北京理工大學

第四讲 采样定理

李炳照

li_bingzhao@bit.edu.cn

2023-2024-2 学期 研究生课程 本硕博贯通课程

FFT算法回顾

设N＝2L，将序列x(n)分解为偶数项和奇数项两组：

$$\begin{cases} x(2r) = x_1(r) \\ x(2r+1) = x_2(r) \end{cases}$$

r=0,1， …， N/2-1

$$x(n):\ \{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{N-2}, x_{N-1}\}$$

$$\{x_0, x_2, x_4, \cdots, x_{N-2}\}$$

偶数样本

$$x_1(r) = x(2r)$$

$$\{x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{N-1}\}$$

奇数样本

$$x_2(r) = x(2r+1)$$

FFT算法回顾

将DFT运算也相应分为两组：

$$w_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(k) = DFT[x(n)] = \sum_{N=0}^{N-1} x(2r) w_N^{nk}$$

偶数项　　　　奇数项

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) w_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) w_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) w_N^{2rk} + w_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) w_N^{2rk}$$

FFT算法回顾

由折半引理：$w_N^{2nk}=w_{N/2}^{nk}$

$$x(k)=G(k)+w_N^k H(k),k=0,1,...\frac{N}{2}-1$$

由消去引理：$w_N^{k+N/2}=-w_N^k$

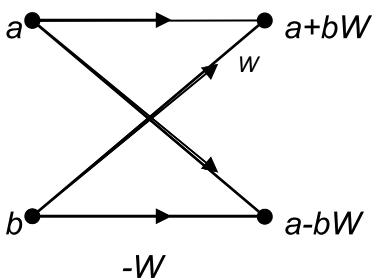
$$x(k+\frac{N}{2})=G(k)-W_N^k H(k),k=0,1,...\frac{N}{2}-1$$

其中：$H(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r+1)w_{\frac{N}{2}}^{rk}$ $\qquad G(k)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2r)w_{\frac{N}{2}}^{rk}$

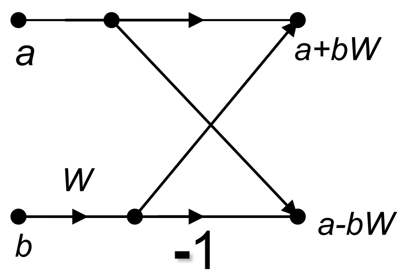
蝶形图回顾

将$H(k)$和$G(k)$合成$X(k)$运算可归结为：

$$\begin{cases} a + bW \\ a - bW \end{cases}$$



(a)

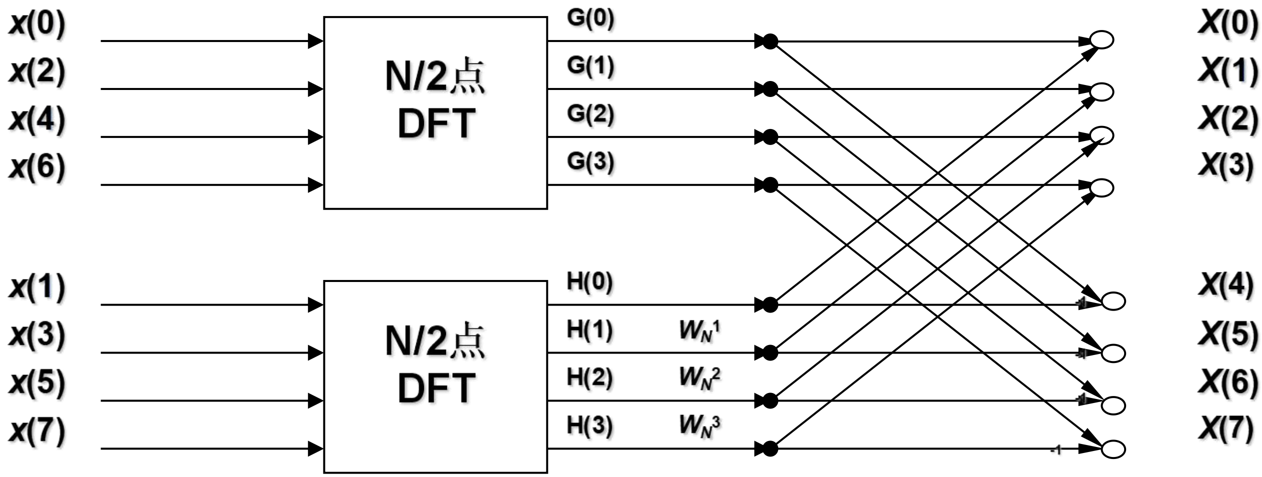


(b)

蝶形运算的简化

蝶形图回顾

N=2³=8 的例子



两个4点DFT组成8点DFT

蝶形图回顾

N=2³=8 的例子: $X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{nk}$

$\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$

X(k)

X(0) X(1) X(2) X(3) X(4) X(5) X(6) X(7)

N=4
k=0,1,2,3,4,5,6,7

$\{x_0,x_2,x_4,x_6\}$ $\{x_1,x_3,x_5,x_7\}$

G(k) H(k)

G(0) G(1) G(2) G(3) H(0) H(1) H(2) H(3)

N=4
k=0,1,2,3

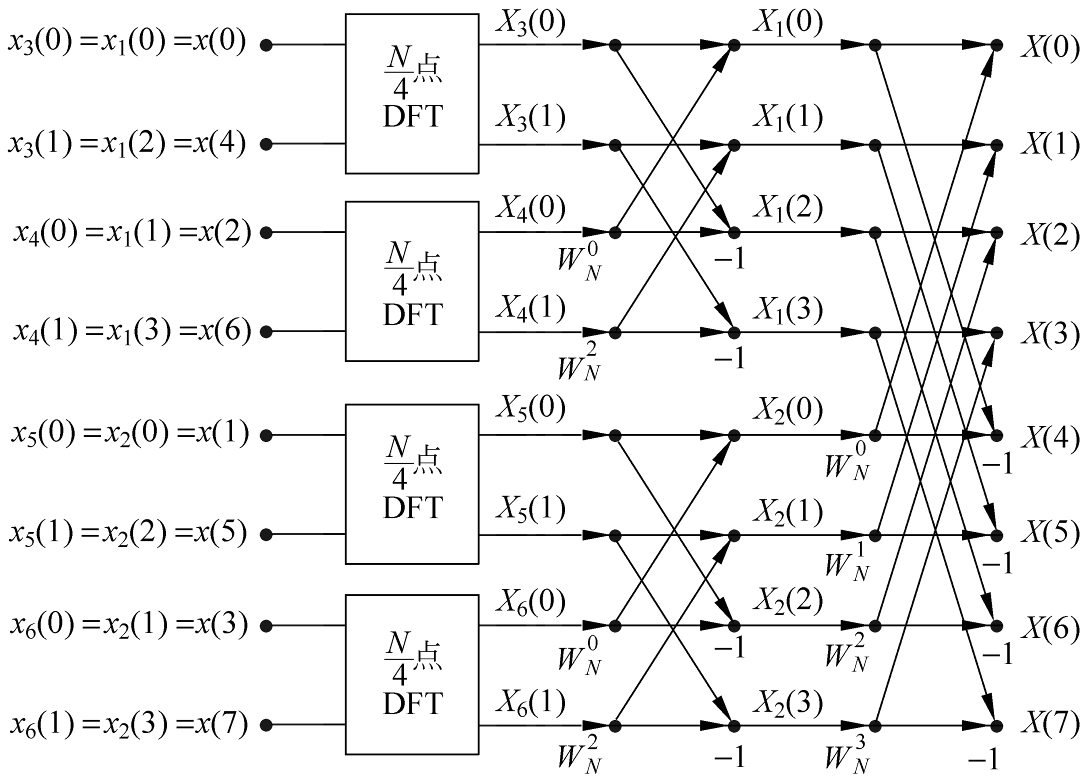
$\{x_0,x_4\}$ $\{x_2,x_6\}$ $\{x_1,x_5\}$ $\{x_3,x_7\}$

A(k) B(k) C(k) D(k)

A(0) A(1) B(0) B(1) C(0) C(1) D(0) D(1)

