第三次习题课

一、作业讲解

P53 26. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$，证明 $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ 收敛.

分析：由于 $\sin x$ 在 $(n\pi,(n+1)\pi)$ 交替为正或负，所以这是一个交错级数.
这里有一个三角函数的小技巧：$\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin x$，$\cos(x+n\pi)=(-1)^n\cos x$
在这里令 $x=t+n\pi$ 进行代替，就可以利用上述技巧将原级数转化为一个显式的交错级数.

证：令 $t=x-n\pi$，则 $u_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin(t+n\pi)}{\sqrt{t+n\pi}}d(t+n\pi)=(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+n\pi}}dt$

令 $a_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t+n\pi}}dt$，则 $a_n>0$ 且 $u_n=(-1)^n a_n$

因当 $0<x<\pi$ 时总有 $\frac{\sin x}{\sqrt{x+(n+1)\pi}}<\frac{\sin x}{\sqrt{x+n\pi}}$，故 $a_{n+1}<a_n$，$n=1,2,\cdots$

又 $a_n\le\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{t+n\pi}}=2\sqrt{x+n\pi}\Big|_0^{\pi}=2\sqrt{(n+1)\pi}-2\sqrt{n\pi}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

故由莱布尼兹判别法，$\sum u_n$ 收敛.

注：有些同学在证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 时认为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^{\pi}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t+n\pi}}\right)dt=\int_0^{\pi}0\,dt=0$.
但实际上根据函数项级数一致收敛的知识，只有满足特定条件的函数 $f(n,x)$ 才满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(n,x)dx=\int_a^b\left(\lim\limits_{n\to\infty}f(n,x)\right)dx$.

P53 30.(7) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3(2x-1)^{2n}}{(3n)!}$ 的收敛域.

解：由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=(2x-1)^2\lim_{n\to+\infty}\frac{[(n+1)!]^3\cdot(3n)!}{(3n+3)!\,(n!)^3}=(2x-1)^2\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$

$=\frac{(2x-1)^2}{27}$

则当 $\frac{(2x-1)^2}{27}<1$，即 $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ 时幂级数收敛；

当 $x=\frac{1\pm3\sqrt{3}}{2}$ 时，即判断 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^3 27^n}{(3n)!}$ 的敛散性.

由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{27(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}>1$，因此 $\{a_n\}$ 递增，$a_n>a_1=\frac{9}{2}\ (n>1)$

故 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 综上收敛域为 $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

注：1° 要分清收敛区间和收敛域的区别. 收敛区间是开区间 $(-r,r)$，收敛域则还要求端点处的敛散性.

2° 本题的难点在于 $\sum a_n$ 敛散性的判断. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，故不能直接用比值判别法.

此外还有另一种方法：因 $(3n)!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot(3n-2)(3n-1)(3n)$

$=[1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)][2\cdot5\cdots(3n-1)][3\cdot6\cdots(3n)]$

$<[3\cdot6\cdot9\cdots(3n)]^3=(3^n n!)^3$

所以 $\frac{(n!)^3 27^n}{(3n)!}>1$，故 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$，$\sum a_n$ 发散.

3° 也可以一开始就先换元：$t=(2x-1)^2$. 但一定要注意换元前后幂级数的收敛区间是不同的，不要忘记求回原来的收敛域！

P54 31. (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$ (6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}|x|=|x|$，故 $|x|<1$ 时幂级数收敛，其在 $(-1,1)$ 内逐项可积.

因 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}+\dfrac{1}{1-x}$. 令 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$，

则 $T(x)\triangleq\int_0^x S_1(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$

故当 $x\in(-1,1)$ 时 $S_1(x)=T'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x}$

$$=\frac{2-x}{(1-x)^2}$$

又当 $x=\pm1$ 时易见原级数均发散. 因此收敛域 $(-1,1)$.

注：这个幂级数首项为 $(1+1)x^0=2$，因此 $S(0)=2\neq0$. 但若不仔细看容易误认为 $S(0)=0$. 在观察幂级数时，要看清指标 n 是从几开始的.

(6) 令 $t=\dfrac{(x-2)^2}{4}$，则原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$. 设其和函数为 $T(t)$，则因

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{t^{n+1}}{n+1}}{\frac{t^n}{n}}\right|=|t|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=|t|$，故 $|t|<1$ 时幂级数收敛，其在 $(-1,1)$ 内逐项可导.

$T'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}\Rightarrow T(t)=T(0)+\int_0^t\dfrac{du}{1-u}=-\ln|1-t|$

当 $|t|=1$ 时，因 $t=\dfrac{(x-2)^2}{4}\geqslant0$，故只能 $t=1$，而此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$ 发散.

