北京理工大學

第二讲 Fourier级数与变换

李炳照

li_bingzhao@bit.edu.cn

2023-2024-2 学期 研究生课程 本硕博贯通课程

本 讲 目 录

1、信号的表示

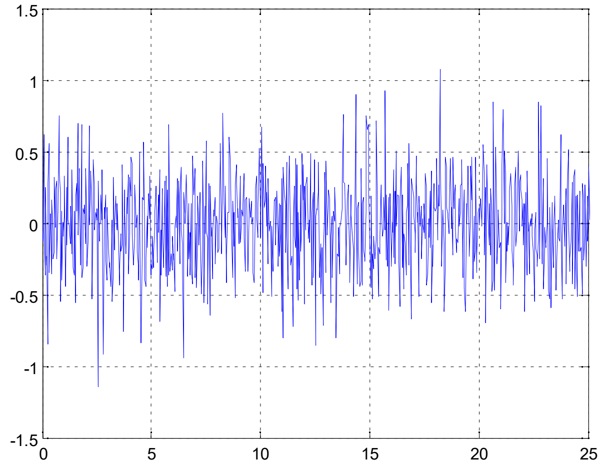
2、正交函数系

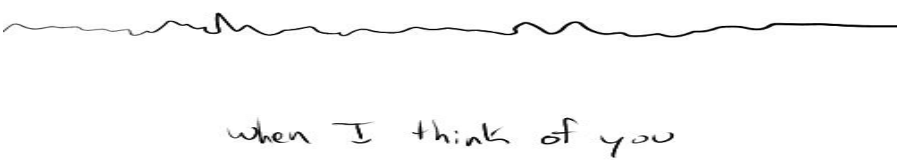
3、Fourier级数

4、Fourier变换

信号的表示

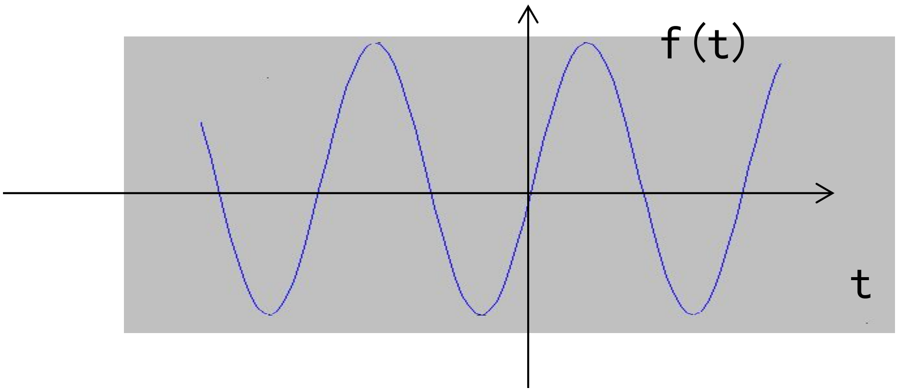
如何用合适的数学工具来表征实际信号具有重要的理论与实际意义。





正弦信号

$$f(t)=k\sin(\omega t+\theta) \text{ 或 } f(t)=k\cos(\omega t+\theta)$$



正弦信号的微分与积分仍是正弦信号。

正弦信号是一个周期信号，其周期T与角频率ω、频率f的关系为：

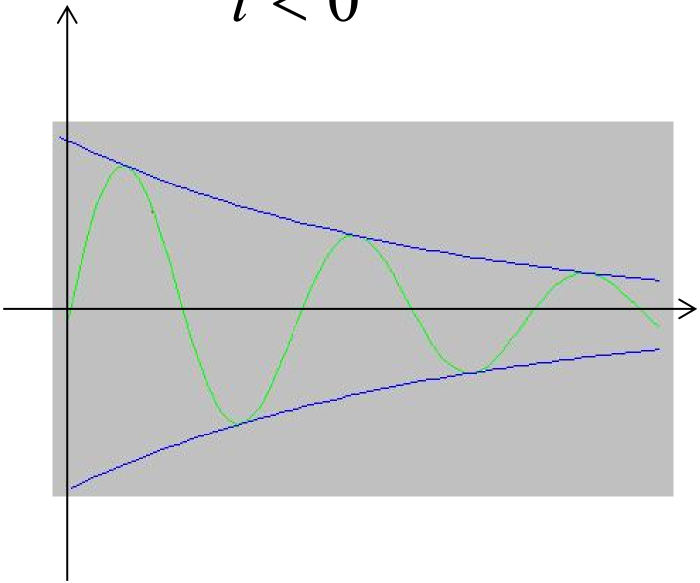
$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$$

信号的表示

衰减正弦信号

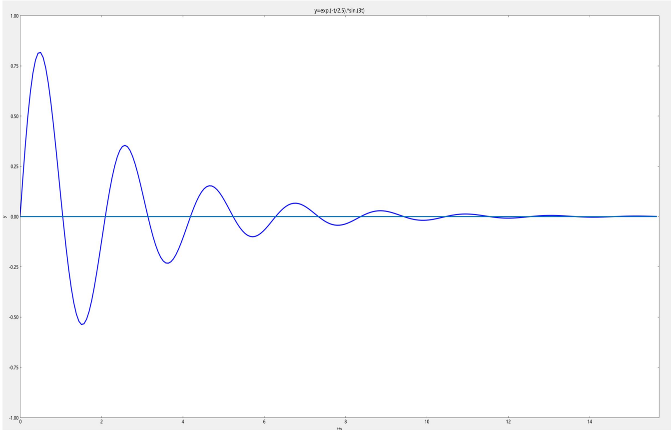
$$f(t)=\begin{cases} ke^{-at}\sin\omega t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

常见信号之间的运算可以产生新的信号。



衰减正弦信号示例

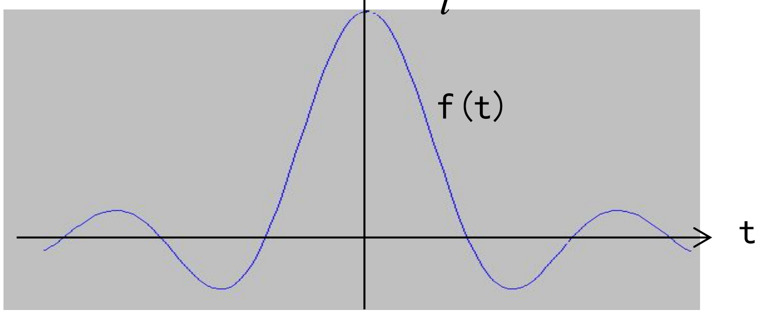
```
t=0:pi/50:5*pi;

y=exp.(-t/2.5).*sin.(3t);

plot(t,y,"b",linewidth=2,t,zeros(size(t)));

axis([0,5*pi, -1,1]);

xlabel("t");

ylabel("y");

title("y=exp.(-t/2.5).*sin.(3t)");
```



信号的表示

抽样函数

$$f(t) = Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$



Sa(t)是偶函数，t=±π，±2 π.....时，函数值为0。

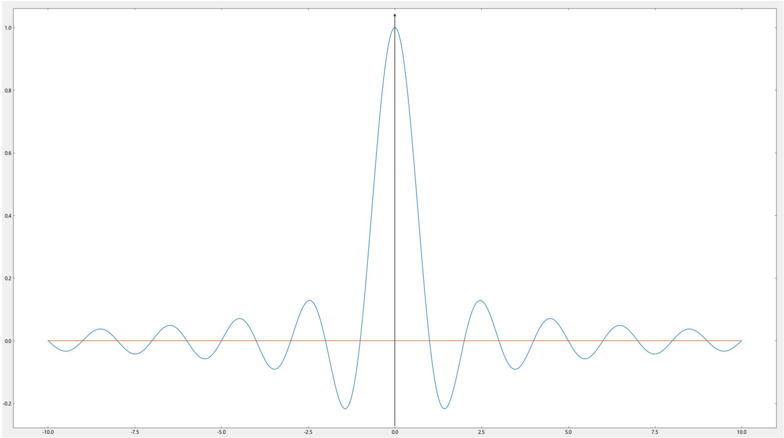
Sa(t)具有以下性质

$$\int_0^{\infty} Sa(t)\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t)\,dt = \pi$$

另一种类似的表示为 $Sinc(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$

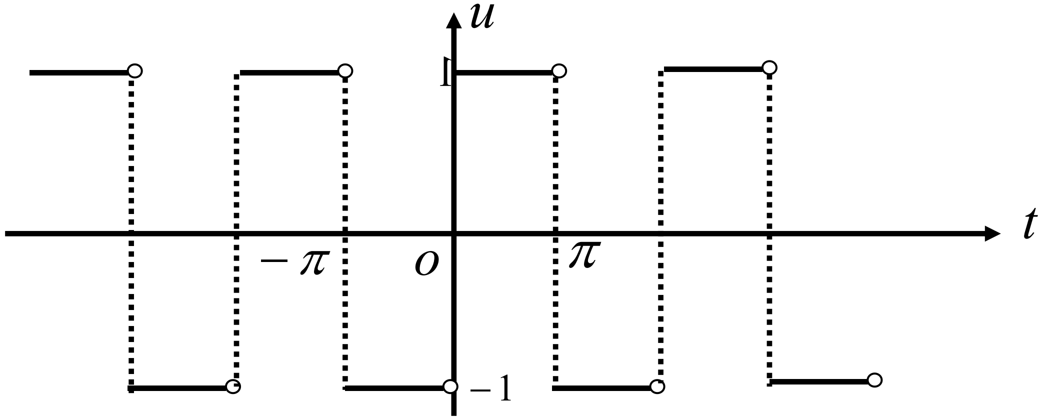
Sa函数示例代码

```
function sa(x)
    if x == 0
        return 1.0  # 避免0除错误
    else
        return sin(π * x) / (π * x)
    end
end

x = -10:0.01:10 ;
y = sa.(x);

plot(x, y,x,zeros(size(x)));
axis([-10,10]);
```



