FINTECH

Programmation pour la finance

(28 heures)

Compétences informatiques : Langage de programmation interprété Python, le paradigme orienté objet et ses principes : encapsulation, abstraction, héritage et polymorphisme, utilisation de packages : numpy, pandas, …

Connaissances financières : Mouvement brownien, valeur actualisée, fonction de densité, sensibilité

Travail à faire – Assurance de portefeuille ou « Stop loss »

Fichier/données : À vous de simuler le processus de prix d'un actif

Énoncé : Après avoir postulé à une offre d'emploi pour le poste d'« Assistant gérant de portefeuille en multi assets », la responsable opérationnelle Madame Carol est intéressée par votre profil et souhaite vous faire passer un test de recrutement dont l'objectif final est d'étudier une stratégie d'allocation dynamique, nommée « **Stop Loss** ».

Selon la définition qu'en donne **Poncet et Portrait** (1997), l'assurance de portefeuilles est « *une stratégie d'allocation dynamique permettant de limiter en cas de baisse du marché la perte de valeur d'un portefeuille tout en lui laissant la possibilité de profiter, dans une plus ou moins grande mesure d'une hausse du marché* ».

La méthode du « **stop loss** » constitue la méthode la plus simple d'assurance de portefeuille.

Votre étude empirique permet de répondre aux différentes questions suivantes :

- Quelle(s) est/sont la/les limite(s) de cette stratégie, en apparence séduisante ?
- Comment évolue la sensibilité de la distribution de la valeur terminale par rapport aux paramètres suivants : **la volatilité de l'actif risqué**, **le plancher garanti que se fixe à priori l'utilisateur**, **le niveau de tolérance retenu** et enfin **la fréquence de recomposition du portefeuille dynamique géré** ?

Consigne : Développer vos programmes informatiques sous la forme d'objets et les interactions entre ces derniers (les objets) vous permettront d'atteindre vos objectifs, comme dans la « vraie » vie des êtres humains. Effectivement, pour accomplir ses tâches du quotidien, un individu utilise uniquement des objets/des outils : un four pour cuire, une voiture ou un vélo pour se déplacer…

A. L’étude de cette stratégie de portefeuille va débuter par la simulation du processus de formation du prix d’un actif. Depuis les travaux pionniers de **Black et Scholes**, la modélisation retenue pour représenter la dynamique d’un prix de l’actif sous-jacent dans un monde risque-neutre repose sur l’utilisation d’un mouvement brownien géométrique de type :

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

(A.1)

Avec r qui représente la valeur du taux sans risque, σ la volatilité de l’actif sous-jacent, et où z est un processus de **Wiener**. Ce type de modélisation est adapté pour le processus de suivi par les actions et les indices boursiers mais il est impropre pour modéliser la dynamique des taux d’intérêts par exemple.

Cependant, ce type de processus continu ne pouvant être construit par des machines travaillant par nature sur des valeurs discrètes, il doit faire l’objet d’une discrétisation préalable en N intervalles de longueur $\Delta t = T/N$. On utilise pour ce faire l’approximation d’**Euler** d’une diffusion qui permet de réécrire l’équation sous la forme suivante :

$$S(t + \Delta t) - S(t) = rS(t)\Delta t + \sigma S(t)c\sqrt{\Delta t}$$

(A.2)

Où c est un nombre aléatoire issu d’une distribution normale standard. Il est en revanche plus précis de simuler ln (S) plutôt que S. L’application du **lemme d’Itô** permet de calculer la dynamique de ln (S) qui s’écrit :

$$d\ln(S) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

(A.3)

Et qui peut être discrétisé à l’aide de l’approximation suivante :

$$\ln\left(S(t + \Delta t) - ln(S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma c\sqrt{\Delta t}\right.$$

(A.4)

Ou, de façon équivalent, par passage à l'exponentielle de chacun des membres :

$$S(t+\Delta t) = S(t)exp\left\{\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)\Delta t + \ \sigma c\sqrt{\Delta t}\right\}$$

(A.5)

En règle générale, il est à noter que dans le cas où seule intervient dans l'évaluation de l'actif $S(t)$ à l'échéance, l'expression précédente devient :

$$S(T) = S(0)exp\left\{\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T + \ \sigma c\sqrt{T}\right\}$$

(A.6)

Veuillez créer un objet en Python afin de simuler le processus de prix d'un actif, à partir de la fonction de discrétisation d'un processus brownien géométrique (équation *A.6*). Votre programme permet également de générer un rendu visuel de vos données simulées.

