Departamento de Matemática Aplicada

Facultade de Matemáticas
Campus Vida
Rúa Lope Gómez de Marzoa s/n
15782 Santiago de Compostela

ANÁLISE NUMÉRICA MATRICIAL– CURSO 2022-23
Práctica 5: Método de Cholesky.
Enunciado

1 Programas do método de factorización de Cholesky

1. **Programa de Cholesky: caso xeral**

   (a) Escribe un subprograma `chol(n,a,b,u,deter)` que calcule, se existe, para unha matriz simétrica A, a matriz triangular inferior B con elementos diagonais positivos tal que que $A = BB^T$ - a matriz B almacenarase na propia variable `a`-, e resolva os sistemas lineais triangulares $Bw = b$ e $B^T u = w$, chamando respectivamente as subrutinas `sistl` e `sistu`. Tamén devolverá o determinante de A.

   (b) Escribe un programa principal `chol_ppal` que lea os datos da matriz A e do término independente b e chame a `chol` para calcular o determinante de A e resolver $Au = b$. Rematará imprimindo os resultados -incluíndo a matriz B- e comprobando a súa validez calculando o residuo $r = Au - b$ e a súa norma euclídea.

   (c) Validar a tarefa proposta con sistemas lineais de solución coñecida.

2. *(Opcional)* **Programa de Cholesky: almacenamento perfil.**

   Nesta práctica trátase de reprogramar o método de Cholesky, xa programado na anterior, utilizando un almacenamento perfil para a parte inferior da matriz A (simétrica). Para facilitar o traballo non se distinguirán os elementos nulos dos non nulos. Polo tanto, a parte inferior da matriz almacénase nun vector `z` de lonxitude `ln=n(n+1)/2`, en orde crecente das súas filas desde o primeiro elemento ata o elemento diagonal. Utiliza as subrutinas `sistlp` e `sistup` para resolver os sistemas $Bw = b$ e $B^T u = w$, respectivamente. A subrutina principal chamarase `cholp(n,z,b,u,deter)` e o programa principal `cholp_ppal`

3. **Programa de Cholesky: caso de A tridiagonal**

   Supón agora que a matriz A é tridiagonal simétrica e definida positiva con diagonal principal `a`, diagonal superior `b` (igual á diagonal inferior). Tendo en conta que a factorización de Cholesky conserva o perfil da matriz A, a matriz B ten unha subdiagonal que se pode almacenar en `b` e unha diagonal principal que se pode almacenar en `a`. Escribe un programa principal `chol3d_ppal` que lea as dúas diagonais `a,b` mais o termo independente `c` e calcule a matriz B e resolva o sistema $Au = c$. É recomendable facer todos os cálculos (lectura, factorización, descenso e remonte) no mesmo programa principal.Valida a tarefa proposta con sistemas lineais de solución coñecida.

4. **Programa con Matlab**. Tomando como exemplo a matriz de Wilson `A=[10 7 8 7; 7 5 6 5; 8 6 10 9 ; 7 5 9 10]` e o segundo membro `b = [32;23;33;31]` calcular a factorización de Cholesky e resolver o sistema `Au=b` utilizando os comandos de Matlab seguintes: `(R=chol(A),B=R')` o `B=chol(A,'lower')`, `u=B'\(B\b)`.

2 Exercicios sobre o método de Cholesky

1. Sexa $A = (a_{ij})$ a seguinte matriz **tridiagonal e simétrica** de orde 4:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Se é posible, calcula a **factorización de Cholesky** de A.

   (b) É A definida positiva?

   (c) É A singular?

2. *(Opcional)* Sexa A unha matriz de orde n, **simétrica e definida positiva.**

   (a) Demostra que $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots n$.

   (b) Demostra que todas as submatrices $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}$ son tamén simétricas e definidas positivas.

   (c) É a condición do apartado (b) suficiente para garantir que a matriz A é definida positiva?

3. Utilizando a **factorización de Cholesky,** establece condicións sobre a para que a matriz A sexa definida positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. *(Opcional)* Dada a matriz tridiagonal simétrica seguinte:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 0 & 0 \\ 3 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha \end{pmatrix}, \; \alpha \in \mathbb{R},$$

   calcula a súa **factorización de Cholesky** e deduce para qué valores de α a matriz A é definida positiva.

5. Sexa a matriz simétrica e tridiagonal :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula a súa **factorización de Cholesky** obtendo ao mesmo tempo as condicións para que A sexa definida positiva.

   (b) Utilizando dita factorización, resolve o S.E.L. $Au = b$ para $\alpha = 2$ e $b = (-3, 5, -7, 6)^T$.

6. Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz **tridiagonal e simétrica** de orde n tal que:

$$a_{ii} = i, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_{i+1,i} = \sqrt{i}, \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(a) Se é posible, calcula a súa **factorización de Cholesky.** É A definida positiva?

(b) Calcula $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$.

7. Considera unha matriz, con coeficientes reais, da forma:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \dots & \beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula a súa **factorización de Cholesky** obtendo ao mesmo tempo as condicións para que A sexa definida positiva.

(b) Escribe os subprogramas Fortran 90 de factorización e de resolución dos sistemas triangulares, correspondentes a unha matriz das características anteriores, gardada en vectores `alfa` e `beta`.