习题12.49

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 8

习题 (12.49). 求上方由球面 $x^2+y^2+z^2=8$,下方是平面 $z=2$ 所围区域的体积.分别用柱 坐标和球坐标算.

用柱坐标算. 我们先用直角坐标表示出该区域的体积:

$$\int_2^{2\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{8-z^2}}^{\sqrt{8-z^2}}\int_{-\sqrt{8-z^2-x^2}}^{\sqrt{8-z^2-x^2}}dydxdz.$$

然后进行柱坐标代换,令 $z=z,x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$.得到 Jacobi 行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial z}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial z}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta&0\\\sin\theta&r\cos\theta&0\\0&0&1\end{vmatrix}=r.$$

注. 为什么 $\frac{\partial z}{\partial r}=0$?这是因为 z 是一个函数 $z(r,\theta,z)$,当 θ,z 固定时,r 的改变不影响 z.

上述积分可以变为

$$\int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-z^2}}\int_0^{2\pi}rd\theta drdz=\frac{8}{3}(4\sqrt{2}-5).$$

□

用球坐标算. 把上述直角坐标中的积分变为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{2}{\cos\phi}}^{2\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\frac{8}{3}(4\sqrt{2}-5).$$

□