Collection Grand Amphi **Économie**

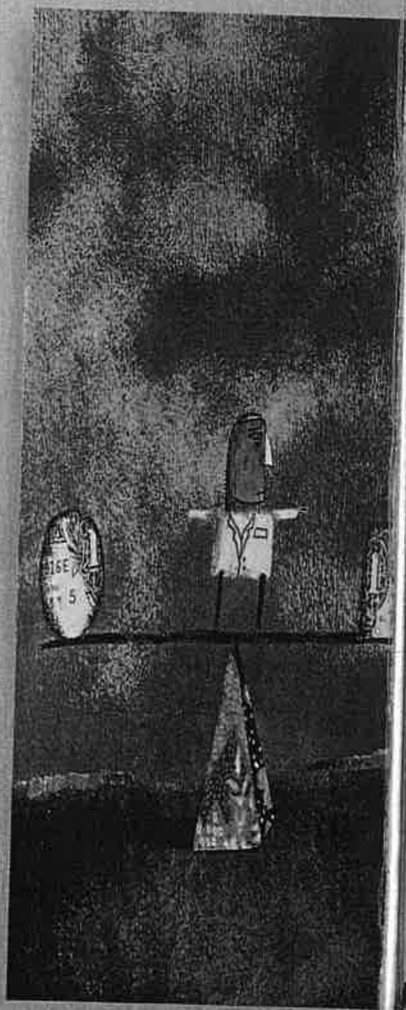
F. Aprahamian ▪ A. Bertrand ▪ D. Besancenot ▪ J.-B. Ferrari ▪ K. Huynh

Microéconomie

Cours

Méthodes

Exercices corrigés



Collection dirigée par Marc Montoussé

Bréal

B

LE COMPORTEMENT DU PRODUCTEUR

La fonction de production va nous être utile pour formaliser le comportement du producteur : on pourra ainsi expliquer le choix du nombre d'unités de produit qu'il va élaborer, et, par conséquent, les quantités de facteurs qu'il va employer.

1 - LE COÛT DE PRODUCTION

La fonction de production exprime l'utilisation des facteurs et le produit qui en résulte. Un autre élément important dans la décision du producteur est le coût qu'il devra supporter pour pouvoir accomplir sa production.

En effet, pour pouvoir produire, l'entrepreneur va devoir payer les facteurs de production qu'il utilise. Il va donc subir un coût. Le coût de production s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur.

Une droite d'isocoût indique l'ensemble des combinaisons productives conduisant à un même niveau de coût.

Notons w (pour *wage* en anglais) le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r (pour *rate*) le taux de rémunération normal du capital. Si le travail et le capital sont les deux seuls facteurs variables, le coût de production s'écrit :

$$C(K,L) = wL + rK + f$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixes de l'entreprise.

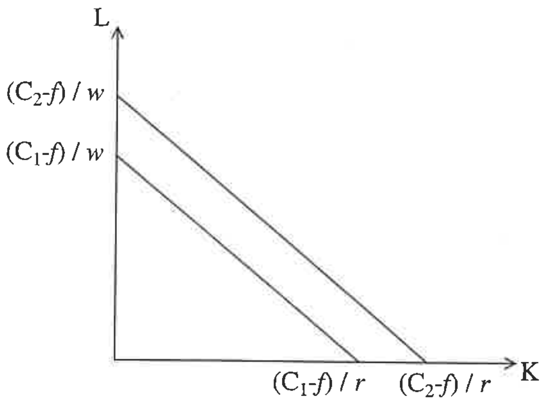


Fig. 6

Dans le repère (K,L), le coût peut être représenté à l'aide des *droites d'isocoût** : sur la figure 6 sont représentées deux droites d'isocoût particulières, correspondant à deux niveaux de coûts, C_1 et C_2. Pour obtenir l'équation d'une droite d'isocoût il suffit de fixer le coût à un niveau donné. Par exemple, si on considère que le coût est de C_1, on a :

$$C_1 = wL + rK + f \Leftrightarrow L = \frac{C_1 - f}{w} - \frac{r}{w}K$$

La pente de la droite d'isocoût dans le repère (K, L) est donc égale à l'opposé du rapport des prix des facteurs soit $-\,r/w$. On notera que la position de la courbe d'isocoût est d'autant plus élevée dans le quadrant nord-est que le coût considéré est élevé.

