

## 例12.7.2

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 6

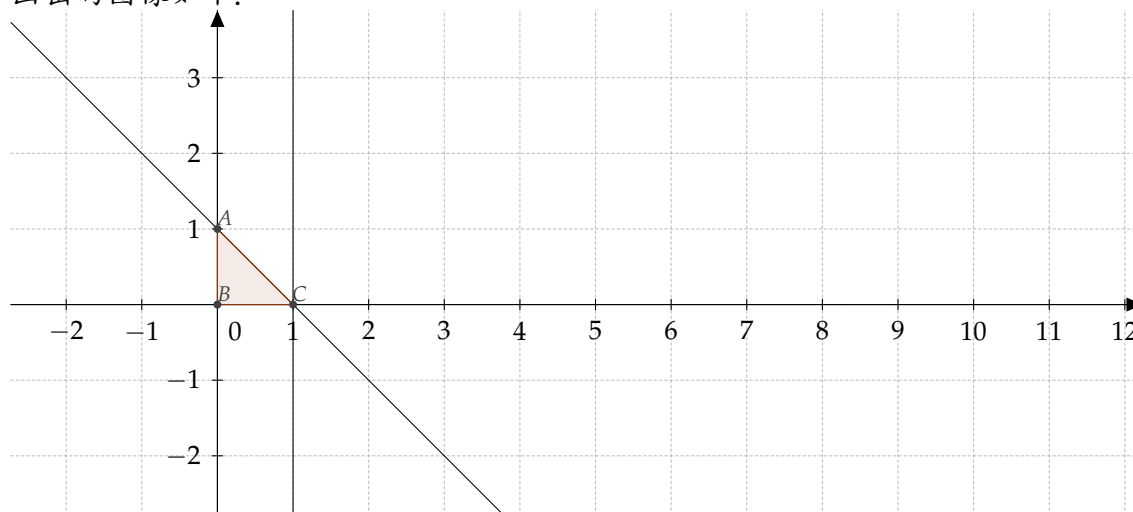
例 (12.7.2). 计算

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dy dx.$$

解. 如上积分的区域为

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x.$$

画出的图像如下:



令  $u = \sqrt{x+y}, v = y - 2x$ . 则

$$\begin{cases} x+y = u^2, \\ y-2x = v. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x = \frac{u^2-v}{3}, \\ y = \frac{2}{3}u^2 + \frac{1}{3}v. \end{cases}$$

易得 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}u & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}u.$$

只有在  $u = 0$  时才为 0, 也就是只有在  $x + y = 0$  时才为 0, 而在  $xy$  平面上, 直线  $y = -x$  的测度为 0.

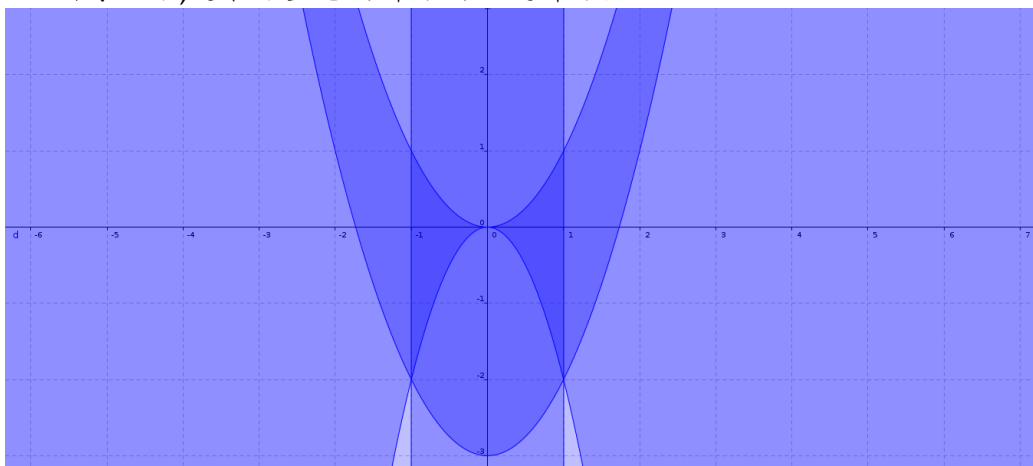
且

$$0 \leq \frac{u^2-v}{3} \leq 1, 0 \leq \frac{2}{3}u^2 + \frac{1}{3}v \leq 1 - \left(\frac{u^2-v}{3}\right).$$

也即

$$0 \leq u \leq 1, -2u^2 \leq v \leq u^2.$$

图像如下, 是最深蓝色的部分的左边部分:



易知

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dy dx = \int_0^1 \int_{-2u^2}^{u^2} \frac{2}{3} u^2 v^2 dv du = \frac{2}{9}.$$

□