

HACHOU & LAURENT - MICROÉCONOMIE
NATHAN - SUP.

- Étudions maintenant la valeur de l'élasticité de substitution de cette fonction.
On détermine d'abord le taux marginal de substitution technique :

$$\begin{aligned} TMST_{y_2/y_1} &= \frac{\frac{A}{\rho} \cdot [\alpha y_1^\rho + (1-\alpha)y_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \alpha \rho y_1^{\rho-1}}{\frac{A}{\rho} \cdot [\alpha y_1^\rho + (1-\alpha)y_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot (1-\alpha)\rho y_2^{\rho-1}} \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\rho-1} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\rho} \end{aligned}$$

Il est désormais possible de calculer l'élasticité de substitution entre les facteurs :

$$\varepsilon_S = \frac{1}{\frac{\partial TMST_{y_2/y_1}}{\partial (y_2/y_1)}} \cdot \frac{TMST_{y_2/y_1}}{(y_2/y_1)} = \frac{1}{\frac{\alpha(1-\rho)}{1-\alpha} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{-\rho}} \cdot \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{1-\rho}}{\frac{y_2}{y_1}} = \frac{1}{1-\rho}$$

Conformément à son appellation, cette fonction de production possède une élasticité de substitution constante. Il est possible de retrouver différents cas particuliers selon la valeur de ρ :

- lorsque $\rho \rightarrow 1$, l'élasticité de substitution tend vers l'infini. On retrouve le cas de facteurs parfaitement substituables ;
- lorsque $\rho = 0$, l'élasticité de substitution est égale à 1. On retrouve un cas de facteurs substituables similaire à une fonction de production Cobb-Douglas ;
- lorsque $\rho \rightarrow -\infty$, l'élasticité de substitution tend vers 0. On retrouve ainsi le cas de facteurs parfaitement complémentaires.

4 Demandes de facteurs de production et efficacité technique

La recherche de la maximisation du profit par l'entrepreneur le conduit à demander différents facteurs pour sa production. Puisque le profit est égal à la différence entre la recette totale de la vente et le coût total de production, il est nécessaire d'étudier la forme de ces coûts dans un premier temps.

4.1. Coût de production et droite d'iso-coût

Pour fabriquer le bien vendu, le producteur doit acheter des facteurs de production. Chaque facteur i est acheté en quantité y_i et à un prix p_i . Le coût total de production $C(y_1, y_2)$ correspond alors à la dépense réalisée pour l'achat de ces différents facteurs, à laquelle on ajoute des frais fixes (par exemple, les coûts de location des bâtiments ou les frais de publicité) d'un montant F :

$$C(y_1, y_2) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + F$$

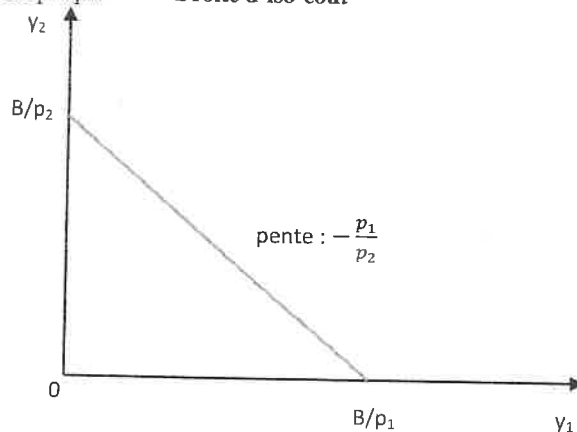
Supposons que le budget de production consacré à l'achat des facteurs soit donné dans l'entreprise : $B = C(y_1, y_2) - F$. Dans ce cas, il est possible de représenter le coût total dans l'ensemble de production, ce qui correspond au concept de droite d'iso-coût.

