数项级数

一、级数的基本概念

柯西收敛准则(发散级数情形)

$\sum a_n$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0$, 对 $\forall N\in\mathbb{N}$, 总存在 $n', p'\in\mathbb{N}$ 使得 $n'>N$ 但 $|S_{n'+p'}-S_{n'}|\geq \varepsilon_0$.

例：用柯西收敛准则证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

$S_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ 1, & n=2k-1\end{cases}$ 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 则对 $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists k\in\mathbb{N}$ 使 $2k>N$. 记 $n=2k$, 再取 $p=1$, 则 $|S_{n+p}-S_n|=|S_{2k+1}-S_{2k}|=1>\varepsilon_0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散

注：若未提前告知级数敛散性，则用柯西收敛准则前要先对敛散性作初步判断

二、正项级数

1、比较判别法(及其极限形式)：找 a_n 的等价量，可利用Taylor公式等.
(通常用几何级数 $\sum\frac{1}{n^p}$)

例：$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{k})}\right)$

证：注意到 $\left(\ln(1+\frac{1}{k})\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(1-\frac{1}{2k}+o(\frac{1}{k})\right)^{\frac{1}{2}}$

而由 $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x)$ 知 $\left(1-\frac{1}{2k}+o(\frac{1}{k})\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{4k}+o(\frac{1}{k})$

所以 $\left(\ln(1+\frac{1}{k})\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(1-\frac{1}{4k}+o(\frac{1}{k})\right)=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$

即 $\frac{1}{\sqrt{k}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{k})}=\frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{4}$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知原级数收敛。

2、比值判别法/根值判别法（极限形式若极限为1则失效）

一般优先考虑比值判别法（计算方便），但从某种意义上说根值判别法适用范围更广。

定理：设 $\sum a_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\rho$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\rho$.

证：$\rho=+\infty$ 显然。当 ρ 为有限数时，$\lim\limits_{k\to\infty}\ln\frac{a_{k+1}}{a_k}=\ln\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=\ln\rho$

而 $\lim\limits_{k\to\infty}\ln\sqrt[k]{a_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln a_k}{k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln\left(a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_k}{a_{k-1}}\right)}{k}$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\ln\frac{a_k}{a_{k-1}}}{k}\ \underset{\text{(将分子看成}b_k)}{\xlongequal{\text{Stolz公式}}}\ \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{a_k}{a_{k-1}}}{k-(k-1)}=\ln\rho$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\rho$，证毕.

但反之未必，即从 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\rho$ 未必能得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\rho$. 考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{(-1)^n}{n}}}=\frac{1}{2}<1$，级数收敛. 但对 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+(-1)^n}}{2^{n+1+(-1)^{n+1}}}$，极限不存在，因 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2^{2k+(-1)^{2k}}}{2^{2k+1+(-1)^{2k+1}}}=2$，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2^{2k+1+(-1)^{2k+1}}}{2^{2k+2+(-1)^{2k+2}}}=\frac{1}{8}$.

3、积分判别法（略，参考书本例题）

注：有阶乘或指数项（如 2^n）时常用比值判别法；当级数通项的指数为关于 n 的函数（如 $2^{n+(-1)^n}$）时常用根值判别法；当级数通项同时含 $\ln$ 与 $\ln n$ 时常用积分判别法。

4、拉比判别法（极限形式）：设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则 $r>1$ 时 $\sum u_n$ 收敛；$r<1$ 时 $\sum u_n$ 发散.

