

# BE 1 - Régression Linéaire

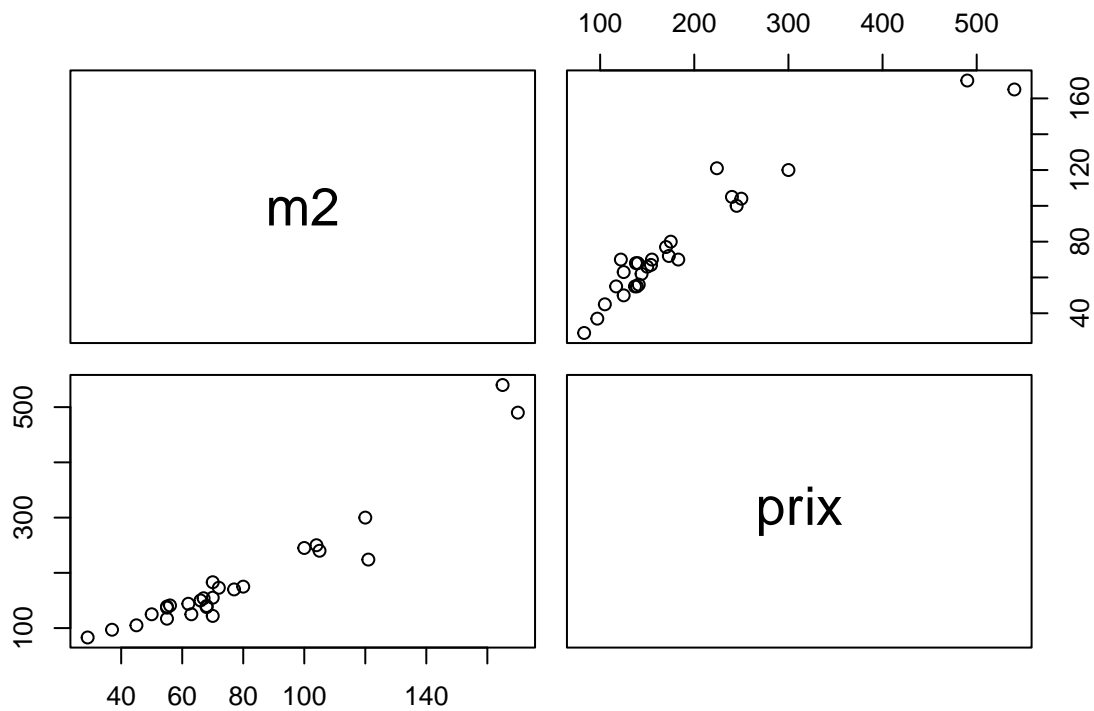
## Exercice 1 - Prix de mise en vente des appartements a Grenoble

### 0) Chargement des données

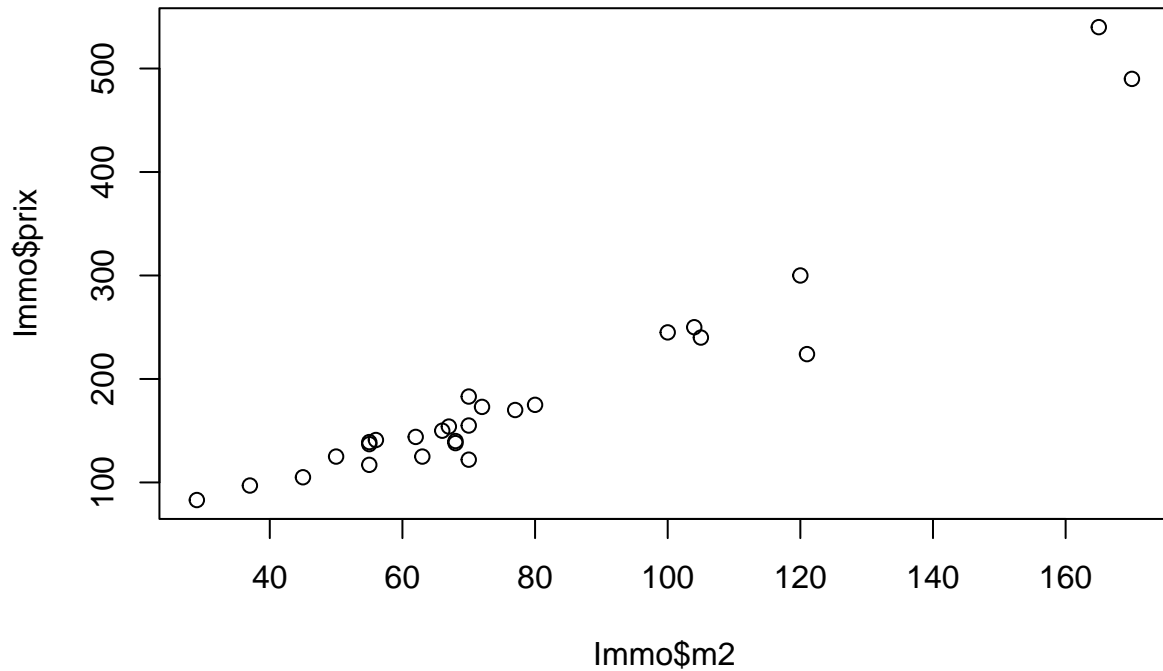
```
Immo = read.table(file = "Data/immo.txt", header = TRUE)
head(Immo)
```

```
##   m2 prix
## 1 29   83
## 2 37   97
## 3 45  105
## 4 70  122
## 5 50  125
## 6 55  117
```

```
pairs(Immo)
```



```
plot(Immo$m2, Immo$prix)
```