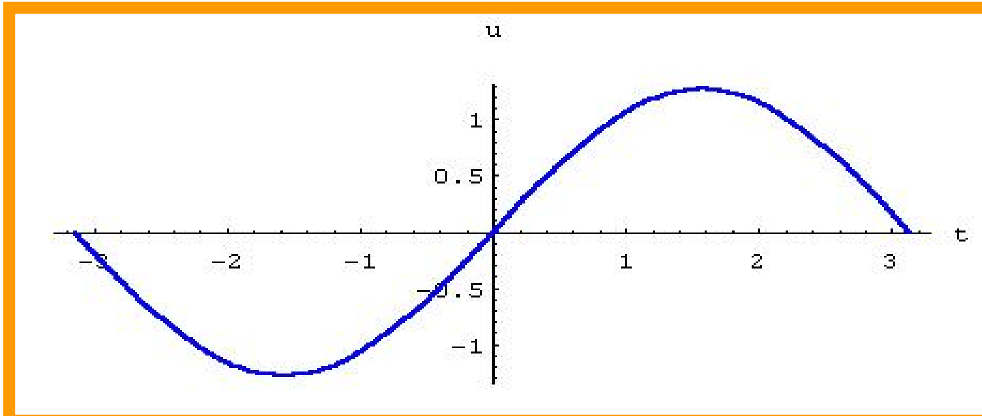
矩形波的表示

$$u(t)=\begin{cases}-1, & 当-\pi\le t<0\\ 1, & 当0\le t<\pi\end{cases}$$



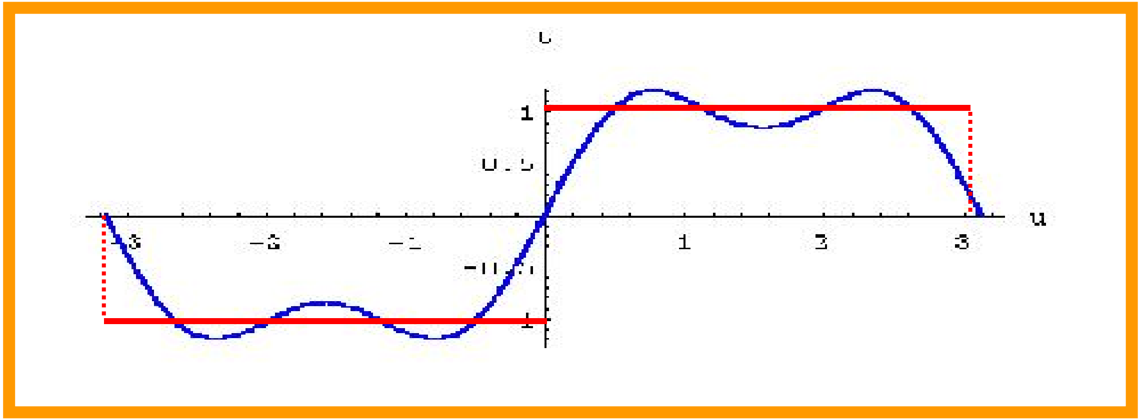
不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$



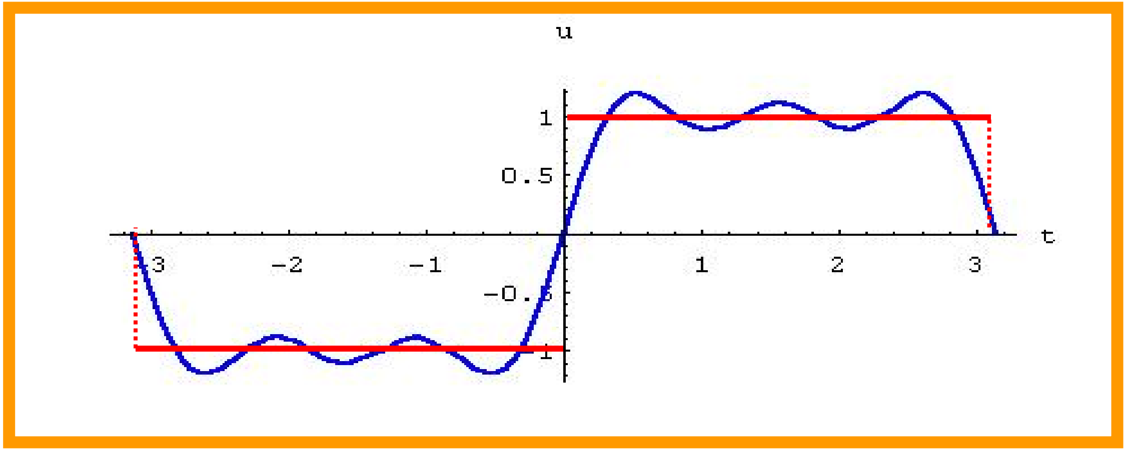
信号的表示

$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t)$$



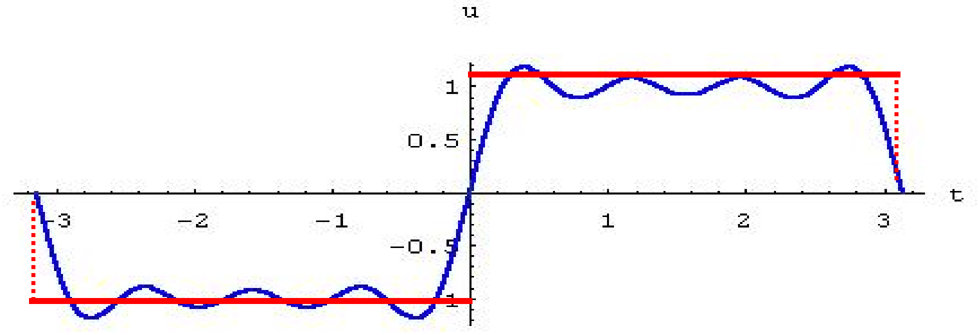
信号的表示

$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t)$$



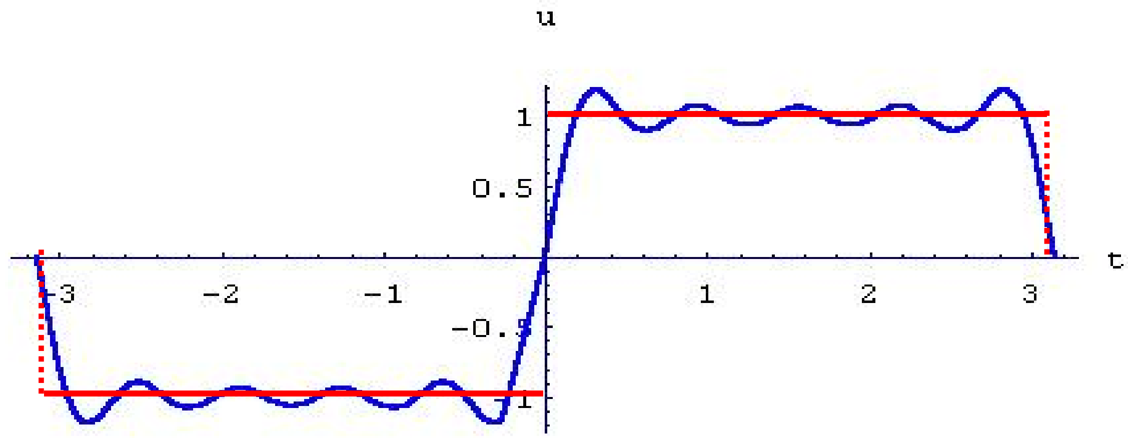
信号的表示

$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t)$$



信号的表示

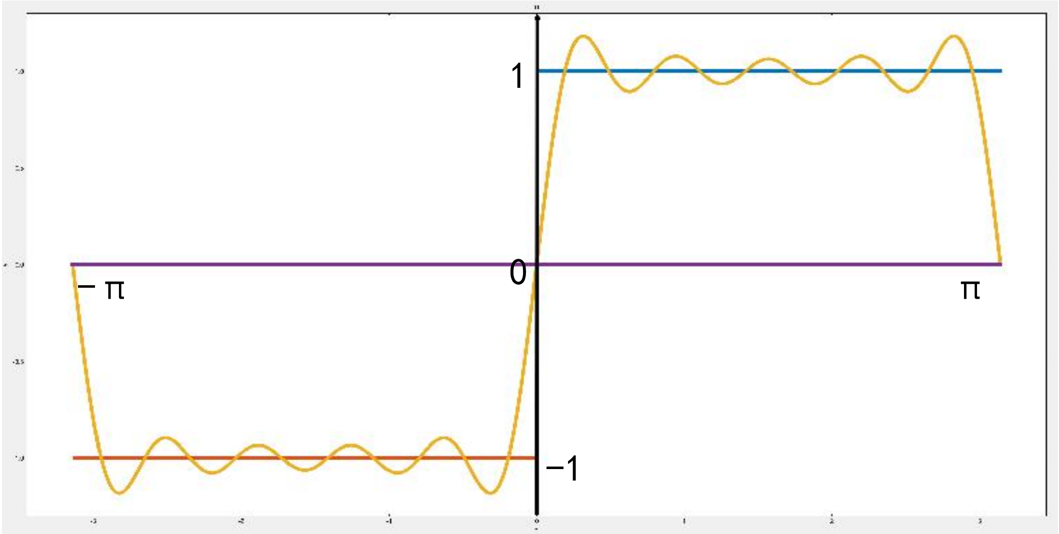
$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

Mworks代码

```
t = -pi:0.01:pi
f(t) = 4/pi * (sin(t) + (1/3)*sin(3*t)+(1/5)*sin(5*t) +
(1/7)*sin(7*t)+(1/9)*sin(9*t))
y= f.(t)

y2(t) = ifelse(0 .< t .< pi, 1, NaN)
y3(t) = ifelse(-pi .< t .< 0, -1, NaN)

y2_values = y2.(t)
y3_values = y3.(t)

plot(t,y2_values,t,y3_values,t, y,linewidth=5,t,zeros(size(t)))

xlabel("t")
ylabel("y")
title("u")
```

信号的表示

你发现了什么?

矩形脉冲信号是周期信号。

几个信号加在一起可以组合成新的信号。

和级数有关系吗?