三、一般项级数

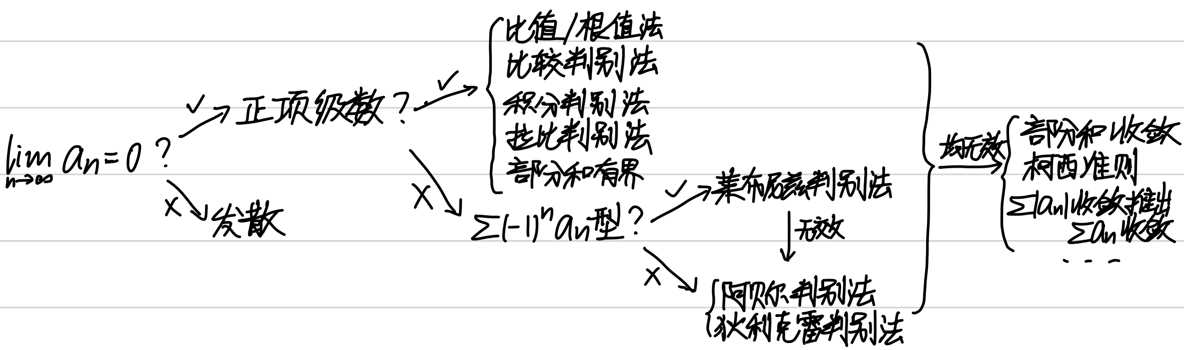
1、绝对收敛与条件收敛（绝对收敛则原级数必收敛）

2、莱布尼兹判别法：判断交错级数

3、阿贝尔/狄利克雷判别法

注意，对正项级数成立的方法对一般项级数未必成立，不可乱用结论！

总结：$\sum a_n$ 敛散性判别一般可按如下流程进行



补充：(黎曼重排定理) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则对任一预先取定的数 L (有限或 $\pm\infty$)，都可以通过重排 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 中的项使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 L.

证：由 $\sum a_n$ 条件收敛知 $\{a_n\}$ 中有正有负，设 $\{b_n\}$ 为按原次序排列的所有正项，$\{-C_n\}$ 为按原次序排列的所有负项 (则 $C_n>0$). 由条件收敛级数的性质知 $\sum b_n$ 与 $\sum C_n$ 均发散，因而 $\forall\varepsilon>0$, $\forall n_1\in\mathbb{N}$, $\exists n_2>n_1$ 使 $b_{n_1}+b_{n_1+1}+\cdots+b_{n_2}>\varepsilon$. (1)
对 $\sum C_n$ 有类似的结论.

又由 $\sum a_n$ 收敛知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则也有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}C_n=0$. 下面开始证明定理：

① 若 $L<\infty$，由 (1) 知若从 $\{b_n\}$ 中按顺序抽取项，则存在 $k_1\in\mathbb{N}$ 使得 $b_1+b_2+\cdots+b_{k_1}>L$ 恰好成立 (即 $b_1+\cdots+b_{k_1-1}\le L$)；再从 $\{C_n\}$ 中按顺序抽取项，则存在 $m_1\in\mathbb{N}$ 使得 $C_1+C_2+\cdots+C_{m_1}>b_1+\cdots+b_{k_1}-L$，因而此时 $b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})<L$；再从 $\{b_n\}$ 中继续按顺序抽取项，则 $\exists k_2\in\mathbb{N}$ 使 $b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})+b_{k_1+1}+\cdots+b_{k_2}>L$ 恰好成立；再从 $\{C_n\}$ 中 $\cdots$

上述过程可依次不断重复下去. 而注意对 $i\in\mathbb{N}$ 若恰好有

$$b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})+\cdots+b_{k_i+1}+\cdots+b_{k_{i+1}-1}+b_{k_{i+1}}>L，则也有$$

$$b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})+\cdots+b_{k_i+1}+\cdots+b_{k_{i+1}-1}<L，这说明$$

$$|b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})+\cdots+b_{k_i+1}+\cdots+b_{k_{i+1}-1}+b_{k_{i+1}}-L|<b_{k_{i+1}} \text{ 总成立} (\forall i)$$

同理总有 $|b_1+\cdots+b_{k_1}-(C_1+\cdots+C_{m_1})+\cdots-(C_{m_i+1}+\cdots+C_{m_{i+1}})-L|<C_{m_{i+1}}$ $(\forall i)$

而 $\lim_{i\to\infty}b_{k_{i+1}}=\lim_{i\to\infty}C_{m_{i+1}}=0$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 L 的差将趋于 0，即重排后的级数收敛于 L.

② $L=+\infty$（$-\infty$ 同理），可先从 $\{b_n\}$ 中依次序取项使和大于 1，再取一个 $\{-c_n\}$ 中的项，再从 $\{b_n\}$ 中依次序取项使和大于 2，再取一个 $\{-c_n\}$ 中的项，……

这样第 k 次从 $\{b_n\}\{-c_n\}$ 中取一轮后得到的部分和会大于 k，因而重排后级数发散到 $+\infty$.

注：这一定理揭示了条件收敛的本质，即级数中正项与负项的相互抵消导致了级数收敛，且正负项的次序会影响到级数最终的收敛结果。