B. Le principe de la méthode est de pouvoir garantir un certain pourcentage (déterminé par l'utilisateur de la stratégie) de la valeur du placement initial à une date future, notée T, préalablement fixée. La réalisation de cet objectif passe par l'utilisation **de deux actifs** :

- Un <u>**actif sans risque**</u> rapportant un taux certain $r_f(t)$ sur l'intervalle $]t-1;t], = 1, \ldots, T$, et qui joue avant tout ici le rôle d'actif de référence ;
- <u>**L'actif**</u> (où le portefeuille d'actifs) <u>**risqué**</u> que l'on souhaite assurer (éventuellement partiellement) et dont la valeur initiale est notée $S(0)$.

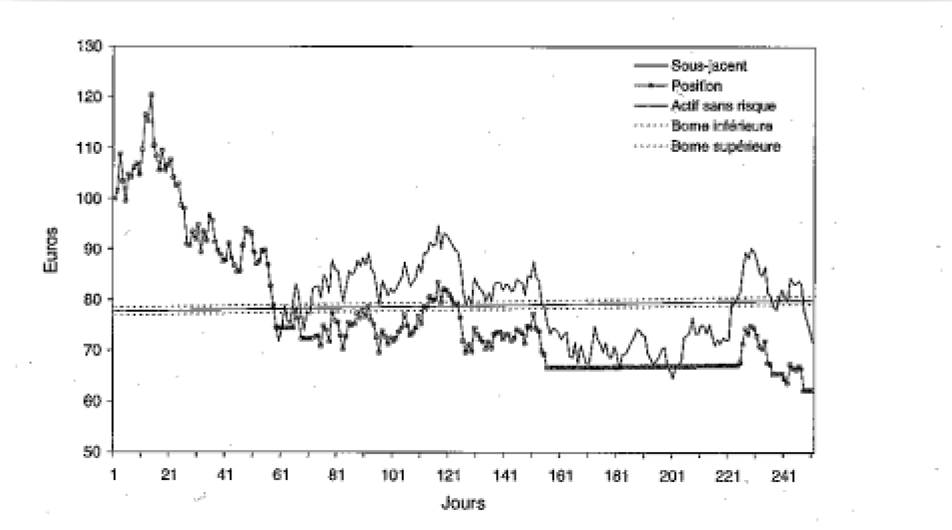
En supposant que l'utilisateur (de cette stratégie) désire garantir à l'échéance T un pourcentage x de la valeur initiale de son placement, le montant de référence pour le placement dans l'actif sans risque est égal à la valeur actualisée du montant à garantir, soit :

$$\boldsymbol{M(0)} = \mathbf{xS(0)}\boldsymbol{e^{-r_f T}}$$

Afin de garantir ce montant et profiter dans le même temps d'une hausse de l'actif risqué, l'utilisateur commence par investir la totalité des fonds, nommé ici à $S(0)$, dans l’actif risqué. Dès lors, la gestion de sa position sera guidée par les deux règles suivantes :

1) La position de **l’actif risqué** est intégralement liquidée pour être investie dans l’actif sans risque dès lors que $S(t) < \boldsymbol{M(t)}$;
2) La position en **actif sans risque** est entièrement liquidée pour être investie dans l’actif risqué lorsque $\boldsymbol{S(t) > M(t)}$.

Veuillez concevoir un programme dont le but est d’appliquer cette stratégie d’allocations d’actifs. Quelle(s) limite(s) relevez-vous lors de l’application de cette stratégie ? Auriez-vous des solutions ou conseils à proposer à un investisseur ?



C. Comme vous pouvez le remarquer de manière visuelle, les risques encourus par les investisseurs qui utilisent cette stratégie du « *Stop-Loss* » dépendent fortement des paramètres utilisés lors de la mise en place de la stratégie. Par conséquent, il serait intéressant d'étudier la sensibilité de la distribution de la valeur terminale de la stratégie « *Stop-Loss* » pour différents niveaux de paramètres. De façon naturelle, il est décidé d'étudier la sensibilité des 4 paramètres suivants : **la volatilité de l'actif risqué**, **le niveau de tolérance retenu**, **le plancher garanti** que se fixe à priori l'investisseur au départ et enfin **la fréquence de recomposition du portefeuille dynamique géré**. Autrement dit, l'étude consiste à analyser de manière visuelle l'ampleur de la réaction de ces 4 paramètres en faisant, tour à tour varier ces paramètres (niveau de tolérance retenu, volatilité de l'actif risque, le montant plancher garanti et enfin la fréquence de révision du portefeuille). Pour ce faire, il est demandé d'avoir recours à l'estimation de la densité pour chaque paramètre par la méthode du noyau sur la base de 1 000 trajectoires (*simulations*).

