



## 四、决策树

主讲教师：周志华

机器学习导论

# 决策树模型

决策树基于“树”结构进行决策

- 每个“内部结点”对应于某个属性上的“测试”(test)
- 每个分支对应于该测试的一种可能结果(即该属性的某个取值)
- 每个“叶结点”对应于一个“预测结果”

**学习过程:**通过对训练样本的分析来确定“划分属性”(即内部结点所对应的属性)

**预测过程:**将测试示例从根结点开始,沿着划分属性所构成的“判定测试序列”下行,直到叶结点

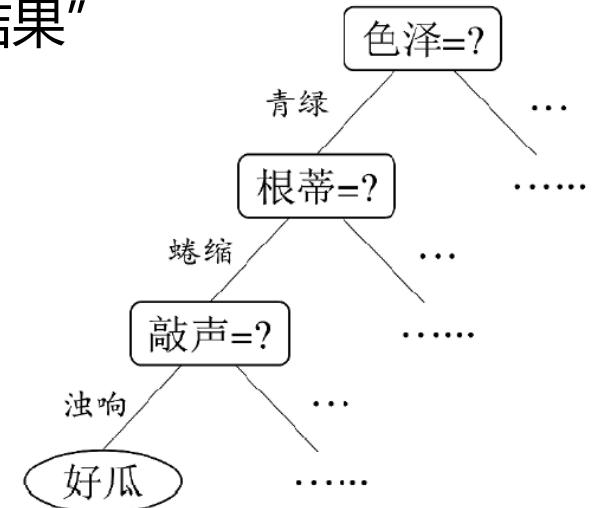


图 4.1 西瓜问题的一棵决策树

# 基本流程

策略：“分而治之” (divide-and-conquer)

自根至叶的递归过程

在每个中间结点寻找一个“划分” (split or test) 属性

三种停止条件：

- (1) 当前结点包含的样本全属于同一类别，无需划分；
- (2) 当前属性集为空，或是所有样本在所有属性上取值相同，无法划分；
- (3) 当前结点包含的样本集合为空，不能划分.

# 基本算法

输入: 训练集  $D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ ;

属性集  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ .

过程: 函数 TreeGenerate( $D, A$ )

1: 生成结点 node;

递归返回, 情形(1)

2: if  $D$  中样本全属于同一类别  $C$  then

3: 将 node 标记为  $C$  类叶结点; return

4: end if

递归返回, 情形(2)

5: if  $A = \emptyset$  OR  $D$  中样本在  $A$  上取值相同 then

6: 将 node 标记为叶结点, 其类别标记为  $D$  中样本数最多的类; return

7: end if

8: 从  $A$  中选择最优划分属性  $a_*$ ;

利用当前结点的后验分布

9: for  $a_*$  的每一个值  $a_*^v$  do

递归返回, 情形(3)

10: 为 node 生成一个分支; 令  $D_v$  表示  $D$  中在  $a_*$  上取值为  $a_*^v$  的样本子集;

11: if  $D_v$  为空 then

12: 将分支结点标记为叶结点, 其类别标记为  $D$  中样本数最多的类; return

13: else

14: 以  $\text{TreeGenerate}(D_v, A \setminus \{a_*\})$  为分支结点

将父结点的样本分布作为  
当前结点的先验分布

15: end if

16: end for

决策树算法的核心

输出: 以 node 为根结点的一棵决策树

## 信息增益 (Information Gain)

信息熵 (entropy) 是度量样本集合 “纯度” 最常用的一种指标  
假定当前样本集合  $D$  中第  $k$  类样本所占的比例为  $p_k$ ，则  $D$   
的信息熵定义为

$$\text{Ent}(D) = - \sum_{k=1}^{|Y|} p_k \log_2 p_k$$

计算信息熵时约定：若  
 $p = 0$ ，则  $p \log_2 p = 0$ .

$\text{Ent}(D)$  的值越小，则  $D$  的纯度越高

$\text{Ent}(D)$  的最小值为 0，  
最大值为  $\log_2 |Y|$ .

信息增益直接以信息熵为基础，计算当前划分对信息熵所  
造成的变化

# 信息增益 (Information Gain)

离散属性  $a$  的取值:  $\{a^1, a^2, \dots, a^V\}$

$D^v$ :  $D$  中在  $a$  上取值 =  $a^v$  的样本集合

以属性  $a$  对 数据集  $D$  进行划分所获得的信息增益为:

$$\text{Gain}(D, a) = \overline{\text{Ent}(D)} - \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \text{Ent}(D^v)$$

↓                            ↓  
划分前的信息熵            第  $v$  个分支的权重,  
                                  样本越多越重要

↓  
划分后的信息熵

ID3算法中使用

# 一个例子

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

该数据集包含 17 个训练样例  $|\mathcal{Y}| = 2$ ，其中正例占  $p_1 = \frac{8}{17}$ ，反例占  $p_2 = \frac{9}{17}$

根结点的信息熵为

$$\text{Ent}(D) = -\sum_{k=1}^2 p_k \log_2 p_k = -\left(\frac{8}{17} \log_2 \frac{8}{17} + \frac{9}{17} \log_2 \frac{9}{17}\right) = 0.998$$

# 一个例子 (续)

以属性“色泽”为例，其对应的3个子集分别为：

$D^1(\text{色泽}=\text{青绿})$

$D^2(\text{色泽}=\text{乌黑})$

$D^3(\text{色泽}=\text{浅白})$

对 $D^1(\text{色泽}=\text{青绿})$ ，  
正例3/6，反例3/6

$$\text{于是: } \text{Ent}(D^1) = -\left(\frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6}\right) = 1.000$$

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

# 一个例子 (续)

$D^2$ (色泽=乌黑),  
正例4/6, 反例2/6

$$\begin{aligned} \text{Ent}(D^2) &= \\ -\left(\frac{4}{6} \log_2 \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \log_2 \frac{2}{6}\right) &= 0.918 \end{aligned}$$

$D^3$ (色泽=浅白),  
正例1/5, 反例4/5

$$\begin{aligned} \text{Ent}(D^3) &= \\ -\left(\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \log_2 \frac{4}{5}\right) &= 0.722 \end{aligned}$$

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

于是, 属性 “色泽”的信息增益为

$$\begin{aligned} \text{Gain}(D, \text{色泽}) &= \text{Ent}(D) - \sum_{v=1}^3 \frac{|D^v|}{|D|} \text{Ent}(D^v) \\ &= 0.998 - \left( \frac{6}{17} \times 1.000 + \frac{6}{17} \times 0.918 + \frac{5}{17} \times 0.722 \right) = 0.109 \end{aligned}$$

