ì intervalles de temps constants.
:néficiaire de ces versements est
ier. Si le nombre de termes est
rpétuelle dans le cas contraire.
:st en présence d'une rente aléa-
du titulaire. L'étude des rentes

la succession des versements à
taux d'actualisation.
le 20 ans, dont les termes valent

$$0 \ + \cdots + \frac{20\ 000}{(1+i)^{20}} \Bigg] \ ;$$

$$+i)^{-20} \ ,$$

dra dans 30 ans et chacune des
ai qu'une telle approche ne tient
ne telle opération n'est rentable
ninal corrigé de l'inflation, reste
calculs de rentes sont effectués
traites par capitalisation.
de versements est infini. Le titu-
onc d'un revenu annuel dont la

$$\frac{1+i)^{-n}}{i} \ , \text{ avec } n \to \infty.$$

métriques, pour n tendant vers

On constate que si le taux d'intérêt augmente (diminue), la valeur du titre de rente baisse (augmente).

On reconnaît là un des fondements de l'arbitrage « monnaie-titre » de l'analyse keynésienne.

Ainsi une rente perpétuelle de termes égaux à 5 F vaut, si le taux d'actualisation est de 7 % :

$$\frac{5}{0{,}07} = 71{,}43.$$

Si le taux d'actualisation est à présent de 5 %, cette rente vaut alors : $\frac{5}{0{,}05} = 100$.

Celui qui a acquis ce titre de rente à l'époque où les taux d'intérêt étaient de 7 % peut donc, lorsque les taux s'abaissent à 5 %, réaliser une plus-value de 28,57 F.

▷ Comptes courants et d'intérêts ▷ Échéance moyenne ▷ Équivalence d'effets ▷ Escompte ▷ Hambourg (méthode de) ▶ Indices ▶ Probabilités ▶ Suites et séries ▷ Taux actuariel

● BONNEAU Pierre (1986), *Mathématiques financières*, Paris, Dunod.
MASIÉRI Walder (1980), *Mathématiques financières*, Paris, Sirey.
SCHLACTHER Didier (1989), *Calcul financier*, Paris, Hachette.
SCHLACTHER Didier (1994), *Comprendre les mathématiques financières*, Paris, Hachette.
THIMONIER Claude (1984), *Mathématiques économiques*, Paris, Économica.

Calcul matriciel

Une matrice est un tableau de nombres réels, chaque nombre de ce tableau étant repéré par un numéro de ligne et un numéro de colonne.

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

est une matrice à deux lignes et trois colonnes (en abrégé : matrice 2-3). On notera souvent : $A = (a_{ij})$, où i désigne le numéro de ligne et j le numéro de colonne. Dans l'exemple ci-dessus, on a : $a_{11} = 2$; $a_{12} = -1$; $a_{13} = 2$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = 3$; $a_{23} = 5$. Une matrice est dite *carrée* si elle a le même nombre de lignes et de colonnes. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Ici, B est une matrice carrée 2-2. Une *matrice colonne* comporte une seule colonne ; on utilisera fréquemment la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et aussi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, où x, y, z représenteront des inconnues.

De même, une *matrice ligne* est formée d'une seule ligne.

La *transposée* d'une matrice M, notée ${}^tM$, est la matrice obtenue en transformant la première ligne de M en première colonne de ${}^tM$, la deuxième ligne de M en deuxième colonne de ${}^tM$, etc. Avec les matrices A et B ci-dessus :

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

On peut définir trois *opérations sur les matrices* ; si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n - p$ (à n lignes et p colonnes), la matrice $A + B$ s'obtient en effectuant la *somme* des éléments correspondants de A et B, ou encore : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+(-1) \\ 1+3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Le produit de A par le réel α s'écrit αA, et s'obtient en multipliant tous les éléments de A par α. Avec les notations précédentes par exemple, $2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2.(-1) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Le produit de la matrice A par la matrice B s'obtient d'une manière un peu compliquée, qui est la suivante. Notons c_{ij} l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice AB. Alors $c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots$ = (premier élément de la ligne i de A) × (premier élément de la colonne j de B) + (deuxième élément de la ligne i de A) × (deuxième élément de la colonne j de B) +... Attention : en général, *le produit matriciel n'est pas commutatif*, c'est-à-dire que $AB \neq BA$. Le calcul du produit AB n'est d'ailleurs possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Soit à multiplier par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, dans cet ordre (calcul de AB). On disposera les calculs de la manière suivante : A en bas à gauche, B en haut à droite ; les éléments de AB se trouvent à l'intersection des lignes de A et des colonnes de B :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & & \vdots \quad \vdots \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $c_{11} = 2 . 1 + (-1) . 3 = -1$; $c_{12} = 2 . -1 + (-1) . 1 = -3$; $c_{21} = 1 . 1 + 3 . 3 = 10$; $c_{22} = 1 . (-1) + 3 . 1 = 2$.

