



北京理工大学

第五讲 时频分析

李炳照

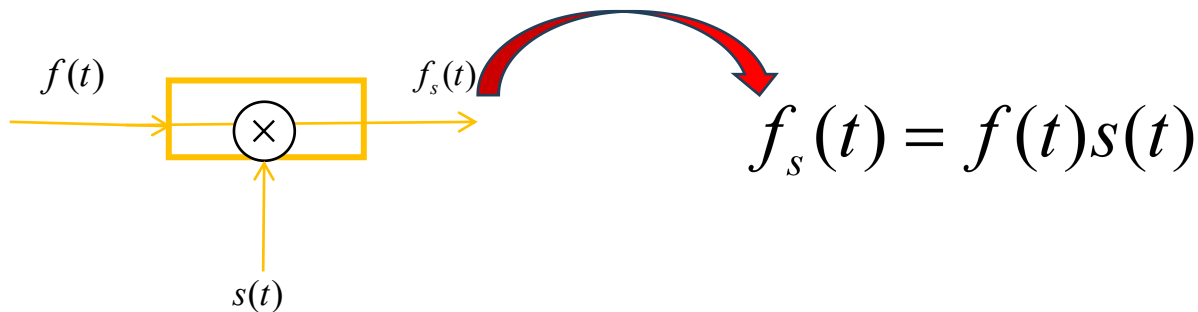
li_bingzhao@bit.edu.cn

2023-2024-2 学期 研究生课程 本硕博贯通课程



采样定理回顾

采样过程可以通过如下的数学模型表示为：



其中**开关函数** $s(t)$ 近似为：
$$s(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \tau \delta_T(t)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时，理想的开关函数近似为：

$$s_\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \cdot \delta_T(t)$$



采样定理回顾

若 $F_1(j\omega) = F[f_1(t)]$; $F_2(j\omega) = F[f_2(t)]$, 则:

(1) 时域卷积定理 $F[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$

(2) 频域卷积定理 $F[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) \star F_2(j\omega)$

利用卷积定理可得:

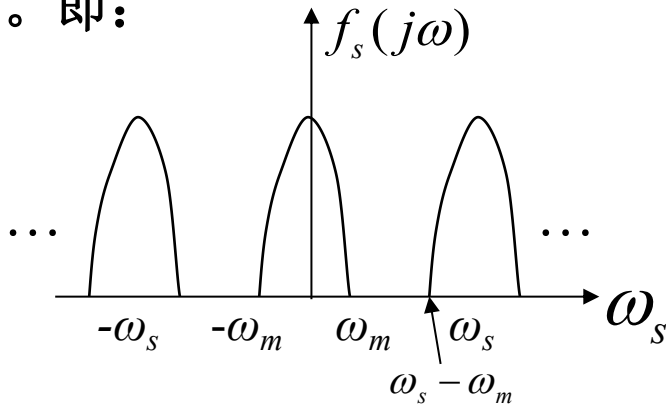
矩形采样 $F_s(j\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})F[j(\omega - n\omega_s)]$

冲激采样 $F_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$



采样定理回顾

采样后信号的频谱应满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，否则采样后的频谱将发生混叠。即：



这时只要将 $F_s(j\omega)$ 施加于“理想低通滤波器”，就可恢复原信号 $f_r(t)$ 。

$$f_r(t) = f_\delta(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \text{Sa} \left[\frac{\omega_s(t - nT)}{2} \right]$$

采样与重建

均匀采样定理（低通采样定理）

- 设 $f(t)$ 是一个带限信号，在 $\omega > |\omega_m|$ 时， $F(j\omega) = 0$ 。
- 如果 $\omega_s \geq 2\omega_m$ ，其中 $\omega_s = 2\pi / T$ ，那么 $f(t)$ 就唯一地由其样本 $f(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 所确定。
- 当这样的采样信号通过一个增益为 T ，截止频率大于 ω_m ，而小于 $\omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器后，可以将原信号完全重建。

$$f_r(t) = f_s(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) Sa \left[\frac{\omega_s(t - nT)}{2} \right]$$

本讲目录



1、引言

2、短时傅里叶变换

3、Wigner-Ville分布

4、模糊函数与Cohen时频类



引言

对于给定的信号 $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, 如果满足**Dirichlet**条件, 且绝对可积, 则 $x(t)$ 的Fourier变换及其逆变换存在:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d(\omega)$$



课堂小练：若 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F\{f(t)\} = F(\omega)$ ，求 $F^4\{f(t)\}$



课堂小练：若 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F\{f(t)\} = F(\omega)$ ，求 $F^4\{f(t)\}$

变换
公式

$$F\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

所以：

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega = F\{F(\omega)\} = F^2\{f(t)\}$$

$$F(-\omega) = F^3\{f(t)\}$$

$$F^4\{f(t)\} = f(t)$$



Fourier变换的局限

实际上，Fourier变换 $X(\omega)$ 是信号 $x(t)$ 在整个时间域上所具有的频率特征的平均表示。反之，信号 $x(t)$ 在某一时刻的状态也是由频谱 $X(\omega)$ 在整个频率域上的贡献来决定的。



Fourier变换的局限

一个著名的例子就是Dirac引入的 $\delta(t)$ 函数，时间上的点脉冲在频域上具有正负无限伸展的均匀频谱。因此，信号 $x(t)$ 和频谱 $X(\omega)$ 彼此是整体刻画，不能反映各自在局部区域上的特征，因此不能用于信号的局部分析。

Fourier变换的局限



(1) Fourier变换只适用于统计特性不随时间变化的**平稳信号**，而实际信号的统计特性却往往是时变的，这类信号统称为**非平稳信号**。

例如：

平稳信号：正弦信号 $\sin 10\pi t$ 的频率是5Hz

非平稳信号：chirp信号 $e^{j2\pi(0.5t^2+2t+3)}$ 的**频率是** $0.5t + 2$

Fourier变换的局限



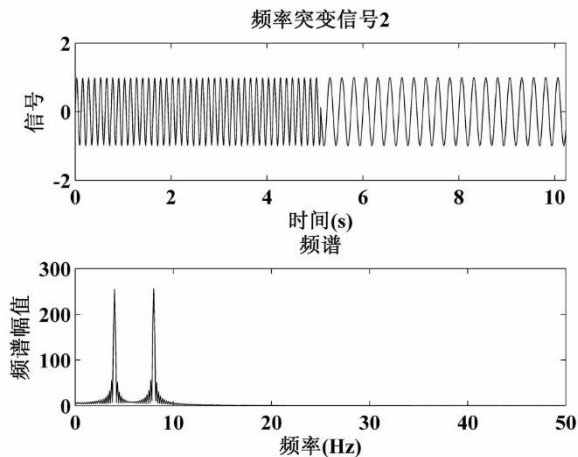
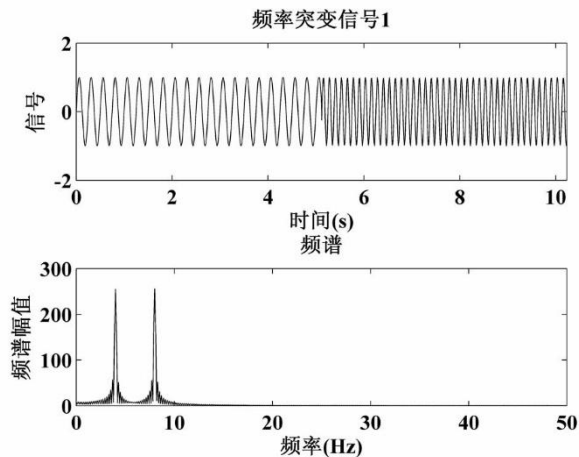
(2) 由于非平稳信号的统计特性是随时间变化的，因此对于非平稳信号的分析来说，就需要了解其局部统计特性。Fourier变换是信号的全局变换，因而对非平稳信号而言，Fourier变换不再是有效的分析工具。

