Universidad de Santiago de Compostela

Facultad de Matemáticas

Geometría lineal

Luis Barba Cepedello

Curso 2022-2023

1. El Espacio Afín

En este tema introducimos el concepto de espacio afín como una generalización del plano y espacio ordinario. Cada espacio afín lleva asociado un espacio vectorial y en los espacios afines estudiamos únicamente las propiedades geométricas que se pueden deducir de las propiedades de sus vectores.

Un concepto fundamental en este tema es el paralelismo. La teoría de figuras homotéticas está dentro de la geometría afín. Los conceptos de traslación y homotecia y más en general el concepto de aplicación afín son conceptos afines. El estudio de longitudes, ángulos, perpendicularidad y distancias corresponde a la geometría euclídea.

Las figuras que utilizamos se refieren al plano o espacio ordinario y están aquí principalmente para apoyar nuestra intuición; las demostraciones deben hacerse de forma lógica y ser independientes de las figuras.

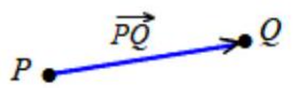
1.1. Espacio afín sobre un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

1.1.1. Definición - Espacio afín

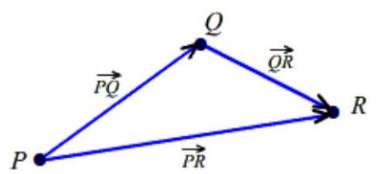
Un espacio afín sobre el espacio vectorial V es una terna $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ formada por un conjunto no vacío $\mathbb{A}$ cuyos elementos se llaman puntos, el espacio vectorial V y una operación externa:

$$\begin{aligned} \rightarrow: \mathbb{A} \times \mathbb{A} : &\longrightarrow V \\ (P, Q) &\longmapsto \frac{V}{PQ} \end{aligned}$$

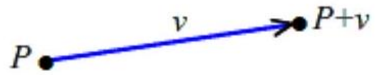


donde por $\overrightarrow{PQ}$ o también por $\overrightarrow{P, Q}$ denotamos la imagen por la aplicación $\rightarrow$ del par (P, Q), verificándose los siguientes axiomas:

1. Relación de Chasles: Para cualesquiera puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}$, se verifica $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.



2. Para cada punto $P \in \mathbb{A}$ y cada vector $v \in V$, existe un único punto $Q \in \mathbb{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = v$; generalmente denotaremos Q por $P + v$ y entonces se tiene que $\overrightarrow{P, P+v} = v$, para cada $P \in \mathbb{A}$ y cada $v \in V$.



Con frecuencia denotaremos el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ simplemente por $\mathbb{A}$. Si $K = \mathbb{R}$ diremos que $\mathbb{A}$ es un espacio afín real. Si $K = \mathbb{C}$ diremos que $\mathbb{A}$ es un espacio afín complejo.

1.1.2. Proposición - Propiedades de un espacio afín

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Se tiene:

(1) $P + \overrightarrow{PQ} = Q$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$

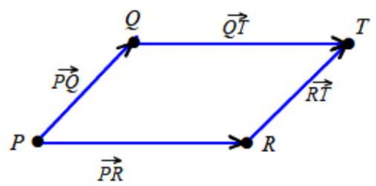
(2) $\overrightarrow{PP} = 0$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

(3) Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'} \Longrightarrow Q = Q'$

(4) $\overrightarrow{PQ} = 0 \Longleftrightarrow Q = P$

(5) $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(6) Relación del paralelogramo: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RT} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QT}$.



(7) Si $P + v = P + v' \Rightarrow v = v'$.

(8) $P + (u + v) = (P + u) + v$, para todo $P \in \mathbb{A}$ y para cualesquiera $u, v \in V$.

(9) $P + 0 = P$, para todo $P \in \mathbb{A}$.

<u>Demostración</u>

(1) $P + \overrightarrow{PQ}$ es, por el ***Ax. 2***, el único punto $R \in \mathbb{A} / \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ}$.

(2) Dado que $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$, se tiene que $\overrightarrow{PP} = 0$.

(3) Pongamos $v = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ'}$. Por la definición 1.1.1 (2), $Q = P + v = Q'$.

(4) Se sigue de (2) y (3).

(5) Es consecuencia de que $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$.

(6) Se tiene

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{QT}$$

(7) $v = \overrightarrow{P, P+v} = \overrightarrow{P, P+v'} = v'$.

(8) Dado que

$$\overrightarrow{P, (P+u)+v} = \overrightarrow{P, P+u} + \overrightarrow{P+u, (P+u)+v} = u + v = \overrightarrow{P, P+(u+v)}$$

el resultado se sigue de (2).

(9) Se sigue de (3), puesto que $\overrightarrow{P, P+0} = 0 = \overrightarrow{PP}$.

Ejemplos

1. El conjunto de los puntos del plano (espacio) ordinario, junto con el espacio vectorial de los vectores libres del plano (espacio) y con la aplicación que lleva cada par de puntos P, Q del plano (espacio) al vector libre $[\overrightarrow{PQ}]$, forman un espacio afín.

2. **Importante** Sea V un espacio vectorial sobre K. La terna $(V, V, \rightarrow)$, donde para cualesquiera $P, Q \in V$, $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, es un espacio afín. En efecto, la relación de Chasles se verifica puesto que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (Q - P) + (R - Q) = R - P = \overrightarrow{PR}$$

El axioma (2) se verifica, puesto que para cada punto $P \in V$ y cada vector $v \in V$ el punto $Q = P + v$ es el único punto que verifica la ecuación $Q - P = v$.

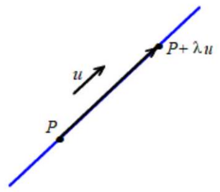
Así, todo espacio vectorial V puede ser considerado como un espacio afín sobre V; este espacio afín se llama el espacio afín de V y lo denotaremos por V.

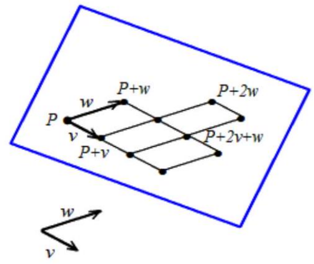
1.2. Variedades lineales

1.2.1. Definición - Variedad lineal

Sea P un punto de $\mathbb{A}$ y sea U un subespacio de V. Se llama variedad lineal o subespacio afín de $\mathbb{A}$ que pasa por P y con dirección U al conjunto

$$P + U = \{P + u \mid u \in U\} \subset \mathbb{A}$$





A mayores, $\varnothing$ se considera variedad lineal.

<u>**Observación**</u>

Las variedades lineales del espacio afín de V son los subconjuntos de V de la forma

$$P+U=\{P+u \mid u\in U\}$$

donde $P\in V$ y U es un subespacio de V, es decir, son los elementos del espacio vectorial cociente V/U.

El espacio afín $\mathbb{A}$ sobre el espacio vectorial V es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. En efecto, $\mathbb{A}=P+V$, para todo $P\in\mathbb{A}$.

1.2.2. Proposición - Propiedades de una variedad lineal

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V.

(1) Sea $L=P+U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ y $Q\in\mathbb{A}$. Son equivalentes:

- (a) $Q\in L$.
- (b) $\overrightarrow{PQ}\in U$.
- (c) $L=Q+U$.

(2) Sea $L=P+U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Si $R,S\in L$, entonces $\overrightarrow{RS}\in U$.

(3) Sean $L_1=P_1+U_1$ y $L_2=P_2+U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene

$$L_1\subset L_2 \iff P_1\in L_2,\quad U_1\subset U_2$$

y en particular,

$$L_1=L_2\Rightarrow U_1=U_2$$

<u>Demostración</u>

(1) (a) $\Rightarrow (b)$ Existe $u\in U$ tal que $Q=P+u$. Por tanto $\overrightarrow{PQ}=u\in U$.

(b) $\Rightarrow (c)$ Para cada $u \in U$, se tiene

$$P + u = Q + \overrightarrow{QP} + u \in Q + U$$

Así, $L \subset Q + U$. De forma similar se prueba que $Q + U \subset L$.

(c) $\Rightarrow (a)$ $Q = Q + 0 \in Q + U = L$.

(2) Por (1) se tiene que $L = R + U$ y dado que $S \in R + U, \overrightarrow{RS} \in U$.

(3) Si $L_1 \subset L_2$, entonces $P_1 \in L_2$ y por (1), $L_2 = P_1 + U_2$. Veamos que $U_1 \subset U_2$. Si $u_1 \in U_1$, $P_1 + u_1 \in L_1 \subset L_2 = P_1 + U_2$, luego existe un vector $u_2 \in U_2$ tal que $P_1 + u_1 = P_1 + u_2$. De la proposición 1.1.2 (7), se sigue que $u_1 = u_2 \in U_2$. Recíprocamente, si $P_1 \in L_2$, entonces $L_2 = P_1 + U_2$ y dado que $U_1 \subset U_2$, se tiene $L_1 = P_1 + U_1 \subset L_2$.

Observación

Como consecuencia de la proposición anterior, toda variedad lineal tiene un único subespacio dirección.

Veamos que toda variedad lineal es un espacio afín.

1.2.3. Proposición - Relación entre variedad lineal y espacio afín

Sea $L = P + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. La terna $(L, U, \rightarrow)$, siendo $\rightarrow: L \times L \longrightarrow U$ la aplicación que lleva cada par $(Q, R) \in L \times L$ al vector $\overrightarrow{QR}$ de V, es un espacio afín sobre U.

Demostración

Dado que $Q, R \in L$, el vector $\overrightarrow{QR} \in U$, por lo que la aplicación está bien definida. La relación de Chasles se verifica para los puntos de L, puesto que se verifica para los puntos de $\mathbb{A}$. También se verifica el axioma (2), puesto que para cada punto $Q \in L$ y cada vector $u \in U$ el punto $R = Q + u \in L = Q + U$ es el único punto que verifica la ecuación $\overrightarrow{QR} = u$.

1.2.4. Definición - Combinación lineal

Sea V un espacio vectorial sobre K. Una combinación lineal de los elementos $v_1, \ldots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Si S es un subconjunto de V, se llama subespacio generado por S, y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de todos los subconjuntos finitos de S. Si S es un subconjunto de V, entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Observación

Una base de un espacio vectorial V de dimensión n es una n-pla $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ tal que el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V; en particular, los vectores $v_1, \dots, v_n$ son linealmente independientes.

1.2.5. Definición - Dimensión de un espacio afín

Se llama dimensión del espacio afín $(\mathbb{A}, V, \rightarrow)$ a la dimensión de V como espacio vectorial sobre K. Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín y $L = P + U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\dim L = \dim_K U$.

1.2.6. Definición - Rectas, planos e hiperplanos

Se llaman rectas y planos a los espacios afines de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, se llaman hiperplanos de $\mathbb{A}$ a las variedades lineales de dimensión $n-1$. El espacio afín $\mathbb{A}$ tiene dimensión 0 si, y solo si, $\mathbb{A} = \{P\}$, para algún $P \in \mathbb{A}$. El conjunto vacío se considera una variedad lineal de dimensión -1.

1.2.7. Proposición - Relación entre variedades lineales con su dimensión

Si $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ son variedades lineales de igual dimensión de un espacio afín $\mathbb{A}$ y $L_1 \subset L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Demostración

Como $L_1 \subset L_2$, $U_1 \subset U_2$ y $P_1 \in L_2$. Dado que $\dim_K U_1 = \dim_K U_2$, se tiene que $U_1 = U_2$ y entonces, $L_2 = P_1 + U_2 = P_1 + U_1 = L_1$.

1.3. Unión e intersección de variedades lineales

1.3.1. Proposición - Intersección de variedades lineales

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces $\bigcap_{i\in I} L_i$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Es más, si $L_i = P_i + U_i$ y $Q \in \bigcap_{i\in I} L_i$,

$$\bigcap_{i\in I} L_i = Q + \bigcap_{i\in I} U_i$$

Demostración

- Si $\bigcap_{i\in I} L_i = \varnothing$, es una variedad lineal por definición.
- Si $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \varnothing \Longrightarrow \exists Q \in \bigcap_{i\in I} L_i$. Llega con probar que $\bigcap_{i\in I} L_i = Q + \bigcap_{i\in I} U_i$. Notar que $Q \in \bigcap_{i\in I} L_i \Longrightarrow Q \in L_i, \forall i \in I \Longrightarrow L_i = Q + U_i$. Así:

$$P \in \bigcap_{i\in I} L_i \Longleftrightarrow P \in L_i = Q + U_i,\ \forall i \in I \Longleftrightarrow \overrightarrow{QP} \in U_i,\ \forall i \in I \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{QP} \in \bigcap_{i\in I} U_i \Longleftrightarrow P \in Q + \bigcap_{i\in I} U_i.$$

Como consecuencia, si $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \varnothing$, entonces $\dim\left(\bigcap_{i\in I} L_i\right) = \dim_K\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)$.

1.3.2. Definición - Variedad lineal generada

Si $S \subset \mathbb{A}$ es un subconjunto de puntos, se llama variedad lineal generada por S y la denotaremos por $\langle\langle S\rangle\rangle$ a la variedad lineal

$$\langle\langle S\rangle\rangle = \bigcap_{i\in I} L_i$$

Donde $\{L_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$ que contienen a S.

Observaciones

- La variedad lineal generada por S es la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a S.
- $\langle\langle \varnothing\rangle\rangle = \varnothing$.
- $\langle\langle P\rangle\rangle = \{P\} = P + \{0\}$.

La siguiente proposición da una descripción de los elementos de $\langle\langle S\rangle\rangle$.

1.3.3. Proposición - Caracterización de los elementos de $\langle\langle S\rangle\rangle$

Si $S \neq \varnothing$ un subconjunto de $\mathbb{A}$, entonces

$$\langle\langle S\rangle\rangle = Q + \langle \overrightarrow{QR} \mid R \in S\rangle$$

para cualquier $Q \in S$.

Demostración

La inclusión $S \subset Q + \langle \overrightarrow{QR} \mid R \in S \rangle$ se sigue de las igualdades

$$Q = Q + 0, \quad R = Q + \overrightarrow{QR}, \quad \forall R \in S$$

Pues si $P \in S \Longrightarrow P = Q + \overrightarrow{QP} \in Q + \langle \{\overrightarrow{QR} \mid R \in S\} \rangle$.

Veamos que es el menor. Sea L_1 una variedad lineal de $\mathbb{A}$ tal que $S \subset L_1$. Denotemos $L = Q + \langle \{\overrightarrow{QR} \mid R \in S\} \rangle$. Tenemos que ver que $L \subset L_1$.

$$Q \in S \subset L_1 \Longrightarrow L_1 = Q + U.$$

Si $P \in S \subset L_1 \Longrightarrow \overrightarrow{QP} \in U$. Por tanto,

$$\{\overrightarrow{QR} \mid R \in S\} \subset U \Longrightarrow \langle \{\overrightarrow{QR} \mid R \in S\} \rangle \subset U \Longrightarrow Q + \langle \{\overrightarrow{QR} \mid R \in S\} \rangle \subset Q + U = L_1$$

Ejercicio

Sean S y S' subconjuntos no vacíos de $\mathbb{A}$. Prueba que:

(1) $S \subset \langle\langle S \rangle\rangle$.

(2) Si $S \subset S'$, entonces $\langle\langle S \rangle\rangle \subset \langle\langle S' \rangle\rangle$.

(3) S es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ si, y solo si, $\langle\langle S \rangle\rangle = S$.

(4) Si $\mathbb{A}$ tiene dimensión finita, existe un subconjunto finito S_0 de S tal que $\langle\langle S \rangle\rangle = \langle\langle S_0 \rangle\rangle$.

(5) Dados $P, Q \in \mathbb{A}$, si $Q \in \langle\langle S \cup \{P\} \rangle\rangle$ y $Q \notin \langle\langle S \rangle\rangle$, entonces $P \in \langle\langle S \cup \{Q\} \rangle\rangle$.

1.3.4. Proposición - Propiedades de $\langle\langle S \rangle\rangle$

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V y sean $S, S' \subset \mathbb{A} \mid S \neq \varnothing \neq S'$. Se verifican:

(a) Si $S \subset S' \Longrightarrow \langle\langle S \rangle\rangle \subset \langle\langle S' \rangle\rangle$.

(b) S es una variedad lineal $\Longleftrightarrow S = \langle\langle S \rangle\rangle$.

(c) Si $\mathbb{A}$ tiene dimensión finita, entonces existe un subconjunto finito S_0 de $S \mid \langle\langle S_0 \rangle\rangle = \langle\langle S \rangle\rangle$.

(d) Dados $P, Q \in \mathbb{A}$, entonces si $Q \in \langle\langle S \cup \{P\} \rangle\rangle$ y $Q \notin \langle\langle S \rangle\rangle$ entonces $P \in \langle\langle S \cup \{Q\} \rangle\rangle$.

Demostración

(a) Como $S' \subset \langle\langle S' \rangle\rangle$ y $S \subset S'$, entonces $S \subset \langle\langle S' \rangle\rangle$. Puesto que $\langle\langle S \rangle\rangle$ es la menor variedad lineal que contiene a S, se tiene que $\langle\langle S \rangle\rangle \subset \langle\langle S' \rangle\rangle$.

(b) "$\Longrightarrow$". Veamos el doble contenido. $S \subset \langle\langle S\rangle\rangle$ se cumple siempre, queda ver "$\supset$". Puesto que $S \subset S$ y S es variedad lineal, entonces $\langle\langle S\rangle\rangle \subset S$ por ser $\langle\langle S\rangle\rangle$ la menor variedad lineal que contiene a S.

"$\Longleftarrow$". $\langle\langle S\rangle\rangle$ es variedad lineal $\Longrightarrow S = \langle\langle S\rangle\rangle$ es variedad lineal.

(c) Por ser $S \neq \varnothing$, $\exists Q \in S \subset \langle\langle S\rangle\rangle$. Por tanto, $\langle\langle S\rangle\rangle = Q + U$. Como $U \subset V$ y V tiene dimensión finita, entonces U tiene dimensión finita. Tomemos entonces $\{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U. Sean $P_i = Q + u_i,\ i = 1, \ldots, r \iff \overrightarrow{QP_i} = u_i$. Tomemos ahora $S_0 = \{Q, P_1, \ldots, P_r\}$.

$$\begin{aligned}\langle\langle S_0\rangle\rangle &= Q + \langle\langle\{\overrightarrow{QP_i} \mid P_i \in S_0\}\rangle\rangle = \\ &= Q + \langle\langle\{\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_r}\}\rangle\rangle = \\ &= Q + \langle\langle\{u_1, \ldots, u_r\}\rangle\rangle = \\ &= Q + U = \langle\langle S\rangle\rangle\end{aligned}$$

(d) Como $Q \in \langle\langle S \cup \{P\}\rangle\rangle$ y $Q \notin \langle\langle S\rangle\rangle$, se tiene que $P \in \langle\langle S\rangle\rangle$. Puesto que $S \neq \varnothing \Longrightarrow \exists T \in S \Longrightarrow \langle\langle S\rangle\rangle = T + \langle\{\overrightarrow{TR} \mid R \in S\}\rangle$. Ahora bien, $S \subset S \cup \{P\} \Longrightarrow T \in S \cup \{P\}$. Así, $\langle\langle S \cup \{P\}\rangle\rangle = T + \langle\{\overrightarrow{TR} \mid R \in S \cup \{P\}\}\rangle = T + \langle\{\overrightarrow{TR} \mid R \in S\}\rangle + \langle\{\overrightarrow{TP}\}\rangle$.

Por hipótesis, $Q \in \langle\langle S \cup \{P\}\rangle\rangle \iff \overrightarrow{TQ} \in \langle\{\overrightarrow{TR} \mid R \in S\}\rangle + \langle\overrightarrow{TP}\rangle \Longrightarrow \exists\{R_1, \ldots, R_r\} \subset S$ finito $\mid \overrightarrow{TQ} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{TR_i} + \mu\overrightarrow{TP}$ con $\lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$. Veamos que $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{TQ} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{TR} \Longrightarrow Q \in \langle\langle S\rangle\rangle$, lo cual es una contradicción.

Podemos dividir por μ. $\overrightarrow{TP} = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{TQ} + \sum_{i=1}^{r} \frac{-\lambda_i}{\mu}\overrightarrow{TR} \in \langle\{\overrightarrow{TR}\}\rangle + \langle\{\overrightarrow{TR} | R \in S\}\rangle \Longrightarrow$ $P \in T + \langle\{\overrightarrow{TR} \mid R \in S \cup \{Q\}\}\rangle = \langle\langle S \cup \{Q\}\rangle\rangle$.

1.3.5. Proposición - $\varnothing$ como intersección de variedades lineales

Sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene

$$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \quad \iff \quad \overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$$

Demostración

Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $P_1 + u_1 = P_2 + u_2$. Entonces $P_1 = P_2 + u_2 - u_1$, de donde se sigue que $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 - u_2 \in U_1 + U_2$.

Recíprocamente, si $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$, existen vectores $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 + u_2$, luego $P_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} = P_1 + u_1 + u_2$. Por tanto $P_2 - u_2 = P_1 + u_1 \in L_1 \cap L_2$.

Observación

Si L_1 y L_2 son variedades lineales de $\mathbb{A}$ su unión conjuntista $L_1 \cup L_2$ no es, en general, una variedad lineal de $\mathbb{A}$.

1.3.6. Proposición - Unión de variedades lineales como variedad lineal

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre un K espacio vectorial, donde el cuerpo K tiene característica distinta de 2 y sean L_1 y L_2 variedades lineales. Entonces, si $L_1 \cup L_2$ es una variedad lineal, se tiene que o bien $L_1 \subset L_2$ o bien $L_2 \subset L_1$.

Demostración

En efecto, sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ y supongamos que U es el subespacio dirección de $L_1 \cup L_2$. Dado que $P_1, P_2 \in L_1 \cup L_2$, se tiene que $\overrightarrow{P_1P_2} \in U$, luego

$$P_1 + 2\overrightarrow{P_1P_2} \in L_1 \cup L_2$$

Si $P_1 + 2\overrightarrow{P_1P_2} \in L_1$, entonces $2\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 \xRightarrow{\text{car}(K)\neq 2} \overrightarrow{P_1P_2} \in U_1$. Por otro lado, si $P_1 + 2\overrightarrow{P_1P_2} \in L_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_1} + 2\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2, P_1 + 2\overrightarrow{P_1P_2}} \in L_2$.

En todo caso, $\overrightarrow{P_1P_2} \in L_1 \cup L_2$, de donde se sigue que $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 \cup U_2 \subset \langle U_1 \cup U_2 \rangle = U_1 + U_2 \Longrightarrow L_1 \cup L_2 \neq \varnothing$. Sea $P \in L_1 \cup L_2 \Longrightarrow \begin{cases} L_1 \cup L_2 = P + U \\ L_1 = P + U_1 \\ L_2 = P + U_2 \end{cases}$

Veamos que $U = U_1 + U_2$

$\subset$ / Sea $u \in U \Longrightarrow P + u \in L_1 \cup L_2$. Casos:

- Si $P + u \in L_1 \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{P, P+u} \in U_1$
- Si $P + u \in L_2 \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{P, P+u} \in U_2$

En virtud de lo anterior, $u \in U_1 \cup U_2$.

$\supset$ /
- Sea $u_1 \in U_1 \Longrightarrow P + u_1 \in L_1 \subset L_1 \cup L_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P, P+u} = \overrightarrow{P, u_1} \in U$
- Sea $u_2 \in U_2 \Longrightarrow P + u_2 \in L_2 \subset L_1 \cup L_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P, P+u} = \overrightarrow{P, u_2} \in U$

Luego $U = U_1 \cup U_2$. Por ser U un subespacio vectorial se tiene que $\begin{cases} U_1 \subset U_2 \\ o \\ U_2 \subset U_1 \end{cases}$

Por tanto, $P \in L_1 \cap L_2 \Longrightarrow \begin{cases} L_1 \subset L_2 \\ o \\ L_2 \subset L_1 \end{cases}$

1.3.7. Definición - Variedad unión o suma

Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se llama variedad lineal unión o suma de las variedades $\{L_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{A}$ a la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a $\bigcup_{i\in I} L_i$; la denotaremos por $\circ_{i\in I} L_i$. Se tiene

$$\circ_{i\in I} L_i = \left\langle\left\langle \bigcup_{i\in I} L_i \right\rangle\right\rangle$$

Si la familia es finita $\{L_1, \ldots, L_r\}$, escribiremos $L_1 \circ \ldots \circ L_r$. En particular, si $L_i = P_i \in \mathbb{A}$, escribiremos $P_1 \circ \ldots \circ P_r = \langle\langle S\rangle\rangle$ en vez de $\{P_1\} \circ \ldots \circ \{P_r\} = \langle\langle S\rangle\rangle$.

La siguiente proposición da una expresión sencilla de los elementos de $L_1 \circ L_2$.

1.3.8. Proposición - Caracterización de los elementos de la variedad suma

Si $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ son variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

$$L_1 \circ L_2 = P_1 + \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \right\rangle + U_1 + U_2$$

<u>Demostración</u>

$\subset$ / Sea $u_1 \in U_1 \Longrightarrow P_1 + u_1 \in P_1 + \langle\overrightarrow{P_1P_2}\rangle + U_1 + U_2$. Sea $u_2 \in U_2 \Longrightarrow P_2 + u_2 = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + u_2 \in P_1 + \langle\overrightarrow{P_1P_2}\rangle + U_1 + U_2$. Se tiene que $L_1 \cup L_2 \subset P_1 + \langle\{P_1P_2\}\rangle + U_1 + U_2$. Así, $L_1 \circ L_2 = \langle\langle L_1 \cup L_2\rangle\rangle \subset P_1 + \langle\{P_1P_2\}\rangle + U_1 + U_2$ es la menor variedad lineal que contiene a L_1 y L_2.

$\supset$ / Sea $L = Q + U$ una variedad lineal cumpliendo $L_1 \cup L_2 \subset L$.

$$\left.\begin{array}{l} L_1 \subset L \Longrightarrow U_1 \subset U \\ L_2 \subset L \Longrightarrow U_2 \subset U \end{array}\right\} \Longrightarrow U_1 \cup U_2 \subset U \Longrightarrow U_1 + U_2 \subset U$$

1.3.9. Corolario - Propiedades de la dimensión de espacios intersección y suma

Sea $\mathbb{A}$ un espacio vectorial de dimensión finita y sean $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) Identidad de Grassman para variedades lineales afines: Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces

$$\dim(L_1 \circ L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

(2) Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces
$$\dim(L_1 \circ L_2) = 1 + \dim_K(U_1 + U_2).$$

Demostración

(1) Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \implies \exists Q \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 \cap L_2 = Q + \langle\{\overrightarrow{QQ}\}\rangle + U_1 + U_2 = Q + (U_1 \cap U_2)$. Por otro lado, $L_1 \circ L_2 = P_1 + U_1 + U_2$. El resultado se sigue de la identidad de Grassman para subespacios:
$$\begin{aligned}\dim(L_1 \circ L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) &\overset{def}{=} \dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2)\\ &\overset{Grassman}{=} \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)\end{aligned}$$

(2) Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces $\overrightarrow{P_1P_2} \notin U_1 + U_2$ y por tanto $\left\langle\overrightarrow{P_1P_2}\right\rangle \cap (U_1 + U_2) = \{0\}$. Así, $\dim(L_1 \circ L_2) = \dim_K\left(\langle\{\overrightarrow{P_1P_2}\}\rangle \oplus (U_1 + U_2)\right) = 1 + \dim_K(U_1 + U_2)$.

1.4. Posiciones relativas de variedades lineales

1.4.1. Definición - Relación de paralelismo

Se dice que las variedades lineales $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ son paralelas, si $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$. Se escribe $L_1 \| L_2$.

1.4.2. Proposición - Propiedades del paralelismo

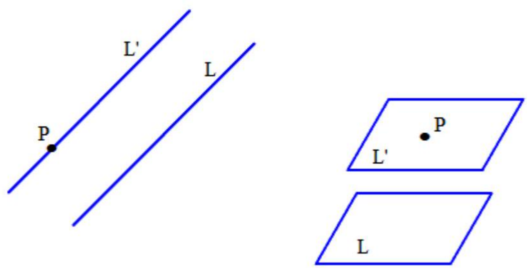
Sean $L = Q + U, L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene:

(1) Si $L_1 \| L_2$ y $\dim L_1 = \dim L_2$, entonces $U_1 = U_2$.

