



四、决策树

主讲教师：周志华

机器学习导论

决策树模型

决策树基于“树”结构进行决策

- 每个“内部结点”对应于某个属性上的“测试” (test)
- 每个分支对应于该测试的一种可能结果（即该属性的某个取值）
- 每个“叶结点”对应于一个“预测结果”

学习过程：通过对训练样本的分析来确定“划分属性”（即内部结点所对应的属性）

预测过程：将测试示例从根结点开始，沿着划分属性所构成的“判定测试序列”下行，直到叶结点

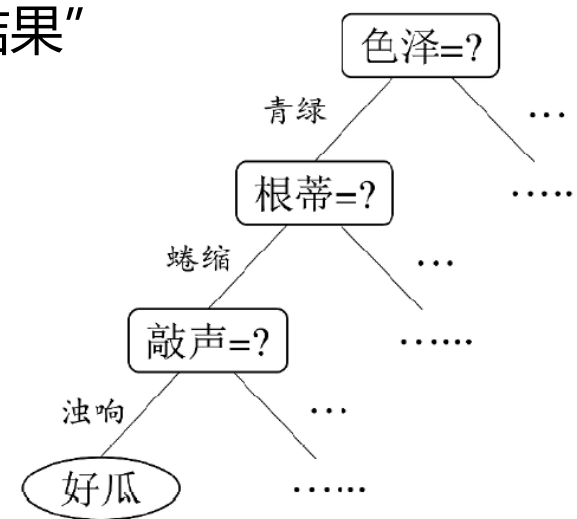


图 4.1 西瓜问题的一棵决策树

基本流程

策略：“分而治之” (divide-and-conquer)

自根至叶的递归过程

在每个中间结点寻找一个“划分” (split or test)属性

三种停止条件：

- (1) 当前结点包含的样本全属于同一类别，无需划分；
- (2) 当前属性集为空，或是所有样本在所有属性上取值相同，无法划分；
- (3) 当前结点包含的样本集合为空，不能划分。

基本算法

输入: 训练集 $D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$;

属性集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\}$.

过程: 函数 TreeGenerate(D, A)

1: 生成结点 node;

递归返回, 情形(1)

2: if D 中样本全属于同一类别 C then

3: 将 node 标记为 C 类叶结点; return

4: end if

递归返回, 情形(2)

5: if $A = \emptyset$ OR D 中样本在 A 上取值相同 then

6: 将 node 标记为叶结点, 其类别标记为 D 中样本数最多的类; return

7: end if

利用当前结点的后验分布

8: 从 A 中选择最优划分属性 a_* ;

9: for a_* 的每一个值 a_*^v do

递归返回, 情形(3)

10: 为 node 生成一个分支; 令 D_v 表示 D 中在 a_* 上取值为 a_*^v 的样本子集;

11: if D_v 为空 then

12: 将分支结点标记为叶结点, 其类别标记为 D 中样本最多的类; return

13: else

14: 以 TreeGenerate($D_v, A \setminus \{a_*\}$) 为分支结点

15: end if

16: end for

将父结点的样本分布作为
当前结点的先验分布

决策树算法的核心

输出: 以 node 为根结点的一棵决策树

信息增益 (Information Gain)

信息熵 (entropy) 是度量样本集合 “纯度” 最常用的一种指标
假定当前样本集合 D 中第 k 类样本所占的比例为 p_k , 则 D 的信息熵定义为

$$\text{Ent}(D) = - \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} p_k \log_2 p_k$$

计算信息熵时约定: 若
 $p = 0$, 则 $p \log_2 p = 0$.

$\text{Ent}(D)$ 的值越小, 则 D 的纯度越高

$\text{Ent}(D)$ 的最小值为 0,
最大值为 $\log_2 |\mathcal{Y}|$.

信息增益直接以信息熵为基础, 计算当前划分对信息熵所造成的变化

信息增益 (Information Gain)

离散属性 a 的取值: $\{a^1, a^2, \dots, a^V\}$

D^v : D 中在 a 上取值 = a^v 的样本集合

以属性 a 对数据集 D 进行划分所获得的信息增益为:

$$\text{Gain}(D, a) = \underbrace{\text{Ent}(D)}_{\text{划分前的信息熵}} - \sum_{v=1}^V \underbrace{\frac{|D^v|}{|D|}}_{\text{第 } v \text{ 个分支的权重, 样本越多越重要}} \underbrace{\text{Ent}(D^v)}_{\text{划分后的信息熵}}$$

ID3算法中使用

第 v 个分支的权重,
样本越多越重要

一个例子

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

该数据集包含17个训练样例 $|\mathcal{Y}| = 2$ ，其中
正例占 $p_1 = \frac{8}{17}$ ，
反例占 $p_2 = \frac{9}{17}$

根结点的信息熵为

$$\text{Ent}(D) = - \sum_{k=1}^2 p_k \log_2 p_k = - \left(\frac{8}{17} \log_2 \frac{8}{17} + \frac{9}{17} \log_2 \frac{9}{17} \right) = 0.998$$

一个例子 (续)

以属性“色泽”为例，其对应的3个子集分别为：

$D^1(\text{色泽}=\text{青绿})$

$D^2(\text{色泽}=\text{乌黑})$

$D^3(\text{色泽}=\text{浅白})$

对 $D^1(\text{色泽}=\text{青绿})$ ，
正例3/6，反例3/6

于是：
$$\text{Ent}(D^1) = -\left(\frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \log_2 \frac{3}{6}\right) = 1.000$$

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

一个例子 (续)

D^2 (色泽=乌黑),
正例4/6, 反例2/6

$$\text{Ent}(D^2) = -\left(\frac{4}{6} \log_2 \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \log_2 \frac{2}{6}\right) = 0.918$$

D^3 (色泽=浅白),
正例1/5, 反例4/5

$$\text{Ent}(D^3) = -\left(\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \log_2 \frac{4}{5}\right) = 0.722$$

于是, 属性 “色泽” 的信息增益为

$$\begin{aligned} \text{Gain}(D, \text{色泽}) &= \text{Ent}(D) - \sum_{v=1}^3 \frac{|D^v|}{|D|} \text{Ent}(D^v) \\ &= 0.998 - \left(\frac{6}{17} \times 1.000 + \frac{6}{17} \times 0.918 + \frac{5}{17} \times 0.722\right) = 0.109 \end{aligned}$$

表 4.1 西瓜数据集 2.0

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

一个例子 (续)