## 一个例子 (续)

类似的，其他属性的信息增益为

$$\text{Gain}(D, \text{根蒂}) = 0.143$$

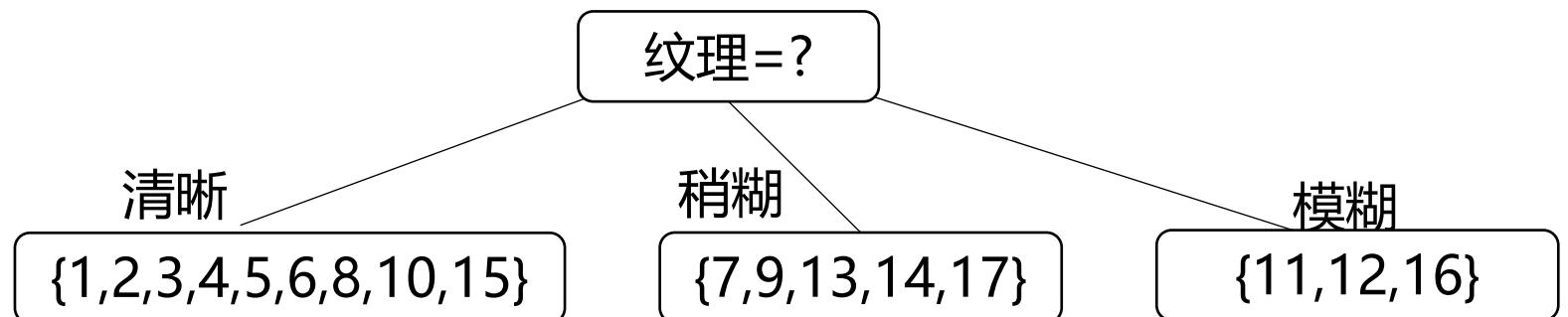
$$\text{Gain}(D, \text{敲声}) = 0.141$$

$$\text{Gain}(D, \text{纹理}) = 0.381$$

$$\text{Gain}(D, \text{脐部}) = 0.289$$

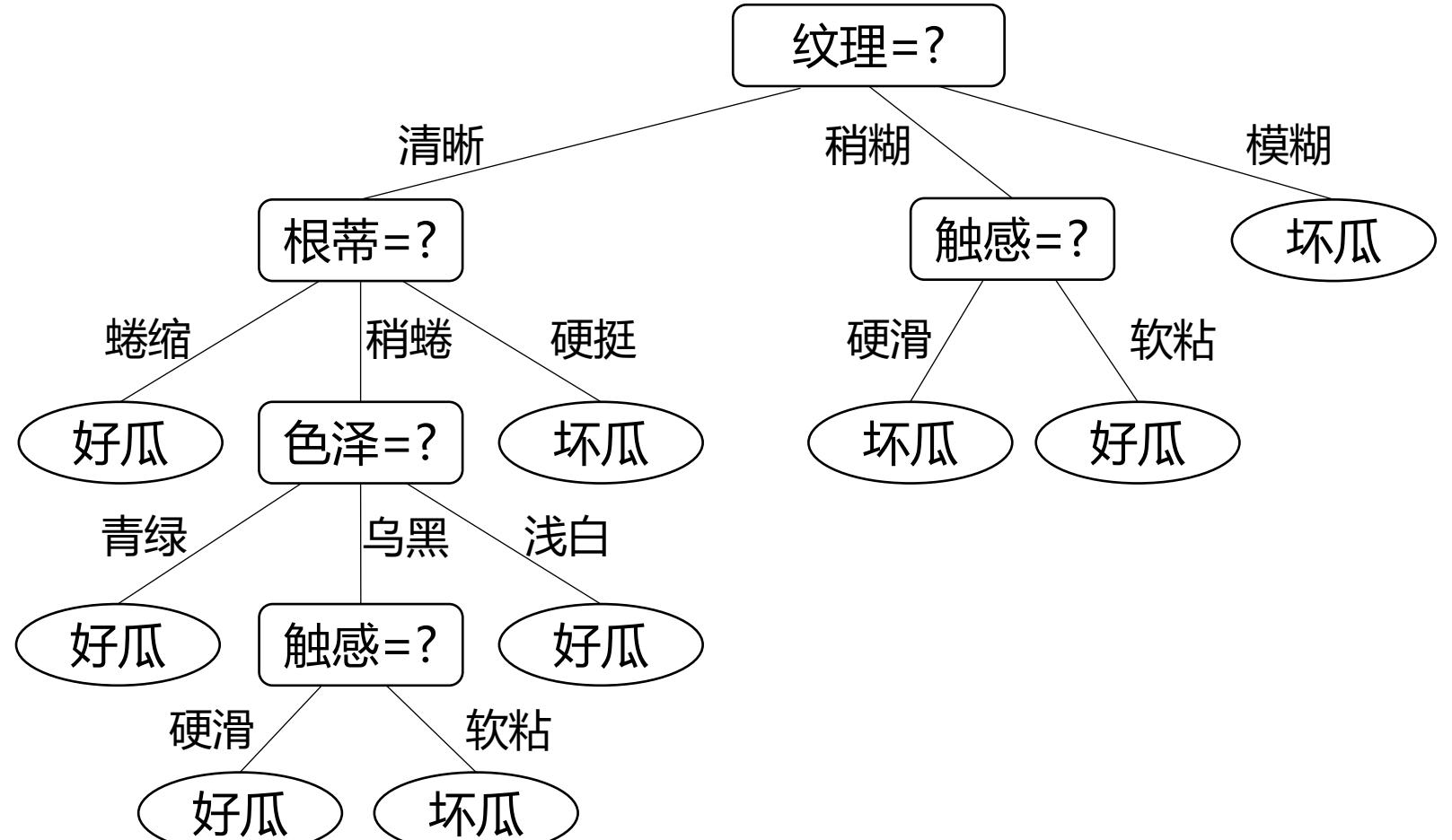
$$\text{Gain}(D, \text{触感}) = 0.006$$

属性 “纹理” 的信息增益最大，被选为划分属性



## 一个例子 (续)

对每个分支结点做进一步划分，最终得到决策树

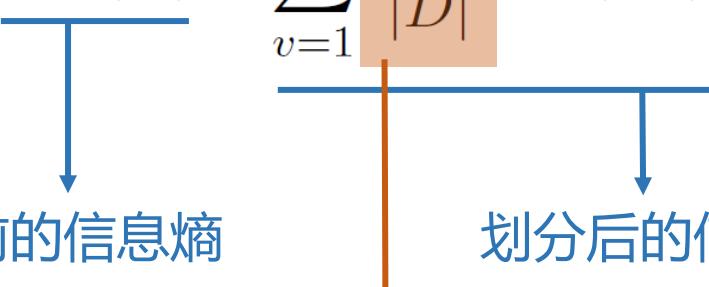


# 信息增益 (Information Gain)

离散属性  $a$  的取值:  $\{a^1, a^2, \dots, a^V\}$

$D^v$ :  $D$  中在  $a$  上取值 =  $a^v$  的样本集合

以属性  $a$  对 数据集  $D$  进行划分所获得的信息增益为：

$$\text{Gain}(D, a) = \text{Ent}(D) - \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \text{Ent}(D^v)$$