(2) Si $L_1 \| L_2$ y $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$; además, si $\dim L_1 = \dim L_2$, entonces $L_1 = L_2$

(3) La "relación de paralelismo" es una relación de equivalencia en el conjunto de las variedades lineales de la misma dimensión de un espacio afín.

(4) Axioma del paralelismo. Si P es un punto de $\mathbb{A}$ tal que $P \notin L$, entonces existe una única variedad lineal L' de la misma dimensión que L que pasa por P y es paralela a L.



(5) Si $L_1 \| L_2$ y $\dim L_1 \leq \dim L_2$, entonces existe una única variedad lineal L'' tal que $\dim L'' = \dim L_2, L_1 \subset L''$ y $L'' \| L_2$.

<u>Demostración</u>

(1) Dado que $U_1 \subset U_2$ y $\dim_K U_1 = \dim_K U_2$, se tiene que $U_1 = U_2$.

(2) Si $Q \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 = Q + U_1$ y $L_2 = Q + U_2$. Dado que $L_1 \| L_2$, se tiene $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$. Así, $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

(3)
- Reflexiva
$$L \| L \text{ ya que } U \subset U$$
- Simétrica
$$L_1 \| L_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} U_1 \subset U_2 \\ U_2 \subset U_1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow L_2 \| L_1$$
- Transitiva
$$\left. \begin{array}{l} L_1 \| L_2 \xRightarrow{\dim L_1 = \dim L_2} U_1 = U_2 \\ L_2 \| L_3 \xRightarrow{\dim L_2 = \dim L_3} U_2 = U_3 \end{array} \right\} \Longrightarrow U_1 = U_3 \Longrightarrow L_1 \| L_3$$

(4) Sean $L = Q + U, \ P \notin L$
- Existencia
$$L' = P + U \Longrightarrow P \in L' \text{ y } \dim L = \dim L' = \mathrm{U}$$
- Unicidad. Sea L' variedad lineal con $\dim L' = \dim L$ y $P \in L'$.
$$\left. \begin{array}{r} P \in L' \Longrightarrow L' = P + U' \\ L \| L' \xRightarrow{\dim L = \dim L'} U = U' \end{array} \right\} \Longrightarrow L' = P + U$$

(5) Sean $L_1 \| L_2, | \dim L_1 \leq \dim L_2, \ L_1 = P_1 + U_1, \ L_2 = P_2 + U_2$
- Existencia y unicidad. Tomemos $L'' = P_1 + U_2$. L'' es único, ya que contiene P_1 y es paralela a L_2, por **(4)**. Tenemos que probar que $L_1 \subset L''$. Como $L_1 \| L_2$,
$$\left. \begin{array}{r} U_1 \subset U_2 \\ \text{o} \\ U_2 \subset U_1 \end{array} \right\} \Longrightarrow U_1 \subset U_2 \Longrightarrow L_1 = P_1 + U_1 \subset P_1 + U_2 = L''$$

1.4.3. Definición - Cortarse, cruzarse y pasar por

Sean L_1 y L_2 variedades lineales del espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V.

(1) Se dice que L_1 y L_2 se cortan si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$.

(2) Se dice que L_1 y L_2 se cruzan si no son paralelas y no se cortan.

(3) Si P es un punto de $\mathbb{A}$, diremos que la variedad lineal L pasa por P si $P \in L$.

Observación

El apartado **(2)** prueba que dos variedades lineales de la misma dimensión paralelas y distintas no se cortan:

$$L \| L' \text{ y } L \neq L' \Longrightarrow L \cap L' = \varnothing$$

Es más, sean L_1 y L_1 variedades lineales, entonces

$$\text{Como } L_1 \| L_2 \text{ y } \begin{matrix} L_1 \not\subset L_2 \\ L_2 \not\subset L_1 \end{matrix} \Longrightarrow L_1 \cap L_2 = \varnothing$$

Ejemplo

Sea el espacio afín $\mathbb{R}^3$ Consideramos las rectas $r_a = (0,1,1) + \langle(-1,2,a)\rangle$ y $s_a = (1,0,1) + \langle(a-1,4,-2)\rangle$, y vamos a estudiar la posición relativa de r_a y s_a según los valores de $a \in \mathbb{R}$. Paralelismo. Las rectas r_a y s_a son paralelas si, y solo si, $\langle(-1,2,a)\rangle = \langle(a-1,4,-2)\rangle$. Por tanto,

$$r_a \| s_a \Longleftrightarrow \lambda(-1,2,a) = (a-1,4,-2) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow a = -1.$$

De esta forma,

$$r_a \cap s_a \neq \varnothing \Longleftrightarrow (1,-1,0) \in \langle(-1,2,a),(a-1,4,-2)\rangle$$

y si $a \neq -1$,

$$r_a \cap s_a \neq \varnothing \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a = -2.$$

Así, $r_{-1} \| s_{-1}, r_{-2} \cap s_{-2} \neq \varnothing, r_{-2} \neq s_{-2}$ y r_a y s_a se cruzan para todo $a \in \mathbb{R} - \{-1,-2\}$. Además, $r_{-2} \cap s_{-2} = \{(-1/2, 2, 0)\}$

1.4.4. Proposición - Axioma de la recta

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Se tiene:

"Por dos puntos distintos pasa una única recta"

Demostración

Sean $P, Q \in \mathbb{A} \mid P \neq Q$.

- Existencia: $P, Q \in P \circ Q = \langle\langle\{P, Q\}\rangle\rangle$. Veamos que $P \circ Q$ es una recta.

$$P \circ Q = P + \langle\{\overrightarrow{PQ}\}\rangle. \text{ Como } P \neq Q \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} \neq 0 \Longrightarrow \dim P \circ Q = 1$$

- Unicidad: Sea $L \subset \mathbb{A}$ recta $/ P, Q \in L$.

$$P, Q \in L \Longrightarrow \{P, Q\} \subset L \Longrightarrow P \circ Q \subset L \xRightarrow{\dim P \circ Q = 1 = \dim L} L = P \circ Q$$

Observación

Que existan dos puntos distintos implica que $\dim \mathbb{A} > 1$.

1.4.5. Proposición - Axioma de incidencia entre recta y plano

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Se tiene:

"Si dos puntos distintos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el plano"

Demostración

Sean $L \subset \mathbb{A}$ una recta y $\pi \subset \mathbb{A}$ un plano $/ \{P, Q\} \subset L \cap \pi,\ P \neq Q$. Como $P \neq Q \Longrightarrow L = P \circ Q$, por la proposición anterior. Así, $\{P, Q\} \subset \pi \Longrightarrow L = P \circ Q \subset \pi$.

Observación

Notar que la existencia de un plano en $\mathbb{A}$ implica que $\dim \mathbb{A} \geq 2$.

1.4.6. Lema - Tres puntos no alineados son distintos

Sea A un espacio afín sobre V. Si $\dim \mathbb{A} \geq 1$, se tiene que si $P, Q, R \in \mathbb{A}$ son no alineados, entonces $P \neq Q \neq R \neq P$.

Demostración

Lo probaremos por reducción al absurdo. Supongamos que al menos dos de los puntos son iguales ($P = Q$).

- $P \neq R \Longrightarrow P = Q,\ R \in P \circ R$ recta $\Longrightarrow$ son alineados . Contradicción.
- $P = Q = R$, como $\dim_K V \geq 1 \Longrightarrow \exists v \in V \,/\, v \neq 0$. Tomemos entonces $L = P + \langle\{v\}\rangle$, $\dim L = 1$ y $P = Q = R \in L \Longrightarrow$ son alineados . Contradicción.

Observación

El Lema anterior no es cierto para $\dim \mathbb{A} = 0$. Tomemos $\mathbb{A} = \{P\}$. Al no existir rectas, P, P, P son no alineados pero iguales.

1.4.7. Proposición - Axioma del plano

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Entonces si $\dim \mathbb{A} \geq 1$, se tiene:

"Por tres puntos no alineados pasa un único plano"

Demostración

Sean $P, Q, R \in \mathbb{A}$ no alineados.

- Existencia: Tomemos $P = Q = R$ y veamos que es un plano. $P \circ Q \circ R = P + \langle\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}\rangle$ es un plano $\Longrightarrow \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente independientes. Supongamos lo contrario: $\exists \lambda \in K \,/\, \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PR} \Longrightarrow P \circ Q \circ R = P + \langle\{\overrightarrow{PQ}\}\rangle$ es una recta. Entonces, $P, Q, R \in P + \langle\{\overrightarrow{PQ}\}\rangle \Longrightarrow P, Q, R$ están alineados. Contradicción.
- Unicidad. Sea π plano $/ \, P, Q, R \in \pi \Longrightarrow P \circ Q \circ R \subset \pi \xRightarrow{\dim P \circ Q \circ R = \dim \pi = 2} P \circ Q \circ R = \pi$.

Observación

Que existan 3 puntos no alineados distintos implica que $\dim \mathbb{A} \geq 2$.

1.4.8. Teorema - Incidencia de variedades lineales en el plano

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín ($\dim \mathbb{A} = 2$) sobre V. Entonces, dos rectas son paralelas si, y solo si, no se cortan.

Demostración

$\Longrightarrow /$

$$\left.\begin{array}{r} L || L' \\ L \neq L' \\ \dim L = \dim L' \end{array}\right\} \Longrightarrow L \cap L' = \varnothing$$

$\Longleftarrow /$ $L \cap L' = \varnothing \Longleftrightarrow \overrightarrow{PP'} \notin \langle\{u\}\rangle + \langle\{v\}\rangle = \langle\{u, v\}\rangle$. Ahora bien, $L = P + \langle\{u\}\rangle$ y $L' = P' + \langle\{v\}\rangle$. Como $\dim_K V = 2 \Longrightarrow \dim_K \langle\{u, v\}\rangle = 1 \Longrightarrow \langle\{u\}\rangle = \langle\{v\}\rangle \Longleftrightarrow L = L'$.

ObservaciónSi $\dim \mathbb{A} = 2$, entonces no existen rectas que se crucen.

1.4.9. Teorema - Incidencia de variedades lineales en el e.a. tridimensional

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dim $= 3$.

(a) Axioma de incidencia plano-plano en dimensión 3. Se tiene:

"Si dos planos se cortan, su intersección es una recta"

(b) Dos planos distintos son paralelos si, y solo si, no se cortan.

(c) Un plano y una recta no contenida en el plano son paralelos si, y solo si, no se cortan.

(d) Dos rectas distintas son paralelas si, y solo si, son coplanarias y no se cortan.

<u>Demostración</u>

(a) Sean π y π' planos, $\pi \neq \pi'$ y $\pi \cap \pi' \neq \varnothing$. Dado que $\pi \neq \pi'$, se tiene que $\pi \subset \pi \circ \pi'$ y si $\pi = \pi \circ \pi' \Longrightarrow \pi' \subset \pi \Longrightarrow \pi' = \pi$. Ahora, como $\pi \not\subseteq \pi \circ \pi' \Longrightarrow \dim \pi < \dim(\pi \circ \pi')$

$$\left.\begin{aligned} \Longrightarrow \dim \pi \circ \pi' > 2 \\ \pi \circ \pi' \subset \mathbb{A} \Longrightarrow \dim(\pi \circ \pi') \leq 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \dim(\pi \circ \pi') = 3$$

Como $\pi \cap \pi' \neq \varnothing$, usando Grassmann:

$$\dim(\pi \cap \pi') = \dim(\pi) + \dim(\pi') - \dim(\pi - \pi') = 2 + 2 - 3 = 1$$

(b) Sean $\pi = P + U$ y $\pi' = P' + U'$ planos distintos.

$\Rightarrow /$ Ya visto

$\Leftarrow /$ $\pi \cap \pi' = \varnothing \Longrightarrow \dim(\pi \circ \pi') = 1 + \dim_K(U + U')$. Por otro lado, $\pi \circ \pi' \subset \mathbb{A} \Longrightarrow \dim(\pi \circ \pi') \leq 3$. Así,

$$\left.\begin{aligned} \Longrightarrow \dim_K(U + U') \leq 2 \\ \dim_K(U) = \dim_K(U') \\ U \subset U + u' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow U = U + u' = u' \Longrightarrow \pi || \pi'$$

(c) Sean $L = P + \langle\{v\}$ y $\pi = Q + U$ un plano tal que $L \not\subset \pi$

$\Rightarrow /$ Ya probada

$\Leftarrow /$ $L \cap \pi' = \varnothing$. Por Grassmann, $\dim(L \circ \pi) = 1 + \dim_K(\langle\{v\} + U\rangle)$. Como $L \circ \pi \subset A$, entonces $\dim(L \circ \pi) \leq 3$. Así, $\dim_K(\langle\{v\} + U\rangle) \leq 2 \Longrightarrow v \in U$.

(d) $\Rightarrow /$ Sean $L = P + \langle\{u\}\rangle$ y $L' = Q + \langle\{u\}\rangle$ paralelas, $L \neq L'$. Ya sabemos que $L \cap L' = \varnothing$, queda ver que son coplanarias. Como $L \cap L' = \varnothing$, $\dim(L \circ L') = 1 + \dim_K(\langle\{u\}\rangle) \Longrightarrow \dim(L \circ L') = 2$. Por tanto, $L, L' \subset L \circ L'$ es un plano.

$\Leftarrow /$ Si $L = P + \langle\{u\}\rangle$ y $L' = Q + \langle\{v\}$ son distintas y coplanarias. Tomamos el plano π como el plano afín en el que trabajan. Tenemos dos rectas que no se cortan en el plano afín, por tanto son paralelas $(L||L')$.

Observación

En el apartado (d) hemos probado que si L y L' son rectas paralelas distintas, entonces $L \circ L'$ es un plano. Además, si $L \circ L' \subset \pi$ es un plano, entonces $L \circ L' \subset \pi \Longrightarrow \pi = L \circ L'$, es decir, por dos rectas pasa un único plano.

1.5. Referencias afines y coordenadas

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. En esta sección se introducen coordenadas en el espacio afín $\mathbb{A}$ y se estudian las ecuaciones lineales de las variedades lineales de $\mathbb{A}$.

1.5.1. Definición - Puntos afinmente independientes

Se dice que $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}$ son afinmente independientes si los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son linealmente independientes.

1.5.2. Proposición - Propiedades de los puntos afinmente independientes

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V.

(1) Sean $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{A}$. Son equivalentes:

  (a) $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes.

  (b) $\dim P_1 \circ \ldots \circ P_r = r - 1$.

  (c) $P_i \notin P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P_i} \circ \ldots \circ P_r, i = 1, \ldots, r$, donde con $\widehat{P_i}$ indicamos que se elimina el punto P_i.

(2) Los puntos $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes si, y solo si, los puntos $P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(r)}$ son afínmente independientes para toda permutación $\sigma \in S_r$.

(3) Si $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes y $P \notin P_1 \circ \ldots \circ P_r$, entonces los puntos $P_1, \ldots P_r, P$ son afínmente independientes.

(4) Si $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes, entonces $P_1, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_r$ son afínmente independientes.

Demostración

(1) (a) $\iff$ (b). Se tiene que

$$P_1 \circ \ldots \circ P_r = P_1 + \langle \{\overrightarrow{P_1P_2}\}, \ldots, \{\overrightarrow{P_1P_r}\}\rangle$$

Por tanto,

$$P_1 \circ \ldots \circ P_r \text{ son a.i. } \xLeftrightarrow{\text{definición}} \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \text{ son l.i. } \iff$$
$$\iff \dim_K(\langle \{\overrightarrow{P_1P_2}\}, \ldots \{\overrightarrow{P_1P_r}\}\rangle) = r-1 \iff \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = r-1$$

(b) $\iff$ (c). Sea $i \in \{2, \ldots r\}$.

$$\begin{aligned} &P_1, \ldots P_2 \text{ son a.i. } \iff \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \text{ son l.i. } \iff \\ &\iff \overrightarrow{P_1P_i} \notin \langle \{\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{P_1P_i}}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\} \iff \\ &\iff P_i \notin P_1 + \langle \{\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{P_1P_i}}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\} \iff \\ &\iff P_i \notin P_1 \circ \ldots \widehat{P_i} \circ \ldots \circ P_r \end{aligned}$$

En caso de que $i = 1$, reordenamos usando (2).

(2) $P_1 \circ \ldots \circ P_r = \langle\langle \{P_1, \ldots, P_r\}\rangle\rangle = P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(r)}$, de donde

$$r - 1 = \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \dim(P_{\sigma(1)}, \ldots, P_{\sigma(r)})$$

(3)

$$\begin{aligned} &P \notin P_1 \circ \ldots \circ P_r \Longrightarrow \notin P_1 + \langle \{\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\}\rangle \iff \\ &\iff \overrightarrow{P_1P} \notin \langle \{\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}\}\rangle \iff \\ &\iff \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots \overrightarrow{P_1P_r}, \overrightarrow{P_1P} \text{ son l.i. } \iff \\ &\iff P_1, \ldots, P_2, P \text{ son a.i.} \end{aligned}$$

(4) Supongamos que $i \neq 1$. Si $i = 1$, reordenamos usando (2).

$$\begin{aligned} &P_1, \ldots, P_r \text{ son a.i. } \xLeftrightarrow{\text{definición}} \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots \overrightarrow{P_1P_r} \text{ son l.i. } \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow P_1, \ldots, \widehat{\overrightarrow{P_1P_i}}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \text{ son l.i. } \iff \\ &\iff P_1, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_r \text{ son a.i.} \end{aligned}$$

1.5.3. Proposición - Relación entre ser afines y ser no alineados

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Entonces,

(1) Dos puntos $P_1, P_2 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, $P_1 \neq P_2$.

(2) Si $\dim(\mathbb{A}) \geq 1$, tres puntos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, son no alineados.

(3) Si $\dim(\mathbb{A}) \geq 2$, cuatro puntos $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y solo si, son no alineados.

Demostración

(1) Como $P_1 \neq P_2$, entonces $\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0 \Longleftrightarrow P_1 + \langle\{\overrightarrow{P_1P_2}\}\rangle \dim(P_1 \circ P_2) = 1 \Longleftrightarrow P_1, P_2$ son afínmente independientes.

(2) $\Rightarrow$ / Por contrarrecíproco. Si P_1, P_2, P_3 son alineados $\Longrightarrow \exists L \subset \mathbb{A}$ recta $/\, P_1, P_2, P_3 \in L \Longrightarrow P_1 \circ P_2 \circ P_3 \subset L \Longrightarrow \dim P_1 \circ P_2 \circ P_3 \leq 1 \Longrightarrow P_1, P_2, P_3$ son afínmente independientes.

$\Leftarrow$ / Reducción al absurdo. Supongamos que P_1, P_2, P_3 no son afínmente independientes. Entonces, $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3) = 1$. Ahora,

- Si $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3) = 1 \Longrightarrow P_1, P_2, P_3 \in P_1 \circ P_2 \circ P_3$ recta. Contradicción.
- Si $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3) = 0 \Longrightarrow P_1 = P_2 = P_3$. Como $\dim_K V \geq 1 \Longrightarrow \exists v \in V \,/\, v \neq 0$. Tomemos $P_1 + \langle\{v\}\rangle = L$ recta. $P_1 = P_2 = P_3 \in L$. Contradicción.

(3) $\Rightarrow$ / Por contrarrecíproco. Si P_1, P_2, P_3, P_4 son alineados $\Longrightarrow \exists \pi \subset \mathbb{A}$ plano $/\, P_1, P_2, P_3, P_4 \in \pi \Longrightarrow P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4 \subset \pi \Longrightarrow \dim P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4 \leq 2 \Longrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4$ son afínmente independientes.

$\Leftarrow$ / Reducción al absurdo. Supongamos que P_1, P_2, P_3, P_4 no son afínmente independientes. Entonces, $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4) \leq 2$. Ahora,

- Si $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4) = 2 \Longrightarrow P_1, P_2, P_3, P_4 \in P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4$ plano. Contradicción.
- Si $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4) = 1 \Longrightarrow P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4$ recta, luego $P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4 = P_1 + \langle\{u\}\rangle,\ u \in V - \{0\}$. Como $\dim_K V \geq 2$, $\exists v \in V \,/\, u, v$ son linealmente independientes. Tomamos $\pi = P_1 + \langle\{u, v\}\rangle$ plano. Es claro que $P_1, P_2, P_3, P_4 \in P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4 \subset \pi$. Contradicción.
- Si $\dim(P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4) = 0 \Longrightarrow P_1 = P_2 = P_3 = P_4$. Como $\dim_K V \geq 2 \Longrightarrow \exists u, v \in V \,/\, u, v$ son linealmente independientes. Tomemos $\pi = P_1 + \langle\{u, v\}\rangle = L$ plano. $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 \in \pi$. Contradicción.

Observación

- Si $\dim \mathbb{A} \geq 1 \Longrightarrow$ dado $P \in \mathbb{A}$, $\exists L \subset \mathbb{A}$ recta $/\, P \in L$.
- Si $\dim \mathbb{A} \geq 2 \Longrightarrow$ dado $P \in \mathbb{A}$, $\exists \pi \subset \mathbb{A}$ recta $/\, P \in \pi$.
- Si $\dim \mathbb{A} \geq 2 \Longrightarrow$ dada $L \subset \mathbb{A}$ recta, $\exists \pi \subset \mathbb{A}$ plano $/\, P \in L$.

Observación

- Si $\dim \mathbb{A} = 0$, entonces P, P, P son no alineados y no coplanarios. Sin embargo, $\dim(P) = 0 \neq 2 \iff P, P, P$ son no afínmente independientes. También, $\dim(P) = 0 \neq 3 \iff P, P, P, P$ son no afínmente independientes.
- Si $\dim \mathbb{A} = 1$, entonces P, P, P, P son no coplanarios pero no son afínmente independientes. Es más, si $P \neq Q$, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ con $P_1 \in \{P, Q\}$ son no coplanarios y no son afínmente independientes.

1.5.4. Proposición - Relación entre número de puntos a.i. y la dimensión de $\mathbb{A}$

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V.

(1) Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, entonces $\mathbb{A}$ tiene $n+1$ puntos afínmente independientes. Es más, el mayor número de puntos afínmente independientes es $n+1$.

(2) Si $P_1, \ldots, P_{n+1}$ son puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes y $\dim \mathbb{A} = n$, entonces $\mathbb{A} = P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}$.

(3) Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n y $P_1, \ldots P_r$, $r \leq n+1$, son puntos afínmente independientes, entonces existen puntos $P_{r+1}, \ldots, P_{n+1}$ tales que $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}, \ldots, P_{n+1}$ son afínmente independientes.

<u>Demostración</u>

(1) Veamos que existen $n+1$ puntos afínmente independientes. Si P es un punto de $\mathbb{A}$ y $(v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V, entonces los puntos $P, P+v_1, \ldots, P+v_n$ son $n+1$ puntos afínmente independientes. Así

$$\left\{\overrightarrow{P, P+v_1}, \ldots, \overrightarrow{P, P+v_n}\right\} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ son l.i.} \Longrightarrow P, P+v_1, \ldots, P+v_n \text{ son a.i.}$$

Por otro lado, sean $P_1, \ldots P_r$ afínmente independientes. Entonces,

$$\dim(P_1 \circ P_r) = r - 1 \leq n \Longrightarrow r \leq n+1$$

(2) Dado que $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}) = n = \dim \mathbb{A}$ y que $P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1} \subset A$, entonces $\mathbb{A} = P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}$.

(3) Sean $P_1, \ldots, P_r$ afínmente independientes. Por definición, $\overrightarrow{P_1, P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1, P_r}$ son $r-1$ vectores linealmente independientes. Como $\dim_K V = r$, $\exists v_r, \ldots, v_n \in V \,/\, \overrightarrow{P_1, P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1 P_r}$, $v_r, \ldots, v_n$ forman una base de $V \Longrightarrow P_1, \ldots, P_r, P_1 + v_r, \ldots, P_1 + v_n$ son $n+1$ puntos afínmente independientes.

<u>**Observación**</u> - Axioma de dimensión

- "Toda recta tiene dos puntos distintos"

- "Todo plano tiene tres puntos distintos no alineados"

Demostración

1. $\mathbb{A}$ recta $\Longrightarrow \exists P, Q \in \mathbb{A}$ afínmente independientes $\Longrightarrow P \neq Q$.
2. $\mathbb{A}$ plano $\Longrightarrow \exists P_1, P_2, P_3$ afínmente independientes tales que son no alineados. Como P_i, P_j con $i \neq j$ son afínmente independientes, $P_i \neq P_j,\ i \neq j$.

Queda probado que todo espacio afín de dimensión 3 tiene 4 puntos distintos no coplanarios, cada 3 no alineados.

Observación - Axioma de intersección plano-plano

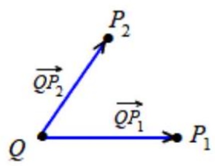
Si dos planos se cortan en al menos un punto en $\dim \mathbb{A} = 3$, entonces hemos visto que se cortan en una recta. Como toda recta tiene 2 puntos distintos, entonces se cortan en al menos otro punto distinto del anterior.

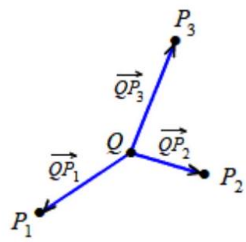
Con esto, ya se han probado todos los axiomas del espacio afín.

1.5.5. Definición - Referencia o referencia afín

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n. Una referencia o referencia afín $\mathcal{R}$ de $\mathbb{A}$ es una $(n+1)$-pla $(P_1, \ldots, P_n, Q)$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ tal que los puntos $P_1, \ldots, P_n, Q$ son afínmente independientes. Escribiremos $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ y diremos que Q es el origen y $B_{\mathcal{R}} = \left(\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_n}\right)$ es la base asociada a $\mathcal{R}$.

Los siguientes dibujos muestran una referencia en el plano y una referencia en el espacio afín tridimensional, respectivamente.





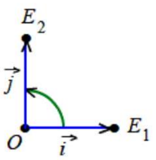
Observación

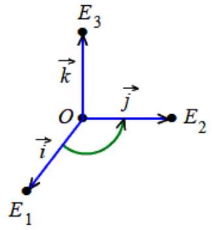
Todo espacio afín tiene, al menos, una referencia.

Ejemplos

(1) La referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario es una terna (E_1, E_2, O) de puntos no alineados tal que las rectas $O \circ E_1$ y $O \circ E_2$ son perpendiculares, los vectores $\vec{i} = \left[\overrightarrow{OE_1}\right]$ y $\vec{j} = \left[\overrightarrow{OE_2}\right]$ tienen módulo 1 y al girar de $\vec{i}$ a $\vec{j}$ siguiendo el menor ángulo resulta un giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

La referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordinario es una cuaterna (E_1, E_2, E_3, O) de puntos no coplanarios tal que las rectas $O \circ E_1, O \circ E_2$ y $O \circ E_3$ son perpendiculares dos a dos, los vectores $\vec{i} = \left[\overrightarrow{OE_1}\right], \vec{j} = \left[\overrightarrow{OE_2}\right]$ y $\vec{k} = \left[\overrightarrow{OE_3}\right]$ tienen módulo 1 y tales que un sacacorchos situado en la dirección de $\vec{k}$ al girar de $\vec{i}$ a $\vec{j}$ siguiendo el menor ángulo avanza en el sentido del vector $\vec{k}$.





(2) La referencia $\mathcal{C} = \{(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1); (0, \ldots, 0)\}$ de K^n se llama referencia canónica de K^n. Su base asociada es la base canónica $C = (e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1))$ de K^n.

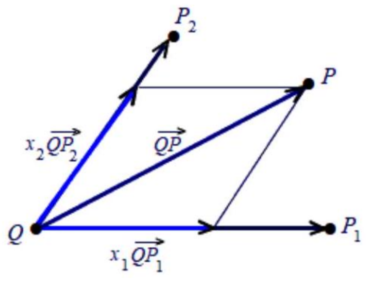
(3) $\{(1, 2), (2, -1); (3, 2)\}$ es una referencia de $\mathbb{R}^2$.