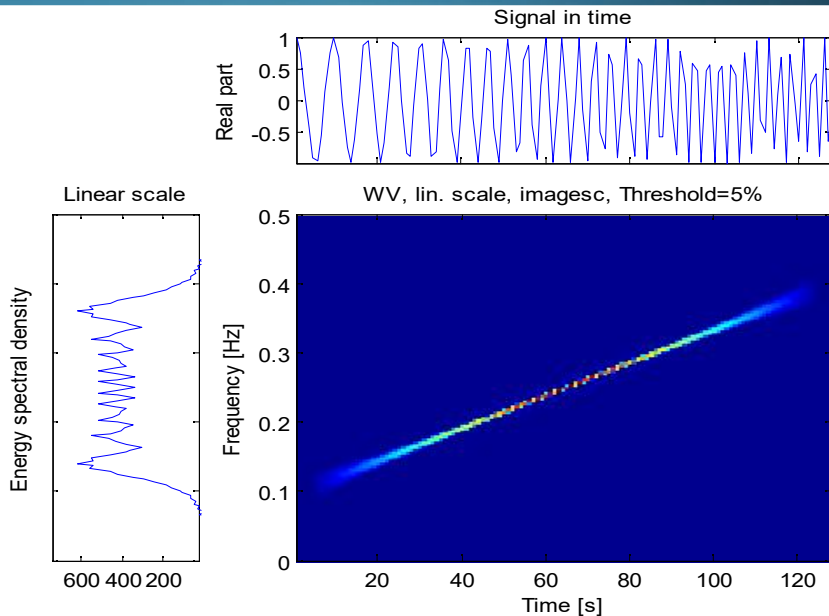
(3) 另一方面，信号的时域描述和频域描述都只能描述信号的部分特性，为了精确描述信号的局部特性，经常需要使用信号的时域和频域的二维联合表示。

非平稳信号的时频域联合分析称为 *信号的时频分析*。

例1

两个频率突变信号及其频谱。这两个信号均是由两种频率分量 $\sin(8\pi t)$ 和 $\sin(16\pi t)$ 组成，但两个频率分量在两个信号中出现的顺序不同。对于信号1，频率分量 $\sin(8\pi t)$ 和 $\sin(16\pi t)$ 分别占信号持续过程的前一半和后一半，信号2则正好相反，频率分量 $\sin(16\pi t)$ 占信号持续过程的前一半，后一半为 $\sin(8\pi t)$ 。对比两个信号的频谱可以看出，不同的时间过程却对应着相同的频谱，这说明仅采用频谱不能区分这两个信号。





(1) 顶部是信号的波形图，显示信号随时间变化规律，通过观察它，不能发现更多内容；

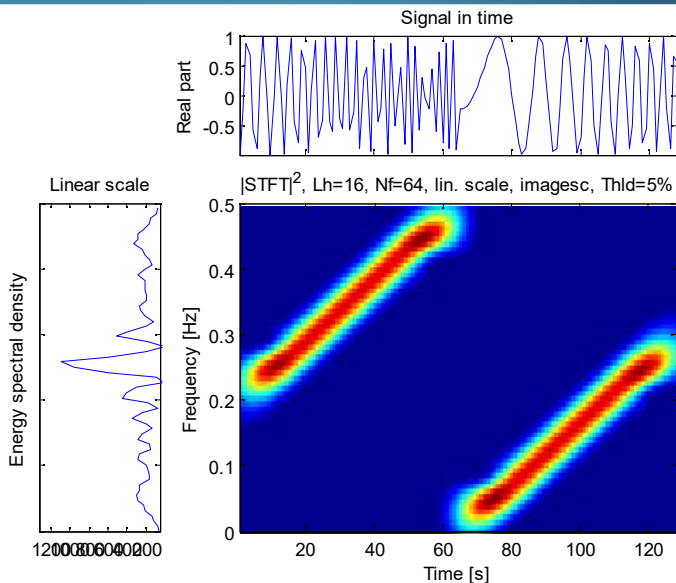


(2) 对时域信号进行Fourier变换，并平方，得到左边所示的功率谱密度，该密度波形显示了信号的“能量”是怎么沿着频率轴分布的，它表明哪些频率存在，并且相对强度有多大。

(3) 对于平稳信号而言，时间域的分析 and 频率域的分析是足够的，但是对于频率随着时间变化的非平稳信号，单独的时域分析和频域分析不足以描述它的本质特性。



(4) 从右边的时频分布图中可以清晰地看到非平稳信号频率随着时间变化的规律。也就是说，时频分布不仅让我们知道有哪些频率的存在，并且能够让我们确定这些频率在什么时间存在。图中所示信号的频率随着时间成线性变化，是一个线性调频信号。



对于多分量的信号，即 $s = sig1 + sig2$ ，在时间域和频率域不能判定到底含有几个信号分量，但是时频分布中可以看出这是由两个线性调频信号构成的多分量信号。

时频分析的发展历史



- (1) 1932年 Wigner提出了时频联合分布的概念
- (2) 1948年 Ville将这一概念引入信号分析领域
这就是著名的Wigner-Ville时频分布
- (3) Gaber提出短时Fourier变换和Gaber变换的概念
- (4) 1966年 Cohen提出了时频分布的一般形式
- (5) 20世纪80年代后期小波变换发展起来

信号的时频联合分布



时频分析的基本目的是构造一个能反映信号时变特性的时频联合分布，它可以描述信号的时频联合特性。具体来说，对于给定的信号 $x(t)$ ，希望找到一个二维函数 $F_x(t, \omega)$ ，它应具有如下基本性质：

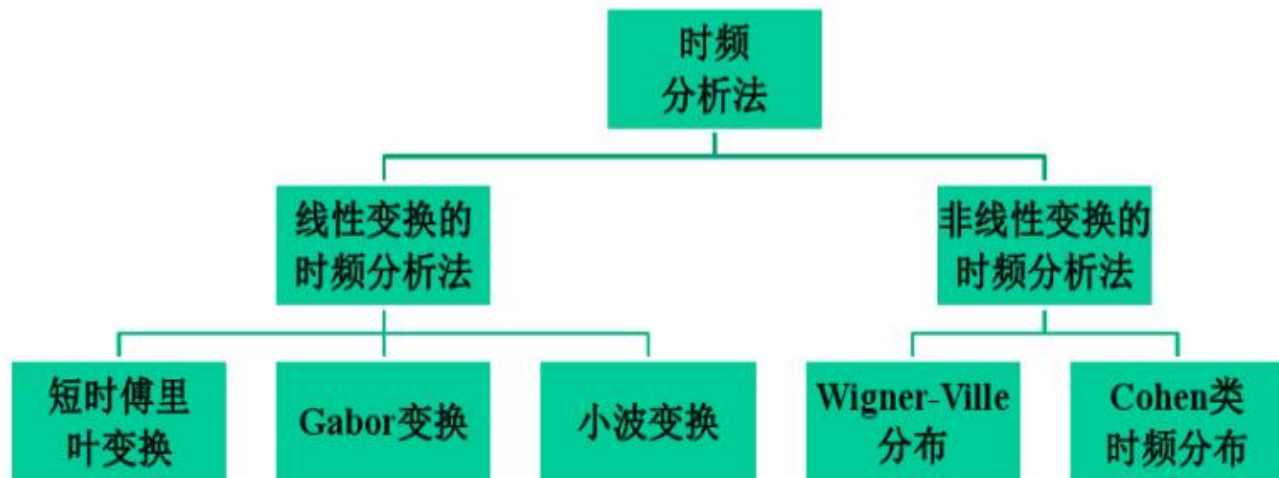
- (1) $F_x(t, \omega)$ 是时间和频率的联合分布函数；
- (2) $F_x(t, \omega)$ 能够映信号的能量随时间和频率变化的特征；
- (3) 既具有较好的时间分辨率，同时又具有较好的频率分辨率。



- (1) 线性时频表示 (STFT)
- (2) 双线性时频表示 (WVD)
- (3) 仿射类双线性时频表示
- (4) 自重排双线性时频分布
- (5) 自适应核函数类时频分布
- (5) 参数化时频分布等