   En première approche, la fonction de densité de la distribution d'une variable aléatoire peut-être visualisée à partir de l'histogramme des fréquences associées aux différentes classes de la variable aléatoire étudiée que l'on aura pu identifier. Cependant, comme le note **Saporta** (*1999*), le problème qui se pose alors est celui du nombre de classes à retnir : « un trop faible nombre de classes fait perdre de l'information et aboutit à gommer les différences pouvant exister entre des groupes de l'ensemble étudié, En revanche, un trop grand nombre de classes aboutit à des graphiques incohérents : certaines classes deviennent vides ou presque […] ». Par ailleurs, un diagramme de fréquences est une fonction en escalier alors que la densité d'une variable aléatoire continue (hypothèse par exemple pour les taux de rentabilité d'une action) est une fonction continue. L'estimation par la méthode du noyau permet de lever ces problèmes. La philosophie de cette méthode pourra être comprise en considérant dans un premier temps le noyau uniforme : $K(u) = I_{\frac{1}{2}[u]\leq 1}$ où I désigne la fonction indicatrice. En supposant que l'on dispose de n observations indépendantes $x_1, x_{2,,\ldots,}x_n$ d'une variable aléatoire X, l'estimation de la densité X au point x (avec $x \in \lfloor x_1, x_{2,,\ldots,}x_n \rceil$) pour un noyau K est donnée par l'expression :

$$f_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)$$

   Dans le cas d'un noyau uniforme, l'équation précédente signifie tout simplement que l'on estime la densité $f_h(x)$ au point x par la fréquence relative des observations figurant dans l'intervalle $\lfloor x - h/2, x + h/2 \rfloor$. Au passage, il est <u>**nécessaire de bien s'assurer**</u> que $\sum_n f_h(x) = 1$, condition nécessaire pour que $f_h(.)$soit bien une fonction de densité.

   Le défaut de ce type de noyau est qu'il s'écarte trop peu encore des diagrammes de fréquences standard et fournit donc des représentations de densité peu régulières. Le principal problème tient ici a ce que tout x_i dans le voisinage de x se voit attribuer le même poids dans le calcul de la fréquence relative $f_h(x)$. Il est possible de gagner en continuité dans la représentation de la fonction de densité en attribuant à chacun des x_i situés dans le voisinage de x un poids qui soit fonction de la distance $\lfloor x - x_i \rfloor$. Une fonction de densité (noyau) symétrique (attribuant donc le même poids à deux poids situés de part et d'autres mais à même distance de x) peut servir de règle d'attribution des poids. Dans la pratique, les deux noyaux les plus couramment utilisés sont le noyau **gaussien** (le caractère gaussien de la fonction de lissage utilisée pour calculer le poids des x_i n'implique en rien que la variable X soit distribué selon une loi normale) et le noyau d'**Epanechnijov**, définis comme suit :

- **Noyau gaussien :** $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$

- **Noyau d'Epanechnikov :** $K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) I_{\lfloor u \rfloor \leq 1}$

Bien entendu se pose le problème du choix de la valeur de h (constante de lissage ou « *bandwidth* ») à retenir. Une expression communément admise de h dans le cas d'un noyau gaussien est la forme $h = c\delta n^{1/5}$ où n désigne le nombre d'observations, δ la valeur estimée de l'écart-type des observations et c une constante dont la valeur dépend du degré du lissage souhaité. Dans la pratique, les valeurs $c = 3$ ou $c = (4/5)^{1/5}$ (**Silverman**, *1986*) sont les plus fréquemment rencontrées. C'est cette dernière que nous utiliserons lors de cette étude.

1) Avant d'étudier la sensibilité des paramètres de la stratégie du « Stop-Loss », veuillez à partir des cours de marché de l'action Michelin présent dans le fichier texte « **Michelin_20112023_20112024.csv** », tracer, sur le même graphique, la représentation de la densité pour le titre Michelin ainsi que la densité gaussienne.

Afin de vous aider, comme à l'image d'une recette en cuisine, veuillez trouver ci-dessous 4 étapes à suivre :

- Calculer les taux de rentabilité aux dates observées pour le titre Michelin ;
- Trier ces taux en ordre croissant ;
- Calculer pour chaque observation de taux la valeur de $f_h(x)$, ainsi que la valeur de densité associée pour une densité gaussienne (à titre de comparaison) ;
- Générer deux courbes (fonction de densité pour le titre financier Michelin et la fonction de densité gaussienne) sur une même représentation, en utilisant la fonction plot du sous-module *pyplot* du module **Matplolib** ;

2) Veuillez concevoir un programme qui permet d'étudier la sensibilité de la distribution de la valeur terminale (ou valeur de la position à l'échéance) en fonction de différents niveaux de paramètres, en faisant tour à tour varier le niveau **de tolérance retenu (1)**, la **volatilité de l'actif risqué (2)**, le **plancher garanti (3)** et enfin la **fréquence de recomposition du portefeuille (4)**.