N=2
k=0,1

Fourier变换离散算法



本 讲 目 录

1、引言及其采样信号

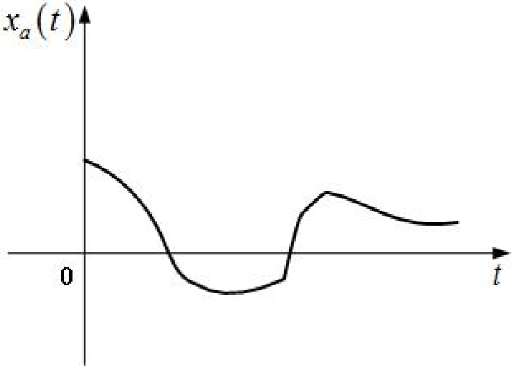
2、带限采样信号定理

3、带通信号采样定理

4、非均匀采样信号模型

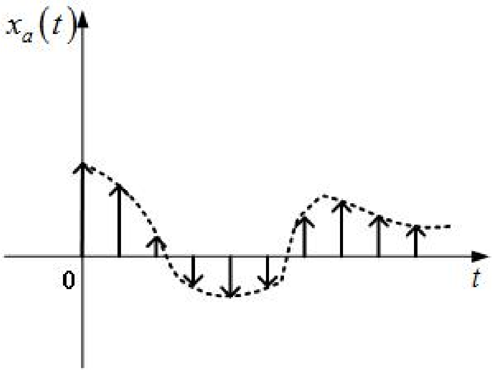
采样过程

连续信号



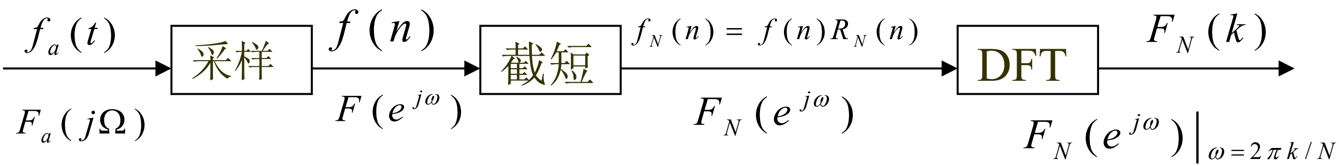
采样

离散信号



采样就是对信号进行时间上的离散化，这是对信号作数字化处理的第一个环节。

引言及采样信号



经Fourier变换得到信号谱的过程

采样就是对信号进行时间上的离散化，这是对信号作数字化处理的第一个环节。

克劳德·艾尔伍德·香农（Claude Elwood Shannon），美国数学家、电子工程师和密码学家，被誉为信息论的创始人。1937年21岁的香农是麻省理工学院的硕士研究生，他在其硕士论文中提出，将布尔代数应用于电子领域，能够构建并解决任何逻辑和数值关系，被誉为有史以来最具水平的硕士论文之一。

引言及采样信号

1948年香农发表了划时代的论文——通信的数学原理，奠定了现代信息理论的基础。二战期间，香农为军事领域的密码分析——密码破译和保密通信——做出了很大贡献。2001年2月26日去世，享年84岁。

信息论

控制论

系统论

离散信号

1、离散信号的表示方法

（1）离散信号是一个离散的数值序列，但序列中的每一数值仍按一定规律随离散变量 变化。

（2）离散信号可以用离散时间函数$f(kT)$来表示，但常记为 $f(k)$ 。这样可以同时表示不同采样间隔下的信号。

例如：设 $f(k)=a^k$，当 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$等数时，就得到一个数值的序列 $\cdots,a^{-2},a^{-1},1,a,a^2,\cdots$

这个序列可以看成连续信号 按间隔 $T=\frac{1}{\beta}$采样得到，也可看成 a^t 按采样间隔 $T=1$ 采样得到。

离散信号

(3) (有序)数列表示离散信号：将离散信号的数值按顺序排列起来。例如：

$$f(k)=\{1,0.5,0,25,0.125,\cdots\}$$

有时需要标出k=0的点：

$$f(k)=\{1,\underset{k=0}{0.5},0,25,0.125,\cdots\}$$

时间函数可以表达任意长（可能是无限长）的离散信号，可以表达单边或双边信号，但是在很多情况下难以得到；

数列的方法表示比较简单，直观，但是只能表示有始、有限长度的信号。

2．离散信号的基本运算

（1） 离散信号的和、差、积

将两离散信号序号相同的样值相加、相减与相乘而构成一个新的离散信号（序列）。

例如：

$$f_1(k)=(-1)^k \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$f_2(k)=k-1 \quad k=0,1,2,\cdots$$

离散信号

$$f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}(-1)^k & (k<0)\\(-1)^k+(k-1) & (k\ge 0)\end{cases}$$

$$f_1(k)-f_2(k)=\begin{cases}(-1)^k & (k<0)\\(-1)^k-(k-1) & (k\ge 0)\end{cases}$$

$$f_1(k)f_2(k)=(-1)^k(k-1) \qquad (k\ge 0)$$

（2） 离散信号的反褶

将$f(k)$ 的图形以纵轴为对称轴翻转，得到$f(-k)$ 。

（3） 移序

时间序列序号的增减称为移序。将在$f(k)\to k$ 平面内的信

离散信号

号图形沿 k 轴向前（左）或向后（右）移动，这时信号各样值的序号都将增加或减少某个定值。

对一般离散信号 $f(k)$：

$f(k) \to f(k+n)$ 信号向左移序——增序

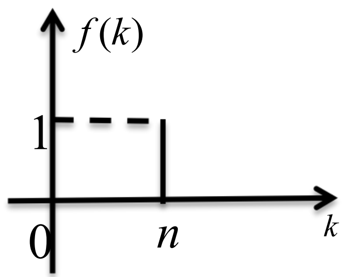
$f(k) \to f(k-n)$ 信号向右移序——减序

3.典型的离散时间信号

(1.)单位函数：

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\0 & \text{其它}\end{cases}$$

下图表示了$\delta(k-n)$的波形。



这个函数与连续时间信号中的冲激函数$\delta(t)$相似，也有着与其相似的性质。例如：

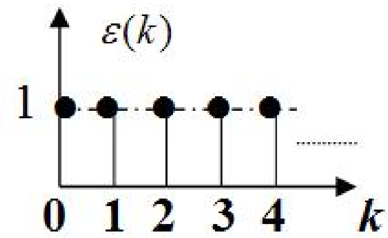
$$f(k)\delta(k)=f(0)\delta(k),$$

$$f(k)\delta(k-k_0)=f(0)\delta(k-k_0).$$

(2.)单位阶跃序列：

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1 & k\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$$

这个函数与连续时间信号中的阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 相似。用它可以产生（或表示）单边信号（这里称为单边序列）。



(3)矩形序列

$$G_N(k)=\begin{cases}1, & 0\le k\le N-1\\ 0, & k<0, k\ge N\end{cases}$$

三者关系： $\varepsilon(k)=\delta(k)+\delta(k-1)+\delta(k-2)+\cdots$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j)$$