类似的，其他属性的信息增益为

$$\text{Gain}(D, \text{根蒂}) = 0.143$$

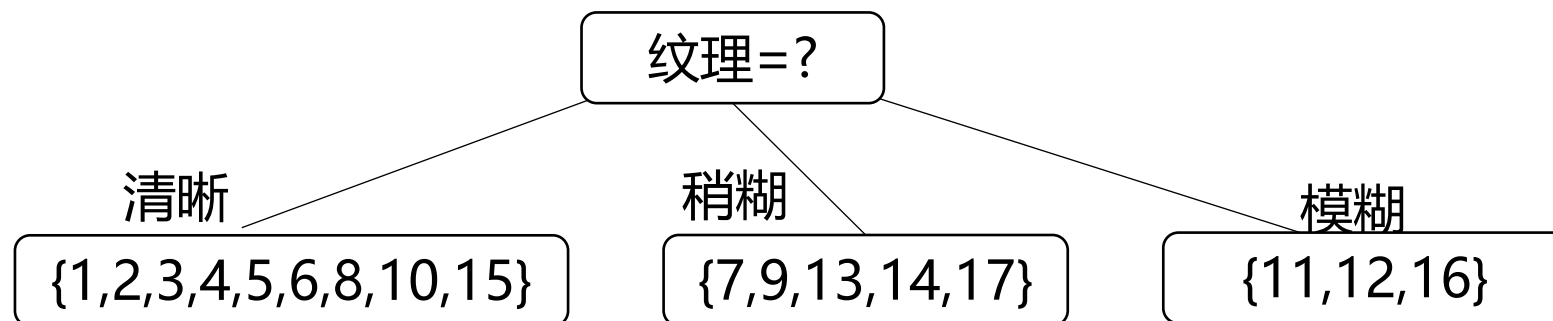
$$\text{Gain}(D, \text{敲声}) = 0.141$$

$$\text{Gain}(D, \text{纹理}) = 0.381$$

$$\text{Gain}(D, \text{脐部}) = 0.289$$

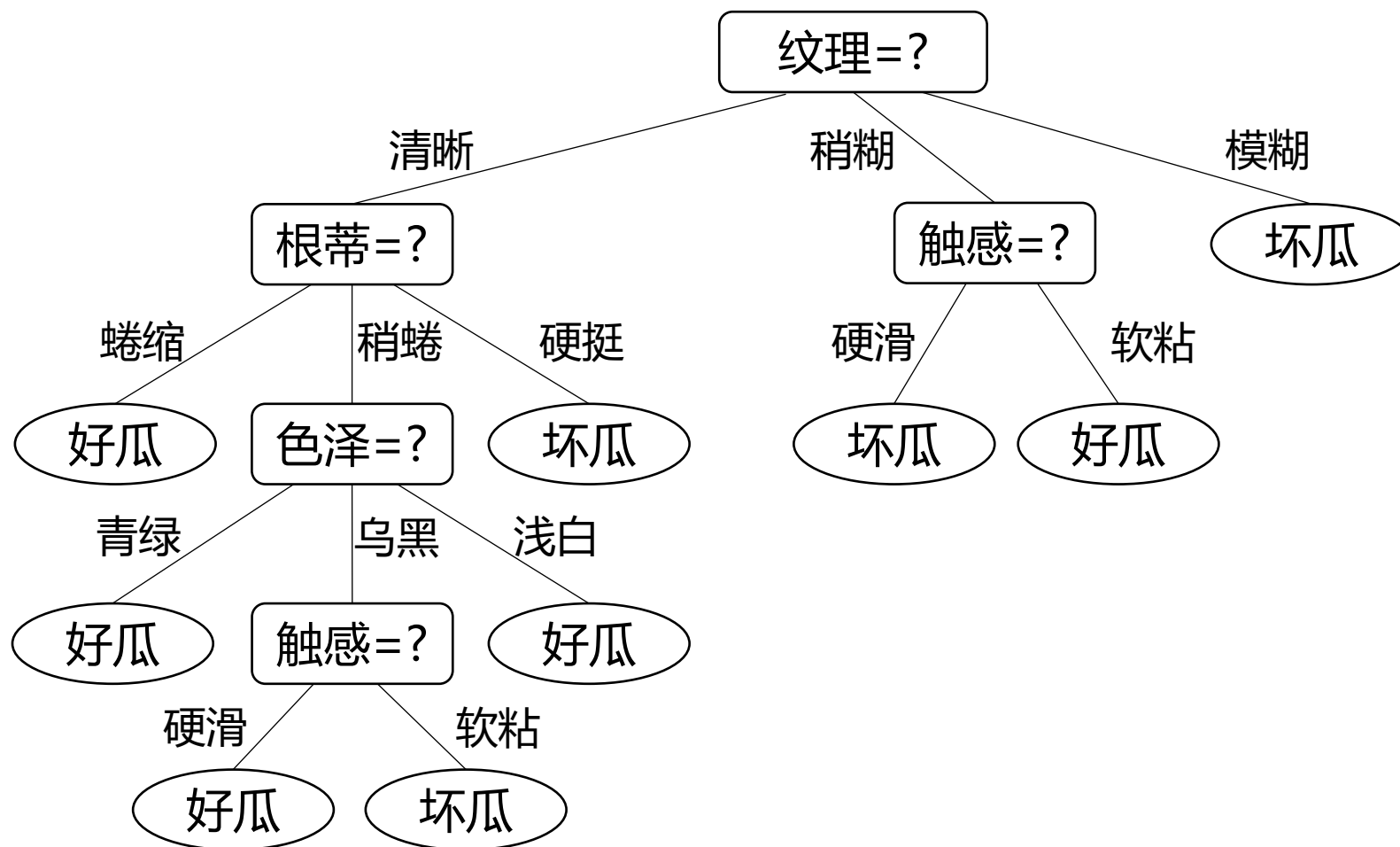
$$\text{Gain}(D, \text{触感}) = 0.006$$

属性“纹理”的信息增益最大，被选为划分属性



一个例子 (续)

对每个分支结点做进一步划分，最终得到决策树



信息增益 (Information Gain)

离散属性 a 的取值: $\{a^1, a^2, \dots, a^V\}$

D^v : D 中在 a 上取值 = a^v 的样本集合

以属性 a 对数据集 D 进行划分所获得的信息增益为:

$$\text{Gain}(D, a) = \underbrace{\text{Ent}(D)}_{\text{划分前的信息熵}} - \sum_{v=1}^V \underbrace{\frac{|D^v|}{|D|}}_{\substack{\text{第 } v \text{ 个分支的权重,} \\ \text{样本越多越重要}}} \underbrace{\text{Ent}(D^v)}_{\text{划分后的信息熵}}$$

ID3算法中使用

增益率 (Gain Ratio)

信息增益：对可取值数目较多的属性有所偏好

有明显弱点，例如：考虑将“编号”作为一个属性

增益率： $\text{Gain_ratio}(D, a) = \frac{\text{Gain}(D, a)}{\text{IV}(a)}$

其中 $\text{IV}(a) = - \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \log_2 \frac{|D^v|}{|D|}$