2 - LES DIFFÉRENTS COMPORTEMENTS DU PRODUCTEUR

Pour caractériser le comportement du producteur, l'analyse microéconomique suppose que l'objectif principal de celui-ci consiste à rendre son profit maximal. Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement :

$$\pi(K,L) = pQ(K,L) - wL - rK - f$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.

Avec le profit, on voit apparaître une nouvelle variable, le prix du bien ou du service produit. Cette variable est exogène et s'impose au producteur. Le producteur ne pense avoir aucune influence possible sur le prix parce que la firme évolue dans un environnement de concurrence pure et parfaite : les producteurs sont très nombreux sur le marché et chaque producteur pris séparément est trop « petit » par rapport à l'ensemble du marché pour pouvoir agir sur le prix. On peut donc envisager le prix comme une contrainte imposée au producteur.

Le comportement du producteur peut alors être appréhendé de façons différentes selon qu'il rencontre ou non une contrainte sur la quantité à produire ou sur le coût qu'il peut supporter.

a. Le producteur contraint par son marché

Supposons dans un premier temps que le producteur connaisse le niveau maximal de production qu'il peut écouler sur le marché. Il est donc contraint par les quantités et connaît à l'avance le montant de sa recette $pQ(K,L)$. Dans ce cas, la maximisation du profit implique la minimisation des coûts. Le problème du producteur se réduit à la recherche de l'utilisation optimale des facteurs de façon à minimiser le coût de production.

Le problème s'exprime mathématiquement sous la forme d'un programme de minimisation des coûts ($\underset{K,L}{\text{Min}}C$) sous contrainte (*s.c.**) d'un niveau de production ($\bar{Q}$).

* *s. c.* : sous contrainte

Ce programme s'écrit :

$$\text{programme 1 : } \begin{cases} \underset{K,L}{\text{Min}} & C(K,L) = wL + rK + f \\ s.c. & Q(K,L) = \bar{Q} \end{cases}$$

La résolution de ce programme permet de définir la demande de facteurs (capital et travail) la plus économique pour le producteur.

La figure 7 propose la résolution graphique de ce problème dans le cas où le producteur doit produire une quantité $\bar{Q}$.

On voit sur la figure que le coût minimal que le producteur devra supporter pour produire la quantité $\bar{Q}$ est C_1. Une production au coût C_2 (au point A ou B), ou à tout autre niveau de coût supérieur à C_1 est possible, mais serait moins rentable. Produire cette quantité à un coût inférieur à C_1 est impossible.

La situation optimale est donc caractérisée par la tangence entre la droite d'isocoût et l'isoquante qui correspond à la production recherchée. Au point de tangence, le coût est minimal : il n'existe pas de niveau de coût inférieur à C_1 tel que la droite d'isocoût présente un point commun avec l'isoquante de la production $\bar{Q}$. Par conséquent, le producteur va produire la quantité $\bar{Q}$, au coût C_1, et utilisera les quantités de facteurs K* et L*.

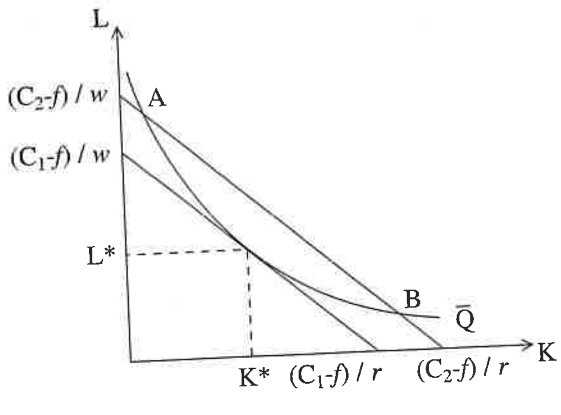


Fig. 7

Résolution du programme du producteur et interprétation des conditions de 1er ordre :

Programme 1 : $\begin{cases} \underset{K,L}{\text{Min}}\, C = wL + rK + f \\ s.c. \quad Q(K,L) = \bar{Q} \end{cases}$

La fonction de Lagrange correspondant à ce programme s'écrit :

$$L(K,L,\lambda) = wL + rK + f + \lambda[\bar{Q} - Q(K,L)]$$

Les conditions du premier ordre s'obtiennent en annulant les dérivées partielles premières de cette fonction :

Il en résulte les conditions du premier ordre suivantes : $\begin{cases} L_K = r - \lambda Q_K = 0 \\ L_L = w - \lambda Q_L = 0 \\ L_\lambda = \bar{Q} - Q(K,L) = 0 \end{cases}$

où L_K, L_L, L_l indiquent respectivement les dérivées partielles premières de la fonction de Lagrange par rapport à K,L et λ.