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$$

$$G_N(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-N)$$

(4)单边指数序列：$a^k\varepsilon(k)$

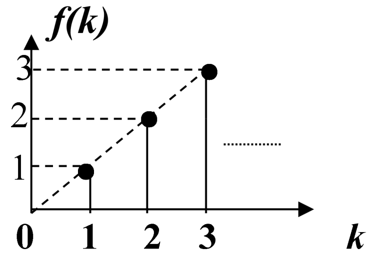
$a>0$, 序列值皆为正

$a<0$,序列值在正、负间摆动

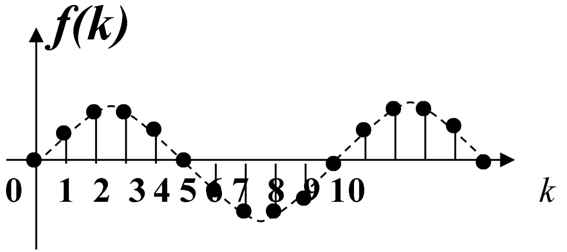
$a>1$,序列发散

$a<1$,序列收敛

(5) 斜变序列：$f(k)=k\varepsilon(k)$



(6) 单边正弦序列：$f(k)=\sin k\varepsilon(k)$

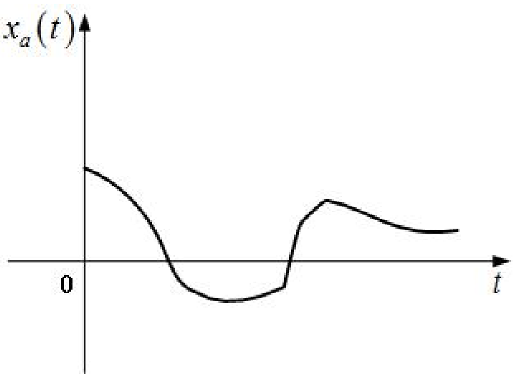


(7) 复指数：$f(k)=e^{j\omega_0 k}=\cos\omega_0 k+j\sin\omega_0 k$

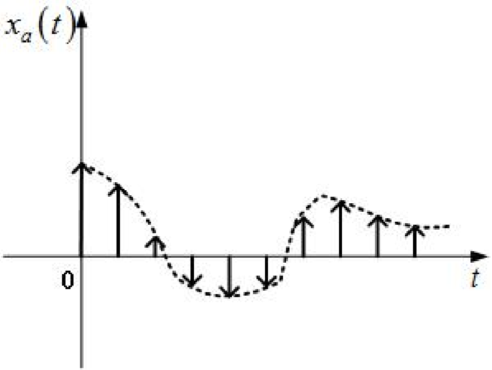
采样过程

连续信号

离散信号



采样



采样的目的？如何实现采样？

采样研究的核心问题

（1）采用什么样的模型来采集信号？

（2）采样信号的频谱特点如何？

（3）如何通过采样离散点来恢复原始信号？

（4）采样误差分析。

（5）采样的定理的缺点以及如何改进？

本讲目录

1、引言及其采样信号

2、带限采样信号定理

3、带通信号采样定理

4、非均匀采样信号模型

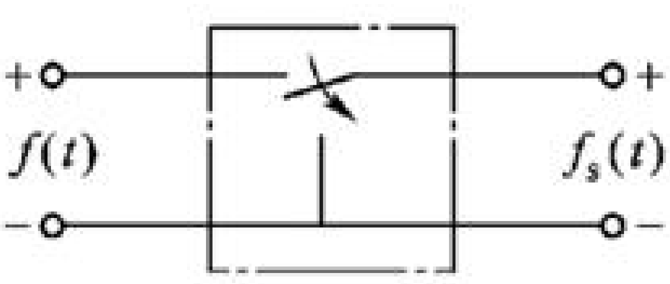
带限信号采样定理

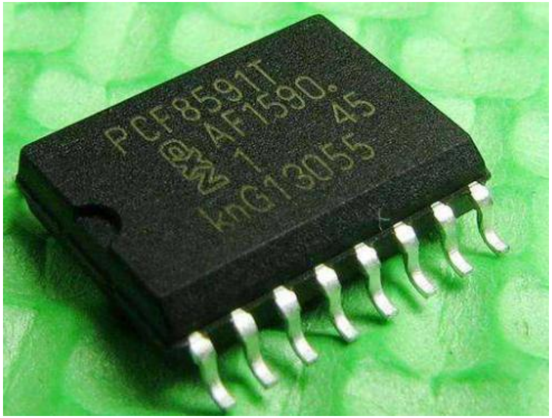
（1） 均匀采样信号模型

（2） 采样信号的Four ier变换

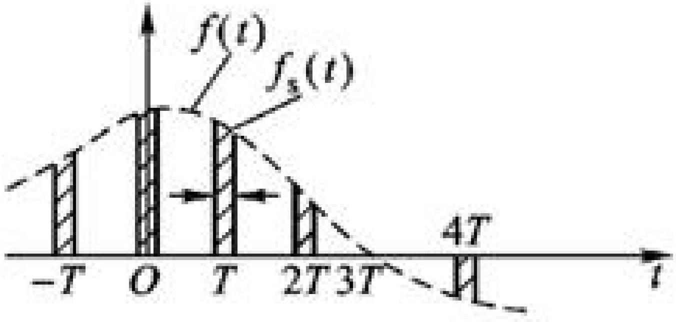
均匀采样模型

（1）采样器：信号的采样由采样器来进行，如下图所示。采样器是一开关，开关每隔**T**时间接通输入信号和接地各一次，接通时间是 τ 。





采样模型

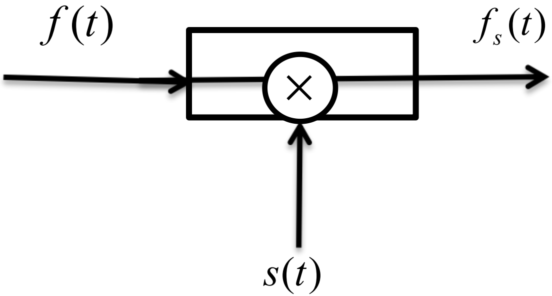


由此，信号 $f(t)$ 通过采样器后，采样器的输出信号 $f_s(t)$ 只包含开关器接通时间内的输入信号 $f(t)$ 的一小段。

均匀采样模型

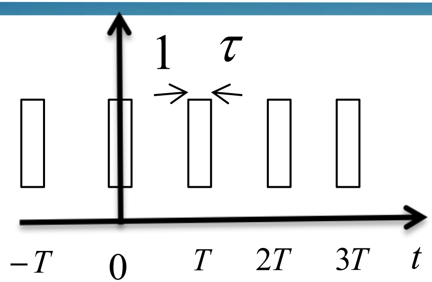
采样过程也可以通过如下的数学模型表示为：

$$f_s(t) = f(t)s(t)$$

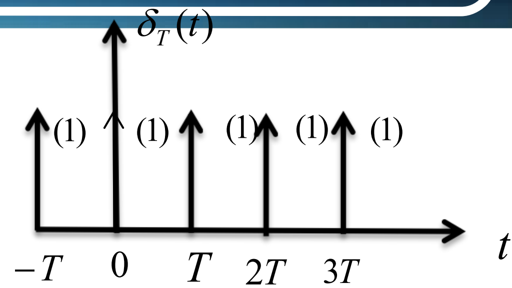


其中开关函数是一个周期性门函数。开关函数中每一矩形脉冲幅度为1，宽度为τ ，面积为 。

均匀采样模型



开关函数



单位冲激序列

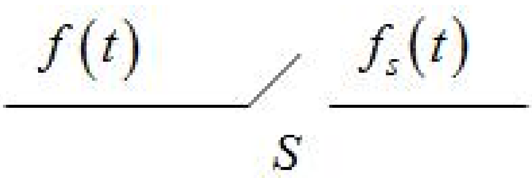
开关函数近似为：$$s(t)=\tau\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\tau\delta_T(t)$$

当$\tau\to 0$ 理想情况下的开关函数近似为：

$$s_\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\tau\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=\lim_{\tau\to 0}\tau\cdot\delta_T(t)$$

