第九次习题课

一、作业讲解

P147 57(2) 求 $z=x^2y(4-x-y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 6-x,\ 0\le x\le 6\}$ 的最值.

分析：这是闭区域上的多元函数最值问题，可以考虑先讨论区域内部、再讨论边界情况. 注意到这里的边界条件都是线性的，因此可以用消元法求边界上的最值.

解：①先考虑 D 内部. $\begin{cases} z_x'=xy(8-3x-2y)=0 \\ z_y'=x^2(4-x-2y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

上述仅有 $(2,1)$ 在 D 内部.

$z_{xx}''(2,1)=-6$, $z_{xy}''(2,1)=0$, $z_{yy}''(2,1)=-8$, 则 $(z_{xy}'')^2-z_{xx}''z_{yy}''\big|_{(2,1)}=-48<0$,

所以 $(2,1)$ 为极大值点，极大值 $z(2,1)=4$.

②考虑 D 的边界. 在 $x=0$, $0\le y\le 6$ 上 $z\equiv 0$； $y=0$, $0\le x\le 6$ 上 $z\equiv 0$.

在 $y=6-x$, $0\le x\le 6$ 上， $z=x^2(6-x)(4-x-(6-x))=2x^3-12x^2 \triangleq \hat{z}(x)$

$\hat{z}'=6x^2-24x=0 \Rightarrow x=0$ 或 4，而 $\hat{z}'<0 \Rightarrow 0<x<4$

故 $\hat{z}$ 在 $x\in[0,4]$ 递减，在 $x\in[4,6]$ 递增. 当 $x=4$ 时有最小值为 $z(4,2)=-64$. 而 $z(6,0)=0$, $z(0,6)=0$, 则在边界上 $z(x,y)$ 最小值为 -64, 最大值为 0.

综上，在 D 上 $z_{max}=z(2,1)=4$, $z_{min}=z(4,2)=-64$.

总结：无约束条件问题，找稳定点并求二阶偏导判断极值点类型；

有约束条件问题，用拉格朗日乘数法或根据约束条件的特点来处理；

闭区域上的问题则可以转化成“无约束＋有约束”型处理.

二、方向导数与梯度

1、方向导数：沿着某一个方向求出的单侧导数.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho},\ \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

定理：若函数 f 在点 M_0 处可微，则 f 在 M_0 处沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数均存在. 若 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta+f_z'(M_0)\cos\gamma$.

注：1° f 在某点处沿任何方向导数存在，也无法推出 f 在该处连续（例9.7.4），更不一定可微

2° 若 f 不可微，则 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$ 未必有上述定理中的形式（见下面的 P149 82）

2、梯度：$\mathrm{grad} f=(f_x',f_y',f_z')$. 可见 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\mathrm{grad} f\cdot\vec{l}^{\,0}=|\mathrm{grad} f|\cos\theta$，$\theta$ 为 $\mathrm{grad} f$ 与 $\vec{l}$ 的夹角.

P149. 82. 设 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$，证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数存在，但在 $(0,0)$ 不可微.

证：① 任取一个方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则这一方向对应的点可写为 $(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

于是 $$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}}{r}=\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

所以对任一确定的方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$，都存在方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(0,0)}=\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$

② $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{r\to 0^+}\frac{r\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-r(\cos\theta+\sin\theta)}{r}=\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}-(\sin\theta+\cos\theta)$$

当 $\theta=\frac{\pi}{3}$，上述极限 $\neq 0$. 故 f 在 $(0,0)$ 不可微.

注意，在证方向导数处处存在和不可微时，我们用极坐标法得到的极限当中都有θ。但第一步中的θ是提前取定的，它的含义就是方向导数的方向。因此求出的结果就表示沿与θ对应的方向求方向导数，求得的结果就是$\sqrt[3]{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$。它存在且为唯一确定的值。 而在讨论可微性时，求出的极限值也包含θ，但这里的θ并非确定的，而是$[0,2\pi)$之间的一个变量，只要能找到某个θ使上述结果不为0，就说明$f(x,y)$在O不可微。

实际上，在用极坐标法求多元极限时，若结果中与θ有关，则说明沿着不同的方向取的"方向极限"是不一样的，这就意味着原极限不是一个确定的值，因而不存在。

三、多元Taylor公式。

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+o(\rho^n),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$$

$$(0<\theta<1)$$

注：不建议把$\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]$写成$\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)$，容易搞混这个式子的含义。

另外关于余项的问题，若题目有要求就根据题目要求选取余项的类型。若没有，就根据应用场景选择：若是利用Taylor展开求极限的，一般用Peano型余项；若是利用Taylor展开进行放缩估计的，一般用Lagrange型余项。

例：设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $U(P_0)$ 内有连续的二阶偏导数，且 f 在点 P_0 取极大值. 证明：$f''_{xx}(P_0)+f''_{yy}(P_0)\le 0$

证：因 P_0 为 f 的极值点，所以 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$.

考虑用 f 的 Taylor 展开：当 h 充分小时，$(x_0+h,y)\in U(P_0)$. 此时

$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)h+\frac{1}{2}f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2=\frac{1}{2}f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2\ (0<\theta<1)$

由于 $f(x_0,y_0)$ 为极大值，故当 h 充分小时有 $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\le 0$

因此 $f''_{xx}(x_0+\theta h,y_0)\le 0$. 由 f''_{xx} 连续，令 $h\to 0$ 得 $f''_{xx}(x_0,y_0)\le 0$.

同理可证 $f''_{yy}(x_0,y_0)\le 0$. 因此 $f''_{xx}(P_0)+f''_{yy}(P_0)\le 0$.

四、几何应用

这部分记住公式即可. 在之前的解析几何部分, 研究的是曲面本身的"形状"性质. 而这里研究的是切线、切平面的性质.

P150 95. 设 $z=f(x,y)$ 在 R^2 上连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{f(x,y)+x-2y+6}{(x-1)^2+(y-1)^2}=2$

(1) 求曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(1,2)$ 处的切平面方程

(2) 点 $(1,2)$ 是否为 $z=f(x,y)$ 的极值点?

分析: 实际上只要求出 $f'_x(1,2)$ 与 $f'_y(1,2)$, 本题就解决了. 关键在于如何用已知条件求偏导数.

解: (1) 由条件知 $f(x,y)=-x+2y-6+2\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)+o\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)$

则 $f(1,2)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}f(x,y)=-3$. 所以

$$f(x,y)=-3-(x-1)+2(y-2)+2\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)+o\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)$$

$$=-3-(x-1)+2(y-2)+o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(1,2)$ 处可微, 且 $f'_x(1,2)=-1$, $f'_y(1,2)=2$

$z=f(x,y)$ 在 $(1,2)$ 处的切平面方程 $z+3=-(x-1)+2(y-2)$

(2) 由极值点的必要条件知 $(1,2)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

注: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{2\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)+o\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\cdot\dfrac{o\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$=0+0=0$

因此 $2\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)+o\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)=o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$