第六次习题课

一、多元函数的极限与连续

将一元函数中的概念推广到多元的情形，就得到了多元函数下的概念。可以看到，多元函数情形下的很多结论和一元情形下是相似的，在记忆时要注意它们的区别和联系。

1、二元函数的极限：设 $z=f(P)$ 为定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的二元函数，$P_0\in D$，若存在常数 A，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $P\in\mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$ 时有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(P)$ 在 D 上当 P 趋于 P_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$.

若写成 $P(x,y)$，$P_0(x_0,y_0)$，则还可记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$.

注：可以看到，在一元函数情形下，P 趋于 P_0 只有沿实数轴趋近这一种情况；但在 $\mathbb{R}^2$ 中，P 趋于 P_0 的方式却可能很复杂，这一点将会在后面的例子中看到。

例：判断下列极限是否存在，若存在，求之。

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$　　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\ y\to0^+}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$

用 I 表示待求的极限。

解：(1) 法1：因 $(|x|+|y|)^2=x^2+y^2+2|x||y|$，则 $\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=|x|+|y|-\dfrac{2|x||y|}{|x|+|y|}$

而 $0\le\dfrac{2|x||y|}{|x|+|y|}\le\dfrac{2|x||y|}{|x|}=2|y|$，由夹逼定理有 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{2|x||y|}{|x|+|y|}=0$. 故 $I=0$.

法2：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $(\theta\in[0,2\pi),\ r>0)$，则 $I=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$

因 $\dfrac{1}{|\cos\theta|+|\sin\theta|}$ 为有界量，故 $I=0$.

(2) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^3+y^3)=0$. 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}=1$.

法1：$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|x^3|}{x^2+y^2}+\frac{|y^3|}{x^2+y^2}\le|x|+|y|\to0\ (x\to0,y\to0)$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 存在且为0. 因此 $I=0$.

法2：令 $x=r\cos\theta$. $y=r\sin\theta$ ($\theta\in[0,2\pi)$, $r>0$) 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}$

$=\lim\limits_{r\to0}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$

因 $\cos^3\theta+\sin^3\theta$ 为有界量，故 $I=0$.

(3) 分析：易见 $0<\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$. 因 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\to1\ (x\to0^+)$，假设 $\exists\alpha$ 使得 $0<\alpha\le\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$，则由 $\alpha^x\to1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x\to1\ (x\to0^+)$ 可得 $I=1$. 但是，当 $\substack{x\to0^+\\y\to0^+}$ 时，上述 α 并不存在，因而猜测原极限可能不存在. 为此，我们寻找两种不同方式的极限过程 $\substack{x\to0^+\\y\to0^+}$，使二者结果不等. 首先令 $x=y\to0^+$，则 $I=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$. 为了找到第二种，注意到 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 为齐次结构，我们令 $y=k(x)x\to0^+\ (x\to0^+)$，其中函数 $k(x)>0$ 待定. 令 $u=\left[\frac{k(x)x^2}{x^2(1+k^2(x))}\right]^x$，

$\ln u=x\ln\frac{k(x)}{1+k^2(x)}=x\ln k(x)-x\ln(1+k^2(x))$，只要选取 $k(x)$ 使当 $x\to0^+$ 时 $k(x)\to0^+$ 但 $x\ln k(x)\not\to0$，即有 $u\not\to1$. 最简单的取法是令 $k(x)=e^{-\frac{1}{x}}$，有 $\lim\limits_{x\to0^+}k(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln k(x)=-1$. 则此时 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x\Big|_{y=xe^{-\frac{1}{x}}}=e^{-1}\ne1$，这说明原极限不存在.

解：① 取 $y=x\to0^+$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{x^2+x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$.

② 取 $y=xe^{-\frac{1}{x}}$，则 $x\to0^+$ 时 $y\to0^+$. 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}\right)^x$

令 $u=\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}\right)^x$，$\ln u=x\ln e^{-\frac{1}{x}}-x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})=-1-x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})$

$\longrightarrow -1\ (x\to0^+)$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}u=e^{-1}$，即此时 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}\right)^x=e^{-1}\neq1$，故原极限不存在.