La **droite d'iso-coût** est le lieu géométrique de l'ensemble des combinaisons de facteurs qui nécessitent le même budget de production. À partir de la contrainte budgétaire du producteur, on détermine l'équation de cette droite qui est de la forme $y_2 = g(y_1)$:

$$B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \Rightarrow y_2(y_1) = \frac{B}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} y_1$$

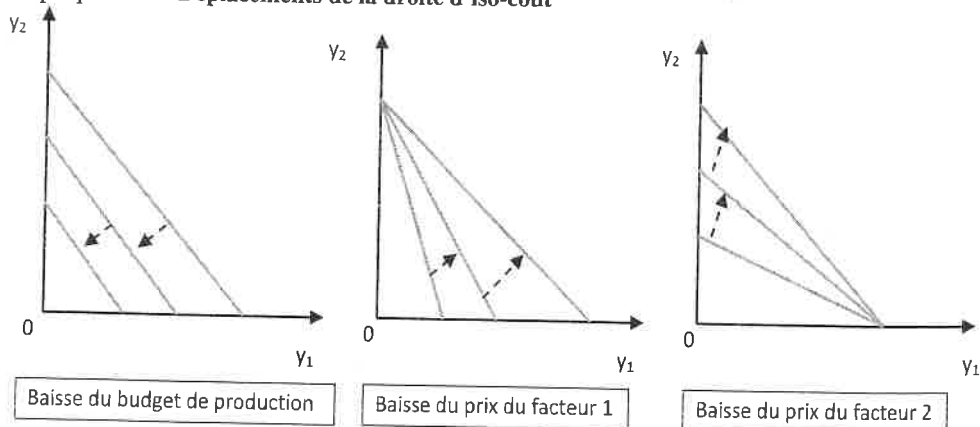
La pente de la droite d'iso-coût en valeur absolue est égale au rapport des prix des facteurs de production. Ce rapport des prix peut s'interpréter comme le taux auquel l'entreprise peut substituer du facteur 2 au facteur 1 en maintenant le coût de production constant. Cette droite est représentée sur le Graphique 4.12.

Graphique 4.12 – Droite d'iso-coût



Lorsque le budget de production diminue, cette droite se déplace de façon parallèle vers le bas. Lorsque le prix du facteur 1 (respectivement facteur 2) diminue, il se produit une rotation de cette droite vers le haut par rapport à son ordonnée (resp. abscisse) à l'origine. Ces déplacements sont présentés sur le Graphique 4.13.

Graphique 4.13 – Déplacements de la droite d'iso-coût



4.2. Les demandes conditionnelles de facteurs

4.2.1. Le programme du producteur

Dans cette section, nous supposons que le producteur souhaite déterminer quelle quantité de chaque facteur est nécessaire pour atteindre un certain volume de production fixe y . Il s'agit de mettre en évidence les demandes de facteur conditionnellement à un certain niveau de production.

Les **demandes conditionnelles** de facteurs expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction de la quantité produite et des prix des facteurs. Le producteur cherche donc la méthode de production la plus efficace et maximise son profit, ce qui conduit au programme suivant :

$$\underset{(y_1, y_2)}{\text{Max}} \Pi(y_1, y_2) = \overbrace{\bar{p}\bar{y}}^{\text{Recette totale}} - \overbrace{(p_1 y_1 + p_2 y_2 + F)}^{\text{Coût total de production}}$$

Cependant, dans ce programme, la recette totale est parfaitement fixe car la quantité produite est donnée (par hypothèse), ce qui implique également que le prix de vente est donné. [N.B. : soit le producteur est *price taker* et le prix est donné sur le marché concurrentiel, soit il possède un pouvoir de marché qui lui permet d'influencer le prix de vente du bien mais, dans ce dernier cas, le prix est également donné puisque la quantité est fixe.] Ce programme peut donc être reformulé comme un programme de minimisation du coût sous contrainte d'atteindre un niveau de production donné :

$$\begin{cases} \underset{(y_1, y_2)}{\text{Min}} C(y_1, y_2) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + F \\ \text{S.C.} \\ y = f(y_1, y_2) \end{cases}$$

Dans ce programme, la maximisation du profit est implicite à travers la recherche de l'efficacité productive.