$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \sin n\Omega t\right)$$

信号的表示非常重要。

本 讲 目 录

1、信号的表示

2、正交函数系

3、Fourier级数

4、Fourier变换

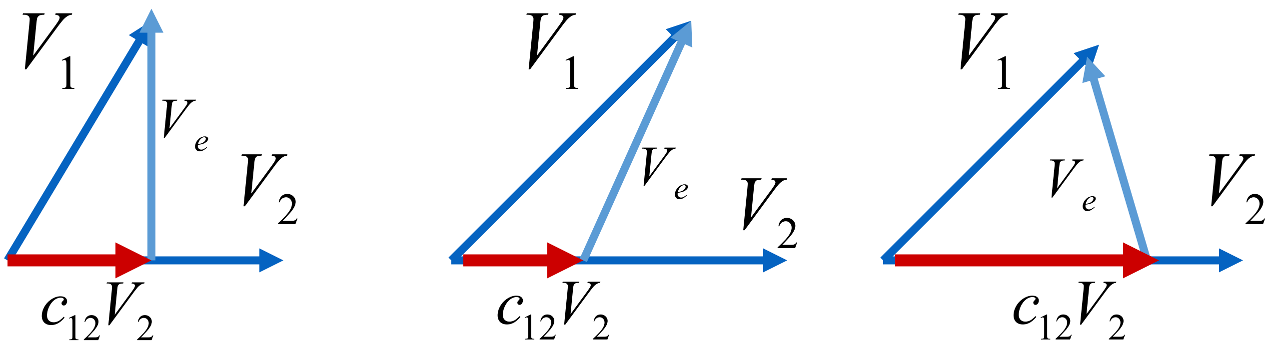
正交函数表示信号

- 正交矢量
- 正交函数
- 正交函数集
- 用完备正交集表示信号

一、正交矢量

矢量：**V**$_1$ 和 **V**$_2$ 参加如下运算，V_e是它们的差，如下式：

$$V_1 - c_{12}V_2 = V_e$$



正交函数表示信号

$$c_{12}V_2 = V_1\cos\theta = \frac{V_1V_2\cos\theta}{V_2} = \frac{V_1.V_2}{V_2} \qquad c_{12} = \frac{V_1.V_2}{V_2^2}$$

c_{12} 表示 V_1 和 V_2 互相接近的程度

当 V_1，V_2 完全重合，则 $\theta = 0, c_{12} = 1$

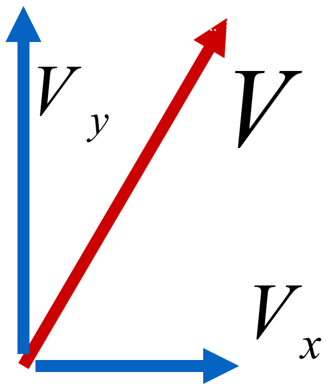
随夹角增大，c_{12} 减小；

当 $\theta = 90^o, c_{12} = 0$， V_1 和 V_2 相互垂直。

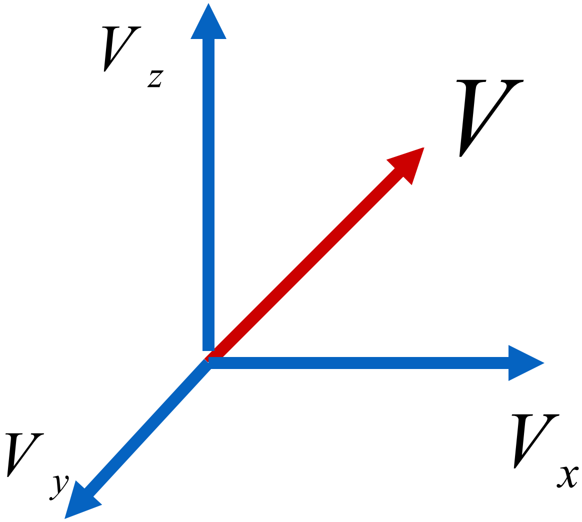
正交函数表示信号

$$V = V_x + V_y$$

$$V = V_x + V_y + V_z$$



二维正交集



三维正交集

二、正交函数

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_1 - t_2)} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$

令 $\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$ 则误差能量 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小

正交函数表示信号

$$\frac{d}{dc_{12}}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t)-c_{12}f_2(t)]^2\,dt\right. = 0$$

$$\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dc_{12}}f_1^{\,2}(t)\,dt - 2\int_{t}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\,dt\right.$$

$$+\ 2c_{12}\int_{t_1}^{t_2}f_2^{\,2}(t)\,dt\ ] = 0$$

解得 $$c_{12}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)\,dt}$$

正交条件

若 $c_{12} = 0$，则 $f_1(t)$不包含 $f_2(t)$ 的分量则

称正交，正交的条件：

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0$$

例： $$f(t)=\begin{cases} +1 & (0<t<\pi) \\ -1 & (\pi<t<2\pi) \end{cases}$$

试用sint在区(0，2π)来近似$f(t)$

解：

$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin\ tdt}{\int_0^{2\pi}\sin^2 tda}$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi}\sin tdt+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin t)dt$$

$$=\frac{4}{\pi}$$

所以： $f(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin\ t$

Mworks代码

```
t = 0:0.01:2*pi
f(t) = 4/pi * sin(t)
y = f.(t)
y2(t) = ifelse(0 .< t .< pi, 1, NaN)
y3(t) = ifelse(pi .< t .<2*pi, -1, NaN)

y2_values = y2.(t)
y3_values = y3.(t)

plot(t,y2_values,t,y3_values,t,y,linewidth=5,t,zeros(size
(t)))

xlabel("t")
ylabel("y")

title("f(t)");
```

示例图

例：试用正弦sint 在（0，2π ）区间内来表示余弦cost

解：显然 $\int_0^{2\pi}\cos t\sin t dt=0$

所以

$$c_{12}=0$$

说明cost中不包含sint分量，因此cost和sint正交.

三、正交函数集

n个函数构成一函数集 $g_1(t), g_2(t), \ldots g_n(t)$

如在区间 (t_1, t_2) 内满足正交特性，即

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt = K_i$$

则此函数集称为正交函数集。

任意函数由n个正交的函数的线性组合所近似

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

由最小均方误差准则，要求系数 c_i 满足

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt} = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt$$

在最佳逼近时的误差能量：

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r{}^2 K_r \right]$$

归一化正交函数集：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = 1 \qquad c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t)g_i(t)dt$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r{}^2 \right]$$

复函数的正交特性

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \quad c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

两复变函数正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0$$

用完备正交集表示信号：

$$f(t)=\sum_{r=1}^{\infty}c_r g_r(t) \qquad \lim_{n\to\infty}\overline{\varepsilon^2}=0$$

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt-\sum_{r=1}^{n}c_r{}^2K_r\right]$$

正交集$\{g_i(t)\}$ 之外再没有一有限能量的g(t) 满足以下条件

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)g_i(t)dt=0$$

常用完备正交集

- 三角函数集$\left\{\cos n\omega_1 t\right\}_{n\to\infty}$ $\left\{\sin n\omega_1 t\right\}_{n\to\infty}$

- 复指数函数集 $\left\{e^{jn\omega_1 t}\right\}_{n\to\infty}$

本 讲 目 录

1、信号的表示

2、正交函数系

3、Fourier级数

4、Fourier变换

周期信号的Fourier级数

- 三角函数形式的Fourier级数
- 复指数形式的Fourier级数
- 周期信号的频谱特点

周期信号的Fourier级数

傅立叶发现在表示一个物体的温度分布时，成谐波关系的正弦函数是非常有用的，另外，他还断言“任何”周期信号都可以用这样的级数来表示！

傅里叶 1768-1830

1829年P.L.狄里赫利(P.L.Dirichlet)给出了若干精确的条件，在这些条件下一个周期信号才可以用一个傅立叶级数来表示，因此，傅立叶并没有对傅立叶级数的数学理论作出贡献。

周期信号的Fourier级数

1、三角函数形式的 Fourier 级数

这种正交函数集为:

$$\{1, \cos\Omega t, \sin\Omega t, \cos 2\Omega t, \sin 2\Omega t, \ldots, \cos k\Omega t, \sin k\Omega t$$

其中: $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{t_2 - t_1}$

或将正交函数集表示为:

$$\{\cos(n\Omega t), \sin(n\Omega t) | n = 0,1,2,\ldots\}$$

周期信号的Fourier级数

- 可以将任意函数 f(t)在这个正交函数集中展开（表示成该正交函数集函数的线性组合）：

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t + \ldots + a_n \cos n\Omega t + \ldots$$
$$b_1 \sin \Omega t + b_2 \sin 2\Omega t + \ldots + b_n \sin n\Omega t + \ldots$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \right)$$

周期信号的Fourier级数

$$f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

- 直流
- 分量

- 基波分量
- n =1

- 谐波分量
- n>1

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$n\omega_1$$

狄利赫利条件：

- 在一个周期内只有有限个间断点；
- 在一个周期内有有限个极值点；
- 在一个周期内函数绝对可积，即

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \left|f(t)\right|.dt < \infty$$

- 一般周期信号都满足这些条件.
- 充分不必要条件.

