第十次习题课

提醒:

定理:若函数 f 在点 M_0 处可微,则 f 在 M_0 处沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数均存在. 若 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma$.

注:1° f 在某点处沿任何方向导数存在,也无法推出 f 在该处连续(例9.7.4),更不一定可微

2° 若 f 不可微,则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ 未必有上述定理中的形式(见P149 82)

一、二重积分的计算(强烈建议大家先复习一下一元定积分的方法)

1、对称性定理:设 $f(x,y)$ 是定义在有界闭区域 D 上的可积函数,

(1) 若 $D=D_1\cup D_2$, D_1 与 D_2 关于 y 轴对称,那么

① 当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

② 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$

(2) 若 $D=D_1\cup D_2$, D_1 与 D_2 关于 x 轴对称,那么

① 当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

② 当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$

(3) 若 $D=D_1\cup D_2$, D_1 与 D_2 关于原点对称,那么

① 当 $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

② 当 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$

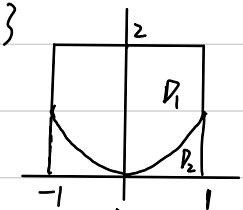
(4) 若 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{4} D_i$ 是关于 x 轴, y 轴均对称的区域,其中 D_i 为闭区域 D 在第 i 个象限的区域,那么

① 当 $f(-x,y)=f(x,y)$, $f(x,-y)=f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

② 当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时, $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=0$

(5) 若 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(y,x)\,dxdy$

例：$\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$ ，$D=\{(x,y)\mid |x|\le 1,\ 0\le y\le 2\}$



解：由对称性，积分 $I = 2\iint\limits_{D_1}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$

$+\ 2\iint\limits_{D_2}\sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$

$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$

则 $I = 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy + 2\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy$

$= 2\int_0^1\left[\frac{2}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx + 2\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(x^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^3\right]dx$

$= \frac{4}{3}\int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx + \frac{1}{3}$

令 $x=\sqrt{2}\sin t$，则 $\int_0^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^4 t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)^2\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos^2 2t + 2\cos 2t)\,dt$

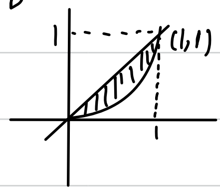
$= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt + \sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} + 1$

故 $I = \frac{4}{3}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right) + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}$

2. 基本方法：分区域计算、化为累次积分计算

例：设 D 为由 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的区域，计算 $I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$.



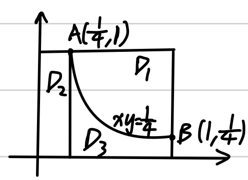
解：$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$，则

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx=1-\sin 1$$

注：D 也可以写成 $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ y\le x\le\sqrt{y}\}$，但此时 $I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx$，而 $\frac{\sin x}{x}$ 无初等原函数，积不出来. 因此选择合适的累次积分顺序很重要.

例：求 $I=\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$



解：如图，$\left|xy-\frac{1}{4}\right|=\begin{cases}xy-\frac{1}{4}, & x\in D_1\\ \frac{1}{4}-xy, & x\in D_2\text{或}D_3\end{cases}$

则 $I=\iint\limits_{D_2\cup D_3}\left(\frac{1}{4}-xy\right)dxdy+\iint\limits_{D_1}\left(xy-\frac{1}{4}\right)dxdy$

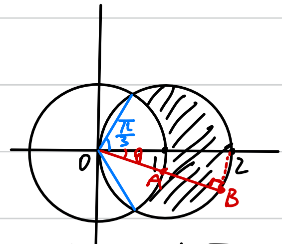
$$=\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_0^1\left(\frac{1}{4}-xy\right)dy+\int_{\frac{1}{4}}^1 dx\int_0^{\frac{1}{4x}}\left(\frac{1}{4}-xy\right)dy+\int_{\frac{1}{4}}^1 dx\int_{\frac{1}{4x}}^1\left(xy-\frac{1}{4}\right)dy$$

$$=\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\ln 2+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}+\ln 2\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}+\ln 2\right)$$

3、坐标变换：坐标变换前后积分区域的形状是会发生变化的，可以用图示法、线性规划思想等来确定坐标变换后的区域.

例1（P190 12(2)）$D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2x\}$，画出D的图形并将 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 化为极坐标系下的累次积分.



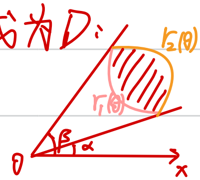
解：D如右图。令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

由图可知，在极坐标下，θ 的范围是 $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$，且对这一范围内的任一个 θ，r 的范围是 $[1,2\cos\theta]$（图中从A到B之间的线段）

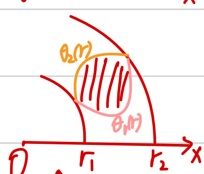
因此 $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr.$$

注：极坐标变换实际上只有下面三种情况：设积分区域为D：

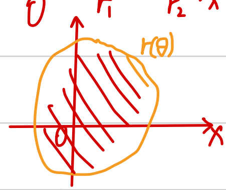


① 原点 $O\notin D$，则 $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$

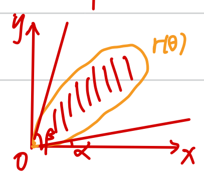
或 $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_{r_1}^{r_2}rdr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta$$



② $O\in \text{int}\,D$（内点），则 $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$



③ $O\in \partial D$（边界点），则 $$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,rdr$$



一般的坐标变换：$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

例2：求 $I=\iint\limits_{D} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$，D是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域.

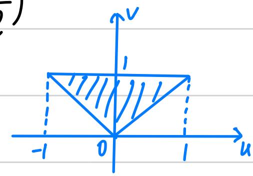
解：令 $u=x-y,\ v=x+y$，则 $x=\frac{1}{2}(u+v),\ y=\frac{1}{2}(u-v)$

由 $\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0 \\ x+y\leq 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \frac{1}{2}(u+v)\geq 0,\ \frac{1}{2}(u-v)\geq 0 \\ v\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq v\leq 1 \\ v\geq -u \\ v\geq u \end{cases}$

所以在 uv 坐标系下的新区域 $D'=\{(u,v)\mid 0\leq v\leq 1,\ v\geq -u,\ v\geq u\}$

$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}$，则 $I=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2}e^{\frac{u}{v}}\,dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\,du$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e-\frac{1}{e}\right)dv=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$



注：若坐标变换比较简单，则一般可以用类似于线性规划的方法确定新的积分区域.

补充: 10.3 15

(2) $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$, $D=\{x^2+y^2\le 1\}$

解: 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,rdr=\pi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,dr^2$

令 $u=r^2$, 则 $\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,dr^2=\int_0^1\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du=\int_0^1\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du=\left(\arcsin u+\sqrt{1-u^2}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{2}-1$

所以 $I=\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

(3) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, $D=\{x^2+y^2\le x+y+1\}$

解: $D=\{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}\}$

令 $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}r\cos\theta$, $y=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}r\sin\theta$, 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\frac{3}{2}r$

$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1+\frac{3}{2}r(\cos\theta+\sin\theta)\right)\cdot\frac{3}{2}r\,dr=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)\right)d\theta$

$=\frac{3}{2}(\pi+0)=\frac{3}{2}\pi$