Ainsi : $AB = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

En inversant les dispositions de A et B, le lecteur vérifiera que $BA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ et que, par conséquent, $AB \neq BA$.

Donnons un exemple de calcul avec des matrices 3–3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ & & \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $c_{11} = 1 . (-1) + 1 . 1 + 2 . 2 = 4$ et $c_{12} = 1 . 1 + 1 . (-1) + 2 . 0 = 0$. De même, on a : $c_{13} = 1 . 3 + 1 . 1 + 2 . (-2) = 0$, etc.

On obtient :

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

À titre d'exercice, le lecteur calculera

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 6 \\ 7 & -7 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 18 & -8 & 1 \\ -5 & 21 & -5 \\ -6 & 4 & 23 \end{pmatrix}.$$

Un cas particulier fondamental de produit AB est celui où B est une matrice colonne.

On vérifiera, par exemple, que :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x - z \\ -x + 3y - 2z \end{pmatrix}.$$

On a ainsi le théorème suivant : si X est une matrice colonne et A une matrice carrée de même dimension, alors $Y = AX$ est une matrice colonne.

■ DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice 2–2.

Son *déterminant* est, par définition, le nombre réel :

$$\boxed{\det M = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc}.$$

Par exemple, si $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det M = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 3 - 1 \,.\, (-1) = 7$. Pour calculer le déterminant d'une matrice 3–3, on introduit la notion de *cofacteur*. Le cofacteur du terme a_{ij} de la matrice A, noté A_{ij}, est le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A, précédé du signe + ou – correspondant à a_{ij} par la règle suivante : on part en haut à gauche avec le signe +, et chaque fois que l'on se déplace vers la droite ou vers le bas, on change de signe.

Pour une matrice 2–2 et une matrice 3–3, on obtient ainsi les « tableaux de signes » suivants :

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Soit par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Le cofacteur A_{11} est égal au déterminant obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne 1, affecté du signe + selon le tableau ci-dessus.

Donc $A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3$. De même, on calcule $A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6$; $A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8$; $A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$; $A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$; $A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$.

Pour calculer det A, il suffit de calculer les trois cofacteurs d'une ligne (ou d'une colonne), n'importe laquelle, et d'appliquer la règle suivante : le déterminant de A s'obtient en effectuant, pour chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne), le produit de cet élément par son cofacteur puis en ajoutant les résultats obtenus. Reprenons l'exemple précédent et calculons det A en le développant par rapport à la première ligne :

$$\det A = a_{11}\ A_{11} + a_{12}\ A_{12} + a_{13}\ A_{13} = 1 . 3 + 1 . 5 + 2 . 6 = 20.$$

On pourrait aussi le calculer en développant par rapport à la deuxième colonne, par exemple :

$$\det A = a_{12}\ A_{12} + a_{22}\ A_{22} + a_{32}\ A_{32} = 1 . 5 + 0 . 0 + 3 . 5 = 20.$$

À titre d'exercice, le lecteur calculera les déterminants des matrices :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'' = \begin{pmatrix} 0,2 & 2,1 & -0,4 \\ -0,1 & 2,7 & -0,5 \\ 3,3 & 0,8 & 2,2 \end{pmatrix}.$$

Il obtiendra : det $A' = -48$; det $A'' = 1,861$.

La règle expliquée plus haut reste valable pour calculer le déterminant d'une matrice 4–4, 5–5, etc. Dans le cas 4–4, les cofacteurs sont des déterminants 3–3, qui se calculent par la méthode ci-dessus.

■ INVERSE D'UNE MATRICE CARRÉE

Étudions d'abord le cas des matrices 2–2, et considérons la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le lecteur vérifiera, en posant le calcul, que *pour toute matrice* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a : $I_2 \times A = A \times I_2 = A$.

La matrice I_2 joue donc, pour le produit des matrices 2–2, le même rôle que le nombre 1 pour le produit des nombres réels. De même, si $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour toute matrice

$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ on a : $I_3 \times A = A \times I_3 = A$. L'inverse d'un nombre réel x étant $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{x} . x = 1$, on définit l'*inverse* de la matrice A comme la matrice A^{-1} vérifiant :

$$A^{-1} . A = A . A^{-1} = I_n \text{ , si } A \text{ est une matrice } n\text{–}n.$$

L'inverse du réel x n'existe que si $x \neq 0$. De même, l'inverse de la matrice carrée A n'existe que si det $A \neq 0$. On dit alors que la matrice A est *inversible*. Par exemple, les matrices M, A, A', A'' du paragraphe précédent sont inversibles.

