 1 : N_x + 1$ % Par une boucle définir les points x_i d'un vecteur x

○ $x(i) = a + \Delta x \cdot (i - 1)$

○ counter =0 % Initialisation du Compteur

○ for $n = 1 : N_{mc}$

○ if $X_n \leq x_i$

○ counter = counter +1

○ end if

○ end for

Proba(i)= $\frac{Counter}{N_{mc}}$ % Calcul la probabilité empirique

○ end for

○ plot(x, Proba) % Tracer le graphe de la fonction de repartition

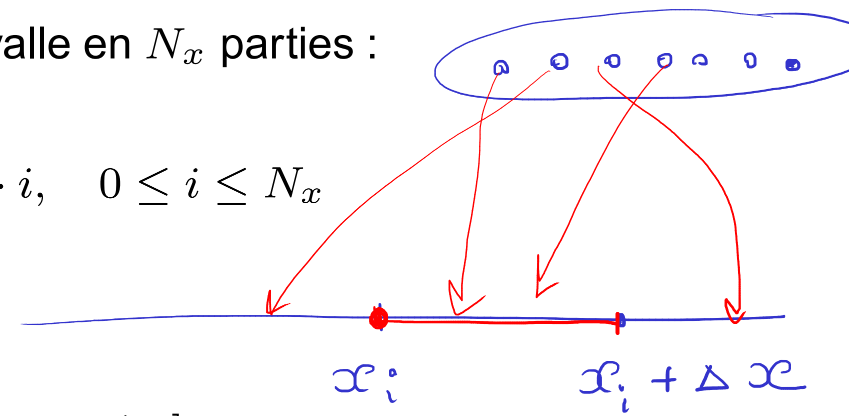
• endfunction

Verification de simulation.

$$\int f_X(x)\cdot dx = \int \mathbb{P}[x < X \le x + dx]$$

Fonction de la densité.

- Nous utilisons la définition de la fonction de densité $f_X(x) = \frac{\mathbb{P}[x<X\le x+\Delta x]}{\Delta x}$
- On choisit l'intervalle $[a, b]$, on discrétise cet intervalle en N_x parties :



nous définissons

$$\Delta x = \frac{b-a}{N_x}, \quad x_i = a + \Delta x \cdot i, \quad 0 \le i \le N_x$$

On définit $f_X(x)$ en chaque point discrete x_i:

$$f_X(x_i) = \frac{\mathbb{P}[x_i < X \le x_i + \Delta x]}{\Delta x}.$$

On utilise l'échantillon de v.a. X, on fixe x_i, on calcule le nombre de réalisation $n_{x_i, x_i+\Delta x}$ qui tombe dans l'intervalle $[x_i, x_i + \Delta x]$, puis on calcule la probabilité:

$$\mathbb{P}[x_i < X \le x_i + \Delta x] = \mathbb{E}[1_{x_i<X\le x_i+\Delta x}] = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{n=1}^{N_{mc}} 1_{x_i<X_n\le x_i+\Delta x} = \frac{n_{x_i,x_i+\Delta x}}{N_{mc}}.$$

Cette procedure on répète pour chaque intervalle $[x_i, x_i + \Delta x], \quad i = 1 : N_x$.

Verification de simulation.

- Algorithme de simulation de fonction de densité

Pour un paramètre d'entré on utilise un échantillon de N_{mc} réalisations de v.a. X.

- function[Densite]= Densite_empirique(X)
- ○ for $i = 1 : N_x$ % Par une boucle définir les points x_i
- ○ $x(i) = a + \Delta x \cdot (i - 1)$
- ○ counter=0 %Initialisation du Compteur
- ○ for $n = 1 : N_{mc}$
- ○ if $X(n) \in [x(i), x(i) + \Delta x]$
- ○ counter = counter +1
- ○ end if
- ○ end for
- ○ Proba(i)= $\frac{counter}{N_{mc}}$ % probabilité empirique
- ○ Densité(i)=Proba(i)/Δx % Δx=1 si la v. a. est discrete
- ○ end for
- ○ plot(x, Densité) % Tracer le graphe de la fonction de densité
- endfunction

```
clear;
Nmc=100000;
lambda=10;
a=0;
delta=0.25;
X=Chaine_valeurs_Poisson(lambda,Nmc);
densite_Emp_graphe(a,delta,X);
hold on

for i =1:25
x(i)=(i-1);
densite_th(i)=densite_Th_Poisson(x(i),lambda);
end
```

on plot densité théorique

```
plot(x,densite_th,'ro','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
```

