第十二次习题课

一、两类曲线积分的概念

第一类曲线(曲面)积分对应的是数量积分问题;第二类曲线(曲面)积分对应的是向量积分问题。

数量积分问题无需考虑方向性,向量积分问题则要考虑方向性。

二、第一类曲线积分的计算

1、对称性:对于 $\int_C f(P)ds$,若 C 可划分成两个对称部分 C_1、C_2,且对称点上 $f(P)$ 大小相等符号相同,则 $\int_C f(P)ds = 2\int_{C_1} f(P)ds$;若对称点上 $f(P)$ 大小相等符号相反,则 $\int_C f(P)ds = 0$.

2、三种形式下的计算

(1) 曲线由参数方程 L: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 给出,且 f 在 L 上连续,则 $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$

(2) 曲线由 L: $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$ 给出,且 φ 在 $[a,b]$ 上有连续导数,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx$$

(3) 曲线由极坐标 $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ 给出,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}\,d\theta$$

例 (P222.1) (4) $\int_L (x^2+y^2)ds$，L：$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$0\le t\le 2\pi$

(8) $\int_L |y|ds$，L为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧

(10) $\int_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$，$L$为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

解：(4) $x'(t)=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$

$y'(t)=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$

则 $I=\int_0^{2\pi} a^2\left((\cos t+t\sin t)^2+(\sin t-t\cos t)^2\right) at\,dt$

$=a^3\int_0^{2\pi} t(1+t^2)\,dt=(2\pi^2+4\pi^4)a^3$

(8) 在极坐标下双纽线为 $r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]\cup[\frac{7\pi}{4},2\pi]$

根据被积函数表达式以及双纽线的中心对称性，原积分等于在第一象限中的曲线上的积分的4倍. 因此

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}|r\sin\theta|\cdot\sqrt{\frac{4a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}+a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\,d\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}}\,d\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta=(4-2\sqrt{2})a^2$$

(10) 令 $x=a\cos^3\theta$，$y=a\sin^3\theta$，根据对称性

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{4}{3}}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)|3a\sin\theta\cos\theta|\,d\theta$$

$$=12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)(\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{4}\sin^3 2\theta\right)d\theta=4a^{\frac{7}{3}}$$

注：若不用对称性，也可直接在$[0,2\pi]$上积分，但应注意被积函数的符号变化.

三、第二类曲线积分的计算

1、曲线由参数方程 $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[\alpha,\beta]$ 给出时，

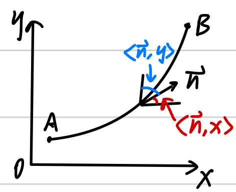
$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right]dt$$

2、L 由显式给出：$L: y=y(x), x\in[a,b]$，且 $y(a)$ 为起点，$y(b)$ 为终点，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\right]dx$$

3、两类曲线积分的联系

设 L 为从 A 到 B 的光滑曲线，且以弧长 s 为参数 $x=x(s), y=y(s), 0\le s\le l$，$A(x(0),y(0))$，$B(x(l),y(l))$，曲线上每一点的切线方向指向弧长参数增大的方向。用 $\cos\langle\vec{n},x\rangle$ 和 $\cos\langle\vec{n},y\rangle$ 分别表示切线方向和 x 轴，y 轴的夹角余弦，则在点 (x,y) 处 $\frac{dx}{ds}=\cos\langle\vec{n},x\rangle$，$\frac{dy}{ds}=\cos\langle\vec{n},y\rangle$. 有



$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy&=\int_0^l\left[P(x(s),y(s))\frac{dx}{ds}+Q(x(s),y(s))\frac{dy}{ds}\right]ds\\&=\int_0^l\left[P(x(s),y(s))\cos\langle\vec{n},x\rangle+Q(x(s),y(s))\cos\langle\vec{n},y\rangle\right]ds\\&=\int_L\left[P(x,y)\cos\langle\vec{n},x\rangle+Q(x,y)\cos\langle\vec{n},y\rangle\right]ds\end{aligned}$$

例(P223. 8.) (1) $\int_L \sin y\,dx+\sin x\,dy$，$L$为从$(0,\pi)$到$(\pi,0)$的线段.