Lorsque A est inversible, son inverse A^{-1} se calcule ainsi : a) On calcule la *comatrice* de A, com A : les éléments de com A sont, tout simplement, les *cofacteurs* A_{ij} des éléments de A (si A est 2–2, ces cofacteurs ne sont pas des déterminants, mais des réels, car lorsqu'on supprime la ligne i et la colonne j dans une matrice 2–2, il reste un seul nombre). b) On *transpose* la comatrice pour obtenir ^{t}(com A). c) On *divise chaque terme* par det A ; la matrice obtenue est A^{-1}.

Exemple 1 : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car det $M = 7 \neq 0$. Les cofacteurs sont $A_{11} = 3$; $A_{12} = -1$; $A_{21} = 1$; $A_{22} = 2$ (attention à la règle des signes). Donc : com $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; ${}^t(\text{com } M) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$. Le lecteur vérifiera que l'on a bien : $M . M^{-1} = I_2$.

Exemple 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. On a det $A = 20 \neq 0$ et A est inversible. Les cofacteurs de A ont été calculés au paragraphe précédent. Donc :

$$\text{com } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} ; \ {}^t(\text{com } A) = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}4 & -0{,}05 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Ici aussi, le lecteur *vérifiera* le résultat en calculant $A^{-1} . A$, puis, en exercice, calculera les inverses des matrices A' et A'' définies au paragraphe précédent, et obtiendra :

$$A'^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}063 & 0{,}146 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}083 \\ 0{,}25 & -0{,}063 & -0{,}188 \end{pmatrix} ;$$

$$A''^{-1} = \begin{pmatrix} 3{,}407 & -2{,}654 & 0{,}016 \\ -0{,}768 & 0{,}946 & 0{,}075 \\ -4{,}831 & 3{,}638 & 0{,}403 \end{pmatrix}.$$

■ ÉCRITURE MATRICIELLE D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Ce paragraphe est tout à fait fondamental dans les applications. Considérons par exemple le système

$$(S)\begin{cases}3x+2y=1\\ x-3y=3\end{cases}.$$

Les coefficients de x et y, dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans le système, forment une matrice appelée *matrice du système*.

Ici la matrice du système est $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, et on remarque que le produit de la matrice A par la matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ des inconnues vaut :

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y\\ x-3y\end{pmatrix}.$$

Le système (S) pourra donc s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}.$$

De même, le système :

$$(S')\begin{cases}x+y+2z=1\\ 2x-z=-2\\ -x+3y-2z=3\end{cases}$$

s'écrira-t-il sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Notons A la matrice d'un système, X la matrice colonne des inconnues, B la matrice colonne des données. Supposons A inversible. Le système s'écrit matriciellement : $AX=B$. Multiplions *à gauche* cette égalité par A^{-1}, on obtient $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Mais $A^{-1}A=I_n$ par définition de A^{-1}, et $I_nX=X$. Par suite $A^{-1}AX=X$, et on a donc $X=A^{-1}B$. La connaissance de A^{-1} permet donc de calculer X connaissant B, donc de *résoudre le système*. Dans l'exemple du système (S)

on a $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le calcul de A^{-1} aboutit à :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 1/11 & -3/11 \end{pmatrix}, \quad \text{donc } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 9/11 \\ -8/11 \end{pmatrix}.$$

La solution du système (S) est donc : $x = 9/11$; $y = -8/11$. Dans l'exemple du système (S') la matrice A^{-1} a été calculée au paragraphe précédent, et le produit $A^{-1}B$, avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

fournit immédiatement $X = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$. Donc la solution de ($S'$) est $x = -0{,}8$; $y = 1$; $z = 0{,}4$

■ DIAGONALISATION

Un problème fondamental dans les applications du calcul matriciel consiste à calculer explicitement la puissance n-ième d'une matrice carrée A, c'est-à-dire $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n fois) De ce point de vue, jouent un rôle important les matrices *diagonales*, qui ne comportent que des termes nuls, sauf éventuellement sur la diagonale ; en dimension 2 et 3 respectivement

elles sont de la forme $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Le lecteur vérifiera aisément par le calcul que, dans le premier cas par exemple, on obtien

$D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$; $D^3 = D^2 \times D = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$, et plus généralement $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Ainsi : si D est une matrice diagonale, D^n s'obtient en élevant les termes de la diagonale de D à la puissance n.