1.5.6. Definición - Coordenadas o coordenadas afines

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$. Se llaman coordenadas o coordenadas afines del punto $P \in \mathbb{A}$ en la referencia $\mathcal{R}$ a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$ de coordenadas del vector $\overrightarrow{QP}$ en la base $B_{\mathcal{R}}$, es decir a la n-pla $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tal que

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{QP_i}$$

El siguiente dibujo ilustra esta definición en el caso $n = 2$.



Ejemplos

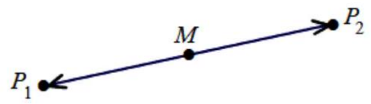
(1) En la referencia canónica $\mathcal{C}$ de K^n, el punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$.

(2) En la referencia $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, -1); (3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$, el punto $P = (0, 5)$ tiene coordenadas $(2, -1)$:

$$2\overrightarrow{QA} - \mathrm{QB} = (-4, 0) + (1, 3) = (-3, 3) = (0, 5) - (3, 2) = \overrightarrow{QP}$$

1.5.7. Definición - Punto medio

Si la característica de K es distinta de 2 , se llama punto medio de los puntos P_1 y P_2 al punto M tal que $\overrightarrow{MP_1} = -\overrightarrow{MP_2}$.



1.5.8. Lema - Condición equivalente al punto medio

Si la característica de K es distinta de 2 , entonces M es el punto medio de P_1 y P_2 si, y solo si, $M = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$ o, equivalentemente, si $M = P_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_1}$.

<u>Demostración</u>

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MP_1} = -\overrightarrow{MP_2} &\iff \overrightarrow{P_1M} = -\overrightarrow{P_2M} \iff \overrightarrow{P_1M} = -\overrightarrow{P_2P_1} - \overrightarrow{P_1M} \\
&\iff 2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2} \iff M = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \\
&\iff M = P_2 + \overrightarrow{P_2P_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_1} \\
&\iff M = P_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_1}
\end{aligned}$$

<u>Observación</u>

M es el punto medio de P_1 y $P_2 \iff M = P_2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_1}$. $M = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \iff M = P_2 + \overrightarrow{P_2P_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - \overrightarrow{P_1P_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} = -P_2 - \frac{1}{2}P_1P_2 = P_2 + \frac{1}{2}P_2P_1$.

1.5.9. Lema - Propiedades de las coordenadas

Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial $V, \mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$.

(1) Si los puntos P y P' tienen coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en $\mathcal{R}$, respectivamente, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PP'}$ en $B_{\mathcal{R}}$ son $(x'_1 - x_1, \ldots, x'_n - x_n)$.

(2) Si el punto P tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y el vector v tiene coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$ en $B_{\mathcal{R}}$, entonces las coordenadas del punto $P+v$ en $\mathcal{R}$ son $(x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n)$.

(3) Si los puntos P y P' tienen coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en $\mathcal{R}$, respectivamente, entonces las coordenadas del punto medio de P y P' en $\mathcal{R}$ son $\frac{1}{2}(x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$.

Demostración

(1) Se tiene

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{QP}, \quad \overrightarrow{QP'} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overrightarrow{QP}, \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{QP'} - \overrightarrow{QP}$$

luego

$$\overrightarrow{PP'} = \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)\, \overrightarrow{QP}$$

(2) Dado que

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{QP}, \quad v = \sum_{i=1}^{n} z_i \overrightarrow{QP}, \quad \overrightarrow{Q, P+v} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P, P+v} = \overrightarrow{QP} + v$$

se tiene

$$\overrightarrow{Q, P+v} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + z_i)\, \overrightarrow{QP}$$

(3) $M = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{Q, P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PP'}} = \overrightarrow{QP}\overrightarrow{P, P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PP'}} = \overrightarrow{QP}\frac{1}{2}\overrightarrow{PP'} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{QP_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)\overrightarrow{QP_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x'_i - x_i}{2}\right) \overrightarrow{QP_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x'_i}{2}\right) \overrightarrow{QP_i}$$

1.5.10. Lema - Punto medio de dos puntos iguales

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre un K espacio vectorial V, con característica distinta de 2. Entonces, si $P_M(P_1, P_2)$ denota el punto medio de $P_1, P_2 \in \mathbb{A}$, se tiene que $P_M(P_1, P_2) = P_1 \iff P_1 = P_2$. En particular, si $P_1 \neq P_2$, entonces $P_1 \neq P_M(P_2, P_2) \neq P_2$.

Demostración

$\Rightarrow /\ P_M(P_1, P_2) = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} = P_1 + 0 \Longrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = 0 \Longrightarrow P_1 = P_2$.

$\Leftarrow /\ P_1 = P_2 \iff P_M(P_1, P_2) = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} = P_1$.

1.5.11. Corolario - Mínimo de puntos de $\mathbb{A}$

En las condiciones anteriores, si $\mathbb{A}$ es una recta, entonces $\mathbb{A}$ tiene al menos 3 puntos distintos.

Demostración

Sabemos que $\exists P_1, P_2 \in \mathbb{A}, P_1 \neq P_2$. Así, $P_3 = P_M(P_1P_2) \,/\, P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_1$.

Ejemplo

$\mathbb{Z}_3$ es una recta y tiene 3 puntos:

$$\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}, \quad P_M(0,1) = 2,\ P_M(1,2) = 0,\ P_M(2,0) = 1$$

1.5.12. Definición - Matriz de cambio de base

Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$ y $B' = (v_1', \dots, v_n')$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$\overrightarrow{QP'} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j, \quad i = 1, \dots, n$$

La matriz

$$\mathrm{Id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama matriz de cambio de base de B' a B.

1.5.13. Proposición

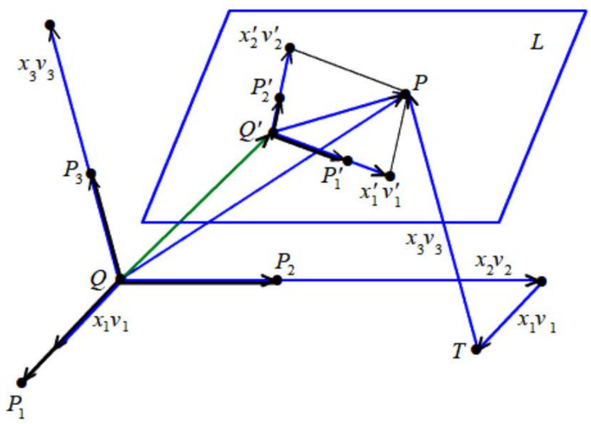
Sean L una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R} = \{P_1, \dots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R}' = (P_1', \dots, P_r'; Q')$ una referencia de L. Supongamos que $(a_1, \dots, a_n)$ son las coordenadas de Q' en $\mathcal{R}$ y que

$$Q_j'P_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{QP_i}, \quad j = 1, \dots, r$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ y $(x_1', \dots, x_r')$ en $\mathcal{R}'$, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_r' \end{pmatrix}$$

Esta expresión se denomina ecuación matricial del cambio de coordenadas de los puntos de L de la referencia $\mathcal{R}'$ a la referencia $\mathcal{R}$.



Demostración

Dado que $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'P}$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{QP_i} &= \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{QP_i} + \sum_{j=1}^{r} x'_j v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{QP_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overrightarrow{QP_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\overrightarrow{QP_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}x'_j\right)\overrightarrow{QP_i}\end{aligned}$$

de donde se sigue

$$x_i = a_i + \sum_{j=1}^{r} a_{ij}x'_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.5.14. Teorema - Cambio de coordenadas.

Sean $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ y $\mathcal{R}' = \{P'_1, \ldots, P'_n; Q'\}$ referencias de $\mathbb{A}$. Sea P un punto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la referencia $\mathcal{R}$ y coordenadas $(x'_1, \ldots, x'_n)$ en la referencia $\mathcal{R}'$. Si $\left(\mathrm{Id}_{B_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}}}\right) = (a_{ij})$ es la matriz de cambio de base de $B_{\mathcal{R}'}$ a $B_{\mathcal{R}}$, entonces

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \left(\mathrm{Id}_{B_{\mathcal{R}'}B_{\mathcal{R}}}\right) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

donde $(b_1, \ldots, b_n)$ son las coordenadas de Q' en $\mathcal{R}$. Esta ecuación se llama ecuación matricial del cambio de coordenadas de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$.

DemostraciónEs un caso particular de la proposición anterior, basta tomar $L = \mathbb{A}$

1.6. Ecuaciones de las variedades lineales

1.6.1. Proposición - Variedad lineal dada por un sistema de ecuaciones lineales

Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$ sobre un K espacio vectorial. Sea $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $(d_1, \ldots, d_n) \in K^m$. El conjunto S de puntos de $\mathbb{A}$ cuyas coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$ son solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n =& d_1 \\ c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n =& d_2 \\ &\vdots \\ c_{m1}x_1 + \ldots + c_{mn}x_n =& d_m \end{aligned}$$

es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Además, si $S \neq \varnothing$, entonces la dimensión de S es n - rango (c_{ij}) y los vectores de la dirección de S son los vectores cuyas coordenadas en $B_{\mathcal{R}}$ son solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al anterior.

Demostración Si $S = \varnothing$, acabamos. Supongamos que $S \neq \varnothing$. Sea $B_{\mathcal{R}} = \left(\overrightarrow{QP_1}, \ldots, \overrightarrow{QP_n}\right) = (v_1, \ldots, v_n)$. Sea $f : V \to K^m$ la aplicación lineal definida por

$$f(v_i) = (c_{1i}, \ldots, c_{mi}), \quad i = 1, \ldots, n$$

Entonces,

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i (c_{1i}, \ldots, c_{mi}) = \left(\sum_{i=1}^n c_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^n c_{mi}x_i\right).$$

Si P es el punto de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, se tiene

$$P \in S \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n c_{ji}x_i = d_j, j = 1, \ldots, m \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n c_{1i}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^n c_{mi}x_i\right) = (d_1, \ldots, d_m),$$

Nótese que $\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Así, $P \in S$ si, y sólo si, $f(\overrightarrow{QP}) = (d_1, \ldots, d_m)$. Si $A \in S$, entonces $S = A + \ker f$, donde $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$; en efecto,

$$P \in S \Longleftrightarrow f(\overrightarrow{QP}) = (d_1, \ldots, d_m) = f(\overrightarrow{QA}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QA} \in \ker f \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} \in \ker f \Longleftrightarrow P \in A + \ker f$$

Por tanto,

$$\dim S = \dim_K \ker f = n - \dim_K f(V) = n - \text{rango}\,(c_{ij}).$$

Además, un vector de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $B_{\mathcal{R}}$ está en la dirección de S, si, y solo si,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = (0,\ldots,0) \Longleftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{n} c_{mi}x_i\right) = (0,\ldots,0),$$

de donde se sigue que unas ecuaciones en la base $B_{\mathcal{R}}$ del subespacio dirección de S son

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ji}x_i = 0, \quad j = 1,\ldots,m$$

1.6.2. Proposición - Ecuaciones paramétricas de una variedad lineal

Sean $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\mathcal{R} = \{P_1,\ldots,P_n;Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}$, $B_{\mathcal{R}} = (v_1,\ldots,v_n)$ y $B_U = \{u_1,\ldots,u_r\}$ una base de U. Supongamos que $(a_1,\ldots,a_n)$ son las coordenadas de A en $\mathcal{R}$ y que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad j = 1,\ldots,r$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in L \Longleftrightarrow \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K \mid x_i = a_i + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij}, \quad i = 1,\ldots,n$$

Los escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ se llaman parámetros.

Demostración Se tiene que $P \in L$ si, y solo si, existe $u \in U$ tal que $P = A+u$, equivalentemente si existen escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K$ tales que

$$P = A + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j u_j$$

Se tiene

$$P \in L \Longleftrightarrow \exists \lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K \mid (x_1,\ldots,x_n) = (a_1,\ldots,a_n) + \lambda_1(a_{11},\ldots,a_{r1}) + \ldots + \lambda_r(a_{1r},\ldots,a_{nr}),$$

y el resultado se sigue igualando coordenadas.

Ejemplo

Unas ecuaciones paramétricas del plano $\Pi = (0,1,1) + \langle (1,1,1),(1,0,2)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$ en la referencia canónica están dadas por

$$(x,y,z) \in \Pi \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = 1 + \lambda_1 \\ z = 1 + \lambda + 2\lambda_2 \end{array}\right.$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Para calcular unas ecuaciones paramétricas del plano Π en la referencia

$$\mathcal{R} = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,1,1);(1,1,1)\}$$

obtenemos que las coordenadas del punto $(0,1,1)$ en $\mathcal{R}$ son $(0,0,1)$, las coordenadas del vector $(1,1,1)$ en $B_{\mathcal{R}} = \{(0,-2,-1),(-1,0,-1),(-1,0,0)\}$ son $(-1/2,-1/2,-1/2)$ y las coordenadas del vector $(1,0,2)$ en $B_{\mathcal{R}}$ son $(0,-2,1)$. Si P es el punto de coordenadas (x',y',z') en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in \Pi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = -(1/2)\lambda_1 \\ y' = -(1/2)\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ z' = 1 - (1/2)\lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, con lo que se tienen unas ecuaciones paramétricas de Π en $\mathcal{R}$.

<u>Otro método</u>

Si $P \in H$ tiene coordenadas (x',y',z') en $\mathcal{R}$ y coordenadas (x,y,z,t) en $\mathbb{R}^4$ con $\mathcal{C}$: Cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{C}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Así,

$$\left. \begin{array}{r} x = x' \\ y = 1 - z' \\ z = y' + z' \end{array} \right\} \Longrightarrow t = 1 - x' - y'$$

son las coordenadas de $B_{\mathcal{R}}$ en $\mathcal{C}$.

1.6.3. Proposición - Ecuaciones lineales o implícitas de una variedad lineal

Sean $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión $r, \mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}, B_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B_U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una base de U. Supongamos que $(a_1, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de A en $\mathcal{R}$ y que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Si P es un punto de L de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{R}$, se tiene

$$P \in L \Longleftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} = r.$$

En particular, si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$P \in L \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r - a_r & a_{r1} & \dots & a_{rr} \\ x_j - a_j & a_{j1} & \dots & a_{jr} \end{vmatrix} = 0, \quad j = r+1, \dots, n.$$

Así, toda variedad lineal de dimensión r en un espacio afín de dimensión n queda determinada por el conjunto de soluciones de un sistema de $n-r$ ecuaciones lineales y n incógnitas, donde el rango de la matriz de coeficientes es $n-r$. Por la proposición 1.2.15, unas ecuaciones del subespacio dirección U de L en la base $B_{\mathcal{R}}$ están dadas por el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado al sistema de ecuaciones lineales de L en $\mathcal{R}$.

Demostración

Se tiene que $P \in L$ si, y solo si, $\overrightarrow{AP} \in U$, es decir,

$$P \in L \Longleftrightarrow \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} \in U \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\, v_i \in \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{i1} v_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ir} v_i \right\rangle$$

luego

$$P \in L \Longleftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix} = r$$

Observación

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y L una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r. El menor número de ecuaciones lineales de un sistema de ecuaciones lineales de L es $n-r$. En efecto, las coordenadas de los puntos de L son el conjunto de soluciones de un sistema de $n-r$ ecuaciones lineales y n incógnitas. Si las coordenadas de los puntos de L fuesen el conjunto de soluciones de un sistema de $m < n-r$ ecuaciones lineales y n incógnitas y $\mathcal{A}$ es la matriz de coeficientes de este sistema, entonces por la proposición 1.2.15, $\dim L = n - \text{rango}\, \mathcal{A} \geq n-m > n-(n-r) = r$.

Ejemplo

Una ecuación lineal del plano $\Pi = (0,1,1) + \langle (1,1,1), (1,0,2) \rangle$ en la referencia canónica se obtiene de la siguiente forma: $(x,y,z) \in \Pi \Longleftrightarrow \text{rango} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dim \Pi = 2 \Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2x - y - z + 2 = 0$. Sea P el punto de coordenadas (x', y', z') en la referencia $\mathcal{R} = \{(1,-1,0), (0,1,0), (0,1,1); (1,1,1)\}$. Una ecuación lineal del plano Π en $\mathcal{R}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$P \in \Pi \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x' & -1/2 & 0 \\ y' & -1/2 & -2 \\ z'-1 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3x' - y' - 2z' + 2 = 0.$$

También se puede calcular una ecuación lineal de Π en $\mathcal{R}$ a partir de su ecuación lineal en la referencia canónica y de las ecuaciones del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia canónica (1,2,14).

EjemploSea H el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ cuya ecuación en la referencia canónica es $x+y+z+t=2$. Sea L la recta de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones en la referencia canónica son

$$L \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 2x+z=4 \\ t=0 \end{cases}$$

Se tiene que $L \subset H$ y que los puntos $(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)$ y $(0,1,0,1)$ son puntos de H afínmente independientes. Vamos a calcular unas ecuaciones lineales de la recta L en la referencia

$$\mathcal{R}=\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1);(0,1,0,1)\}$$

de H. Las coordenadas del punto $(0,-2,4,0)$ de L en $\mathcal{R}$ son $(0,1,3)$ y las coordenadas del vector $(1,1,-2,0)$ de la dirección de L en la base $B_{\mathcal{R}}=\{(1,0,0,-1),(0,0,1,-1),(0,-1,1,0)\}$ son $(1,-1,-1)$. Si P es el punto de coordenadas (x',y',z') en $\mathcal{R}$, entonces

$$P \in L \Longleftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} x' & 1 \\ y'-1 & -1 \\ z'-3 & -1 \end{pmatrix}=1 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x' & 1 \\ y'-1 & -1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} x' & 1 \\ z'-3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

luego

$$P \in L \Longleftrightarrow L \equiv \begin{cases} x'+y'-1=0 \\ x'+z'-3=0 \end{cases}$$

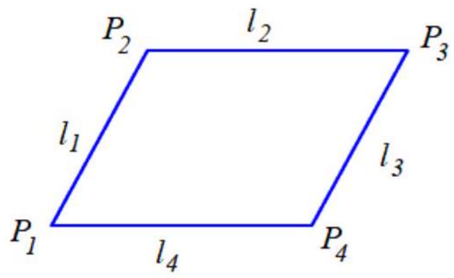
También se pueden calcular unas ecuaciones lineales de L en $\mathcal{R}$ a partir de las ecuaciones de L en la referencia canónica y de las ecuaciones del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ de H a la referencia canónica (proposición 1.2.13). Obsérvese que 3 el número mínimo de ecuaciones lineales de L como variedad lineal de $\mathbb{R}^4$ y que 2 es el número mínimo de ecuaciones lineales de L como variedad lineal de H.

1.6.4. Definición - Paralelogramo

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos distintos y l_1, l_2, l_3 y l_4 cuatro rectas distintas. Se dice que los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 son los vértices del paralelogramo de lados l_1, l_2, l_3, l_4 si se verifican las siguientes condiciones:

(1) $l_1 \| l_3, l_2 \| l_4$.

(2) $l_1 \cap l_4 = \{P_1\}, l_1 \cap l_2 = \{P_2\}, l_2 \cap l_3 = \{P_3\}, l_3 \cap l_4 = \{P_4\}$.



Las longitudes de los lados opuestos de un paralelogramo se pueden comparar, ya que los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos. La siguiente proposición demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo tienen la misma longitud.

1.6.5. Lema - Propiedad del paralelogramo

Sean P_1, P_2, P_3, P_4 los vértices de un paralelogramo. Se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}, \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}$$

<u>Demostración</u>

Dado que $P_1 \circ P_2 \| P_4 \circ P_3$ y $P_1 \circ P_4 \| P_2 \circ P_4$, existen escalares $a, b \in K$ tales que $\overrightarrow{P_1P_2} = a\overrightarrow{P_4P_3}$ y $\overrightarrow{P_1P_4} = b\overrightarrow{P_2P_3}$. Veamos que $a = b = 1$. Por la relación de Chasles,

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_4} + \overrightarrow{P_4P_3}$$

y por lo tanto

$$a\overrightarrow{P_4P_3} + \overrightarrow{P_2P_3} = b\overrightarrow{P_2, P_3} + \overrightarrow{P_4P_3}$$

de donde se sigue

$$(a-1)\overrightarrow{P_4P_3} + (1-b)\overrightarrow{P_2P_3} = 0$$

Dado que $l_2 \cap l_3 = \{P_3\}$, los vectores $\overrightarrow{P_4P_3}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ son linealmente independientes, luego $a = b = 1$.

1.7. Aplicaciones afines

En esta sección consideraremos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Si $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{R}$, el teorema fundamental de la geometría afín [14] afirma que las afinidades de un espacio afín de dimensión finita $n \geq 2$ sobre un espacio vectorial son las aplicaciones biyectivas que llevan puntos alineados en puntos alineados. En esta sección damos la definición algebraica de afinidad y estudiamos sus propiedades algebraicas y geométricas; entre las afinidades de un espacio afín destacan las traslaciones y las homotecias que en espacios afines de dimensión $n \geq 2$ son las aplicaciones biyectivas que llevan cada recta en una recta paralela.

1.8. Grupo afín

1.8.1. Definición

Sean V y V' K-espacios vectoriales, $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre V y V', respectivamente, y O un punto de $\mathbb{A}$. Se dice que una aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es afín si la aplicación $\vec{\alpha} : V \to V'$ definida como

$$\vec{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(O), \alpha(O+v)}, \quad v \in V$$

es una aplicación lineal.

1.8.2. Lema - Independencia del origen y unicidad de $\overrightarrow{\alpha}$

(Independencia del origen y unicidad de $\overrightarrow{\alpha}$). Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, entonces

$$\vec{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)}, \quad v \in V$$

para cada $P \in \mathbb{A}$.

<u>Demostración</u>

Se tiene

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} = \overrightarrow{\alpha(O+\overrightarrow{OP}), \alpha(O+\overrightarrow{OP}+v)} =$$
$$\overrightarrow{\alpha(O+\overrightarrow{OP}), \alpha(O)} + \overline{\alpha(O), \alpha(O+\overrightarrow{OP}+v)} =$$
$$= -\vec{\alpha}(\overrightarrow{OP}) + \vec{\alpha}(\overrightarrow{OP}+v) = \vec{\alpha}(v).$$

1.8.3. Definición - Aplicación lineal asociada

Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, la aplicación lineal $\vec{\alpha} : V \to V'$ se llama la aplicación lineal asociada a α.

Se dice que la aplicación afín $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es un isomorfismo de espacios afines o afinidad si existe una aplicación afín $\beta : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ tal que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ y $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathbb{A}'}$ (β es única y se denota α^{-1}. Se denomina inversa de α); los isomorfismos de espacios afines se llaman afinidades. Se dice que los espacios afines $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son isomorfos si existe una afinidad $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$.

1.8.4. Lema - Propiedad de $\overrightarrow{\alpha}$

Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín, entonces $\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ})$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

Demostración

Si $v = \overrightarrow{PQ}$, se tiene $\vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P + \overrightarrow{PQ})} = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)}$.

1.8.5. Proposición - Propiedades de las aplicaciones afines

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente.

(1) Si A es un punto de $\mathbb{A}$, A' un punto de $\mathbb{A}'$ y $f : V \to V'$ una aplicación lineal, entonces la aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$ es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es f, y además $\alpha(A) = A^{'}$.

(2) Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación afín y $A \in \mathbb{A}$, entonces $\alpha(P) = \alpha(A) + \vec{\alpha}(\overrightarrow{AP})$, para cada $P \in \mathbb{A}$.

(3) Toda aplicación afín $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ está determinada conocida la imagen de un punto y su aplicación lineal asociada.

Demostración

(1) La aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$ es una aplicación afín. En efecto, para cada $v \in V$,

$$\vec{\alpha}(v) = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} = \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AP}), A' + f(\overrightarrow{A, P+v})} = -f(\overrightarrow{AP}) + f(\overrightarrow{A, P+v}) = f(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{A, P}$$

(2) Dado que $\overrightarrow{\alpha(A), \alpha(P)} = \vec{\alpha}(\overrightarrow{AP})$, se tiene que $\alpha(P) = \alpha(A) + \vec{\alpha}(\overrightarrow{AP})$.

(3) Se sigue de (2).

Ejemplo

La aplicación afín $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\alpha(1,0,1) = (2,-1,1,0)$ y cuya aplicación lineal asociada es $\vec{\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \vec{\alpha}(x,y,z) = (x, 2y - z, 0, x + y + z)$, es la aplicación dada por

$$\alpha(x,y,z) = (2,-1,1,0) + \vec{\alpha}(x-1, y, z-1) = (2,-1,1,0) +$$
$$+ (x-1, 2y-z+1, 0, x+y+z-2) = (1+x, 2y-z, 1, -2+x+y+z).$$

1.8.6. Proposición - Más propiedades de las aplicaciones afines

1. Si $\alpha : \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ y $\beta : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ son aplicaciones afines, entonces $\beta \circ \alpha$ es una aplicación afín con $\overrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} = \vec{\alpha_2} \circ \vec{\alpha_1}$.

2. $\mathrm{Id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín con $\overrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{A}}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{V}}$.

3. Si α es una afinidad, entonces α^{-1} también es una afinidad.

4. El conjunto

$$G(\mathbb{A}) = \{\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid \alpha \text{ afinidad } \}$$

es un grupo con la operación composición.

<u>Demostración</u>

1. Para cada $v \in V$,

$$(\overrightarrow{\beta \circ \alpha})(v) = \overrightarrow{(\beta \circ \alpha)(P), (\beta \circ \alpha)(P + v)} = \overrightarrow{\beta(\alpha(P)), \beta(\alpha(P) + \vec{\alpha}(v))} =$$
$$= \vec{\beta}(\vec{\alpha}(v)) = (\vec{\beta} \circ \vec{\alpha})(v),$$

luego $\overrightarrow{\beta \circ \alpha} = \vec{\beta} \circ \vec{\alpha}$ es una aplicación lineal.

2. La aplicación identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $\mathrm{id}_{\mathbb{A}}(P) = P$ para cada $P \in P$, es una aplicación afín con aplicación lineal asociada id_V.

3. Simetría en la definición de isomorfismo.

4. Se sigue de (1) y (2).
El grupo $(G(\mathbb{A}), \circ)$ se llama grupo afín de $\mathbb{A}$ y se denota simplemente por $G(\mathbb{A})$.

1.8.7. Proposición - Condiciones equivalentes a afinidad

Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Son equivalentes:

1. α es una afinidad,

2. α es una aplicación biyectiva,

3. $\vec{\alpha}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

<u>Demostración</u>

- (1) $\Rightarrow$ (2) Trivial.

- (2) $\Rightarrow$ (3) Veamos que $\vec{\alpha}$ es inyectiva. Sea $v \in V$ tal que $\vec{\alpha}(v) = 0$. Se tiene

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(P+v)} = \vec{\alpha}(\overrightarrow{P, P+v}) = \vec{\alpha}(v) = 0$$

luego $\alpha(P+v) = \alpha(P)$. Por ser α inyectiva, $P = P+v$, y por la proposición 1,1,2(7) y (9), $v = 0$. Para probar que $\vec{\alpha}$ es suprayectiva tomamos $v' \in V'$. Si $P' \in \mathbb{A}'$, por la definición 1.1.1 (2), existe un punto $Q' \in \mathbb{A}'$ tal que $v' = \overrightarrow{P'Q'}$. Sean $P, Q \in \mathbb{A}$ tales que $\alpha(P) = P'$ y $\alpha(Q) = Q'$. Entonces

$$v' = \overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ})$$

- (3) $\Rightarrow$ (1) Sean $A \in \mathbb{A}$ y $\beta : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ la aplicación afín dada por

$$\beta(P') = A + \vec{\alpha}^{-1}\left(\overrightarrow{\alpha(A), P'}\right), \quad P' \in \mathbb{A}'$$

β es la única aplicación afín tal que $\beta(\alpha(A)) = A$ y la aplicación lineal asociada es $\vec{\alpha}^{-1}$.