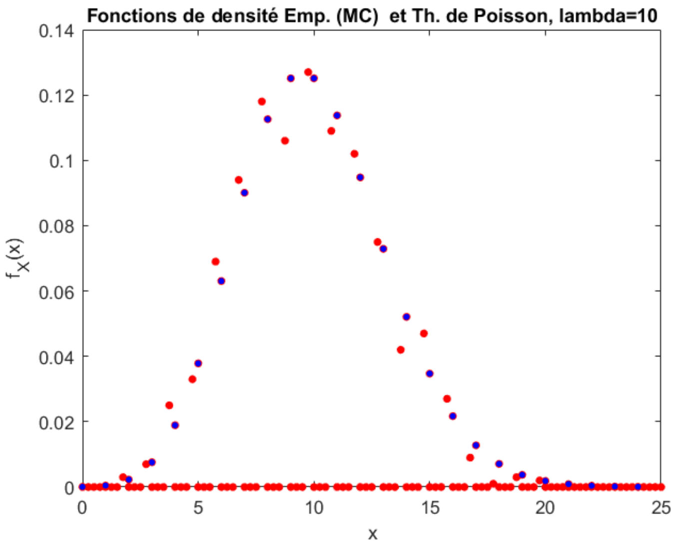
on plot densité empirique

```
function[X]=V_A_Poisson(lambda)
   n=0;
   proba=exp(-lambda);
   F=proba;
   U=rand();
   while U>F
      proba=proba*lambda/(n+1);
      F=F+proba;
      n=n+1;
   end
   X=n;
end

function[X]=Chaine_valeurs_Poisson(lambda,Nmc)

   for n=1:Nmc
      X(n)=V_A_Poisson(lambda);
   end
end
```

les réalisations de X.

on injecte

```
function[P,x]=fonction_Emp_densite(X,a,delta)
N_x=100;
for i =1:N_x+1
x(i)=a+delta*(i-1);
cont=0;
  for n=1:length(X)
if X(n)<=x(i)+delta  &&    X(n)>x(i)
   cont=cont+1;
end
  end
P(i)=cont/(length(X));
end
end


function[]=densite_Emp_graphe(a,delta,X)

[P,x]=fonction_Emp_densite(X,a,delta);
figure;
plot(x,P,'ro','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor', 'r' );
xlabel 'x'
ylabel 'f_X(x)'
title 'Fonctions de densité Emp. (MC)  et Th. de Poisson, lambda=10'
end
```




```
%%%%%%%%%%%%  densité théorique %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function[f]=densite_Th_Poisson(x,lambda)
fact=1;
if x==0
   f=exp(-lambda);
else
   for k=1:x
   fact=fact*k;
   end
  f=lambda^x.*exp(-lambda)/fact;
end
end
%plot(x,densite_th,'LineWidth',4);
```

$$f = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2 \dots$$

```
import numpy
from numpy import zeros, linspace
from numpy.random import rand
from math import *
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as colors

lambd=10.0
Nmc=1000
a=0.0
delta=0.2
print delta

def V_A_Poisson(lambd):
    n=0
    proba=exp(-lambd)
    F=proba
    U=rand()
    while U>F:
        proba=proba*lambd/(n+1);
        F=F+proba
        n=n+1
    return n



def Chaine_Valeurs_Poisson(lambd,Nmc):
    X=zeros(Nmc)
    for n in range(0,Nmc):
        X[n]=V_A_Poisson(lambd)
    return X

Y=Chaine_Valeurs_Poisson(lambd,Nmc)


def Densite_MC(Y,a,delta,Nmc):
    N_x=100
    x=zeros(N_x)
    P=zeros(N_x)
    for i in range(0,N_x):
        x[i]=a+delta*i
        counter=0.0
        for n in range(0, Nmc):
            if (Y[n] >= x[i]) and (Y[n]< x[i] +delta):
                counter=counter+1
            P[i]=counter/Nmc

    plt.figure()
    plt.plot(x,P)

Densite_MC(Y,a,delta,Nmc)

def Repartition_MC(Y,a,delta,Nmc):
    N_x=100
    x=zeros(N_x)
    P=zeros(N_x)
    for i in range(0,N_x):
        x[i]=a+delta*i
        counter=0.0
        for n in range(1, Nmc):
            if Y[n]< x[i] :
               counter=counter+1

        P[i]=counter/Nmc

    fig=plt.figure()
    plt.plot(x,P)

Repartition_MC(Y,a,delta,Nmc)
```