划分前的信息熵

划分后的信息熵

第  $v$  个分支的权重,  
样本越多越重要

## 增益率 (Gain Ratio)

信息增益：对可取值数目较多的属性有所偏好

有明显弱点，例如：考虑将“编号”作为一个属性

增益率： $\text{Gain\_ratio}(D, a) = \frac{\text{Gain}(D, a)}{\text{IV}(a)}$

其中  $\text{IV}(a) = -\sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \log_2 \frac{|D^v|}{|D|}$

属性  $a$  的可能取值数目越多 (即  $V$  越大)，则  $\text{IV}(a)$  的值通常就越大

启发式：先从候选划分属性中找出信息增益高于平均水平的，再从中选取增益率最高的

C4.5算法中使用

# 基尼指数 (Gini Index)

$$\text{Gini}(D) = \sum_{k=1}^{|Y|} \sum_{k' \neq k} p_k p_{k'}$$

反映了从  $D$  中随机抽取两个样例，其类别标记不一致的概率

$$= 1 - \sum_{k=1}^{|Y|} p_k^2 . \quad \text{Gini}(D) \text{ 越小，数据集 } D \text{ 的纯度越高}$$

属性  $a$  的基尼指数：  $\text{Gini\_index}(D, a) = \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \text{Gini}(D^v)$

在候选属性集合中，选取那个使划分后基尼指数**最小**的属性

CART算法中使用

# 划分选择 vs. 剪枝

研究表明：划分选择的各种准则虽然对决策树的尺寸有较大影响，但对泛化性能的影响很有限

例如信息增益与基尼指数产生的结果，仅在约 2% 的情况下不同

剪枝方法和程度对决策树泛化性能的影响更为显著

在数据带噪时甚至可能将泛化性能提升 25%

Why?

剪枝 (pruning) 是决策树对付 “过拟合” 的  
主要手段！

# 剪枝

为了尽可能正确分类训练样本，有可能造成分支过多 → 过拟合

可通过主动去掉一些分支来降低过拟合的风险

基本策略：

- 预剪枝 (pre-pruning): 提前终止某些分支的生长
- 后剪枝 (post-pruning): 生成一棵完全树，再“回头”剪枝

剪枝过程中需评估剪枝前后决策树的优劣 → 第 2 章

现在我们假定使用“留出法”

# 数据集

表 4.2 西瓜数据集 2.0 划分出的训练集(双线上部)与验证集(双线下部)

训练集

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

# 预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

1

好瓜

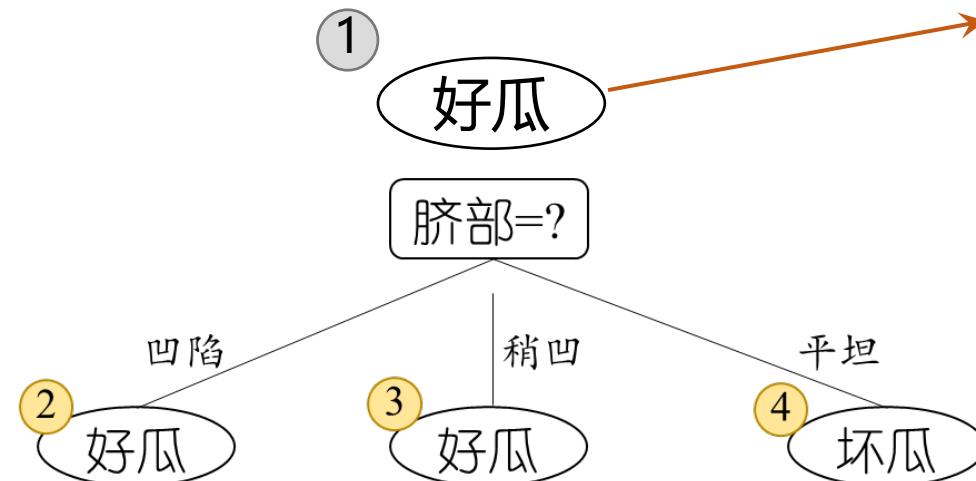
结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8}被分类正确，验证集精度为  $3/7 \times 100\% = 42.9\%$

验证集精度  
划分前: 42.9%

# 预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8}被分类正确，验证集精度为  $3/7 \times 100\% = 42.9\%$

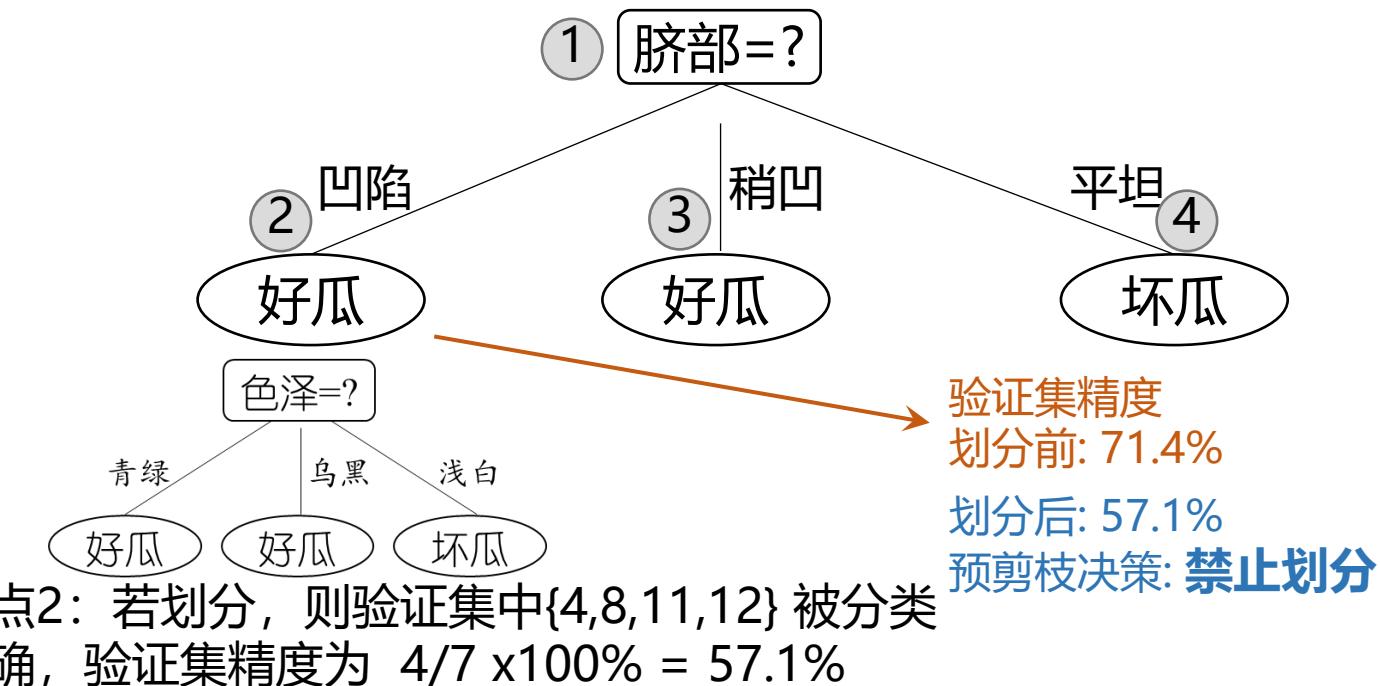
验证集精度  
划分前: 42.9%  
划分后: 71.4%  
预剪枝决策: 划分