4.2.2. Résolution graphique

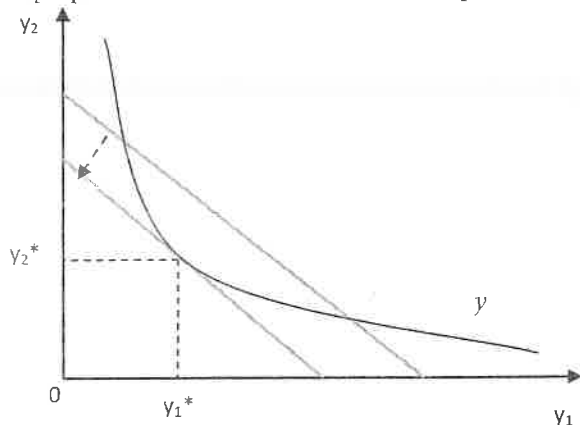
De façon graphique, le programme précédent signifie que le producteur cherche à atteindre la droite d'iso-coût la plus basse possible pour une isoquante donnée (Graphique 4.14). L'équilibre est alors donné par le couple de demandes (y_1^*, y_2^*) .

À l'équilibre du producteur, le niveau de production est fixé à y et on observe que la pente de la droite d'iso-coût (le rapport des prix des facteurs) est égale à la pente de la tangente à l'isoquante (le TMST). L'équilibre du producteur est donc caractérisé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} TMST_{y_2/y_1} = \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ y = f(y_1, y_2) \end{cases}$$

Ce système permet de déterminer les demandes conditionnelles de facteur. [N.B. : le concept de « demandes conditionnelles de facteur » du producteur est similaire au concept de « demandes hicksiennes » du consommateur.]

Graphique 4.14 – La minimisation du coût de production



4.2.3. Résolution analytique

Il est possible de retrouver le résultat précédent de façon analytique. Plus précisément, les demandes conditionnelles de facteur peuvent être calculées par la méthode du Lagrangien. Le problème d'optimisation est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}_{\{y_1, y_2\}} C(y_1, y_2) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + F \\ \text{S. C.} \\ y = f(y_1, y_2) \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée à ce problème se note :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + F + \lambda(y - f(y_1, y_2))$$

Les conditions du premier ordre (CPO) sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = p_1 - \lambda \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda Pm_1(y_1) \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_2} = p_2 - \lambda \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda Pm_2(y_2) \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = y - f(y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

On suppose que les conditions du second ordre sont vérifiées et qu'il s'agit donc bien d'un minimum de coût de production. À partir des deux premières conditions, on trouve que :

$$\lambda = \frac{p_1}{Pm_1(y_1)} = \frac{p_2}{Pm_2(y_2)}$$

Le multiplicateur de Lagrange mesure le supplément de coût (la variation de la fonction objectif) consécutif à l'augmentation de la production d'une unité (le desserrement de la contrainte) : il peut donc s'interpréter comme un coût marginal. Cette propriété est prouvée dans l'Annexe 3. À partir de l'égalité précédente, on obtient l'égalité entre le rapport des prix des facteurs et le TMST :

$$\frac{p_1}{Pm_1(y_1)} = \frac{p_2}{Pm_2(y_2)} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)}$$

En utilisant la dernière CPO, on retrouve le système d'équations identifié par la méthode graphique :

$$\begin{cases} TMST_{y_2/y_1} = \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ y = f(y_1, y_2) \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les demandes conditionnelles de facteur $y_1^*(y, p_1, p_2)$ et $y_2^*(y, p_1, p_2)$. Lorsque les facteurs sont substituables, ces fonctions sont croissantes avec le niveau d'output, décroissantes avec le prix du facteur considéré (ce qui est conforme à l'intuition) et croissantes avec le prix de l'autre facteur. En effet, lorsque le prix de l'autre facteur augmente, ce dernier est moins utilisé dans le processus de production ce qui oblige à augmenter l'utilisation de tous les facteurs (sauf celui-là) par effet de substitution. Un exemple de calcul de ces demandes est proposé dans l'Application 4.6.