本节重点为前两类

时频分布的类别



两个概念



边缘： 如果能把一特定时间的所有频率的能量分布都加起来，那就应该给出瞬时能量；如果能把某一特定频率的能量分布在全部时间内都加起来，那就应该给出能量密度频谱。因此，理想的时间和频率联合密度应该满足

$$\int_R F_x(t, w) dw = |x(t)|^2$$

$$\int_R F_x(t, w) dt = |X(w)|^2$$

上述两个等式叫做时频分布的**时间频率边缘性**；



总能量

分布的总能量应该是信号的总能量，即

$$E_x = \int_{R^2} F_x(t, w) dt dw = \int_R |X(w)|^2 dw = \int_R |x(t)|^2 dt$$

注意：如果满足边缘条件，自然就会满足总能量的要求，但是相反的说法不一定，也就是存在不满足总能量要求的可能。

本讲目录



1、引言

2、短时傅里叶变换

3、Wigner-Ville分布

4、模糊函数与Cohen时频类



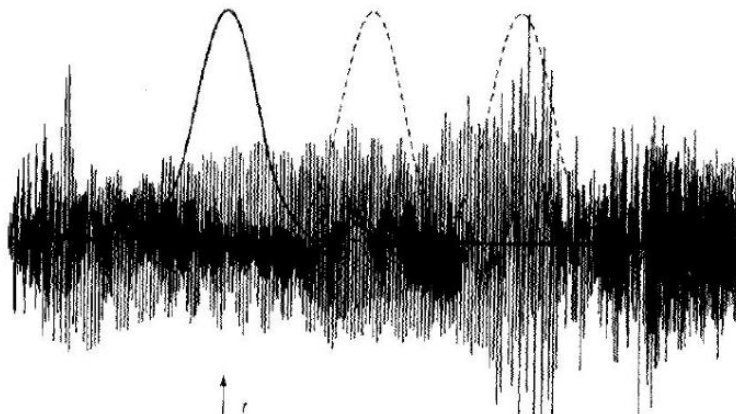
(1) 短时Fourier变换

(2) 离散序列短时Fourier变换

短时Fourier变换



早在1946年，Gabor就提出了短时傅里叶变换（short time Fourier transform, TFT）的概念 用于非平稳信号的分析， 别名：加窗Fourier变换、Gabor 变换。



图：STFT的变换示意图

短时Fourier变换



STFT的基本思想：

为了研究信号在时间局部的特性，在时域用窗函数 $g(\tau)$ 去截取 $x(t)$ 对接下来的局部信号进行Fourier变换，即得到 t 时刻该段信号的Fourier变换。不断移动时间 t ，即不断移动窗函数 $g(\tau)$ 的中心位置，即得到不同时刻的Fourier变换，这些Fourier变换的集合就是信号 $x(t)$ 的STFT，显然 $STFT_x(t, w)$ 是时间和频率的二维函数。

短时Fourier变换



给定平方可积信号 $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ，给定窗函数 $g(\tau)$ ， $g(\tau)$ 为对称实函数，用基函数

$$g_{t,w}(\tau) = g(\tau - t)e^{jw\tau}$$

代替Fourier变换中的基函数 $e^{jw\tau}$ ，信号 $x(t)$ 的短时Fourier变换定义为：

$$\begin{aligned} STFT_x(t, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g_{t,w}^*(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g^*(\tau - t) e^{-jw\tau} d\tau \\ &= \langle x(\tau), g(\tau - t) e^{-jw\tau} \rangle \end{aligned}$$

短时Fourier变换



频率域的STFT定义为：

$$STFT_x(t, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) G^*(w - \xi) e^{jw t} d\xi$$

其中 $G(w)$ 为频率窗函数，可见STFT在时间频率域的对称性。

短时Fourier变换



$STFT_x(t, w)$ 是 (t, w) 的二维函数。由于 $g(\tau)$ 是窗函数，因此它在时域应为有限支撑的(即定义域有限长)，而 $e^{jw\tau}$ 在频域是线谱，所以短时Fourier变换的基函数 $g(\tau - t)e^{jw\tau}$ 在时域和频域都应应是有限支撑的。这样，短时Fourier变换应具有对 $x(t)$ 进行时频定位的功能。

应用上述短时Fourier变换，窗函数的选择是十分重要的。窗函数的主要特征是窗函数宽度和形状。窗口宽度应该与信号的局域平稳长度相适应。

短时Fourier谱



$$|STFT_x(t, w)|^2 = \left| \int x(\tau) g^*(\tau - t) e^{-jw\tau} d\tau \right|^2 = S_x(t, w)$$

$S_x(t, w)$ 称为的谱图 (spectrogram) 或者短时Fourier谱。由谱图的定义可知谱图恒正而且是实函数。事实上, 谱图 $S_x(t, w)$ 是信号 $x(t)$ 在时刻 t 的能量谱密度。

短时Fourier变换也满足Parseval定理, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |STFT_x(t, w)|^2 dt dw$$

短时Fourier反变换



如果用短时Fourier变换的一维反变换表示, 即有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} STFT_x(t, w) e^{jw\mu} dw = x(\mu) g(\mu - t)$$

令 $\mu = t$, 则

$$x(t) = \frac{1}{2\pi g(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} STFT_x(t, w) e^{jw t} dw$$

如果用短时Fourier变换的二维反变换来表示, 则有

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} STFT_x(t, w) g(\tau - t) e^{jw\tau} dt dw$$

STFT的基本性质:



(1) 线性:

$$x(t) \rightarrow STFT_x(t, w), y(t) \rightarrow STFT_y(t, w),$$

则 $ax(t) + by(t) \rightarrow aSTFT_x(t, w) + bSTFT_y(t, w)$

(2) 时移不变性:

$$y(t) = x(t - t_0) \Rightarrow STFT_y(t, w) = STFT_x(t - t_0, w)$$

(3) 频移不变性

$$y(t) = x(t)e^{jw_0t} \Rightarrow STFT_y(t, w) = STFT_x(t, w - w_0)$$

离散序列短时Fourier变换



离散序列 $\{x(n), n = 0, 1, \dots, L - 1\}$ 的短时Fourier变换定义为

$$STFT_x(m, e^{j\omega}) = \sum_n x(n)g(n - mN)e^{-j\omega n}$$

式中 N 是在时间轴上窗函数移动的步长, ω 是圆周频率。
上式对应离散时间Fourier变换(DTFT), 为了进行数字信号处理, 将频率 ω 离散化, 令

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$$

离散序列短时Fourier变换



$$STFT_x(m, \omega_k) = \sum_n x(n)g(n - mN)e^{-j\frac{2\pi}{M}nk}$$

上式实际上就是一个点离散Fourier变换（DFT），若窗函数的窗口宽度正好也是点，则上式可写成

$$STFT_x(m, k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)g(n - mN)W_M^{nk},$$

$$k = 0, 1, \dots, M - 1$$

应用中，如果 $g(n)$ 的宽度小于 M ，那么可采用补零的方法使其长度变为 M ，若 $g(n)$ 的宽度大于 M ，则应增大 M 使之等于窗函数的宽度。

离散序列短时Fourier变换



步长 N 的大小决定了窗函数沿时间轴移动的间距。

若 $N=1$ ， $x(n)$ 则窗函数在 $L/N=L$ 的时间方向上每隔一个点移动一次，此时总共需要进行 M 次点DFT。

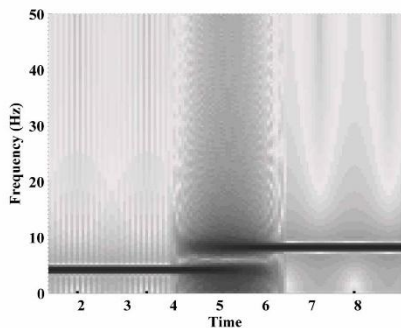
对应的反变换是

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{M} \sum_m \sum_{k=0}^{M-1} STFT_x(m, k) W_M^{-nk} \end{aligned}$$

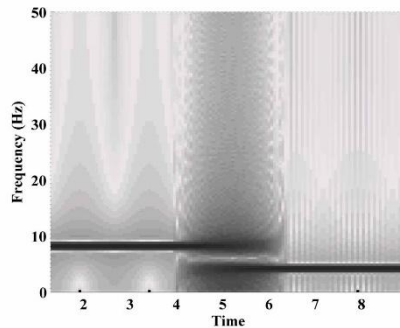
式中 m 的求和范围取决于数据长度 L 及窗函数移动步长 N 。

例2

利用短时Fourier变换分析例1中两个频率突变信号。应用MATLAB函数 `spectrogram` 绘出这两个信号的谱图，输入参数 `window=256`, `noverlap=250`, `nfft=256`，输出结果见后。分析这两个信号的谱图，可以知道两个频率分量在两个信号中出现的顺序，即短时Fourier变换具有一定的时频联合分析功能。