Sea $P \in \mathbb{A}$

$$\begin{gathered} \beta \circ \alpha(P) = \beta(\alpha(P)) := A + \vec{\alpha}^{-1}(\overrightarrow{\alpha(A), \alpha(P)}) = \\ A + \vec{\alpha}^{-1}\vec{\alpha} = A + \overrightarrow{AP} = P = Id_{\mathbb{A}}(P) \end{gathered}$$

Sea $P' \in \mathbb{A}'$

$$\alpha \circ \beta(P') = \alpha(A + \vec{\alpha}^{-1}(\overrightarrow{\alpha(A), \alpha(P')})) =$$

no llegué a copiar

1.8.8. Proposición - Translación

1. Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V y $v \in V$. La aplicación traslación por el vector v, dada por

$$\begin{aligned} t_v : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ P &\longmapsto P + v, \end{aligned}$$

se denomina traslación por el vector v, y es una afinidad.

2. Si $\alpha : \mathbb{A} \longleftarrow \mathbb{A}$ es una aplicación afín con $\vec{\alpha} = Id_V$, entonces es una traslación.

3. El conjunto

$$T(\mathbb{A}) = \{t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid v \in V\}$$

es un grupo abeliano con la operación composición. En particular:

- $t_0 = Id_{\mathbb{A}}$
- $t_v \circ t_w = t_{v+w}$
- $t_{-v} = t_v^{-1}$

Demostración

1. Si O es un punto de $\mathbb{A}$, entonces

$$\overrightarrow{t_v}(w) := \overrightarrow{t_v(O), t_v(O+w)} = \overrightarrow{O+v, O+w+v} = w, \quad w \in V$$

Así, t_v es una aplicación afín cuya aplicación lineal asociada es id V; además, t_v es una afinidad, puesto que $(t_v)^{-1} = t_{-v}$ es una aplicación afín.

2. Para cada $P, Q \in \mathbb{A}$ sabemos que

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \vec{\alpha}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}$$

Relación del paralelogramo

$$\overrightarrow{P, \alpha(P)} = \overrightarrow{Q, \alpha(Q)} = v$$

y v no depende del punto escogido, solo de α

$$\alpha(P) = P + \overrightarrow{P, \alpha(P)} = P + v - t_v(P), \forall P \in \mathbb{A}$$

3. Se sigue de las siguientes igualdades: $t_{v+v'} = t_{v'} \circ t_v, \quad t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}\, \mathrm{y} t_{-v} = (t_v)^{-1}$. Habría que demostrarlas

El grupo $(T(\mathbb{A}), \circ)$ se llama grupo de traslaciones de $\mathbb{A}$ y se denota por $T(\mathbb{A})$.

1.8.9. Lema - Relación entre translaciones y la identidad

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V y $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación afín. Si $\vec{\alpha} = \mathrm{Id}_V$, entonces α es una traslación.

Demostración. Para cada $P, Q \in \mathbb{A}$,

$$\overrightarrow{\alpha(P), \alpha(Q)} = \overrightarrow{PQ}$$

y por la relación del paralelogramo,

$$\overrightarrow{P,\alpha(P)} = \overrightarrow{Q,\alpha(Q)}$$

Pongamos $v = \overrightarrow{P,\alpha(P)}$,

$$\alpha(P) = P + \overrightarrow{P,\alpha(P)} = P + v = t_v(P), \quad P \in \mathbb{A}.$$

1.8.10. Teorema - Isomorfismo entre los grupos $G(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})$ y $GL(V)$

Los grupos $G(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})$ y $GL(V)$ son isomorfos.

Demostración

Tomamos

$$\begin{aligned} \phi : G(\mathbb{A}) &\longrightarrow GL(V) \\ \alpha &\longmapsto \vec{\alpha} \end{aligned}$$

ϕ es un homomorfismo de grupos ya que

$$\phi(\beta \circ \alpha) = \overrightarrow{\beta \circ \alpha} = \vec{\beta} \circ \vec{\alpha} = \phi(\beta) \circ \phi(\alpha)$$

Es sobreyectiva ya que dado $f \in GL(V)$ y $A \in \mathbb{A}$, entonces $\alpha(P) = A + f(\overrightarrow{AP})$ es una afinidad con $\vec{\alpha} = f$

Veamos que $Ker(\phi) = T(\mathbb{A})$. Si $\alpha \in Ker(\phi) \longleftrightarrow \phi\alpha = Id_V \longleftrightarrow \alpha \in T(\mathbb{A})$ luego G es sobreyectiva de grupos y $G/Ker(f)$ y H son isomorfos.

Ejemplos

1. Si $L = P + U$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces la aplicación inclusión $i_L : L \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín; su aplicación lineal asociada es la aplicación inclusión $i_U : U \to V$.

2. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial $V, \mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$ y $B_{\mathbb{R}} = (v_1, \ldots, v_n)$. La aplicación

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{R}} : \mathbb{A} &\longrightarrow K^n \\ P &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n)\,, \end{aligned}$$

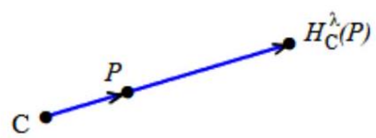
donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de P en $\mathcal{R}$, es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es la aplicación

$$\overrightarrow{\alpha_{\mathcal{R}}} : V \longrightarrow K^n$$
$$\sum_{i=1}^{n} z_i v_i \longmapsto (z_1, \ldots, z_n)\,.$$

En particular, si $\mathbb{A}$ es el plano (espacio) afín ordinario y $\mathcal{C}$ es la referencia canónica, la afinidad $\alpha_{\mathcal{C}}$ permite identificar el plano (espacio) ordinario con $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$).

3. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, C un punto de $\mathbb{A}$ y $\lambda \in K, \lambda \neq 0$. Se llama homotecia de centro C y razón λ a la aplicación

$$H_C^\lambda : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$P \longmapsto C + \lambda\overrightarrow{CP}.$$



La aplicación $\lambda\,\mathrm{id}_V : V \to V, (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$, es un isomorfismo de espacios vectoriales y $H_C^\lambda(P) = C + (\lambda\,\mathrm{id}_V)(\overrightarrow{CP})$. Por las proposiciones 1,3,5 (1) y 1,3,9(1), H_C^λ es una afinidad.

4. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y $f : V \to V'$ una aplicación lineal. La aplicación f considerada como aplicación entre los espacios afines de V y V' es una aplicación afín. En efecto,

$$\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(0), f(0+v)} = f(v) - f(0) = f(v), \quad v \in V$$

donde 0 es el vector cero de V.

5. Si V y V' son espacios vectoriales, $v' \in V'$ y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces $t_{v'} \circ f$ es una aplicación afín entre los espacios afines de V y V', respectivamente, por ser composición de aplicaciones afines. Recíprocamente, si $\alpha : V \to V'$ es una aplicación afín, entonces existe un vector $v' \in V'$ tal que $\alpha = t_{v'} \circ \vec{\alpha}$. En efecto, por la proposición 1.3.5 (2),

$$\alpha(P) = \alpha(0) + \vec{\alpha}(\overrightarrow{0P}) = \left(t_{\alpha(0)} \circ \vec{\alpha}\right)(P), \quad P \in V.$$

Basta tomar $v' = \alpha(0)$.

1.8.11. Proposición - Afinidades, puntos afínmente independientes y variedades lineales

1. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente, $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' = n$. Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín y $P_1, \ldots, P_{n+1}$ puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes. Entonces α es una afinidad si, y solo si, $\alpha(P_1), \ldots, \alpha(P_{n+1})$ son puntos afínmente independientes.

2. Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín. Se tiene:

   a) Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\alpha(L) \subset \mathbb{A}$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$.

   b) Si α es una afinidad y L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\dim \alpha(L) = \dim L$.

   c) Si $\{L_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

   $$\alpha(\circ_{i\in I} L_i) = \circ_{i\in I} \alpha(L_i)$$

   y si α es una afinidad,

   $$\alpha\left(\bigcap_{i\in I} L_i\right) = \bigcap_{i\in I} \alpha(L_i)$$

   d) Si α es una afinidad y L_1 y L_2 son variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces

   $$L_1 \| L_2 \Longleftrightarrow \alpha(L_1) \| \alpha(L_2)$$

<u>Demostración</u>

1. Sean $P_1, \ldots, P_{n+1}$ puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes. Dado que α es una afinidad si, y solo si, $\vec{\alpha}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, y que $\vec{\alpha}$ es un isomorfismo si, y solo si, los vectores

   $$\vec{\alpha}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_2)}, \ldots, \vec{\alpha}\left(\overrightarrow{P_1P_{n+1}}\right) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_{n+1})}$$

   son linealmente independientes, α es una afinidad si, y solo si, los puntos $\alpha(P_1), \ldots, \alpha(P_{n+1})$ son afínmente independientes.

2. *a*) Si $L = A + U$, entonces $\alpha(L) = \alpha(A) + \vec{\alpha}(U)$.

   b) Si α es una afinidad, $\dim L = \dim_K U = \dim_K \vec{\alpha}(U) = \dim \alpha(L)$.

   c) Dado que

   $$\circ_{i\in I} L_i = A + \left\langle \overrightarrow{AP} \mid P \in \bigcup_{i\in I} L_i \right\rangle, \quad A \in \bigcup_{i\in I} L_i$$

   se tiene

$$\alpha\left(\circ_{i\in I}L_i\right)=\alpha(A)+\left\langle \vec{\alpha}(\overrightarrow{AP})\mid P\in\bigcup_{i\in I}L_i\right\rangle=$$
$$\alpha(A)+\left\langle \overrightarrow{\alpha(A),\alpha(P)}\mid \alpha(P)\in\bigcup_{i\in I}\alpha\left(L_i\right)\right\rangle=\circ_{i\in I}\alpha\left(L_i\right).$$

Si α es una afinidad, entonces $\alpha\left(\bigcap_{i\in I}L_i\right)=\bigcap_{i\in I}\alpha\left(L_i\right)$, puesto que α es inyectiva.

d) Sean $L_1=A+U_1, L_2=B+U_2$ y α una afinidad. Entonces

$$L_1\|L_2\Longleftrightarrow U_1\subset U_2 \text{ o } U_2\subset U_1\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \vec{\alpha}\left(U_1\right)\subset\vec{\alpha}\left(U_2\right)\ \text{o}\ \vec{\alpha}\left(U_2\right)\subset\vec{\alpha}\left(U_1\right)\Longleftrightarrow\alpha\left(L_1\right)\|\alpha\left(L_2\right).$$

El conjunto

$$GL(V)=\{f:V\to V\mid f \text{ isomorfismo de espacios vectoriales }\}$$

es un grupo con la operación composición. El grupo $(GL(V),\circ)$ se llama grupo lineal general de V y se denota por $GL(V)$.

1.8.12. Teorema - Clasificación de los espacios afines

(1) Todo espacio afín $(\mathbb{A},V,\to)$ es isomorfo al espacio afín de V $(V,V,\to)$.

(2) Dos espacios afines de igual dimensión finita son isomorfos.

(3) El espacio afín $\mathbb{K}^n$ es, salvo isomorfismos, el único espacio afín de dimensión n.

Demostración

(1) Como $\mathbb{A}\neq\varnothing$, fijemos un punto A de $\mathbb{A}$. La aplicación $\alpha_A:\mathbb{A}\to V$ dada por $\alpha_A(P)=\overrightarrow{AP}$ es una afinidad, En efecto,

$$\overrightarrow{\alpha_A}(v)=\overrightarrow{\alpha_A(P),\alpha_A(P+v)}=\alpha_A(P+v)-\alpha_A(P)=\overrightarrow{A,P+v}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{P,P+v}=v$$

Así, $\overrightarrow{\alpha_A}=\mathrm{id}_V$

(2) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de la misma dimensión sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Por (1), existen afinidades $\alpha:\mathbb{A}\to V$ y $\beta:\mathbb{A}'\to V'$. Puesto que V y V' tienen la misma dimensión, existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f:V'\to V$, y por tanto la aplicación $\beta^{-1}\circ f\circ\alpha:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ es una afinidad por composición.

(3) $dim_K V=n\Longrightarrow\exists f:V\longrightarrow K^n$ isomorfismo de espacios (y por tanto afinidad). Por tanto, $f\circ\alpha_A:\mathbb{A}\longrightarrow K^n$ es afinidad por composición.

1.8.13. Proposición - Isomorfismo entre espacios vectoriales y afines

Si $\mathbb{A}$ es espacio afín sobre V, el grupo afín de $\mathbb{A}$ es isomorfo al grupo lineal de V.

Demostración

Dado $\varphi : \mathbb{A} \longrightarrow V$ afinidad, es un isomorfismo la aplicación

$$\psi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow G(V) \Longrightarrow \alpha \longmapsto \psi \circ \alpha \circ \psi^{-1}$$

1.9. Determinación de una aplicación afín

1.9.1. Teorema.

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$ y $P_1', \ldots, P_{n+1}'$ puntos de $\mathbb{A}'$. Existe una única aplicación afín $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tal que $\alpha(P_i) = P_i', i = 1, \ldots, n$, y $\alpha(Q) = P_{n+1}'$. En particular, si $\dim \mathbb{A}' = n$y $P_1', \ldots, P_n', P_{n+1}'$ son puntos afínmente independientes, entonces α es una afinidad.

DemostraciónConsideremos la aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow V' \\ \overrightarrow{QP}_i &\longmapsto \vec{P}_{n+1}'P_i', \end{aligned}$$

y la aplicación afín

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A}' \\ P &\longmapsto P_{n+1}' + f(\overrightarrow{QP}). \end{aligned}$$

Se tiene

$$\alpha(P_i) = P_i', \quad \alpha(Q) = P_{n+1}', \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sea β otra aplicación afín tal que $\beta(P_i) = P_i', i = 1, \ldots, n$, y $\beta(Q) = P_{n+1}'$. Entonces

$$\overrightarrow{P_{n+1}'P_i'} = \overrightarrow{\beta(Q), \beta(P_i)} = \vec{\beta}\left(\overrightarrow{QP}_i\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

Por tanto, $\vec{\beta} = f$ y por la proposición 1.3.5 (3), $\beta = \alpha$. Por la proposición 1.3.9 (2), Si $\dim \mathbb{A} = n$ y $P_1', \ldots, P_n', P_{n+1}'$ son afínmente independientes, por la proposición 1,3,9 (2) se tiene que α es una afinidad.

1.9.2. Corolario.

Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia afín de $\mathbb{A}$. Se tiene:

1. Si $\alpha, \beta : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ son aplicaciones afines tales que $\alpha(P_i) = \beta(P_i), i = 1, \ldots, n$, y $\alpha(Q) = \beta(Q)$, entonces $\alpha = \beta$.
2. Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín tal que $\alpha(P_i) = P_i, i = 1, \ldots, n$, y $\alpha(Q) = Q$, entonces $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$.

1.9.3. Ejemplo.

Existe una única aplicación afín $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(1,0,0) = (2,1,2), \alpha(1,1,0) = (2,0,2), \alpha(0,1,-1) = (1,1,1)$ y $\alpha(0,0,0) = (1,0,2)$, puesto que los puntos $(1,0,0), (1,1,0), (0,1,-1)$ y $(0,0,0)$ son afínmente independientes. La aplicación lineal asociada a α es la aplicación $\vec{\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\vec{\alpha}(1,0,0) = (1,1,0), \vec{\alpha}(1,1,0) = (1,0,0), \vec{\alpha}(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Se tiene que $\vec{\alpha}(x,y,z) = (x, x-y-2z, z)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\alpha(x,y,z) &= \alpha(0,0,0) + \vec{\alpha}(x,y,z) \\ &= (1,0,2) + (x, x-y-2z, z) = (1+x, x-y-2z, 2+z).\end{aligned}$$

Además, α es una afinidad, puesto que los puntos $(2,1,2), (2,0,2), (1,1,1)$ y $(1,0,2)$ son afínmente independientes.

1.9.4. Proposición.

Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación afín, $L \in \mathbb{A}$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r y α deja fijos $r+1$ puntos afínmente independientes de L, entonces α deja fijos todos los puntos de L.

<u>Demostración</u>Sean $L = A + U$ y $P_1, \ldots, P_{r+1}$ puntos de L afínmente independientes y tales que $\alpha(P_i) = P_i$, para $i = 1, \ldots, r+1$. Se tiene que $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$ y entonces, por la proposición 1.3.9 (3) (c), $\alpha(L) = \alpha(P_1) \circ \ldots \circ \alpha(P_{r+1}) = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1} = L$. Veamos que $\alpha_{|L} : L \to L$ es una aplicación afín. Dado que

$$\overrightarrow{\alpha_{|L}}(u) = \overrightarrow{\alpha(P_1), \alpha(P_1+u)} = \vec{\alpha}_{|U}(u), \quad u \in U$$

$\alpha_{|L}$ es una aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{\alpha}_{|U}$. Por el corolario 1,3,15(2), $\alpha_{|L} = \mathrm{id}_L$.

1.9.5. Ejemplo.

Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la referencia canónica es $y-2z=2$. Vamos a calcular la afinidad $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que deja fijos los puntos del plano Π y tal que $\alpha(1,0,0) = (0,0,0)$.

La aplicación buscada es la aplicación afín dada por

$$\alpha(1,2,0) = (1,2,0), \quad \alpha(0,0,-1) = (0,0,-1), \quad \alpha(0,2,0) = (0,2,0), \quad \alpha(1,0,0) = (0,0,0).$$

Su aplicación lineal asociada es la aplicación $\vec{\alpha} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\vec{\alpha}(0,2,0) = (1,2,0), \quad \vec{\alpha}(-1,0,-1) = (0,0,-1), \quad \vec{\alpha}(-1,2,0) = (0,2,0),$$

equivalentemente, $\vec{\alpha}(x,y,z) = (x + 1/2y - z, y, z)$, luego

$$\alpha(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \vec{\alpha}(x-1,y,z) = (-1 + x + 1/2y - z, y, z)$$

La afinidad α deja fijos los puntos de Π, puesto que deja fijos los puntos $(1,2,0), (0,0,-1)$ y $(0,2,0)$, que son tres puntos de Π afínmente independientes.

1.9.6. Definición (recordatorio).

Sean V y V' espacios vectoriales sobre $K, B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V y $B' = (v'_1, \dots, v'_m)$ una base de V'. Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal y

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v'_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

la matriz

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

se llama matriz asociada a f respecto a las bases B y B'. Si $V = V'$ y $B = B'$ denotaremos $f_{BB'}$ por f_B.

1.9.7. Definición (Ecuaciones de una aplicación afín).

Sean:

- V un espacio vectorial de dimensión n y V' un espacio vectorial de dimensión m.
- $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre V y V', respectivamente, y $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación afín.
- $\mathcal{R} = \{P_1, \dots, P_n; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}, \mathcal{R}' = \{P'_1, \dots, P'_m; Q\}$ una referencia de $\mathbb{A}'$, con $B_{\mathcal{R}} = (v_1, \dots, v_n)$ y $B_{\mathcal{R}'} = (v'_1, \dots, v'_m)$ sus bases asociadas.
- (a_{ij}) la matriz asociada a $\vec{\alpha}$ respecto a las bases $B_{\mathcal{R}}$ y $B_{\mathcal{R}'}$.
- $(x_1, \dots, x_n)$ las coordenadas del punto $P \in \mathbb{A}$ en $\mathcal{R}$ y $(x'_1, \dots, x'_m)$ las coordenadas de $\alpha(P)$ en $\mathcal{R}'$.

Entonces

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $(b_1, \dots, b_m)$ son las coordenadas de $\alpha(Q)$ en $\mathcal{R}'$. Esta ecuación se llama ecuación matricial de la aplicación afín α en las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$.

Demostración

$$\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad \overrightarrow{Q'\alpha(P)} = \sum_{i=1}^{m} x'_i v'_i, \quad \vec{\alpha}\,(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v'_i, j = 1, \dots, n$$

Puesto que $\overrightarrow{Q'\alpha(P)} = \overrightarrow{Q'\alpha(Q)} + \overrightarrow{\alpha(Q)\alpha(P)} = \overrightarrow{Q'\alpha(Q)} + \vec{\alpha}(\overrightarrow{QP})$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} x'_i v'_i = \sum_{i=1}^{m} b_i v'_i + \vec{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i v'_i + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v'_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) v'_i,$$

de donde se sigue

$$x'_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

Como consecuencia, se obtiene la ecuación del cambio de coordenadas ya estudiado en 1.2.14. En efecto, la ecuación del cambio de coordenadas de la referencia $\mathcal{R}$ a la referencia $\mathcal{R}'$ es la ecuación de la afinidad $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ en las referencias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$. Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}, \mathcal{R}'$ es una referencia de L y $\mathcal{R}$ es una referencia de $\mathbb{A}$, la ecuación de cambio de coordenadas de los puntos de L de la referencia $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$ es la ecuación de inclusión $i_L : L \to \mathbb{A}$ en las referencias $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}$.

2. EJEMPLOS DE AFINIDADES. DILATACIONES

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre un espacio vectorial $V, \dim \mathbb{A} \geq 2$.

1.3.21. Definición. ([11, p. 37]) Se dice que $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una dilatación si D es una aplicación biyectiva tal que para toda recta L de $\mathbb{A}$ se tiene que $\alpha(L)$ es una recta y $\alpha(L) \| L$.

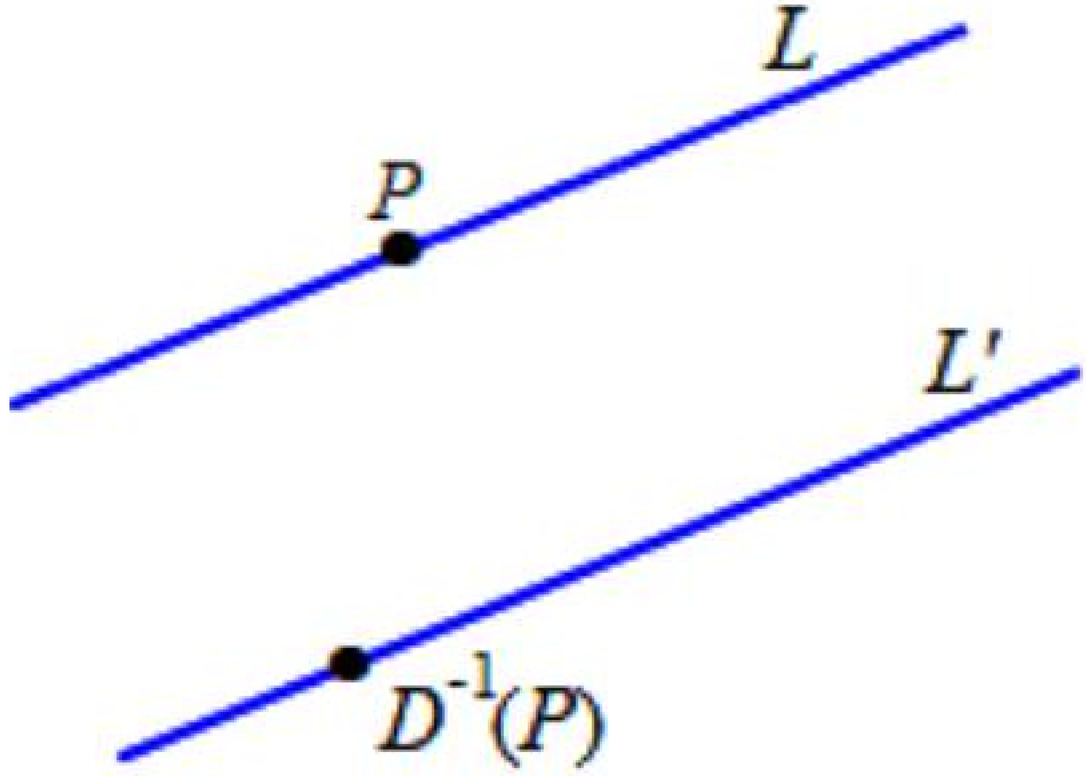
Denotaremos por $\mathrm{Di}(\mathbb{A})$ el conjunto de todas las dilataciones del espacio $\mathbb{A}$.

1.3.22. Proposición. El conjunto $\mathrm{Di}(\mathbb{A})$ es un grupo con la operación composición.

Demostración. Si $D_1, D_2 \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$, entonces $D_2 \circ D_1$ es una aplicación biyectiva. Además, si L es una recta de $\mathbb{A}, D_1(L)$ es una recta paralela a L, por ser D_1 una dilatación y $D_2\left((D_1(L)\right) \| D_1(L)$, por ser D_2 una dilatación. Por la transitividad de la relación de paralelismo en el conjunto de rectas de $\mathbb{A}$, $\left(D_2 \circ D_1\right)(L) \| L$. Luego $D_2 \circ D_1 \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$.

Claramente, $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$.

Sea $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$ y veamos que $D^{-1} \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$. Sea L una recta de $\mathbb{A}$ y $P \in L$. Por el axioma de paralelismo existe una única recta L' tal que $D^{-1}(P) \in L'$ y $L' \| L$. Por ser D una dilatación, $D\left(L'\right)$ es una recta paralela a L' y pasa por $D\left(D^{-1}(P\right) = P$. Por el axioma de paralelismo, $L = D\left(L'\right)$. Así, $D^{-1}(L) = L'$, luego $D^{-1}(L) \| L$.



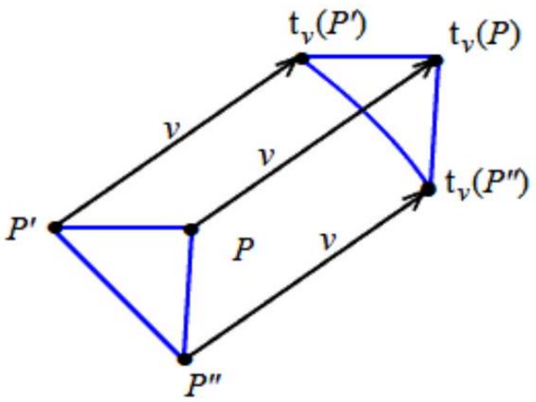
1.3.23. Proposición. Sea $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad y $\lambda \in K, \lambda \neq 0$.Si$\vec{\alpha} = \lambda \mathrm{id}_V$, entonces α es una dilatación; en particular, las traslaciones y las homotecias de $\mathbb{A}$ son dilataciones.

Demostración. Si $\lambda\,\mathrm{id}_V$ es la aplicación lineal asociada a α y $L = A + \langle v \rangle$ es una recta de $\mathbb{A}$, entonces

$$\alpha(L) = \alpha(A) + \langle \lambda v \rangle = \alpha(A) + \langle v \rangle$$

luego $\alpha(L)$ es una recta paralela a L.

1.3.24. Definición. Una configuración o figura en $\mathbb{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{A}$. Se dice que dos figuras en $\mathbb{A}$ son homotéticas si existe una dilatación que lleva una figura en la otra. Los dos triángulos en azul de la figura de la izquierda son homotéticos y los dos triángulos en azul de la



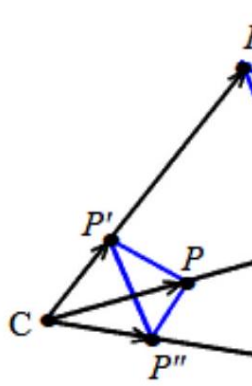


figura de la derecha también lo son.

1.3.25. Lema. Si $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$ y L_1 y L_2 son rectas de $\mathbb{A}$ paralelas, entonces las rectas $D(L_1)$ y $D(L_2)$ son paralelas.

Demostración. Dado que $D(L_1) \| L_1, L_1 \| L_2$ y $L_2 \| D(L_2)$, por la transitividad del paralelismo en rectas se tiene $D(L_1) \| D(L_2)$.

1.3.26. Teorema. Si $D \in \mathrm{Di}(\mathbb{A})$, entonces existe $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, tal que D es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\lambda \mathrm{id}_V$.