结点1若划分，则根据划分后结点②③④的训练样例，它们将分别标记为“好瓜” “好瓜” “坏瓜”。此时，验证集中编号为 {4,5,8,11,12} 的样例被划分正确，验证集精度为  $5/7 \times 100\% = 71.4\%$

# 预剪枝

验证集

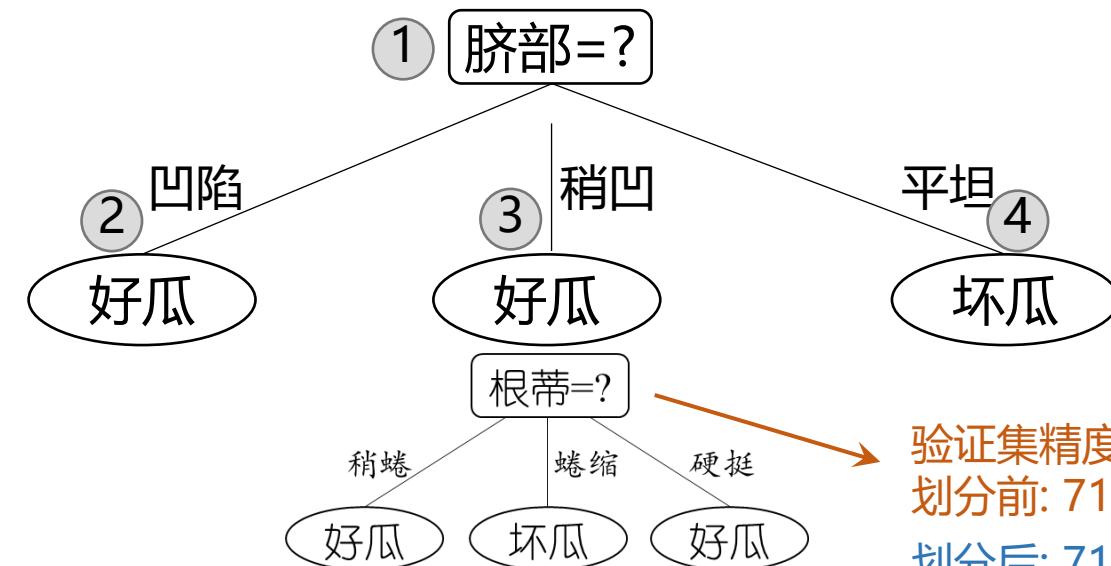
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



# 预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



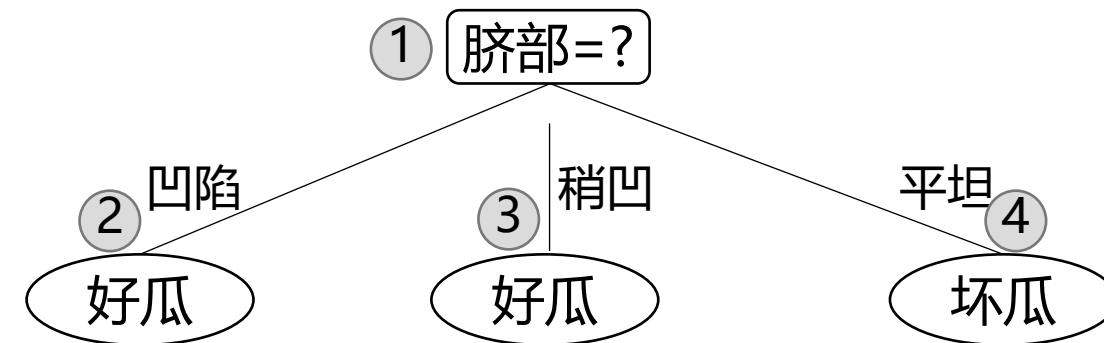
结点3：若划分，则验证集中{4,5,8,11,12}被分类正确，验证集精度为  $5/7 \times 100\% = 71.4\%$

验证集精度  
划分前: 71.4%  
划分后: 71.4%  
预剪枝决策: 禁止划分

# 预剪枝

验证集

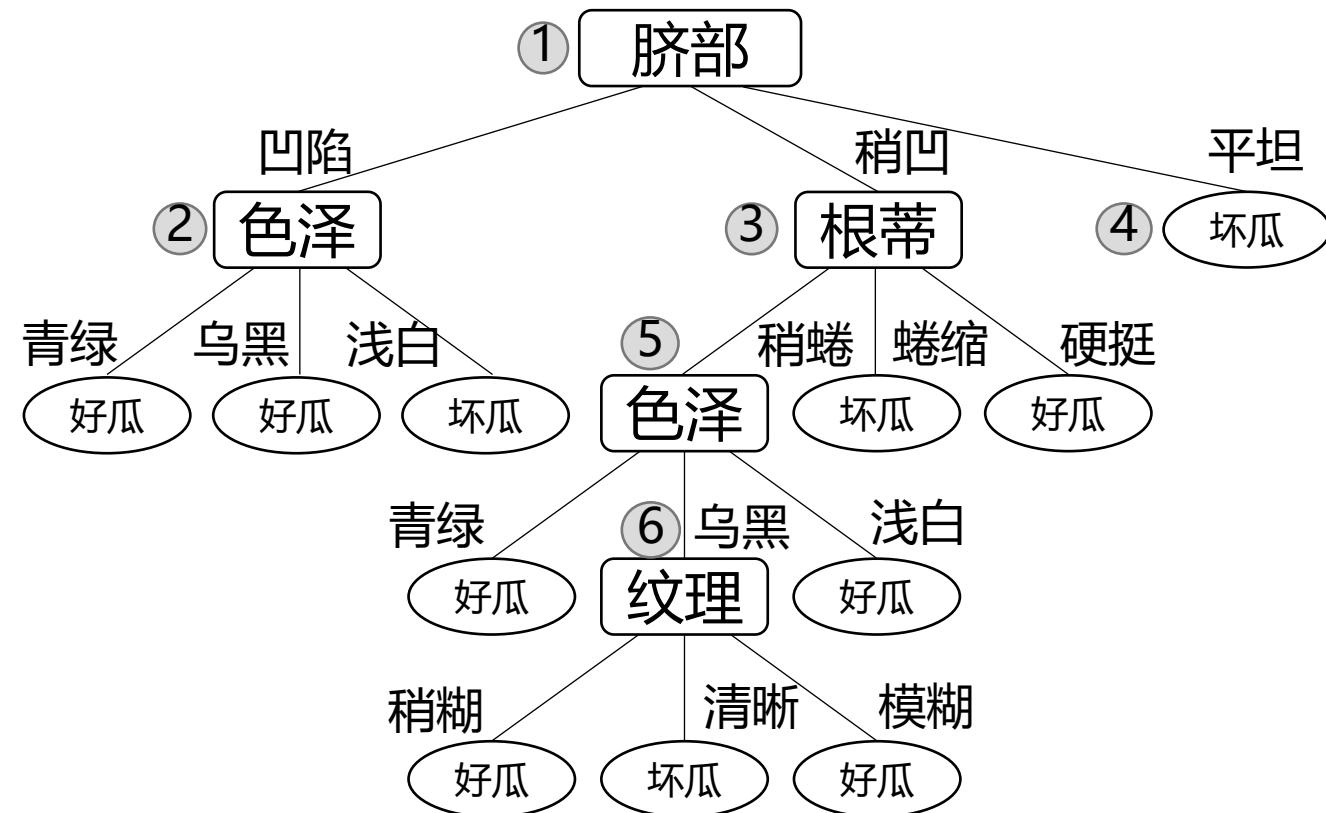
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