频率突变信号1的谱图

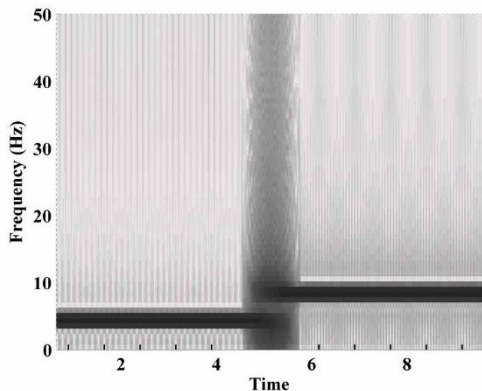


频率突变信号2的谱图

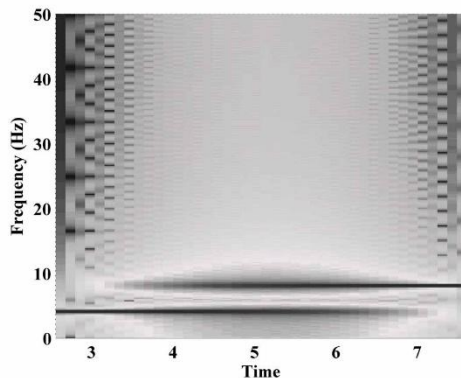
为了理解窗口宽度对时间和频率分辨率的影响，计算采用如下两组参数时
频率突变信号1的谱图：

(1) window=128, noverlap=125, nfft=128;

(2) window=512, noverlap=500, nfft=512。可知，当时域窗口宽度减小时，时间分辨率提高，但频率分辨率下降，当时域窗口宽度增加时，频率分辨率提高，但时间分辨率下降。



频率突变信号1的谱图(窄时窗)



频率突变信号1的谱图(宽时窗)

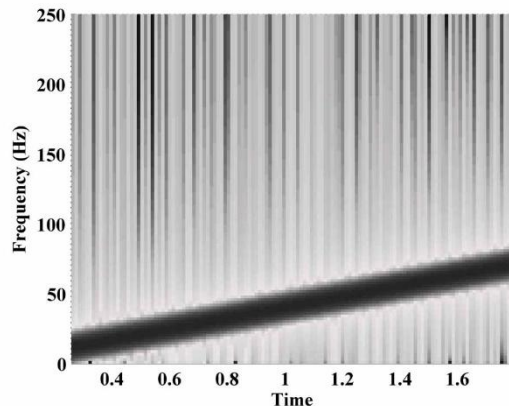
例3

利用短时Fourier变换分析频率线性增长的chirp信号及其频谱。应用MATLAB函数spectrogram绘出该chirp信号的谱图，输入参数window=256, noverlap=250, nfft=256, 输出结果如图。从该chirp信号的谱图可以看出信号频率线性增长的特点。

MATLAB提供了计算谱图的函数spectrogram，其调用格式为：

`S = spectrogram(x,window,noverlap,nfft,fs)`

其中：x为信号序列；window是选用的窗函数。



频率线性增长的chirp
信号的谱图

本讲目录



1、引言

2、短时傅里叶变换

3、Wigner-Ville分布

4、模糊函数与Cohen时频类



- (1) Wigner-Ville 分布
- (2) Wigner-Ville 分布的性质
- (3) Wigner-Ville 分布的交叉项

Wigner-Ville 分布



Wigner-Ville 分布是具有**双线性**形式的时频分布。

令确定性信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的 Fourier 变换分别是 $X(w)$, $Y(w)$, 则 $x(t)$ 的瞬时相关函数或双线性变换定义为

$$r_x(t, \tau) = x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)$$

瞬时相关函数表示信号在瞬时相关域 (t, τ) 的瞬时相关程度。 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的瞬时互相关函数定义为

$$\begin{aligned} r_{x,y}(t, \tau) \\ = x(t + \tau/2)y^*(t - \tau/2) \end{aligned}$$

Wigner-Ville 分布



信号的 $x(t)$ 自Wigner分布定义为其瞬时相关函数关于滞后 τ 的Fourier变换:

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Wigner-Ville 分布



信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 联合Wigner分布定义为它们瞬时互相关函数关于滞后 τ 的Fourier变换:

$$W_{x,y}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) y^*(t - \tau/2) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Wigner于1932提出了上述Wigner分布的概念，并把它用于量子力学领域，1948年，Ville将其引入信号分析领域，因此Wigner分布也称为Wigner-Ville分布。

Wigner-Ville分布



信号的Wigner-Ville 分布也可以用信号的**频谱**定义为：

$$W_x(t, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w + \xi/2) X^*(w - \xi/2) e^{j\xi t} d\xi$$

信号和的联合Wigner-Ville 分布定义为：

$$W_{x,y}(t, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w + \xi/2) Y^*(w - \xi/2) e^{j\xi t} d\xi$$

Wigner-Ville分布的性质



(1) 实值性, 即信号的自Wigner-Ville分布是和的实函数:

$$W_x(t, w) \in R, \forall (t, w)$$

(2) 时移不变性,

若 $x'(t) = x(t - t_0)$, 则

$$W_{x'}(t, w) = W_x(t - t_0, w)$$

(3) 频移不变性,

若 $x'(t) = x(t)e^{jw_0 t}$, 则

$$W_{x'}(t, w) = W_x(t, w - w_0)$$

Wigner-Ville分布的性质



(4) 时间边缘性

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, w) dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-jw\tau} dw d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jw\tau} dw \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) \delta(\tau) d\tau \\ &= |x(t)|^2\end{aligned}$$

上式表明信号 $x(t)$ 的自Wigner-Ville分布沿**频率轴**的积分等于该信号在时刻 t 的瞬时能量。

Wigner-Ville分布的性质



(5) 频率边缘性:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(t, w) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(w + \xi/2) X^*(w - \xi/2) e^{j\xi t} d\xi dt \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(w + \xi/2) X^*(w - \xi/2) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t} dt \right) d\xi \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} X(w + \xi/2) X^*(w - \xi/2) \delta(\xi) d\xi \\&= |X(w)|^2\end{aligned}$$

上式表明信号 $x(t)$ 的自Wigner-Ville分布沿时间轴的积分等于该信号在频率 w 的瞬时能量。

Wigner-Ville分布的性质



由上述性质(4)和性质(5)可以知道Wigner-Ville分布具有能量分布性质，但是由于Wigner-Ville分布不能保证在整个平面上是正的，因此Wigner-Ville分布不满足一个真正的时频能量分布不能为负的原则，也正是这一原因，Wigner-Ville分布有时会导致无法解释的结果。

Wigner-Ville分布的性质



如信号 $x(t)$ 为两个信号的和, 即 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 则

$$\begin{aligned} W_x(t, w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t + \tau/2) + x_2(t + \tau/2)][x_1^*(t - \tau/2) + x_2^*(t - \tau/2)]e^{-jw\tau} d\tau \\ &= W_{x_1}(t, w) + W_{x_2}(t, w) + 2\text{Re} [W_{x_1, x_2}(t, w)] \end{aligned}$$

Wigner-Ville分布的交叉项



两个信号和的Wigner-Vile分布并不等于它们各自Wigner-Vile分布的和，式中 $2\text{Re}[W_{x_1, x_2}(t, w)]$ 称之为交叉项，它是由信号相加所引进的干扰。一般的，若信号 $x(t)$ 有 N 个分量，则这些分量之间总共产生 $N(N-1)/2$ 个互项的干扰。

Wigner-Ville分布的交叉项



对于互Wigner-Ville分布存在同样的问题，例如信号 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ ，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的联合Wigner-Ville分布为

$$W_{x,y}(t, w) = W_{x_1,y_2}(t, w) + W_{x_2,y_2}(t, w) + W_{x_1,y_1}(t, w) + W_{x_2,y_1}(t, w)$$

后两项也是交叉项干扰。

例4

若信号 $x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ ，则其Wigner-Ville分布为

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{j\omega_0(t+\tau/2)} A^* e^{-j\omega_0(t-\tau/2)} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