### 1-0) Modèle de régression linéaire

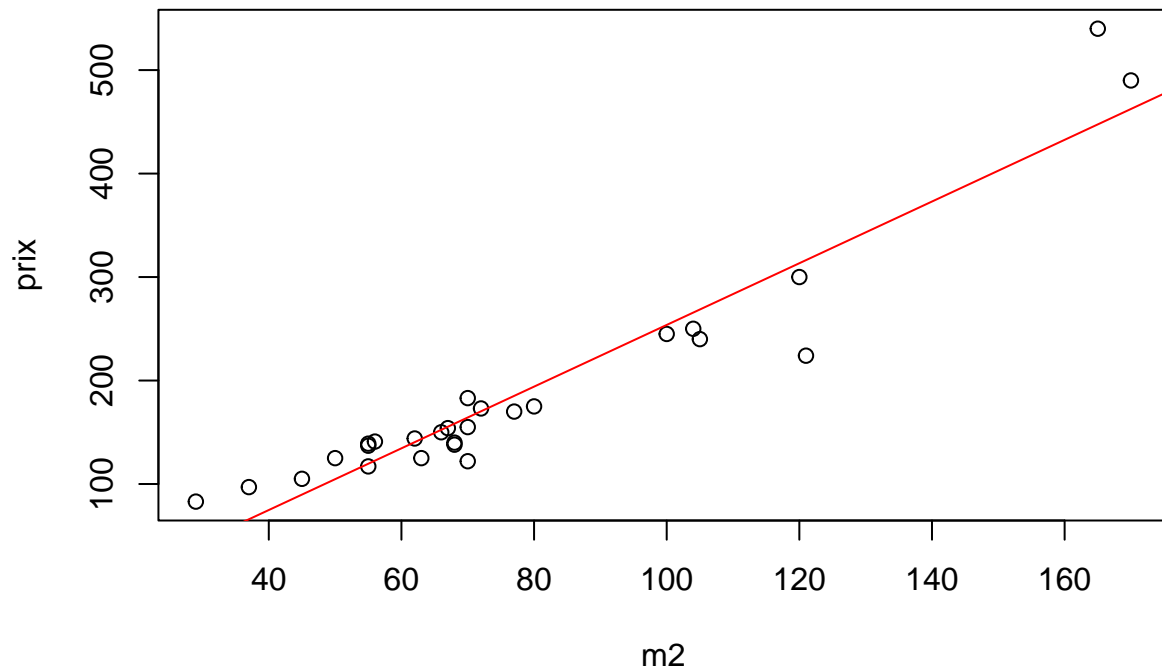
```
mod1 = lm(prix~m2, data = Immo)
summary(mod1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = prix ~ m2, data = Immo)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -92.347 -16.996  -2.367   18.578   92.470
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -44.4093    16.0127  -2.773   0.0103 *
## m2           2.9815     0.1889   15.786 1.65e-14 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 33.11 on 25 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.9088, Adjusted R-squared:  0.9052
## F-statistic: 249.2 on 1 and 25 DF,  p-value: 1.646e-14
```

### 1-a) Droite de régression et données sur le même graphique

```
plot(prix~m2, data = Immo)
abline(mod1$coefficients, col = 'red')
```



### 1-b) Pourcentage de variance expliqué par la régression

Le coefficient de détermination  $R^2$  mesure la part de la variance du prix expliquée par la variable  $m2$ . Le modèle explique donc environ 90.88 % de la variabilité observée dans les prix de ventes à Grenoble

### 1-c) Analyse du test de student

Pour vérifier si la surface des appartements a un effet significatif sur le prix, on réalise un test de Student sur le coefficient associé à la variable  $m2$ .

**Hypothèses :**

$$H_0 : \beta_{m2} = 0 \quad (\text{la surface n'a pas d'effet sur le prix})$$

$$H_1 : \beta_{m2} \neq 0 \quad (\text{la surface a un effet sur le prix})$$

**Statistique du test :**

$$t = \frac{\hat{\beta}_{m2}}{SE(\hat{\beta}_{m2})} \approx 15.786$$

Sous l'hypothèse nulle  $H_0$ , cette statistique suit une loi de Student à  $n - 2 = 25$  degrés de liberté :

$$t \sim t_{25}$$

**p-value :** La p-value associée est très faible :

$$p = 1.65 \times 10^{-14} \ll 0.05$$

**Conclusion :** Comme la p-value est extrêmement faible, on rejette l'hypothèse nulle  $H_0$  au seuil de 5%. Cela signifie que la surface des appartements ( $m2$ ) a un effet significatif sur le prix.

