第四次习题课

Fourier 级数（傅立叶级数）

1. 函数的 Fourier 级数：$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

则 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

2. 狄利克雷收敛定理说明，只要函数 $f(x)$ 在一个周期内至多有有限个第一类间断点，且不做无限次振荡，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在连续点处收敛于该点的函数值，在不连续点处收敛于该点左、右极限的平均值。

3. 一般周期函数的 Fourier 展开：若周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 可积，作变换 $x=\frac{l}{\pi}u$，则有周期为 2π 的函数 $F(u)=f(\frac{l}{\pi}u)$。利用 $F(u)$ 的 Fourier 级数可求 $f(x)$ 的 Fourier 级数。

注：求解 Fourier 系数的困难在于求含有三角函数的式子的积分。
建议：如果积分不熟练，就一步一步地积，防止符号或者系数上出问题。

4. 将函数展成正弦级数／余弦级数

这类问题的关键在于如何对 $f(x)$ 进行延拓。若要展成正弦级数，则应对 $f(x)$ 做奇延拓（正弦函数是奇函数）；若要展成余弦级数，则应对 $f(x)$ 做偶延拓（正弦函数是偶函数）。

例：应当如何把给定在$(0,\frac{\pi}{2})$上的可积函数延拓到区间$(-\pi,\pi)$内，使得它在$(-\pi,\pi)$内对应的Fourier级数为：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$

解：(1) 设将$f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$后得到满足要求的函数为$f^*(x)$.

则当$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时$f^*(x)=f(x)$. 因为$f^*(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$，所以

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\sin nx\,dx=0\ (n=1,2,\cdots)$，所以$f^*(x)$为$(-\pi,\pi)$内偶函数，有

$f^*(-x)=f^*(x)$. 由此知　$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^*(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

又因为$a_{2k}=0\ (k=0,1,2,\cdots)$，即

$$a_{2k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\cos 2kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^*(x)\cos 2kx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f^*(x)\cos 2kx\,dx\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^*(x)\cos 2kx\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^*(\pi-x)\cos 2kx\,dx\right)=0$$

因此在$(0,\frac{\pi}{2})$上　$f^*(\pi-x)=-f^*(x)=-f(x)$. 因此只要满足条件

$$\begin{cases}f^*(\pi-x)=-f(x), & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ f^*(-x)=f^*(x), & x\in(-\pi,\pi)\end{cases}$$

即有$f^*(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$.

(注意这两个x的取值范围不可省略，(2)中也是)

且易知此时　$a_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\cos(2k-1)x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2k-1)x\,dx$
$(k=1,2,\cdots)$

(2) 和(1)同理，此时$f^*(-x)=-f^*(x)$，$x\in(-\pi,\pi)$. 由$b_{2k}=0$知

$$b_{2k}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f^*(x)\sin 2kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^*(x)\sin 2kx\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^*(\pi-x)\sin 2kx\,dx\right)=0$$

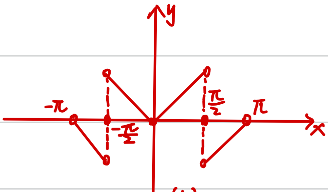
因此在$(0,\frac{\pi}{2})$上　$f^*(\pi-x)=f^*(x)=f(x)$. 因此只要满足条件

$$\begin{cases}f^*(\pi-x)=f(x), & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ f^*(-x)=-f^*(x), & x\in(-\pi,\pi)\end{cases}$$

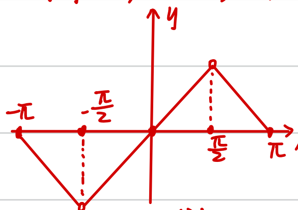
即有$f^*(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

且此时有 $b_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\sin(2k-1)x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2k-1)x\,dx \quad (k=1,2,\cdots)$

注：1° 以 $f(x)=x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 为例，(1)(2) 中的 $f^*(x)$ 分别如下：



(1)



(2)

2° 本题只在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内给定 $f(x)$，因此需要我们在 $(-\pi,0]$ 与 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上补充 $f(x)$ 的值使得 $(-\pi,\pi)$ 上的 $f^*(x)$ 满足要求。奇偶延拓是容易看出的，关键在于如何补充 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上的函数值。注意在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $f(x)=f^*(x)$，所以在 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^*(x)\begin{matrix}\cos 2nx\\ \sin 2nx\end{matrix}\,dx$ 中令 $\pi-x=t$ 可将其化为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(\pi-x)\begin{matrix}\cos 2nx\\ (-\sin 2nx)\end{matrix}\,dx$，从而得到第二个条件。这第二个条件表明了 $f^*(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi)$ 上的函数值与 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的值的关系。

3° 本题中 $f^*(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处的值可以任取，因 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处的值并不知道。事实上，本题并不涉及所得级数是否收 $f^*(x)$ 的问题，因此用了符号 $f^*(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$。所以即使级数在 $\pm\frac{\pi}{2}$ 处不收敛于 $f^*(x)$ 也没关系，这也是 $f^*(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处的值可以任取的原因。

作业讲解

P56 53. 设 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 1)$，$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\pi x\ (-\infty<x<+\infty)$
其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\ (n=1,2,\cdots)$，求 $S(-\frac{1}{2})$ 的值.