最终，预剪枝的得到的决策树

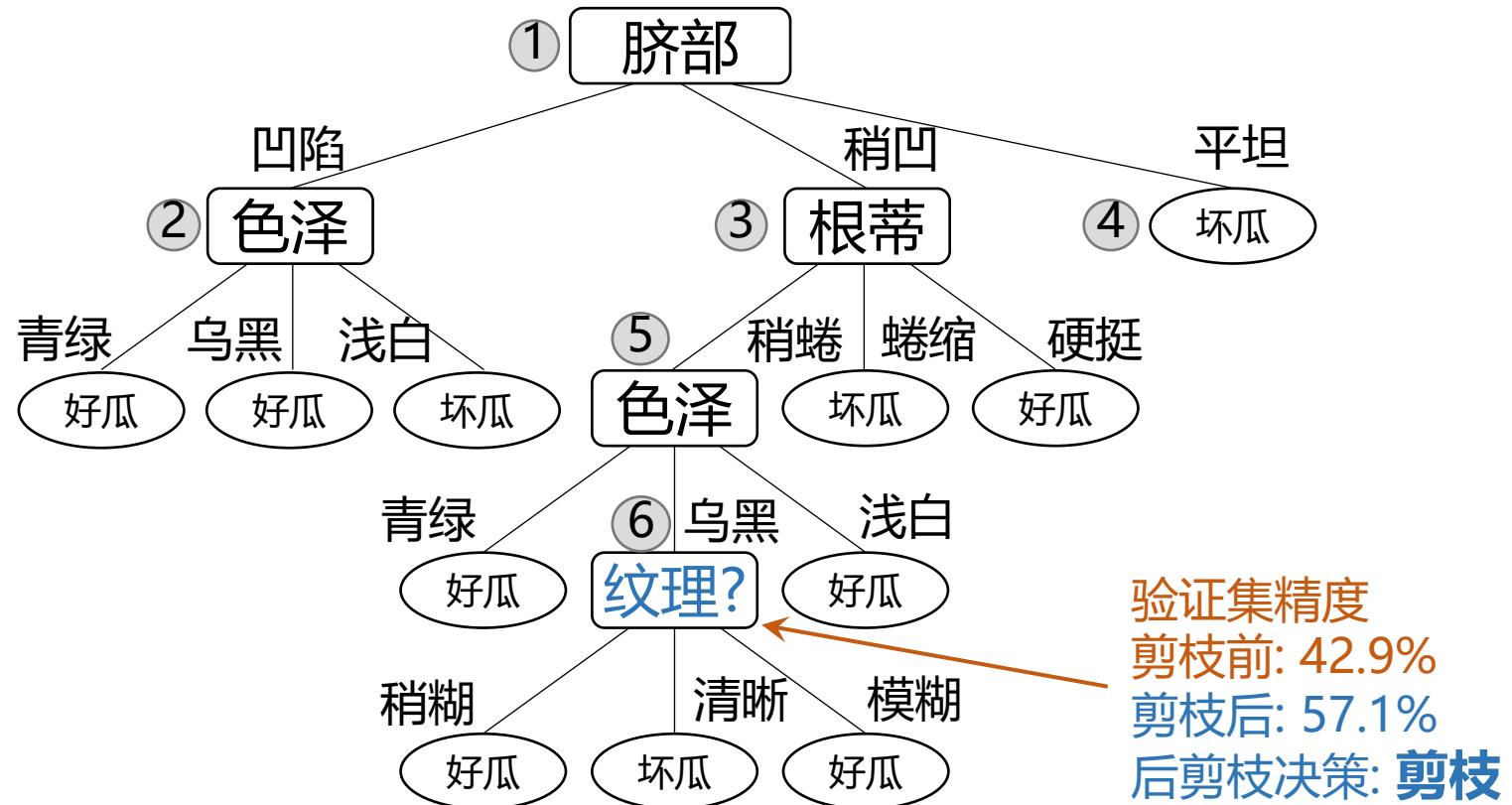
# 后剪枝

先生成一棵完整的决策树，其验证集精度测得为 42.9%



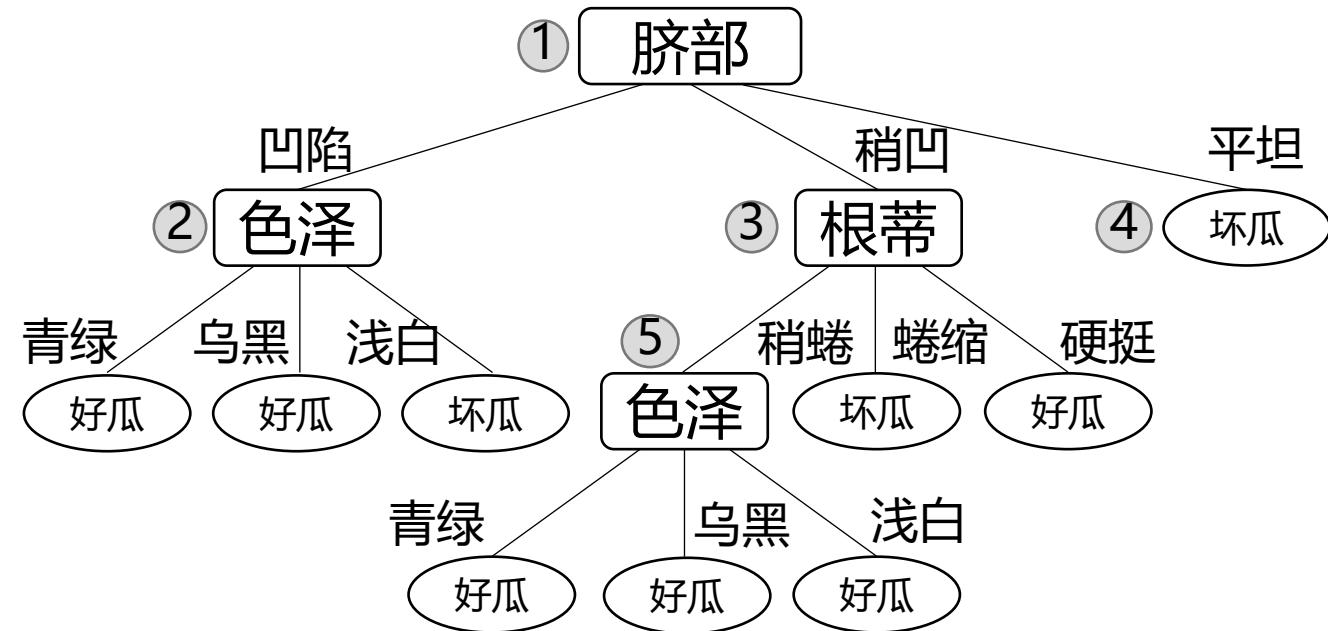
## 后剪枝 (续)

首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



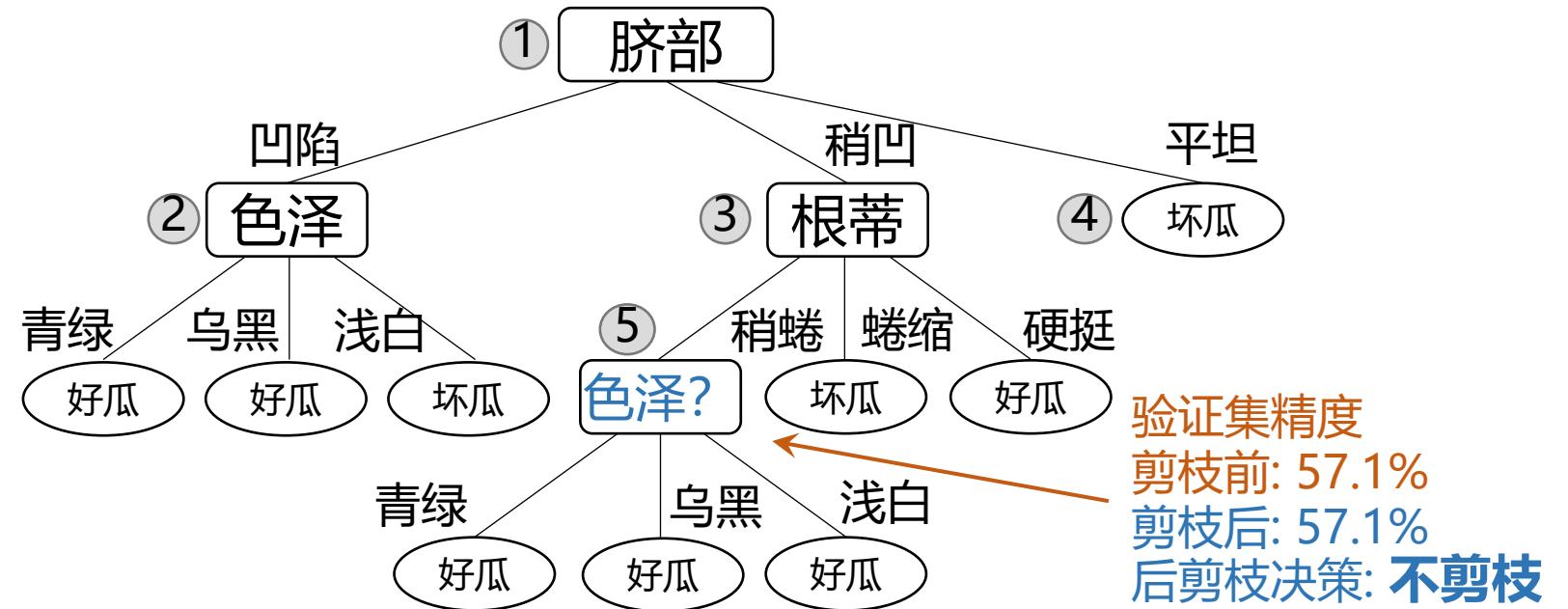