(3) $\int_L (2a-y)dx-(a-y)dy$，L为摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$

(5) $\int_L (3x^2-6yz)dx+(2y-3xz)dy+(1-4xyz^2)dz$，$L$为从$(0,0,0)$到$(1,1,1)$的线段.

解：(1) 令 $A(0,\pi)$，$B(\pi,0)$，则 AB：$y=-x+\pi$，$0\le x\le\pi$

$$I=\int_0^{\pi}(\sin(-x+\pi)+\sin x\cdot(-1))dx=0$$

或者分成两个积分：$I=\int_L \sin y\,dx+\int_L \sin x\,dy=\int_0^{\pi}\sin(\pi-x)dx+\int_{\pi}^{0}\sin(\pi-y)dy$
$=0$

(3) $$I=\int_0^{2\pi}[(2a-a(1-\cos t))a(1-\cos t)-(a-a(1-\cos t))a\sin t]dt$$
$$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos^2 t-\cos t\sin t)dt=a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt-a^2\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt$$
$$=\pi a^2$$

(5) 令 $x=t, y=t, z=t$ $(0\le t\le 1)$，则 $x'(t)=y'(t)=z'(t)=1$

$$I=\int_0^1(3t^2-6t^2+2t-3t^2+1-4t^4)dt=\int_0^1(-4t^4-6t^2+2t+1)dt$$
$$=-\frac{4}{5}t^5-2t^3+t^2+t\Big|_0^1=-\frac{4}{5}$$

四、Green公式

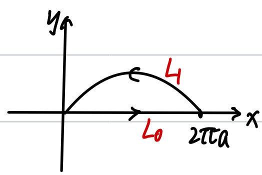
设 D 是以光滑曲线 L 为边界的平面单连通区域，$P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上具有一阶连续偏导，则 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$.

其中 L 取正方向.

Green公式的重要意义在于，它把一个“在闭区域上的重积分”和一个“在这个区域的边界曲线上的曲线积分”联系了起来. 实际上从更高的视角看，这两个被积的式子是由一种称为外微分的运算联系起来的.

P193 26. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱和 x 轴所围成均匀薄片关于 x 轴的转动惯量.

解：$I=\rho\iint_D y^2dxdy$. 现在用Green公式来做，设区域 D 的边界曲线为 L，则 L 由摆线的一拱和 x 轴上的部分 $\{y=0,\ 0\leq x\leq 2\pi a\}$ 组成.



$$\iint_D y^2dxdy=\oint_{L+}\left(-\frac{1}{3}y^3\right)dx$$

$$=\left(\int_{L_0}+\int_{L_1}\right)\left(-\frac{1}{3}y^3\right)dx$$

$$=\int_{L_1}\left(-\frac{1}{3}y^3\right)dx=-\frac{1}{3}\int_{2\pi}^{0}a^3(1-\cos t)^3\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\frac{35}{12}\pi a^4$$

例2：设L为分段光滑的闭曲线，L围成的区域为D，原点$O\in D$但$O\notin L$.

求积分 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

分析：令 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，注意$P$和$Q$在$D$中原点处不连续，不满足Green公式条件. 因此要设法将原点"挖去"再用Green公式.

解：取一个$r>0$使$\{x^2+y^2\le r^2\}\subseteq \text{int}\,D$. 记$C_r$：$x^2+y^2=r^2$，则在由$C_r$和$L$（均取正方向）共同围成的区域$D_1$上满足Green公式的条件. 所以

$$\oint_{L-C_r}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}\right]dxdy=0$$

因此 $$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\left(\oint_{C_r}+\oint_{L-C_r}\right)\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)=\oint_{C_r}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r^2}d\theta=2\pi$$