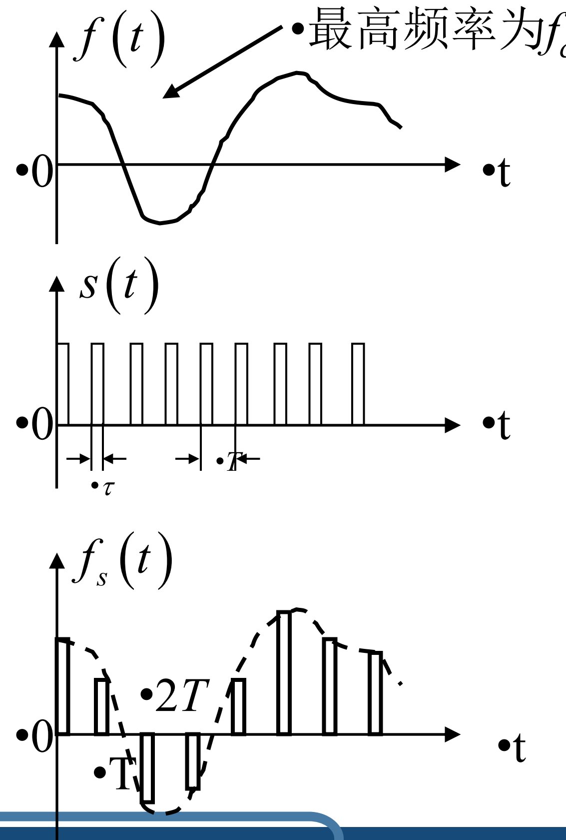
均匀采样模型

模拟信号实际采样



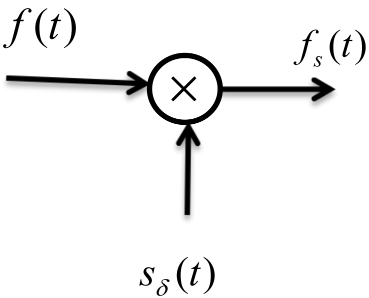
$$\tau \ll T$$

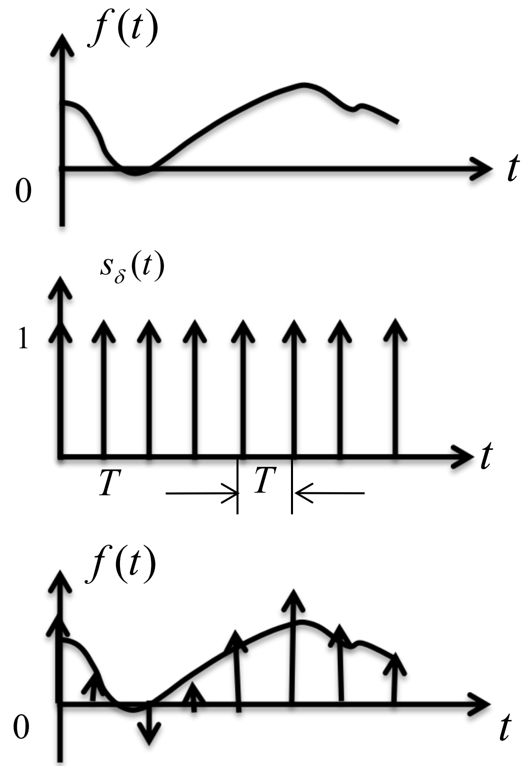
$$\boxed{f_s(t) = f(t)s(t)}$$



均匀采样模型

$$\tau \to 0 \qquad s(t) \to s_\delta(t)$$





$$f_s(t) = f(t)s_\delta(t) = f(t)\cdot\lim_{\tau\to 0}\tau\delta_\tau(t)$$

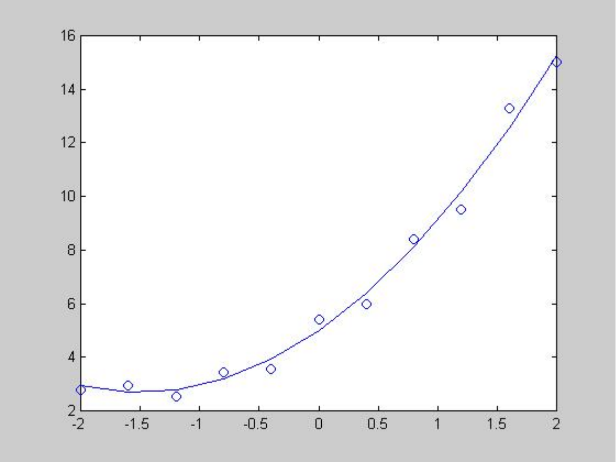
理想均匀采样模型

显然，采样以后的信号只与原来的信号在某些离散的时间点上的值有关。采样后的时域信号可记为：

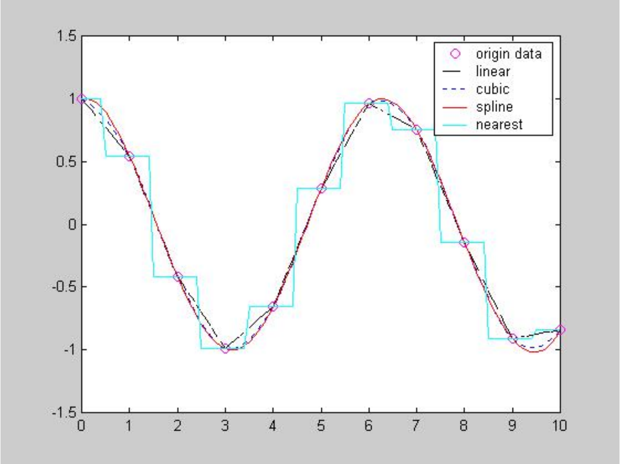
$$f_s(t)=f(t)s_\delta(t)=f(t)\cdot\lim_{\tau\to 0}\tau\delta_\tau(t)$$

采样理论就是通过上述采样模型的分析，研究它们在Fourier变换后的特点，从而可以进一步得到如何通过信号的时域离散点恢复原始信号。

函数的逼近问题:拟合与插值



拟合



插值

数学领域：数值计算理论与方法

本讲目录

1、引言及其采样信号

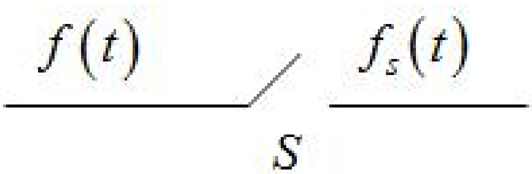
2、带限采样信号定理

3、带通信号采样定理

4、非均匀采样信号模型

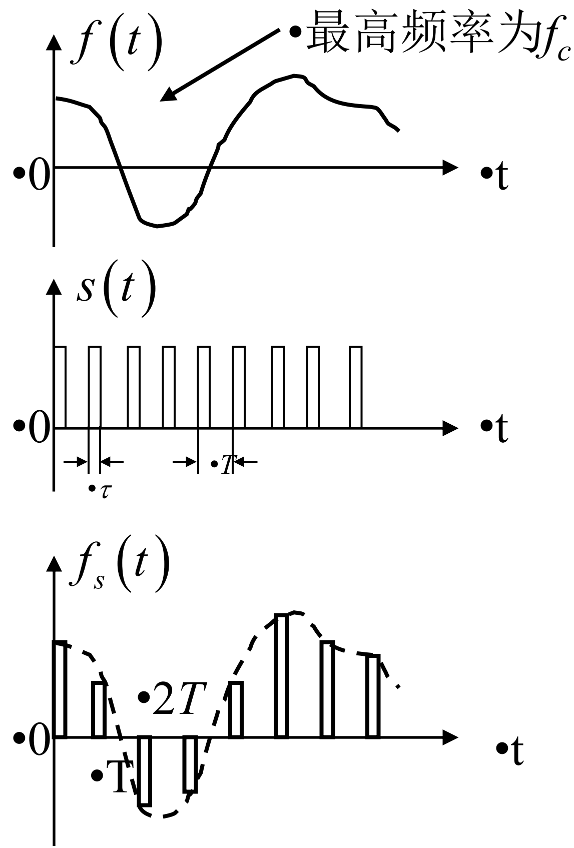
采样过程：实际采样

模拟信号实际采样



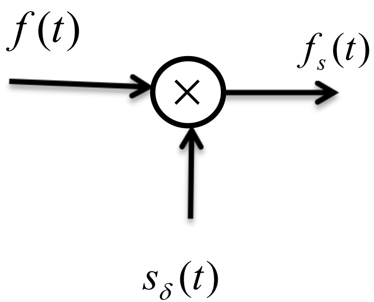
$$\tau \ll T$$

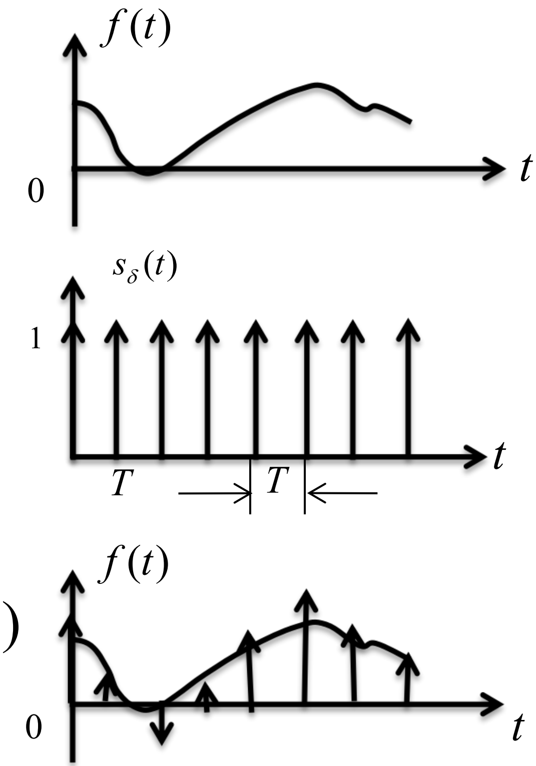
$$\boxed{f_s(t) = f(t)s(t)}$$



采样过程：理想采样

$$\tau \to 0 \qquad s(t) \to s_\delta(t)$$





$$f_s(t) = f(t)s_\delta(t) = f(t)\cdot\lim_{\tau\to 0}\tau\delta_\tau(t)$$

采样问题：实质

$$f_s(t) = f(t)s(t)$$

Shannon尝试从Fourier变换后的频谱特性来解决问题。

卷积与卷积定理

卷积： 设两个函数$f(t), g(t)$都是可积函数，作积分

$$h(t) = f(t) * g(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

称上述积分为两个函数的卷积，卷积在实际应用中起到了非常重要的作用。

卷积与卷积定理

若 $F_1(jw) = F[f_1(t)]; F_2(jw) = F[f_2(t)]$

（1）时域卷积定理 $\boxed{F[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(jw)F_2(jw)}$

$$
\begin{aligned}
F[f_1(t) \star f_2(t)] &= \int_R \int_R [f_1(t) \star f_2(t)] e^{-jwt} dt d\tau \\
&= \int_R \int_R f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-jwt} dt d\tau \\
&= \int_R f_1(\tau) d\tau [\int_R f_2(t-\tau) e^{-jwt} dt] \\
&= F_2(jw) [\int_R f_1(\tau) e^{-jw\tau} d\tau] \\
&= F_1(jw) F_2(jw)
\end{aligned}
$$

卷积与卷积定理

（2）频域卷积定理

$$\boxed{F[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(jw)\star F_2(jw)}$$

$$\begin{aligned}
F^{-1}[F_1(jw)\star F_2(jw)] &= \frac{1}{2\pi}\int_R [F_1(jw)\star F_2(jw)]e^{jwt}dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_R\int_R [F_1(ju)F_2(j(w-u))]e^{jwt}dwdu \\
&= \int_R F_1(ju)du[\frac{1}{2\pi}\int_R F_2(j(w-u))e^{jwt}dw] \\
&= \int_R F_1(ju)e^{jut}du[\frac{1}{2\pi}\int_R F_2(j(w-u))e^{jwt}dw] \\
&= 2\pi f_2(t)[\frac{1}{2\pi}\int_R F_1(ju)e^{jut}du] \\
&= 2\pi f_1(t)f_2(t)
\end{aligned}$$

采样问题：实际采样和理想采样分别分析

(1) 矩形脉冲采样

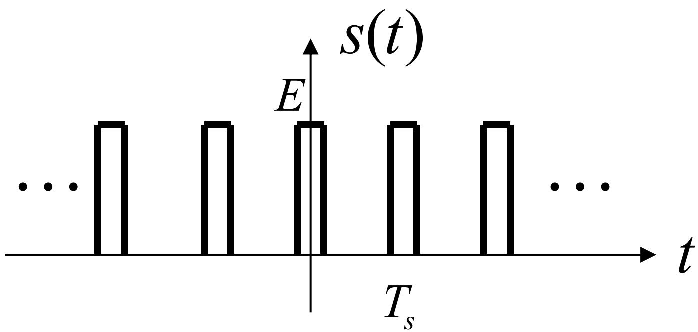
(2) 单位冲激采样

不同采样信号的傅里叶变换

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$

采样脉冲s (t) 的傅里叶变换为 $S(j\omega)$

采样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(j\omega)$



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{jnw_s}$$

不同采样信号的傅里叶变换

$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$ 如下所示：

则：$F_s(jw) = F(f_s(t))$

$$= F[f(t)s(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} F[f(t)] * F[s(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} F[jw)] * S(jw)$$

$$= \frac{1}{2\pi} F[jw)] * 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n \delta(w - nw_s)$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n F[j(w - nw_s)]$$