直流系数 $$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).dt$$

余弦分量系数

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).\cos n\omega_1 t.dt$$

正弦分量系数

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t).\sin n\omega_1 t.dt$$

三角函数是正交函数

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos n\omega_1 t . \sin m\omega_1 t . dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \sin m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

周期信号的另一种三角函数正交集表示

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_1 t+\phi_0)$$

$$f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n.\sin(n\omega_1 t+\theta_n)$$

比较几种系数的关系

$$a_0 = C_0 = d_0 \quad C_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$a_n = C_n \cos\varphi_n = d_n \sin\theta_n$$

$$b_n = -C_n \sin\phi_n = d_n \cos\theta_n$$

$$tg\theta_n = \frac{a_n}{b_n} \qquad tg\phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

二、周期函数的复指数级数

- 由前知 $f_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$
- 由欧拉公式 $\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}}$
- 其中 $F(0) = a_0$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

引入了负频率

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

指数形式的傅里叶级数的系数

$$\boxed{F_n = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}$$

两种Four ier级数系数间的关系 $F(n\omega_1) = F_n$

$$F_0 = c_0 = d_0 = a_0$$

$$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$F_{-n} = |F_{-n}|e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

两种傅氏级数的系数间的关系

$$\left|F_n\right| = \left|F_{-n}\right| = \tfrac{1}{2}c_n = \tfrac{1}{2}d_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\left|F_n\right| + \left|F_{-n}\right| = c_n \qquad F_n + F_{-n} = a_n$$

$$j(F_n - F_{-n}) = b_n$$

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4F_nF_{-n}$$

周期复指数信号的频谱图的特点

- 引入了负频率变量，没有物理意义，只是数学推导；
- Cn是实函数，Fn一般是复函数，
- 当Fn是实函数时，可用Fn的正负表示0和π相位，幅度谱和相位谱合一；

总结：周期信号的频谱展开

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \qquad （1）$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \qquad （2）$$

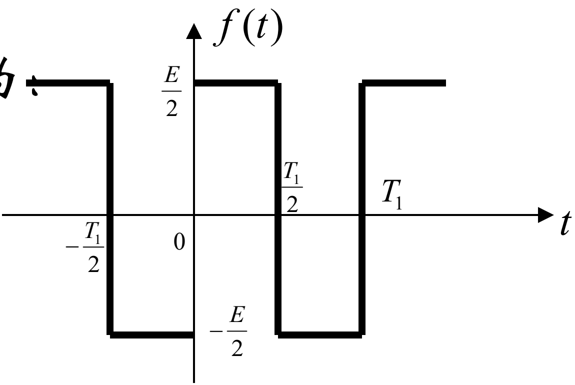
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad （3）$$

想法

为了能既方便又明确地表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可以画出频谱图来直观地表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，绘出 c_n 及 φ_n 等的变化关系，便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

•例 求题图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。



•**解**：一个周期内 $f(t)$ 的表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & 0<t<\dfrac{T_1}{2}\\ -\dfrac{E}{2} & \dfrac{T_1}{2}<t<T_1\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt=0 \qquad a_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

•2024-3-8

$$c_n = b_n = \begin{cases} \dfrac{2E}{n\pi} & n = 1,3,5\cdots \\ 0 & n = 2,4,6\cdots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n}) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,3,5\cdots)$$

- 因 此

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t$$

$$= \frac{2E}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 + \cdots)$$

- 或

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

- 2024-3-8

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\dfrac{jE}{n\pi} & n = \pm1, \pm3, \pm5 \cdots \\ 0 & n = \pm2, \pm4, \pm6 \cdots \end{cases}$$

$$f(t) = -\frac{jE}{\pi}e^{j\omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi}e^{j3\omega_1 t} - \cdots + \frac{jE}{\pi}e^{-j\omega_1 t} + \frac{jE}{3\pi}e^{-j3\omega_1 t} + \cdots$$

$$|F_n| = \left|\frac{E}{n\pi}\right| \quad (n = \pm1, \pm3, \pm5 \cdots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \cdots) \end{cases}$$

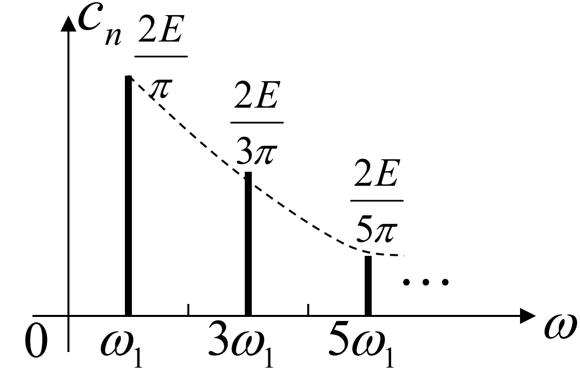
•2024-3-8

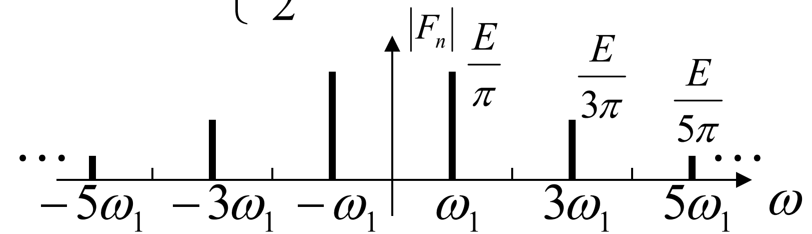
$$c_n=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

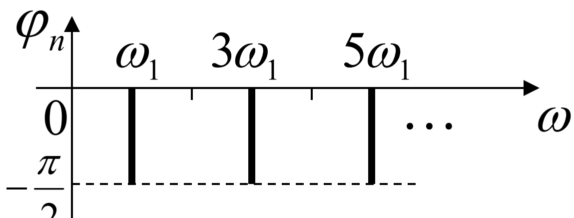
$$\varphi_n=-\frac{\pi}{2}\quad(n=1,3,5\cdots)$$

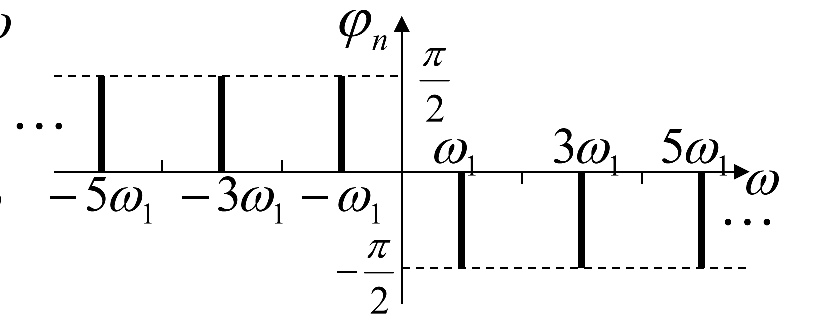
$$\left|F_n\right|=\left|\frac{E}{n\pi}\right|\qquad(n=\pm1,\pm3,\pm5\cdots)$$

$$\varphi_n=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & (n=1,3,5\cdots)\\ \dfrac{\pi}{2} & (n=-1,-3,-5\cdots)\end{cases}$$









周期信号频谱的特点

- （1）离散性 -------- 频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

- （2）谐波性 -------- 谱线出现在基波频率ω_1 的整数倍上。

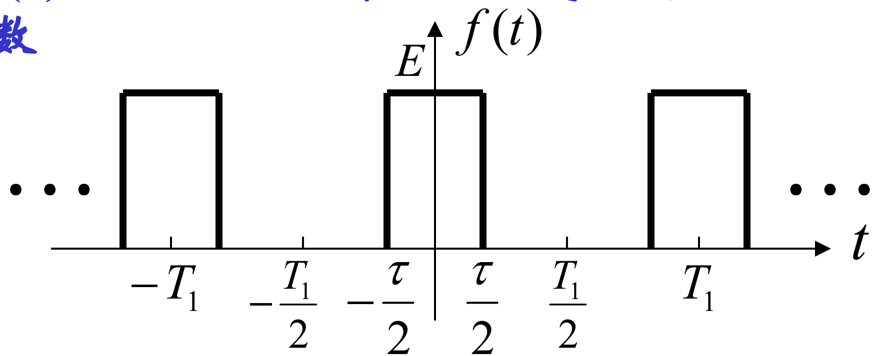
- （3）收敛性 -------- 幅度谱的谱线幅度随着 $n \to \infty$ 而逐渐衰减到零。

•2024-3-8

典型周期信号的频谱

•1 周期矩形脉冲信号

•(1) 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



$$b_n = 0 \qquad a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega_1 t dt = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = c_n$$

•2024-3-8

- 周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

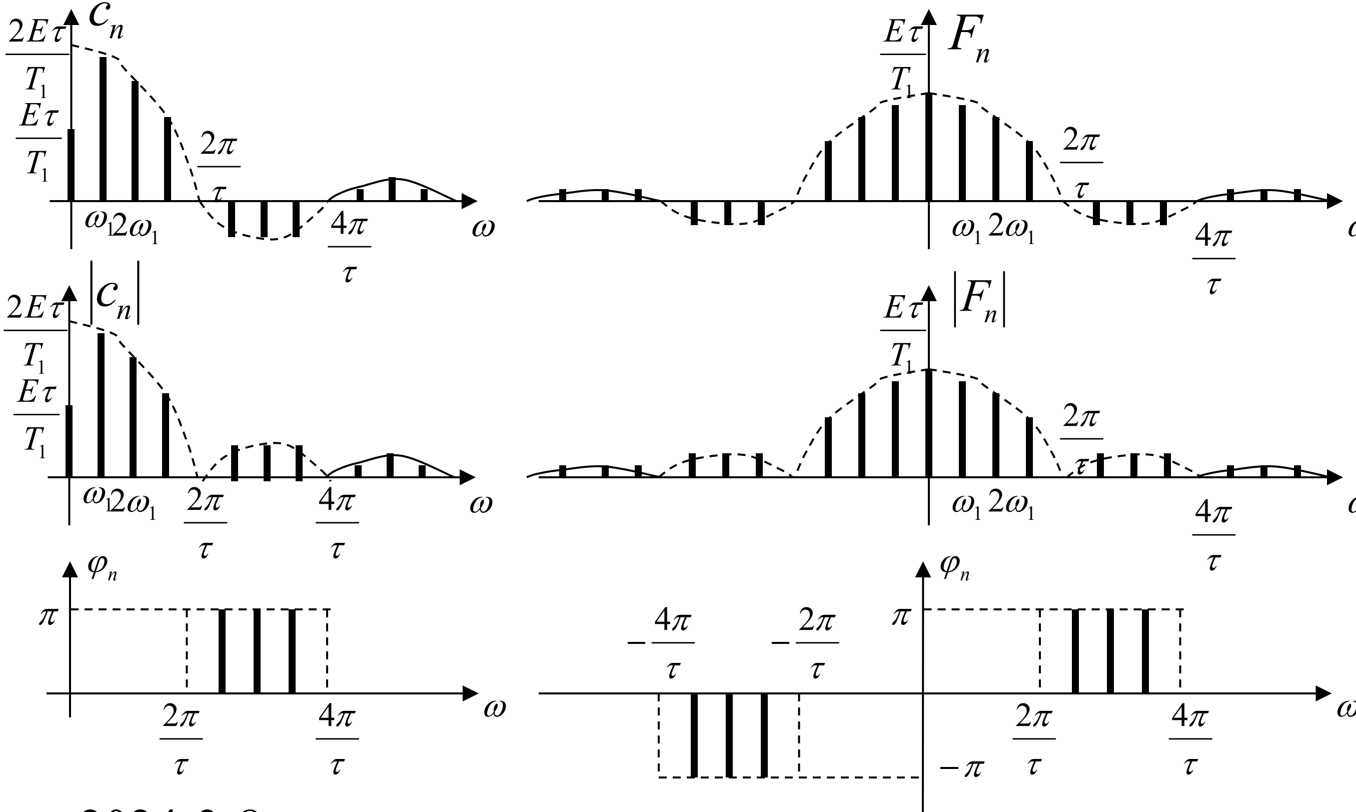
$$F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{2}a_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

