CHARLET Antoine, MONIN Louis

ING1-GM3

Analyse Numérique – TP note

Rapport : Réparation d’image par SVD

CY TECH – Cergy Paris Université

Année 2022-2023

Travail demandé

Mathématiques

1. *Justifions l'écriture matriciell A traduisant la décomposition en valeurs singulières. Symboliquement, on peut représenter la situation sous la forme suivante dans le cas où $n > p$ par exemple.*

$$\text{Soit} \qquad A = U\Sigma V^T$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ & & \dots & \dots \\ u_{1n,1} & \dots & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 & \\ & \dots & & 0_{r,p-r} \\ 0 & & \sigma_r & \\ & 0_{n-r,r} & & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{p,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1,,p} & \dots & v_{p,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,1}\sigma_1 & u_{1,1}\sigma_2 & \dots & u_{1,r}\sigma_r & \dots & 0_{n-r,r} \\ u_{2,1}\sigma_1 & u_{2,2}\sigma_2 & \dots & u_{2,r}\sigma_r & \dots & 0_{n-r,r} \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ u_{n,1}\sigma_1 & u_{n,2}\sigma_2 & \dots & u_{r,r}\sigma_r & \dots & 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{p,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1,,p} & \dots & v_{p,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,1}\sigma_1 & u_{1,1}\sigma_2 & \dots & u_{1,r}\sigma_r \\ u_{2,1}\sigma_1 & u_{2,2}\sigma_2 & \dots & u_{2,r}\sigma_r \\ \dots & & \dots & \dots \\ u_{n,1}\sigma_1 & u_{n,2}\sigma_2 & \dots & u_{r,r}\sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{p,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1,,p} & \dots & v_{p,p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,1}\sigma_1 v_{1,1} + \dots + u_{1,r}\sigma_r v_{1,r} & u_{1,1}\sigma_1 v_{2,1} + \dots + u_{1,r}\sigma_r v_{2,r} & \dots & u_{1,1}\sigma_1 v_{r,1} + \dots + u_{1,r}\sigma_r v_{r,r} \\ u_{2,1}\sigma_1 v_{1,1} + \dots + u_{2,r}\sigma_r v_{1,r} & u_{2,1}\sigma_1 v_{2,1} + \dots + u_{2,r}\sigma_r v_{2,r} & \dots & u_{2,1}\sigma_1 v_{r,1} + \dots + u_{2,r}\sigma_r v_{r,r} \\ \dots & & \dots & \dots \\ u_{r,1}\sigma_1 v_{1,1} + \dots + u_{r,r}\sigma_r v_{1,r} & \dots & \dots & u_{r,1}\sigma_1 v_{r,1} + \dots + u_{r,r}\sigma_r v_{r,r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} u_{1,i}\sigma_i v_{1,i} & \sum_{i=1}^{r} u_{1,i}\sigma_i v_{2,i} & \dots & \sum_{i=1}^{r} u_{1,i}\sigma_i v_{r,i} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{r} u_{r,i}\sigma_i v_{1,i} & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{r} u_{r,i}\sigma_i v_{r,i} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T$$

Finalement l'écriture matricielle $A = \sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T$ *traduisant la décomposition en valeurs singulières :*

$$A = U\Sigma V^T$$

2. *Justifions que l'erreur quadratique est donnée par :* $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$

Tout d'abord, remarquons que si $k \geq r$, $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = A$, *d'où* $||A - A_k||_2 = 0$.
On se place donc bien dans le cas $k < r$

Pour des facilités de notations, on écrira $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$ *et* $M_{i,j}$ *désigne la restriction de la matrice* M *aux colonnes* i *à* j.

En scindant les colonnes de U, Σ *et* $V*$ *en deux judicieusement,*
on peut faire apparaître des simplifications avec le terme A_k

$$A - A_k = \begin{pmatrix} U_{1,k} & U_{k+1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{1,k} & 0 \\ 0 & \Sigma_{k+1,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,k}^T \\ V_{k+1,r}^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{1,k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{1,k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1,k}^T \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= U_{1,k}\Sigma_{1,k}V_{1,k}^T + U_{k+1,r}\Sigma_{k+1,r}V_{k+1,r}^T - U_{1,k}\Sigma_{1,k}V_{1,k}^T$$

$$= U_{k+1,r}\Sigma_{k+1,r}V_{k+1,r}^T$$

On rappelle que $||M||_2 = \sqrt{\rho(MM^*)}$

Or, $(A - A_k)(A - A_k)^* = U_{k+1,r}\Sigma_{k+1,r}^2 U_{k+1,r}^T$

et donc, $||A - A_k||_2 = \sqrt{\sigma_{k+1}^2} = \sigma_{k+1}$

3. *Justifions que l'erreur de Frobenius vérifie* : $||A - A_k||_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \dots + \sigma_r^2$.

$$||A - A_k||_F^2 = ||\sum_{i=k+1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T||_F^2$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(u_{ij} \sigma_i v_{lj}^T\right)^2$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \sum_{j=1}^{m} u_{ij}^2 \sum_{l=1}^{n} v_{lj}^{T^2}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \sum_{l=1}^{n} v_{lj}^{T^2} \qquad \textit{car les } u_{ij}^2 \textit{ sont unitaires.}$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \qquad \textit{car } ||v^T||_p^2 = 1$$

$$= \sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \dots + \sigma_r^2$$

Finalement l'erreur de Frobenius vérifie $||A - A_k||_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \dots + \sigma_r^2$.

Informatique

1. La fonction lire_image prenant en argumant une image permet de lire l'image et de donner sa dimension et son canaux en fonction d'un paramètres qui est sa taille. Si l'image possède une longueur d'image égale à 3, la fonction donnera sa dimension et ses canaux. Si elle est égale à 2, la fonction donne la dimension de l'image et dit que l'image est en noir et blanc. Enfin si la longeuru de la taille de l'image est différente de ces deux valeurs, la fonction affichera un message d'erreur comme quoi le format de l'image n'est pas pris en compte.

2. Pour restaurer l'image en noir et blanc on doit récupérer la valeur de k qui représente les valeurs propres optimal pour récupérer une image assez clair et non floue mais avec laquelle la marque est plutôt effacée. Après réalisé la fonction qui fonctionne sous la forme d'une boucle, on obtient une valeur optimale proche de 20. Cette valeur est approchée car la fonctionne affiche une succession de 6 images avec des valeurs de k différentes est c'est pour celle porche de 20 où l'image est la plus nette avec une fissure moins présente.

Par la suite, on écrit la fonction restaurer_image_noir_et_blanc prenant en argument l'image en noir et blanc, le masque et la valeur de k optimale. Cette fonction fonctionne sous la forme de la décomposition SVD en récupérant les matrices U, S et Vt. La fonction affiche les matrices U, S et Vt. Cette fonction renvoie l'image en noir et blanc avec une diminution de la marque lorqu'on appelle la fonction avec l'image en noir et blanc.

3. Enfin, on écrit la fonction restaurer_image_couleurs qui prend en argument une image en couleur , le masque et la valeur de k optimale. Cette fonction fonctionne comme la fonction restaurer_image_noir_et_blanc. Finalement la focntion renvoie l'image en couleur avec une diminution de la marque quand on appelle la fonction avec l'image en couleur comme argument.