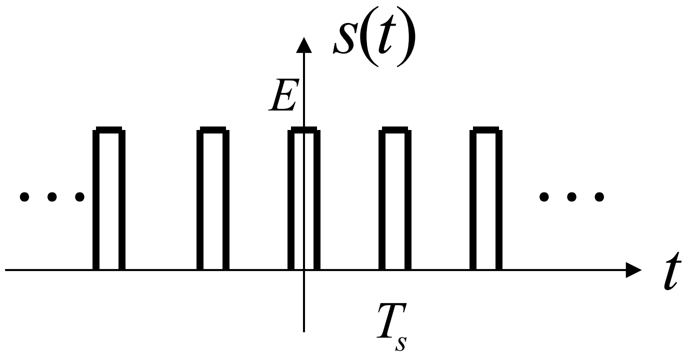
$$S_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} s(t) e^{-jnw_s t} dt$$

$$w_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$S(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

(1) 矩形脉冲采样

采样脉冲 $s(t)$ 是矩形脉冲，令它的脉冲幅度为E，脉宽为 τ ，取样角频率为 ω_s ，这种取样也称为“自然取样”。

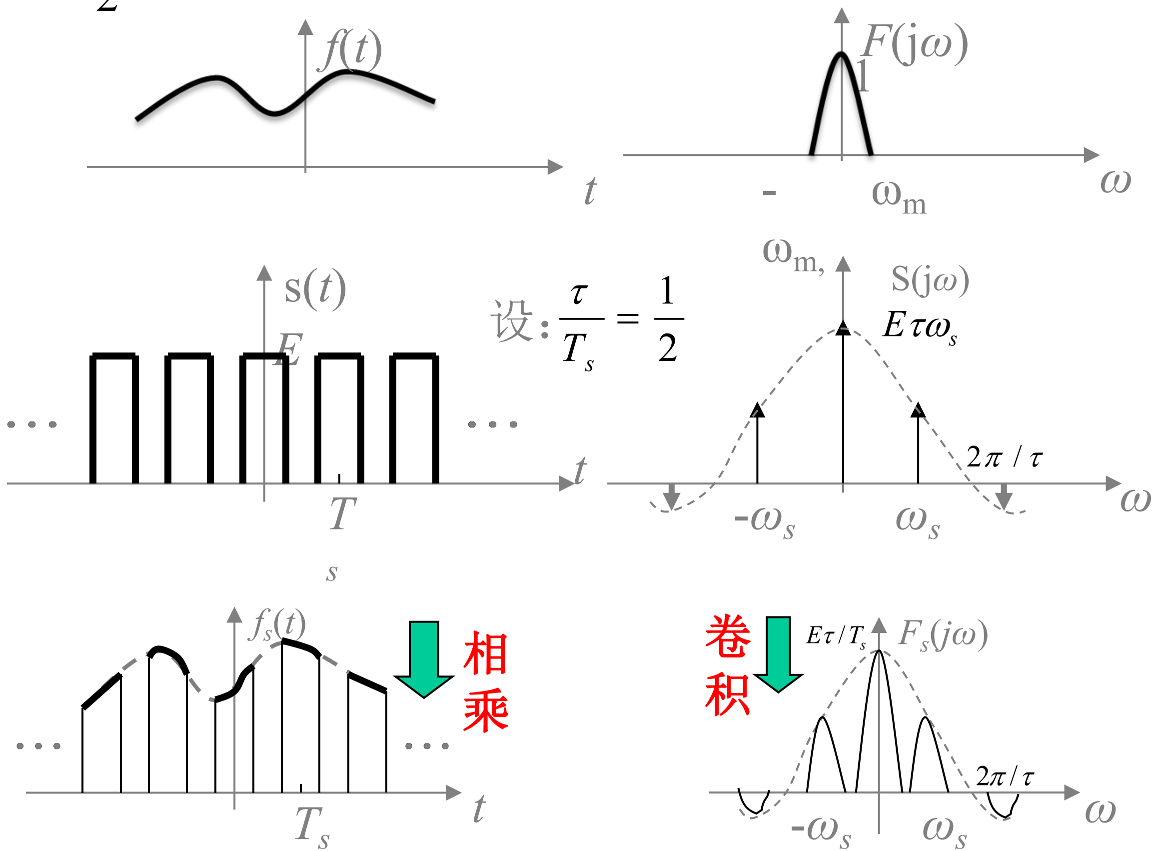


(1) 矩形脉冲采样

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} s(t)e^{-jnw_st}dt \\
&= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t)e^{-jnw_st}dt \\
&= \frac{E\tau}{T_s}[\frac{1}{-jnw_s}e^{-jnw_st}\ |_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}] \\
&= \frac{E\tau}{T_s}\frac{1}{-jnw_s}[e^{-jnw_s\frac{\tau}{2}} - e^{-jnw_s(-\frac{\tau}{2})}] \\
&= \frac{E\tau}{T_s}\frac{1}{-jnw_s}[cos(nw_s\frac{\tau}{2}) - jsin(nw_s\frac{\tau}{2}) + cos(nw_s\frac{\tau}{2}) - jsin(nw_s\frac{\tau}{2})] \\
&= \frac{E}{T_s}\frac{1}{-jnw_s}[-2jsin(nw_s\frac{\tau}{2})] \\
&= \frac{E\tau}{T_s}\frac{sin(nw_s\frac{\tau}{2})}{nw_s\frac{\tau}{2}} \\
&= \frac{E\tau}{T_s}Sa(nw_s\frac{\tau}{2})
\end{aligned}
$$

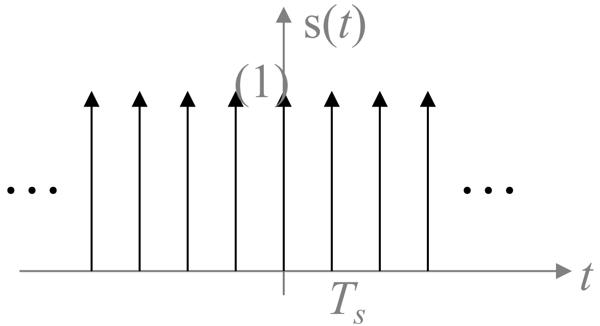
$$
\boxed{
\begin{aligned}
F_s(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot F[j(\omega - n\omega_s)] \\
F_s(j\omega) &= \frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})F[j(\omega - n\omega_s)]
\end{aligned}
}
$$

显然，$F(j\omega)$ 在以 ω_s 为周期的重复过程中幅度以 $Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})$ 的规律变化。



（2）冲激采样

若取样脉冲 $s(t)$ 是冲激序列，此时称为“冲激取样”或“理想取样”



(2) 冲激采样

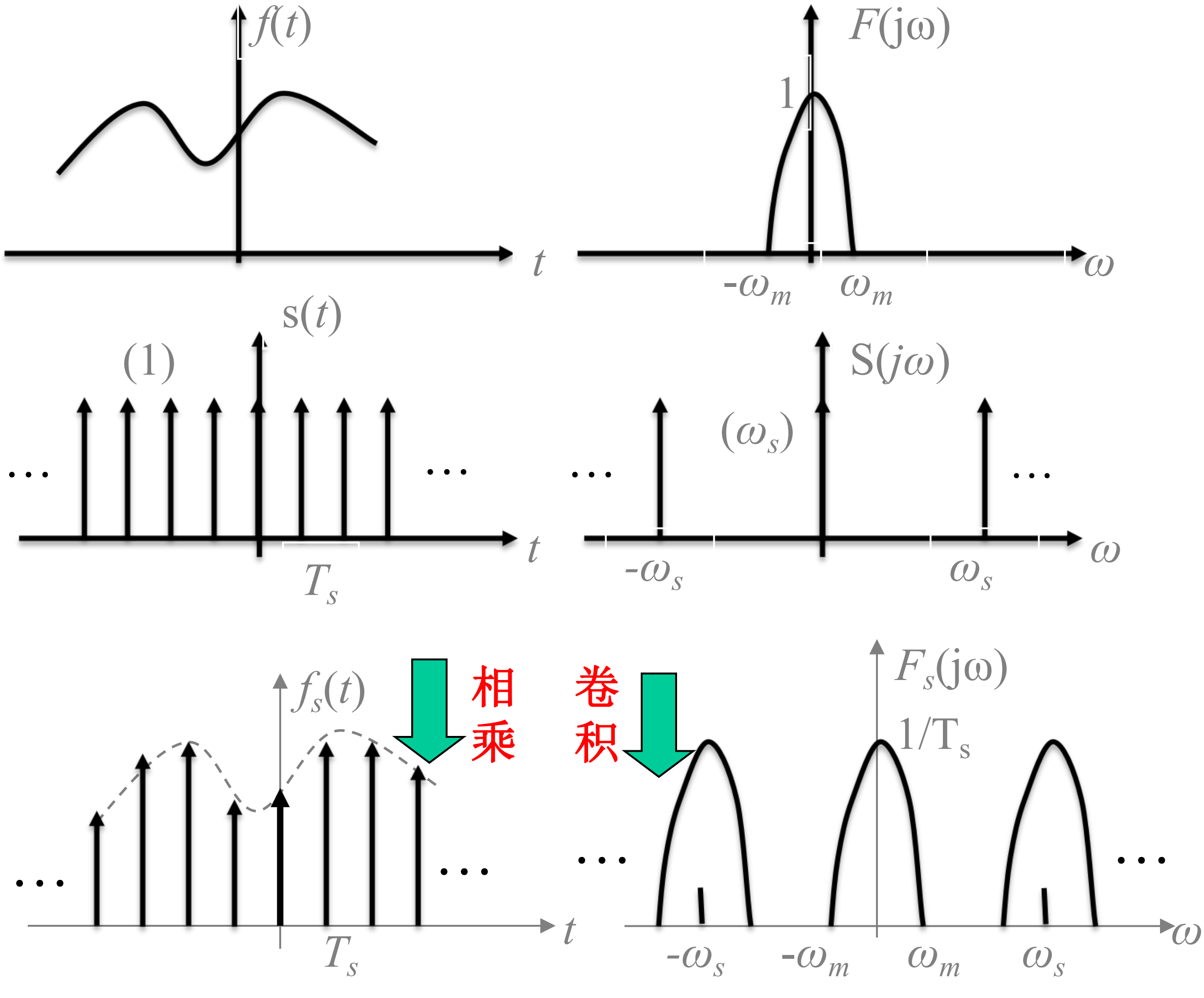
$$s(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$S_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_n\cdot F\left[j(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left[j(\omega-n\omega_s)\right]$$

