第五次习题课

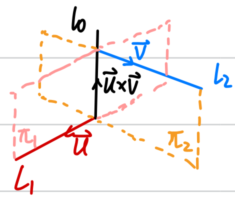
一、两直线的公垂线问题

设 l_0 为直线 l_1 与 l_2 的公垂线，求 l_0. 我们记 π_1 为过 l_1 且与 l_2 垂直的平面，π_2 为过 l_2 且与 l_1 垂直的平面，则 l_0 就是 π_1 与 π_2 的交线.

设 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\vec{u}, \vec{v}$，且点 M_1, M_2 分别在 l_1, l_2 上，则易知 l_0 的方向向量为 $\vec{u}\times\vec{v}$. 因此 $\vec{u}$ 和 $\vec{u}\times\vec{v}$ 可以张成平面 π_1，而 $\vec{v}$ 和 $\vec{u}\times\vec{v}$ 可以张成平面 π_2。故 π_1, π_2 的法向量分别为 $\vec{n_1} = \vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})$，$\vec{n_2} = \vec{v}\times(\vec{u}\times\vec{v})$.

若设 $l_1: \dfrac{x-x_1}{u_x} = \dfrac{y-y_1}{u_y} = \dfrac{z-z_1}{u_z}$，$l_2: \dfrac{x-x_2}{v_x} = \dfrac{y-y_2}{v_y} = \dfrac{z-z_2}{v_z}$，$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$，$\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. 则 l_0 的一般方程为

$$l_0: \begin{cases} A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0 \\ A_2(x-x_2)+B_2(y-y_2)+C_2(z-z_2)=0 \end{cases}$$



P92 32. $L_1: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$，$L_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3-t \end{cases}$

则 $\vec{u} = (2,1,1)$，$\vec{v} = (1,0,-1)$

$\vec{u}\times\vec{v} = (-1,3,-1)$，$\vec{n_1} = \vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = (-4,1,7)$，$\vec{n_2} = \vec{v}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = (3,2,3)$

$M_1(-2,1,0)$，$M_2(1,2,3)$，所以 $l_0: \begin{cases} -4(x+2)+(y-1)+7z=0 \\ 3(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \end{cases}$

即 $l_0: \begin{cases} 4x-y-7z+9=0 \\ 3x+2y+3z-16=0 \end{cases}$

二、一些距离公式

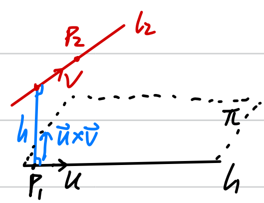
1. 点到平面距离公式：设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，$P_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi: Ax+By+Cz+D=0$,
则 P_0 到 π 的距离为
$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

本质上是将 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 投影到平面的单位法向量上.

2. 点到直线距离公式：设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$l: \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$
则 P_1 到 l 的距离为
$$d=\frac{|\vec{u}\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{u}|}=\frac{|(u_x,u_y,u_z)\times(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)|}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ y_1-y_0 & z_1-z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}u_z & u_x\\ z_1-z_0 & x_1-x_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ x_1-x_0 & y_1-y_0\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}$$

d 可以视为一个平行四边形的高线.

3. 异面直线间的距离公式：设 l_1, l_2 方向向量分别为 $\vec{u},\vec{v}$,
设 π 为经过 l_1 且法向量 $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ 的平面，则 h 等于 l_2 与 π 之间的距离. 因 $P_2\in l_2$，$P_1\in\pi$，因此由点到平面距离公式有
$$h=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$



P92 27. 求直线 $\begin{cases}3x+z=6\\ y+2z=0\end{cases}$ 与 z 轴之间的距离.

解：所给直线的方向向量 $\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&1\\0&1&2\end{vmatrix}=-\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$

因此 $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,-6,3)\times(0,0,1)=(-6,1,0)$

因 $P_0(0,0,0)$ 在 z 轴上，$P_2(1,-6,3)$ 在所线直线上，则 $\overrightarrow{P_0P_2}=(1,-6,3)$

所以 $d=\frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{P_0P_2}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|(-6,1,0)\cdot(1,-6,3)|}{\sqrt{37}}=\frac{12\sqrt{37}}{37}$

三、平面束方程

通过同一直线的一族平面称为有轴平面束。设 $l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

则过 l 的平面束方程为 $\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

这里 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 且不全为0.

平面束方程法像是用于求过定直线的某个平面的"待定系数法".

P92. 30. 求过直线 $\begin{cases}x+2y-2z=5\\5x-2y-z=0\end{cases}$ 且与 zOx 平面垂直的方程

解：所求为过定直线的某个平面，因而可用平面束方程法. 因 λ_1,λ_2 不同时为0，易见 $\lambda_1\neq0$，令 $u=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$，则可设平面为 $x+2y-2z-5+u(5x-2y-z)=0$

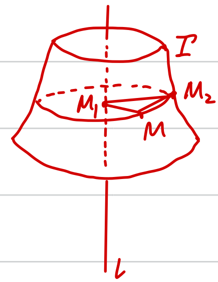
即 $(1+5u)x+(2-2u)y+(-2-u)z-5=0\Rightarrow\vec{n}=(1+5u,2-2u,-2-u)$

则 $\vec{n}\cdot(0,1,0)=0\Rightarrow u=1$. 所以所求平面为 $6x-3z-5=0$.

