1　勒让德多项式

当区间为 $[-1,1]$, 权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 时, 由 $\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 正交化得到的多项式称为勒让德 (Legendre) 多项式.

$$\mathrm{P}_0(x)=1,\quad \mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

勒让德多项式的正交性：

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ \frac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

Proof. 令 $\varphi(x)=(x^2-1)^n$, 则

$$\varphi^{(k)}(\pm 1)=0,\quad k=0,1,\cdots,n-1.$$

设 $Q(x)$ 是在区间 $[-1,1]$ 上有 n 阶连续可微的函数, 由分部积分法知

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)Q(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q(x)\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q'(x)\varphi^{(n-1)}(x)\mathrm{d}x\\&=\cdots\\&=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面分两种情况讨论.

1. 若 $Q(x)$ 是次数小于 n 的多项式, 则 $Q^{(n)}(x)\equiv 0$, 故得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)\mathrm{d}x=0,\ \text{当}n\neq m.$$

2. 若

$$Q(x)=\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\varphi^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n+\cdots,$$

则

$$Q^{(n)}(x)=\mathrm{P}_n^{(n)}(x)=\frac{(2n)!}{2^n n!},$$

于是

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\ \mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n\ \mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n\ \mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\ \mathrm{d}t=\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)},$$

故

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1},$$

$\square$

2 切比雪夫多项式

当权函数 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 区间为 $[-1,1]$ 时, 由序列 $\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ 正交化得到的正交多项式称为切比雪夫多项式, 表示为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\leq 1.$$

若令 $x=\cos\theta$, 则 $T_n(x)=\cos n\theta, 0\leq\theta\leq\pi$.

$$\begin{gathered}T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1,\\ T_3(x)=4x^3-3x,\quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\\ T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,\\ T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1\\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

切比雪夫多项式 $\{T_k(x)\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ 正交, 且

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \frac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

Proof. 令 $x=\cos\theta$, 则 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$, 于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \frac{\pi}{2}, & n=m\neq 0;\\ \pi, & n=m=0.\end{cases}$$

$\square$