由 $\left|\dfrac{(x-2)^2}{4}\right|<1$ 得收敛域 $(0,4)$. 因此和函数

$$S(x)=-\ln\left|1-\frac{(x-2)^2}{4}\right|=\ln4-\ln|-x^2+4x|,\quad x\in(0,4)$$

31. (4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n-1}$

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|^2\frac{2n-1}{2n+1}=|x|^2$，则当 $|x|^2<1$ 时幂级数收敛，其在 $(-1,1)$ 内逐项可导。

$S(x)=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，令 $T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则 $T'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$

则 $T(x)=T(0)+\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

因此 $x\in(-1,1)$ 时 $S(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

又 $x=\pm1$ 时原级数显然发散，因此和函数 $S(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\ x\in(-1,1)$

P54 32. (3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ (4) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$

解：(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(2n-1)}=\frac{1}{2}$，且 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛，自然也收敛。

记 $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right)$

令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，这一级数收敛域 $[-1,1]$，两边求导：

$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$，因此 $S_1(x)=S_1(0)+\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$

$=\arctan x$

令 $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$，这一级数收敛域 $(-1,1]$，两边求导：

$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{1}{1+x}$，因此 $S_2(x)=S_2(0)+\int_0^x\frac{dt}{1+t}$

$=\ln(1+x)$

于是 $S=-2S_1(1)+S_2(1)=\ln2-\frac{\pi}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1$，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$ 收敛.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，故其在 $(-1,1)$ 上收敛且逐项可积.

$S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，令 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，则

$\int_0^x T(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

令 $H(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $\int_0^x H(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

故 $H(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$T(x)=(xH(x))'=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

故 $S(x)=xT(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$. 当 $x=\pm1$，幂级数显然发散。因此和函数 $S(x)=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=6$.

注：若要求的数项级数可由某个幂级数的和函数 $S(x)$ 取特定值得到，如等于 $S(a)$，则可用先积后导或先导后积等方法求出 $S(x)$.

二、补充内容

幂级数回顾：

1、收敛半径、收敛区间和收敛域的概念

2、收敛半径的计算：比值法，根值法、如果是求收敛域，不要忘记看端点处的敛散性。

3、幂级数和函数的计算，和函数的连续性、可导性与可积性。

注意，一个幂级数逐项求导或逐项求积后，其收敛区间不变，但是收敛域可能会改变。如令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，则 $\begin{cases} S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}, \\ S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2} \end{cases}$

它们的收敛半径都是 1，但 $S(x)$ 的收敛域为 $[-1,1]$，$S'(x)$ 的收敛域为 $[-1,1)$，$S''(x)$ 的收敛域为 $(-1,1)$。

4、和函数的求法：首先求出收敛域，之后在收敛域内求和函数。一般有变量代换、拆项法、逐项求导、逐项求积等方法。

例：设 $f(x)>0$，且在 $[0,2]$ 上连续，令 $a_n=\int_0^2 x^n f(x)\,dx$，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a_n}$ 的收敛域。

分析：$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，则在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m。于是利用 M 和 m 可以对 a_n 进行放缩，进而确定 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$。

解：令 $M=\max\limits_{x\in[0,2]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[0,2]} f(x)$，由 $f(x)>0$ 知 $M\geqslant m>0$.

因此 $a_n=\int_0^2 x^n f(x)dx \geqslant m\int_0^2 x^n dx=\frac{m}{n+1}2^{n+1}$

$a_n=\int_0^2 x^n f(x)dx \leqslant M\int_0^2 x^n dx=\frac{M}{n+1}2^{n+1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{m}{n+1}2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{M}{n+1}2^{n+1}}=2$，所以由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=2$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{2}$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a_n}$ 的收敛区间为 $(-2,2)$.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{a_n}\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{\frac{M}{n+1}2^{n+1}}=+\infty$，所以 $x=\pm2$ 时幂级数发散.

因此原幂级数收敛域为 $(-2,2)$、

二、初等函数展为幂级数

一般考虑如下几种方法：

1、通过变形、转换，化为已知的展开式，常用的展开式有：

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

例：(1) $f(x)=\sin^3 x$；　(2) $f(x)=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解：(1) 因 $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1-3^{2n})x^{2n+1}$$

所以 $f(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(1-3^{2n})x^{2n+1}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(2)（展开至三次项）

$$f(x)=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1} = e^{\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-1} = e^{\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}}$$

$$= e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots}$$

$$= 1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\cdots\right)^3$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\cdots \quad (-1<x\le 1)$$

2、利用逐项积分或逐项微分（作业题大多用这种方法）

3、待定系数法

例：$f(x)=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

解：设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$（$a_n$为待定系数）

因 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\left[1-x\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\right]$，即 $(1+x^2)f'(x)=1-xf(x)$

则 $(1+x^2)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=1-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，即有

$$a_1+2a_2x+\sum_{n=2}^{\infty}[a_{n+1}(n+1)+a_{n-1}(n-1)]x^n=1-a_0x-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

比较系数得：$a_1=1$，$2a_2=-a_0$，$(n+1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}=-a_{n-1}$ $(n\geq 2)$

而 $a_0=f(x)|_{x=0}=0$，由递推关系知 $a_{2n}=0$ $(n=1,2,\cdots)$

$a_1=1$，$a_3=-\frac{2}{3}$，$a_5=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$，$\cdots$，$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$\cdots$

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$，$x\in(-1,1]$

注：待定系数法就是先设函数的展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，再根据已知条件确定 a_n。如果$\{a_n\}$之间存在递推关系，则可以考虑此方法。如本题中由 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的关系得到了$\{a_n\}$间的递推关系。