Soit maintenant une matrice carrée A ; on dira que A a été *diagonalisée* si on a trouvé une matrice *diagonale* D et une matrice *inversible* P telles que : $A = PDP^{-1}$.

Montrons comment la diagonalisation de A permet de calculer A^n.

Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^2 = PDP^{-1}\,PDP^{-1}$.

Or $P^{-1}P = I_m$, et $I_m \times D = D$ (si A est une matrice $m - m$).

Donc $A^2 = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Puis $A^3 = A^2 \,.\, A = PD^2P^{-1}\,PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$, et plus généralement : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Dans cette égalité, P, P^{-1} et D sont connus, et D^n s'exprime facilement car D est diagonale on obtient ainsi A^n. Il reste à montrer comment on diagonalise A, c'est-à-dire comment on calcule D et P.

Première étape : on calcule les *valeurs propres* de la matrice A, qui sont les racines de son *polynôme caractéristique* $P(x)$. Celui-ci est égal au déterminant de la matrice obtenue en retranchant x à chacun des termes de la diagonale de A. Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; le polynôme caractéristique de A est $P(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 5 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x)(2-x) - 5 \,.\, 4 = x^2 - 5x - 14.$

Les racines de $P(x)$ s'obtiennent en résolvant l'équation du second degré $x^2 - 5x - 14 = 0$.
Celle-ci admet un discriminant positif dans l'exemple étudié ici.
On obtient donc les deux valeurs propres de A : $x_1 = 7$ et $x_2 = -2$.

Deuxième étape : pour chacune des valeurs propres $x_1, x_2,\ldots$ obtenues, on cherche les *matrices colonnes propres* (ou vecteurs propres) $X_1, X_2,\ldots$ *non nuls*, définis par : $AX_1 = x_1X_1$, $AX_2 = x_2X_2$, etc.

Reprenons l'exemple précédent, et cherchons d'abord X_1. L'inconnue est ici la matrice colonne X_1, on pose $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et on traduit l'équation $AX_1 = x_1X_1$ par : $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \,.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On effectue le produit dans le premier et le second membre, pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 5x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x \\ 7y \end{pmatrix},$$

ce qui se traduit par le système :

$$(S_1)\begin{cases} -4x+4y=0 \\ 5x-5y=0 \end{cases}.$$

Après *simplification* de la première équation par -4 et de la deuxième par 5, on obtient :

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

On observe que la matrice M du système obtenu est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et que son déterminant est nul.

Ce sera toujours le cas lorsqu'on cherchera les colonnes propres d'une matrice.

En fait, le système (S_1) se réduit à une seule équation : $x - y = 0$.

Puisqu'on veut que X_1 soit non nul, on prendra *par exemple* $y = 1$, d'où $x = 1$.

Ainsi $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient, c'est une colonne propre associée à la valeur propre $x_1 = 7$ (on aurait pu prendre $y = 2$, ou $y = -1$...). Il existe une infinité de colonnes propres associées à une valeur propre donnée : on en choisit une. De même, pour trouver les colonnes propres associées à $x_2 = -2$, on résout $AX_2 = -2X_2$. Cela conduit au système :

$$(S_2) \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$$

qui se réduit à la seule équation $5x + 4y = 0$. Prenons $y = 5$ par exemple ; on obtient $x = -4$.

Donc on peut choisir $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme colonne propre associée à $x_2 = -2$.

Troisième étape : La matrice D s'obtient en mettant sur la diagonale les valeurs $x_1, x_2, \ldots$, des zéros partout ailleurs. La matrice P s'obtient en écrivant, *dans le même ordre*, les colonnes X_1, $X_2, \ldots$ que l'on a calculées. Dans l'exemple précédent :

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de P^{-1} aboutit à $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$. Le lecteur pourra effectuer le produit des trois matrices ci-dessus pour vérifier que le résultat est bien exact.

On a donc, comme on l'a vu plus haut :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \cdot 7^n + \frac{4}{9}(-2)^n & \frac{4}{9} \cdot 7^n - \frac{4}{9}(-2)^n \\ \frac{5}{9} \cdot 7^n - \frac{5}{9}(-2)^n & \frac{4}{9} \cdot 7^n + \frac{5}{9}(-2)^n \end{pmatrix}.$$

La diagonalisation d'une matrice 3–3 s'effectue par la même méthode ; les calculs sont plus longs car le polynôme caractéristique $P(x)$ est de degré 3 et il y a 3 valeurs propres. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de S. Lipschutz (S. Lipschutz, 1982).