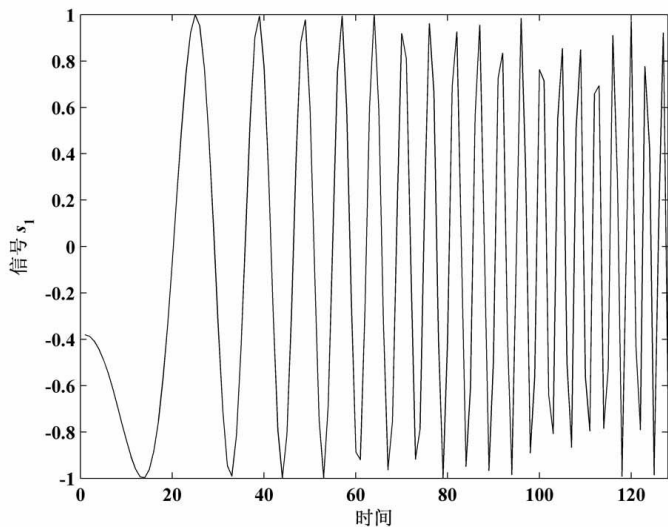
$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} d\tau$$

$$= 2\pi|A|^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

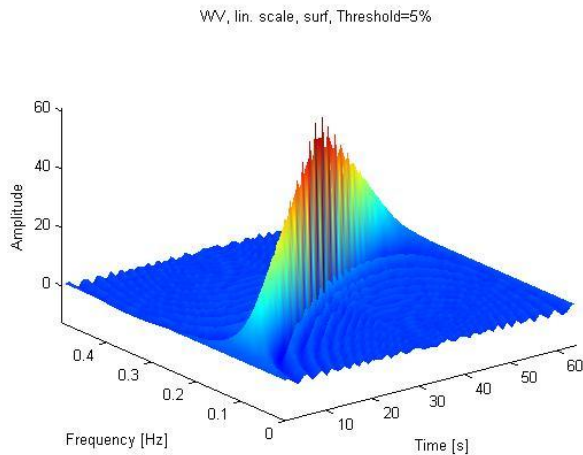
上式与 t 无关，即信号 $Ae^{j\omega_0 t}$ 的Wigner-Ville分布是位于 $\omega = \omega_0$ 处的带状冲激函数。

例5

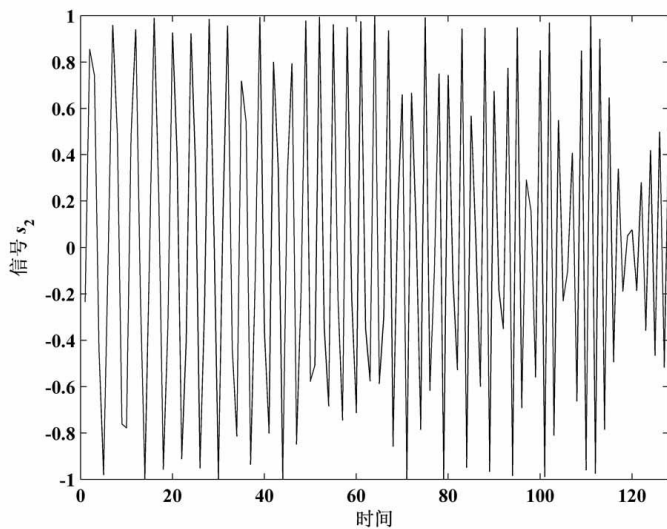
设 $s_1(t)$ 与 $s_2(t)$ 为两个频率线性增长chirp信号，两个信号的和 $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ 。信号 $s_1(t)$ 及其Wigner-Ville分布，信号 $s_2(t)$ 及其Wigner-Ville分布，信号 $s(t)$ 及其Wigner-Vile分布分别见后。由图可知，对于单个chirp信号，Wigner-Vile分布可以明确看出信号频率随时间线性增长的关系。对于多分量信号，Wigner-Ville分布出现了很多的交叉项。



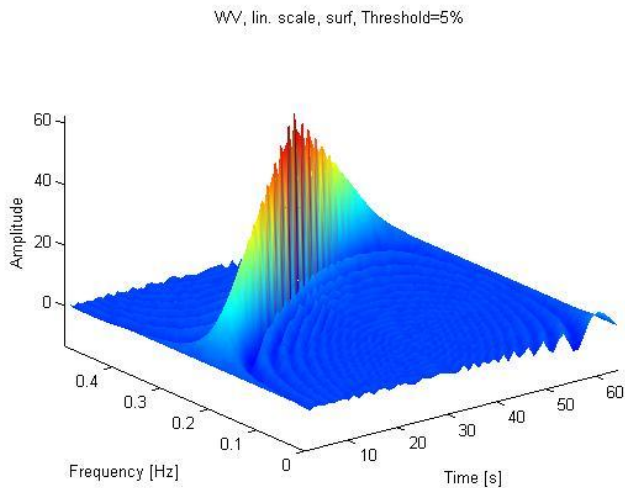
chirp信号 $s_1(t)$



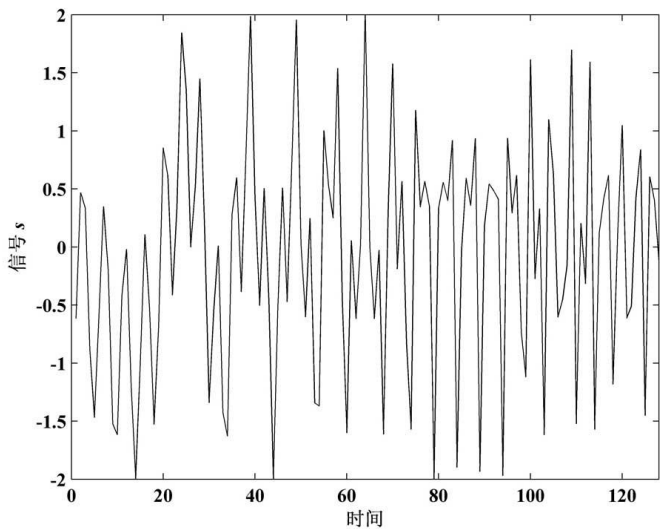
信号 $s_1(t)$ 的Wigner-Ville分布



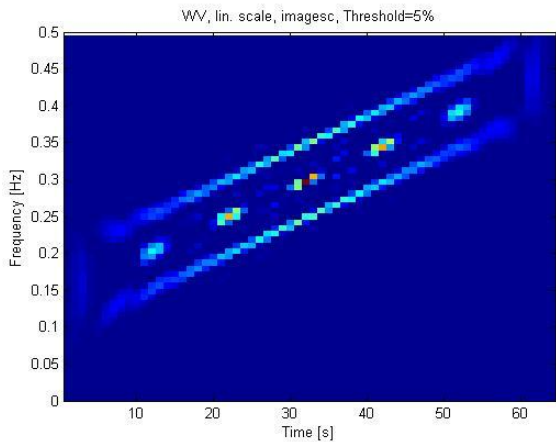
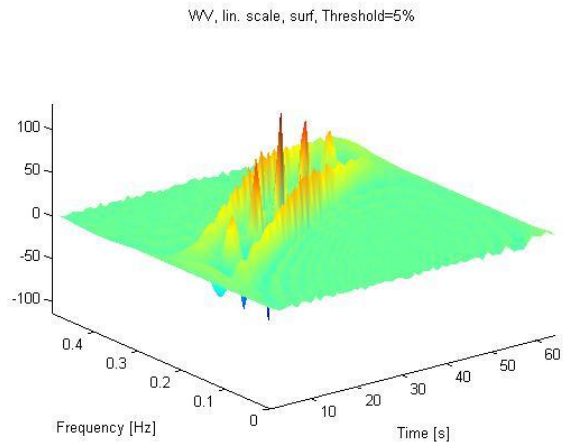
chirp信号 $s_2(t)$



信号 $s_2(t)$ 的Wigner-Ville分布



信号 $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$



信号 $s(t)$ 的Wigner-Ville分布

本讲目录



1、引言

2、短时傅里叶变换

3、Wigner-Ville分布

4、模糊函数与Cohen时频类



- (1) 模糊函数
- (2) 模糊函数的重要性质
- (3) 模糊函数的应用



雷达信号处理领域，人们特别感兴趣的一种函数是模糊函数。模糊函数是将信号变换到时延-频偏（即多普勒频率）平面的表示，在非平稳信号分析和处理中具有重要的意义。信号 $x(t) \in L^2(R)$ 的自模糊函数（ambiguity function, AF）定义其瞬时相关函数关于时间 t 的Fourier 逆变换：

$$AF_x(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{j\theta t} dt$$



信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互模糊函数定义为它们瞬时互相关函数关于时间 t 的Fourier变换

$$AF_{x,y}(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) y^*(t - \tau/2) e^{j\theta t} dt$$