APPLICATION 4.6

Calcul des demandes conditionnelles

Nous utilisons à nouveau la fonction de production $y(y_1, y_2) = y_1^{1/3} y_2^{1/2}$ introduite dans l'Application 4.1 pour calculer les demandes conditionnelles de facteur. En négligeant les coûts fixes (qui n'affectent pas l'équilibre), le Lagrangien du problème d'optimisation se note :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \lambda(y - y_1^{1/3} y_2^{1/2})$$

Les conditions du premier ordre (CPO) sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = p_1 - \lambda \left(\frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2} \right) = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda \left(\frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2} \right) \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_2} = p_2 - \lambda \left(\frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2} \right) = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda \left(\frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2} \right) \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = y - y_1^{1/3} y_2^{1/2} = 0 \end{cases}$$

En calculant le rapport entre les deux égalités fournies par les deux premières CPO, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda \left(\frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2} \right)}{\lambda \left(\frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2} \right)} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{2y_2}{3y_1}$$

À l'équilibre, le taux marginal de substitution technique (membre de droite) est égal au rapport des prix des facteurs (membre de gauche). Le TMST du facteur 2 au facteur 1 mesure la quantité de facteur 2 que le producteur retire du processus de production lorsqu'il ajoute une unité supplémentaire de facteur 1, son niveau de production étant constant.

En utilisant la dernière CPO, on aboutit à un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{2y_2}{3y_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ y = y_1^{1/3} y_2^{1/2} \end{cases}$$

On commence par déterminer la demande conditionnelle en facteur 1. Pour cela, on exprime y_2 en fonction de y_1 à partir de la première équation :

$$y_2 = \frac{3p_1}{2p_2} y_1$$

Ensuite, on remplace cette expression au sein de la fonction de production :

$$y = y_1^{1/3} \left(\frac{3p_1}{2p_2} y_1 \right)^{1/2} \Rightarrow y = y_1^{5/6} \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{1/2}$$

Après avoir exprimé y_1 en fonction de y , on obtient la demande conditionnelle du facteur 1 :

$$y_1^*(y, p_1, p_2) = y^{6/5} \left(\frac{2p_2}{3p_1} \right)^{3/5}$$

Par un raisonnement similaire, on observe que la demande conditionnelle du facteur 2 est :

$$y_2^*(y, p_1, p_2) = y^{6/5} \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{2/5}$$

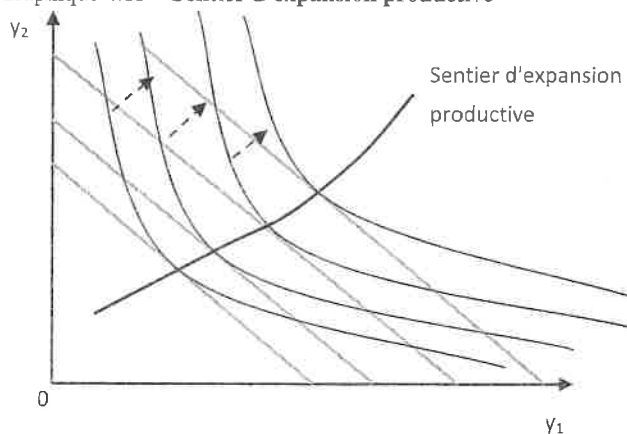
Ces demandes conditionnelles de facteurs expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction de la quantité produite et des prix des facteurs. Elles sont croissantes avec le niveau de production, décroissantes avec le prix du facteur considéré et croissantes avec le prix de l'autre facteur.

4.2.4. Le sentier d'expansion productive

Supposons que l'entreprise souhaite augmenter sa production. Dans ce cas, l'évolution des demandes de facteurs à l'équilibre est indiquée par le sentier d'expansion de la firme.

Le **sentier d'expansion productive** est le lieu géométrique des combinaisons optimales de facteurs lorsque le volume de production varie, les prix des facteurs étant donnés. Le sentier d'expansion productive se trace dans un ensemble de production : il s'agit donc d'une équation de la forme $y_2 = g(y_1)$. Lorsque le volume de production augmente, les isoquantes se déplacent vers le haut dans l'ensemble de production. En conséquence, il est possible de représenter le sentier d'expansion sur le Graphique 4.15.

Graphique 4.15 – Sentier d'expansion productive



L'ensemble des points d'équilibre est caractérisé par l'égalité entre le taux marginal de substitution technique et le rapport des prix des facteurs :

$$TMST_{y_2/y_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

Cette égalité permet de déterminer le sentier d'expansion, comme le montre l'Application 4.7.

