# 第十三次习题课

## 一、曲线积分与路径无关性

定理11.4.2告诉我们曲线积分在一些条件下是与路径无关的.这启示我们在算这些曲线积分时,有时可以考虑选取另一条更简单的路径来计算.

此外对于复连通区域,也能根据"绕洞定理"11.4.5来更换路径.

例(P227 24(2)) $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$. $L:(x-1)^2+y^2=4$,取逆时针方向.

解:令 $P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$,则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

但P和Q在(0,0)不连续.选取 $L_1: 4x^2+y^2=1$,取正方向.

由定理11.4.5知 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1} xdy-ydx$

令 $x=\frac{1}{2}\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $0\le\theta\le2\pi$,则

原式 $=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\cdot\frac{1}{2}\sin\theta)d\theta=\pi$

注:可以看到,新曲线如果选得好,可以极大简化曲线积分的计算.一般而言,应根据被积函数的表达式来取合适的新路径.

Green公式的另一种应用：增补路径法求非闭合曲线上的积分.

如果路径为非封闭曲线，有时可以先将其补成封闭曲线，之后再减去多出来的曲线积分部分.

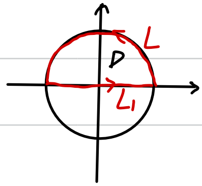
例：$L$是沿着上半单位圆周$x^2+y^2=1$逆时针方向的曲线，求积分

$$\int_L (e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy.$$

解：令$L_1$为$x$轴上$-1\le x\le 1$的直线段，则$L+L_1$成为封闭曲线

由Green公式 $\oint_{L+L_1}(e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy$

$$=\iint_D (3x^2+3y^2)dxdy=3\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{3}{4}\pi$$




又 $\int_{L_1}(e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy=\int_{L_1}e^x dx=e-e^{-1}$

因此 原积分$=\left(\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}\right)(e^x-y^3)dx+(\cos y+x^3)dy=\frac{3}{4}\pi-e+e^{-1}$

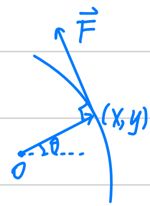
## 第二类曲线积分的物理意义

(P226 10) 设 $\vec{F}$ 为平面上的力场，其大小等于点到原点的距离，方向为该点的向径方向逆时针转 $\frac{\pi}{2}$. 试求 $\vec{F}$ 将质点沿下面曲线在上半平面从 $(a,0)$ 到 $(0,a)$ 做的功:

(1) $L_1$: 圆周 $x^2+y^2=a^2$　　(2) $L_2$: 星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$

(3) $L_3$: 抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

分析: 向径方向是指从原点指向曲线上的点的方向，因而由此可以得到 $\vec{F}$ 的方向. 再根据 $\vec{F}$ 的大小和第二类曲线积分的物理意义，可以推出本题的被积函数.




解: 对于点 $(x,y)$, 向径方向即 $\vec{r}=(x,y)$, 且此处 $|\vec{F}|=\sqrt{x^2+y^2}$

不妨设 $\vec{r}$ 与 $x$ 轴正方向夹角为 $\theta$, 则 $\vec{F}$ 与 $x$ 轴正方向夹角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\vec{F}=\left(|\vec{F}|\cos(\theta+\tfrac{\pi}{2}),\ |\vec{F}|\sin(\theta+\tfrac{\pi}{2})\right)=\left(\sqrt{x^2+y^2}(-\sin\theta),\ \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta\right)$$

又根据 $\theta$ 的含义有 $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 所以 $\vec{F}=(-y,x)$

因此本题所求的功即积分 $W=\int_L \vec{F}\cdot ds=\int_L -y\,dx+x\,dy$

(1) $L_1$: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a\sin t\cdot(-a\sin t)+a\cos t\cdot a\cos t)\,dt=\frac{\pi}{2}a^2$$

(2) $L_2$: $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)+a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t]\,dt=\frac{3\pi}{16}a^2$$

(3) $L_3$: $x=a\cos^4 t,\ y=a\sin^4 t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a\sin^4 t\cdot(-4a\cos^3 t\sin t)+a\cos^4 t\cdot 4a\sin^3 t\cos t]\,dt=\frac{a^2}{3}$$

## 二、第一类曲面积分的计算

1. 曲面为 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，则可化曲面积分为二重积分：

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds = \iint_D \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}\,dxdy$$

2. 曲面为参数式 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，$(u,v)\in\Sigma$，则

令 $E=(x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2$，$F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$，$G=(x_v')^2+(y_v')^2+(z_v')^2$

$$\iint_S \Phi(x,y,z)ds = \iint_\Sigma \Phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

例. P260 1.(4) $\iint_S xyz\,dS$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截的上面部分.

法1. 由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 得 $S$ 在 $xOy$ 平面的投影区域 $D=\{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}\}$

因此曲面 $S$：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$. $z_x'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$，$z_y'=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$$\iint_S xyz\,dS = \iint_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}} xy\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr = \frac{1}{64}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta\,d\theta = 0$$

法2. 令 $x=\cos\theta\sin\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=\cos\varphi$，$\theta\in[0,2\pi]$，$\varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]$

$x_\theta'=-\sin\theta\sin\varphi$，$x_\varphi'=\cos\theta\cos\varphi$，$y_\theta'=\cos\theta\sin\varphi$，$y_\varphi'=\sin\theta\cos\varphi$，$z_\theta'=0$，$z_\varphi'=-\sin\varphi$

$E=\sin^2\varphi$，$F=0$，$G=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

故 $\iint_S xyz\,dS = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\varphi\cos\varphi\cdot\sqrt{\sin^2\varphi}\,d\varphi = 0$

曲面积分的对称性：若 $S$ 可分为对称的两部分 $S_1$，$S_2$（关于原点对称/某平面对称），若对称点上 $f(P)$ 大小相等符号相同，则 $\iint_S f(P)dS=2\iint_{S_1} f(P)dS$；若对称点上 $f(P)$ 大小相等符号相反，则 $\iint_S f(P)dS=0$.

法3：$f(x,y,z)=xyz$，则 $S$ 关于 $yOz$ 平面对称，且对称点上 $f(x,y,z)=-f(-x,y,z)$，因此 $\iint_S xyz\,dS=0$.

例：$\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$，其中 $S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一、五卦限的部分.

法一：$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 满足 $f(x,y,z)=f(x,y,-z)$，$S$ 关于平面 $xOy$ 对称，

则 $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = 2\iint_{S_1} (x^2+y^2+z^2)dS = 2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2+\sqrt{a^2-x^2-y^2}^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$$= 2a^3\iint_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy = 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr$$

$$= \pi a^3\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^a = \pi a^4$$

法二：在积分中代入 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得 $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS = a^2\iint_S dS$

而 $S$ 的表面积为半径为 $a$ 的球面的 $\frac{1}{4}$：$\iint_S dS=\frac{1}{4}(4\pi a^2)=\pi a^2$

故 原式 $= a^2\cdot\pi a^2=\pi a^4$