模糊函数和WVD



瞬时互相关函数 $r_{x,y}(t, \tau) = x(t + \tau/2)y^*(t - \tau/2)$

互模糊函数

$$AF_{x,y}(\tau, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2)y^*(t - \tau/2)e^{j\theta t} dt$$

WVD

$$W_{x,y}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2)y^*(t - \tau/2)e^{-j\Omega\tau} d\tau$$



根据傅里叶变换关系可得到

$$r_x(t, \tau) = x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2) = \int_{-\infty}^{+\infty} AF_x(\tau, \theta) e^{-j\theta t} d\theta$$

对上式两端做关于 t 的傅里叶变换，可得

$$W_x(t, \Omega) = \int_R r_x(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} AF_x(\tau, \theta) e^{-j\theta t} e^{-j\Omega\tau} d\theta d\tau$$

该式说明，信号的WVD是AF的二维Fourier变换。

模糊函数发展历程



模糊函数最早是维莱 (J. Ville) 于1948年所引出的, 由于伍德沃尔德进行了先驱的开拓工作, 故又称伍德沃尔德模糊函数。此后有不少文献资料研究模糊函数, 但对模糊函数的定义及其对物理概念的解释却各不相同。

1974年辛斯基 (A. I. Sinsky) 和王 (C. P. Wang) 以美国电气与工程师协会 (IEEE) 的名义进行了统一的工作, 我国的张直中也提出了统一的建议。



20世纪50年代以后,模糊函数得到了全面深入的研究,成为雷达信号理论中一个重要的概念,是进行雷达波形设计的有效工具。

模糊函数关于多普勒频率和延迟时间的三维图形称为雷达的模糊图。



根据Parseval定理和傅里叶变换性质，信号 $x(t)$ 的自模糊函数也可以用信号的频谱定义为

$$AF_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f + \xi/2) X^*(f - \xi/2) e^{j2\pi\xi\tau} d\xi$$

同理，信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互模糊函数也可以用信号的频谱定义为

$$AF_{x,y}(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f + \xi/2) Y^*(f - \xi/2) e^{j2\pi\xi\tau} d\xi$$

模糊函数的重要性质



(1) AF通常是复值的，满足如下哈密顿偶对称性质：

$$AF_x(\tau, f) = A_x^*(-f, -\tau)$$

(2) 边缘性质：信号关于时间和频率的自相关函数分别是AF沿着 τ 轴和 f 轴的截断，即

$$r_x(\tau) = AF_x(\tau, 0)$$

$$R_x(f) = AF_x(0, f)$$

信号的总能量是AF在 $\tau - f$ 平面中原点处的值，它是AF的最大值。

$$|AF_x(\tau, f)| \leq AF_x(0, 0) = E_x, \forall \tau, f$$

模糊函数的重要性质



(3) 时移频移不变性:

若
$$y(t) = x(t - t_0)e^{j2\pi v_0 t}$$

则
$$AF_y(\tau, f) = AF_x(\tau, f)e^{j2\pi(v_0\tau - t_0f)}$$

(4) 相干项的几何结构: 对于多分量信号, 其AF对应信号成分的项 (成为AF项) 主要位于原点附近, 而其相干项 (AF交叉项) 则离原点有一定的距离, 这个距离与时频面中两个信号成分之间的距离成正比。

模糊函数的重要性质



(5) 其它性质:

Table 1 Some properties of AF

convolution

$$h(t) = f(t)g(t) \Rightarrow A_h(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_f(\tau, \omega) A_g(\tau - \tau', \omega) d\tau'$$

multiplication

$$h(t) = f(t)g(t) \Rightarrow A_h(\tau, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_f(\tau, \omega') A_g(\tau, \omega - \omega') d\omega'$$

correlation

$$h(t) = f(t) \otimes g(t) = f(t)g^*(-t) \Rightarrow A_h(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_f(\rho, \omega) A_g(\tau - \rho, -\omega) d\rho$$

Moyal formula

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_f(\tau, \omega) A_g^*(\tau, \omega) d\tau d\omega = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t) dt \right|^2 = |\langle f, g \rangle|^2$$

Fourier transform

$$A_Z(v, \tau) = 2\pi A_Z(\tau, -v)$$

模糊函数的应用



模糊函数主要反映了信号的时频相关程度，也就是信号本身和它在时频面上经过平移转换得到的信号的相似程度。此处我们通过MALAB时频工具箱中的函数，举例说明AF与WVD，对多分量信号处理效果。

```
clc,clear all,close all
N=64;
sig1=fmlin(N,0.2,0.5).*amgauss(N);
sig2=fmlin(N,0.3,0).*amgauss(N);
sig=[sig1;sig2];
tfrwv(sig)
ambifrnб(sig)
```

模糊函数的应用

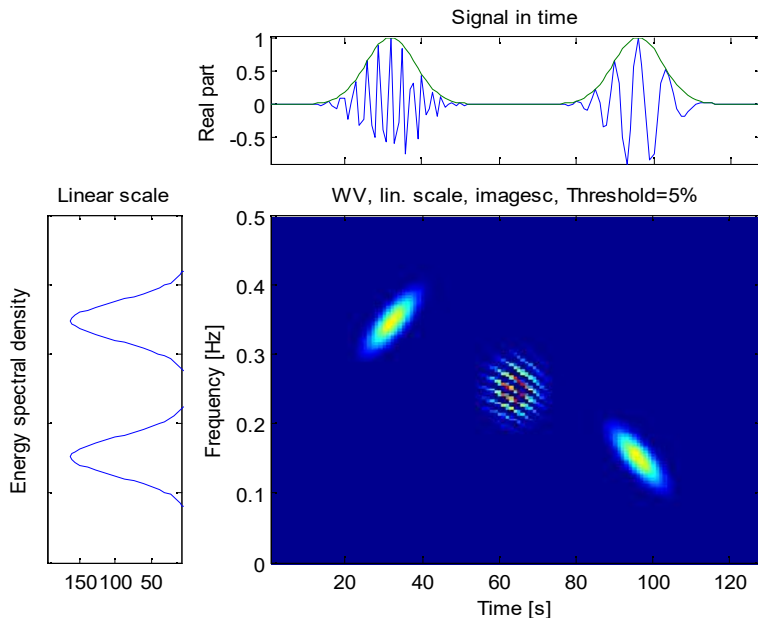


图1 两个具有高斯幅度线性调频脉冲信号构成的信号的WVD

从图1我们可以看到两个很明显的信号项，以及信号项之间震荡的相干项。

模糊函数的应用

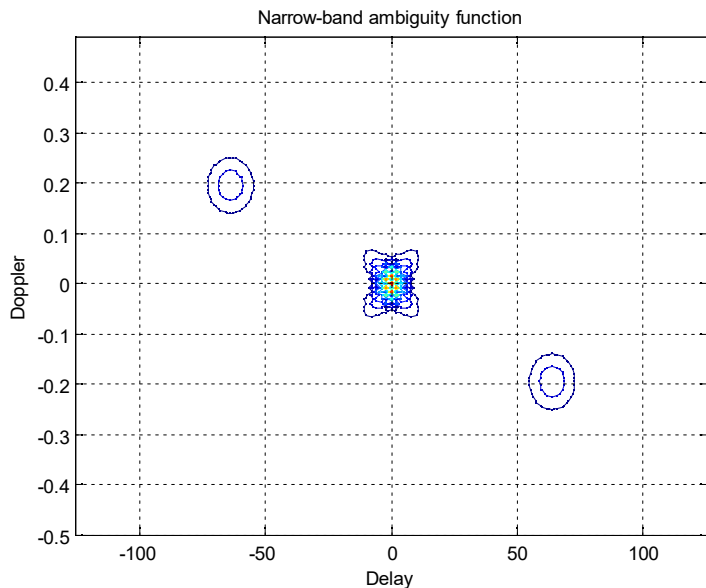


图2 两个具有高斯幅度线性调频脉冲信号构成的信号的AF

从图2，我们可以清楚地看到AF信号项位于原点（图像中心）附近，而AF的相干项则离原点有一定的距离。这样，可通过对信号的AF在原点处用二维低通滤波器进行滤波，再通过二维傅里叶变换返回信号的WVD，将信号的相干项得到衰减。