## 2) Prédiction du prix de vente à 90 m2 et intervalle de confiance à 95%

```
predict(mod1, newdata = data.frame(m2 = 90), interval = "confidence", level = 0.95)
```

```
##          fit      lwr      upr
## 1 223.9215 209.962 237.8809
```

D'après la prédiction effectuée, on peut prévoir un prix de vente moyen de 223,921.50 € pour un appartement de 90 m2.

L'intervalle de confiance à 95% pour la mise en vente d'un appartement de 90 m2 a Grenoble est [209,962 ; 237,880.90] €.

## 3) Intervalle de prédiction à 95%

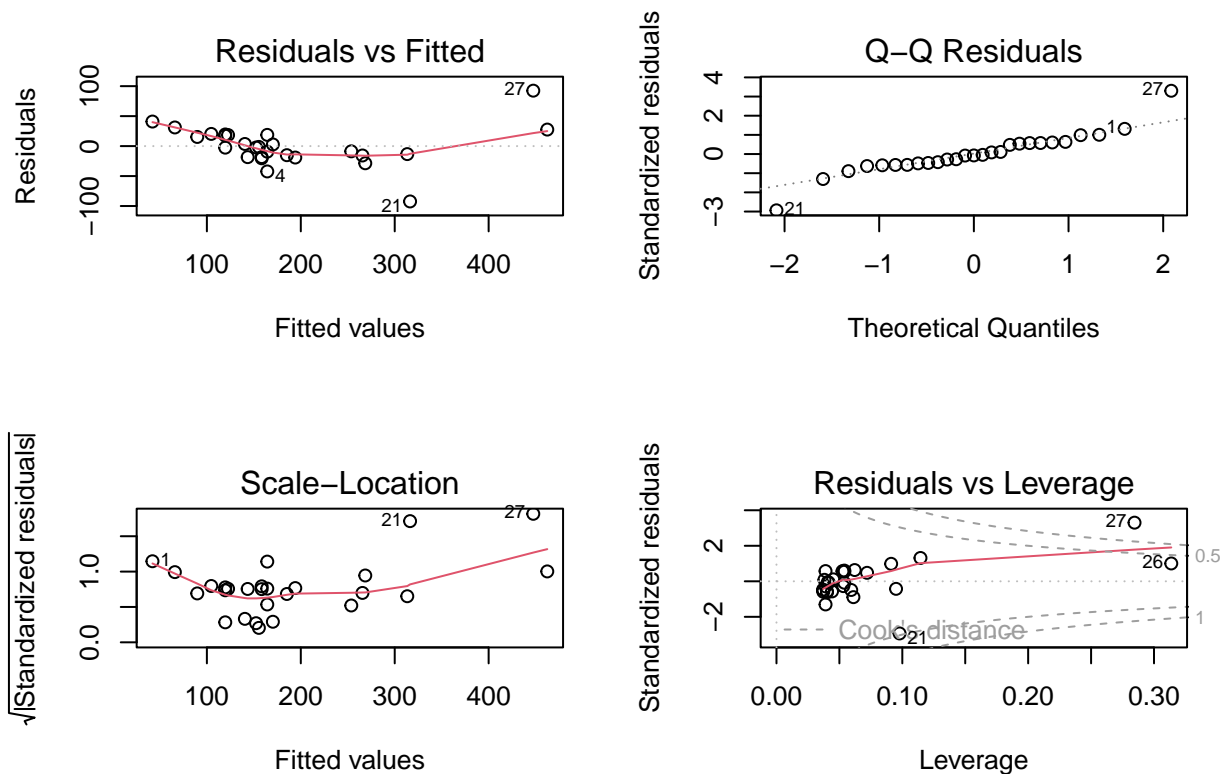
```
predict(mod1, newdata = data.frame(m2 = 90), interval = "prediction", level = 0.95)
```

```
##          fit      lwr      upr
## 1 223.9215 154.3086 293.5343
```

L'intervalle de prédiction à 95 % pour un appartement de 90 m2 est [154 ; 294] K€. Le prix proposé de 280 K€ se trouve à l'intérieur de cet intervalle. On peut donc conclure qu'il est statistiquement acceptable de mettre en vente cet appartement à 280 K€, car ce prix est compatible avec le modèle linéaire établi.