Travail à faire pour Poisson

- Soient $\lambda = 2, N_{mc} = 10000$
  - Simuler la v.a. de Poisson
  - Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 10], \Delta = 0.1, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 10], \Delta = 0.1, N_x = 100$
- Soient $\lambda = 4, N_{mc} = 10000$
  - Simuler la v.a. de Poisson
  - Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 0.15, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 15], \Delta = 1, N_x = 15$
- Soient $\lambda = 50, N_{mc} = 10000$
  - Simuler la v.a. de Poisson
  - Tracer sa fonction de repartition: $[a, b] = [0, 200], \Delta = 2, N_x = 100$
  - Tracer sa fonction de densité: $[a, b] = [0, 200], \Delta = 1, N_x = 200$

Travail à faire pour v.a. Binomial

- Soient $N = 20, p = 0.5, N_{mc} = 10000$
- On définit la v.a. Binomiale X par la somme de N v.a.indépendantes de Bernoulli Y_i:

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i, \qquad Y_i = \begin{cases} 1 & avec \;\; proba \;\; p \\ 0 & avec \;\; proba \;\; 1-p \end{cases}$$

• p est la probabilité d'un succès et les valeurs de X représente le nombre de succès parmi N essais
• Simuler la v.a. de Binomiale à partir de la définition à l'aide de v.a. de Bernoulli.
• Tracer sa fonction de repartition
• Tracer sa fonction de densité

Simulation 2 de v.a. Binomiale

- La v.a. de loi binomiale $Bin(N,p)$ s'écrit comme une somme de N v. a. de Bernoulli $B(p)$ indépendantes et représente k succès parmi N essais: $\mathbb{P}(X=k) = C_k^N p^k (1-p)^{(N-k)}$
- Monter $\mathbb{P}(X=k+1) = \frac{p(N-k)}{(1-p)(k+1)} \cdot \mathbb{P}(X=k)$

• Algorithme 4 de simulation d'une seule variable aléatoire Binomiale.

• function[X]=V_A_Binomiale(p, N)

∘ Set $k=0, \quad proba=(1-p)^N, \quad F=proba;$

∘ Générer U

∘ While $U > F$

∘ Set $proba = \frac{p(N-k)}{(1-p)(k+1)} \cdot proba, \quad F=F+proba, \quad k=k+1$

∘ end

∘ Set $X=k$

∘ end

• endfunction

Travail à faire pour Binomial

- Soient $N = 50, p = 0.2, N_{mc} = 10000$

  • Simuler la v.a. Binomial par l'algorithme 4

  • Calculer l'espérance et la variance empiriques, les comparer avec les valeurs théoriques
  $\mathbb{E}(X) = Np, \quad \mathbb{V}ar(X) = Np(1-p)$

  • Tracer sa fonction de repartition:
  $[a, b] = [0, 50], \Delta = 0.5, N_x = 100$

  • Tracer sa fonction de densité:
  $[a, b] = [0, 20], \Delta = 1, N_x = 20$

Simulation de v.a. Géométrique

- Soit X v.a. géométrique avec le paramètre p telle que $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$.
V. a. géométrique représente le nombre d'essais avant d'arrivé d'un premiere succès. La probabilité d'un succès est p.
• Simuler la v.a. Géométrique par l'algorithme 4 avec $p = 0.2$
• Tracer sa fonction de densité
• Simuler la v.a. Géométrique à l'aide de v.a. de Bernoulli.
Simuler plusieurs fois la v.a. de Bernoulli. Compter le nombre des échecs ($X = 0$) avant d'arrivé d'un premiere succès ($X = 1$). Identifier une valeur de v.a. Géométrique à celle du compteur
• Tracer la fonction de densité de v.a. Géométrique