一、多元函数的微分

1、偏导数：在一个多元函数中，只针对某个变量求导，而将其余变量均视为常数.

2、全微分：若二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 某邻域内有定义，且存在常数 A,B，对充分小的 $\Delta x,\Delta y$，均有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

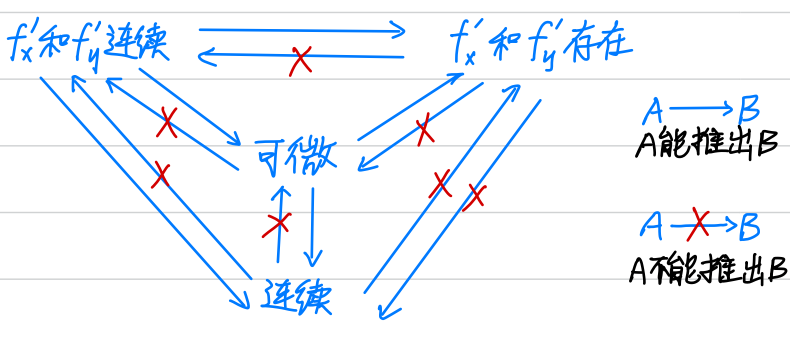
其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微. 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 P_0 的全微分，记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y$

此外，若 $z=f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 处可微，因 $dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$，则有 $dz=f'_x(x,y)\,dx+f'_y(x,y)\,dy$.

若要用定义判断 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的可微性，只要看是否有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

3、多元函数的连续性、可微性、偏导数的存在性与连续性之间关系复杂.



$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处讨论

例：证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在全平面处处可微，

但 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

证：$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2}=0$

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y^2}=0$

而当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f_x'(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$f_y'(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x'(x,y)$ 不存在. 同理 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_y'(x,y)$

不存在. 所以 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

对于可微性，因在 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 上 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 连续，所以 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\neq 0$ 处处可微. 而在 $(0,0)$ 的可微性需要用定义判断.

因 $f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y=f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to 0} r\sin\frac{1}{r^2}=0$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也可微. 综上 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 处处可微.

4、高阶偏导数

定理：若 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

高阶偏导的求解只需一阶一阶求即可. 不过要注意求导的顺序，有时 $f''_{xy}(x_0,y_0)$ 与 $f''_{yx}(x_0,y_0)$ 是不同的. 不过若它们在 (x_0,y_0) 都连续，则上述定理表明 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

例（P145 34.）$z=f(x^2-y^2,x\sin y)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：用 f_1' 表示 f 对第一个变量求导，f_2' 表示 f 对第二个变量求导，即若有 $f=f(u,v)$，则 $f_1'=\frac{\partial f}{\partial u}$，$f_2'=\frac{\partial f}{\partial v}$

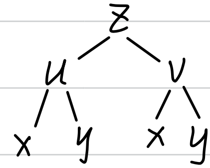
则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\sin y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x\cdot\left(f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot x\cos y\right)+\cos y\cdot f_2'\\&\quad+\sin y\left(f_{21}''(-2y)+f_{22}''\,x\cos y\right)\\&=-4xy\,f_{11}''+x\sin y\cos y\,f_{22}''+(2x^2\cos y-2y\sin y)f_{12}''+\cos y\cdot f_2'\end{aligned}$$

二、复合函数的偏导数

若 $z=f(u,v)$, $u=g(x,y)$, $v=h(x,y)$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



可以用右边的图来辅助求解：先画出复合函数变量之间的层次关系，其中最底层包含被求偏导的变量。然后按自顶向下的顺序寻找所有可能的路径，每条路径就是偏导数中的一项。

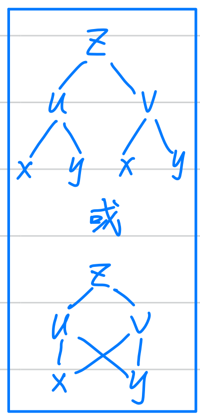
例如求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，可以看到最底层有两个 x，从 z 到 x 有两条路径，分别为 $z\to u\to x$ 和 $z\to v\to x$。因此 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为 $\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ 之和。

当变量很多、复合关系很复杂时，这一方法尤为有用。

提醒：求偏导的结果中应尽量避免包含中间变量

例：(P145 38) 设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

若引进变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+3y\end{cases}$，将上述方程变为关于 u,v 的方程.