## 4) Etude des résidus et deuxième modèle

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(mod1)
```

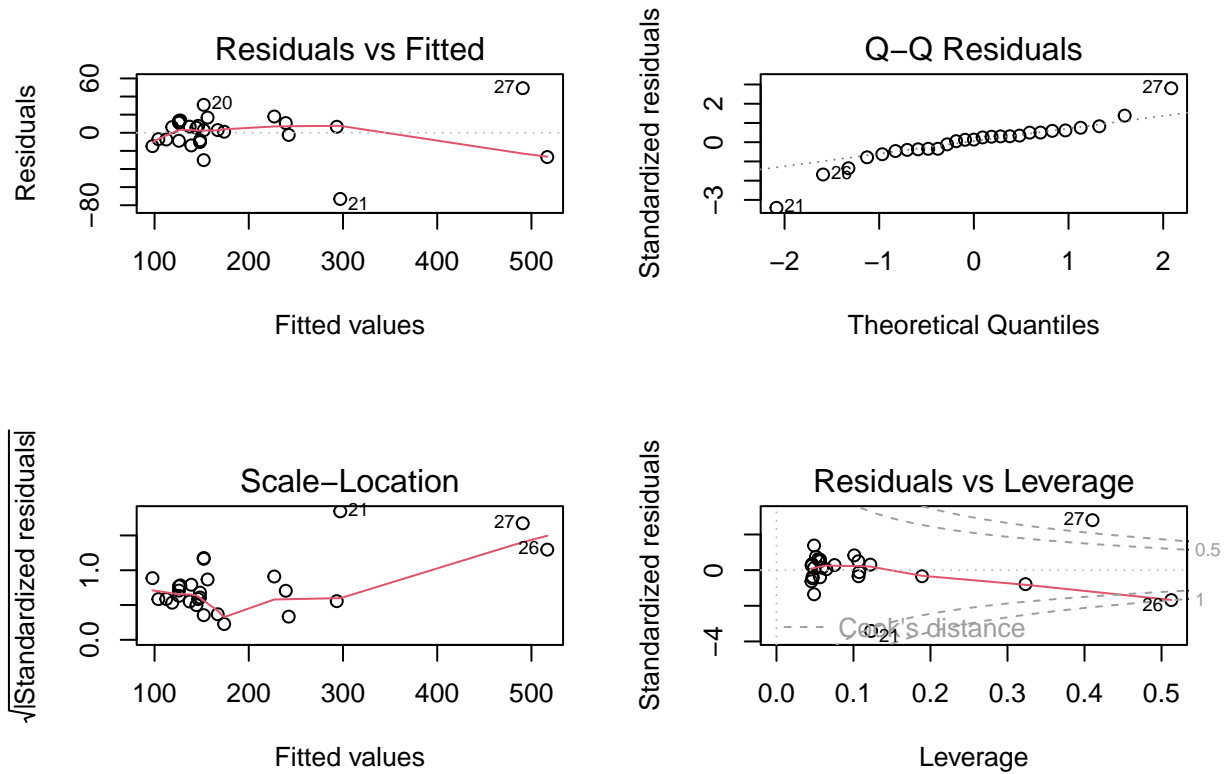


On observe une légère courbure en forme de U sur la courbe residual vs fitted : et donc une répartition qui n'est pas vraiment aléatoire autour de 0.

```
mod2 <- lm(prix ~ poly(m2,2), data = Immo)
summary(mod2)
```

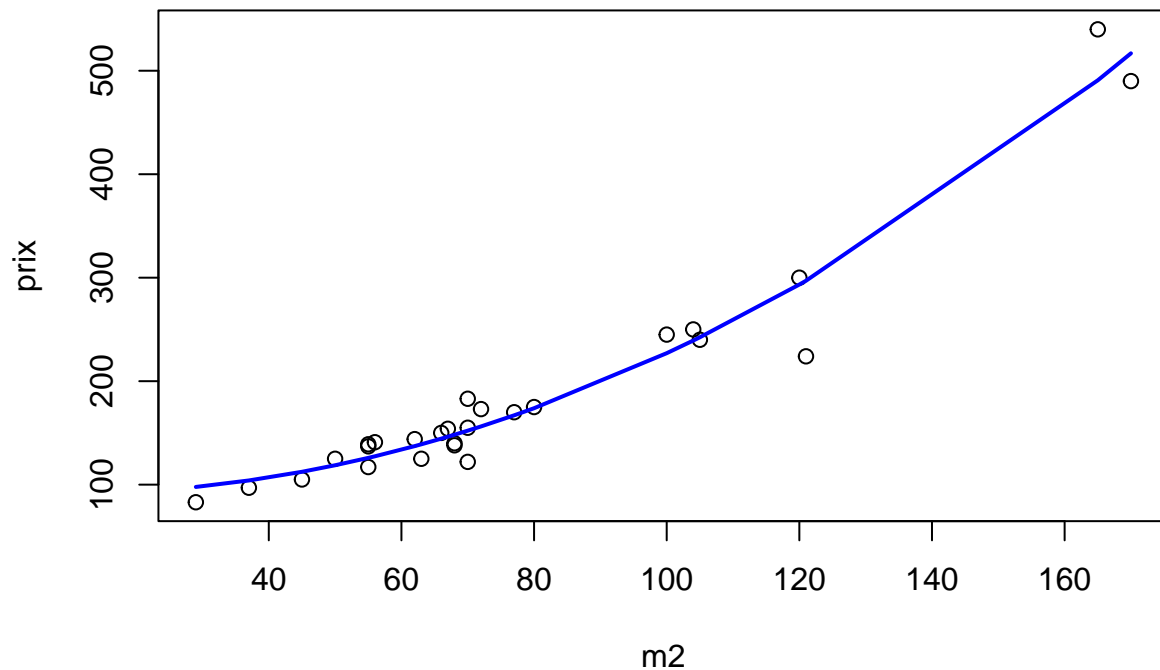
```
##
## Call:
## lm(formula = prix ~ poly(m2, 2), data = Immo)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -73.053  -8.565   2.987  10.933  49.232
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   187.481     4.401   42.598 < 2e-16 ***
## poly(m2, 2)1   522.722    22.869   22.857 < 2e-16 ***
## poly(m2, 2)2  121.905    22.869    5.331 1.8e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 22.87 on 24 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9583, Adjusted R-squared:  0.9548
## F-statistic: 275.4 on 2 and 24 DF, p-value: < 2.2e-16
```

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(mod2)
```