属性 a 的可能取值数目越多 (即 V 越大), 则 $\text{IV}(a)$ 的值通常就越大

启发式：先从候选划分属性中找出信息增益高于平均水平的，再从中选取增益率最高的

C4.5算法中使用

基尼指数 (Gini Index)

$$\text{Gini}(D) = \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} \sum_{k' \neq k} p_k p_{k'}$$

反映了从 D 中随机抽取两个样例，其类别标记不一致的概率

$$= 1 - \sum_{k=1}^{|\mathcal{Y}|} p_k^2$$

Gini(D) 越小，数据集 D 的纯度越高

属性 a 的基尼指数:
$$\text{Gini_index}(D, a) = \sum_{v=1}^V \frac{|D^v|}{|D|} \text{Gini}(D^v)$$

在候选属性集合中，选取那个使划分后基尼指数最小的属性

CART算法中使用

划分选择 vs. 剪枝

研究表明: 划分选择的各种准则虽然对决策树的尺寸有较大影响, 但对泛化性能的影响很有限

例如信息增益与基尼指数产生的结果, 仅在约 2% 的情况下不同

剪枝方法和程度对决策树泛化性能的影响更为显著

在数据带噪时甚至可能将泛化性能提升 25%

Why?

剪枝 (pruning) 是决策树对付 “过拟合” 的主要手段!

剪枝

为了尽可能正确分类训练样本，有可能造成分支过多 → 过拟合
可通过主动去掉一些分支来降低过拟合的风险

基本策略：

- 预剪枝 (pre-pruning): 提前终止某些分支的生长
- 后剪枝 (post-pruning): 生成一棵完全树，再“回头”剪枝

剪枝过程中需评估剪枝前后决策树的优劣  第 2 章

现在我们假定使用“留出法”

数据集

表 4.2 西瓜数据集 2.0 划分出的训练集(双线上部)与验证集(双线下部)

训练集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
3	乌黑	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
10	青绿	硬挺	清脆	清晰	平坦	软粘	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	蜷缩	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8} 被分类正确，验证集精度为 $3/7 \times 100\% = 42.9\%$

1

好瓜

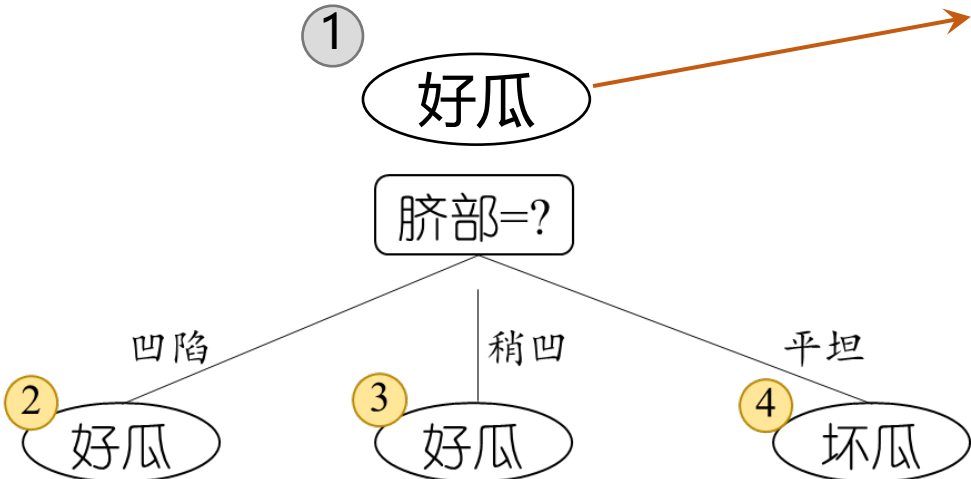
验证集精度
划分前: 42.9%

预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否

结点1：若不划分，则根结点为叶结点，类别标记为训练样例最多的类别，若选“好瓜”，则验证集中{4,5,8} 被分类正确，验证集精度为 $3/7 \times 100\% = 42.9\%$



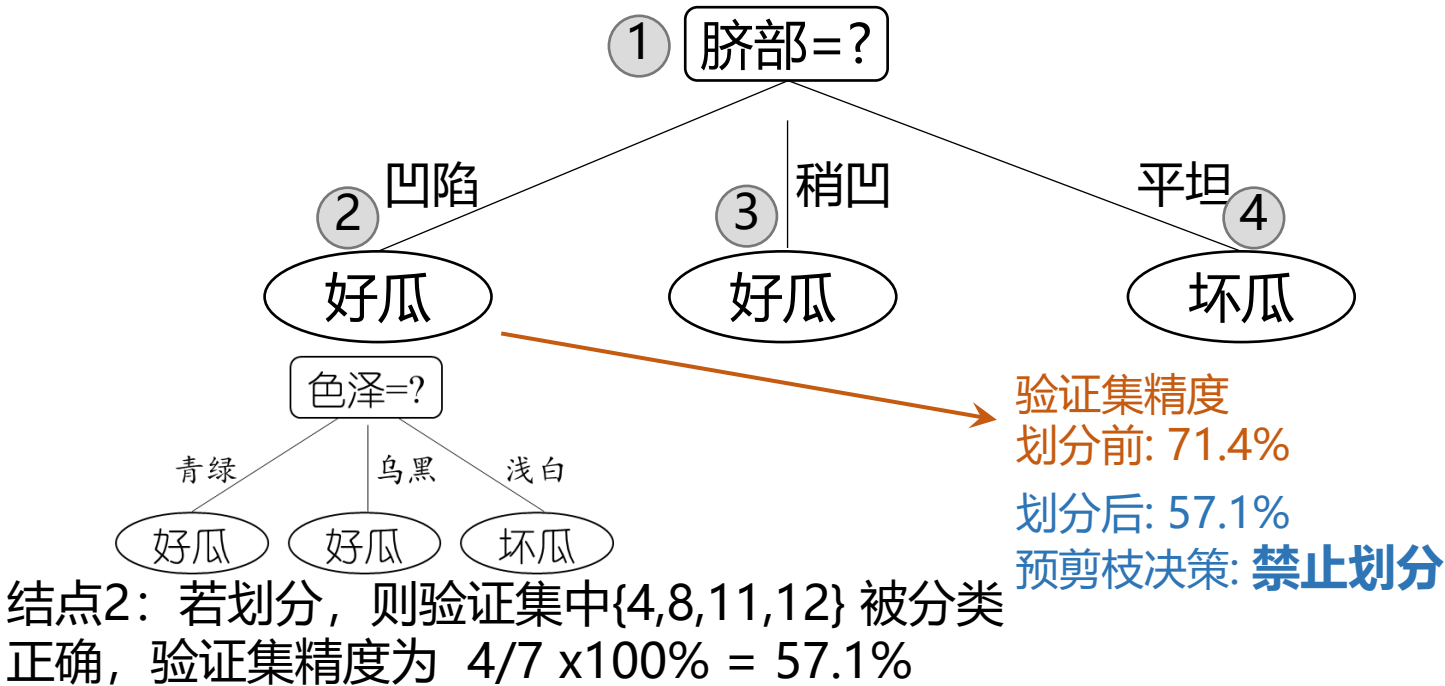
验证集精度
划分前: 42.9%
划分后: 71.4%
预剪枝决策: 划分

结点1若划分，则根据划分后结点②③④ 的训练样例，它们将分别标记为“好瓜” “好瓜” “坏瓜”。此时，验证集中编号为 {4,5,8,11,12}的样例被划分正确，验证集精度为 $5/7 \times 100\% = 71.4\%$