Demostración. Sean $v \in V$ y $P \in \mathbb{A}$. Consideremos la aplicación $\vec{D} : V \to V$ dada por

$$\vec{D}(v) = \overrightarrow{D(P), D(P+v)}, \quad v \in V$$

Veamos que $\vec{D}$ no depende del punto $P \in \mathbb{A}$. Si $v = 0$

$$\overrightarrow{D(P), D(P+0)} = \overrightarrow{D(P), D(P)} = 0, \quad P \in \mathbb{A}$$

Sea $v \neq 0$ y sean $P, Q \in \mathbb{A}$. Veamos que:

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}$$

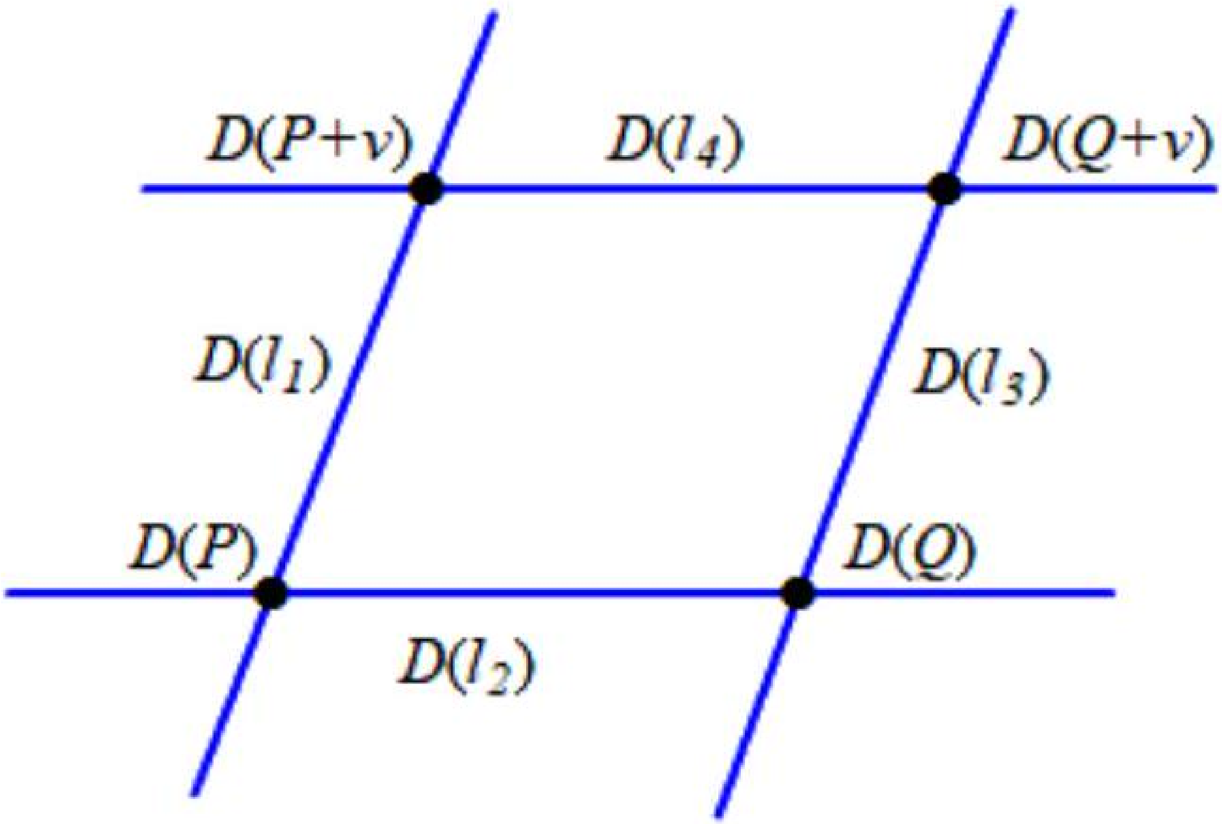
Caso 1: Si $Q \notin P + \langle v \rangle = l_1$, se tiene

$$l_1 = P \circ (P+v) \| l_3 = Q \circ (Q+v), \quad l_2 = P \circ Q \| l_4 = (P+v) \circ (Q+v), \quad l_1 \neq l_3, \quad l_2 \neq l_4,$$
$$l_1 \cap l_2 = \{P\}, \quad l_2 \cap l_3 = \{Q\}, \quad l_3 \cap l_4 = \{Q+v\}, \quad l_1 \cap l_4 = \{P+v\}.$$

Por el lema 1.3.25, puesto que D lleva rectas a rectas,

$$D(l_1) = D(P) \circ D(P+v) \| D(l_3) = D(Q) \circ D(Q+v),$$
$$D(l_2) = D(P) \circ D(Q) \| D(l_4) = D(P+v) \circ D(Q+v).$$

Por la definición 1.2.22, los puntos $D(P), D(P+v), D(Q+v)$ y $D(Q)$ son los vértices del paralelogramo de lados $D(l_1), D(l_4), D(l_3)$ y $D(l_2)$



y entonces, por la proposición 1,2,23,

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}$$

Caso 2: Si $Q \in P + \langle v \rangle$, dado que $\dim \mathbb{A} = n \geq 2$, existe $R \notin P + \langle v \rangle = Q + \langle v \rangle$. Por el caso 1,

$$\overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \overrightarrow{D(R), D(R+v)} = \overrightarrow{D(Q), D(Q+v)}.$$

Puesto que $D(l_1) \| l_1$, existe $\lambda_v \in K$ tal que

$$\vec{D}(v) = \overrightarrow{D(P), D(P+v)} = \lambda_v v$$

Veamos que para todo $w \in V - \{0\}, \lambda_w = \lambda_v$. Si v y w son vectores linealmente independientes

$$\lambda_{v+w}(v+w) = \overrightarrow{D(P), D(P+v+w)} = \overrightarrow{D(P), D(P+v)} + \overrightarrow{D(P+v), D(P+v+w)} = \lambda_v v + \lambda_w w$$

luego $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$. Si v y w son linealmente dependientes, entonces $\langle v \rangle = \langle w \rangle$ y como $\dim V \geq 2$, existe $u \in V$ tal que $u \notin \langle v \rangle$. Los vectores u y v son linealmente independientes y u y w también lo son. Así, $\lambda_v = \lambda_u = \lambda_w$. Por tanto, si $\lambda = \lambda_v$ (cualquiera que sea $v \neq 0$), se tiene $\vec{D} = \lambda \operatorname{id}_V$.

1.3.27. Corolario. Una aplicación $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una dilatación si, y solo si, D es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\lambda \operatorname{id}_V$, para algún $\lambda \in K, \lambda \neq 0$.

Demostración. Se sigue de la proposición 1.3.23 y del teorema 1.3.26.

1.3.28. Proposición. Sea D una dilatación con isomorphismo lineal asociado $\lambda \operatorname{id}_V : V \to V$. Se tiene:

(1) Si $\lambda = 1$, entonces D es una traslación.

(2) Si $\lambda \neq 1$, entonces D es una homotecia distinta de $id_{\mathbb{A}}$. El punto fijo de D es el centro y el escalar λ es la razón. Demostración. (1) Si $\lambda = 1$, entonces la aplicación lineal asociada a D es id_V. Por el lema 1.3.10, $D = t_v$, donde $v = \overrightarrow{P, D(P)}$ para todo $P \in \mathbb{A}$

(2) Si $\lambda \neq 1$, entonces el único punto fijo de D es el punto $C = A + (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A}$, siendo A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. En efecto,

$$\begin{aligned} D(P) = P &\Longleftrightarrow D(A) + \lambda\overrightarrow{AP} = P \Longleftrightarrow \overrightarrow{D(A), P} = \lambda\overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{D(A), A} + \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AP} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{D(A), A} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AP} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AP} = (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A} \\ &\Longleftrightarrow P = A + (\lambda - 1)^{-1}\overrightarrow{D(A), A}. \end{aligned}$$

Por la proposición 1,3,5(2),

$$D(P) = C + (\lambda \operatorname{id}_V)(\overrightarrow{CP}) = C + \lambda\overrightarrow{CP} = H_C^{\lambda}(P), \quad P \in \mathbb{A}$$

1.3.29. Ejemplo. Vamos a calcular la dilatación $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $D(1, 1, -1) = (1, 1, 1)$ y $D(0, 2, 2) = (3, -1, -5)$

Las dilataciones de $\mathbb{R}^3$ son afinidades cuya aplicación lineal asociada es la aplicación

$$\begin{aligned} \lambda 1_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Por ser D una aplicación afín,

$$\vec{D}((0,2,2)-(1,1,-1)) = D(0,2,2) - D(1,1,-1)$$

luego

$$\vec{D}(-1,1,3) = (2,-2,-6) = (-2)(-1,1,3)$$

Por tanto, $\lambda = -2$ y entonces D es una homotecia de razón -2. Se tiene

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= D(1,1,-1) - 2(x-1, y-1, z+1) = (1,1,1) + (2-2x, 2-2y, -2-2z) \\ &= (3-2x, 3-2y, -1-2z). \end{aligned}$$

El centro de α es el único punto fijo de α, es decir el punto $(1,1,-1/3)$.

2.1. Ejercicios.

(1) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n \geq 4$ sobre un espacio vectorial. Estudia cuales de las propiedades de incidencia de (1.1.28) relativas a puntos, rectas y planos se verifican en $\mathbb{A}$.

(2) Prueba que si L_1 y L_2 son rectas del espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión $n \geq 3$ sobre un espacio vectorial, entonces L_1 y L_2 se cruzan si, y solo si, no son coplanarias.

(3) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n \geq 2$ sobre un espacio vectorial, L una variedad lineal y P un punto de $\mathbb{A}$. Prueba que si $P \notin L$, entonces $\dim(L \circ P) = 1 + \dim L$.

3. ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

En este tema se introduce el concepto de producto escalar en un espacio vectorial real, que generaliza el concepto de producto escalar usual de vectores libres del plano o espacio. Trasladaremos a los espacios vectoriales euclídeos las nociones de longitud de un vector y ángulo entre dos vectores, de forma que se conserven las propiedades que tienen en el espacio vectorial de los vectores libres.

Probaremos la existencia de bases ortonormales en un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Las transformaciones ortonormales de un espacio vectorial euclídeo son las aplicaciones lineales que conservan el producto escalar o, equivalentemente, la longitud de los vectores. Se estudian y clasifican las transformaciones ortogonales de un plano y de un espacio vectorial euclídeo tridimensional.

3.1. Preliminares

3.1.1. Definición

Sean $u, v \in V$. Se dice que son ortogonales si $u \cdot v = 0$.

3.1.2. Definición

Sea $v \in V$, definimos la "norma.º longitud de v, y la denotamos $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$. Decimos que v es unitario si $||v|| = 1$.

<u>Cuestión:</u> ¿Es esta longitud con la "normaüna norma "de verdad¿

3.1.3. Definición

Una norma en V es una aplicación $|| \cdot || : V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo:

1. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.
2. $||\lambda \cdot v|| = |\lambda| \cdot |||v|| \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $||v|| > 0, \forall v \in V - \{0\}$.

3.1.4. Teorema (Propiedades de una norma).

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces:

1. $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) $|u \cdot v| = ||u|| \cdot ||v||$.
4. (Desigualdad Triangular) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.
5. (Teorema de Pitágoras) Si $u \cdot v = 0$, $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

<u>Demostración</u>

1.
2.

3. Si $u = 0$ o $v = 0$, es trivial. Supongamos que no es el caso. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos:
$$||\lambda u - v||^2 = (\lambda u - v)(\lambda u - v) = \lambda^2 ||u||^2 + ||v||^2 - 2\lambda u \cdot v \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2\lambda u \cdot v \leq \lambda^2 ||u||^2 + ||v||^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}/u, v \neq 0.$$
Tomemos $\lambda = \frac{u \cdot v}{||u||^2}$
$$2\frac{u \cdot v}{||u||^2} u \cdot v \leq \left(\frac{u \cdot v}{||u||^2}\right) ||u||^2 + ||v||^2 \Longrightarrow |u \cdot v| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$
Cuestión: ¿Cuándo se da la igualdad en C-S?

Ejemplo: Encontrar el máximo de la función
$$\begin{aligned} f: \ \$^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = x + 2y + 3z \end{aligned}$$
Tomemos los vectores (x, y, z) y $|(x, y, z) \cdot (1, 2, 3)| \leq ||(x, y, z)|| \cdot ||(1, 2, 3)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Lo borró T_T.

4. $||u+v||^2 = (u+v)(u+v) = u \cdot u + v \cdot v + 2u \cdot v \leq u \cdot u + v \cdot v + |2u \cdot v| = ||u||^2 + ||v||^2 + 2|u \cdot v| \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| \, ||v||$.

5. $||u + v||^2 = |u \cdot u + v \cdot v + 2uv| = ||u||^2 + ||v||^2$.

   La igualdad en (4): $2uv = 2||u|| \, ||v||$. Si tenemos la igualdad en (4), entonces la tenemos en (3). Si el ángulo entre u y v es 0, entonces $u \cdot v = ||u|| \, ||v||$. Ahora, si
$$u, v \neq 0 \Longrightarrow -||u|| \, ||v|| \leq u \cdot v \leq ||u|| \, ||v|| \Longrightarrow -1 \leq \frac{u \cdot v}{||u|| \, ||v||} \leq 1$$
   Ahora, sea $cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$. Definimos $\angle(u, v)$ como el único número real tal que
$$cos(\angle(u, v)) = \frac{u \cdot v}{||u|| \, ||v||}$$
   La igualdad se da cuando $||\lambda u - v||^2 \Longleftrightarrow \lambda u - v = 0 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \, / \, v = \lambda u \Longleftrightarrow u$ y v son linealmente independientes.

   Cuestión: Decidir si $\sigma : VxV \longrightarrow \mathbb{R}$ es producto escalar.
   Objetivo: encontrar bases "buenas"de V.

3.1.5. Definición.

Sea (V, σ) euclídeo, decimos que la base $\{v_1, ..., v_n\}$ de V es ortonormal si $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$.

Ejemplo: Base canónica de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

3.1.6. Propiedad 1.

Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$||x|| = \sqrt{\sum x_i^2}$$

Con $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ producto escalar usual, su matriz de Gram es la identidad:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$$

3.1.7. Propiedad 2.

Sea $\{v_1, ..., v_n\}$ un conjunto e vectores no nulos y ortogonales dos a dos. Entonces, son linealmente independientes.

<u>Demostración</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in \{1, ..., n\}$$
$$v_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right) = \lambda_j v_j \cdot v_j \Longrightarrow \lambda_j = 0$$

3.1.8. Teorema (Método de ortogonalización de Gram-Schmidt)

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si $B = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base, entonces

$$v_1 = u_1$$
$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{u_i \cdot v_j}{||v_j||^2} v_j, i \in \{2, ..., n\}$$

forma una base ortogonal de V.

<u>Demostración</u>
Inducción (ejercicio).

<u>Observación</u>
B base es una hipótesis innecesaria, se puede partir de un conjunto de vectores linealmente independientes y obtener otro conjunto linealmente independiente de la misma cardinalidad.

3.1.9. Teorema

Sea (V, σ) un espacio vectorial euclídeo de dirección finita. Entonces, existe una base ortonormal.

Demostración
$B \longrightarrow B'$ ortogonal (Gram-Schmidt). $B' = \{v_1, ..., v_n\}$, $B'' = \{\frac{v_1}{||v_1||}, ..., \frac{v_n}{||v_n||}\}$. Se tiene que:

$$\frac{v_i}{||v_i||} \cdot \frac{v_j}{||v_j||} =$$

Abrir llave grande: 0 si $i \neq j$ y $\frac{v_j \cdot v_i}{||||}$

3.1.10. Corolario

Sea (V, σ) un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Entonces:

$$G_\sigma^B \ Id$$
$$G_\sigma^B = P^t Id P$$

Consecuencia: Dos espacios vectoriales euclídeos son isométricos $\Longleftrightarrow$ tienen la misma dimensión.

Cuestión: Cuándo es (V,σ) un esp. vec. simétrico?

- σ fuese simétrica (G_σ^B simétrica).
- σ sea definida positiva ($\sigma(v, v) = v \cdot v > 0 \forall v \in v - \{0\}$).

3.1.11. Recordatorio: Propiedades de los determinantes

1. Al cambiar dos columnas de la matriz, cambia el signo.
2. Multiplicar una columna por un escalar es multiplicar el determinante por el escalar.
3. Lineal en cada componente.
4. $det(Id) = 1$
5. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$

Observación: Se puede pensar en el determinante en $\mathbb{R}^2$ como el área que forman los vectores columna de la matriz. De la misma forma, en $\mathbb{R}^3$ sería el volumen.

3.1.12. Teorema de Sylvester.

Sea (V, σ) un espacio vectorial dotado de una aplicación bilineal simétrica, $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V, y $G_\sigma^B = (g_{ij})$ la matriz de Gram asociada. Entonces, σ es definida positiva $\Longleftrightarrow det\Delta_i > 0, \forall i \in \{1, ..., n\}$, donde

$$\Delta_i = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i1} & \cdots & g_{ii} \end{pmatrix}$$

me cansé, al pdf original

3.2. Espacios vectoriales euclídeos

3.2.1. Definición.

Sea V un espacio vectorial real. Se dice que una aplicación $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto escalar en V si verifica las siguientes condiciones:

1. σ es una aplicación bilineal o una forma bilineal, es decir:
   a) $\sigma(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 \sigma(v_1, w) + \lambda_2 \sigma(v_2, w), \quad v_1, v_2, w \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
   b) $\sigma(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \sigma(v, w_1) + \lambda_2 \sigma(v, w_2), \quad v, w_1, w_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
2. σ es simétrica, es decir $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$, para todo $v, w \in V$,
3. σ es definida positiva:
   a) $\sigma(v, v) \geq 0$, para todo $v \in V$,
   b) $\sigma(v, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0$.
   Si σ es un producto escalar, denotaremos con frecuencia $\sigma(u, v)$ por $u \cdot v$.
   Un espacio vectorial euclídeo es un par (V, σ), donde V es un espacio vectorial real y σ es un producto escalar en V. Lo denotaremos por (V, σ) o simplemente por V.

3.2.2. Ejemplos.

(1) Sean V_2 y V_3 los espacios vectoriales reales de los vectores libres del plano y del espacio ordinario, respectivamente. La aplicación $\sigma_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}, i = 2, 3$, dada por

$$\sigma_i(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \quad \vec{u} = \overrightarrow{0} \quad \text{o} \quad \vec{v} = \overrightarrow{0}, \\ |\vec{u}||\vec{v}| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v}), \quad \text{si } \vec{u} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{y} \quad \vec{v} \neq \overrightarrow{0}, \end{cases}$$

donde $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ es el ángulo no orientado entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (es decir, el menor de los ángulos que forman un representante $\overrightarrow{OP_1}$ de $\vec{u}$ y un representante $\overrightarrow{OP_2}$ de $\vec{v}$), es un producto escalar en V_i, para $i = 2, 3$. Por tanto, (V_i, σ_i) es un espacio vectorial euclídeo para $i = 2, 3$.
(2) La aplicación $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$\sigma\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, que llamaremos producto escalar usual. Así, $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual es un espacio vectorial euclídeo.

(3) En el espacio vectorial $\mathbb{R}[X]$ de polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la aplicación $\sigma : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(F(X), G(X)) = \int_a^b F(x)G(x)dx, \quad F(X), G(X) \in \mathbb{R}[X]$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}[X]$. La bilinealidad de σ se sigue de las propiedades de la integral definida. Claramente, σ es simétrica y es definida positiva, puesto que

$$\sigma(F(X), F(X)) = \int_a^b F(x)^2 dx \geq 0$$

y $F^2(-) : [a, b] \to \mathbb{R}, F^2(x) = (F(x))^2$, es una función continua no negativa que se anula a lo sumo en un número finito de puntos de $[a, b]$. ($\mathbb{R}[X], \sigma)$ es un ejemplo de espacio vectorial euclídeo que no tiene dimensión finita.

(4) Si (V, σ) es un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma_U : U \times U &\to \mathbb{R} \\ (u, u') &\longmapsto \sigma(u, u') \end{aligned}$$

es un producto escalar en U. Así, todo subespacio U de un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial euclídeo con el producto escalar σ_U inducido.

Vamos a introducir el concepto de matriz de Gram de una forma bilineal, ya que facilita el estudio del producto escalar y permitirá utilizar el criterio de Sylvester para determinar cuando una forma bilineal simétrica es definida positiva.

2.1.3. Definición. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se llama matriz de Gram de σ respecto a la base B a la matriz

$$G_\sigma^B = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

donde $g_{ij} = \sigma(v_i, v_j)$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

2.1.4. Observación. Sea $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base de V. Si $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n, w = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$ son vectores de V y $G_\sigma^B = (g_{ij})$ es la matriz de Gram de σ respecto a B, entonces

$$\sigma(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} G_\sigma^B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2.1.5. Definición. Sea K un cuerpo y C y D matrices $n \times n$ sobre K. Se dice que C y D son congruentes, si existe una matriz regular $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{P}^t C \mathcal{P} = D$, donde $\mathcal{P}^t$ es la matriz traspuesta de la matriz $\mathcal{P}$.

La relación "ser congruentes.$^{\text{en}}$ el conjunto de matrices $n \times n$ sobre K es una relación de equivalencia.

2.1.6. Proposición. Sea V un espacio vectorial euclídeo, $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots v'_n\}$ bases de V y sean

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i, \quad j = 1, \ldots, n$$

Si $\mathcal{P} = \mathrm{id}_{B'B} = (p_{ij})$, entonces

$$G_\sigma^{B'} = \mathcal{P}^t G_\sigma^B \mathcal{P}$$

Así, las matrices G_σ^B y $G_\sigma^{B'}$ son congruentes.

Demostración. Sean $G_\sigma^B = (g_{ij})$ y $G_{\sigma'}^{B'} = \left(g'_{ij}\right)$. Se tiene

$$g'_{ij} = v'_i \cdot v'_j = \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} v_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} p_{lj} v_s\right) = \sum_{k,l=1}^{n} p_{ki} p_{lj} g_{kl}.$$

2.1.7. Proposición. Sea $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal y sea $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base de V. Entonces, la forma bilineal σ es simétrica si, y solo si, la matriz G_σ^B es una matriz simétrica, es decir, si $\left(G_\sigma^B\right)^t = G_\sigma^B$

Demostración. Si σ es simétrica,

$$g_{ij} = \sigma(v_i, v_j) = \sigma(v_j, v_i) = g_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

luego G_σ^B es simétrica. Recíprocamente, si $g_{ij} = g_{ji}$, para $i, j = 1, \ldots, n, v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$y $w = y_1v_1 + \ldots + y_nv_n$, se tiene

$$\sigma(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ji}y_jx_i = \sigma(w, v).$$

2.1.8. Definición. Sean (V, σ) y (V', σ') espacios vectoriales euclídeos. Se dice que una aplicación $f : V \to V'$ es una isometría si verifica

(1) f es un isomorfismo de espacios vectoriales reales,

(2) $\sigma(v, w) = \sigma'(f(v), f(w)$, para todo $v, w \in V$.

Sean (V, σ) y (V', σ') vectoriales euclideos. Se dice que (V, σ) y (V', σ') son isométricos si existe una isometría $f : V \to V'$.

2.1.9. Lema. Sean (V, σ) y (V', σ') espacios vectoriales euclídeos de dimensión $n, B = (v_1, \ldots v_n)$ una base de V y $f : V \to V'$ un isomorfismo de espacios vectoriales reales. Se tiene que f es una isometría si, y solo si, $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Demostración. Si f es una isometría, entonces $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Recíprocamente, supongamos que $v_i \cdot v_j = f(v_i) \cdot f(v_j)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, y sean $v, w \in V$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} y_iv_i$$

Entonces

$$f(v) \cdot f(w) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_if(v_i)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_if(v_i)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jf(v_i) \cdot f(v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jv_i \cdot v_j = v \cdot w$$

2.1.10. Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que los vectores u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$.

2.1.11. Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo y v un vector de V. Se llama norma o longitud del vector vy se denota por $\|v\|$ al número real

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

Se dice que un vector v es unitario si $\|v\| = 1$.

Obsérvese que si $v \in V - \{0\}$, entonces el vector $v/\|v\|$ es unitario.

En los espacios vectoriales euclídeos V_2 y V_3 de vectores libres, la longitud de un vector libre es el módulo de ese vector libre, es decir $\|\vec{v}\| = |\vec{v}|$.

2.1.12. Propiedades de la longitud. Sea V un espacio vectorial euclídeo.

(1) $\|v\| = 0$ si, y solo si, $v = 0$.

(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|, \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

(3) $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|, u, v \in V$ (Desigualdad de Cauchy- Schwartz).

(4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, u, v \in V$ (Desigualdad de Minkowski).

(5) Si u y v son vectores ortogonales, entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

Demostración. (1) $\|v\| = 0 \iff v \cdot v = 0 \iff v = 0$.

(2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda v \cdot \lambda v} = \sqrt{\lambda^2(v \cdot v)} = |\lambda|\sqrt{v \cdot v} = |\lambda|\|v\|$.

(3) Si $u = 0$, es trivial. Si $u \neq 0$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\|\lambda u + v\|^2 = (\lambda u + v) \cdot (\lambda u + v) = \lambda^2\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\lambda u \cdot v \geq 0.$$

Tomando

$$\lambda = -\frac{u \cdot v}{\|u\|^2}$$

se obtiene

$$\|\lambda u + v\|^2 = \frac{(u \cdot v)^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2 - 2\frac{(u \cdot v)^2}{\|u\|^2} \geq 0$$

equivalentememte,

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

es decir, $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

(4) Se tiene

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u \cdot v| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

(5) Si $u \cdot v = 0$, entonces $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$, se sigue que $-\|u\|\|v\| \leq u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$, equivalentente,

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Dado que la aplicación cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$ es biyectiva, existe un único número real que denotaremos por $\angle(u, v)$, tal que $0 \leq \angle(u, v) \leq \pi$, y que verifica

$$\cos \angle(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

2.1.13. Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se llama ángulo no orientado entre los vectores no nulos u y v al número real $\angle(u, v), 0 \leq \angle(u, v) \leq \pi$, tal que

$$\cos \angle(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

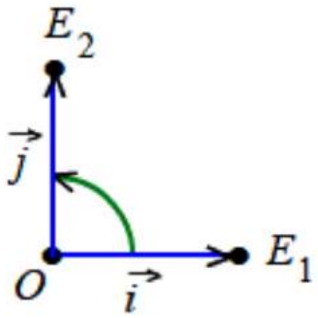
Obsérvese que los vectores no nulos u y v son ortogonales si, y solo si, $\angle(u, v) = \pi/2$.

2.1.14. Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V es ortogonal si $v_i \cdot v_j = 0$, para todo $i \neq j$.

2.1.15. Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V es ortonormal si B es una base ortogonal y los vectores $v_i, i = 1, \ldots, n$, son unitarios, equivalentemente, si $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i = j$.

3.2.3. Ejemplos.

(1) La base $C = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario y la base $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordina-



rio son bases ortonormales de V_2 y V_3, respectivamente.
La base canónica $C = (e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1))$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

2.1.17. Proposition. Sea V un espacio vectorial euclídeo y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ortonormal de V. Si v es un vector de V de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en B, se tiene

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Demostración.

$$v \cdot v = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \left(v_i \cdot v_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \delta_{ij} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

y entonces

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

2.1.18. Lema. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto de vectores no nulos de V ortogonales dos a dos, es decir tales que $v_i \cdot v_j = 0$ si $i \neq j$, entonces S es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Demostración. Se tiene

$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\right) \cdot v_j = 0, j = 1, \ldots, r \Rightarrow \lambda_j \left(v_j \cdot v_j\right) = 0, j = 1, \ldots, r \Rightarrow \lambda_j = 0, j = 1, \ldots, r.$

Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, el método de ortogonalización de GramSchmidt permitirá construir un base ortogonal de V a partir de una base cualquiera de V.

2.1.19. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si $u_1, \ldots, u_r$ son vectores linealmente independientes, entonces los vectores que se obtienen de la forma:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 \\
v_3 &= u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\
v_r &= u_r - \frac{u_r \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_r \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \ldots - \frac{u_r \cdot v_{r-1}}{v_{r-1} \cdot v_{r-1}} v_{r-1}
\end{aligned}
$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, r$$

Demostración. Razonaremos por inducción sobre el número r de vectores linealmente independientes. Para $r = 1$ es trivial. Supongamos $r \geq 2$ y que el resultado es cierto para $r - 1$. Sean $u_1, \ldots, u_r$ vectores linealmente independientes. Por hipótesis de inducción, los vectores

$$v_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{u_j \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i, \quad j = 1, \ldots, r-1$$

son linealmente independientes, ortogonales dos a dos y verifican

$$\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, r-1$$

Pongamos

$$v_r = u_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i$$

Se tiene que $v_r \neq 0$ y además

$$v_r \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{u_r \cdot v_i}{v_i \cdot v_i} v_i \cdot v_j = u_r \cdot v_j - \frac{u_r \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j \cdot v_j = 0, \quad j = 1, \ldots, r-1.$$

Por el lema 2.1.18, los vectores $v_1, \ldots, v_r$ son linealmente independientes y $v_1, \ldots, v_r \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, luego $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$.