由于冲激序列的傅里叶系数S_n为常数，所以 $F_s(j\omega)$ 是以ω_s为周期等幅地重复。



f(t)
t
F(jω)
1
-ω_m
ω_m
ω
s(t)
(1)
…
…
t
T_s
S(jω)
(ω_s)
…
…
-ω_s
ω_s
ω
f_s(t)
相乘
卷积
F_s(jω)
1/T_s
…
…
t
T_s
-ω_s
-ω_m
ω_m
ω_s
ω

采样定理

根据冲击函数性质，$f(t)$与$\delta_T(t)$相乘的结果也是一个冲击序列，其冲击的强度等于$f(t)$在相应时刻的取值，即样值$f(nT_s)$。因此采样后信号$f_s(t)$又可表示为

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

$$s(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$f_s(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

根据频率卷积定理，所表述的采样后信号的频谱为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * S(j\omega)$$

式中$F(j\omega)$是低通信号$f(t)$的频谱，其最高角频率为ω_m。

$$S(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}S_n\delta(\omega-n\omega_s) \qquad S_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}[F(j\omega)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)]$$

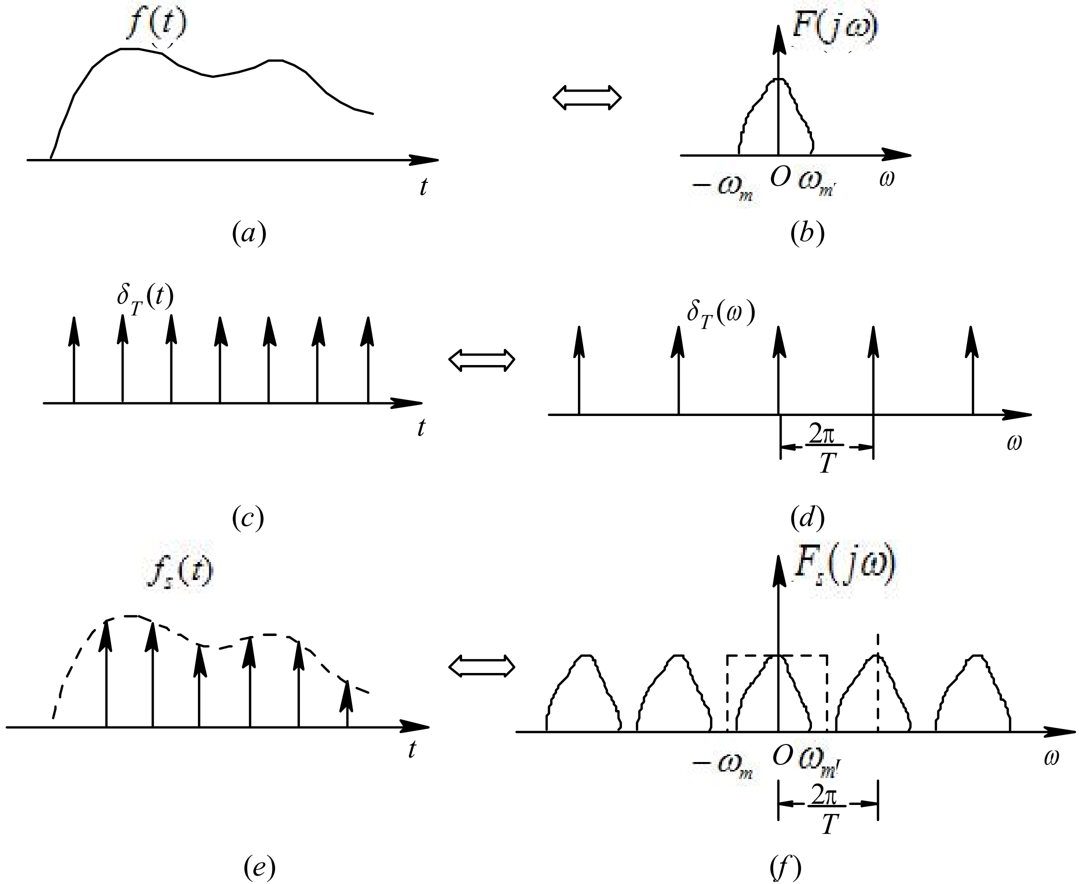
由冲击卷积性质， 上式可写成

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left[j(\omega-n\omega_s)\right]$$

采样后信号的频谱$F_s(j\omega)$ 由无限多个间隔为ω_s的 $F(j\omega)$相叠加而成，这意味着采样后的信号$f_s(t)$ 包含了信号 $f(t)$ 的全部信息。如果 $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，

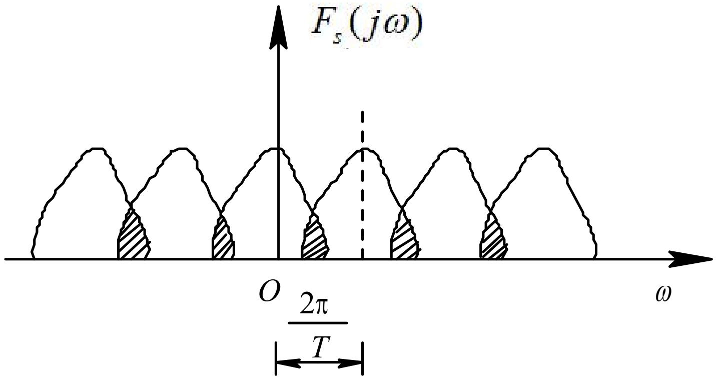
即 $f_s \geq 2f_m$

也即 $T_s \leq \dfrac{1}{2f_m}$



采样过程的时间函数及对应频谱图

如果 $\omega_s < 2\omega_m$，即采样间隔 $T_s > 1/2f_m$ ，则采样后信号的频谱在相邻的周期内发生混叠，如图所示， 此时不可能无失真地重建原信号。



因此必须要求满足$T_s \leq 1/2f_m$ ，$f(t)$才能被$f_s(t)$完全确定，这就证明了采样定理。显然,$T_s = 1/2f_m$是最大允许采样间隔，它被称为奈奎斯特间隔，相对应最低采样速率$f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特速率。

采样定理

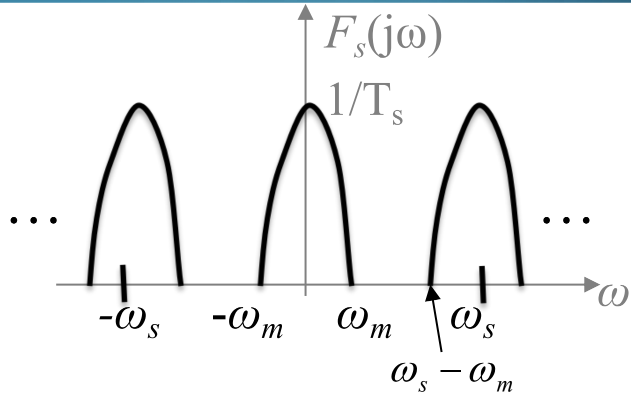
（1）采样定理

（2）信号的重构

（3）采样误差分析

（4）采样定理的局限及改进

采样定理

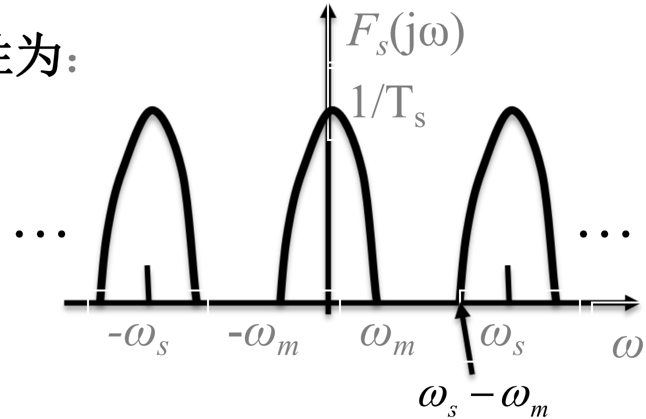


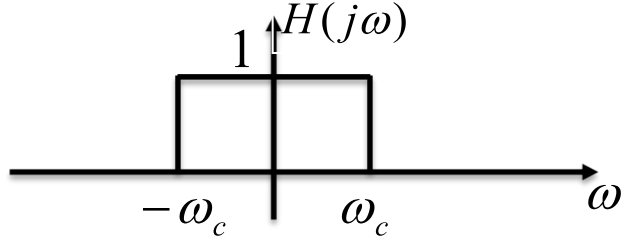
从上图可知：只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $F_s(j\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。这时只要将 $F_s(j\omega)$施加于“理想低通滤波器”，就可恢复原信号$F(j\omega)$