预剪枝

验证集

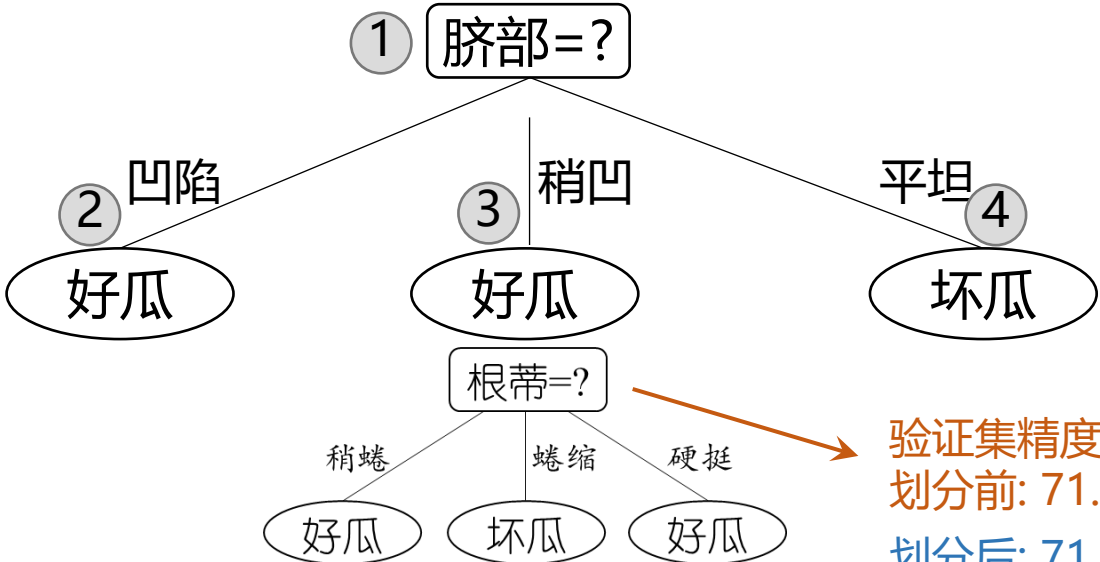
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



预剪枝

验证集

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



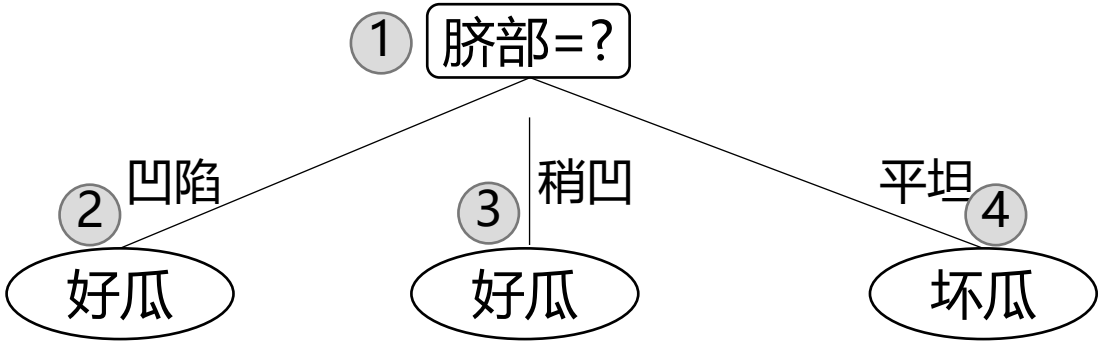
验证集精度
划分前: 71.4%
划分后: 71.4%
预剪枝决策: 禁止划分

结点3: 若划分, 则验证集中{4,5,8,11,12} 被分类正确, 验证集精度为 $5/7 \times 100\% = 71.4\%$

预剪枝

验证集

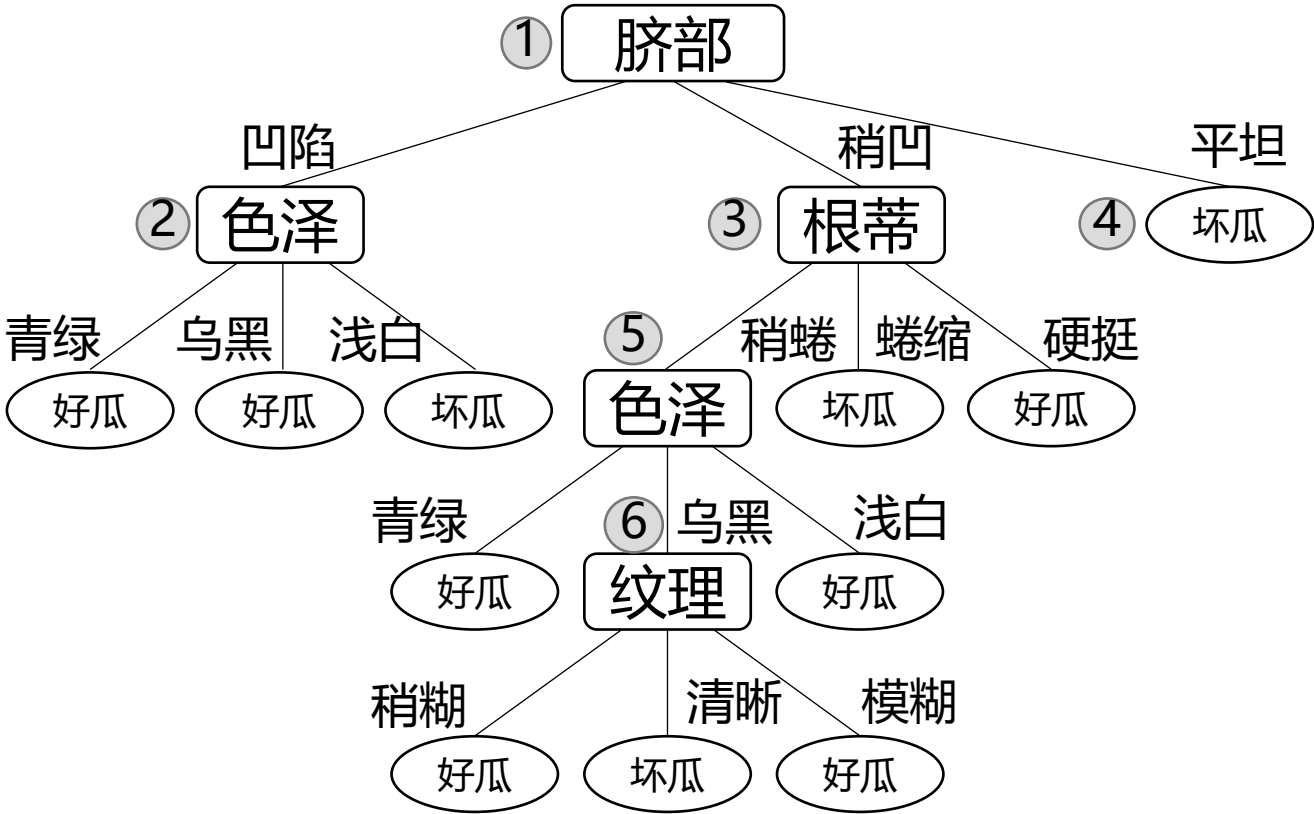
编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	浅白	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	稍蜷	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	硬滑	否
12	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	软粘	否
13	青绿	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否