APPLICATION 4.7 Détermination du sentier d'expansion productive

À partir de la fonction de production $y(y_1, y_2) = y_1^{1/3} y_2^{1/2}$, nous avons montré dans l'Application 4.6 que l'égalité entre le TMST et le rapport des prix conduit à :

$$TMST_{y_2/y_1} = \frac{2y_2}{3y_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

On exprime alors y_2 en fonction de y_1 pour déterminer l'équation du sentier d'expansion productive :

$$y_2(y_1) = \frac{3p_1}{2p_2} y_1$$

4.3. Les demandes de facteur à budget de production fixe

4.3.1. Le programme du producteur

Dans cette section, nous supposons que le producteur choisit d'allouer un certain budget B à la production du bien. Il souhaite déterminer quelles quantités de facteurs il doit acquérir pour dépenser l'intégralité de son budget en produisant avec la plus grande efficacité technique possible.

Les demandes de facteurs pour un budget de production fixe expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction des prix des facteurs et de ce budget de production. Comme dans la section précédente, le producteur maximise son profit, ce qui conduit au programme suivant :

$$\underset{(y_1, y_2)}{\text{Max}} \Pi(y_1, y_2) = \overbrace{pf(y_1, y_2)}^{\text{Recette totale}} - \overbrace{(B + F)}^{\text{Coût total de production}}$$

Dans ce cadre, le budget de production est donné et la recette totale est strictement croissante avec la quantité produite. [N.B. : à l'évidence, cette propriété est toujours vérifiée si le producteur considère le prix comme donné (il est *price taker*). Dans le cas contraire, cette propriété reste vraie : même s'il possède un pouvoir de marché, le producteur n'a jamais intérêt à réaliser une augmentation de production qui engendre une baisse de sa recette totale.] Ce programme peut donc être reformulé comme un programme de maximisation de la production sous contrainte budgétaire, ce qui correspond au programme dual de celui de la section 4.2.1 (qui était le programme primal) :

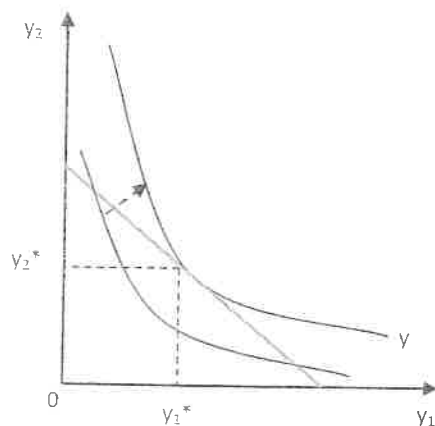
$$\begin{cases} \underset{(y_1, y_2)}{\text{Max}} y = f(y_1, y_2) \\ \text{S. C.} \\ B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \end{cases}$$

Là aussi, la maximisation du profit est implicite à travers la recherche de l'efficacité productive.

4.3.2. Résolution graphique

De façon graphique, le programme précédent signifie que le producteur cherche à atteindre l'isoquante la plus élevée possible pour une droite d'iso-coût donnée (Graphique 4.16). L'équilibre est alors donné par le couple de demandes (y_1^*, y_2^*) .

Graphique 4.16 – La maximisation du volume de production



À l'équilibre du producteur, le budget de production est fixé à B et on observe que la pente de la droite d'iso-coût (le rapport des prix des facteurs) est égale à la pente de la tangente à l'isoquante (le TMST). L'équilibre du producteur est donc caractérisé par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} TMST_{y_2/y_1} = \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \end{cases}$$

Ce système permet de déterminer les demandes de facteur à budget de production fixe. (Le concept de « demandes de facteur à budget de production fixe » est similaire au concept de « demandes Marshalliennes » du consommateur.)

