例12.3.4

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 6

例 (12.3.4). 计算
$$\iint_R e^{x^2+y^2}dydx,$$
其中 R 为由 x 轴和曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 所围的半圆形区域.

解. 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,则
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta & \cos\theta \\ \rho\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = -\rho.$$
可见,当 $\rho \neq 0$ 时,Jacobi 矩阵可逆.由于
$$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$
因此
$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1.$$
因此
$$\iint_R e^{x^2+y^2}dydx = \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}dydx = \int_0^{\pi}\int_0^1 |-\rho| e^{\rho^2} d\rho d\theta = \pi(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}).$$
□