最终，预剪枝的得到的决策树

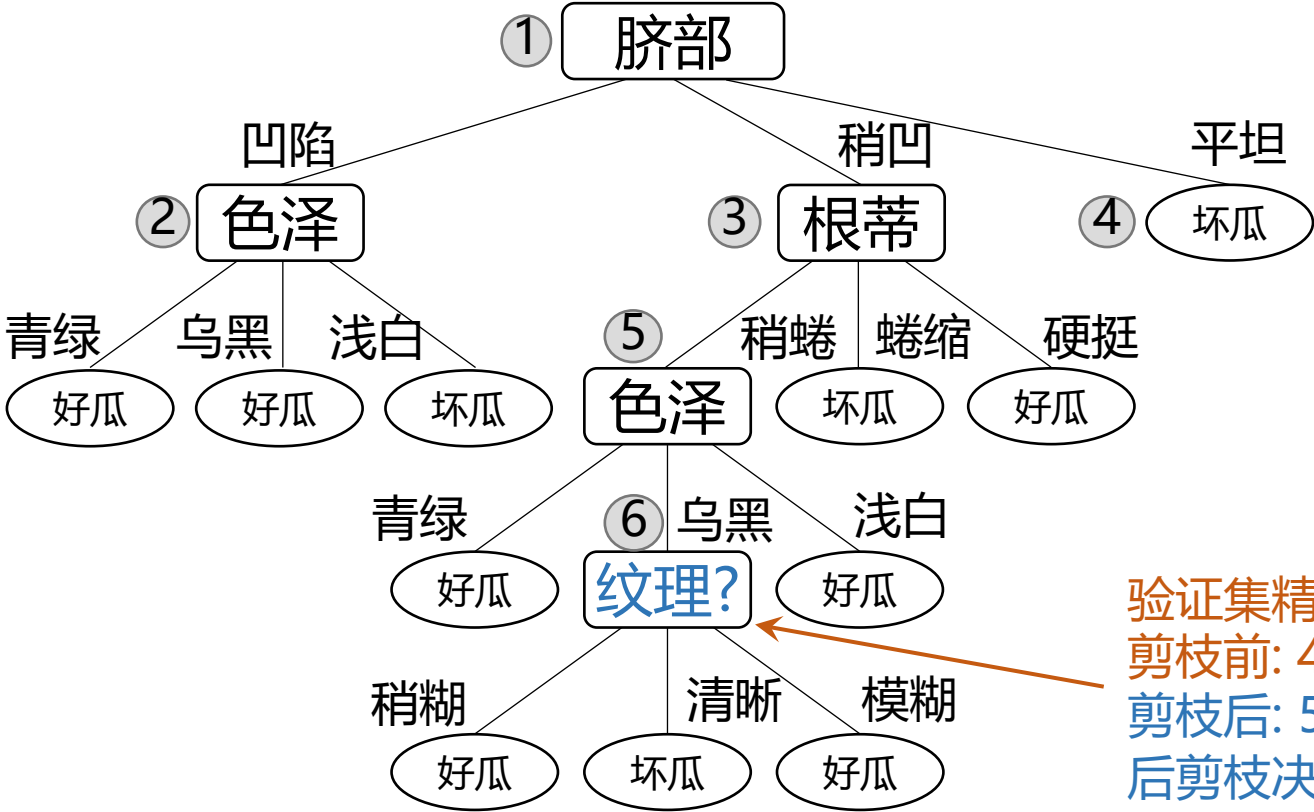
后剪枝

先生成一棵完整的决策树，其验证集精度测得为 42.9%



后剪枝 (续)

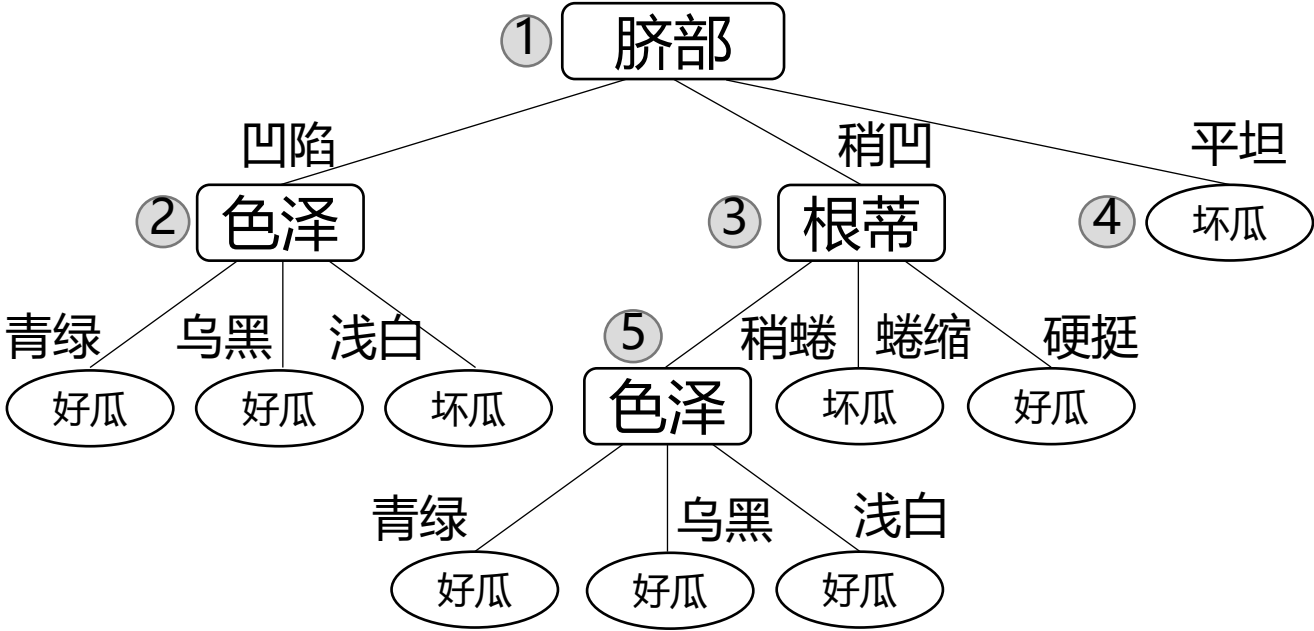
首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