2.1.20. Teorema. Todo espacio vectorial euclídeo (V, σ) de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Demostración. Si $\dim V = n$, por el teorema de estructura de espacios ortogonales reales o aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a una base cualquiera $(u_1, \ldots, u_n)$ de V, se obtiene que existe una base ortogonal $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de V. Poniendo

$$w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \quad i = 1, \ldots, n$$

se obtiene que la base $B' = (w_1, \ldots, w_n)$ es una base ortonornal de V.

2.1.21. Lema. Si (V, σ) es un espacio vectorial euclídeo y B es una base de V, entonces la matriz de Gram de σ en B es congruente a la matriz identidad I.

Demostración. Por el teorema 2.1.20, V tiene una base ortonormal B', luego $G_\sigma^{B'} = I$. Por la proposición 2.1.6, G_σ^B es congruente a I.

Aquí empecé a cambiar el pdf

3.2.4. Teorema (Criterio de Sylvester)

Sea $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Si $G_\sigma^B = (g_{ij})$ es la matriz de Gram de σ en B, entonces

$$\sigma \text{ es definida positiva } \iff \Delta_i = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1i} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i1} & g_{i2} & \cdots & g_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

<u>Demostración</u>(No entraría en el examen)

" $\Longrightarrow$ " Supongamos que σ es definida positiva. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base cualquiera de V, $B_j = (v_1, \ldots, v_j), V_j = \langle B_j \rangle, \sigma_j = \sigma_{|_{V_j}}$ y $G_j = G_{\sigma_j}^{B_j}$, para $j = 1, \ldots, n$. Como (V_j, σ_j) es un espacio vectorial euclídeo, en consecuencia, existe una matriz regular $\mathcal{P}_j$ tal que $G_j^{B_j} = \mathcal{P}_j^t I_j \mathcal{P}_j$ (al poder llegar a una base ortonormal), luego $\Delta_j = \det G_j = \det (\mathcal{P}_j)^2 > 0$, para $j = 1, \ldots, n$.

" $\Longleftarrow$ " Para probar el recíproco, razonaremos por inducción sobre la dimensión de V. Si la dimensión de V es 1 , el resultado es cierto trivialmente. Supongamos el resultado cierto para espacios vectoriales de dimensión $n-1$ y veamos que es cierto para espacios vectoriales de dimensión n.

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n, \sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $\Delta_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$. La idea es encontrar una base $\widetilde{B}$ de V tal que $v^t G_\sigma^{\widetilde{B}} v > 0, \forall v \in V - \{0\}$.

Sea $V' = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ y $\sigma' = \sigma_{|_{V'}}$. Dado que $\Delta_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n-1$, por hipótesis de inducción σ' es definida positiva, luego (V', σ') es un espacio vectorial euclídeo. Sea $B' = (w_1, \ldots, w_{n-1})$ una base ortonormal de V'. Pongamos $B'' = (w_1, \ldots, w_{n-1}, v_n)$. Se tiene

$$G_\sigma^{B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}$$

Sabemos que existe una matriz regular Q tal que $G_\sigma^{B''} = \mathcal{Q}^t G_\sigma^B \mathcal{Q}$. Consideremos la matriz

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\mathcal{P}^t G_\sigma^{B''} \mathcal{P} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d), \quad d = c_n - c_1^2 - \ldots - c_{n-1}^2.$$

Sea $\mathcal{T} = \mathcal{QP}$. Entonces $\mathcal{T}^t G_\sigma^B \mathcal{T} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$, luego

$$d = \det(\mathcal{T})^2 \det\left(G_\sigma^B\right) > 0$$

Sea $\widetilde{B}$ la base tal que $\mathcal{T} = id_{\tilde{B}B}$. Se tiene que $G_\sigma^{\widetilde{B}} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d)$. La forma bilineal σ es definida positiva, puesto que si $v \in V - \{0\}$ tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ en la base $\tilde{B}$, entonces

$$v \cdot v = x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2 > 0$$

Ejemplo.
La forma bilineal $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$$

tiene como matriz de Gram en la base canónica $C = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$

$$G_\sigma^C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La forma bilineal σ es simétrica, puesto que $\left(G_\sigma^C\right)^t = G_\sigma^C$. Además,

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \det\left(G_\sigma^C\right) = 1 > 0$$

luego σ es definida positiva, por el criterio de Sylvester. Así, σ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Vamos a calcular una base ortogonal $B' = (w_1, w_2, w_3)$ de $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ (tomando σ como un producto escalar):

$$\begin{aligned}
w_1 &= e_1 = (1,0,0) \\
w_2 &= e_2 - \frac{e_2 w_1}{||w_1||^2} w_1 = (0,1,0) - (-1/2)(1,0,0) = (1/2,1,0) \\
w_3 &= e_3 - \frac{e_3 w_1}{||w_1||^2} w_1 - \frac{e_3 w_2}{||w_2||^2} w_2 = (0,0,1) - (-2)(1/2,1,0) = (1,2,1).
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\sigma(e_3, w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

y de forma análoga se obtiene que $\sigma(w_2, w_2) = 1/2$. La base B' no es ortonormal, puesto que los vectores w_1 y w_2 no son unitarios

$$\|w_1\| = \sqrt{\sigma(w_1, w_1)} = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\sigma(w_2, w_2)} = \sqrt{2}/2, \quad \|w_3\| = \sqrt{\sigma(w_3, w_3)} = 1$$

A partir de B' se obtiene la siguiente base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, \sigma)$:

$$B = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right) = ((\sqrt{2}/2, 0, 0), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}, 0), (1, 2, 1)).$$

3.2.5. Definición

Sean (V, σ) un espacio euclídeo y U y W subespacios de V. Se dice que U es ortogonal a W si $u \cdot w = 0$ para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$.

3.2.6. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U y W subespacios de V. Se dice que la suma $U + W$ es una suma ortogonal y se denota por $U \perp W$, si verifica que $U \cap W = \{0\}$ y U es ortogonal a W (es decir, $u \cdot w = 0$, $\forall u \in U, w \in W$).

3.2.7. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V. El subespacio

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid u \cdot v = 0, \forall u \in U\}$$

se llama subespacio ortogonal a U.

3.2.8. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V de dimensión finita. Se tiene que $V = U \perp U^{\perp}$.

<u>Demostración</u>

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una base ortonormal de U y $v \in V$. Consideremos el vector

$$u = (v \cdot u_1)\, u_1 + \ldots + (v \cdot u_r)\, u_r \in U$$

El vector $v - u \in U^{\perp}$, puesto que, para cada $i = 1, \ldots, r$

$$(v - u) \cdot u_i = v \cdot u_i - u \cdot u_i = v \cdot u_i - v \cdot u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

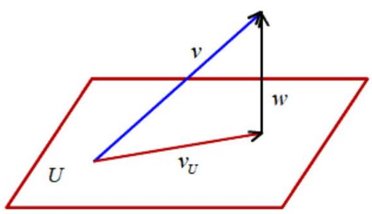
Así, $V = U + U^{\perp}$. Además, si $v \in U \cap U^{\perp}$, entonces $v \cdot v = 0$ y por ser V un espacio vectorial euclídeo, se tiene que $v = 0$. Por tanto $V = U \perp U^{\perp}$.

Los números reales $v \cdot u_i$ se llaman coeficientes de Fourier de v respecto a la base ortonormal B de U.

<u>Observación</u>
Si tenemos una base ortonormal de un espacio euclídeo V, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$. Entonces $x_i = v \cdot v_i$.

3.2.9. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo y U un subespacio de V de dimensión finita. Si $v \in V$ se llama proyección ortogonal de v sobre U al vector $v_U \in U$ tal que $v - v_U \in U^{\perp}$.



Observación
Sea V un espacio vectorial euclídeo, U es un subespacio de V de dimensión finita y v un vector de V. Si $B = (u_1, \ldots, u_r)$ es una base ortonormal de U, entonces

$$v_U = (v \cdot u_1)\, u_1 + \ldots + (v \cdot u_r)\, u_r \in U$$

Veamos un ejemplo de como calcular la proyección ortogonal de un vector sobre un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo
Consideremos el plano vectorial U de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base canónica es $2x + y - z = 0$ y el vector $v = (-3, 1, 1)$. Se tiene

$$U = \big\langle (1,0,2), (0,1,1) \big\rangle, \quad U^\perp = \langle (2,1,-1) \rangle$$

Luego $\mathbb{R}^3 = U \perp U^\perp = \langle (1,0,2), (0,1,1), (2,1,-1) \rangle$. Dado que

$$(-3,1,1) = -(1,0,2) + 2(0,1,1) - (2,1,-1),$$

la proyección ortogonal de v sobre U es el vector

$$v_U = -(1,0,2) + 2(0,1,1) = (-1,2,0).$$

3.3. Producto vectorial

3.3.1. Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Decimos que dos bases B y B' tienen la misma orientación si $\det(\mathrm{Id}_{BB'}) > 0$. En caso contrario, diremos que tienen distinta orientación.

Notación
Se denota por $[B]$ a la clase de equivalencia respecto de la orientación. Diremos que la orientación positiva es la de la base canónica (en el caso de $\mathbb{R}^n$).

Ejemplos

1. La base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ es de orientación positiva.
2. La base $\{(1,0), (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es de orientación positiva.

Observación
El orden en la base importa en este caso, ponemos paréntesis en vez de corchetes: $B = (v_1, \dots, v_n)$.

3.3.2. Definición

Sea $B = (v_1, v_2, v_3)$ una base ortonormal de un espacio V de dimensión 3 y positivamente orientada. Sean $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$. Se define el producto vectorial como

$$u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

3.3.3. Proposición (Propiedades del producto vectorial)

1. Los vectores u y v no nulos son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow u \wedge v = 0$.
2. $u \wedge v$ es ortogonal a u y a v.
3. Si u y v son linealmente independientes, entonces $(u, v, u \wedge v)$ son una base de V positivamente orientado.
4. $||u \wedge v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \operatorname{sen} \angle(u, v) = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \operatorname{sen} \angle(v, u)$.
5. La aplicación

$$\begin{aligned} \wedge : V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longmapsto u \wedge v \end{aligned}$$

es bilineal y antisimétrica.

Demostración

1. u y v son linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ rango $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = 1 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow u \wedge v = 0$
2. $u \cdot (u \wedge v) = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$
3. Como $\{u, v, u \wedge v\}$ son linealmente independientes, forman una base. Es cierto que...

$$¿\lambda u + \beta v + \gamma(u \wedge v) = 0 \Longrightarrow \lambda = \beta = \gamma = 0?$$

Utilizando la propiedad (1):

$$(u \wedge v) = (\lambda u + \beta v + \gamma(u \wedge v)) = 0 \Longrightarrow \gamma(u \wedge v)(u \wedge v) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

Ahora tenemos que ver que está positivamente orientada.

$$\mathrm{Id}_{B'B} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ x_2 & y_2 & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ x_3 & y_3 & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$\det(\mathrm{Id}_{B'B})$

4.

$$\begin{aligned} ||u \wedge v||^2 &= ||u||^2 \cdot ||v||^2 \operatorname{sen} \angle(u, v) \\ &= ||u||^2 \cdot ||v||^2 - ||u||^2 \cdot ||v||^2 \cos \angle(u, v) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \end{aligned}$$

5.

3.3.4. Proposicion

Si u y v son vectores linealmente independientes, entonces $u \wedge v$ está determinado por (2), (3) y (4). Así, $u \wedge v$ no depende de la base ortonormal de orientación positiva escogida.

Demostración
Sea $w \in V$ satisfaciendo (2), (3) y (4).

$$(2) \Longrightarrow \begin{cases} u \cdot w = 0 \\ v \cdot w = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} w \in < u, v >^{\perp} \\ < w > = < u, v >^{\perp} \end{cases}$$

$$\dim(V) = 3 \Longrightarrow < w > = < u \cdot w > \Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : w = \lambda \cdot (u \wedge v) \Longrightarrow$$

$$||w|| = ||u|| \cdot ||v|| \operatorname{sen}(u, v) \Longrightarrow |\lambda| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Ejemplo

3.4. Producto mixto

Sea B una base de V, ortonormal y de orientación positiva. Sea u, v y w vectores de V.

$$(uvw) = u(v \wedge w)$$

3.4.1. Propiedades del producto mixto

1. Sean $u = (x_1, x_2, x_3), v = (y_1, y_2, y_3), w = (z_1, z_2, z_3)$. Entonces:

$$(uvw) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. $(uvw) = (vwu) = (wuv)$

3.5. Grupos

3.5.1. Definición

Un grupo es un par $(\mathcal{G}, *)$, donde $\mathcal{G}$ es un conjunto y $*$ es una operación binaria satisfaciendo:

1. Es asociativa
2. Existe elemento neutro
3. $\forall g \in \mathcal{G},\ \exists g^{-1}$ (inversa)

3.5.2. Definición

Sean $\mathcal{G}$ un grupo y A un conjunto. Decimos que $\mathcal{G}$ actúa en A si existe una aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{G} \times A &\longrightarrow A \\ (g, a) &\longmapsto g \cdot a \end{aligned}$$

verificando:

1. $g_1(g_2 \cdot a) = (g_1 * g_2) \cdot a,\ \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G},\ a \in A$
2. $e \cdot a = a,\ \forall a \in A$

<u>Observación</u>

Podemos definir

$$\begin{aligned} \sigma_a : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto g \cdot a \end{aligned}$$

<u>Ejemplos</u>

1. $\triangle$

2. $(\mathbb{Z},+)$

3. $\mathbb{K}$ actuando sobre V

4. $O(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})/A^tA=\mathrm{Id}\}$
   $1=\det A=\det(A^tA)=\det(A^t)=1$

3.5.3. Proposición (Teorema de clasificación de espacios vectoriales euclídeos)

Dos espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita son isométricos si, y solo si, tienen igual dimensión; en particular, todo espacio vectorial euclídeo de dimensión n es isométrico a $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Demostración. Sean $B=(v_1,\ldots,v_n)$ y $B'=(v_1',\ldots,v_n')$ bases ortonormales de V y V', respectivamente. La aplicación lineal $f:V\to V'$ dada por

$$f(v_i)=v_i',\quad i=1,\ldots,n$$

es una isometría, puesto que $v_i\cdot v_j=\delta_{ij}=v_i'\cdot v_j'=f(v_i)\cdot f(v_j)$, para $i,j=1,\ldots,n$.

La isometría $f:V_3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{i})=e_1, f(\vec{j})=e_2, f(\vec{k})=e_3$, donde $C=(e_1,e_2,e_3)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, permite identificar el espacio vectorial euclídeo de los vectores libres del espacio ordinario con $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual. De forma análoga se identifica el espacio vectorial euclídeo de los vectores libres del plano ordinario con $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual.

3.6. Transformaciones ortogonales. Matrices ortogonales

3.6.1. Definición

Sea K un cuerpo. Se dice que la matriz $\mathcal{A}\in M_n(K)$ es una matriz ortogonal si $\mathcal{A}^t\mathcal{A}=I$, siendo $\mathcal{A}^t$ la matriz traspuesta de $\mathcal{A}$.

3.6.2. Proposición

Si $\mathcal{A}$ es una matriz ortogonal, entonces el determinante de $\mathcal{A}$ vale 1 o -1 .

<u>Demostración</u>

Se tiene

$$(\det(\mathcal{A}))^2=\det\left(\mathcal{A}^t\right)\det(\mathcal{A})=\det\left(\mathcal{A}^t\mathcal{A}\right)=1$$

Asi, $\det(\mathcal{A}) = 1$ o $\det(\mathcal{A}) = -1$

3.6.3. Proposición

Sea $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) La matriz $\mathcal{A}$ es una matriz ortogonal.

(2) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t$

(3) $\mathcal{A}\mathcal{A}^t = I$

(4) $B_F = ((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = (F_1, \ldots, F_2)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

(5) $B_C = ((a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, ((a_{1n}, \ldots, a_{nn}))) = (C_1, \ldots, C_2)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2) La matriz $\mathcal{A}$ es regular, puesto que $\det(\mathcal{A}^t)\det(\mathcal{A}) = 1$. Luego, $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}^t I = \mathcal{A}^t(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}^{-1}$

(2) $\Rightarrow$ (1)$\mathcal{A}^t\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = I$

(3) $\Leftrightarrow$ (3) se prueba de forma similar a (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(4) es equivalente a que $\mathcal{A}\mathcal{A}^t = I$

(5) es equivalente a que $\mathcal{A}^t\mathcal{A} = I$

3.6.4. Definición.

Sea V un un espacio vectorial euclídeo. Se dice que la aplicación $f : V \to V$ es una transformación ortogonal de V si es una isometría, es decir si es un isomorfismo de espacios vectoriales reales y además

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \quad \forall v, w \in V$$

3.6.5. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $f : V \to V$ una aplicación lineal. Entonces f es una transformación ortogonal si, y sólo si,

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \quad v, w \in V$$

<u>Demostración</u>

Basta ver que si $f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$, para cada $v, w \in V$, entonces f es un isomorfismo de espacios vectoriales; y puesto que el espacio vectorial V tiene dimensión finita, es suficiente probar que el núcleo de f es el subespacio $\{0\}$. Se tiene

$$v \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow f(v) = 0 \Longrightarrow 0 = f(v) \cdot f(v) = v \cdot v \Longrightarrow v = 0.$$

3.6.6. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Una aplicación $f : V \to V$ no necesariamente lineal es una transformación ortogonal si, y solo si, $f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$, para todo $v, w \in V$.

<u>Demostración</u>

$\Longleftarrow$ / Es suficiente probar que si la aplicación $f : V \to V$ verifica que $f(v) \cdot f(w) = v \cdot w$, para todo $v, w \in V$, entonces f es una aplicación lineal.

(I) Veamos la suma. Si $u = v + w$:

$$\begin{aligned} 0 &= \|u - v - w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2u \cdot v - 2u \cdot w - 2v \cdot w \\ &= \|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2f(u) \cdot f(v) - 2f(u) \cdot f(w) - 2f(v) \cdot f(w) \\ &= \|f(u) - f(v) - f(w)\|^2 \Longrightarrow f(u) = f(v) + f(w) \end{aligned}$$

Así, $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

(II) Veamos ahora el producto por escalar. Si $u = \lambda v$

$$\begin{aligned} 0 &= \|u - \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 - 2\lambda u \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 - 2\lambda u \cdot v \\ &= \|f(u)\|^2 + \lambda^2 \|f(v)\|^2 - 2\lambda f(u) \cdot f(v) \\ &= \|f(u) - \lambda f(v)\|^2 \\ &\xRightarrow{\textit{Eucli.}} f(u) - \lambda f(v) = 0 \end{aligned}$$

Así, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

3.6.7. Notación

Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, denotaremos por

- $\mathcal{O}(V) = \{f : V \to V/f$ transformación ortogonal$\}$ el conjunto de las transformaciones ortogonales de V.
- $\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})/A$ ortogonal$\}$ el conjunto de las matrices $n \times n$ reales ortogonales.

3.6.8. Teorema

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita $n(n \geq 1)$, sea B una base ortonormal de V y sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Entonces f es una transformación ortogonal si, y solo si, la matriz asociada a f respecto a la base B es una matriz ortogonal:

$$f \in \mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow (f_B) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$$

Demostración

Sea $\mathcal{A} = (a_{ij})$ la matriz asociada a f respecto a la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Por el lema 2.1.9, f es una transformación ortogonal si, y solo si, $f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \ldots, n$. El resultado se sigue de las siguientes equivalencias

$$f \in \mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$$

Sea $(f_B) = (a_{ij}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(v_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k$ $i = 1, \ldots, n$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow \delta_{ij} = f(v_i) \cdot f(v_j) &= \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj} v_l\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} (v_k \cdot v_l) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (f_B)^t_{ik} (f_B)_{ik} \\
&= \big((f_B)^t (f_B)\big)_{ij} \\
&\Longleftrightarrow (f_B)^t (f_B) = I \Longleftrightarrow (f_B) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})
\end{aligned}$$

3.6.9. Lema

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n \geq 1$ y sean B una base ortonormal de V y B' una base de V. Entonces B' es una base ortonormal de V si, y solo si, $\mathrm{Id}_{B'B}$ es una matriz ortogonal.

Demostración

Sean $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ y consideremos la aplicación lineal $f : V \to V$ dada por

$$f(v_i) = v'_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} B' \text{ es ortonormal } &\Longleftrightarrow v'_i \cdot v'_j = \delta_{ij} \\ &\Longleftrightarrow f(v_i) \cdot f(v_j) = \delta_{ij} = v_i \cdot v_j \\ &\Longleftrightarrow \in \mathcal{O}(V) \Longleftrightarrow (f_B) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Nota

$$A \in \mathcal{O}(n, K) \Longleftrightarrow A^t = A^{-1} \Longleftrightarrow (A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow (A^{01}) \in \mathcal{O}(n, K)$$

En las condiciones anteriores

$$B' \text{ es ortonormal } \Longleftrightarrow (\mathrm{Id}_{BB'}) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$$

3.6.10. Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y sea $f : V \to V$ una aplicación lineal. Se llama determinante de f, y se denota por $\det(f)$, al deteminante de la matriz asociada a f en una base B de V, es decir

$$\det(f) := \det(f_B)$$

3.6.11. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Si f es una transformación ortogonal de V, entonces el determinante de f es 1 o -1.

DemostraciónSea B una base ortonormal de V. Por el teorema 2.2.8, la matriz f_B es una matriz ortogonal. Dado que el determinante de f es igual al determinante de f_B, por la proposición 2.2 .3 es $\det(f) = 1$ o $\det(f) = -1$:

$$f \in \mathcal{O}(V) \Longrightarrow (f_B) \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \Longrightarrow \det(f) = det(f_B) = \pm 1$$

3.6.12. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V. Se dice que

- f es un giro o una rotación si $\det(f) = 1$.
$$\mathcal{O}^+(V) = \{f \in \mathcal{O}(V)/f \text{ giro } \}$$

- Se dice que f es una reflexión si $\det(f) = -1$
$$\mathcal{O}^-(V) = \{f \in \mathcal{O}(V)/f \text{ reflexión } \}$$

<u>**Ejemplo**</u>

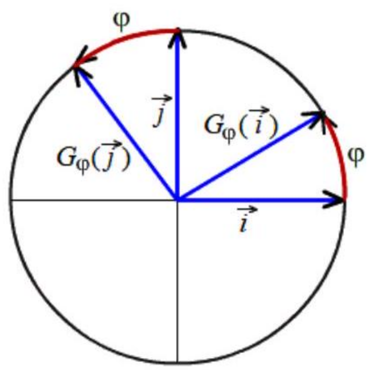
Consideremos V_2 el espacio vectorial de los vectores libres del plano. Sea $G_\varphi : V_2 \to V$ la aplicación girar en el sentido de $\overrightarrow{i}$ a $\overrightarrow{j}$ un ángulo de φ radianes. Se tiene que G_φ es lineal.

- $G_\varphi(\overrightarrow{i}) = \cos\varphi \overrightarrow{i} + \operatorname{sen}\varphi \overrightarrow{j}$
- $G_\varphi(\overrightarrow{i}) = -\operatorname{sen}\varphi \overrightarrow{i} + \cos\varphi \overrightarrow{j}$

$$(G_\varphi)_C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Y además
$$\det(G_\varphi) = \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$$

Es inmediato que $(G_\varphi)^t_{\mathcal{C}}(G_\varphi)_{\mathcal{C}} = I$. $G_\varphi \in \mathcal{O}^+(V_2)$.



<u>**Observación**</u>

Sea V un espacio vectorial euclídeo. $\mathcal{O}(V)$ con la compoición son un grupo denominado grupo ortogonal de V. El conjunto $\mathcal{O}^+(V)$ es un subgrupo de $\mathcal{O}(V)$ denominado grupo de giros de V. $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ con el producto de matrices es un grupo y tiene como subgrupo a $\mathcal{O}^+(n,\mathbb{R})$. Si V tiene dimensión finita n y B es una base ortonormal, entonces

$$\begin{aligned}\Phi_B : \mathcal{O}(V) &\longrightarrow \mathcal{O}(n,\mathbb{R})\\ f &\longmapsto (f_B)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos. Es más, $\Phi_B(\mathcal{O}^+(V)) = \mathcal{O}^+(n,\mathbb{R})$ y $\Phi_B(\mathcal{O}^-(V)) = \mathcal{O}^-(n,\mathbb{R})$.

3.6.13. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sean U_1 y U_2 subespacios de V tales que $V = U_1 \perp U_2$. Si $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned}f_1 \perp f_2 : V &\longrightarrow V\\ u_1 + u_2 &\longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)\end{aligned}$$

es una transformación ortogonal de V. Si B es ortonormal, entonces

$$(f_1 \perp f_2)_B = \left(\begin{array}{c|c} (f_1)_B & 0 \\ \hline 0 & (f_2)_B \end{array}\right)$$

<u>Demostración</u>

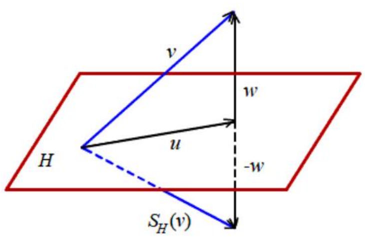
Para todo $u_1, v_1 \in U_1$ y $u_2, v_2 \in U_2$, se tiene

$$\begin{aligned}(f_1 \perp f_2)(u_1+u_2)\cdot(f_1 \perp f_2)(v_1+v_2) &= (f_1(u_1) + f_2(u_2))\cdot(f_1(v_1)+f_2(v_2))\\ &= f_1(u_1)\cdot f_1(v_1) + f_1(u_1)\cdot f_2(v_2)\\ &+ f_2(u_2)\cdot f_1(v_1) + f_2(u_2)\cdot f_2(v_2)\\ &= u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 = (u_1+u_2)\cdot(v_1+v_2).\end{aligned}$$

3.6.14. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea U un subespacio vectorial de V $(V = U \perp U^\perp)$. Se llama simetría respecto a U a la transformación ortogonal de V

$$\begin{aligned}&S_U : V \Longrightarrow V,\ S_U = \mathrm{Id}_U \perp (-\mathrm{Id})_U\\ &S_U(v) = S_U(u+w) = u - w,\ u\in U, w \in U^\perp\end{aligned}$$



Obsérvese que el conjunto de vectores fijos de S_U es U y que $(S_U)^2 = \mathrm{id}_V \Longleftrightarrow S_U^{-1} = S_U$.

3.6.15. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y sea U un subespacio vectorial de codimensión m ($\dim_{\mathbb{R}} U = n - m$).

- Si m es par, entonces S_U es un giro.
- Si m es impar tenemos reflexiones.

<u>Demostración</u>

Dado que $U \perp U^{\perp} = V$, si B_U es una base ortonormal de U y B_U es una base ortonormal de $U^{\perp}$, juntándolas se obtiene una base ortonormal de V.

$$B = \{v_1, \ldots, v_{n-m}, \ldots, v_n\}$$

$$(S_U)_B = (\mathrm{Id}_U \perp (-\mathrm{Id}_{U^{\perp}}))_B = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$$

$$\det(S_U) = (-1)^m \begin{cases} 1 \text{ si m par} \\ -1 \text{ si m impar} \end{cases}$$

3.6.16. Corolario

Sea V un espacio euclídeo de dimensión finita y H un hiperplano vectorial ($\dim_{\mathbb{R}} H = n-1$). Entonces S_H es una reflexión.

