第十四次习题课

一、第二类曲面积分计算

1、投影化为二重积分的计算方法

(1) 若曲面 S 为 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$，则 $\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$

其中 S 取正侧时(法线方向与 z 轴正向夹角为锐角的一侧)取"+"号，否则为"−"号.

同样若 S：$y=y(x,z)$，则 $\iint_S R(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{xz}} R(x,y(x,z),z)dzdx$

S：$x=x(y,z)$，则 $\iint_S R(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)dydz$

注：若 S：$F(x,y,z)=0$，则也可先化为显式(如 $z=z(x,y)$)再用上述方法计算.

(2) 若曲面 S：$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$z=z(u,v)$，$(u,v)\in D$，则

$$\iint_S R(x,y,z)dydz=\pm\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv$$

$$\iint_S R(x,y,z)dzdx=\pm\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

2、转化为第一类曲面积分

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

3、向量点积法(P239 (5))：若曲面 S：$z=z(x,y)$，则

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint_{D_{xy}}(P,Q,R)\cdot(-z_x',-z_y',1)dxdy$$

$$=\pm\iint_{D_{xy}}(-P\cdot z_x'-Q\cdot z_y'+R)dxdy$$

这样就只要投影到一个平面上即可.

4、利用Gauss公式

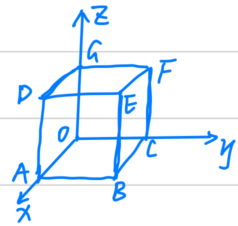
例:(12.3节 6) (1) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(x+y+z)dxdy$, S是三个坐标平面和 $x=1, y=1, z=1$ 围成的立体表面, 法方向指向外部.

(4) $\iint_S (-y)dydz+x\,dzdx$, S在平面 $z=8x-4y-5$上, 且它在 xOy平面上的投影是以$(0,0),(0,1),(1,0)$为顶点的三角形. 取上侧.

(7) $\iint_S \frac{xdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. S是球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 法方向指向外部.

解: (1) 对于 $\iint_S (y-z)dydz$, 投影在 yOz平面得 $D_{yz}=\{0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$

则 $\iint_S (y-z)dydz=\iint_{ABED}(y-z)dydz+\iint_{OCFG}(y-z)dydz$



$=\iint_{D_{yz}}(y-z)dydz-\iint_{D_{yz}}(y-z)dydz=0$

对于 $\iint_S (x+y+z)dxdy$, 投影在 xOy平面得 $D_{xy}=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

则 $\iint_S (x+y+z)dxdy=\iint_{DEFG}(x+y+z)dxdy+\iint_{ABCO}(x+y+z)dxdy$

$=\iint_{D_{xy}}(x+y+1)dxdy-\iint_{D_{xy}}(x+y)dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=1$

综上, 原积分 $I=0+1=1$

(4) 因曲面为 $z=8x-4y-5$，则 $z_x'=8$，$z_y'=-4$，且 $\vec{n}=(-8,4,1)$ 与 z 轴正半轴夹角为锐角. 又 $D_{xy}=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$，$(P,Q,R)=(-y,x,0)$

则 $\iint_S (-y)dydz+xdzdx=\iint_{D_{xy}}[(-y)(-8)+x\cdot 4]\,dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(4x+8y)dy=\int_0^1 4x(1-x)+4(1-x)^2dx=2$$

(7) 将 S 分成 S_1 和 S_2，S_1 和 S_2 分别为在 yOz 平面上方和下方的部分

则 S_1：$x=\sqrt{1-y^2-z^2}$，S_2：$x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$，$D_{yz}=\{y^2+z^2\le 1\}$

则 $\iint_S \frac{xdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\iint_{S_1}\frac{xdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\iint_{S_2}\frac{xdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz-\iint_{D_{yz}}-\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz=2\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr\ \xlongequal{u=r^2}\ 2\pi\int_0^1\sqrt{1-u}\,du=2\pi\left[-\frac{2}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{4\pi}{3}$$

注：针对不同的曲面应选择不同的计算方法. 如若曲面是分片的(每一片的表达式不统一)，则可考虑对每一片进行投影计算(方法1)；若曲面法向量容易计算，则可用方法2或3；若曲面封闭或容易补成闭曲面，则可用Gauss公式(方法4).

二. Gauss公式与Stokes公式

1. Gauss公式：设 $V\subset\mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，边界 $S=\partial V$ 为分片光滑闭曲面，S 的法向量指向 V 的外部，即取 S 的正向. 若 P,Q,R 为定义在 V 上具有连续偏导的三元函数，则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

Gauss公式是计算第二类曲面积分的一个有力工具，特别是曲面封闭或可以补成封闭曲面时.

例：(12.3节.6) (1) $\iint_S(y-z)dydz+(x+y+z)dxdy$. S 是三个坐标平面和 $x=1,y=1,z=1$ 围成的立体表面，法方向指向外部.

(12.3节 8) (6) $\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$, S: $x^2+y^2=z^2\ (0\le z\le h)$. $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为外法向量的方向余弦.

(Gauss公式法)

解：(1) $P=y-z$, $Q=0$, $R=x+y+z$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$

则 $\iint_S(y-z)dydz+(x+y+z)dxdy=\iiint_V dxdydz=1$ (立方体体积)

(6) 由两类曲面积分的联系知 $I=\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$

先补上曲面片 $S_1:\{x^2+y^2\le h^2, z=h\}$, 取正向，则 $S\cup S_1$ 构成封闭曲面.

因 $\iint_{S\cup S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint_V(x+y+z)dxdydz$

$$=2\int_0^h\left(\iint_{x^2+y^2\le z^2}(x+y+z)dxdy\right)dz=2\int_0^h\pi z^3dz=\frac{\pi h^4}{2}$$

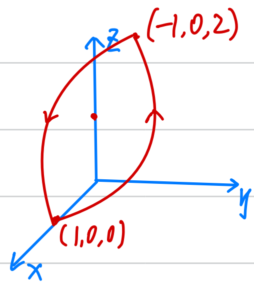
又 $\iint_{S_1}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=\iint_{D_{xy}}h^2dxdy=\pi h^4$, 故 $I=-\frac{\pi h^4}{2}$

2、Stokes 公式：设 S 为分片光滑的定向曲面，取定法向量方向，其边界 L 是按段光滑的连续曲线。若 (P,Q,R) 是 S（含 L）上连续可导的向量场，则

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

Stokes 公式是针对空间闭曲线的计算公式，其中曲线的定向和它围成的曲面片的定向互相确定。

例：(12.4节.11) (4) $\oint_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，$L$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线，从 x 轴正向看 L 取逆时针方向。



解：(4) 如图，$P=y-z$，$Q=z-x$，$R=x-y$

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2,$$

由 Stokes 公式知：$I=\iint_S -2dydz-2dzdx-2dxdy$

又 $(-z_x',-z_y',1)=(1,0,1)$，则 $I=\iint_{D_{xy}} -4\,dxdy=-4\pi$

其中 $D_{xy}=\{x^2+y^2\le 1\}$