验证集精度
剪枝前: 42.9%
剪枝后: 57.1%
后剪枝决策: 剪枝

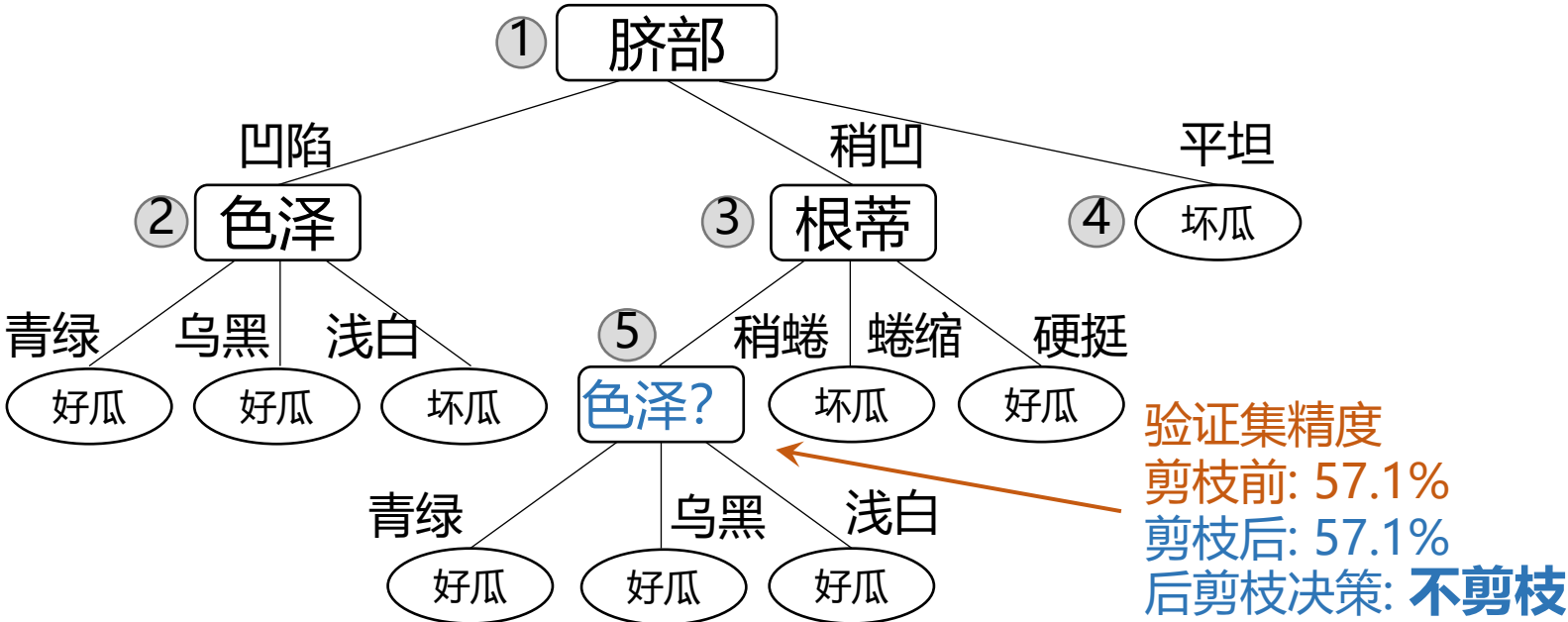
后剪枝 (续)

首先考虑结点⑥，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提高至 57.1%，于是决定剪枝



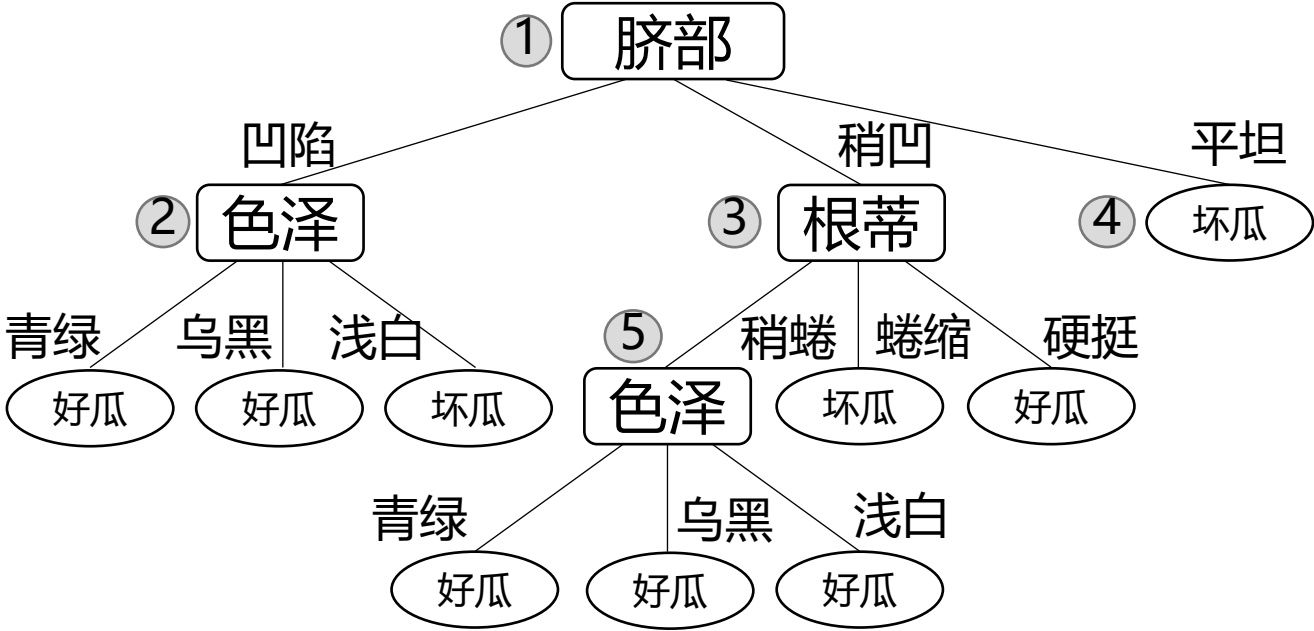
后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{6, 7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 57.1%，可以不剪枝