4.3.3. Résolution analytique

Il est possible de retrouver le résultat précédent en utilisant la méthode du Lagrangien. Le point de départ est le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \underset{(y_1, y_2)}{\text{Max}} y = f(y_1, y_2) \\ \text{S. C.} \\ B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \end{cases}$$

La fonction de Lagrange associée à ce problème se note :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = f(y_1, y_2) + \lambda(B - p_1 y_1 - p_2 y_2)$$

Les CPO sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow Pm_1(y_1) = \lambda p_1 \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_2} = \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow Pm_2(y_2) = \lambda p_2 \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = y - f(y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

Les conditions du second ordre sont supposées vérifiées. À partir des deux premières CPO, on trouve que :

$$\lambda = \frac{Pm_1(y_1)}{p_1} = \frac{Pm_2(y_2)}{p_2}$$

À l'équilibre, les productivités marginales par unité monétaire dépensée dans chaque facteur sont égales. Ce multiplicateur de Lagrange mesure le supplément de production consécutif à l'augmentation du budget de production d'une unité : il peut donc s'interpréter comme la productivité marginale du budget de production (ou l'inverse du coût marginal). [N.B. : la démonstration de cette propriété est semblable à celle réalisée pour le consommateur dans l'annexe 1 du chapitre 2. Le budget de production fait office de revenu pour le producteur et la fonction d'utilité du consommateur doit simplement être remplacée par une fonction de production.] À partir de l'égalité précédente, on obtient l'égalité entre le TMST et le rapport des prix des facteurs :

$$\frac{Pm_1(y_1)}{p_1} = \frac{Pm_2(y_2)}{p_2} \Rightarrow \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)} = \frac{p_1}{p_2}$$

Par la suite, la dernière CPO nous conduit au système d'équations identifié par la méthode graphique :

$$\begin{cases} TMST_{y_2/y_1} = \frac{Pm_1(y_1)}{Pm_2(y_2)} = \frac{p_1}{p_2} \\ B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les demandes de facteur à budget de production fixe $y_1^*(B, p_1, p_2)$ et $y_2^*(B, p_1, p_2)$. Lorsque les facteurs sont substituables, ces fonctions sont croissantes avec le budget de production, décroissantes avec le prix du facteur considéré et croissantes avec le prix de l'autre facteur.

Un exemple de calcul de ces demandes est proposé dans l'Application 4.8.

APPLICATION 4.8 Calcul des demandes à budget de production fixe

En utilisant la fonction de production $y(y_1, y_2) = y_1^{1/3} y_2^{1/2}$ de l'Application 4.1, nous pouvons calculer les demandes de facteur à budget de production fixe. Le Lagrangien du problème d'optimisation se note :

$$L(y_1, y_2, \lambda) = y_1^{1/3} y_2^{1/2} + \lambda(B - p_1 y_1 - p_2 y_2)$$

Les CPO sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_1} = \frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2} - \lambda p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2} = \lambda p_1 \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial y_2} = \frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2} - \lambda p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2} = \lambda p_2 \\ \frac{\partial L(y_1, y_2, \lambda)}{\partial \lambda} = B - p_1 y_1 - p_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

En calculant le rapport entre les deux égalités fournies par les deux premières CPO, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\frac{1}{3} y_1^{-2/3} y_2^{1/2}}{\frac{1}{2} y_1^{1/3} y_2^{-1/2}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \Rightarrow \frac{2y_2}{3y_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

À l'équilibre, le taux marginal de substitution technique est égal au rapport des prix des facteurs. Le TMST du facteur 2 au facteur 1 mesure la quantité de facteur 2 que le producteur retire du processus de production lorsqu'il ajoute une unité supplémentaire de facteur 1, son niveau de production étant constant.

En utilisant la dernière CPO, on aboutit à un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{2y_2}{3y_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ B = p_1 y_1 + p_2 y_2 \end{cases}$$

On commence par déterminer la demande du facteur 1. Pour cela, on exprime y_2 en fonction de y_1 à partir de la première équation :

$$y_2 = \frac{3p_1}{2p_2} y_1$$

Ensuite, on remplace cette expression au sein de la dépense de production :

$$B = p_1 y_1 + p_2 \left(\frac{3p_1}{2p_2} y_1 \right) \Rightarrow B = \frac{5}{2} p_1 y_1$$

Après avoir exprimé y_1 en fonction de B, on obtient la demande du facteur 1 :

$$y_1^*(B, p_1, p_2) = \frac{2B}{5p_1}$$

Par un raisonnement similaire, on observe que la demande conditionnelle du facteur 2 est :

$$y_2^*(B, p_1, p_2) = \frac{3B}{5p_2}$$

Ces demandes de facteurs pour un budget de production fixe expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction des prix des facteurs et de ce budget de production. Elles sont bien croissantes avec le budget de production et décroissantes avec le prix du facteur considéré.