Ce nouveau modèle explique 95.83% de la variance, et la p-value de chacun des coefficients est très largement inférieure à 0.05.  $m_2$  et  $(m_2)^2$  ont donc un impact significatif sur le prix de vente des appartements à Grenoble

```
plot(prix ~ m2, data = Immo)
o <- order(Immo$m2)
lines(Immo$m2[o], fitted(mod2)[o], col="blue", lwd=2)
```



```
predict(mod2, newdata = data.frame(m2 = 90), interval = "prediction", level = 0.95)
```

```
##          fit      lwr      upr
## 1 198.8068 149.657 247.9566
```

L'intervalle de prédiction à 95% pour un appartement de 90 m2 avec ce nouveau modèle est maintenant [149 ; 248] K€. L'incertitude de prédiction a donc bien été réduite avec ce modèle.

## Exercice 2 - Valeur des logements des villes aux alentours de Boston

### 0) Chargement des données et création du modèle

```
Housing = read.table("Data/housing_new.txt", header = TRUE)
head(Housing)
```

```
##      CRIM  ZN  INDUS  CHAS    NOX     RM   AGE     DIS  RAD  TAX  PTRATIO  LSTAT  class
## 1  0.006  18   2.31    0  0.538  6.575  65.2  4.090   1  296    15.3   4.98   24.0
## 2  0.027   0   7.07    0  0.469  6.421  78.9  4.967   2  242    17.8   9.14   21.6
## 3  0.027   0   7.07    0  0.469  7.185  61.1  4.967   2  242    17.8   4.03   34.7
## 4  0.032   0   2.18    0  0.458  6.998  45.8  6.062   3  222    18.7   2.94   33.4
## 5  0.069   0   2.18    0  0.458  7.147  54.2  6.062   3  222    18.7   5.33   36.2
## 6  0.030   0   2.18    0  0.458  6.430  58.7  6.062   3  222    18.7   5.21   28.7
```

```
mod_full <- lm(class ~ ., data = Housing)
summary(mod_full)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = class ~ ., data = Housing)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.1299  -2.7673  -0.5816   1.9411  26.2520
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  41.617992   4.936061   8.431 3.79e-16 ***
## CRIM         -0.121391   0.033000  -3.678 0.000260 ***
## ZN           0.046962   0.013879   3.384 0.000772 ***
## INDUS        0.013462   0.062145   0.217 0.828591
## CHAS         2.840102   0.870005   3.264 0.001173 **
## NOX        -18.758738   3.851359  -4.871 1.50e-06 ***
## RM           3.658127   0.420244   8.705 < 2e-16 ***
## AGE          0.003610   0.013329   0.271 0.786658
## DIS         -1.490767   0.201622  -7.394 6.17e-13 ***
## RAD          0.289397   0.066908   4.325 1.84e-05 ***
## TAX         -0.012681   0.003801  -3.336 0.000913 ***
## PTRATIO     -0.937562   0.132207  -7.092 4.62e-12 ***
## LSTAT       -0.552013   0.050659 -10.897 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.798 on 493 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7343, Adjusted R-squared:  0.7278
## F-statistic: 113.5 on 12 and 493 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

### 1) Part de la variance expliquée par le modèle

Le coefficient de détermination  $R^2$  mesure la part de la variance de la valeur des logements (class) expliquée par le modèle. Le modèle explique donc environ 73.43 % de la variabilité observée dans la valeur des logements.

### 2) Part de la variance expliquée par le modèle

On teste  $H_0$  : tous les coefficients des variables explicatives sont nuls. La statistique  $F = 113.5$  suit une loi de Fisher  $F_{12,493}$  sous  $H_0$ . Avec une  $p$ -value  $< 2.2 \times 10^{-16}$ , très inférieure au risque de première espèce  $\alpha = 1\%$ , on rejette  $H_0$ . Le modèle global est donc hautement significatif et les variables explicatives ont un effet sur la valeur des logements.

### 3) Variables significatives dans le modèle

En considérant un seuil de significativité  $\alpha = 1\%$ , les variables significatives dans le modèle sont CRIM, ZN, NOX, RM, DIS, RAD, TAX, PTRATIO et LSTAT. Les variables INDUS et AGE ne sont pas significatives. Il n'est cependant pas certain que les autres variables n'aient aucun effet réel, car certaines peuvent être masquées par la colinéarité ou la variabilité de l'échantillon.



#### 4) Simplification du modèle

Pour simplifier le modèle, on utilise la méthode stepwise backward, qui supprime progressivement les variables les moins significatives afin de minimiser le critère AIC. Cette méthode permet de réduire le nombre de variables tout en conservant un modèle performant pour expliquer la valeur des logements. Le modèle final ne contient que les variables ayant un effet significatif et améliore la lisibilité et l'interprétabilité du modèle.