Les conditions du second ordre permettent ensuite de déterminer si l'optimum trouvé (K^*, L^*) correspond bien au minimum du coût. Ces conditions sont vérifiées si le déterminant suivant est négatif :

CSO

!

$$\begin{vmatrix} L_{KK} & \bar{K}_{KL} & L_{K\lambda} \\ L_{LK} & L_{LL} & L_{L\lambda} \\ L_{\lambda K} & L_{\lambda L} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow C(K^*, L^*) = \text{Min } C(K,L)$$

où L_{ij}, avec $i = K, L, \lambda$ et $j = K, L, \lambda$, représente la dérivée seconde de la fonction L par rapport à i et j, $\frac{\partial^2 L}{\partial i \partial j}$

Si ce déterminant était positif, l'optimum trouvé correspondrait à un maximum du coût.

Les deux premières équations du système des conditions de premier ordre permettent de définir la condition d'optimalité du producteur :

$$r/w = Q_K/Q_L$$

À l'optimum, le prix relatif des facteurs r/w doit donc être égal au $TMST_{(K,L)}$.

Comme le rapport r/w est l'opposé de la pente de la contrainte de coût, cette équation, combinée à la troisième condition de premier ordre, implique que la droite d'isocoût qui passe par l'optimum est tangente à l'isoquante définie pour le niveau de production $\bar{Q}$.

b. Le producteur contraint par son budget

Le producteur peut se trouver dans une configuration alternative où il connaît son budget maximal. Les coûts ne pouvant excéder cette somme, le coût maximal de production est connu et la recherche du profit le plus élevé possible passe par la maximisation de la recette. Le producteur va donc chercher la combinaison productive (capital, travail) qui maximise le volume de production tout en respectant la contrainte de coût.

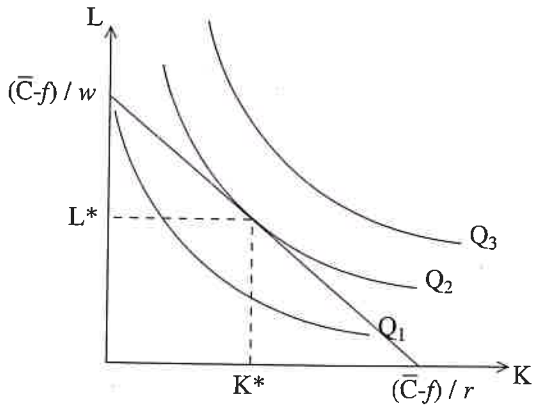


Fig. 8

Ce problème s'exprime mathématiquement sous la forme d'un programme de maximisation de la production sous contrainte d'un niveau de coût. Ce programme s'écrit :

programme 2 : $\begin{cases} \underset{K,L}{\text{Max}} \quad Q(K,L) \\ s.c. \quad \bar{C} = wL + rK + f \end{cases}$

La figure 8 propose la résolution graphique de ce second problème. Le producteur est contraint par le budget qu'il peut allouer à la production. Ce budget ne peut dépasser $\bar{C}$. Pour ce budget toutes les quantités inférieures à Q_2 peuvent être produites ; en revanche, une production supérieure à Q_2 induirait un coût qui franchirait le plafond $\bar{C}$.

Le producteur qui désire maximiser sa recette cherche à obtenir la production la plus élevée parmi toutes les productions réalisables pour le coût $\bar{C}$. Il retiendra le niveau maximal Q_2. Sa demande de facteurs sera donc logiquement K^* et L^*.

Résolution du programme du producteur et interprétation des conditions de 1er ordre

programme 2 : $\begin{cases} \max\limits_{K,L} \; Q(K,L) \\ s.c. \quad \bar{C} = wL + rK + f \end{cases}$

À partir de ce programme on écrit la fonction de Lagrange :

$$L(K,L,\lambda) = Q(K,L) + \lambda\left[\bar{C} - rK - wL - f\right]$$

La maximisation de cette fonction suivant ses arguments conduit aux conditions du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} L_K = Q_K - \lambda r = 0 \\ L_L = Q_L - \lambda w = 0 \\ L_\lambda = \bar{C} - rK - wL - f = 0 \end{cases}$$

Les conditions du second ordre pour un maximum sont satisfaites si :

$$\begin{vmatrix} L_{KK} & L_{KL} & L_{K\lambda} \\ L_{LK} & L_{LL} & L_{L\lambda} \\ L_{\lambda K} & L_{\lambda L} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0$$