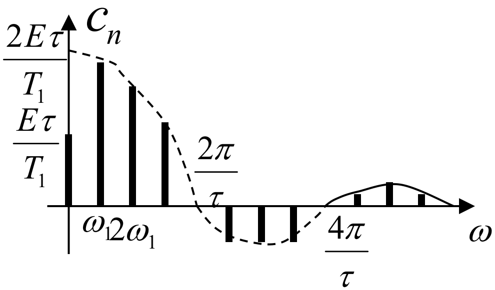
- $f(t)$的指数形式的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$

- **（2）频谱图**

$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \qquad F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$





- 若 $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4}$
- 则 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{4\tau} = \frac{1}{4}(\frac{2\pi}{\tau})$

- 因此，第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有3根谱线。

- 一般情况： • 若 $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{n}$ • 则

- 第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有n-1根谱线。

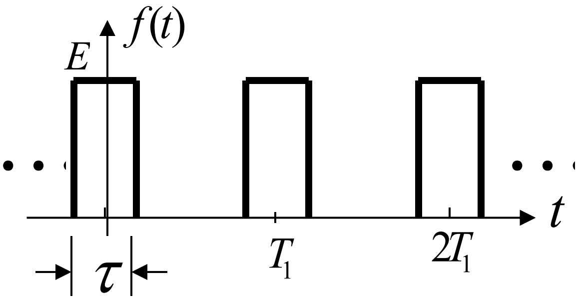
- 频带宽度： $B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ • 或 $B_f = \frac{1}{\tau}$

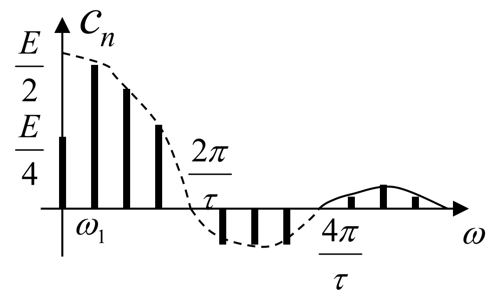
- **结论：矩形脉冲的频带宽度与脉冲宽度成反比。**

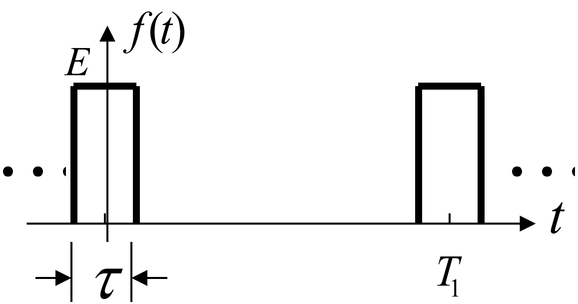
- 2024-3-8

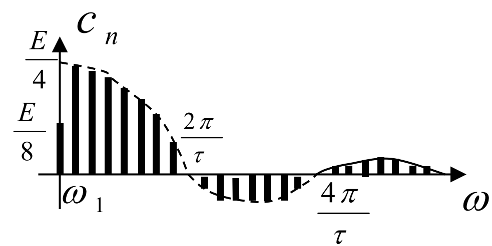
（3）频谱结构与波形参数的关系（T_1, τ ）

- 1.若 τ不变,T_1 扩大一倍，即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$

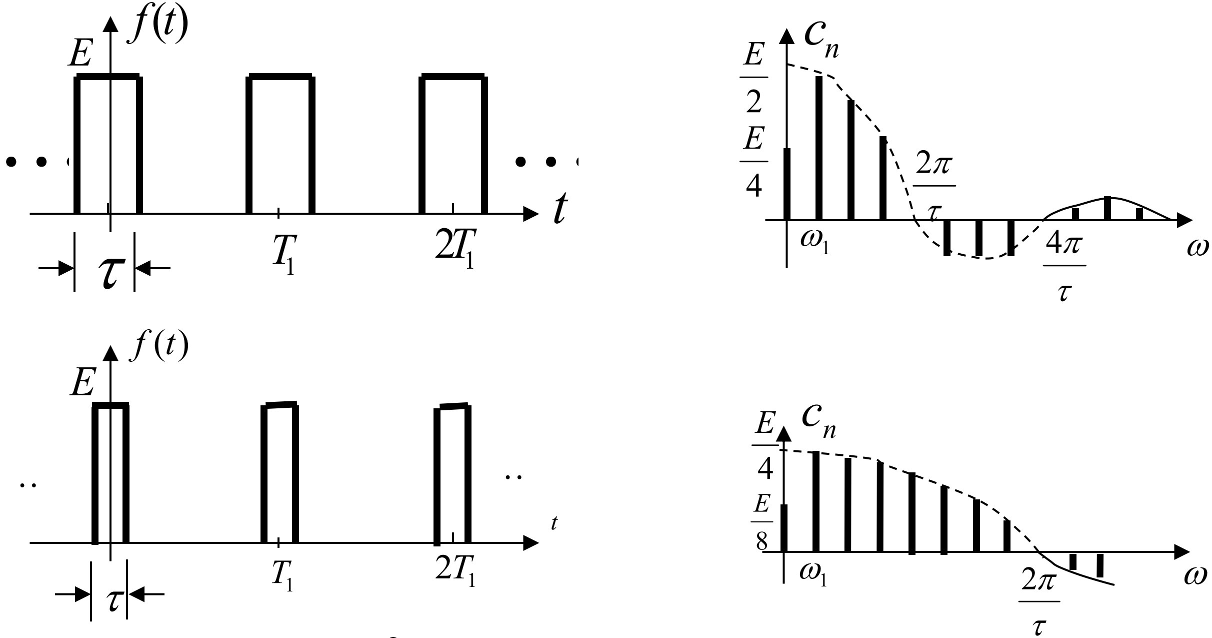






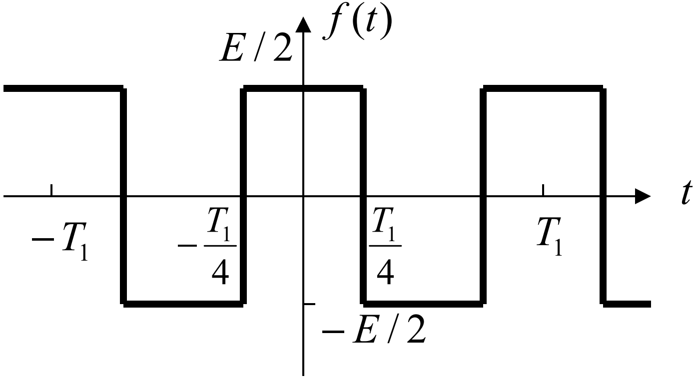


- 2.若T_1不变，τ减小一半，即$T_1=4\tau \rightarrow T_1=8\tau$



- 谱线间隔 $\omega_1(=\frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与T_1成反比；零值点频率$\frac{2\pi}{\tau}$ 只与τ有关，且与τ成反比；而谱线幅度与τ和T_1都有关系，且与T_1成反比与τ成正比。

• 对称矩形脉冲信号的傅里叶级数



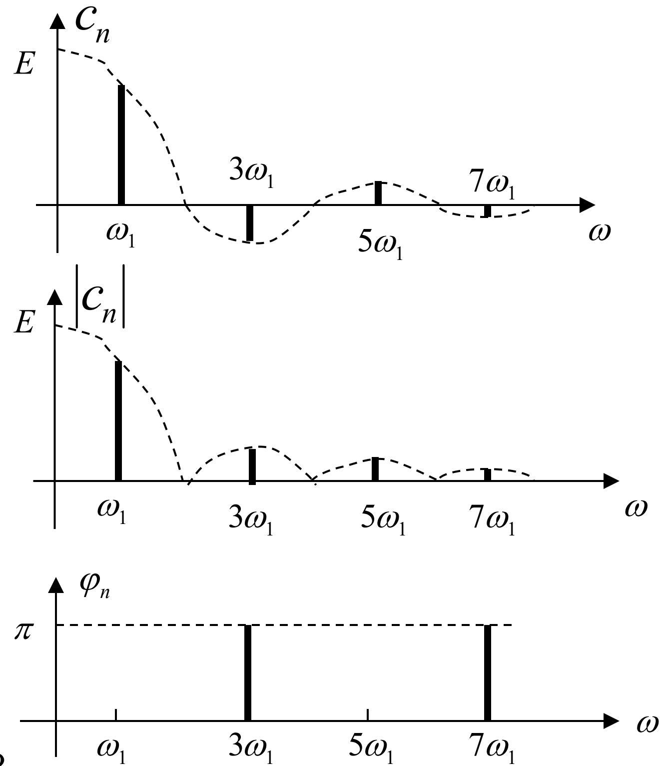
$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