```
mod_simpl = step(mod_full, direction = "backward", trace = FALSE)
summary(mod_simpl)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = class ~ CRIM + ZN + CHAS + NOX + RM + DIS + RAD +
##     TAX + PTRATIO + LSTAT, data = Housing)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.1809  -2.7623  -0.6239   1.8454  26.3913
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  41.452529   4.903305   8.454 3.17e-16 ***
## CRIM         -0.121667   0.032919  -3.696 0.000244 ***
## ZN           0.046190   0.013673   3.378 0.000787 ***
## CHAS         2.871969   0.862589   3.329 0.000935 ***
## NOX        -18.263334   3.565266  -5.123 4.33e-07 ***
## RM           3.672962   0.409125   8.978 < 2e-16 ***
## DIS         -1.515957   0.187672  -8.078 5.07e-15 ***
## RAD           0.283927   0.063945   4.440 1.11e-05 ***
## TAX         -0.012291   0.003407  -3.608 0.000340 ***
## PTRATIO     -0.930993   0.130423  -7.138 3.39e-12 ***
## LSTAT       -0.546504   0.047442 -11.519 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.789 on 495 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.7342, Adjusted R-squared:  0.7289
## F-statistic: 136.8 on 10 and 495 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

#### 5) Evaluation du modèle obtenu

Le nouveau modèle explique 73.42% de la variance, soit très proche de ce qu'explique le modèle complet, mais avec moins de variables donc plus de simplicité. Tous les coefficients des variables retenues ont une p-value inférieure à 0.01. Les variables retenues sont donc toutes significatives.

