第二次习题课

一、作业讲解

P50. 7(3) 用柯西准则判定 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

证：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$，则 $\forall N\in\mathbb{N}_+$，$\exists n_0\in\mathbb{N}_+$ 使得 $n_0>N\geq 1$. 取 $p_0=n_0$，有

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{\sqrt{k^2+k}}\right|>\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{k+1}>\sum_{k=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{2n_0+1}=\frac{n_0}{2n_0+1}>\frac{n_0}{2n_0+n_0}=\frac{1}{3}$$

故由柯西收敛准则知级数发散。

P51 9.(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$　　(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

(4) 证：由 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$ 知级数发散.

注意，$a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$ 当 n 充分大时是负数，因而这不是正项级数，不能直接对 a_n 用比较判别法。但可以对 $b_n=-a_n=1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 使用.

因 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\ln(1+x)}{x}=+\infty$，由 $\sum\frac{1}{n}$ 发散知原级数发散.

(7) 分析：由重要极限可知 $a_n=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to0\ (n\to\infty)$. 为了找 a_n 的等价无穷小量，对 a_n 变形：$a_n=e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e\left(1-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right)$

对于 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$，因 $\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1+x}-1\right)=0$，所以 $1-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\sim1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow a_n\sim e\left(1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

又 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

因此 $a_n\sim\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，根据 $\sum\frac{e}{2n}$ 发散知 $\sum a_n$ 发散.

这仍是用Taylor公式分析寻找等价无穷小量的例子.

证：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\frac{e}{2}$，则由 $\sum\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum a_n$ 发散.

P50 10.(7) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$

分析：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=1$，根值判别法失效.

仍对 a_n 作分析：$a_n=\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)}\sim e^{n\cdot\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{n}$

考虑求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}$

证：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)}}{e^{-\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)+\ln n}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x}}$

由 $\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2\ (x\to0)$ 知 $\ln(1+x\ln x)-x\ln x\sim-\frac{1}{2}(x\ln x)^2$，因此

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{2}x(\ln x)^2}=1$，由 $\sum\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum a_n$ 发散.

P50 11.(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}$ (5) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$

(1) 分析：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{4+(-1)^n}$，$\begin{cases}\text{当 } n=2k,\ \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{a_{2k}}=\frac{1}{5}\\ \text{当 } n=2k+1,\ \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}}=\frac{1}{3}\end{cases}$

这说明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 不存在，不能直接用根值判别法得到结论.

证：由 $\frac{n}{[4+(-1)^n]^n}<\frac{n}{3^n}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{3}<1$，故 $\sum\frac{n}{3^n}$ 收敛，

因此原级数收敛.

注：如果学过上、下极限，那么还存在如下的上极限形式的根值判别法：

若 $\sum a_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=c$，则当 $c<1$ 时 $\sum a_n$ 收敛，$c>1$ 时 $\sum a_n$ 发散.

本题中 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{3}<1$，因此 $\sum a_n$ 收敛.

此外也有上、下极限形式的比值判别法：设 $\sum a_n$ 为正项级数，则

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d<1$，则 $\sum a_n$ 收敛；(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d>1$，则 $\sum a_n$ 发散。

(5) 这题明显需要用积分判别法，关键在于对 p,q 分类讨论。

只要讨论 $I\triangleq\int_3^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}dx \overset{u=\ln x}{=\!=\!=} \int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}du$ 的敛散性。

① $p>1,\ q\geq 0$，当 $u>e$ 时 $(\ln u)^q>1$，此时 $\frac{1}{u^p(\ln u)^q}<\frac{1}{u^p}$，而 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p}du$ 当 $p>1$ 时收敛，故 I 收敛。

② $p>1,\ q<0$，因 $\lim\limits_{u\to+\infty}u^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{(\ln u)^{-q}}{u^{\frac{p-1}{2}}}=0$（洛必达 or 比发散速度）

且 $\frac{p+1}{2}>1$，所以 I 收敛。

③ $p=1$，则 $I=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u(\ln u)^q}du=\int_{\ln\ln 3}\frac{1}{v^q}dv$，故 $q>1$ 时 I 收敛，$q\leq 1$ 时发散。