解：将 $f(x)$ 作奇延拓成 $(-1,1]$ 上的奇函数：$F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ -x^2, & -1<x<0 \end{cases}$

再将 $F(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数，仍记为 $F(x)$.
因 $F(-1)=F(1)=1$，$F(-1^-)=-1$，所以 $F(x)$ 在 $x=2k-1\ (k\in\mathbb{Z})$ 处不连续.
$F(x)$ 在一个周期内仅有有限个第一类间断点，故满足狄利克雷收敛定理. $F(x)$ 的 Fourier 展开系数：$\begin{cases} A_n=0\ (n=0,1,2,\cdots) \\ B_n=2\int_0^1 F(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=b_n \end{cases}$

因此 $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin n\pi x=\frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$. 又 $F(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 连续，从而 $S(-\frac{1}{2})=F(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$.

P57、56 将函数 $f(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi\le x<0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0\le x<\pi \end{cases}$ 展成 Fourier 级数，并由此推出

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$　　(2) $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\cdots$

解：先将 $f(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数，仍记为 $f(x)$. 易见其在 $x=k\pi$ 处不连续，则满足狄利克雷收敛定理.

又因为在 $(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ 上有 $f(x)=-f(-x)$，则 $f(x)$ 展成的是正弦级数.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx=\frac{1-(-1)^n}{2n},\quad a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$$

因此 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin nx.\quad (x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z})$

(1) 令 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$.

$$f(\tfrac{\pi}{2})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{2(2k+1)}\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k}}{4k}\sin k\pi$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

(2) 令 $A=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\cdots$，则

$$A+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}-\cdots)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

而 $-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{21}-\cdots=-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{12}$

因此 $A=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{12})=\frac{\pi}{3}$.

注：利用函数展成的Fourier级数证明一些恒等式时，首先要观察恒等式的结构（如(1)中要先找到通项是 $\frac{(-1)^k}{2k+1}$），再观察函数在哪一点取值才能得到需要的恒等式.

注意，这里验证狄利克雷收敛定理很重要，因为只有当 $f(x)$ 满足收敛定理，才能有 $f(\frac{\pi}{2})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

P57 59. 将 $f(x)=2\pi^2-x^2\ (-\pi\leq x<\pi)$ 展开成Fourier级数，并计算 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的值.

解：先将 $f(x)$ 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的函数，仍记为 $f(x)$. 则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，满足狄利克雷收敛定理.

因 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上偶函数，则 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0$，$n=1,2,\cdots$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi^2-x^2)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(2\pi^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(2\pi^3-\frac{1}{3}\pi^3-0\right)=\frac{10\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi^2-x^2)\cos nx\,dx=4\pi\int_0^{\pi}\cos nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$
$$=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

因此 $f(x)=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\quad(x\in\mathbb{R})$

令 $x=\pi$，$\pi^2=f(\pi)=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi=\frac{5\pi^2}{3}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{5\pi^2}{3}-\pi^2\right)=\frac{\pi^2}{6}$

令 $x=0$，$2\pi^2=f(0)=\frac{5\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$，因此 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{1}{4}\left(2\pi^2-\frac{5\pi^2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{12}$

平面和直线的方程

一、空间平面方程

1、点法式：$\vec{n}=(A,B,C)$，$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，则 π：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

方程等价于 $PP_0\perp\vec{n}$. 因法向量为 $\vec{n}$ 的平面有无数个，所以还需要一点 P_0 来确定唯一的平面。

2、一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

这可以从点法式得到，实际上 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. 从一般式方程中可以看出平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

3、两平面的位置关系：法向量判断是否相交，常数 D 判断是否重合。

设 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$　　π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

(1) 相交：$A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$

(2) 平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$

(3) 重合：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$

二、空间直线方程

1、点向式：$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$，$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，则 L：$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$

2、参数式：
$$\begin{cases} x=x_0+u_xt \\ y=y_0+u_yt \\ z=z_0+u_zt \end{cases},\ t\in(-\infty,+\infty)$$

3、一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

这里要求 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行、不重合. 因而这两个平面可以确定唯一的一条交线。

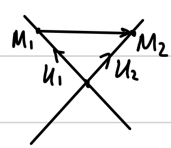
从直线的一般式方程求直线的方向向量有如下方法：设 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 分别为平面 π_1,π_2 的法向量. 因直线同时落在 π_1 和 π_2 上，所以 $\vec{u}\perp\vec{n}_1$，$\vec{u}\perp\vec{n}_2$，因此可取 $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

4. 直线与直线的位置关系

设 $l_1: \dfrac{x-x_1}{u_x}=\dfrac{y-y_1}{u_y}=\dfrac{z-z_1}{u_z}$，$l_2: \dfrac{x-x_2}{v_x}=\dfrac{y-y_2}{v_y}=\dfrac{z-z_2}{v_z}$

记 $D=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$

(1) 异面：$D\neq0$. 因 $M_1=(x_1,y_1,z_1)\in l_1$，$M_2=(x_2,y_2,z_2)\in l_2$，则 $D=0$ 当且仅当 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 共面，即 l_1 与 l_2 相交。



(2) 相交：$D=0$ 且 $u_x:u_y:u_z\neq v_x:v_y:v_z$

(3) 平行：$u_x:u_y:u_z=v_x:v_y:v_z\neq(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$

(4) 重合：$u_x:u_y:u_z=v_x:v_y:v_z=(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)$ (注意(3)(4)中自动有 $D=0$)