• 令 $a_0=0,\quad T_1=2\tau$ ，则有

$$f(t)=E\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

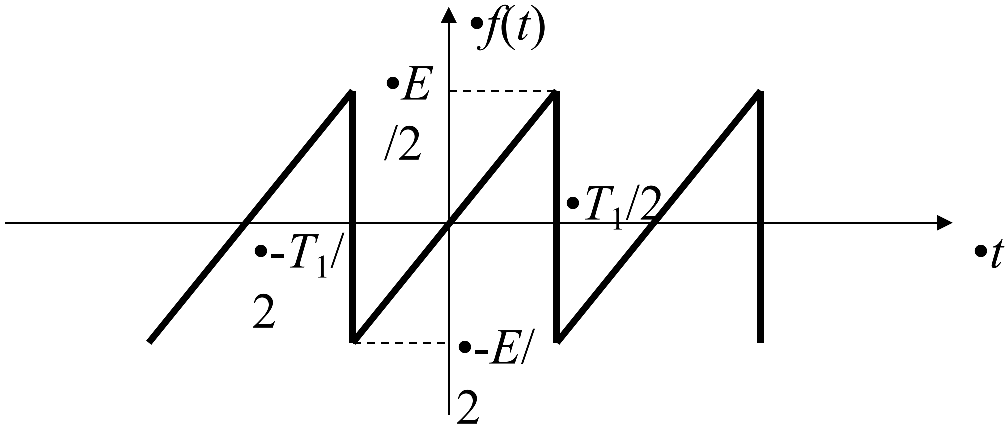
$$=\frac{2E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\cdots\right)$$

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}(\cos\ \omega_1 t-\frac{1}{3}\cos\ 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos\ 5\omega_1 t-\cdots)$$



•2024-3-8

周期锯齿脉冲信号

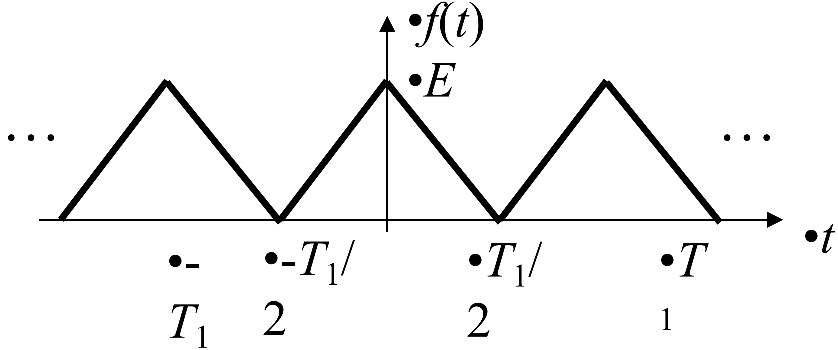


$$f(t)=\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$

- 周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量，谐波的幅度以1/n的规律收敛。

•2024-3-8

周期三角脉冲信号



$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\cos n\omega_1 t$$

- 周期三角脉冲的频谱只包含直流、奇次谐波的余弦分量，谐波的幅度以 $1/n^2$ 的规律收敛。

根据周期性方波的频谱，我们可以得到关于信号特性的几个一般性结论：

1、T 增加——>Sa()函数不变——>频谱的包络不变，收敛性不变。但是：1）谱线幅度降低；2）谱线密度加大。

信号周期加大，对振幅的收敛性没有影响，但会使谱线密度增加。

- 当 T 趋向无穷大时，信号成为非周期信号，这时，谱线幅度降低为无穷小，谱线密度加大，信号分量出现在所有频率上。

2、τ 下降——>Sa()尺度扩大——>收敛性变差，但是谱线间隔不变。

- 信号时间宽度变小，将使信号能量向高频扩散，信号的频带增加。

3、 信号的频带：

✧ 由于信号的频谱的收敛性，一般可以在一个信号分量主要集中的频率区间内研究信号的特性，而忽略信号其它部分的分量。相应的频率区间就是信号的频带。

信号的频带有很多种定义方法：

1） 以信号最大幅度的1/10为限，其它部分忽略不计。

2） 以信号振幅频谱中的第一个过零点为限，零点以外部分忽略不计。

3） 以包含信号总能量的90%处为限，其余部分忽略不计。

本 讲 目 录

1、信号的表示

2、正交函数系

3、Fourier级数

4、Fourier变换

数学思想

简单的函数能否组成复杂函数呢？

“周期信号都可以表示谐波关系的正弦信号的加权”

---- 傅里叶的第一个主要观点

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jntw_0} \qquad c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt$$

Fourier级数（三角级数）

数学思想

简单的函数能否组成复杂函数呢？

“非周期信号都用正弦信号的加权积分表示”

----傅里叶的第 二个主要观点

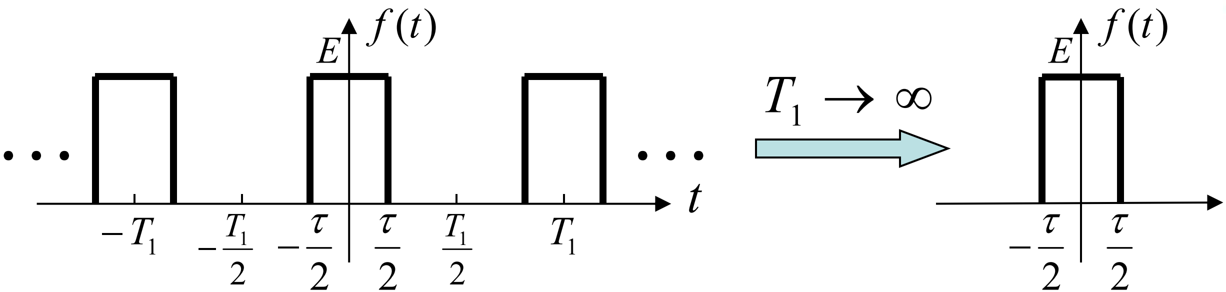
$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R F(w)e^{jwt}dw \qquad F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(t)e^{-jwt}dt$$

Fourier变换

非周期信号的频谱特点—Four ier变换。

周期信号的频谱，具有离散性、收敛性，但当周期趋于无穷大时，周期信号趋于非周期信号，此时的谱也由离散谱变为连续谱，而其幅度趋于无穷小，尽管如此，各频率分量振幅间的相对大小关系没有变，为表示这种关系需引进一个新的量---傅里叶变换。

非周期信号的频谱分析——傅里叶变换



$$T_1 \uparrow \Longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \Longrightarrow \text{谱线间隔} \downarrow$$

$$T_1 \to \infty \Longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0 \Longrightarrow \text{谱线间隔} \to 0$$

- 周期信号的离散谱 $\Longrightarrow$ •非周期信号的连续谱
- 由于 $T_1 \to \infty$，$F_n = \dfrac{1}{T_1}\displaystyle\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \to 0$

• 频谱密度函数

$$\lim_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

当 $T_1 \to \infty$时，离散频率 $n\omega_1 \to$ 连续频率 ω

• 则 $$\lim_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

• 记为 $F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

•--------非周期信号$f(t)$ 的傅里叶变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

•--------傅里叶逆变换

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(j\omega)|$ •--------幅度谱 $\varphi(\omega)$ •-------相位谱

•傅里叶逆变换：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

•傅里叶变换：$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

•---连续谱、相对幅度

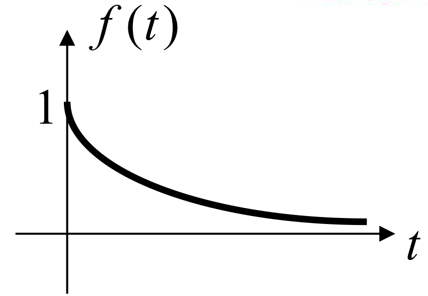
•周期信号：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$ •---离散谱、实际幅度

F_n •与 $F(j\omega)$ 的关系：$\because F(j\omega)=\lim_{T_1\to\infty}F_nT_1 \quad \therefore F_n=\left.\dfrac{F(j\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}$

典型非周期信号的频谱

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = e^{-\alpha t}u(t)$$

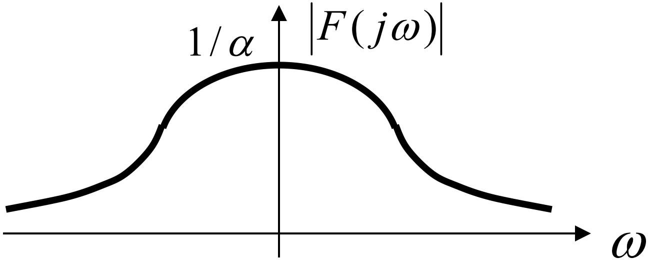


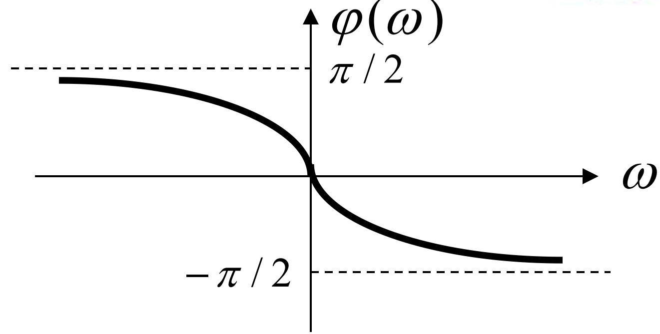
- **一、单边指数信号**

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$\left|F(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega)=-\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$

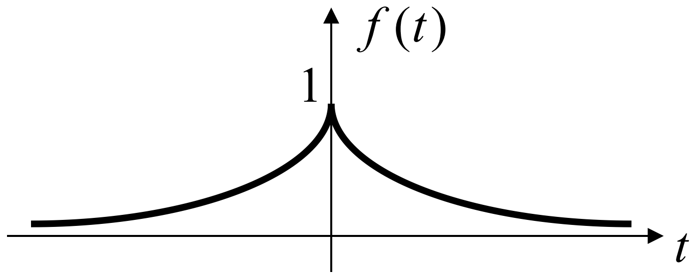
$$\left|F(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