理想低通滤波器的频率特性为：

$$H(j\omega)=\begin{cases}1 & (|\omega|\le\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}$$

其中： $\omega_m \le \omega_c \le \omega_s-\omega_m$

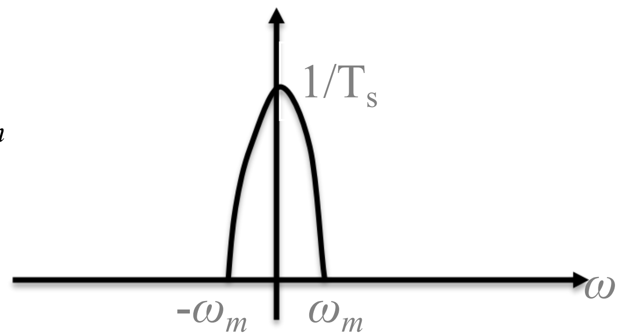




通常把最低允许的取样率称为奈奎斯特取样率，把最大允许的取样间隔称为奈奎斯特间隔。即

$$\omega_{s\min}=2\omega_m \quad \text{或：} \quad f_{s\min}=2f_m$$

$$T_{s\max}=\frac{1}{f_{s\min}}=\frac{1}{2f_m}$$



采样定理

时域采样定理：一个频谱受限的信号 $f(t)$。即在 $|\omega| > \omega_M$时，$F(j\omega)=0.$ 如果信号的频谱只占据 $[-\omega_m,\omega_m]$ 的范围，则信号 $f(t)$可以用等间隔的取样值来惟一地表示。而取样间隔必须不大于 $1/(2f_s)$ ，(其中$\omega_s = 2\pi f_s$)，或者说，最低取样频率为$2f_s$ 。这个定理又被称为香农采样定理。

采样与恢复

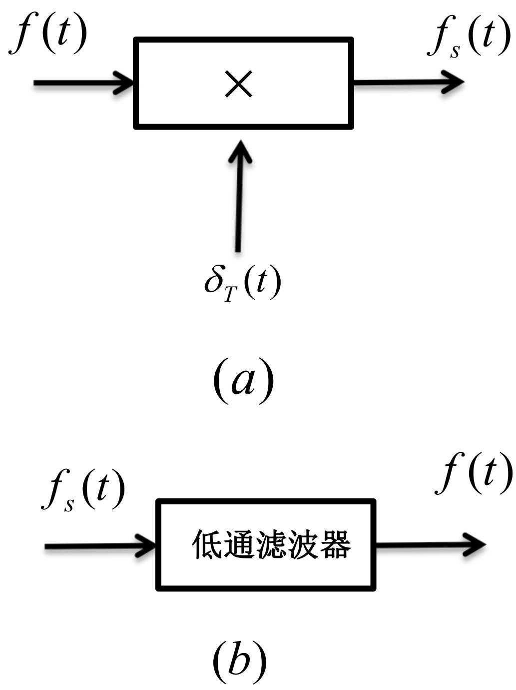


图 理想采样与信号恢复

信号的重构

根据前面的分析，理想采样与信号恢复的原理框图。频域已证明，将 $F_s(j\omega)$ 通过截止频率为 ω_c 的低通滤波器后便可得到

$$F_s(j\omega)D_{2\omega}H(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)D_{2\omega}H(\omega) = \frac{1}{T_s}F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = T_s\left[F_s(j\omega)D_{2\omega}H(\omega)\right]$$

（应用时域卷积定理）， 得到

$$f(t) = T_s\left[f_s(t) * \frac{\omega_m}{\pi}Sa(\omega_m t)\right]$$

信号的重构

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

所以

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)*Sa(\omega_m t)$$

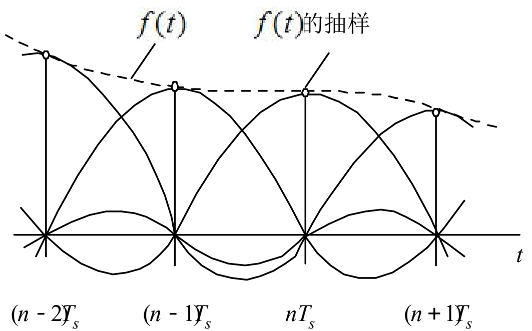
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\omega_m(t-nT_s)]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\frac{\sin[\omega_m(t-nT_s)]}{\omega_m(t-nT_s)}$$

式中,$f(nT_s)$是$f(t)$ 在 $t=nT_s(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时刻的样值。

信号的重构

该式是重建信号的时域表达式，称为内插公式。它说明以奈奎斯特速率采样的带限信号$f(t)$可以由其样值利用内插公式重建。这等效为将采样后信号通过一个冲激响应为$Sa(\omega_m t)$ 的理想低通滤波器来重建 $f(t)$。



信号的重建

由图可见，以每个样值为峰值画一个**Sa**函数的波形，则合成的波形就是$f(t)$。由于**Sa**函数和采样后信号的恢复有密切的联系，所以Sa函数又称为采样函数。

采样与重建

均匀采样定理（低通采样定理）

- 设 $f(t)$ 是一个带限信号，在 $\omega > |\omega_m|$ 时，$F(j\omega)=0$ 。
- 如果 $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，其中 $\omega_s = 2\pi / T$，那么 $f(t)$ 就唯一地由其样本 $f(nT), n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 所确定。
- 当这样的采样信号通过一个增益为 T，截止频率大于 ω_m ，而小于 $\omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器后，可以将原信号完全重建。

$$f_r(t) = f_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) Sa\left[\frac{\omega_s(t-nT)}{2}\right]$$

例： 已知信号$f(t)=Sa(2t)$ 用$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行采样，

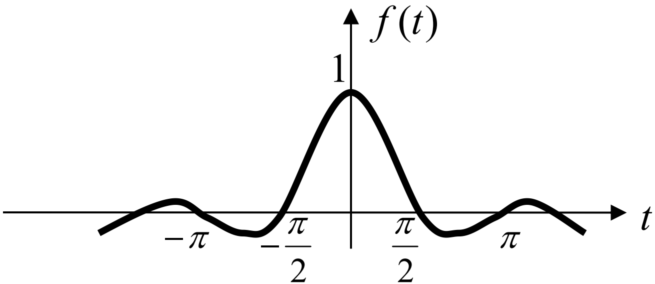
（1）确定奈奎斯特取样率；

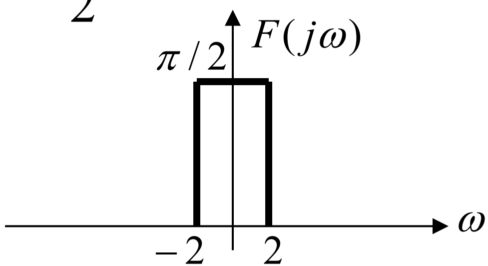
（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求采样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$，并画出波形图；

（3）求 $F_s(j\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c。（ω_m 是最高 频率）

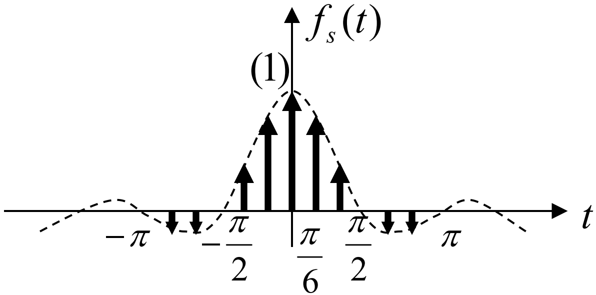
解:（1）$\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ $\quad\therefore F(j\omega)=\dfrac{\pi}{2}[\varepsilon(\omega+2)-\varepsilon(\omega-2)]$