#### 6) Proposition d'un meilleur modèle

```
# modèle avec toutes les interactions
new_full_model <- lm(class ~ (. )^2, data = Housing)
summary(new_full_model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = class ~ (.)^2, data = Housing)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -8.9484 -1.6550 -0.0683  1.4551 19.3056
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -1.301e+02  6.051e+01  -2.151  0.032061 *
## CRIM          -1.899e+01  6.695e+00  -2.836  0.004783 **
## ZN            -1.125e-01  3.530e-01  -0.319  0.750107
## INDUS        -2.339e+00  1.550e+00  -1.510  0.131854
## CHAS          5.811e+01  1.918e+01   3.031  0.002590 **
## NOX           3.470e+01  7.593e+01   0.457  0.647895
## RM            2.464e+01  5.753e+00   4.282  2.29e-05 ***
## AGE           9.756e-01  2.577e-01   3.785  0.000175 ***
## DIS          -1.679e+00  3.899e+00  -0.431  0.666847
## RAD           1.241e+00  2.261e+00   0.549  0.583248
## TAX           5.039e-02  1.177e-01   0.428  0.668769
## PTRATIO       3.080e+00  2.607e+00   1.181  0.238132
## LSTAT         1.144e+00  8.232e-01   1.389  0.165489
## CRIM:ZN        3.458e-01  1.834e-01   1.885  0.060103 .
## CRIM:INDUS     6.457e-02  4.581e-01   0.141  0.887982
## CRIM:CHAS      2.126e+00  5.737e-01   3.706  0.000238 ***
## CRIM:NOX      -2.208e+00  8.471e-01  -2.607  0.009456 **
## CRIM:RM        2.476e-01  4.438e-02   5.580  4.29e-08 ***
## CRIM:AGE       6.166e-03  3.377e-03   1.826  0.068545 .
## CRIM:DIS       4.235e-02  8.854e-02   0.478  0.632695
## CRIM:RAD      -4.317e-01  5.955e-01  -0.725  0.468877
## CRIM:TAX       2.120e-02  4.391e-02   0.483  0.629551
## CRIM:PTRATIO   6.211e-01  3.381e-01   1.837  0.066865 .
## CRIM:LSTAT     3.392e-02  5.494e-03   6.174  1.55e-09 ***
## ZN:INDUS      -1.067e-03  4.795e-03  -0.222  0.824037
## ZN:CHAS       -1.948e-02  6.555e-02  -0.297  0.766518
## ZN:NOX         9.731e-02  4.857e-01   0.200  0.841298
## ZN:RM          2.403e-03  2.668e-02   0.090  0.928277
## ZN:AGE         3.906e-05  8.750e-04   0.045  0.964413
## ZN:DIS         8.290e-03  7.670e-03   1.081  0.280383
## ZN:RAD        -3.323e-03  7.155e-03  -0.464  0.642628
## ZN:TAX         4.215e-04  1.810e-04   2.329  0.020336 *
## ZN:PTRATIO    -3.032e-03  7.215e-03  -0.420  0.674540
## ZN:LSTAT      -1.011e-02  4.473e-03  -2.260  0.024306 *
## INDUS:CHAS    -2.902e-01  3.883e-01  -0.747  0.455324
## INDUS:NOX      2.585e+00  1.480e+00   1.747  0.081349 .
## INDUS:RM       3.548e-01  1.358e-01   2.612  0.009310 **
## INDUS:AGE      8.263e-04  3.744e-03   0.221  0.825412
## INDUS:DIS     -4.160e-02  6.417e-02  -0.648  0.517162
## INDUS:RAD     -1.608e-02  5.118e-02  -0.314  0.753511
## INDUS:TAX      5.210e-04  6.194e-04   0.841  0.400735
## INDUS:PTRATIO -6.148e-02  3.848e-02  -1.598  0.110855
## INDUS:LSTAT   -2.350e-03  1.557e-02  -0.151  0.880060
## CHAS:NOX      -4.362e+01  1.206e+01  -3.616  0.000335 ***
```

```

## CHAS:RM      -5.395e+00  1.181e+00  -4.569  6.43e-06 ***
## CHAS:AGE      3.674e-02  5.985e-02   0.614  0.539613
## CHAS:DIS      4.268e-01  1.359e+00   0.314  0.753623
## CHAS:RAD     -6.095e-01  5.851e-01  -1.042  0.298136
## CHAS:TAX      4.612e-02  3.756e-02   1.228  0.220195
## CHAS:PTRATIO -5.931e-01  7.157e-01  -0.829  0.407735
## CHAS:LSTAT   -2.284e-01  1.864e-01  -1.225  0.221114
## NOX:RM        3.722e+00  5.408e+00   0.688  0.491714
## NOX:AGE     -7.436e-01  2.324e-01  -3.200  0.001475 **
## NOX:DIS      2.229e+00  3.794e+00   0.588  0.557121
## NOX:RAD      4.322e-01  1.931e+00   0.224  0.822998
## NOX:TAX     -4.754e-02  1.340e-01  -0.355  0.722906
## NOX:PTRATIO  -3.138e+00  3.172e+00  -0.989  0.323152
## NOX:LSTAT     1.723e+00  6.116e-01   2.818  0.005064 **
## RM:AGE     -5.887e-02  2.261e-02  -2.603  0.009553 **
## RM:DIS      2.363e-01  3.352e-01   0.705  0.481144
## RM:RAD     -9.412e-02  1.545e-01  -0.609  0.542839
## RM:TAX     -2.224e-02  1.009e-02  -2.204  0.028025 *
## RM:PTRATIO  -4.893e-01  2.216e-01  -2.208  0.027755 *
## RM:LSTAT    -3.035e-01  4.198e-02  -7.231  2.24e-12 ***
## AGE:DIS     -1.537e-02  9.066e-03  -1.695  0.090728 .
## AGE:RAD      1.359e-02  4.248e-03   3.198  0.001487 **
## AGE:TAX     -2.951e-04  2.220e-04  -1.329  0.184409
## AGE:PTRATIO -9.323e-03  6.852e-03  -1.361  0.174336
## AGE:LSTAT    -5.298e-03  1.961e-03  -2.702  0.007163 **
## DIS:RAD     -2.802e-02  7.141e-02  -0.392  0.694992
## DIS:TAX     -3.811e-03  2.502e-03  -1.524  0.128348
## DIS:PTRATIO -5.053e-02  1.016e-01  -0.497  0.619153
## DIS:LSTAT     1.264e-01  4.875e-02   2.594  0.009827 **
## RAD:TAX     -3.544e-04  1.470e-03  -0.241  0.809534
## RAD:PTRATIO  -3.277e-02  8.559e-02  -0.383  0.702012
## RAD:LSTAT    -2.747e-02  1.564e-02  -1.757  0.079657 .
## TAX:PTRATIO   7.359e-03  2.533e-03   2.905  0.003865 **
## TAX:LSTAT    -1.401e-03  9.999e-04  -1.401  0.161937
## PTRATIO:LSTAT 6.569e-03  2.909e-02   0.226  0.821481
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.957 on 427 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9126, Adjusted R-squared:  0.8967
## F-statistic: 57.18 on 78 and 427 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

```

best_model <- step(new_full_model, direction = "backward", trace = FALSE)
summary(best_model)

```

```

##
## Call:
## lm(formula = class ~ CRIM + ZN + INDUS + CHAS + NOX + RM + AGE +
##     DIS + RAD + TAX + PTRATIO + LSTAT + CRIM:ZN + CRIM:CHAS +
##     CRIM:NOX + CRIM:RM + CRIM:AGE + CRIM:RAD + CRIM:TAX + CRIM:PTRATIO +
##     CRIM:LSTAT + ZN:DIS + ZN:TAX + ZN:LSTAT + INDUS:NOX + INDUS:RM +
##     CHAS:NOX + CHAS:RM + CHAS:AGE + CHAS:PTRATIO + CHAS:LSTAT +
##     NOX:AGE + NOX:PTRATIO + NOX:LSTAT + RM:AGE + RM:TAX + RM:PTRATIO +
##     RM:LSTAT + AGE:DIS + AGE:RAD + AGE:PTRATIO + AGE:LSTAT +

```