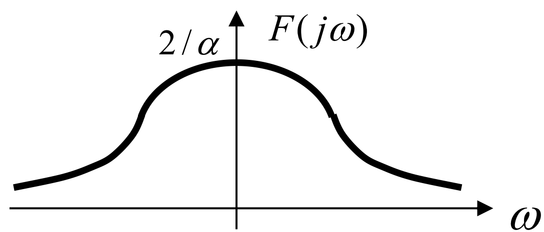


- **二、双边指数信号**

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

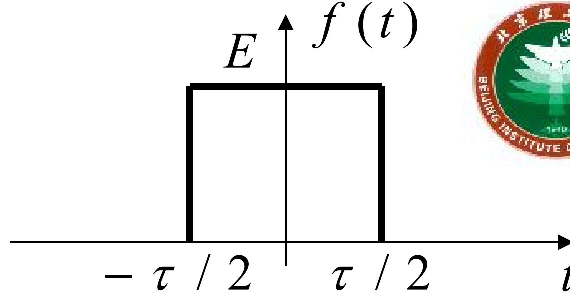


$$F(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

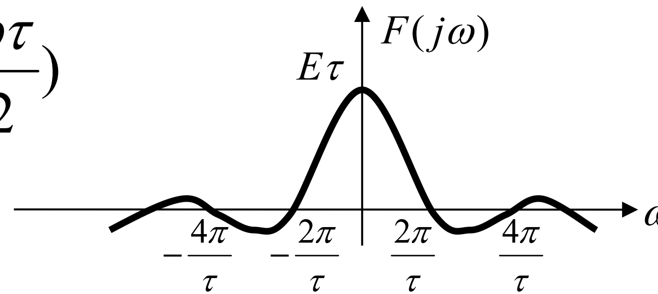


•三、对称矩形脉冲信号

$$f(t)=\begin{cases}E & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



$$F(j\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



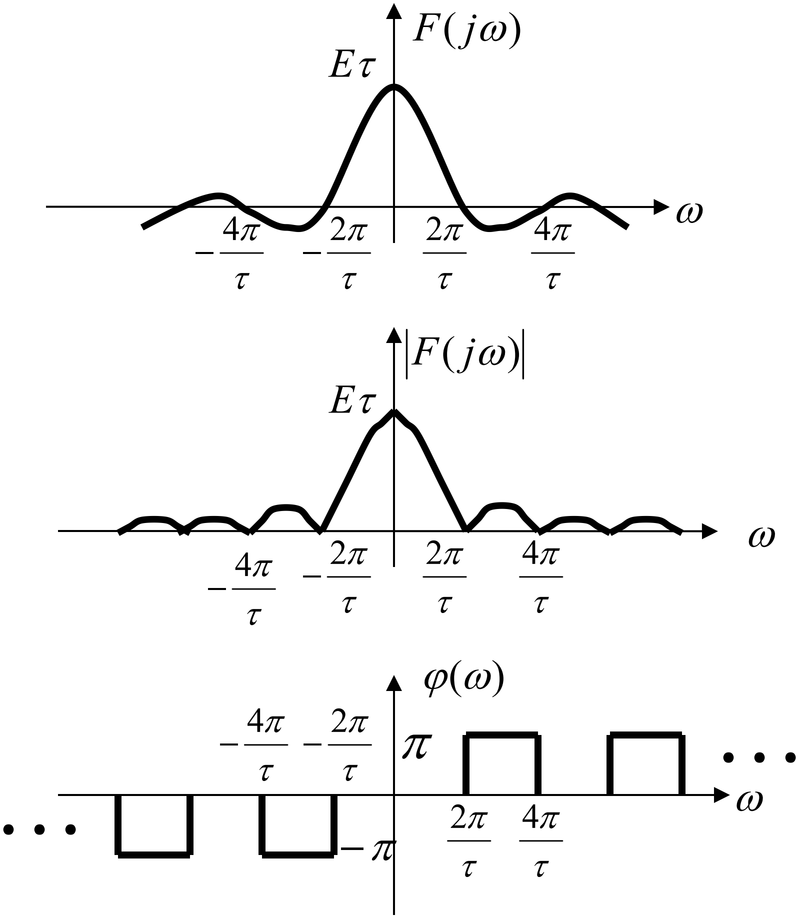
•周期矩形脉冲信号：

$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$B_\omega=\frac{2\pi}{\tau},\quad B_f=\frac{1}{\tau}$$

$F(j\omega)$与F_n•之间满足如下关系：

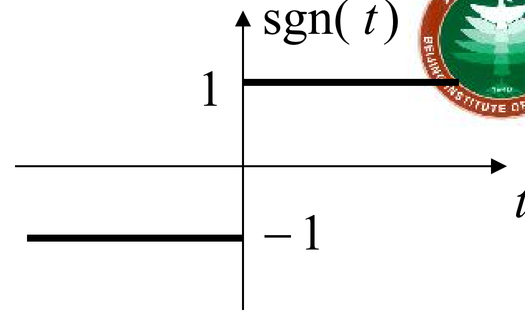
$$F_n=\left.\frac{F(j\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}$$



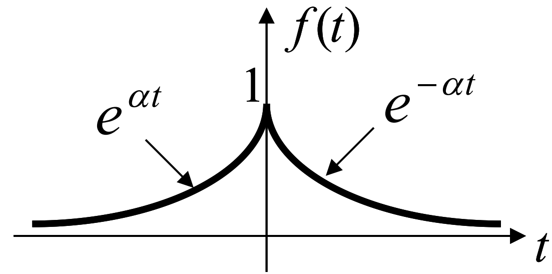
$F(j\omega)$
$E\tau$
ω
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$|F(j\omega)|$
$E\tau$
ω
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$\varphi(\omega)$
$-\frac{4\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
π
$-\pi$
ω
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$\cdots$
$\cdots$

•四、符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

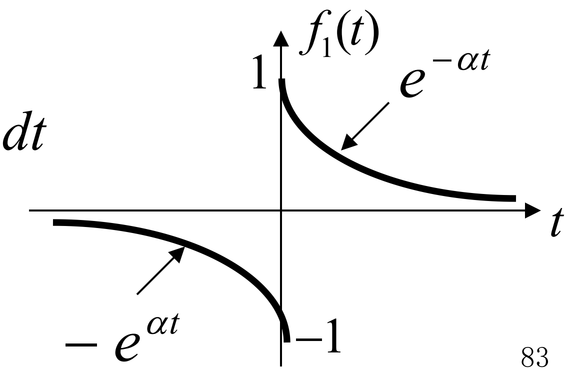


$$f(t)=e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$



$$f_1(t)=f(t)\operatorname{sgn}(t)$$

$$=-e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$$



$$F_1(j\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{0}(-e^{\alpha t})e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

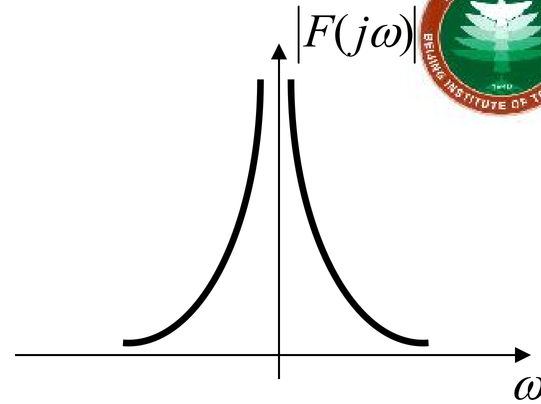
$$=\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

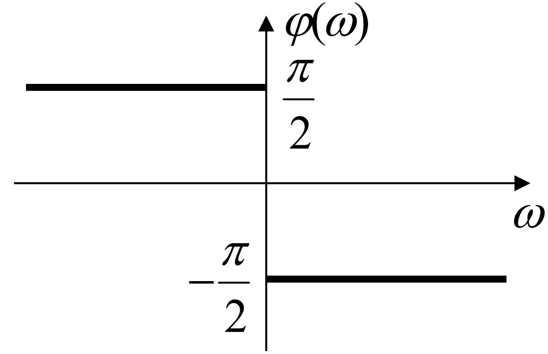
$$F_1(j\omega)=\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$F(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(j\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

$$\left|F(j\omega)\right|=\frac{2}{|\omega|}$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & \omega>0\\ \dfrac{\pi}{2} & \omega<0\end{cases}$$