4.4. Les demandes de facteurs de concurrence parfaite

4.4.1. Le programme du producteur

Dans cette section, le producteur souhaite déterminer les quantités de facteurs à acquérir pour réaliser la production qui maximise son profit, le prix de vente du bien final étant donné. Ainsi, ni le niveau de production, ni le budget de production ne sont contraints. En revanche, une telle optimisation ne peut être réalisée que si le prix de vente est considéré comme donné par le producteur, tout comme les prix des facteurs. La firme n'a aucun pouvoir sur la détermination du prix de vente du bien final : elle est dite *price taker*. Ce prix de vente du bien est fixé entièrement sur le marché du bien final, ce qui correspond à une situation de **concurrence parfaite** sur ce marché.

Les **demandes de facteurs de concurrence parfaite** expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction du prix de vente du bien et des prix des facteurs. Une situation de concurrence parfaite ne peut se produire qu'en présence de rendements d'échelle décroissants dans l'économie. Si cette propriété de la fonction de production n'est pas vérifiée, il n'est pas possible de calculer les demandes de concurrence parfaite. Si cette propriété est vérifiée, le producteur maximise son profit exprimé en fonction des quantités de facteurs y_1 et y_2 , le prix de vente du bien final p étant donné :

$$\underset{\{y_1, y_2\}}{\text{Max}} \Pi(y_1, y_2) = pf(y_1, y_2) - p_1 y_1 - p_2 y_2$$

L'objectif de maximisation du profit du producteur est ici représenté de façon explicite.

4.4.2. Résolution analytique

Puisque le programme d'optimisation ne comporte aucune contrainte, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode du Lagrangien. Les conditions du premier ordre issues du programme de maximisation du profit sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_1} = p \cdot \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1} - p_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_2} = p \cdot \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} - p_2 = 0 \end{cases}$$

Dès lors que les productivités marginales sont décroissantes, il s'agit bien d'un maximum de profit comme le montrent les conditions du second ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} = p \cdot \frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} = p \cdot \frac{\partial^2 f(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} < 0 \end{cases}$$

Les demandes sont donc déterminées à partir du système d'équations issu des CPO :

$$\begin{cases} p \cdot Pm_1(y_1) = p_1 \\ p \cdot Pm_2(y_2) = p_2 \end{cases}$$

Le membre de gauche de chaque égalité correspond au produit entre la productivité marginale d'un facteur de production et le prix de vente du bien : ce terme s'interprète comme la productivité marginale en valeur associée à une unité de facteur. Chaque égalité signifie que la productivité marginale en valeur est égale au prix de chaque facteur de production.

On résout ensuite le système d'équations pour trouver les demandes de concurrence parfaite $y_1^*(p, p_1, p_2)$ et $y_2^*(p, p_1, p_2)$. Lorsque les facteurs sont substituables, ces demandes sont des fonctions croissantes du prix du bien vendu mais décroissantes des prix des deux facteurs.

En concurrence parfaite, **la demande d'un facteur décroît lorsque le prix de l'autre facteur augmente** alors que la relation inverse était vérifiée pour les demandes conditionnelles (section 4.2.3) et les demandes de facteurs à budget de production fixe (section 4.3.3). Ce nouveau résultat s'explique de la façon suivante :

- lorsque le budget ou le volume de production sont fixés, l'augmentation du prix d'un facteur réduit la demande de ce facteur. Cependant, pour maintenir le budget (ou le volume) de production fixe, il est nécessaire d'augmenter la quantité demandée de l'autre facteur, par un **effet de substitution**. La demande de chaque facteur est donc croissante avec le prix de l'autre facteur ;
- lorsque le prix de vente est fixé, l'augmentation du prix d'un facteur réduit la demande de ce facteur mais réduit aussi le volume de production choisi par l'entreprise puisque la réalisation d'une combinaison de facteurs est plus onéreuse. Cette hausse de la dépense de production conduit à réduire la demande de chaque facteur. Lorsque cet **effet de dépense** domine l'effet de substitution précédemment évoqué, la demande de chaque facteur est décroissante avec le prix des autres facteurs. [N.B. : cette décomposition rappelle la distinction entre effet de substitution et de revenu mise en évidence dans l'analyse du consommateur (chapitre 2).]