注：1° 求多元函数极限的时候，一元函数中的重要极限等结论仍然适用，如第(2)题，还可以结合一些不等式放缩、夹逼定理等求解.

此外，极坐标方法也是很有用的一个方法，特别是有 x^2+y^2 等齐次结构的时候。这种方法往往能把二元极限问题转化为关于 r 的一元极限问题（另一个参数 θ 所在的三角函数部分通常变成了一个有界量），能简化问题. 但有时极坐标方法也未必适用，如第(3)题中 $\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$ 因指数上也有变量，整体不是个齐次结构，用极坐标、效果并不好.

2° 从第(3)题可以看到，对多元极限的讨论会比一元情形复杂得多.

2、重极限与累次极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$、$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

定理：若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. 对另一个累次极限也有相同的结论.

注意，累次极限并不是二重极限的某种方式，但若两个累次极限存在但不相等，则二重极限必不存在. 这给出了一个二重极限不存在的判别法.

例：讨论下列函数在 $(0,0)$ 点处的累次极限与二重极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ (2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$

(3) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{y}$ (4) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

解：(1) 对任意 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 足够小时，有 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$

对任意 $y\neq 0$ 且 $|y|$ 足够小时，有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$

所以两个累次极限存在且皆为 0.

对于重极限，当 $x=y\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$

当 $y=0$，$x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0\neq 1$. 因此重极限不存在.

(2) 因 $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim\limits_{y\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}\right)$ 不存在，同理 $\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 不存在，即两个累次极限不存在.

对于重极限，因 $\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|$，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$ 且 $x^2+y^2\ne0$ 时有 $\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}-0\right|\le|x|+|y|<2\delta=\varepsilon$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}\right)$ 与 $\lim\limits_{y\to0}\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}\right)$ 均不存在，故累次极限均不存在.

此外二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}\right)$ 不存在.

(4) $\lim\limits_{y\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$，因此 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$

两个累次极限存在但不相等，故重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

先假设你有一只兔子。

假设有人又给了你另一只兔子。

现在，数一下你所拥有的兔子数量．你会得到结果是两只。也就是说一只兔子加一只兔子等于两只兔子，也就是一加一等于二。

$$1+1=2$$

这就是算术的运算方法了。

那么，现在你已经对算术的基本原理有了一定了解，就让我们来看一看下面这个简单的例子，来把我们刚刚学到的知识运用到实践中吧。

试试看！
例题 1.7

$$\log\Pi(N)=\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N-N+A-\int_N^{\infty}\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x},\quad A=1+\int_1^{\infty}\frac{\overline{B}_1(x)\mathrm{d}x}{x}$$

$$\log\Pi(s)=\left(s+\frac{1}{2}\right)\log s-s+A-\int_0^{\infty}\frac{\overline{B}_1(t)\mathrm{d}t}{t+s}$$

补充：有同学问在极坐标方法中变量 θ 的作用是什么。虽然在 $r\to 0$ 的过程中 θ 的变化情况是不清楚的（一般情况下 θ 的变化的确是随机的），但正因为 θ 不确定，(r,θ) 才能体现出动点 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 趋于 $(0,0)$ 的方式是任意的。因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 才是等价的。

例如，考虑 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$。令 $y=kx$ 易知极限不存在。若用极坐标，则 $I=\lim\limits_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\sin\theta$。这说明 I 与 θ 有关，θ 的不同变化方式会导致 I 取不同的值。例如令 $\theta\equiv\frac{\pi}{4}$（相当于沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$），则 $I=\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$；又令 $\theta=0$（相当于沿 $y=0$ 趋于 $(0,0)$），则 $I=0\neq\frac{1}{2}$。所以 I 与 θ 有关就说明原极限不存在。这也体现出极坐标法中参数 θ 的作用。