④ $p<1,\ q\leq 0$，当 $u>e$ 时 $(\ln u)^q<1$，此时 $\frac{1}{u^p(\ln u)^q}>\frac{1}{u^p}$，而 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{1}{u^p}du$ 当 $p<1$ 时发散，故 I 发散。

⑤ $p<1,q>0$，因 $\lim\limits_{u\to+\infty}u^{\frac{p+1}{2}}\frac{1}{u^p(\ln u)^q}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln u)^q}=+\infty$，且 $\frac{p+1}{2}<1$，所以 I 发散。

综上，当 $p>1$ 或 $p=1,q>1$ 时级数收敛；当 $p<1$ 或 $p=1,q\leq 1$ 时发散。

P52.15 设x_n为方程 $x=\tan x$ 的正根，且从小到大排序，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$收敛.

分析：$\{x_n\}$没有显式表达式，所以考虑用放缩法给出x_n的范围估计，再用比较判别法判断. 注意到要证的是$\sum\frac{1}{x_n^2}$收敛，而我们知道$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，因此若能证明"$x_n>$某个关于n的线性函数"，就能得到结论.

通过分析 $\tan x$ 的定义域，以及对 $f(x)=\tan x-x$ 的零点进行分析可知，必有 $n\pi<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n=1,2,\cdots)$. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}$. 当然本题实际上只需用更宽松的结果：$n\pi-\frac{\pi}{2}<x_n<n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n=1,2,\cdots)$就足够了.

证：$x=\tan x$ 的正根位于 $\left(\frac{\pi}{2}+(i-1)\pi,\ \frac{\pi}{2}+i\pi\right)$中 $(i=1,2,\cdots)$，因此

$x_n>\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi=(n-\frac{1}{2})\pi$，即 $x_n^2>(n-\frac{1}{2})^2\pi^2$

因此当$n>2$时有 $\frac{1}{x_n^2}<\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}<\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}$，而$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$收敛.

P53. 22. 设 $f(x)$在$x=0$的某邻域内有2阶连续导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a\geq 0$，讨论级数$\sum_{n=1}^{+\infty}f(\frac{1}{n})$和$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$的敛散性.

分析：由于知道$f(x)$的2阶导数的信息，且这里显然要对$f(\frac{1}{n})$进行估计，因此借助 $f(x)$的 Taylor 展开：$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，$\xi\in[0,\frac{1}{n}]$

可以看到展开后出现了$\frac{1}{n^2}$，而$\sum\frac{1}{n^2}$收敛. 因此考虑从这个展开式中寻找 $f(\frac{1}{n})$与$\frac{1}{n^2}$的大小关系. 但首先还要处理 $f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{n}$的部分，这就要用到$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=a\geq 0$的信息.

证：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$ 存在知必有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. 于是由 f 连续得 $f(0)=0$.
且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=a$.

又根据归结原则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a\geq0$. 此外不妨设 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内二阶导连续，则取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$，有当 $n>N$ 时成立 $\frac{1}{n}<\delta$.

① $a=0$，则对 $n>N$，$f(\frac{1}{n})$ 在 $x=0$ 的 Taylor 展开为 $f(\frac{1}{n})=\frac{f''(\xi)}{2n^2}$，$\xi\in[0,\frac{1}{n}]$.
而 $f''(x)$ 在 $[0,\frac{1}{n}]$ 上连续，故有界. 则 $\exists M>0$ 使 $|f(\frac{1}{n})|\leq\frac{M}{2n^2}$. 于是由 $\sum\frac{M}{n^2}$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|$ 收敛. 故此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 均收敛.

② $a>0$，由极限的保号性知 $\exists N_0\in\mathbb{N}_+$，当 $n>N_0$ 时 $f(\frac{1}{n})>0$. 故除去有限项后 $\sum f(\frac{1}{n})$ 为正项级数，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=a>0$ 以及 $\sum\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散.