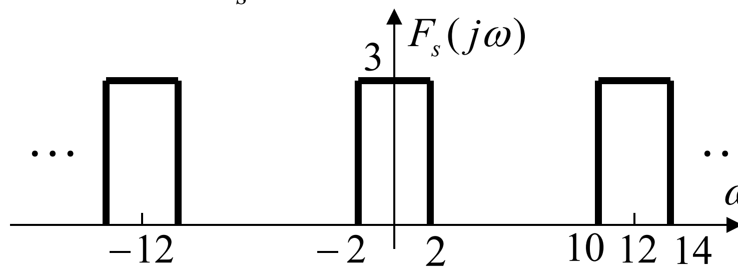




奈奎斯特取样率为：$\omega_{s\min}=2\omega_m=2\times2=4\ \mathrm{rad/s}$

（2）$\because \omega_s = 6\omega_m = 12\,\mathrm{rad/s} \quad \therefore T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{s}$





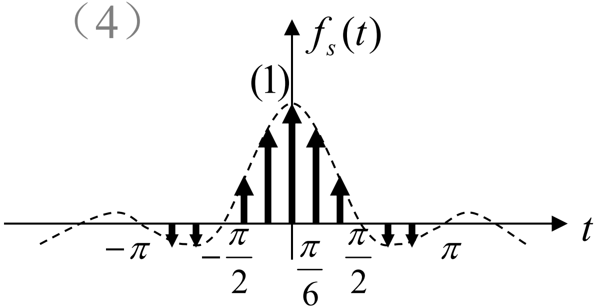
$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

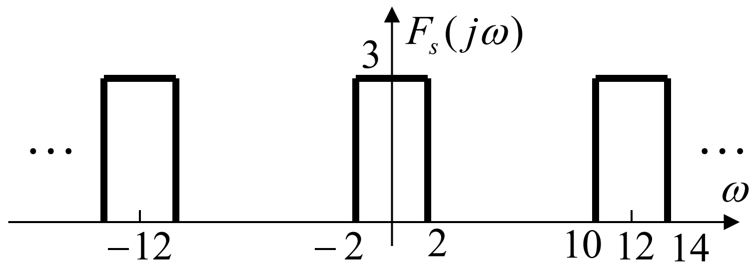
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t - nT_s)$$

（3）$$F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] = \frac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - 12n)]$$

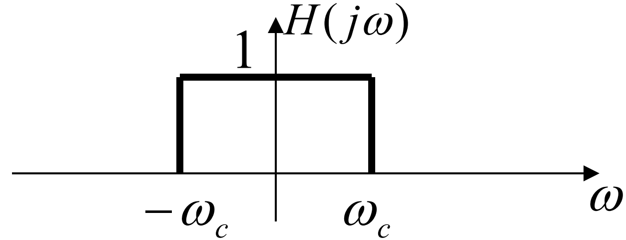
$$= 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\varepsilon(\omega + 2 - 12n) - \varepsilon(\omega - 2 - 12n)]$$

（4）





低通滤波器的截止频率ω_c 应满足下式：



$$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$$

即

$$2 \le \omega_c \le 10$$

总结：

$$f_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)Sa\left[\frac{\omega_s(t-nT)}{2}\right]$$

1、本质上是内插公式，那和其它的内插公式有没有关系？

2、条件：信号是Fourier变换域带限的；

3、条件：采样点是均匀采样点 nT ；

4、限制：求和是无穷到无穷。

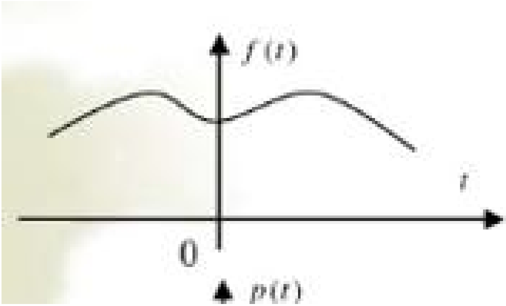
1、本质上是内插公式，那和其它的内插公式有没有关系？

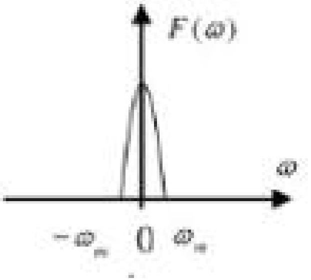
在使用 最小二乘法 时，我们并未要求得到的拟合曲线一定要经过所有的样本点，而只是要求 了总偏差最小。当实际问题要求拟合曲线必须 经过样本点 时，我们可以应用数值逼近中的 插值法。

根据实际问题的不同要求，存在多种不同的插值方法，有只要求过样本点的 拉格朗日插值 法、牛顿插值法 等，有既要求过插值点（即样本点）又对插值点处的导数有所要求的样条（**Spline**）插值，甚至还有对插值曲线的凹凸也有要求的**B**样条插值法 。

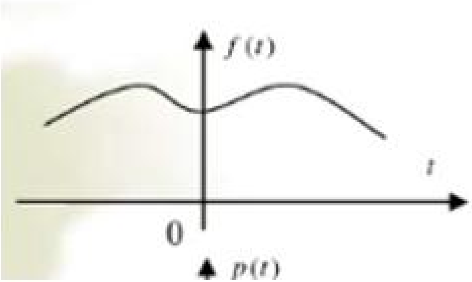
对插值法感兴趣的 同学可以查阅相关书籍，例如由 李岳生编著上海科学技术出版社出版的《样条与插值》（**1983**年出版）等。

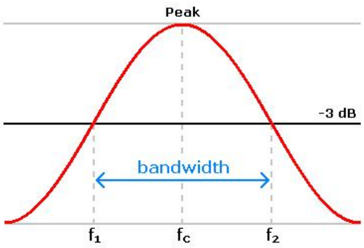
2、条件：信号是Fourier变换域带限的





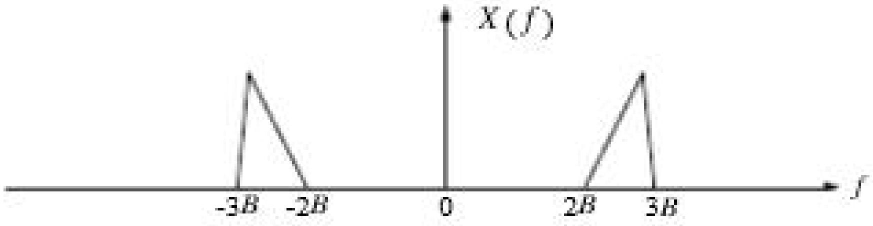
Fourier变换域带限





Fourier变换域非带限

2、条件：信号是Fourier变换域带限的



Fourier变换域带通信号

带通信号采样定理

3、条件：采样点是均匀采样点

非均匀采样信号点不能完全任意的，一定要满足某些条件才能恢复原始信号。具体有：

- 基于有限个采样点的重构公式；
- 如何保证在采样率降低的条件下重构原始信号；
- 在某些典型非均匀采样条件的重构公式如何？
- 在上述文献中都可以找到有关结论。

4、限制：求和是无穷到无穷

$$f_r(t)=\sum_{k=-N}^{+N} f(kT)Sa\left[\frac{\omega_s(t-kT)}{2}\right]$$

- 建立数学模型时，对被描述的实际问题进行了抽象和简化，模型只是客观现象的一种近似。这种误差称为**模型误差**。
- 在数学模型中往往涉及一些物理量或参数，而观测难免不带误差，这种误差称为**观测误差**。
- 在计算中遇到的无限问题只有通过无限过程才能得到的结果，这时产生的误差称为**截断误差**，也称**方法误差**。
- 在计算中遇到的数据位数很多，也可能是无穷小数，但计算时只能对有限位数进行运算，产生的误差称为**舍入误差**。

采样误差分析

在由采样值重构信号时，有四种误差会影响其精确性．误差有如下几种：

1．**混淆误差：**非带宽有限函数或者说它的带宽，则产生混淆误差。

2．**截断误差：**采样定理要求无限多个采样点的值。但是在实际应用中，由于测量仪器的性质，只能取到有限个采样点的值，这样就产生了截断误差．

采样误差分析

截断误差表达式：

$$T_N(t) = f(t) - \sum_{n=-N}^{N} f(nT_s)\frac{\sin(\omega_m(t-nT_s))}{\omega_m(t-nT_s)}$$

$$= \sum_{|n|>N} f(nT_s)\frac{\sin(\omega_m(t-nT_s))}{\omega_m(t-nT_s)}$$

采样误差分析

3. 时间抖动误差：若 Nyquist采样点 $t_k = k/2\omega_m$ 不能精确取到，而只能取到 $t_k + \varepsilon_k, |\varepsilon_k| \le \varepsilon$ 则会产生时间抖动误差。

4. 振幅误差： $f(t)$ 满足一定的条件，则它可以由其在某些离散点处的采样值所重构。但是由于实际条件的限制（比如设备条件以及测量误差等，）很难精确测量到某一时刻 $t_k (k = 0,1,2,\cdots)$ 处的信号 $f(t)$ 的准确值，而是 t_k 点附近的近似值（常用的局部平均值），并不要求误差不大于 ε ，则这样会产生振幅误差。

作业

- 1、请描述并给出卷积定理的证明；
- 2、请在本讲学习的基础上，通过仿真实验验证经典均匀采样定理；

- 本周作业提交截止时间4月6日。

谢 谢