```

##      DIS:TAX + DIS:LSTAT + RAD:LSTAT + TAX:PTRATIO + TAX:LSTAT,
##      data = Housing)
##
## Residuals:
##      Min        1Q    Median        3Q        Max
## -8.6710 -1.6207 -0.0225  1.4140 19.7433
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -1.736e+02  2.203e+01  -7.879  2.43e-14 ***
## CRIM         -1.441e+01  5.261e+00  -2.738  0.006420 **
## ZN           -1.404e-01  4.676e-02  -3.002  0.002830 **
## INDUS        -3.569e+00  6.078e-01  -5.873  8.25e-09 ***
## CHAS          6.344e+01  1.170e+01   5.422  9.56e-08 ***
## NOX           6.842e+01  2.907e+01   2.354  0.018999 *
## RM            3.057e+01  2.238e+00  13.660  < 2e-16 ***
## AGE           1.055e+00  1.688e-01   6.247  9.59e-10 ***
## DIS          -5.447e-02  5.716e-01  -0.095  0.924126
## RAD          -1.258e-01  1.625e-01  -0.774  0.439245
## TAX           1.041e-01  3.421e-02   3.043  0.002476 **
## PTRATIO       3.981e+00  1.171e+00   3.398  0.000738 ***
## LSTAT         1.598e+00  4.053e-01   3.944  9.29e-05 ***
## CRIM:ZN        2.005e-01  1.147e-01   1.748  0.081182 .
## CRIM:CHAS      2.373e+00  3.969e-01   5.979  4.51e-09 ***
## CRIM:NOX       -2.330e+00  6.958e-01  -3.349  0.000878 ***
## CRIM:RM        2.354e-01  3.895e-02   6.044  3.11e-09 ***
## CRIM:AGE        5.451e-03  2.846e-03   1.915  0.056085 .
## CRIM:RAD       -3.958e-01  1.642e-01  -2.410  0.016327 *
## CRIM:TAX        1.968e-02  9.539e-03   2.064  0.039615 *
## CRIM:PTRATIO   4.741e-01  2.051e-01   2.311  0.021262 *
## CRIM:LSTAT     3.366e-02  5.097e-03   6.603  1.12e-10 ***
## ZN:DIS          8.404e-03  4.683e-03   1.794  0.073411 .
## ZN:TAX          5.079e-04  1.308e-04   3.883  0.000118 ***
## ZN:LSTAT       -1.016e-02  2.686e-03  -3.784  0.000175 ***
## INDUS:NOX       2.342e+00  5.604e-01   4.180  3.50e-05 ***
## INDUS:RM        3.900e-01  7.590e-02   5.139  4.10e-07 ***
## CHAS:NOX       -3.963e+01  6.587e+00  -6.017  3.64e-09 ***
## CHAS:RM        -5.272e+00  1.021e+00  -5.165  3.59e-07 ***
## CHAS:AGE        5.450e-02  3.464e-02   1.573  0.116318
## CHAS:PTRATIO   -5.742e-01  3.767e-01  -1.524  0.128103
## CHAS:LSTAT     -3.133e-01  1.408e-01  -2.225  0.026574 *
## NOX:AGE        -8.557e-01  1.756e-01  -4.873  1.52e-06 ***
## NOX:PTRATIO    -3.371e+00  1.277e+00  -2.641  0.008560 **
## NOX:LSTAT       1.347e+00  4.196e-01   3.210  0.001421 **
## RM:AGE         -6.759e-02  1.434e-02  -4.715  3.21e-06 ***
## RM:TAX         -2.705e-02  3.328e-03  -8.129  4.09e-15 ***
## RM:PTRATIO     -5.841e-01  1.294e-01  -4.513  8.15e-06 ***
## RM:LSTAT       -2.931e-01  3.639e-02  -8.055  6.95e-15 ***
## AGE:DIS        -1.680e-02  6.530e-03  -2.573  0.010387 *
## AGE:RAD         9.678e-03  1.876e-03   5.158  3.73e-07 ***
## AGE:PTRATIO    -1.051e-02  4.552e-03  -2.308  0.021419 *
## AGE:LSTAT      -5.425e-03  1.606e-03  -3.379  0.000791 ***
## DIS:TAX        -3.862e-03  1.290e-03  -2.994  0.002903 **
## DIS:LSTAT       1.015e-01  3.110e-02   3.263  0.001184 **

```

```

## RAD:LSTAT    -2.054e-02  7.338e-03  -2.799 0.005341 **
## TAX:PTRATIO  4.266e-03  1.453e-03   2.936 0.003493 **
## TAX:LSTAT    -1.816e-03  4.085e-04  -4.446 1.10e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 2.894 on 458 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9102, Adjusted R-squared:  0.901
## F-statistic: 98.78 on 47 and 458 DF,  p-value: < 2.2e-16

```