对 $n>N$，$f(\frac{1}{n})=\frac{a}{n}+\frac{f''(\xi)}{2n^2}$，$\xi\in[0,\frac{1}{n}]$. 因 $f''(x)$ 在 $[0,\frac{1}{n}]$ 上连续，故有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{n}+\frac{f''(\xi)}{2n^2})=0$. 又因为 $f'(0)=a>0$ 且 $f'(x)$ 连续，则由保号性 $\exists N_1\in\mathbb{N}_+,N_1>N$ 使得 $f'(x)>0$ 在 $[0,\frac{1}{N_1}]$ 上成立. 因此当 $n\geq N_1$ 时 $f(\frac{1}{n})>f(\frac{1}{n+1})$ 成立. 故当 $n>N_1$ 时 $f(\frac{1}{n})$ 单调递减趋于0. 由莱布尼兹判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.

综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 当 $a=0$ 收敛，$a>0$ 发散；而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 总是收敛.

二、补充题

例1. 设 $\sum a_n$ 为收敛的正项级数，且 $\{a_n\}$ 单调，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

证：易见 $\{a_n\}$ 必单调递减。则由 $\sum a_n$ 收敛的柯西准则有 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in \mathbb{N}_+$，当 $n>N$ 时对 $\forall p\in \mathbb{N}_+$ 有 $0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$

由 a_n 单调减，取 $p=n$ 有 $0<na_{2n}\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{2n}<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow 0<2na_{2n}<\varepsilon$.

又取 $p=n+1$ 有 $0<(n+1)a_{2n+1}\leqslant a_{n+1}+\cdots+a_{2n+1}<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow 0<(2n+1)a_{2n+1}\leqslant(2n+2)a_{2n+1}<\varepsilon$.

因此由 ε 的任意性知当 $n\to\infty$ 时，$2na_{2n}\to 0$，$(2n+1)a_{2n+1}\to 0$.

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

注：1° 本题不是要我们证明敛散性，而是在告知收敛的条件后反推通项的性质，此时就要从级数收敛的一些必要条件（充要条件）入手。本题是用了级数收敛的柯西准则（一个充要条件）来做的。

2° 本题的结论说明：若正项级数 $\sum a_n$ 收敛且 $\{a_n\}$ 单调，则当 $n\to\infty$ 时 a_n 是比 $\frac{1}{n}$ 更高阶的无穷小量。

此外，易见若正项级数 $\sum a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\alpha\neq 0$，则必有 $\sum a_n$ 发散。这是因为 $\alpha\neq 0$ 说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\alpha\neq 0$，而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散.

例2、设把级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$的项加括号，得到级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 证明：若$A_k$的括号内各项$u_i$同号（$k\neq j$时$A_k$中符号与$A_j$中符号可以不同），则从$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$收敛可推出$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$收敛，且两者的和相等.

证：我们设 $A_1=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})$

$$A_2=(u_{n_1+1}+u_{n_1+2}+\cdots+u_{n_2})$$

$$\cdots$$

$$A_k=(u_{n_{k-1}+1}+u_{n_{k-1}+2}+\cdots+u_{n_k})$$

$$\cdots$$

每个括号中的加数u_i是同号的. 记$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$的部分和为$S_n$，即$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$；记$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$的部分和为$P_j$，即$P_j=\sum\limits_{k=1}^{j}A_k=S_{n_j}$.

由$\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$收敛知$S_{n_j}\to S\ (j\to\infty)$. 注意到对任意自然数$n\geq n_1$，总存在$\{n_j\}$中两个相邻数$n_k, n_{k+1}$使得$n_k\leq n<n_{k+1}$. 于是：

①若$A_{k+1}=(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$中的各项带正号，则有$P_k=S_{n_k}\leq S_n<S_{n_{k+1}}=P_{k+1}$

②若$A_{k+1}=(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$中的各项带负号，则有$P_{k+1}=S_{n_{k+1}}<S_n\leq S_{n_k}=P_k$.

可见无论①和②哪一个发生，均有S_n介于$\sum A_k$的部分和序列$\{P_j\}$的相邻两项之间. 因$n\to\infty$时$n_k\to\infty$且$n_{k+1}\to\infty$，由$S_{n_j}\to S\ (j\to\infty)$知$S_n\to S\ (n\to\infty)$，即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$收敛，且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k=S=\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.