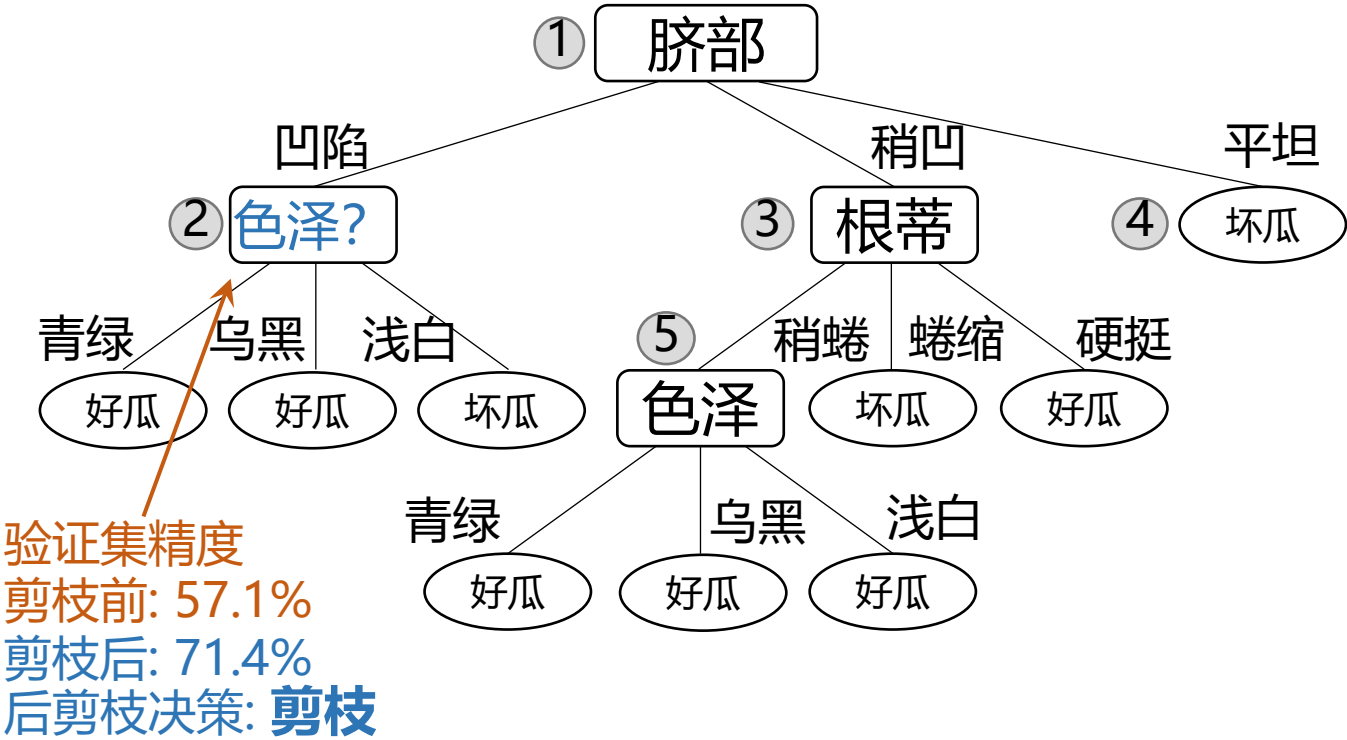
后剪枝 (续)

然后考虑结点⑤，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例{6, 7, 15}将其标记为“好瓜”，测得验证集精度仍为 57.1%，可以不剪枝



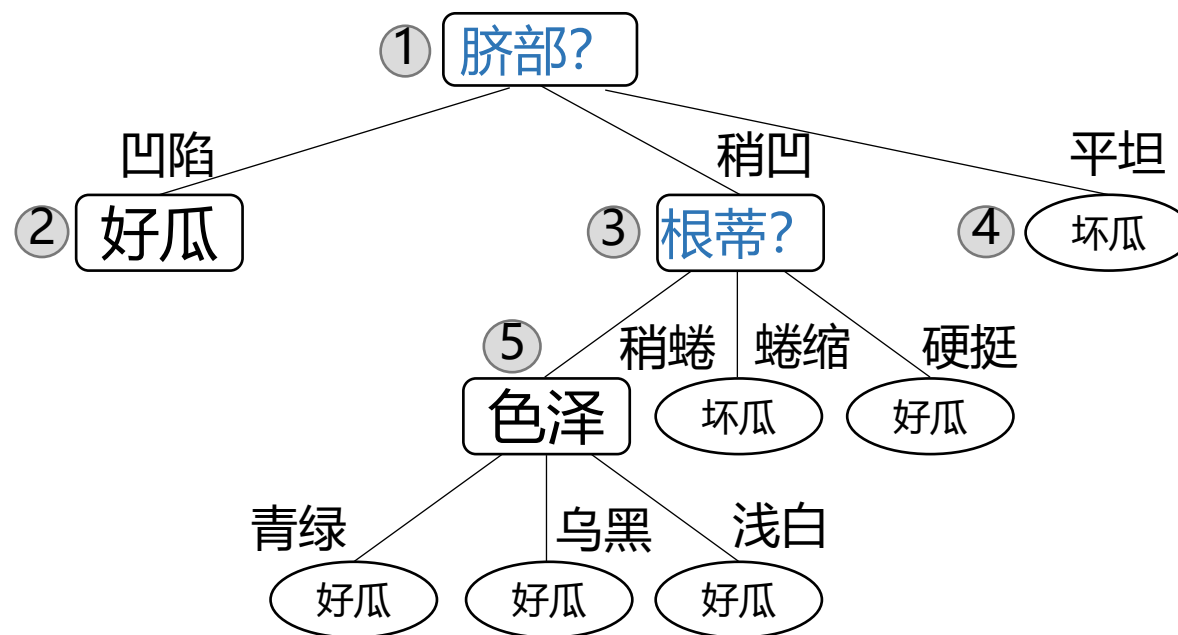
后剪枝 (续)