CSO

Les deux premières équations du système de conditions de premier ordre permettent de retrouver la condition d'optimalité du producteur :

$$r / w = Q_K / Q_L$$

À l'optimum, le prix relatif des facteurs r/w doit être égal au $TMST_{(K,L)}$. Cette équation implique que l'isoquante qui passe par l'optimum est tangente à la droite d'isocoût définie pour le niveau de coût $\bar{C}$.

c. Interprétation des conditions d'optimalité

$Q_L dL + Q_K dK = 0$

$Q_K dK = -Q_L dL$

La résolution des deux problèmes posés au producteur (*cf.* encadrés ci-dessus et page précédente) permet d'établir qu'au point optimal, le rapport des prix des facteurs doit être égal au rapport des productivités marginales. Sous une autre forme, cette condition d'optimalité s'écrit :

$$Q_K / r = Q_L / w$$

En d'autres termes, **les productivités marginales des facteurs rapportées aux prix des facteurs doivent être égales.**

Cette égalité s'explique simplement : la productivité marginale d'un facteur rapportée à son prix correspond à la production supplémentaire obtenue en consacrant une unité de compte (un franc par exemple) à l'achat de ce facteur. Par conséquent, si cette égalité n'était pas vérifiée, reporter la dépense de cette unité de compte d'un facteur à l'autre permettrait de produire plus, ce qui signifierait que la combinaison initiale n'était pas optimale.

Condition d'optimalité non vérifiée. Si la condition d'optimalité $Q_K / r = Q_L / w$ n'était pas vérifiée, on aurait par exemple :

$$Q_K / r > Q_L / w$$

Dans ces conditions, le producteur pourrait reporter un franc de la dépense en facteur travail et le dépenser en facteur capital. Avec un franc de plus en capital, l'entrepreneur peut mobiliser $1/r$ unités de capital supplémentaire (soit $dK=1/r$). En contrepartie, le franc prélevé sur le travail en réduit le volume pour un montant $-1/w$ (soit $dL=-1/w$).
Au voisinage du point initial, la production additionnelle qui en résulte s'écrit :

$$dQ = Q_L dL + Q_K dK = -Q_L / w + Q_K / r > 0$$

Le gain serait alors positif. Notons que cette modification de l'utilisation des facteurs fait converger la firme vers un équilibre avec diversification des facteurs si les productivités marginales sont décroissantes. En effet, dans ce cas, l'augmentation du capital utilisé réduit la productivité marginale de ce facteur alors que la diminution de l'utilisation du facteur travail en augmente la productivité marginale. De ce fait, Q_L / w augmente et Q_K / r diminue. Les deux grandeurs se rapprochent. L'optimum est obtenu lorsqu'il n'est plus possible d'accroître la production en modifiant l'utilisation des facteurs, soit quand $Q_K / r = Q_L / w$.

3 - Sentier d'expansion

Il a été supposé jusqu'à présent que le producteur subissait une contrainte, soit par la quantité, soit par les coûts. Il est également possible qu'il ne connaisse aucune contrainte et donc qu'il puisse choisir à la fois le niveau des coûts et celui de la production. Dans ce cas, le producteur a théoriquement la possibilité de choisir parmi une infinité de combinaisons (produit - coût).

Remarquons alors que le choix des niveaux de coût et de production ne sont pas indépendants. Pour un niveau de coût donné, le producteur doit reconnaître qu'il n'existe qu'une seule combinaison des facteurs qui maximise le niveau de production. De même, s'il désire choisir un niveau de production, la combinaison des facteurs efficace doit minimiser le coût de production et celle-ci est unique. Or, nous avons vu que quel que soit le problème envisagé, sa solution optimale passe par la définition de la condition d'optimalité du producteur :

$$\frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w}$$

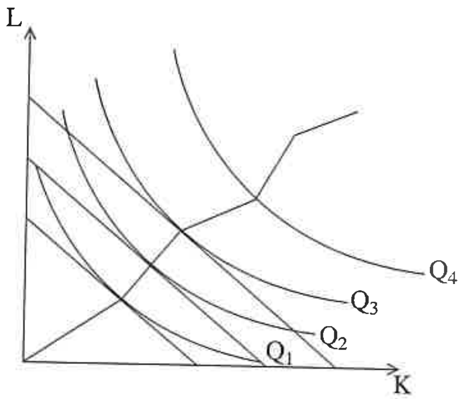


Fig. 9

Cette relation implicite entre le capital et le travail définit l'ensemble des combinaisons optimales pour le producteur et forme ce que l'on appelle « le sentier d'expansion »(*cf.* exercice 3.12).