## 后剪枝 (续)

首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



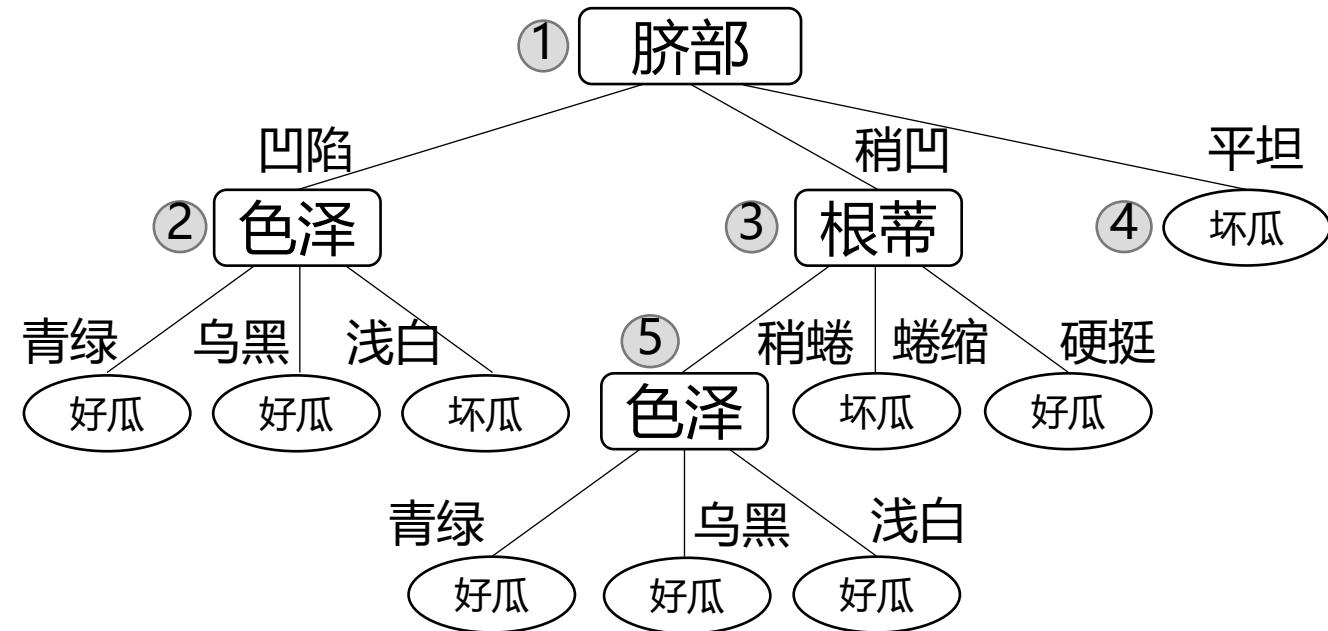
## 后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{6, 7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 57.1%，可以不剪枝



