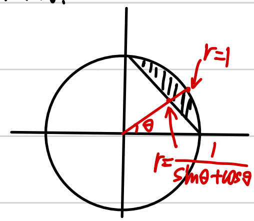
第十一次习题课

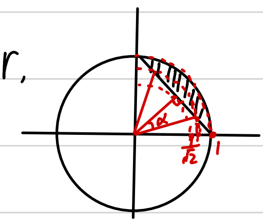
一、二重积分计算补充题

P190. 13(1) 将 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 化为极坐标下的累次积分.



解：原点在积分区域 D 外部，且在极坐标下 D 的边界由 $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$ 和 $r=1$ 围成.

① 先积 r 后积 θ：θ 的范围是 $[0, \frac{\pi}{2}]$，而对每一个固定的 θ，$\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \le r \le 1$（这可以从 D 边界的表达式得到，也可从图上直接看出. 因此答案为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.



② 先积 θ 后积 r：r 的范围是 $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. 对每一个固定的 r，由图可知 $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{r} = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}$

因此 $\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}r} \le \theta \le \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}$

所以答案为 $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r dr \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta$

P193 26. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱和 x 轴所围成均匀薄片关于 x 轴的转动惯量.

解：根据公式实际上是要求积分 $I=\iint_D y^2\rho\,dxdy$. ρ 为密度常数.

因 $0\le t\le 2\pi$, 所以 $0\le x\le 2\pi a$, 且

$$I=\rho\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi a}y^3(x)\,dx=\frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi}\left(y(x(t))\right)^3d(x(t))$$

$$=\frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\frac{16a^4}{3}\cdot\rho\int_0^{2\pi}\sin^8\left(\frac{t}{2}\right)dt=\frac{35}{12}\pi a^4\rho$$

注：物理应用和几何应用的问题本质就是重积分的计算问题，记准公式然后计算即可.

二、三重积分的计算

1、对称性定理

(1) 若 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\Omega_1$ 和 Ω_2 关于 xOy 平面对称，则

① 若 $f(x,y,z)=f(x,y,-z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega_1} f\,dxdydz$.

② 若 $f(x,y,z)=-f(x,y,-z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=0$.

(2) 若 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\Omega_1$ 和 Ω_2 关于 z 轴对称，则

① 若 $f(x,y,z)=f(-x,-y,z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega_1} f\,dxdydz$

② 若 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=0$

(3) 若 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\Omega_1$ 和 Ω_2 关于原点对称，则

① 若 $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega_1} f\,dxdydz$

② 若 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=0$

(4) 若 $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{8}\Omega_i$ 关于三个坐标平面均对称，Ω_i 表示 Ω 在第 i 卦限中的部分，

① 若 $f(x,y,z)$ 分别是关于 x,y,z 的偶函数时，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=8\iiint\limits_{\Omega_i} f\,dxdydz$

② 若 $f(x,y,z)$ 至少是关于一个变量的奇函数，$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz=0$.

2、基本方法：投影法和截割法

① 若积分区域在某个平面上的投影区域比较简单，且积分上下限容易写出，则可以考虑投影法

② 若某个变量对应的截平面与区域的截交部分形状较简单，且截交部分上面二重积分计算较易，则可以考虑截割法

当然理论上最终都能化成一个三次的累次积分.

3、柱坐标与球坐标：如果平面极坐标变换及其积分上下限的确定方法掌握了，那么这两种变换其实是类似的.

若积分区域中有锥体或球体，被积函数中有平方和的形式，则用球坐标更方便；有柱体时柱坐标更方便.

例. P193 22.16) $I=\iiint\limits_V (2x+3y+6z)^2 dxdydz$，$V=\{4x^2+9y^2+36z^2\leq 36\}$

解：$(2x+3y+6z)^2 = 4x^2+9y^2+36z^2+12xy+36yz+24xz$

V关于任一坐标平面对称，由前述对称性定理(1)知 (只要关于某个变量为奇函数，则在V上积分就为0)

$\iiint\limits_V xy\,dxdydz = \iiint\limits_V yz\,dxdydz = \iiint\limits_V xz\,dxdydz = 0$

所以 $I = \iiint\limits_V (4x^2+9y^2+36z^2)dxdydz$. 令 $\begin{cases} 2x = 6\rho\sin\varphi\cos\theta \\ 3y = 6\rho\sin\varphi\sin\theta \\ 6z = 6\rho\cos\varphi \end{cases}$，$|J| = 6\rho^2\sin\varphi$

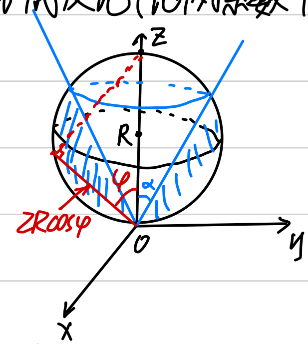
则 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 36\rho^2 \cdot 6\rho^2 \sin\varphi\, d\rho$

$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 216\rho^4 \sin\varphi\, d\rho$

$= \frac{864}{5}\pi$

注：这一例综合运用了对称性、球坐标变换等内容，值得仔细体会.

例 P194 27、在锥面 $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 之外，球面 $x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$ $(R>0)$ 之内的立体，其中任一点密度与该点到 z 轴的距离平方成反比（比例系数 1）求该立体关于 z 轴的转动惯量.



解：由条件，密度 $\rho(x,y,z)\cdot(x^2+y^2)=1$. 所以

$$I=\iiint_V \rho(x,y,z)\cdot(x^2+y^2)dxdydz=\iiint_V dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\, d\rho$$

$$=2\pi\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{8R^3}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi=-\frac{16\pi R^3}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi\Big|_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha$$

4、一般的变量替换

令 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$, 则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$$

与二重积分类似，将 V 的边界曲面的函数式用 $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ 替换，即得到新区域 V' 的边界曲面的函数式.