本讲目录



1、引言

2、短时傅里叶变换

3、Wigner-Ville分布

4、模糊函数与Cohen时频类



- (1) Cohen类时频分析
- (2) Cohen类时频分析的性质
- (3) Cohen类分布



除了STFT、WVD/AF外，近几十年来人们还提出了许多其他形式的时频分布，1966年，Cohen给出了时频分布更一般的表示，目前已提出的绝大多数双线性时频分布都可以看作其特殊形式，人们把有Cohen公式定义的时频分布统称为“Cohen类时频分布”，通过该类分布的讨论可使我们全面地理解时频分布，深入了解它们的性质。

Cohen类时频分析



信号 $f(t), g(t)$ 的Cohen类互时频分布定义为

$$C_{f,g}(t, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \phi(\theta, \tau) f(u + \tau/2) g^*(u - \tau/2) e^{j(u\theta - t\theta - \tau\Omega)} du d\tau d\theta$$

式中 $\phi(\theta, \tau)$ 称为分布的核函数，核函数确定了分布及其特性。给定不同的核函数，可以得到不同的分布。例如， $\phi(\theta, \tau) = 1$ ，Cohen类时频分布变成WVD。

Cohen类时频分析



显然, $C_{f,g}(t,w) = \iint_{R^2} \phi(\theta,\tau) AF_{f,g}(\tau,\theta) e^{-j2\pi(t\theta+\tau w)} d\tau d\theta$

其中, $AF_{f,g}$ 是信号 $f(t)$ 与 $g(t)$ 之间的互模糊函数。

当 $f = g$ 时, 称 $C_f(t,w) = C_{f,f}(t,w)$ 为信号 $f(t)$ 的Cohen类时频分布。如果定义核函数 $\phi(\tau,\nu)$ 的Fourier变换为

$$\Phi(t,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\theta,\tau) e^{-j2\pi t\theta} d\theta$$

则用频谱表示

$$C_{f,g}(t,w) = \iint_{R^2} \Phi(t-u,\tau) f(u+\tau/2) g^*(u-\tau/2) e^{-j2\pi\tau w} d\tau du$$

Cohen类时频分布的性质



Cohen类时频分布的性质，主要取决于核函数 $\phi(\tau, \nu)$ 和 $\Phi(t, \tau)$ 。因为不同的核函数产生不同的分布，我们就可以将构造时频分布的任务简化为核函数设计的问题，而且使用核函数的另一个重要意义就是我们可以对核函数加以限制，来实现具有某种性质的时频分布同时对于一个新的时频分布的研究，可以通过对其核函数的分析来获得该分布的特性。

Cohen类时频分布的性质



以下列举一些Cohen类时频分布的重要基本性质：

(1) 若Cohen定义绝对可积，则要求 $|\phi(\tau, \theta)| \leq 1$

(2) (边缘性) 信号 $f(t)$ 的时频分布 $C_f(t, w)$ 通常理解为能量密度的联合分布，因此要求满足边缘性，即

$$\int_R C_f(t, w) dw = |f(t)|^2 \quad \text{此时} \quad \phi(0, \theta) = 1$$

$$\int_R C_f(t, w) dt = |F(w)|^2 \quad \text{此时} \quad \phi(\theta, 0) = 1$$

Cohen类时频分布的性质



(3) (实值性)

$C_f(t, w)$ 作为能量密度的联合分布，一般要求是实的，

即 $C_f(t, w) = C_f^*(t, w)$ ，此时，核函数要求满足

$$\phi(\tau, \nu) = \phi^*(-\tau, -\nu)$$

(4) (时移不变性和频移不变性) 此时核函数与时间和频率无关。

Cohen类分布



选择不同的核函数，将得到不同的时频分布，列举如下：

Table 1: Some classical Cohen's class time-frequency distributions and the associated kernels

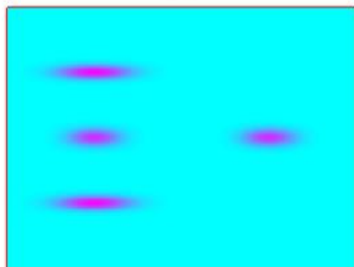
Name	Kernel: $\phi(\theta, \tau)$	Distribution: $C_f(t, \omega)$
WD	1	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) d\tau$
KD	$e^{j\frac{\theta\tau}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) F^*(\omega) e^{-j\omega t}$
BJD	$\frac{\sin \frac{1}{2}\theta\tau}{\frac{1}{2}\theta\tau}$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ \tau } e^{-j\omega\tau} \int_{t-\frac{ \tau }{2}}^{t+\frac{ \tau }{2}} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau$
ZAMD	$g(\tau) \tau \frac{\sin k\theta\tau}{k\theta\tau}$	$\frac{1}{4\pi k} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} \int_{t-k \tau }^{t+k \tau } f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau$
CWD	$e^{-\frac{\theta^2\tau^2}{\sigma}}$	$\frac{\sqrt{\sigma}}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ \tau } e^{-\frac{\sigma}{4\tau^2}(u-t)^2} e^{-j\omega\tau} f\left(u + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau$

Cohen类分布

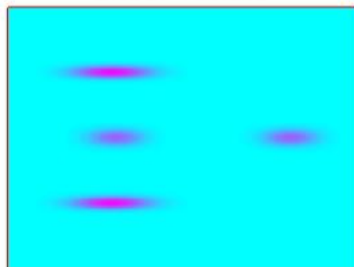


根据上表可发现，核函数实际上就是一个时间频率窗，窗的宽度、高度都会对最终的时频结果产生影响。

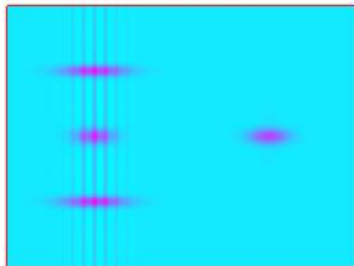
谱图



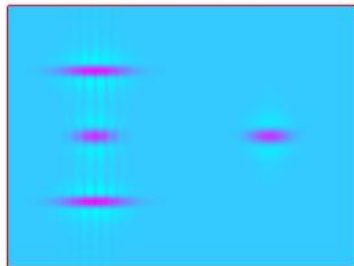
谱图的最小平均互熵组合



Choi-Williams分布



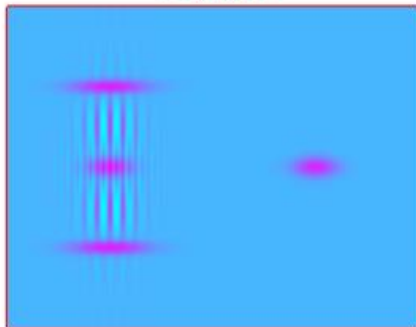
Zhao-Atlas-Marks分布



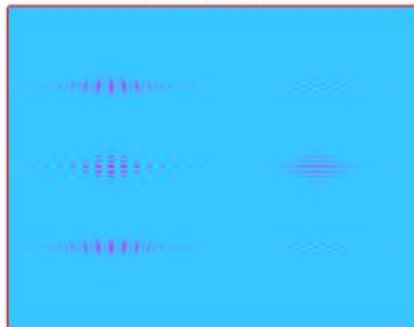
Cohen类分布



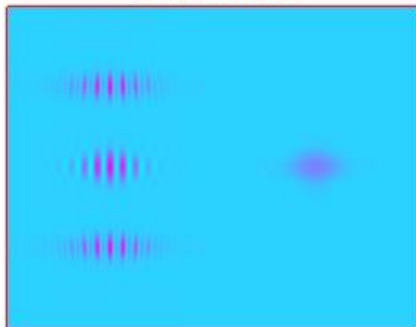
广义矩形分布



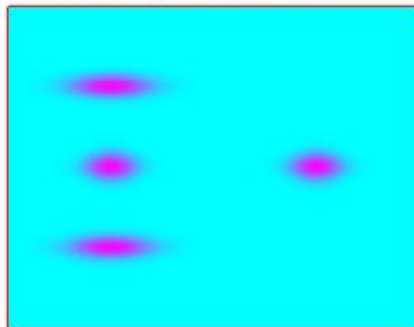
Margenau-Hill分布



伪Margenau-Hill分布



Margenau-Hill-谱图分布





举例：由于WVD分布的双线性，当信号是多个分量时，时频分布由于会出现交叉项干扰，影响我们对时频分布的正确判断。一种抑制交叉项的核函数就被设计出来为 Choi-Williams (CWD). CWD的核函数是高斯函数

$$\phi(\tau, \nu) = e^{-\frac{\tau^2 \nu^2}{\sigma}}$$

Cohen类分布



注意高斯函数中的参数 $\sigma \rightarrow \infty$ 时，CWD即转化成为WVD。相反， σ 越小，相干项的衰减就越大。CWD中核函数的形式暗含着此分布的分布效果在很大程度上取决于分析信号的本质。比如，如果信号是由时间和频率同步的成分构成，那么它的CWD将会出现很强的相干项。



