线积分定义的一个注

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 9

设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲线 (导函数连续) l 上有定义且连续.l 的方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad (t_0 \le t \le T) \\ z = z(t) \end{cases}$$

则

$$\int_l f(x,y,z)ds = \int_{t_0}^T f[(x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}dt.$$

注. 该定理有明显的物理意义. 我们发现 $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}$ 就是质点在 t 时刻的运动速度. 我认为该定理本质上就是变量替换公式在发挥作用.

证明. 对时间区间 $[t_0,T]$ 进行 n 等分, 成为

$$[t_0, t_0 + \frac{T-t_0}{n}], \cdots, [t_0 + (n-1)\frac{T-t_0}{n}, t_0 + n\frac{T-t_0}{n}]$$

在第 i 个时间区间上, 任选一个值, 这个值是 $f(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}),z(t_{i-1}))$. 根据定义易得

$$\int_l f(x,y,z)ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x(t_{i-1}),y(t_{i-1}),z(t_{i-1}))\Delta S_{i-1}.$$

其中 ΔS_{i-1} 是第 i 段时间段走过的弧长, 根据微分中值定理, 易得

$$\frac{\Delta S_{i-1}}{\frac{T-t_0}{n}} = \sqrt{(x'^2_{t_0+i\lambda\frac{T-t_0}{n}} + y'^2_{t_0+i\lambda\frac{T-t_0}{n}} + z'^2_{t_0+i\lambda\frac{T-t_0}{n}})}, 0 < \lambda < 1.$$

结合导函数的连续性,可得

$$\Delta S_{i-1}=\sqrt{(x'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+y'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+z'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}})}\frac{T-t_0}{n}+o(\frac{T-t_0}{n}).$$

将其代入上上式,得到

$$\begin{aligned}\int_l f(x,y,z)ds &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_{i-q}),y(t_{i-1}),z(t_{i-1}))\sqrt{(x'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+y'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+z'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}})}\frac{T-t_0}{n}\\ &\quad+\lim_{n\to\infty} no(\frac{1}{n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_{i-q}),y(t_{i-1}),z(t_{i-1}))\sqrt{(x'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+y'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}}+z'^2_{t_0+i\frac{T-t_0}{n}})}\frac{T-t_0}{n}\\ &= \int_{t_0}^{T} f[(x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}dt.\end{aligned}$$

□