Graphiquement, **le sentier d'expansion réunit l'ensemble des combinaisons productives optimales** (*cf.* fig. 9). Il relie donc l'ensemble des points de tangence entre les droites d'isocoût et les isoquantes. Il donne pour chaque niveau de production (et par conséquent de coût) envisageable la structure optimale de la combinaison des facteurs.

Lorsque le producteur ne rencontre aucune contrainte lors de sa prise de décision, il va choisir un point du sentier d'expansion de façon à maximiser son profit.

4 - La maximisation du profit

L'objectif du producteur lorsqu'aucune contrainte ne s'impose à lui est donc de choisir la combinaison (capital, travail) qui rend son profit maximal (*cf.* exercice 3.12). Le problème du producteur s'écrit formellement sous la forme d'un programme de maximisation sans contrainte :

$$\underset{K,L}{\text{Max}}\,\pi(K,L) = pQ(K,L) - wL - rK - f$$

Les ***conditions de premier ordre*** correspondent à l'annulation des dérivées premières du profit : $\pi_K = 0$ et $\pi_L = 0$.

Le rôle du prix va être fondamental : il va permettre de déterminer la combinaison de quantités de facteurs qui maximise le profit. Calculons les *conditions de premier ordre** :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi(K,L)}{\partial K} = pQ_K - r = 0 \\ \dfrac{\partial\pi(K,L)}{\partial L} = pQ_L - w = 0 \end{cases}$$

Les conditions de second ordre pour un maximum seront satisfaites si :

CSO !

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial K^2} < 0 \text{ et } \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\pi}{\partial K^2} & \frac{\partial^2\pi}{\partial K\partial L} \\ \frac{\partial^2\pi}{\partial L\partial K} & \frac{\partial^2\pi}{\partial L^2} \end{vmatrix} > 0$$

En réorganisant les conditions de premier ordre on retrouve la condition d'optimalité :

$$\frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w}$$

La solution optimale qui résulte de ce nouveau problème appartient donc au sentier d'expansion.

On vérifie également qu'à l'optimum du profit, la productivité marginale en valeur de chaque facteur doit être égale à son prix.

$$pQ_K = r \text{ et } pQ_L = w$$

Le produit de la productivité marginale d'un facteur par le prix du produit s'interprète comme le gain monétaire issu de l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur. Tant que ce gain monétaire est supérieur au coût qu'il engendre, c'est-à-dire au prix unitaire du facteur, le producteur réalise un profit pour l'emploi de chaque unité supplémentaire du facteur. Le producteur a donc intérêt à augmenter les quantités de facteurs. Or, quand la fonction de production présente des rendements décroissants, la productivité marginale décroît avec l'utilisation des facteurs. Par conséquent, au fur et à mesure que le producteur augmente les quantités d'un facteur, le gain monétaire qui en résulte décroît et se rapproche du prix de ce facteur. Le processus se poursuit jusqu'à ce que le gain monétaire supplémentaire engendré par l'utilisation de quantités additionnelles de facteur soit exactement égal au prix des facteurs.

La demande optimale de facteurs permet de définir pour chaque prix du produit le point du sentier d'expansion qui maximise le profit du producteur.

Le cas de la fonction Cobb-Douglas. La fonction Cobb-Douglas est de la forme : $Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$

- **Le TMST et l'élasticité de substitution :**

$$TMST = \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{AK^{\alpha}\beta L^{\beta-1}} = \frac{\alpha L}{\beta K}$$

$$\sigma = \frac{\frac{d(L/K)}{L/K}}{\frac{dTMST}{TMST}} = \frac{d(L/K)}{L/K} \times \frac{TMST}{dTMST} = \frac{d(L/K)}{L/K} \times \frac{\alpha L/\beta K}{d(\alpha L/\beta K)} = \frac{d(L/K)}{L/K} \times \frac{(\alpha/\beta)(L/K)}{(\alpha/\beta)d(L/K)} = 1$$

- **Les productivités :**

$$PM_K = \frac{Q(K,L)}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta} \qquad PM_L = \frac{Q(K,L)}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

$$Pm_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} = \alpha\frac{Q(K,L)}{K} = \alpha PM_K \qquad Pm_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta\frac{Q(K,L)}{L} = \beta PM_L$$