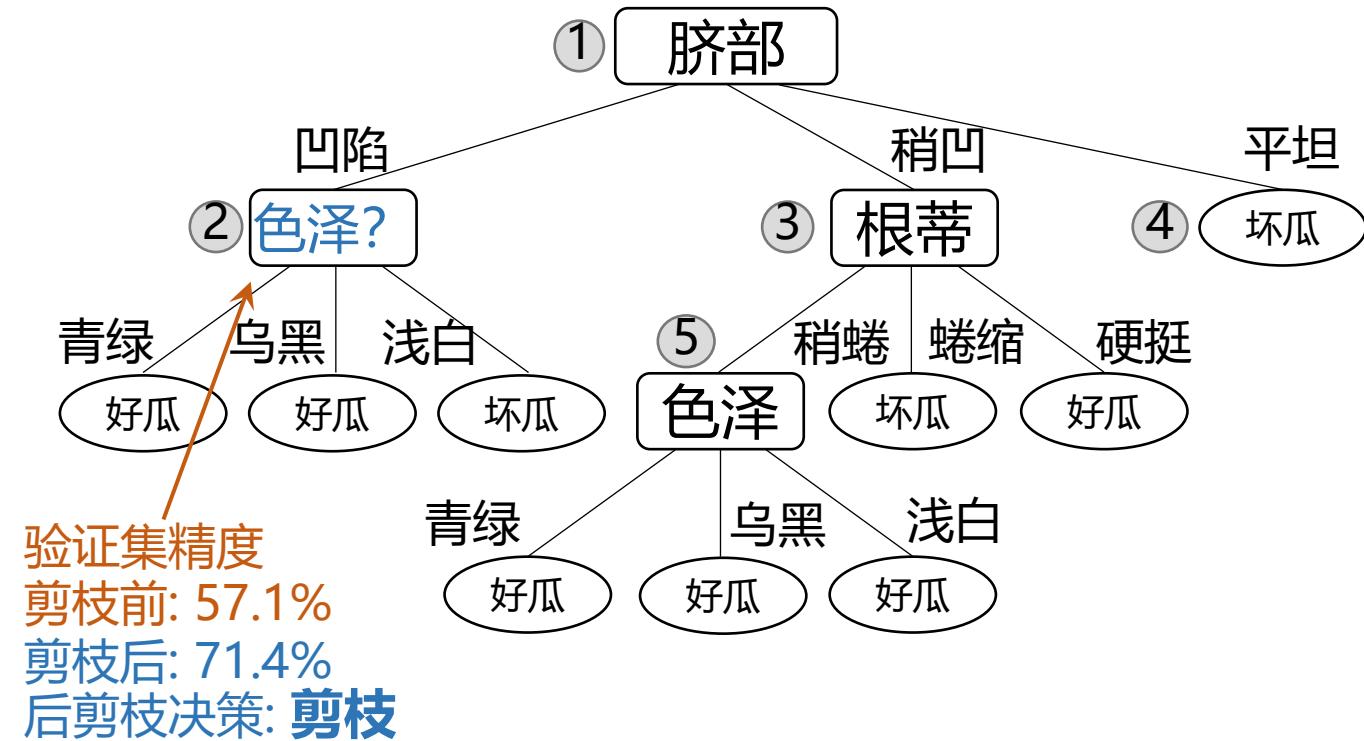
## 后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{6, 7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 57.1%，可以不剪枝



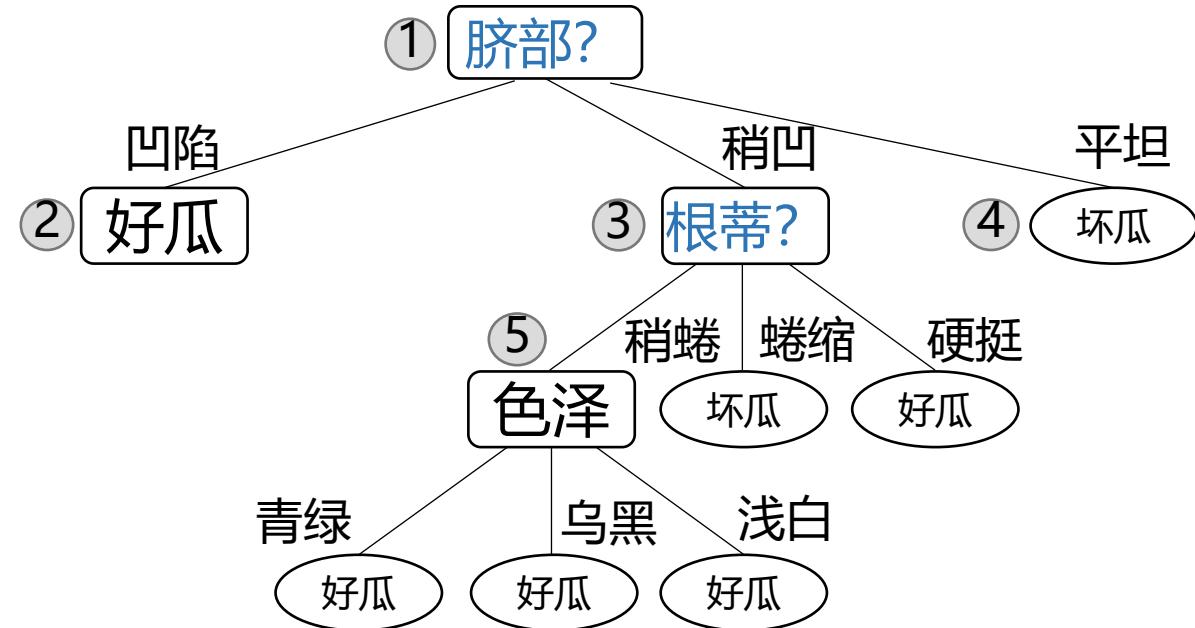
## 后剪枝 (续)

对结点②，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 {1, 2, 3, 14}，将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提升至 71.4%，决定剪枝