<u>Ejemplo</u>

Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar usual, esto es, consideremos el espacio euclídeo usual $(\mathbb{R}^3, \cdot)$. Sea U el plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base canónica es $U \equiv y - z = 0$. Se tiene

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle, \quad U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0,\ y + z = 0\} = \langle (0,1,-1) \rangle$$

Sea $B = ((1,0,0), (0,1,1), (0,1,-1))$. La simetría respecto al plano vectorial U de $\mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal $S_U = \mathrm{id}_U \perp (-\mathrm{id}_{U^{\perp}}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$S_U(1,0,0) = (1,0,0), \quad S_U(0,1,1) = (0,1,1), \quad S_U(0,1,-1) = (0,-1,1)$$

luego

$$
\begin{aligned}
(S_U)_C = (S_U)_{BC}\,(\mathrm{Id})_{CB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así, $S_U(x, y, z) = (x, z, y)$

3.6.17. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y sea f una transformación ortogonal de V ($f \in \mathcal{O}(V)$). Si U es un subespacio invariante por f, entonces también lo es $U^\perp$. Recordemos que invariante significa que su imagen está contenida en sí mismo.

Demostración

Veamos que si $f(U) \subset U$, entonces $f\left(U^\perp\right) \subset U^\perp$. Por ser f un isomorfismo de espacios vectoriales $f(U) = U$ y se tiene que para cada $u \in U$ y cada $w \in U^\perp$

$$u \cdot f(w) = f\left(f^{-1}(u)\right) \cdot f(w) = f^{-1}(u) \cdot w = 0 \Longrightarrow f(w) \in U^\perp$$

3.6.18. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y f una transformación ortogonal de V ($f \in \mathcal{O}(V)$). Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de f, entonces $\lambda = \pm 1$.

Demostración

Si v es un autovector de f asociado al autovalor λ, entonces $f(v) = \lambda v$. Se tiene

$$v \cdot v = f(v) \cdot f(v) = (\lambda v) \cdot (\lambda v) = \lambda^2 (v \cdot v),$$

y dado que $v \neq 0 \Longrightarrow v \cdot v \neq 0$, es $\lambda^2 = 1$.

3.7. Transformaciones ortogonales del plano vectorial euclídeo

3.7.1. Proposición

Si $\mathcal{A} \in \mathcal{O}(2, \mathbb{R})$, entonces

(1)
$$\mathcal{A} \in \mathcal{O}^+(2,\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=1 \mid \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(2)
$$\mathcal{A} \in \mathcal{O}^-(2,\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=1 \mid \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

<u>Demostración</u>

(1) Si
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
la condición $\mathcal{A}^t\mathcal{A} = I$ es equivalente a las condiciones
$$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ ac+bd=0, \\ c^2+d^2=1. \end{cases}$$
La condición $\det(\mathcal{A}) = 1$ equivale a $ad - bc = 1$. Resolviendo el sistema
$$\begin{cases} a^2+b^2=1, \\ ac+bd=0, \\ ad-bc=1, \end{cases}$$

Separando en casos:
$$a = 0 \begin{cases} b^2 = 1 \\ bd = 0 \Longrightarrow d = 0 \\ -bc = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{-b} = -b \end{cases}$$
$$a \neq 0 \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ c = \frac{-bd}{a} \Longrightarrow c = -b \\ ad-bc = 1 \Longrightarrow c = ad + \frac{b^2d}{a} = 1 \end{cases}$$

En todo caso, se tiene que $c = -b$ y $d = a$, luego $a^2d + b^2d = a \Longrightarrow d = a$

(2) Se prueba de forma análoga a (1).

3.7.2. Proposición

Sea V un plano vectorial euclídeo, $B = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de V y $f : V \to V$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Se tiene:

(1)

$$f \in \mathcal{O}^+(V) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \mid f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(2)

$$\text{f} \in \mathcal{O}^-(V) \Longleftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \mid f_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Además, $a = v_1 \cdot f\,(v_1)$.

Demostración

$$v_1 \cdot f(v_1) = v_1 \cdot (av_1 + bv_2) = a, \;\; f_B = \begin{pmatrix} a & * \\ b & * \end{pmatrix}$$

3.7.3. Proposición

El grupo $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ es abeliano.

Demostración(el profe no la hizo)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3.7.4. Corolario

Si V es un plano vectorial euclídeo, entonces $\mathcal{O}^+(V)$ es un grupo abeliano.

Demostración(el profe no la hizo)

Por la proposición 2.2.17, los grupos $\mathcal{O}^+(V)$ y $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ son isomorfos.

3.7.5. Proposición

Sea V un plano vectorial euclídeo y sean u y v vectores no nulos de V tales que $\|u\| = \|v\| \neq 0$. Existe un único giro $f \in \mathcal{O}^+(V)$ tal que $f(u) = v$.

Demostración

Sea $B = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de V y sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ las coordenadas de u y v, respectivamente, en la base B. Veamos que existe una matriz ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; [a^2 + b^2] = 1$$

tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x_1 a - x_2 b = y_1 \\ x_2 a + x_1 b = y_2 \end{cases} \quad \longleftarrow \text{ sistema lineal en } a \text{ y } b$$

se tiene que

$$a = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|u\|^2}, \quad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\|u\|^2}, \quad a^2 + b^2 = \frac{\|u\|^2 \|v\|^2}{\|u\|^4} = 1$$

A es ortogonal ($A^t A = I$) y si definimos f con $(f_B) = A$ es claro que $f(u) = v$.

Obsérvese que en un plano vectorial euclídeo un giro está determinado conocida la imagen de un vector no nulo.

3.7.6. Lema

Sea V un plano vectorial euclídeo, u y v vectores unitarios de V y $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Se verifica

$$u \cdot f(u) = v \cdot f(v)$$

Demostración

Sea $g : V \longrightarrow V$ el único giro con $g(u) = v$.

$$u \cdot f(u) = g(u) \cdot g(f(u)) \overset{g.abel.}{=} g(u) \cdot f(g(u)) = v \cdot f(v)$$

3.7.7. Definición

Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f un giro de V $(f \in \mathcal{O}^+(V))$. Se llama coseno de f, y se denota por $\cos f$, al número real

$$\cos f := v \cdot f(v)$$

donde v es un vector unitario cualquiera de V.

3.7.8. Corolario

Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f un giro de V $(f \in \mathcal{O}^+(V))$. Sean B y B' bases ortonormales de V. Si

$$(f_B) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (f_{B'}) = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 = 1$$

entonces $a = a' = \cos f$ y $b = b'$ o $b = -b'$.

<u>Demostración</u>

Pongamos $B = (v_1, v_2)$ y $B' = (v'_1, v'_2)$. Ya hemos probado que

$$a = v_1 \cdot f(v_1) = \cos f = v'_1 \cdot f(v'_1) = a'$$

Por tanto, $b^2 = 1 - a^2 = 1 - (a')^2 = (b')^2$, luego $b = \pm b'$.

<u>Nota</u>

El valor de b en el corolario anterior depende de la base ortonormal considerada en V. Por ejemplo, si $B = (v_1, v_2)$ es una base ortonormal de V y

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

entonces la matriz asociada a f respecto a $B' = (v_2, v_1)$ es

$$f_{B'} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

3.8. Orientación

3.8.1. Definición - Orientación

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se dice que las bases B y B' ortonormales tienen la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base $\mathrm{Id}_{BB'}$ es positivo ($\mathrm{Id}_{BB'} \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$). En caso contrario, se dice que tienen distinta orientación.

La relación "tener la misma orientación.en el conjunto de bases de V es una relación de equivalencia.

- Reflexiva: $\det(\mathrm{Id}_{BB}) = 1$.
- Simétrica: $\det(\mathrm{Id}_{B'B}) = \det(\mathrm{Id}_{BB'})^{-1} = 1^{-1} = 1$
- Transitiva. Sean B y B' bases ortonormales con la misma orientación. Sea también B'' tal que tiene la misma orientación que B'. Entonces:

$$\det(\mathrm{Id}_{BB''}) = \det((\mathrm{Id}_{B'B''})(\mathrm{Id}_{BB'})) = \det(\mathrm{Id}_{B'B''})\det(\mathrm{Id}_{BB'}) = 1$$

Existen solamente dos clases de equivalencia distintas para esta relación. Si B' tiene diferente orientación a B y B'' tiene diferente orientación a B, entonces B' y B'' tienen la misma orientación.

$$\det(\mathrm{Id}_{B'B''}) = \det(\mathrm{Id}_{BB''})\det(\mathrm{Id}_{B'B}) = 1$$

Si B es una base de V, la clase de equivalencia $[B]$ se dice que es una orientación en V. Tomamos una base B y todas las de su clase de equivalencia y le llamamos orientación positiva.

$$\begin{aligned} B = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) &\text{ tiene orientación positiva} \\ \iff B' = (v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) &\text{ tiene orientación negativa} \end{aligned}$$

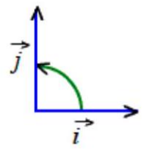
El par $(V, [B])$ se llama espacio vectorial orientado. Diremos que V está orientado con la base B para indicar que consideramos $(V, [B])$ y en este caso las bases de $[B]$ se dice que son bases de orientación positiva y las bases de V que no están en $[B]$ se dice que son bases de orientación negativa.

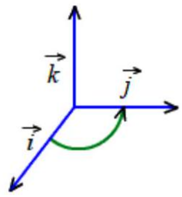
Consideramos que $\mathbb{R}^n$ está orientado con la base canónica.

Ejemplos

(1) El espacio V_2 de los vectores libres del plano se considera orientado con la base ortonormal $C = (\vec{i}, \vec{j})$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2; O\}$ del plano ordinario.

(2) El espacio V_3 de los vectores libres del espacio se considera orientado con la base ortonormal $C = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ asociada a la referencia canónica $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3; O\}$ del espacio ordinario.





3.8.2. Proposición

Sea V un plano vectorial euclídeo y sea f un giro de V ($f \in \mathcal{O}^+(V)$). Sean B y B' son bases ortonormales de V. Entonces:

$$f_B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad f_{B'} = \begin{pmatrix} a & -b' \\ b' & a \end{pmatrix}, \quad a = \cos f$$

Si B y B' tienen la misma orientación, entonces $b = b'$. Si B y B' tienen distinta orientación, entonces $b = -b'$.

<u>Demostración</u>

Si B y B' tienen la misma orientación, entonces

$$(\mathrm{Id}_{BB'}), (\mathrm{Id}_{B'B}) \in \mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$$
$$(f_{B'}) = (\mathrm{Id}_{BB'})(f_B)(\mathrm{Id}_{B'B}) = (\mathrm{Id}_{BB'})(\mathrm{Id}_{B'B})(f_B)$$

Si $B = (v_1, v_2)$ y las bases B y B' tienen distinta orientación, entonces las bases $B'' = (v_2, v_1)$ y B' tienen igual orientación. Por tanto,

$$f_{B'} = f_{B''} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

3.8.3. Proposición

Se tiene el isomorfismo de grupos:

$$R : \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$$
$$[\varphi] = \varphi + 2\pi\mathbb{Z} \longmapsto R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

<u>Demostración</u>

(1) Bien definido ya que *sen* y *cos* tienen periodo 2π

$$R_\varphi R_\varphi^t = \mathrm{Id}$$

(2) R es biyectiva, pues si $a^2 + b^2 = 1$, entonces (a, b) pertenece a la circunferencia unitaria ya que se parametriza por $\varphi \Longrightarrow (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) = (a, b)$, bien definida con $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(3) Es homomorfismo de grupos

$$R_\varphi R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\varphi+\varphi) & \cos(\varphi+\varphi) \end{pmatrix}$$

3.8.4. Definición

Sea V un plano vectorial euclídeo orientado y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Se llama giro de ángulo orientado $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$, o también giro de ángulo orientado φ, al giro $G_\varphi : V \to V$ cuya matriz asociada respecto a cualquier base ortonormal de V de orientación positiva es

$$(G_\varphi)_B = R_\varphi = \left(\begin{array}{cc} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{array} \right)$$

Dado que no depende de la base y todas las matrices de $\mathcal{O}^+(2, \mathbb{R})$ son de ésta forma, estos son todos los posibles giros de $\mathcal{O}^+(V)$. Además, si $f \in \mathcal{O}^+(V)$ y $f = G_\varphi$, se define el seno de f como $\operatorname{sen} f = \operatorname{sen}\varphi$. Por tanto, si $f \in \mathcal{O}^+(V)$ y B es ortonormal de orientación positiva,

$$(f_B) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

3.9. Clasificación de las transformaciones ortogonales en el plano

3.9.1. Teorema

Sea V un plano vectorial euclídeo y $f \in \mathcal{O}(V)$.

(1) Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$ y B es una base ortonormal de V tal que

$$(f_B) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1$$

entonces las raíces del polinomio característico de f son $a \pm bi$ y $\cos f = a$. En particular, si $b = 0$:

- $a = 1,\ f = \mathrm{Id}_V$ y por tanto el giro de ángulo 0.
- $a = -1,\ f = -\mathrm{Id}_V$ y por tanto el giro de ángulo π.

(Son los casos de $\lambda = 1$ doble y $\lambda = -1$ doble).

(2) Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$, entonces f tiene los autovalores 1 y -1; en este caso existe una base ortonormal B de V tal que

$$(f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $f = S_{V_1}$, $V_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id_V})$.

<u>Demostración</u>

(1) $P_f(x) = \begin{vmatrix} a-x & -b \\ b & a-x \end{vmatrix} = (a-x)^2 = b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + 1 = 0 \Longleftrightarrow$
$x = \dfrac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm bi.$

Si $b = 0$ y $a = 1 \Longrightarrow (f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f = \mathrm{Id}_V$.

Si $b = 0$ y $a = -1 \Longrightarrow (f_B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f = -\mathrm{Id}_V$.

Si V está orientado y B tiene orientación positiva, entonces f es el giro de ángulo φ con $\cos\varphi = a$ y $\operatorname{sen}\varphi = b$.

(2) Si $f \in \mathcal{O}^-(V)$, entonces dada B' base ortonormal sabemos que

$$(f_{B'}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

Por tanto

$$P_f(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & -a-x \end{vmatrix} = x^2 - a^2 - b^2 = x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

Sea $v \neq 0$ vector propio de $\lambda = 1$. Sea $w \neq 0$ vector propio de $\lambda = -1$. Veamos que v y w son ortogonales

$$v \cdot w = f(v) \cdot f(w) = v \cdot (-w) = -v \cdot w \Longrightarrow 2(v \cdot w) = 0 \Longrightarrow v \cdot w = 0$$

Si tomamos $v_1 = \frac{v}{||v||}$ y $v_2 = \frac{w}{||w|}$ entones $B = (v_1, v_2)$ es una base ortonormal y

$$(f_b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$f = \mathrm{Id}_{V_1} \perp (-\mathrm{Id}_{V_1}) = \mathrm{Id}_{V_1} \perp (-\mathrm{Id}_{V_1^\perp}) = S_{V_1}$$

3.9.2. Corolario

(1) Toda transformación ortogonal cuyo polinomio característico no tiene raíces reales es un giro.

(2) Toda reflexión es una simetría.

(3) Las transformaciones ortogonales de V son giros o simetrías con respecto a un subespacio de dimensión 1.

3.9.3. Corolario

Sea V un plano euclídeo y $f \in \mathcal{O}(V)$.

(1) Si el único vector fijo de f es el vector 0, entonces f es un giro y $f \neq \mathrm{Id}_V$.

(2) Si f tiene un solo subespacio de vectores fijos de dimensión 1, entonces f es la simetría con respecto ese subespacio.

3.10. Clasificación de las transformaciones ortogonales en el espacio vectorial euclídeo tridimensional

3.10.1. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional. Se define el giro de eje $U = \langle w \rangle,\ w \neq 0$, como

$$f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle w \rangle} \text{ donde } f_1 \in \mathcal{O}^+(\langle w \rangle^\perp)$$

3.10.2. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $w \in W,\ w \neq 0$. Se llama eje orientado al subespacio vectorial $\langle w \rangle$ donde tomamos la orientación en la cual una base de orientación positiva es $B = \left\{ \dfrac{w}{||w||} \right\}$.

3.10.3. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado. Tomemos un eje orientado $\langle w \rangle$, podemos considerar $||w|| = 1$. Entonces, $\langle w \rangle$ induce una orientación en el plano vectorial $\langle w \rangle^\perp$ dada por considerar una base ortonormal $B_1 = (u, v)$ en el plano $\langle w \rangle^\perp$ tal que $B = (u, v, w)$ es de orientación positiva en V.

Demostración

Veamos que la orientacion de $\langle w\rangle^{\perp}$ está bien definida. Sea $B_1' = (u', v')$ base ortonormal de $\langle w\rangle^{\perp}$ verificando que $B' = (u', v', w)$ tiene orientación positiva. Veamos que B_1 y B_1' tiene la misma orientación.

Como B y B' tienen orientación positiva, sabemos que $\det(I_{BB'}^{V}) = 1$.

$$\text{Si } \mathrm{Id}_{B_1B_1'}^{\langle w\rangle^{\perp}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ entonces } \mathrm{Id}_{BB'}^{V} = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\det\left(\mathrm{Id}_{B_1B_1'}^{\langle w\rangle^{\perp}}\right) = \det\left(\mathrm{Id}_{B_1B_1'}^{V}\right) = 1$$

Por lo que B_1 y B_1' tiene la misma orientación.

3.10.4. Definición

Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado y $w \in V - \{0\}$. Se llama giro de eje orientado $\langle w\rangle$ y ángulo φ a la transformación ortogonal

$$G_{\langle w\rangle,\varphi} = G_{\varphi} \perp \mathrm{Id}_{\langle w\rangle}$$

donde el plano $\langle w\rangle^{\perp}$ tiene la orientación inducida por $\langle w\rangle$ y $G_{\varphi} \in \mathcal{O}^{+}(\langle w\rangle^{\perp})$.

Observación

$G_{\langle w\rangle,\varphi} \in \mathcal{O}^{+}(V)$

3.10.5. Proposición

Sea V un espacio vectorial euclídeo tridimensional y $f \in \mathcal{O}(V)$. Entonces, $\exists v \in V - \{0\}$ tal que $f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle w\rangle}$ o $f = f_1 \perp -(\mathrm{Id}_{\langle w\rangle})$, donde $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v\rangle^{\perp})$.

Demostracion

$P_f(x)$ tiene al menos una raíz real λ (ya que tiene grado 3). Por tanto, hemos visto, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Sea $v \neq 0$ vector propio de λ. Es inmediato que $f(\langle v\rangle) = \langle v\rangle$, y por tanto $f(\langle v\rangle)^{\perp} = \langle v\rangle^{\perp}$. Podemos definir

$$f_1 = f|_{\langle v\rangle^{\perp}} : \langle v\rangle^{\perp} \longrightarrow \langle v\rangle^{\perp}$$

entonces, al ser una restricción de una isometría, es una isometría. Por tanto, $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v\rangle^{\perp})$. Como $V = \langle v\rangle^{\perp} \perp \langle v\rangle$,

$$\begin{cases} f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle v\rangle} \\ o \\ f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle v\rangle} \end{cases}$$

Ejemplo

$(\mathbb{R}^3, \cdot)$ espacio euclídeo usual. El giro de eje orientado $\langle(0,1,1)\rangle$ y ángulo $\dfrac{2\pi}{3}$. La base

$$B_1 = \left((1,0,0)\,, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

es una base de orientación positiva de $\langle(0,1,1)\rangle^{\perp} = \langle(1,0,0),(0,1,-1)\rangle$, ya que

$$B = \left((1,0,0)\,, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

es de orientación positiva

$$\det\left(\mathrm{Id}_{B\mathcal{C}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1$$

Se puede hacer el giro

$$\left(G_{\frac{2\pi}{3}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así $\left(G_{\langle(0,1,1)\rangle,\frac{2\pi}{3}}\right)_B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.10.6. Teorema

Sea V un espacio afín euclídeo tridimensional (orientado) y sea $f \in \mathcal{O}(V)$. $V_1 = \ker(f - \mathrm{Id}_V)$, $V_{-1} = \ker(f + \mathrm{Id}_V)$.

(1) Si $f \in \mathcal{O}^+(V)$ y $f \neq \mathrm{Id}_V$, entonces f es un giro de eje V_1 (Id_V es un giro de ángulo 0 en cualquier eje).

(2) Si $f \in \mathbb{O}^-(V)$ y $f = -\mathrm{Id}_V$ o f es la simetría con respecto al plano vectorial V_1 o f es la composición de un giro de eje V_{-1} y la simetría respecto el plano vectorial $(V_{-1})^{\perp}$.

Demostración

Dado $f \in \mathcal{O}(V)$ existe $v \in V - \{0\}$ tal que $f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle v\rangle^{\perp}}$ o $f = f_1 \perp (-\mathrm{Id}_{\langle v\rangle})$ donde $f_1 \in \mathcal{O}(\langle v\rangle^{\perp})$. Consideremos $B_1 = (v_1, v_2)$ una base ortonormal de $\langle v\rangle^{\perp}$ y tomemos $B = (v_1, v_2, v_3)$ con $v_3 = \dfrac{v}{||v||}$ base ortonormal de V. Tenemos 4 casos.

(1) $f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle v_3 \rangle}$ con $f_1 \in \mathcal{O}^+(\langle v_3 \rangle)^\perp$. Se tiene que

$$(f_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1$$

Por tanto, $(f_B) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es claro que $f \in \mathcal{O}^+(V)$.

Si $a = 1 \Longrightarrow b = 0$ y $(f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f = \mathrm{Id}_V$ y $\lambda = 1$ es un autovalor triple.

Si $a \neq q$, entonces los autovalores son 1 y $a \pm b$ß $= 1$. En particular,

$$b = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow (f_B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es el giro de eje $V_1 = \langle v_3 \rangle$ y ángulo π (Es el caso de $\lambda = 1$ simple y $\lambda = -1$ doble) (puede que el V_1 sea un V_{-1}, no entendía la letra xd). f es un giro de eje orientado $\langle v_3 \rangle = V_1$ y ángulo φ. Si B tiene orientación positiva φ es tal que $\cos\varphi = a$ y $\sin\varphi = b$.

(2) $f = f_1 \perp \mathrm{Id}_{\langle v_3 \rangle}$ y $f_1 \in \mathcal{O}^-(\langle v_3 \rangle^\perp)$. Sea $B_1' = (v_1', v_2')$ la base ortonormal de $\langle v_3 \rangle$, donde

$$(f_1)_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pongamos $B' = (v_1', v_2', v_3')$. Entonces,

$$(f_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = -1 \text{ simple} \end{pmatrix}$$

$f = \mathrm{Id}_{\langle v_1', v3 \rangle} \perp (-\mathrm{Id}_{\langle v_2' \rangle}) = S_{V_1} \in \mathcal{O}^-(V)$.

(3) $f = f_1 \perp (-\mathrm{Id}_{\langle v_3 \rangle})$ y $f_1 \in \mathcal{O}^+(\langle v_3 \rangle^\perp)$. $f \in \mathcal{O}^-(V)$. Sabemos que

$$(f)_{B_1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a^2 + b^2 = 1$$

Y por tanto $(f_B) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si $a = 1 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow (f_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $f = S_{V_1}$. Si $a = -1 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow (f_B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f = -\mathrm{Id}_V$. Si $b \neq 0$, entones las raíces del polinomio característico de f son -1 y $-1 \neq a \pm b \neq 1$, teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces f es la composición de un giro de eje orientado $V_{-1} = \langle v_3 \rangle$ con la simetría con respecto $\langle v_1, v_2 \rangle = (V_{-1})^{\perp}$.

(4) $f = f_1 \perp (-\operatorname{Id}_{\langle v_3 \rangle})$ y $f_1 \in \mathcal{O}^-(\langle v_3 \rangle^{\perp})$. $f \in \mathcal{O}^+(V)$. Sea $B_1' = (v_1', v_2')$ base ortonormal de $\langle v_3 \rangle^{\perp}$ tal que

$$(f_1)_{B_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$(f_{B'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = -1 \text{ simple} \end{pmatrix}$$

es el giro de eje $\langle v_1' \rangle = V_1$ y π grados.

3.10.7. Corolario

Sea V espacio vectorial euclídeo orientado tridimensional y $f \in \mathcal{O}(V)$.

(1) Si 1 es autovalor de f de multiplicidad 1 y las otras dos raíces del polinomio característico son $a \pm bi \neq 1$, $a^2 + b^2 = 1$, entonces f es un giro de eje orientado V_1 y ángulo φ (que depende de la orientación del eje) donde $\cos\varphi = a$ y $\sin\varphi = b$. Además, $\lambda = 1$ es triple y $f = \operatorname{Id}_V$ es un giro de 0 grados en cualquier eje.

(2) Si 1 es autovalor de f con multiplicidad 2 entonces f es la simetría respecto al plano vectorial V_1.

(3) Si -1 es un autovalor de multiplicidad 1 y las otras dos raíces del polinomio característico de f son $a \pm bi \neq \pm 1$, entonces f es la composición de un giro de eje orientado V_1 y ángulo φ (que depende de la orientación de V_1) tal que $\cos\varphi = a$ y $\sin\varphi = b$, y la simetría con respecto al plano $(v_{-1})^{\perp}$.

(4) Si -1 es triple, entonces f es la simetría con respecto al origen ($f = -\operatorname{Id}_V$).

$$S_{\{0\}} = \operatorname{Id}_{\{0\}} \perp -(\operatorname{Id})_{\{0\}^{\perp}} = -\operatorname{Id}_V$$

3.10.8. Corolario

Sea V espacio vectorial euclídeo orientado tridimensional y $f \in \mathcal{O}(V)$.

(1) Si f tiene solo un subespacio de vectores fijos de dimensión 1, entones f es un giro con respecto ese eje.

(2) Si f tiene únicamente un subespacio de vectores fijos de dimensión 2, entonces f es la simetría respecto ese subespacio.

(3) Si el único vector fijo de $f \neq -\mathrm{Id}_V$ es el vector cero, entonces f es la composición de un giro con una simetría respecto a un plano vectorial (donde el eje de giro y el plano son ortogonales).

4. Tema 3: Espacios afines euclídeos

4.1. Introducción a los espacios afines euclídeos

4.1.1. Definición - Espacio afín euclídeo

Un espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V se dice espacio afín euclídeo si V es un espacio vectorial euclídeo.

4.1.2. Definición - Distancia

Sean $P, Q \in \mathbb{A}$ espacio afín euclídeo. Se define la distancia de P a Q como

$$\mathrm{d}(P, Q) := ||\overrightarrow{PQ}||$$

4.1.3. Propiedades de la distancia

(1) $\mathrm{d}(P, Q) \geq 0,\ \forall P, Q \in \mathbb{A}$.

(2) $\mathrm{d}(P, Q) = 0 \iff P = Q$.

(3) $\mathrm{d}(P, Q) \leq \mathrm{d}(P, R) + \mathrm{d}(R, Q)$ con $P, Q, R \in \mathbb{A}$.

(4) $\mathrm{d}(P, Q) = \mathrm{d}(Q, P)$.

(5) Teorema de Pitágoras. $\overrightarrow{P, Q} \cdot \overrightarrow{P, R} = 0 \iff \mathrm{d}(P, Q)^2 = \mathrm{d}(P, R)^2 + \mathrm{d}(R, Q)^2$.

4.1.4. Definición - Referencia rectangular

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita. Una referencia $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ se dice referencia rectangular si $B_{\mathcal{R}}$ es ortonormal.

4.1.5. Proposicion

Sea $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$. Sean $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ y $P' = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{R}}$ puntos de $\mathbb{A}$. Entonces,

$$\mathrm{d}(P, P') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Demostración

$$\mathrm{d}(P, P') = ||\overrightarrow{PP'}|| = ||\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}|| = ||\overrightarrow{QP'} - \overrightarrow{QP}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

con $y_i - x_i$ en base $B_{\mathcal{R}}$ ortonormal.

4.1.6. Definición - Variedades lineales perpendiculares

Se dice que las variedades lineales $L_1 = A + V_1$ y $L_2 = B + V_2$ (de un espacio afín euclídeo) son perpendiculares si $V_1 \perp V_2$ (ortogonales).

4.2. Proyección ortogonal de un punto sobre una variedad lineal

4.2.1. Definición - Variedad lineal perpendicular

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo. Sea $L = A + U$ una variedad lineal y $P \in \mathbb{A}$. Entonces se denomina variedad lineal perpendicular a L que pasa por P a $L_P^{\perp} = P + U^{\perp}$.