- **Les élasticités factorielles :**

$$\varepsilon_{Q/K} = \frac{dQ(K,L)/Q(K,L)}{dK/K} = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K}\frac{K}{Q(K,L)} = \alpha\frac{Q(K,L)}{K}\frac{K}{Q(K,L)} = \alpha$$

$$\varepsilon_{Q/L} = \frac{dQ(K,L)/Q(K,L)}{dL/L} = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L}\frac{L}{Q(K,L)} = \beta\frac{Q(K,L)}{L}\frac{L}{Q(K,L)} = \beta$$

• **Les rendements factoriels :**
Pour le capital, on a (avec $\lambda > 1$) :

$$Q(\lambda K, L) - \lambda Q(K,L) = A(\lambda K)^{\alpha}L^{\beta} - \lambda AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha}Q(K,L) - \lambda Q(K,L)$$

Le rendement factoriel du capital sera donc croissant si $\alpha > 1$, constant si $\alpha = 1$ et décroissant si $\alpha < 1$.
Pour le travail :

$$Q(K, \lambda L) - \lambda Q(K,L) = AK^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} - \lambda AK^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\beta}Q(K,L) - \lambda Q(K,L)$$

La nature croissante ou décroissante du rendement factoriel du travail dépendra donc non plus de la valeur de α mais de celle de β par rapport à 1.

• **Les rendements d'échelle :**

$$Q(\lambda K, \lambda L) - \lambda Q(K,L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} - \lambda Q(K,L) = \lambda^{\alpha+\beta} AK^{\alpha}L^{\beta} - \lambda Q(K,L) = \lambda^{\alpha+\beta}Q(K,L) - \lambda Q(K,L)$$

La nature des rendements d'échelle dépend alors de la somme des exposants $k = \alpha + \beta$: ils seront croissants si $k>1$, constants si $k = 1$ et décroissants si $0<k<1$.
Cet exemple illustre la notion de fonction de production homogène. Une fonction de production $Q(K,L)$ est homogène de degré k (k est un nombre réel positif) si elle vérifie : $Q(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{k}Q(K,L)$, où λ est un réel positif quelconque. Ici, la fonction est homogène de degré $k = \alpha + \beta$. Par conséquent, pour un nombre $\lambda > 1$, la nature des rendements d'échelle est bien déterminée par la valeur du degré d'homogénéité.

• **Le programme de minimisation du coût sous contrainte de production et sa résolution :**

$$\begin{cases} \underset{K,L}{\text{Min}}\ C(K,L) = rK + wL + f \\ s.c.\quad Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} = \bar{Q} \end{cases}$$

La condition d'optimalité s'écrit $\beta rK = \alpha wL$ et la demande optimale de facteurs devient :

$$K^* = \left[\frac{\bar{Q}}{A\left(\frac{r\beta}{w\alpha}\right)^{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} ; L^* = \left[\frac{\bar{Q}}{A\left(\frac{w\alpha}{r\beta}\right)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

• **Le programme de maximisation de la production sous contrainte de coût et sa résolution :**

$$\begin{cases} \underset{K,L}{\text{Max}}\ Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \\ s.c.\quad C(K,L) = rK + wL + f = \bar{C} \end{cases}$$

La condition d'optimalité s'écrit $\beta rK = \alpha wL$ et la demande optimale de facteurs est :

$$K^* = \frac{\alpha(\bar{C} - f)}{(\alpha + \beta)r} \quad ; \quad L^* = \frac{\beta(\bar{C} - f)}{(\alpha + \beta)w}$$

• **Le sentier d'expansion :**
L'équation du sentier d'expansion se déduit de la condition d'optimalité :

$$\beta rK = \alpha wL \Leftrightarrow L = \frac{\beta r}{\alpha w}K$$

• **Programme de maximisation du profit et sa résolution :**

$$\underset{K,L}{\text{Max}}\ \pi(K,L) = pQ(K,L) - C(K,L) = pAK^{\alpha}L^{\beta} - rK - wL - f$$

On retrouve la condition d'optimalité $\beta rK = \alpha wL$ et les demandes optimales de facteurs sont :

$$K^* = \left[\frac{\alpha^{\beta-1}w^{\beta}}{pA\beta^{\beta}r^{\beta-1}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \quad ; \quad L^* = \left[\frac{\beta^{\alpha-1}r^{\alpha}}{pA\alpha^{\alpha}w^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$