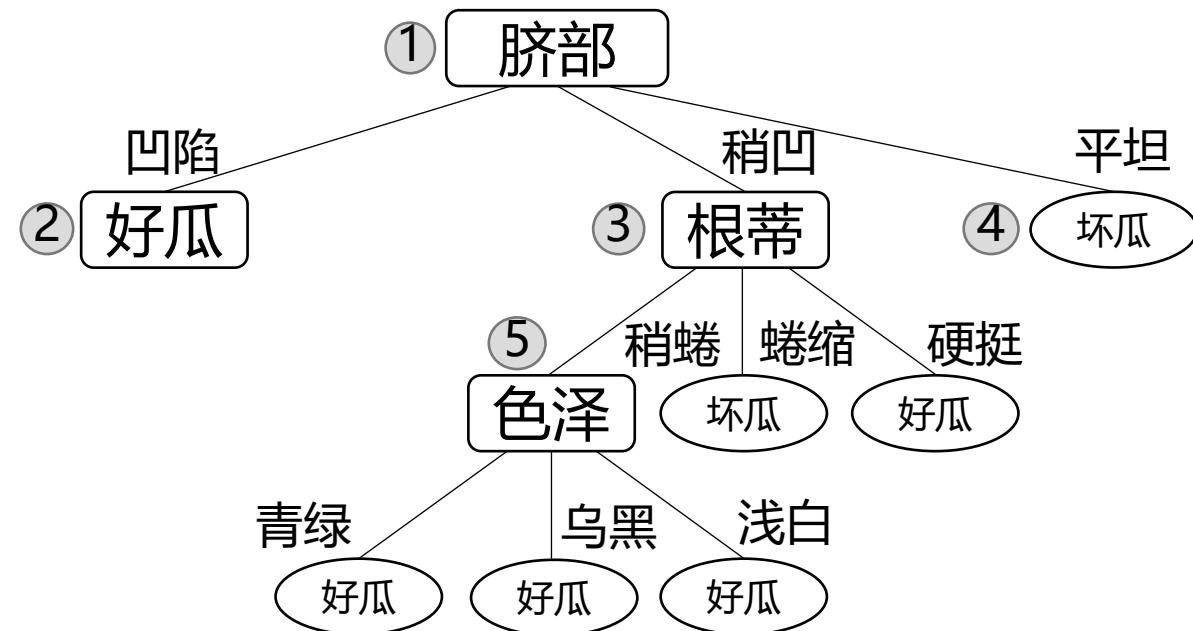
## 后剪枝 (续)

对结点③和①，先后替换为叶结点，均未测得验证集精度提升，于是不剪枝



# 后剪枝 (续)

最终，后剪枝得到的决策树：



# 预剪枝 vs. 后剪枝

## □ 时间开销:

- 预剪枝: 测试时间开销降低, 训练时间开销降低
- 后剪枝: 测试时间开销降低, 训练时间开销增加

## □ 过/欠拟合风险:

- 预剪枝: 过拟合风险降低, 欠拟合风险增加
- 后剪枝: 过拟合风险降低, 欠拟合风险基本不变

## □ 泛化性能: 后剪枝 通常优于 预剪枝

# 缺失值

现实应用中，经常会遇到属性值 “缺失” (missing) 现象

仅使用无缺失的样例？ → 对数据的极大浪费

使用带缺失值的样例，需解决：

Q1：如何进行划分属性选择？

Q2：给定划分属性，若样本在该属性上的值缺失，如何进行划分？

基本思路：样本赋权，权重划分

# 一个例子

仅通过无缺失值的样例来判断划分属性的优劣

学习开始时，根结点包含样例集  $D$  中全部 17 个样例，权重均为 1

表 4.4 西瓜数据集 2.0 $\alpha$

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	-	是
3	乌黑	蜷缩	-	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	-	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	-	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	-	否
12	浅白	蜷缩	-	模糊	平坦	软粘	否
13	-	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

以属性“色泽”为例，该属性上无缺失值的样例子集  $\tilde{D}$  包含 14 个样例，信息熵为

$$\text{Ent}(\tilde{D}) = - \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_k \log_2 \tilde{p}_k = -\left(\frac{6}{14} \log_2 \frac{6}{14} + \frac{8}{14} \log_2 \frac{8}{14}\right) = 0.985$$

## 一个例子

令  $\tilde{D}^1, \tilde{D}^2, \tilde{D}^3$  分别表示在属性 “色泽” 上取值为 “青绿” “乌黑” 以及 “浅白” 的样本子集，有

$$\begin{aligned}\text{Ent}(\tilde{D}^1) &= -\left(\frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4}\right) = 1.000 & \text{Ent}(\tilde{D}^2) &= -\left(\frac{4}{6} \log_2 \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \log_2 \frac{2}{6}\right) = 0.918 \\ \text{Ent}(\tilde{D}^3) &= -\left(\frac{0}{4} \log_2 \frac{0}{4} + \frac{4}{4} \log_2 \frac{4}{4}\right) = 0.000\end{aligned}$$

因此，样本子集  $\tilde{D}$  上属性 “色泽” 的信息增益为

$$\begin{aligned}\text{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) &= \text{Ent}(\tilde{D}) - \sum_{v=1}^3 \tilde{r}_v \text{Ent}(\tilde{D}^v) \quad \xrightarrow{\text{无缺失值样例中属性 } a \text{ 取值为 } v \text{ 的占比}} \\ &= 0.985 - \left(\frac{4}{14} \times 1.000 + \frac{6}{14} \times 0.918 + \frac{4}{14} \times 0.000\right) \\ &= 0.306\end{aligned}$$

于是，样本集  $D$  上属性 “色泽” 的信息增益为

$$\text{Gain}(D, \text{色泽}) = \rho \times \text{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) = \frac{14}{17} \times 0.306 = 0.252$$

无缺失值样例占比

# 一个例子

类似地可计算出所有属性在数据集上的信息增益

$$\text{Gain}(D, \text{色泽}) = 0.252$$

$$\text{Gain}(D, \text{敲声}) = 0.145$$

$$\text{Gain}(D, \text{脐部}) = 0.289$$

$$\text{Gain}(D, \text{根蒂}) = 0.171$$

$$\text{Gain}(D, \text{纹理}) = 0.424$$

$$\text{Gain}(D, \text{触感}) = 0.006$$

进入 “纹理=清晰” 分支

进入 “纹理=稍糊” 分支

进入 “纹理=模糊” 分支

样本权重在各子结点仍为1

在 “纹理” 上出现缺失值，  
样本 8, 10 同时进入三个  
分支，三分支上的权重分  
别为 7/15, 5/15, 3/15

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	-	是
3	乌黑	蜷缩	-	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	-	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	-	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	-	否
12	浅白	蜷缩	-	模糊	平坦	软粘	否
13	-	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

权重划分