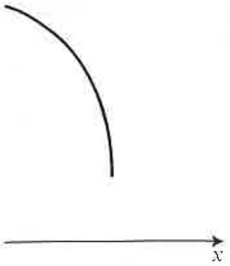
, la fonction décroît de
us en plus rapidement.



$f'(x) < 0$
$f''(x) < 0$

lroite, elle est concave.
de la dérivée seconde :
hangement de courbure
vée seconde s'annule en

croissance ou de décrois-

Q

rivée de C_T est $C'_T = C_m$.
donc affirmer que C'_m est

conclure que le coût total

$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$

$d f(x) = f'(x) \cdot dx$

■ DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION

Il s'agit d'une notion voisine de celle de dérivée et qui cherche à mesurer la variation $df(x)$ de la fonction $f(x)$ résultant d'une variation infiniment petite dx de la variable :

$$\boxed{df(x) = f'(x) \, . \, dx.}$$

La connaissance des formules de dérivation permet de retrouver les principales différentielles.

Ainsi :

$d(ax) = a\, d(x)$	$d(x + a) = dx$
$d(\frac{1}{x}) = -\frac{dx}{x^2}$	$d(e^x) = e^x \, . \, dx$
$d(x^2) = 2x \, . \, dx$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2 \, . \, \sqrt{x}}$
$d(ln\ (x)) = \frac{dx}{x}$	

L'usage des différentielles est fréquent en sciences économiques. Admettons que la production Y soit une fonction du travail L, avec :

$$Y(L) = L^{\alpha}.$$

On en déduit :

$$ln\ (Y) = \alpha \, . \, ln\ (L) \, ;$$

$$d(ln\ (Y)) = \alpha \, . \, d(ln\ (L)) \, ;$$

$$\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dL}{L} \, .$$

Le taux de croissance de la production est fonction du taux de croissance du travail.

■ FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

Soit la fonction $f(x,y)$. Son évolution dépend des variations de chacune des deux variables x et y.

• *Dérivées partielles premières des fonctions de plusieurs variables*. Ces dérivées permettent de mesurer l'influence d'une variable sur la fonction, toutes les autres variables étant supposées constantes (clause *ceteris paribus*). Leur calcul s'effectue selon les mêmes principes que ceux évoqués plus haut.

On note f'_x ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée partielle par rapport à x de la fonction $f(x,y)$.

Considérons la fonction : $f(x,y) = x^2 \,.\, y + 2x \,.\, y^2 + 4$.
On a :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x \,.\, y + 2y^2 \,; \\ f'_y(x,y) = x^2 + 4x \,.\, y \end{cases}.$$

• *Dérivées partielles secondes.* Elles mesurent l'évolution des dérivées premières et peuvent être calculées par rapport à toutes les variables.

Dans l'exemple ci-dessus, la dérivée seconde par rapport à x « deux fois » que l'on note f''_{x^2}, ou encore $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, est : $f''_{x^2}(x,y) = 2y$.

De même : $f''_{y^2}(x,y) = 4y$ et $f''_{xy}(x,y) = 2y$ (que l'on obtient indifféremment en dérivant f'_x par rapport à y ou f'_y par rapport à x).

• *Différentielle d'une fonction de plusieurs variables.* Son calcul est similaire à celui effectué pour les fonctions d'une variable :

$$df(x,y) = f'_x(x,y) \,.\, dx + f'_y(x,y) \,.\, dy.$$

On notera en particulier les résultats suivants :

$$\boxed{\begin{aligned} & d(x+y) = dx + dy \\ & d(x \,.\, y) = y \,.\, dx + x \,.\, dy \\ & d(ln\ (x \,.\, y)) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \end{aligned}}\,.$$

Supposons que la quantité demandée Q_1 d'un bien dépende du prix P_1 de ce bien, du prix P_2 d'un autre bien et du revenu R de l'individu selon l'expression :

$$Q_1 = aP_1 + bP_2 + c\,R + d.$$

On déduit : $dQ_1 = a\ dP_1 + b\ dP_2 + c\ dR$.

Imaginons par ailleurs que les importations M d'un pays soient fonction du prix P_m des importations, du prix P des biens nationaux et du produit intérieur brut Y du pays, et que l'on ait :

$$ln\ (M) = a_m \,.\, ln(Y) + b_m \,.\, ln\ (\frac{P}{P_m}).$$

Il vient :
$$\frac{dM}{M} = a_m \,.\, \frac{dY}{Y} + b_m \,.\, \frac{d(\frac{P}{P_m})}{\frac{P}{P_m}}.$$

Sous cette forme, apparaît la signification des nombres a_m et b_m. Le premier correspond à l'élasticité-revenu de la demande d'importation, le second à l'élasticité-prix de cette même demande.

C'est ce type d'approche technique qui est utilisé dans le théorème appelé des élasticités critiques de Marshall, Lerner, Robinson.

• *Homogénéité des fonctions de plusieurs variables*. Si une fonction $f(x,y,z)$ est telle que, en remplaçant x, y, z par λx, λy, λz, on a : $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \cdot f(x,y,z)$, on dit que cette fonction est homogène de degré n.

Cette propriété permet d'analyser notamment les rendements d'échelle des fonctions de production :

- Si $\lambda > 1$, les rendements sont dits croissants.
- Si $\lambda = 1$, les rendements sont constants.
- Si $\lambda < 1$, les rendements sont décroissants.

Soit la fonction de production $P(K,L) = K^\alpha L^\beta$. Cette fonction est homogène de degré $\alpha+\beta$. En effet :

$$P(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} \cdot K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} \cdot P(K,L).$$

En multipliant les facteurs de production par λ, la production est multipliée par $\lambda^{\alpha+\beta}$. La valeur de $\alpha + \beta$, supérieure, inférieure ou égale à 1 caractérise la nature du rendement. Dans le cas où $\alpha + \beta = 1$, une telle fonction est appelée fonction de Cobb-Douglas.

En raison de leurs propriétés, les fonctions de production homogènes sont fréquemment utilisées.

Une famille de fonction de ce type est constituée par les fonctions CES (*Constant Elasticity of Substitution*) dont la forme générale est donnée par l'expression :

$$Y = A \cdot \left[\alpha \cdot L^{-\beta} + (1-\alpha) \cdot K^{-\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}},$$

avec Y la production, K et L le capital et le travail mis en œuvre. A, α et β sont des paramètres, tels que : $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq -1$.

Une propriété importante des fonctions homogènes est démontrée par le théorème d'Euler. Si une fonction des deux variables x et y est homogène de degré n, on a :

$$\boxed{x \cdot f'_x(x,y) + y \cdot f'_y(x,y) = n \cdot f(x,y)}\,.$$

Ce théorème, appliqué à une fonction de Cobb-Douglas, conduit à l'énoncé d'une propriété très importante.

Si $Y = L^\alpha \cdot K^{1-\alpha}$, alors $L \cdot Y'_L + K \cdot Y'_K = 1 \cdot Y$ ou encore :

$$L \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} + K \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} = Y.$$

$\frac{\partial Y}{\partial L}$, $\frac{\partial Y}{\partial K}$ sont respectivement les productivités marginales du travail et du capital. Si les facteurs de production sont rémunérés à leur productivité marginale, on « épuise » intégralement la valeur du produit.