第八次习题课

一、部分期中题

T1. 求空间四点 $A(1,1,0)$, $B(4,4,5)$, $C(11,9,8)$, $D(1,-1,5)$ 构成的四面体体积.

解：由 P66 混合积的几何意义知 $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|=\frac{41}{3}$

注：一些同学没乘 $\frac{1}{6}$，一些同学乘了 $\frac{1}{2}$ / $\frac{1}{3}$ / $\frac{1}{4}$ / $\frac{\sqrt{6}}{4}$ (???)，还有同学的体积是负数 (?????)

T5. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y\ln(x^2+y^2)$

解：(法一) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ \theta\in[0,2\pi))$

则 $I=\lim\limits_{r\to0^+}2r^3\ln r\cdot(\cos^2\theta\sin\theta)$

由 $\lim\limits_{r\to0^+}r^3\ln r=0$，$\cos^2\theta\sin\theta$ 为有界量，知 $I=0$.

(法二) 因 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$

又 $0\le|x^2y\ln(x^2+y^2)|\le|x(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|$，所以 $I=0$.

注：典型的错误方法1：取 $y=kx$，代入知极限为 0，所以 $I=0$. 错误的原因是这只能说明取 $y=kx$ 这种方式时极限为 0，但不能证明取其他方式时 (如 $y=x^2$) 极限仍为 0. 对于证明极限不存在的题这个方法有效，但对于证明极限存在或求极限时不能这样做！

典型的错误方法2：求一个累次极限，然后认为重极限 = 累次极限. 错误的原因是没有先说明重极限存在，因定理 9.2.11 要求重极限和累次极限都存在，它们才相等.

T7. $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{|xy|}\sin(\ln\sqrt{x^2+y^2}) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$. 求 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$ 并讨论 f 在 $(0,0)$ 处的可微性.

解: $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

对于可微性, 则看 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{|xy|}\sin(\ln\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ 不存在}$$

(如取 $y=kx\to0$, 则原式 $=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{|k|}{1+k^2}}\sin(\ln(\sqrt{1+k^2}|x|))$ 不存在, 所以原极限一定不存在)

所以 f 在 $(0,0)$ 不可微.

注: 典型错误方法: 认为 $(0,0)$ 处两个偏导数存在, 所以可微. 这显然不对, 见上次课的讲义.

T9 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛.

解：这是交错级数，且 $n+1-\ln(n+1)>n-\ln n$ $(\ln(1+\frac{1}{n})<1)$，所以 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调递减趋于0，原级数收敛.

而 $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$ 且 $\sum\frac{1}{n}$ 发散. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 条件收敛.

T10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2n+1})x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

分析：直接计算 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{x^2}{1-x^2}+1-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$

注意因 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-x^2}+1-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=0$，因此不需要单独写"$S(x)=0,\ x=0$"

T12. 将 $f(x)=x,\ 0\le x\le\pi$ 展开为正弦级数，并写出和函数.

解：先把 $f(x)$ 延拓至 $(-\pi,\pi]$ 上，再展开为 Fourier 级数：

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$，其中 $a_0=0,\ a_k=0$.

$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{k}$，因此得 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的展开式为

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{k}\sin kx$. 其和函数为 $S(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<\pi\\ 0, & x=\pi\end{cases}$

二、多元极值问题

1、(极值点的必要条件) 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内可偏导，若 P_0 是 $f(x,y)$ 的极值点，则必有 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$.

2、(极值点的充分条件) 设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处有二阶连续偏导数，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$.

(1) $B^2-AC<0$，$A>0$，则 $f(x,y)$ 在 P_0 取极小值；

(2) $B^2-AC<0$，$A<0$，则 $f(x,y)$ 在 P_0 取极大值；

(3) $B^2-AC>0$，则 P_0 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

(4) $B^2-AC=0$，则 $f(x,y)$ 在 P_0 处的情况不确定.

3、(条件极值) 设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在连续偏导数，且 $g(x,y)$ 在点 P_0 处的偏导数不全为零，则在条件 $g(x,y)=0$ 下，$f(x,y)$ 在 P_0 处有极值的必要条件是存在常数 λ，使得

$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda g_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda g_y'(x_0,y_0)=0 \\ g(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

P147 56(5) 判断 $f(x,y)=3axy-x^3y^3\ (a>0)$ 是否有极值.

解：这是无约束条件的极值问题，所以从二阶偏导入手.

$f_x'(x,y)=3ay-3x^2y^3$，$f_y'(x,y)=3ax-3y^2x^3$，则由 $f_x'=f_y'=0$ 解得

$x=y=0$ 或 $x^2y^2=a$. 又 $f_{xx}''(x,y)=-6y^3x$，$f_{xy}''(x,y)=3a-9x^2y^2$，$f_{yy}''(x,y)=-6x^3y$.

则 $A=f_{xx}''(0,0)=0$，$B=f_{xy}''(0,0)=3a$，$C=f_{yy}''(0,0)=0$

从而 $B^2-AC>0$. $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

对 $x^2y^2=a$ 的点，$B^2-AC=0$，需要进一步判断.

令 $xy=t$. $g(t)=f(x,y)=3at-t^3$，则 $g'(t)=3a-3t^2$，$g''(t)=-6t$.

又 $x^2y^2=a$ 时对应 $t=\sqrt{a}$ 或 $t=-\sqrt{a}$. 且此时 $g'(\pm\sqrt{a})=0$. $g''(\sqrt{a})=-6\sqrt{a}<0$,

$g''(-\sqrt{a})=6\sqrt{a}>0$，从而 $g(t)$ 在 $t=-\sqrt{a}$ 处取极小值，在 $t=\sqrt{a}$ 处取极大值.

故 $f(x,y)$ 在 $xy=\sqrt{a}$ 处取极大值，极大值为 $g(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}$

在 $xy=-\sqrt{a}$ 处取极小值，极小值为 $g(-\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}$.

补充：求 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大最小值，其中 $b^2-ac>0$，$a、b、c>0$.

分析：求闭区域上的最值，一般先求在区域内部的极值，再求边界上的（条件）极大极小值，然后比较得到最值.

1° 先求 f 在区域内部的可疑点. 令 $f_x'=f_y'=0$ 得 $\begin{cases} ax+by=0 \\ bx+cy=0 \end{cases}$.
因 $ac-b^2\ne 0$，故只有唯一解 $(0,0)$. $f(0,0)=0$.

2° 再求 f 在边界上的可疑点.
令 $L=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1)$. 令 $L_x'=L_y'=0$ 得

$$\begin{cases} (a-\lambda)x+by=0 & ① \\ bx+(c-\lambda)y=0 & ② \\ x^2+y^2-1=0 & ③ \end{cases}$$

因 $x^2+y^2=1$ 上 $(x,y)\ne(0,0)$，要想这个方程有非零解，必有 $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\dfrac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

注意 ①$\cdot x$ + ②$\cdot y$ 并结合 ③ 可得此时 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_{1,2}$

3° 比较上述所有可疑点的值，知在 $x^2+y^2\le 1$ 上

$$\max f(x)=\max\{0,\lambda_1,\lambda_2\}=\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

$$\min f(x)=\min\{0,\lambda_1,\lambda_2\}=\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

注：这题只要求求出最值，所以不用求出极值点、只要把所有可疑点处的值进行比较即可.