(1) Cohen类是所有具有时间和频率移不变性的二次型时频能量分布的集合。它给出了许多分析处理非平稳信号的方法，其基本思想是设计一个联合时间频率函数，它能够同时以时间和频率为变量描述信号的能量密度或者信号强度。



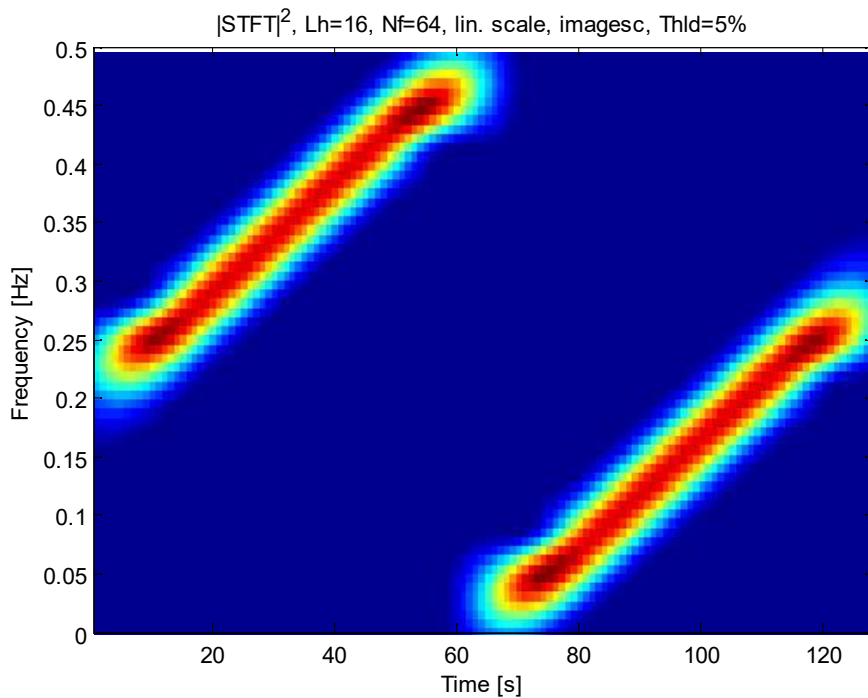
(2) **Cohen**类最重要的成员就是**WVD**，因为它满足很多期望的性质。同时，由于这些分布是二次型的，因此也会带来一些问题，即这些分布在时频面产生的交叉项/相干项可能会干扰时频表示的可读性。



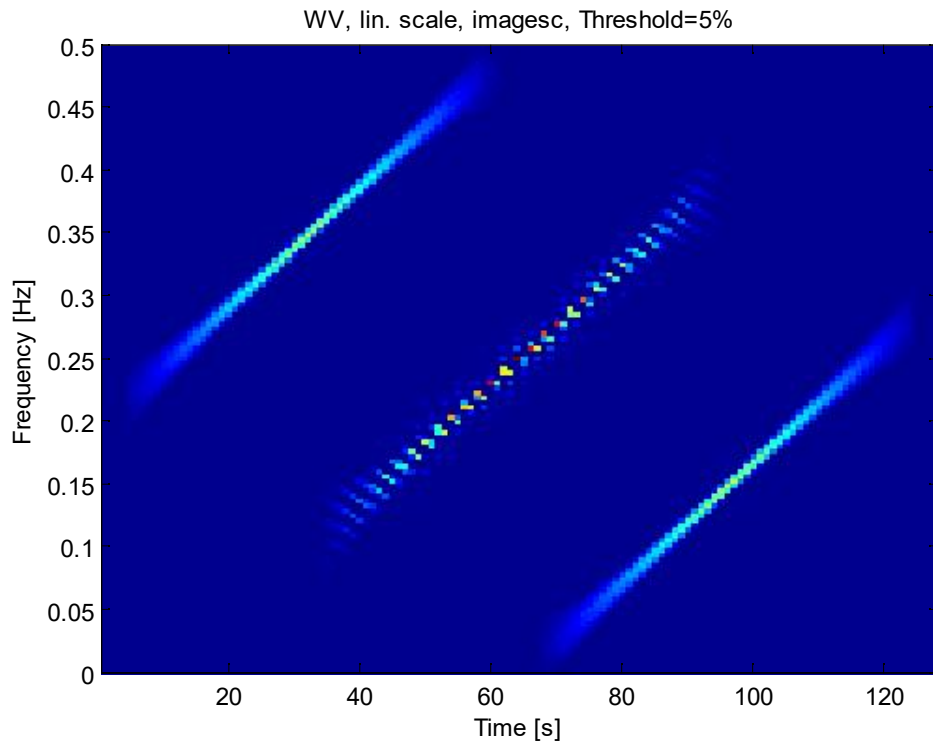
(3) 减少这些交叉项的方法之一，就是根据它们的结构，对相应的分布在时间和频率上进行平滑，但是这样做的结果可能会是的时间分辨率和频率分辨率变差，还可能损失一些重要的性质。

(4) Cohen给出了统一公式能够更好地理解现有的时频分析方法，也便于和模糊函数结合。在近几十年中，人们根据自己的研究需要，设计出了符合各自要求的时频分布，使时频分析更适应于工程实践的需要。

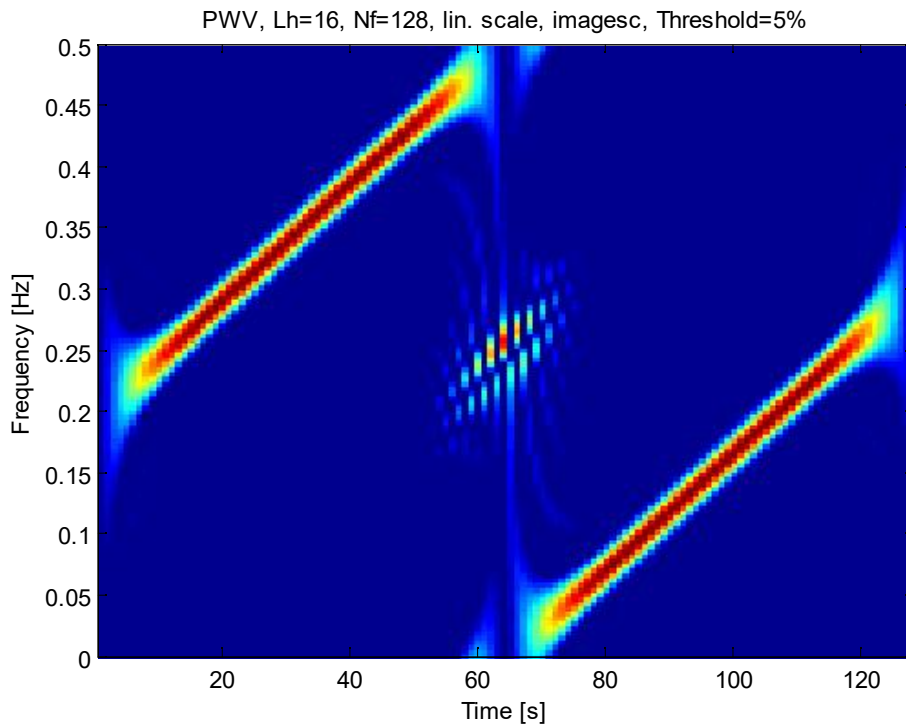
不同类型时频分布的比较



不同类型时频分布的比较



不同类型时频分布的比较





时频分析

频谱图、同步压缩、重排、Wigner-Ville、时频边缘、数据自适应方法

▼ 估算器

函数名	简介
spectrogram	使用短时傅立叶变换的频谱图
xspectrogram	使用短时傅立叶变换的交叉谱图
stft	短时傅立叶变换
iscola	确定窗口重叠组合是否符合COLA标准

- 根据Mworks时频分析的相关情况，请撰写关于时频分析函数命令的介绍，并给出相关例子。本次作业提交截止时间4月26日。

谢 谢

