

例12.1.65

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 6

习题 (12.1.65). 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2} dx dy = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

证明. 对于固定的 x_0 , 我们先来证明积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2-y^2} dy$$

的收敛性. 也即证明积分

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

的收敛性. 易得

$$\int_1^{\infty} e^{-y^2} dy \leq \int_1^{\infty} e^{-y} dy = e^{-1}.$$

因此可得 $\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$ 的确收敛. 因此我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2-y^2} dy \leq e^{-x_0^2} (2e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-y^2} dy).$$

因此我们可得

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \int_{-b}^b e^{-x^2-y^2} dx dy$$

收敛. 于是前一个等式成立. 下面我们来证明后一个等式. 易得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

□