解：$z=z(u,v)=z(u(x,y),v(x,y))$

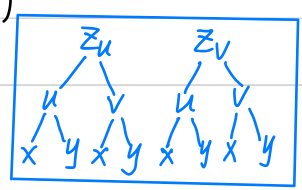
$z_x=z_u u_x+z_v v_x=z_u+z_v$, $z_y=z_u u_y+z_v v_y=-2z_u+3z_v$

$z_{xx}=z_{uu}u_x+z_{uv}v_x+z_{vu}u_x+z_{vv}v_x$

$\quad=z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}$

$z_{yy}=-2(z_{uu}u_y+z_{uv}v_y)+3(z_{vu}u_y+z_{vv}v_y)$

$\quad=4z_{uu}-12z_{uv}+9z_{vv}$



$$z_{xy}(=z_{yx}) = z_{uu}u_y + z_{uv}v_y + z_{vu}u_y + z_{vv}v_y$$
$$= -2z_{uu} + z_{uv} + 3z_{vv}$$

代入原方程得：

$$6(z_{uu}+2z_{uv}+z_{vv}) + (-2z_{uu}+z_{uv}+3z_{vv}) - (4z_{uu}-12z_{uv}+9z_{vv}) = 0$$

即 $z_{uv}=0$. (注：本题也可以先得到 $x=\frac{1}{5}(3u+2v)$, $y=\frac{1}{5}(v-u)$后再算，但这样最后需反解方程组，比较麻烦)

三、隐函数的偏导数

1、若隐函数方程简单，可以考虑直接求偏导，也可以考虑用书本定理 9.5.1 和 9.5.2. 书本例 9.5.4 的两种方法就对应了这两种套路，值得体会.

2、若为隐函数方程组，则考虑定理 9.5.6.

注：定理 9.5.6 中偏导数实际上是用线性代数中解线性方程组的克莱默法则解出来的. 定理要求 Jacobi 行列式 $J\neq 0$ 实际上也是克莱默法则保证了偏导数有唯一解.

例 (P146 46) 设 $u=f(x,y,z)$, $g(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$, 其中 f,g 均有一阶连续偏导数, $\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$. 求 $\frac{du}{dx}$.

解：对 $g(x^2,e^y,z)=0$ 两边对 x 求导得：

$$2x g_1' + e^y\cos x\, g_2' + \frac{dz}{dx}g_3' = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{g_3'}(2x g_1' + e^y\cos x\, g_2')$$

于是：

$$\frac{du}{dx} = f_1' + f_2'\cdot\cos x + f_3'\cdot\frac{dz}{dx}$$
$$= f_1' + \cos x\cdot f_2' - \frac{f_3'}{g_3'}(2x g_1' + e^y\cos x\, g_2')$$

注：本题也可以用隐函数组求导定理做，但较麻烦.

令 $F(x,y,u,z)=u-f(x,y,z)$，$G(x,y,u,z)=g(x^2,e^y,z)$ （此时先不管 $y=\sin x$）

则 $J=\begin{vmatrix} F_u' & F_z' \\ G_u' & G_z' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -f_3' \\ 0 & g_3' \end{vmatrix}=g_3'=\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$

所以 $\begin{cases} F(x,y,u,z)=0 \\ G(x,y,u,z)=0 \end{cases}$ 可以在所有有定义的点处确定二元函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ z=z(x,y) \end{cases}$

且 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{g_3'}\begin{vmatrix} -f_1' & -f_3' \\ 2xg_1' & g_3' \end{vmatrix}=-f_1'+\frac{2xf_3'g_1'}{g_3'}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-\frac{1}{g_3'}\begin{vmatrix} -f_2' & -f_3' \\ e^y g_2' & g_3' \end{vmatrix}=-f_2'+\frac{e^y f_3' g_2'}{g_3'}$

再看 $\frac{du}{dx}$. 因此时 $y=\sin x$，因此实际上 u 为一元函数 $u=u(x,y(x))$

则 $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=-f_1'+\frac{2xf_3'g_1'}{g_3'}+\left(-f_2'+\frac{e^y f_3' g_2'}{g_3'}\right)\cos x$

$=f_1'+\cos x\cdot f_2'-\frac{f_3'}{g_3'}(2xg_1'+e^y\cos x\, g_2')$