四、旋转面

设 $\vec{v}=(l,m,n)$ 为旋转轴的方向向量，母线方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为旋转轴上一点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为母线上一点，则旋转面方程为：



$$\begin{cases}F(x_2,y_2,z_2)=0\\G(x_2,y_2,z_2)=0\\|\overrightarrow{MM_1}|=|\overrightarrow{M_2M_1}| \quad (|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{M_2M_1}\times\vec{v}|)\\(l,m,n)\cdot(x-x_2,y-y_2,z-z_2)=0 \quad (\vec{v}\cdot\overrightarrow{MM_2}=0)\end{cases}$$

特别地，若旋转轴为 z 轴 $(\vec{v}=(0,0,1))$，母线在 yOz 平面上，方程为 $\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$，则旋转面方程为

$$\begin{cases}f(y_2,z_2)=0,\ x_2=0\\x^2+y^2+z^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2\\z-z_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(y_2,z)=0\\\pm\sqrt{x^2+y^2}=y_2\end{cases}$$

因此为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

总结：若绕 z 轴旋转，则将 $f(x,z)$ 中的 x 或 $f(y,z)$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 即得旋转面方程。绕 x 轴或 y 轴是同理的。

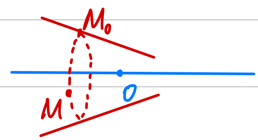
P93. 36、绕 z 轴：将 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

绕 y 轴：将 z 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 得 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$

P93. 37、求直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 绕 y 轴旋转生成的旋转面方程.

解：$O(0,0,0)$ 在 y 轴上. 设 $M(x,y,z)$ 为曲面上任一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 M 所在的纬圆与母线的交点，则有 $\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0}{-1}=\frac{z_0-3}{2}$. 由前面讨论的旋转面方程的求法：

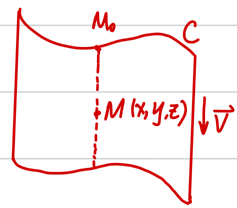
$$\begin{cases}\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0}{-1}=\frac{z_0-3}{2}\\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2\\ (0,1,0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0\end{cases} \Rightarrow x^2-5y^2+z^2+14y-10=0$$



五、柱面与锥面

1、柱面：设母线方向 $\vec{v}=(l,m,n)$，准线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在柱面上，

则柱面方程为 $\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0\\G(x_0,y_0,z_0)=0\\x=x_0+lu \quad (u\text{为参数})\\y=y_0+mu\\z=z_0+nu\end{cases}$ 或 $\begin{cases}F(x-lu,\ y-mu,\ z-nu)=0\\G(x-lu,\ y-mu,\ z-nu)=0\end{cases}$

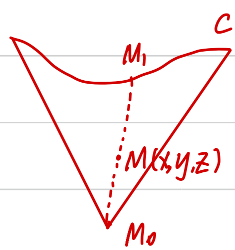


2、投影柱面：在准线方程 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去参数 z 得到 $I(x,y)=0$.

得到母线平行于 z 轴的柱面，称为 C 投影到 xOy 平面的投影柱面。

3、锥面：设顶点、$M_0(x_0,y_0,z_0)$，准线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 在准线上，

则锥面方程 $\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\\\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\end{cases}$



P93、40. 求母线平行于y轴，准线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

解：母线方向 $\vec{u}=(0,1,0)$. 又设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任一点、$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为在准线上且满足 $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{u}$ 的点、则 $\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=4 \\ x_0+y_0+z_0=0 \\ x=x_0,\ z=z_0 \end{cases}$

解得 $x^2+z^2+(x+z)^2=4$. 即 $x^2+z^2+xz=2$

P93、41. 求 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 在 xOy 和 yOz 平面上的投影曲线方程.

解：消去 z： $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$，则在 xOy 平面上投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{a^2}{2} \\ z=0 \end{cases}$

消去 x：因 $z\geqslant 0$，故在 yOz 平面上投影曲线 $\begin{cases} 2z^2=a^2 \\ x=0 \end{cases}$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}|a|\leq y\leq\frac{\sqrt{2}}{2}|a|\right)$

P94、45、求顶点为 $(1,2,3)$，母线与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 的正圆锥面的方程.

解：求解圆锥面有比求一般锥面更简单的方法，即充分用上夹角的条件.

所给直线的方向向量 $\vec{u}=(2,2,-1)$、设 $P(1,2,3)$，$M(x,y,z)$ 为圆锥面上任一点、依题意有 $\langle\overrightarrow{PM},\vec{u}\rangle=\frac{\pi}{6}$，即 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|2x+2y-z-3|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

即 $11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$