4.2.2. Proposición

Sea $\mathbb{A}$ espacio afín euclídeo de dimensión finita. Entonces $L = A + U$ y $L_P^{\perp}$ se cortan en un único punto.

<u>Demostración</u>

Por ser V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita, $V = U \perp U^{\perp}$. Tomemos

$$\overrightarrow{AP} \in V = U \perp U^{\perp} = U \oplus U^{\perp} \Longrightarrow L \cap L_P^{\perp} \neq \varnothing$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dim(L \cap L_P^{\perp}) = \dim(L) + \dim(L_P^{\perp}) - \dim(L \circ L_P^{\perp}) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U - \dim_{\mathbb{R}}(U \oplus U^{\perp}) = \\ = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} - \dim_{\mathbb{R}} U - \dim_{\mathbb{R}} U' = 0\end{aligned}$$

4.2.3. Definición - Proyección ortogonal

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita. Sean $P \in \mathbb{A}$ y $L = A + U$ una variedad de $\mathbb{A}$. $P_0 = L \cap L_P^{\perp}$.

<u>Observación</u>

En las hipótesis anteriores se tiene que

$$\begin{matrix} \overrightarrow{AP_0} \in U \\ \overrightarrow{PP_0} \in U^{\perp} \end{matrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AP_0} \perp \overrightarrow{PP_0}$$

4.3. Distancia entre variedades lineales

4.3.1. Definición - Distancia entre variedades lineales

Sean L_1, L_2 variedades lineales de un espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$. Se define la distancia de L_1 a L_2 como

$$\mathrm{d}(L_1, L_2) := \inf \{\mathrm{d}(P, Q) \,/\, P \in L_1, Q \in L_2\}$$

4.3.2. Proposición

Sea $\mathbb{A}$ y L_1, L_2 variedades lineales de $\mathbb{A}$. Entonces,

$$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \Longleftrightarrow \mathrm{d}(L_1, L_2) = 0$$

Demostración

$\Rightarrow /$ $L_1 \cap L_2 \Longrightarrow \exists P \in L_1 cap L_2 \Longrightarrow P \in L_1, P \in L_2$. Así, $0 \leq \mathrm{d}(L_1, L_2) \leq \mathrm{d}(PP) = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}(L_1, L_2) = 0$

$\Leftarrow /$ $\mathrm{d}(L_1, L_2) = 0 \Longrightarrow \exists P, Q \in \mathbb{A} \,/\, P \in L,\ Q \in L_2 \,/\, \mathrm{d}(P, Q) = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}(P, Q) = 0 \Longrightarrow P = Q \Longrightarrow P \in L_2 \cap L_1$.

4.3.3. Proposición

Sea $\mathbb{A}$ espacio afín euclídeo, y sean L_1, L_2 variedades lineales en $\mathbb{A}$, $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

(1) $\exists P_1 \in L_1$ y $\exists P_2 \in L_2$ tal que $P_1 \circ P_2$ es una recta perpendicular a L_1 y L_2.

(2) $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \mathrm{d}(P_1, P_2)$.

Demostración

(1) Sea $L_1 = A_1 + U_1$ y $L_2 = A_2 + U_2$. Entonces,

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing \Longrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \notin U_1 + U_2 \Longrightarrow U_1 + U_2 \neq V.$$

Consideremos $V = (U_1 + U_2) \oplus (U_1 + U_2)^{\perp}$. Se tiene que

$$\exists u_1 \in U_1,\ \exists u_2 \in U_2,\ \exists w \in (U_1 + U_2)^{\perp} \text{ tal que } \overrightarrow{A_1A_2} = u_1 + u_2 + w$$

Sean ahora $P_1 = A_1 + u_1 \in L_2$ y $P_1 = A_2 + u_2 \in L_2$. Tenemos que $P_1 \circ P_2$ es perpendicular a L_1 y $L_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}$ ortogonal a U_1 y $U_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \in U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 + U_2)^{\perp}$. Entonces,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{A_1 + u_1, A_2 - u_2} = \overrightarrow{A_1 + u_1, A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2, A_2 - u_2} =$$
$$= -u_1 + \overrightarrow{A_1A_2} - u_2 = w \in (U_1 + U_2)^{\perp}$$

(2) $\forall P \in L_1$ y $\forall Q \in L_2$,

$$\mathrm{d}(P,Q)^2 = ||\overrightarrow{PQ}||^2 = ||\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q}||^2 \overset{\text{Pitágoras}}{=}$$
$$\overset{\text{Pitágoras}}{=} ||\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_2Q}||^2 + ||\overrightarrow{P_1P_2}||^2 \geq ||\overrightarrow{P_1,P_2}||^2 = \mathrm{d}(P_1,P_2)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}(P_1,P_2) \leq \mathrm{d}(P,Q),\ \forall P \in L_1,\ \forall Q \in L_2 \Longrightarrow \mathrm{d}(L_1,L_2) = \mathrm{d}(P_1,P_2)$$

4.3.4. Proposición - Distancia entre una variedad y un punto

Sea $L = Q + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ y $P \in \mathbb{A}$, entonces $\mathrm{d}(P,L) = \mathrm{d}(P,P_0)$ con P_0 la proyección ortogonal de P sobre L.

Demostración

Tomemos $Q' \in L$ arbitrario, sabemos que $\overrightarrow{PP_0} \in U^\perp$ y $Q'P_0 \in U$, así que podemos aplicar Pitágoras:

$$\mathrm{d}(P,Q')^2 = \mathrm{d}(P,P_0)^2 + \mathrm{d}(P_0,Q') \geq \mathrm{d}(P,P_0)^2 \Longrightarrow \mathrm{d}(P,P_0) \leq \mathrm{d}(P,Q'), \forall Q \in L \text{ arbitrario}$$

Entonces, por definición de distancia, $\mathrm{d}(P,L) = \mathrm{d}(P,P_0)$.

4.3.5. Proposición - Distancia entre dos variedades paralelas

Tomemos $L_1 = P_1 + U_1$ y $L_2 = P_2 + U_2$ variedades de $\mathbb{A}$, con $U_1 \subset U_2$ (paralelas). Entonces, $\mathrm{d}(L_1,L_2) = \mathrm{d}(P,L_2),\ \forall P \in L_1$.

Demostración

Sea P_0 la proyección de $P \in L_1$ sobre L_2, sabemos que $\mathrm{d}(P,L_2) = \mathrm{d}(P,P_0)$. Tenemos que demostrar que $\mathrm{d}(L_1,L_2) = \mathrm{d}(P,P_0)$. Sean $Q_1 \in L_1$ y $Q_2 \in L_2, \mathrm{d}(Q_1,Q_2)^2 = \|\overrightarrow{Q_1,Q_2}\|^2 = \|\overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q_2}\| \overset{\text{Pitágoras}}{=} \|\overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PP_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0Q_2}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PP_0}\|^2 = \mathrm{d}(P,P_0)^2$. Por tanto, $\mathrm{d}(P,P_0) \leq \mathrm{d}(Q_1,Q_2),\ \forall Q_1 \in L_1,\ \forall Q_2 \in L_2$, lo que implica que $\mathrm{d}(L_1,L_2) = \mathrm{d}(P,P_0) = \mathrm{d}(P,L_2),\ \forall P \in L_1$.

4.3.6. Proposición - Vector normal a un hiperplano

Sea $\mathcal{R} = \{E_1,\ldots,E_n;O\}$ una referencia rectangular de $\mathbb{A}$. Sea $H = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + d = 0$ un hiperplano en referencia $\mathcal{R}$. Entoncces, si $H = Q+U$, se tiene que $U^\perp = \langle\{(a_1,\ldots,a_n)_{B_\mathcal{R}}\}$.

Demostración

$\dim_\mathbb{R} U^\perp = n - \dim_\mathbb{R} U = n-(n-1) = 1$. Como $H = Q+U$, entonces $U = \{\overrightarrow{QP}\ /\ P \in H\}$. Tomemos $Q = (z_1,\ldots,z_n)_\mathcal{R}$. Entonces, dado $P \in H$, $P = (x_1,\ldots,x_n)_\mathcal{R}$, y $\overrightarrow{QP} = (x_1 -$

$z_1, \ldots x_n - z_n)_{B_{\mathcal{R}}}$. Tomemos $v = (a_1, \ldots, a_n)_{B_{\mathcal{R}}} \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned} v \cdot \overrightarrow{QP} &= (a_1, \ldots, a_n)_{B_{\mathcal{R}}} \cdot (x_1 - z_1, \ldots x_n - z_n)_{B_{\mathcal{R}}} = \\ &= a_1(x_1 - z_1) + \ldots + a_n(x_n - z_n) = \\ &= -d - (-d) = 0 \Longrightarrow v \in U^{\perp} \end{aligned}$$

Y como $v \neq 0$ y $\dim_{\mathbb{R}} U^{\perp} = 1$, entonces $U^{\perp} = \langle \{v\} \rangle = \langle \{(a_1, \ldots, a_n)_{B_{\mathcal{R}}}\} \rangle$.

4.3.7. Proposición

Sea $\mathcal{R} = \{E_1, \ldots, E_n; 0\}$ referencia rectangular de $\mathbb{A}$. Si $P = (z_1, \ldots, z_n)_{\mathcal{R}} \in \mathbb{A}$ y $H \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + d = 0$ es la ecuación del hiperplano H en $\mathcal{R}$. Entonces,

$$\mathrm{d}(P, H) = \frac{|a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Demostración Sea $H = Q + U$. Sabemos que $\mathrm{d}(P, H) = \mathrm{d}(P_1P_2)$ con P_0 la proyección ortogonal de P en H. Como $\overrightarrow{PP_0} \in U^{\perp} \Longrightarrow \overrightarrow{PP_0} = \lambda(a_1, \ldots, a_n)_{B_{\mathcal{R}}} = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)_{B_{\mathcal{R}}}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP_0} = (z_1, \ldots, z_n)_{B_{\mathcal{R}}} + (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)_{B_{\mathcal{R}}} = (z_1 + \lambda a_1, \ldots, z_n + \lambda a_n)_{B_{\mathcal{R}}} \Longrightarrow P_0 = (z_1 + \lambda a_1, \ldots, z_n + \lambda a_n)_{B_{\mathcal{R}}}$. Como $P_0 \in H$, entonces

$$a_1(z_1 + \lambda a_1) + \ldots + a_n(z_n + \lambda a_n) + d = 0 \Longrightarrow a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + \lambda(a_1^2 + \ldots a_n^2) + d = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda = -\frac{a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + d}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(P, H) = \mathrm{d}(P_1P_0) &= ||\overrightarrow{PP_0}|| = \\ &= \sqrt{(\lambda a_1)^2 + \ldots + (\lambda a_n^2)} = \\ &= |\lambda| + \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \\ &= \frac{|a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} \end{aligned}$$

Observación

Si H y H' son hiperplanos paralelos y $\mathcal{R}$ es rectangular,

- $H \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + d = 0$
- $H' \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + d' = 0$

$$\mathrm{d}(H, H') = \mathrm{d}(P, H') = \frac{|a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + d'|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Si $P = (z_1, \ldots, z_n)_{\mathcal{R}} \in H$, entonces

$$\mathrm{d}(H, H') = \frac{|d' - d|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}$$

4.4. Distancias en el espacio tridimensional

Suponemos $\mathbb{A}$ espacio afín euclídeo tridimensional orientado ($\Longleftrightarrow V$ orientado).

4.4.1. Proposición - Distancia de un punto a una recta

Si $P \in \mathbb{A}$ y $r = A + \langle v \rangle$ es una recta, entonces

$$\mathrm{d}(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge v||}{||v||}$$

<u>Demostración</u>

Sea P_0 la proyección ortogonal de P sobre L. $\mathrm{d}(PP_0) = \mathrm{d}(P, L)$. $\overrightarrow{AP} \wedge d = (\overrightarrow{AP_0} + \overrightarrow{P_0P}) \wedge v = \overrightarrow{P_0P} \wedge v$. Se tiene

$$\|\overrightarrow{AP} \wedge v\| = \|\overrightarrow{P_0P}\|\|v\| \sin(\widehat{\overrightarrow{P_0P} \wedge v}) = \|\overrightarrow{P_0P}\|\|v\| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}(P, r) = \mathrm{d}(P, P_0) = \|\overrightarrow{P_0P}\| = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge v\|}{\|v\|}$$

4.4.2. Proposición - Distancia entre rectas que se cruzan

Sea $r = A + \langle u \rangle$ y $S = B + \langle v \rangle$ rectas de $\mathbb{A}$. Entonces,

$$\mathrm{d}(r, s) = \frac{|(\overrightarrow{AB} uv)|}{\|u \wedge v\|}$$

<u>Demostración</u>

r, s no se cortan $\Longrightarrow \exists P_0 \in r$ y $Q_0 \in S$ tal que $\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(P_0, Q_0)$ con $\overrightarrow{P_0Q_0} \perp u$ y $\overrightarrow{P_0Q_0} \perp v \Longrightarrow \overrightarrow{P_0Q_0} \in \langle\{u \wedge v\}\rangle$ (u, v son independientes). $\mathrm{d}(r, s)\|u \wedge v\| = \mathrm{d}(P_0, Q_0)\|u \wedge v\| = \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|\|u \wedge v\| = |\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot (u \wedge v)| = |(\overrightarrow{P_0Q_0} - \overrightarrow{P_0A} + Q_0B) \cdot (u \wedge v)| = |\overrightarrow{AB} \cdot (u \wedge v)| = |(\overrightarrow{AB} uv)$.

4.5. Movimientos

Los movimientos son aplicaciones de un espacio afín euclídeo en sí mismo que conservan las distancias. Cuando el espacio afín euclídeo tiene dimensión finita se pueden caracterizar algebraicamente como aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal; en este caso, el conjunto de movimientos es un grupo con la operación composición.

4.5.1. Definición

Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo sobre V. Se dice que la aplicación $M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es un movimiento de $\mathbb{A}$ si conserva las distancias entre los puntos, es decir, si

$$d(P,Q) = d(M(P), M(Q)), \quad P, Q \in \mathbb{A}$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ el conjunto de movimientos de $\mathbb{A}$.

4.5.2. Teorema

Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín euclídeo de dimensión finita sobre V y sea $M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una aplicación. Son equivalentes:

(1) M es un movimiento.

(2) M es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal.

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$ / Sea $A \in \mathbb{A}$. Tenemos que probar que la aplicación $\vec{M} : V \to V$ dada por

$$\vec{M}(v) = \overrightarrow{M(A), M(A+v)}, \quad v \in V$$

es una transformación ortogonal. Es claro que $\vec{M}$ verifica $\vec{M}(0) = \overrightarrow{M(A), M(A)} = 0$. Ahora, para cada $v, w \in V$

$$\begin{aligned} \|\vec{M}(v) - \vec{M}(w)\| &= \|\overrightarrow{M(A), M(A+v)} - \overrightarrow{M(A), M(A+w)}\| \overset{\text{Chasles}}{=} \\ &\overset{\text{Chasles}}{=} \|\overrightarrow{M(A+w), M(A+v)}\| = d(M(A+w), M(A+v)) = \\ &= d(A+w, A+v) = \|\overrightarrow{A+w, A+v}\| \\ &= \|v-w\|. \end{aligned}$$

En particular, $\|\vec{M}(v)\| = \|v\|$, para cada $v \in V$. Sin embargo, esto no llega para ver que es isometría. Veamos que $\vec{M}$ conserva productos escalares. En efecto, dado que

$$\begin{aligned} \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w = \|v-w\|^2 = \|\vec{M}(v) - \vec{M}(w)\|^2 = \\ = \|\vec{M}(v)\|^2 + \|\vec{M}(w)\|^2 - 2\vec{M}(v) \cdot \vec{M}(w) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\vec{M}(u) \cdot \vec{M}(w) \end{aligned}$$

se tiene

$$v \cdot w = \vec{M}(v) \cdot \vec{M}(w)$$

y por tanto, $\vec{M}$ es una transformación ortogonal, por lo que es lineal e isometría. Así, M es una afinidad cuya aplicación lineal asociada $\vec{M}$ es una transformación ortogonal, es decir, $\vec{M} \in \mathcal{O}(V)$.

$\Leftarrow /$ Sea $A \in \mathbb{A}$. Por ser $\vec{M}$ una transformación ortogonal, es

$$\begin{aligned} d\left(M(P), M\left(P'\right)\right) &= \left\|\overrightarrow{M(P), M\left(P'\right)}\right\| = \left\|M(A) + \vec{M}(\overrightarrow{AP}), M(A) + \vec{M}\left(\overrightarrow{AP'}\right)\right\| \\ &= \left\|-\vec{M}(\overrightarrow{AP}) + \vec{M}\left(\overrightarrow{AP'}\right)\right\| = \left\|\vec{M}\left(\overrightarrow{PP'}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{PP'}\right\| = d\left(P, P'\right) \end{aligned}$$

Obsérvese que para la implicación $\Leftarrow /$ no hace falta que el espacio afín euclídeo $\mathbb{A}$ tenga dimensión finita.

Ejemplos

(1) Sea A un espacio afín euclídeo. La aplicación identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es un movimiento.

(2) Sea A un espacio afín euclídeo. La aplicación traslación por un vector $v \in V, t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dada por $t_v(P) = P + v$, es un movimiento.

(3) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo y M_1 y M_2 son movimientos de $\mathbb{A}$, entonces $M_2 \circ M_1$ es un movimiento. En efecto,

$$\begin{aligned} d(P, Q) = d\left(M_1(P), M_1(Q)\right) &= d\left(M_2\left(M_1(P)\right), M_2\left(M_1(Q)\right)\right) = \\ &= d\left(\left(M_2 \circ M_1\right)(P), \left(M_2 \circ M_1\right)(Q)\right) \end{aligned}$$

para todo $P, Q \in \mathbb{A}$. Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M_1 y M_2 son movimientos de $\mathbb{A}$, entonces $M_2 \circ M_1$ es un movimiento y $\overrightarrow{M_2 \circ M_1} = \overrightarrow{M_2} \circ \overrightarrow{M_1}$.

(4) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo sobre V y f es una transformación ortogonal de V, entonces la aplicación $M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por

$$M(P) = A' + f(\overrightarrow{AP}),\ A, A' \in \mathbb{A}$$

es un movimiento. De hecho, es el único, en dimensión finita, con $M(A) = A'$ y $\vec{M} = f$.

(5) Si $\mathbb{A}$ es un espacio afín euclídeo de dimensión finita y M es un movimiento de A, entonces existe la aplicación inversa M^{-1} y es un movimiento. En efecto, si M es un movimiento, $\vec{M}$ es una transformación ortogonal, luego $\vec{M}^{-1}$ es una transformación ortogonal y M^{-1} es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es $\vec{M}^{-1}$.

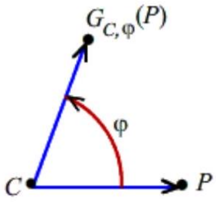
(6) Si V es un espacio vectorial euclídeo, $v \in V$ y f es una transformación ortogonal de V, entonces $t_v \circ f$ es un movimiento, por ser composición movimientos. Recíprocamente, si V tiene dimensión finita y M es un movimiento de V, entonces M es una afinidad y $M = t_{M(0)} \circ \vec{M}$.

4.6. Movimientos en el plano afín euclídeo y su clasificación

Sea $\mathbb{A}$ un plano afín euclídeo orientado sobre V. Describiremos y clasificaremos los movimientos en un plano afín euclídeo orientado utilizando el estudio de las transformaciones ortogonales y la clasificación de transformaciones ortogonales dada en un plano vectorial euclídeo.

4.6.1. Definición

Se llama giro de centro el punto C y ángulo φ a la aplicación $G_{C,\varphi} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $G_{C,\varphi}(P) = C + G_\varphi(\overrightarrow{CP})$, donde $G_\varphi \in \mathcal{O}^+(V)$ es el giro de ángulo φ.



<u>**Observación**</u>

- $G_{C,\varphi}$ son movimientos, ya que son la única afinidad con $G_{C,\varphi}(C) = C$ y $\vec{G_{C,\varphi}} = G_\varphi \in \mathcal{O}^+(V)$.
- $G_{V,0} = \mathrm{Id}_A$, $\forall V \in \mathbb{A}$.

4.6.2. Proposición

Si $\varphi \neq 0$, es C, el único punto fijo del giro de centro C y ángulo φ.

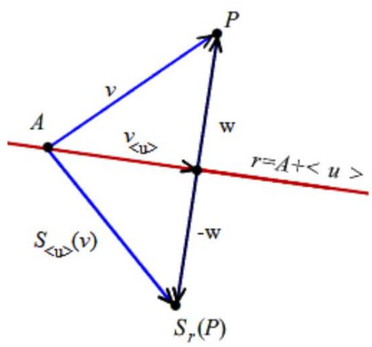
<u>Demostración</u>

Se tiene

$$G_{C,\varphi}(P) = P \iff C + G_\varphi(\overrightarrow{CP}) = P \iff G_\varphi(\overrightarrow{CP}) = \overrightarrow{CP} \overset{\varphi\neq 0}{\iff} \overrightarrow{CP} = 0 \iff C = P$$

4.6.3. Definición

Se llama simetría respecto a la recta $r = A + \langle u \rangle$ a la aplicación $S_r : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, dada por $S_r(P) = A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP})$, donde $S_{\langle u \rangle}$ es la simetría respecto a $\langle u \rangle$.



Observación

S_r es el único movimiento con $S_r(A) = A$, $\vec{S_r} = S_{\langle u \rangle} in \mathcal{O}^-(V)$. Veamos que S_r no depende de A: $A' \in r$, entonces $A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = A' + S_{\langle u \rangle}\left(\overrightarrow{A'P}\right)$. En efecto, dado que $\overrightarrow{AA'} \in \langle u \rangle$, se tiene $S_{\langle u \rangle}\left(\overrightarrow{AA'}\right) = \overrightarrow{AA'}$ y por tanto $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = S_{\langle u \rangle}\left(\overrightarrow{AA' + A'P}\right) = \overrightarrow{AA'} + S_{\langle u \rangle}\left(\overrightarrow{A'P}\right)$. En particular, $S_r(A') = A'$, $\forall A' \in r$.

4.6.4. Proposición

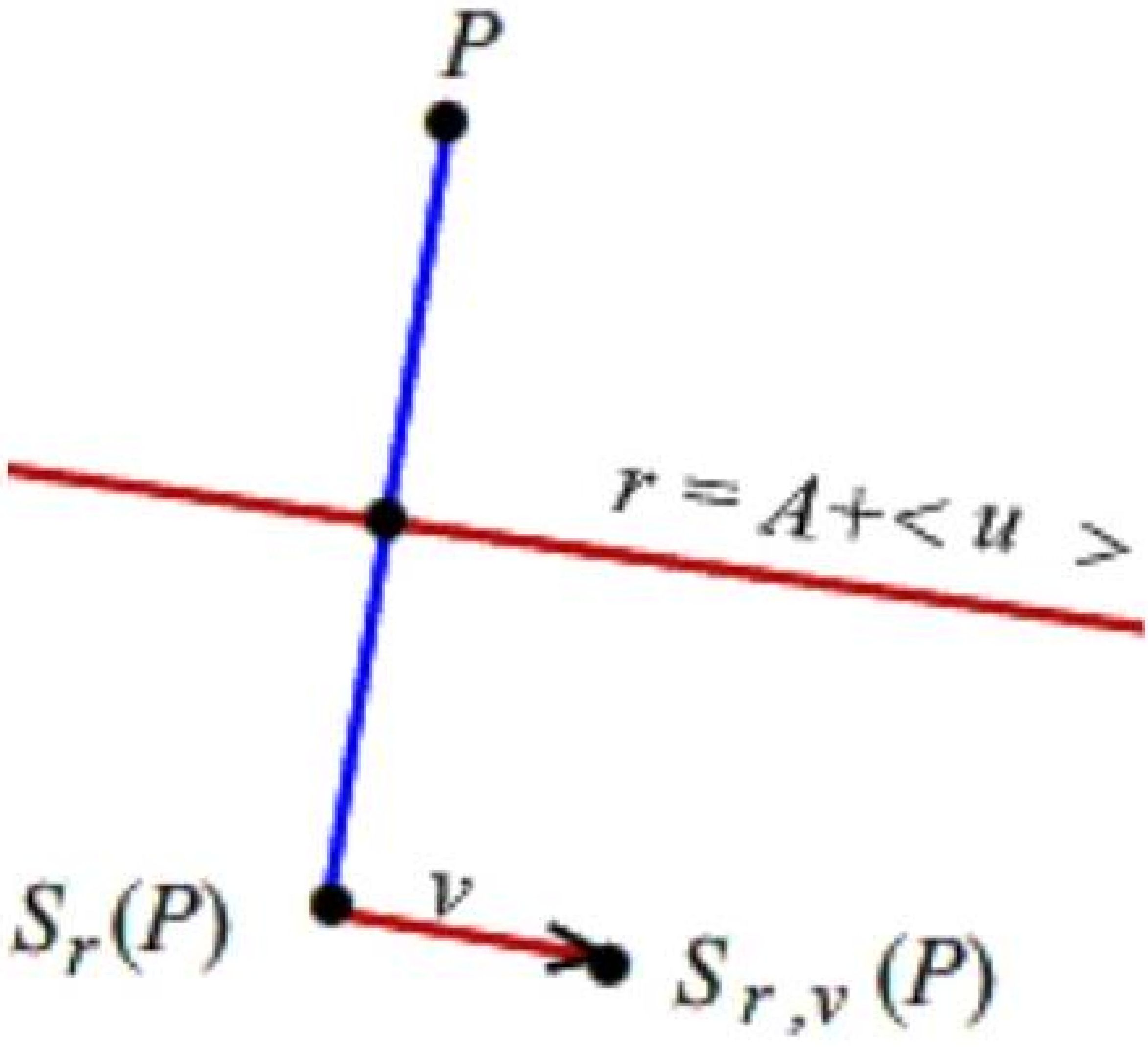
Los únicos puntos fijos de la simetría S_r son los puntos de r.

Demostración

Se tiene

$$S_r(P) = P \iff A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = P \iff S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} \iff \overrightarrow{AP} \in \langle u \rangle \iff P \in r$$

3.4.6. Definición. Se llama simetría deslizante respecto a la recta $r = A + \langle u \rangle$ y vector de traslación $v \in \langle u \rangle, v \neq 0$ a la aplicación $S_{r,v} = t_v \circ S_r$, donde S_r es la simetría respecto a la recta r.



Por 3,3,3(3), S_r es un movimiento.

3.4.7. Proposición. La simetría deslizante $S_{r,v}$ no tiene puntos fijos.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo: Si P es un punto fijo de $S_{r,v}$, entonces

$$S_{r,v}(P) = P \Longleftrightarrow A + S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = P \Longleftrightarrow S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) + v = \overrightarrow{AP}$$

Dado que además, $S_{\langle u \rangle}(\overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AP} + v$, se tiene $v = 0$, lo cual contradice la definición de simetría deslizante.

3.4.8. Ejercicio. Prueba que la descomposición de una simetría deslizante como composición de la simetría respecto a una recta y una traslación por un vector de la dirección de la recta es única.

3.4.9. Teorema. (Teorema de clasificación de los movimientos del plano afín euclídeo) Sea A un plano afín euclídeo orientado sobre V, $M : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un movimiento y A un punto cualquiera de $\mathbb{A}$. Pongamos $V_1 = \ker\left(\vec{M} - \mathrm{id}_V\right)$. Se tiene

(1) Si $\vec{M} = \mathrm{id}_V$, entonces $M = t_v$ es una traslación con $v = \overrightarrow{AM(A)}$.

(2) Si $\vec{M} \in \mathbb{O}^+(V)$ y $\vec{M} \neq \mathrm{id}_V$, entonces $\vec{M}$ es un giro de ángulo $\varphi \neq 0$ y M es el giro de centro $C = A - v$ y ángulo φ, siendo v el vector que verifica $\vec{M}(v) - v = \overrightarrow{AM(A)}$.

(3) Si $\vec{M} \in \mathbb{O}^-(V)$ y $\overrightarrow{AM(A)} \in (V_1)^\perp$, entonces M es la simetría respecto a la recta $r = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM(A)} + V_1$