对结点②，若将其替换为叶结点，根据落在其上的训练样例 {1, 2, 3, 14}，将其标记为“好瓜”，测得验证集精度提升至 71.4%，决定剪枝



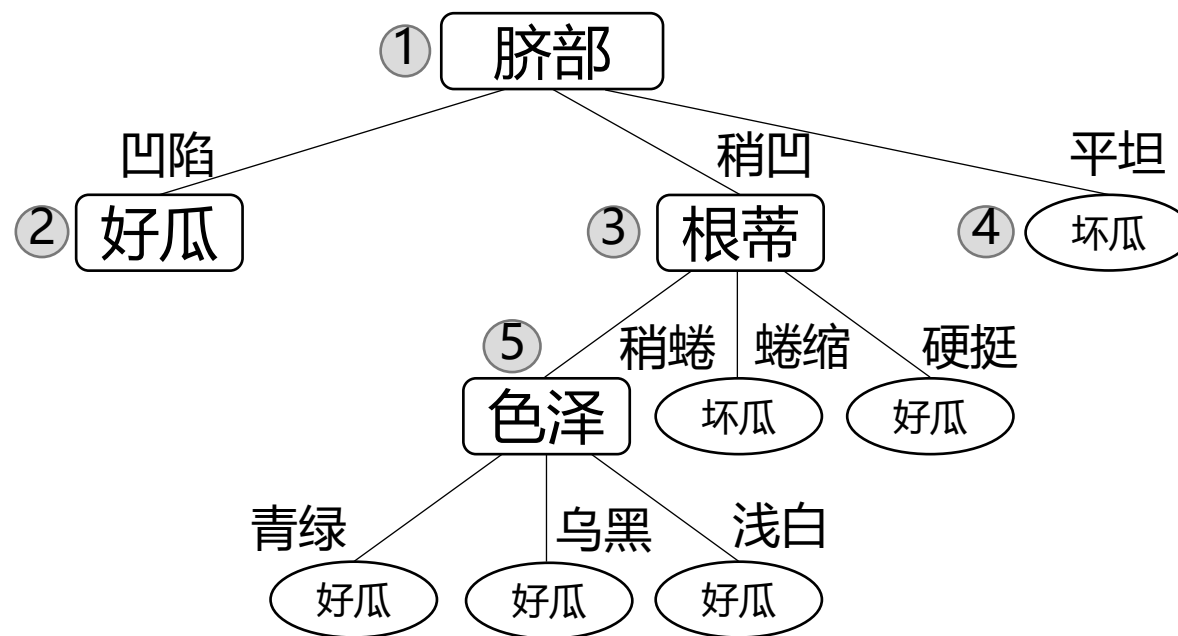
后剪枝 (续)

对结点③和①，先后替换为叶结点，均未测得验证集精度提升，于是不剪枝



后剪枝 (续)

最终，后剪枝得到的决策树：



预剪枝 vs. 后剪枝

□ 时间开销：

- 预剪枝：测试时间开销降低，训练时间开销降低
- 后剪枝：测试时间开销降低，训练时间开销增加

□ 过/欠拟合风险：

- 预剪枝：过拟合风险降低，欠拟合风险增加
- 后剪枝：过拟合风险降低，欠拟合风险基本不变

□ 泛化性能：后剪枝 通常优于 预剪枝

缺失值

现实应用中，经常会遇到属性值“缺失”(missing)现象

仅使用无缺失的样例？ → 对数据的极大浪费

使用带缺失值的样例，需解决：

Q1：如何进行划分属性选择？

Q2：给定划分属性，若样本在该属性上的值缺失，如何进行划分？

基本思路：样本赋权，权重划分

一个例子

仅通过无缺失值的样例来判断划分属性的优劣

学习开始时，根结点包含样例集 D 中全部17个样例，权重均为 1

表 4.4 西瓜数据集 2.0 α

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	—	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	—	是
3	乌黑	蜷缩	—	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	—	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	—	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	—	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	—	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	—	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	—	否
12	浅白	蜷缩	—	模糊	平坦	软粘	否
13	—	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	—	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	—	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

以属性“色泽”为例，该属性上无缺失值的样例子集 \tilde{D} 包含 14 个样例，信息熵为

$$\text{Ent}(\tilde{D}) = - \sum_{k=1}^2 \tilde{p}_k \log_2 \tilde{p}_k = - \left(\frac{6}{14} \log_2 \frac{6}{14} + \frac{8}{14} \log_2 \frac{8}{14} \right) = 0.985$$

一个例子

令 \tilde{D}^1 , \tilde{D}^2 , \tilde{D}^3 分别表示在属性“色泽”上取值为“青绿”“乌黑”以及“浅白”的样本子集，有

$$\text{Ent}(\tilde{D}^1) = -\left(\frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \log_2 \frac{2}{4}\right) = 1.000 \quad \text{Ent}(\tilde{D}^2) = -\left(\frac{4}{6} \log_2 \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \log_2 \frac{2}{6}\right) = 0.918$$

$$\text{Ent}(\tilde{D}^3) = -\left(\frac{0}{4} \log_2 \frac{0}{4} + \frac{4}{4} \log_2 \frac{4}{4}\right) = 0.000$$

因此，样本子集 \tilde{D} 上属性“色泽”的信息增益为

$$\begin{aligned} \text{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) &= \text{Ent}(\tilde{D}) - \sum_{v=1}^3 \tilde{r}_v \text{Ent}(\tilde{D}^v) \\ &= 0.985 - \left(\frac{4}{14} \times 1.000 + \frac{6}{14} \times 0.918 + \frac{4}{14} \times 0.000\right) \\ &= 0.306 \end{aligned}$$

无缺失值样例中属性 a 取值为 v 的占比

于是，样本集 D 上属性“色泽”的信息增益为

$$\text{Gain}(D, \text{色泽}) = \rho \times \text{Gain}(\tilde{D}, \text{色泽}) = \frac{14}{17} \times 0.306 = 0.252$$

无缺失值样例占比

一个例子

类似地可计算出所有属性在数据集上的信息增益

$\text{Gain}(D, \text{色泽}) = 0.252$

$\text{Gain}(D, \text{敲声}) = 0.145$

$\text{Gain}(D, \text{脐部}) = 0.289$

$\text{Gain}(D, \text{根蒂}) = 0.171$

$\text{Gain}(D, \text{纹理}) = 0.424$

$\text{Gain}(D, \text{触感}) = 0.006$

进入 “纹理=清晰” 分支

进入 “纹理=稍糊” 分支

进入 “纹理=模糊” 分支

样本权重在各子结点仍为1

在 “纹理” 上出现缺失值，
样本 8, 10 同时进入三个
分支，三支上的权重分
别为 7/15, 5/15, 3/15

编号	色泽	根蒂	敲声	纹理	脐部	触感	好瓜
1	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	-	是
3	乌黑	蜷缩	-	清晰	凹陷	硬滑	是
4	青绿	蜷缩	沉闷	清晰	凹陷	硬滑	是
5	-	蜷缩	浊响	清晰	凹陷	硬滑	是
6	青绿	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	是
7	乌黑	稍蜷	浊响	稍糊	稍凹	软粘	是
8	乌黑	稍蜷	浊响	-	稍凹	硬滑	是
9	乌黑	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否
10	青绿	硬挺	清脆	-	平坦	软粘	否
11	浅白	硬挺	清脆	模糊	平坦	-	否
12	浅白	蜷缩	-	模糊	平坦	软粘	否
13	-	稍蜷	浊响	稍糊	凹陷	硬滑	否
14	浅白	稍蜷	沉闷	稍糊	凹陷	硬滑	否
15	乌黑	稍蜷	浊响	清晰	-	软粘	否
16	浅白	蜷缩	浊响	模糊	平坦	硬滑	否
17	青绿	-	沉闷	稍糊	稍凹	硬滑	否

权重划分