L'Application 4.9 illustre le calcul des demandes de concurrence parfaite.

APPLICATION 4.9

Calcul des demandes de concurrence parfaite

La fonction de production $y(y_1, y_2) = y_1^{1/3} y_2^{1/2}$ admet des rendements d'échelle décroissants, comme nous l'avons montré dans l'Application 4.4. En conséquence, il est plus efficace de produire au sein de petites entreprises, qui sont en nombre important sur le marché : c'est pourquoi le marché est concurrentiel. Nous pouvons donc calculer les demandes de concurrence parfaite. Le profit du producteur se note :

$$\Pi(y_1, y_2) = p y_1^{1/3} y_2^{1/2} - p_1 y_1 - p_2 y_2$$

En maximisant ce profit, nous obtenons les CPO suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_1} = \frac{1}{3} p y_1^{-2/3} y_2^{1/2} - p_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} p y_1^{-2/3} y_2^{1/2} = p_1 \\ \frac{\partial \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_2} = \frac{1}{2} p y_1^{1/3} y_2^{-1/2} - p_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} p y_1^{1/3} y_2^{-1/2} = p_2 \end{cases}$$

La productivité marginale en valeur de chaque facteur est égale au prix de ce facteur. Les conditions de second ordre permettent de vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum de profit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_1^2} = -\frac{2}{9} p y_1^{-5/3} y_2^{1/2} < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi(y_1, y_2)}{\partial y_2^2} = -\frac{1}{4} p y_1^{1/3} y_2^{-3/2} < 0 \end{cases}$$

En calculant le rapport entre les égalités fournies par les deux premières CPO, on retrouve l'égalité entre le taux marginal de substitution technique et le rapport des prix des facteurs :

$$\frac{\frac{1}{3} p y_1^{-2/3} y_2^{1/2}}{\frac{1}{2} p y_1^{1/3} y_2^{-1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\widehat{TMST}_{y_2/y_1}}{3y_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

On commence par déterminer la demande du facteur 1. Pour cela, on exprime y_2 en fonction de y_1 à partir de cette dernière égalité :

$$y_2 = \frac{3p_1}{2p_2} y_1$$

Ensuite, on remplace cette expression au sein de la première CPO :

$$\frac{1}{3} p y_1^{-2/3} \left(\frac{3p_1}{2p_2} y_1 \right)^{1/2} = p_1 \Rightarrow \frac{1}{3} p y_1^{-1/6} \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{1/2} = p_1$$

On isole le terme en y_1 dans le membre de droite et on simplifie l'expression précédente :

$$\frac{1}{3} p y_1^{-1/6} \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{1/2} = p_1 \Rightarrow \frac{p}{3p_1} \left(\frac{3p_1}{2p_2} \right)^{1/2} = y_1^{1/6} \Rightarrow \left(\frac{p^2 \cdot 3p_1}{9p_1^2 \cdot 2p_2} \right)^{1/2} = y_1^{1/6}$$

À partir de l'expression précédente, on détermine la valeur de la demande de concurrence parfaite :

$$y_1^*(p, p_1, p_2) = \left(\frac{p^2}{6p_1p_2} \right)^3$$

Par un raisonnement similaire, la demande de concurrence parfaite en facteur 2 est :

$$y_2^*(p, p_1, p_2) = \left(\frac{p^3}{12p_1p_2^2} \right)^2$$

Ces demandes de facteur expriment les quantités de facteurs demandées à l'équilibre en fonction du prix de vente du bien et des prix des facteurs. Elles sont bien croissantes avec le prix de vente du bien et décroissantes avec les prix des facteurs.