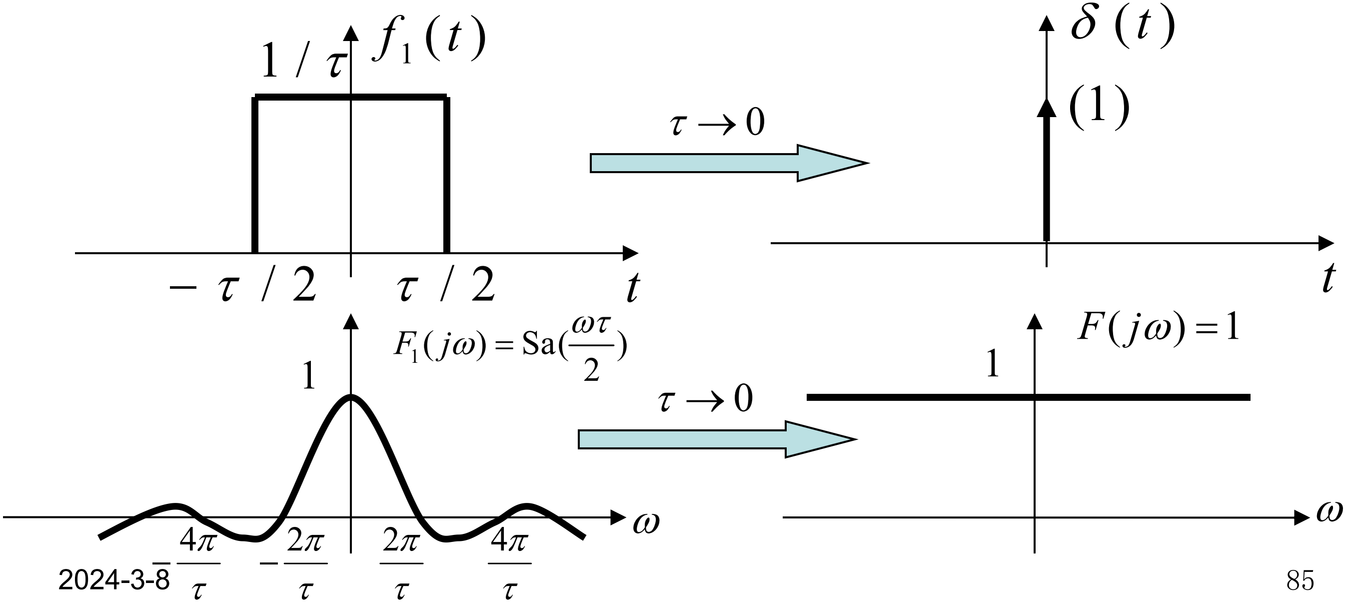




•五、冲激函数和冲激偶函数

•(1) 冲激函数的傅里叶变换 $F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$

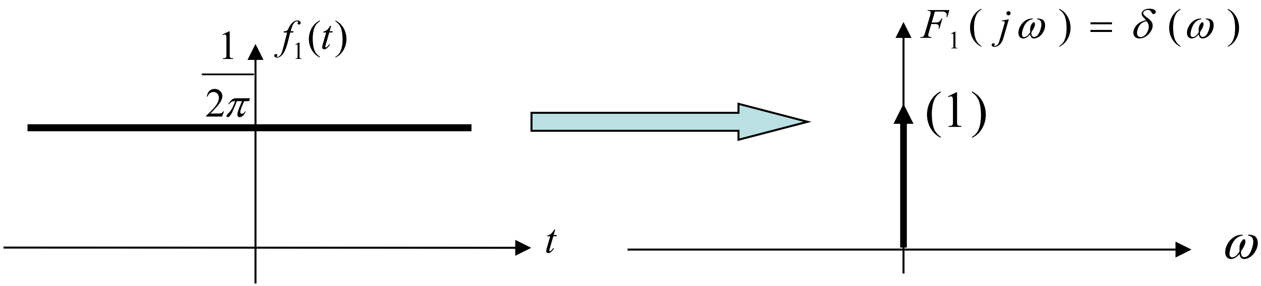
单位冲激函数的频谱等于常数，也就是说，在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。

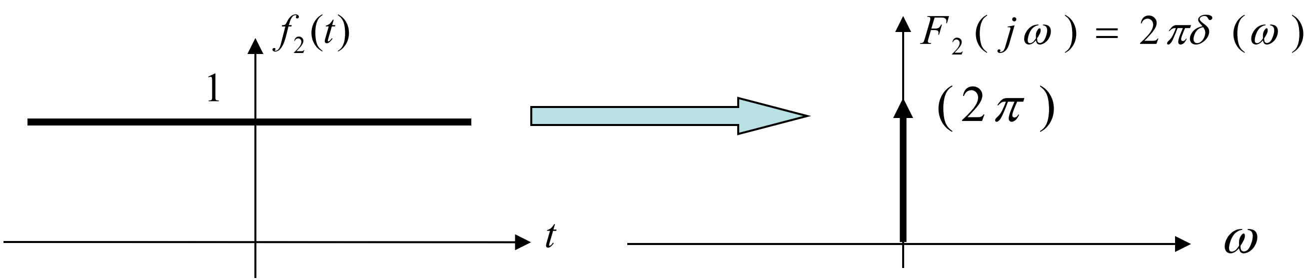


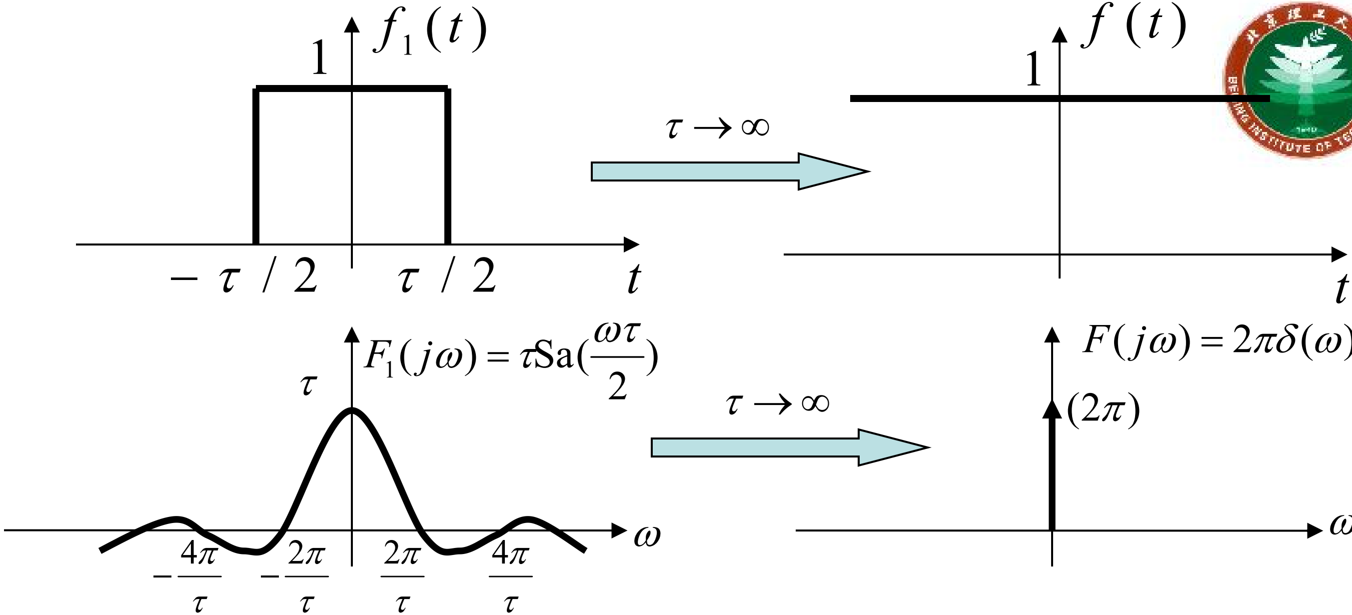
•(2）冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

• 或 $\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}] = \delta(\omega)$, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$







$$\because \lim_{\tau\to\infty}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]=1$$

$$\therefore \bullet\mathrm{F}[1]=\lim_{\tau\to\infty}\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})=\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2\pi}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})}_{\delta(\omega)}\cdot 2\pi=2\pi\delta(\omega)$$

• 或：$\int_{-\infty}^{\infty}\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})d\omega=2\pi$

(3) 冲激偶的傅里叶变换

$\because \quad F[\delta(t)] = 1,$ 即：$\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$

- 上式两边对t 求导得：

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore F[\delta'(t)] = j\omega$$

- 同理：

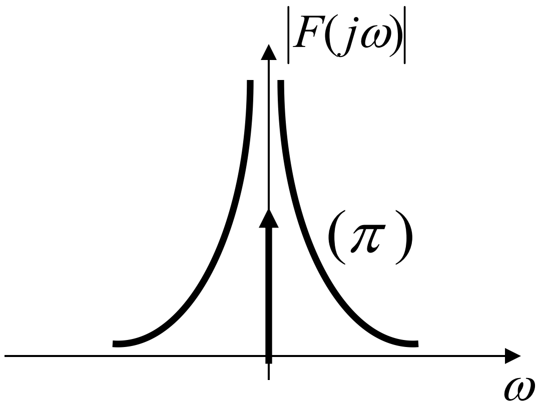
$$F[\delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^n$$

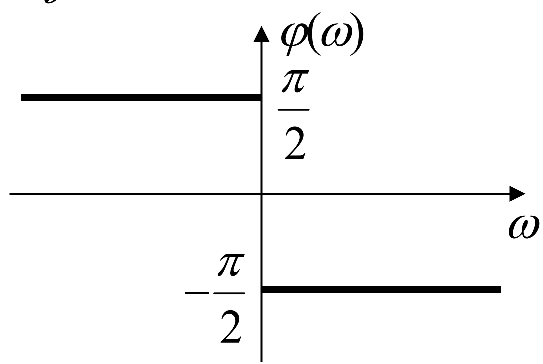
•五、阶跃信号

$$\because\ u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\therefore\ F(j\omega)=\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}]+\mathcal{F}[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$





从Fourier级数到变换

性质1（导数性质）$\mathrm{F}\left\{f'(x)\right\}=i\omega F(\omega)$

性质2（积分性质）$\mathrm{F}\left\{\int^{x} f(x)dx\right\}=\dfrac{1}{i\omega}F(\omega)$

性质3（相似性质）$\mathrm{F}\left\{f(ax)\right\}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$

性质4（延迟性质）$\mathrm{F}\left\{f(x-x_0)\right\}=e^{-i\omega x}F(\omega)$

性质5（位移性质）$\mathrm{F}\left\{e^{ix\omega}f(x)\right\}=F(\omega-\omega_0)$

性质6（卷积性质）$\mathrm{F}\left\{f_1(x)*f_2(x)\right\}=2\pi F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$

卷积： 设两个函数$f(x), g(x)$都是可积函数，作积分

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(x - \tau) d\tau$$

称上述积分为两个函数的卷积，卷积在实际应用中起到了非常重要的作用。

（1）时域卷积定理

若 $F_1(j\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$，　$F_2(j\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$，

则 $\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$

（2）频域卷积定理

若 $F_1(j\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]$，　$F_2(j\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]$，

则 $$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)$$

其中：$$F_1(j\omega)*F_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(ju)F_2[j(\omega-u)]\,du$$

作业

- 1、除了本节课讲的正交函数系之外，请再找出1-2组正交的函数系，并给出其正交性、完备性的证明。
- 2、请用mworks仿真画出本讲所讲的周期函数Fourier级数的频谱特点。
- 3、请给出典型信号的Fourier变换结果，并仿真实现，观察相关的计算量问题。
- 4、本周作业最终提交日期为3月22日。

谢 谢