2024.03.13

考虑两点边值问题

$$\begin{cases} -u'' + u = (\pi^2+1)\sin \pi x, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. 验证变分问题

$$B(u_n, v_n) = (f, v_n), \quad \forall v_n \in V_n$$

满足 Lax-Milgram 定理条件，解 u_n 存在且唯一，并满足范数估计 $\|u_n\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V^*}$.

2. 用 matlab 实现有限元程序计算该一维边值问题.(取 N = 4，8，16，32，用稀疏矩阵存储)

2024.03.20

1. 设有椭圆方程混合边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + a(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 有界单连通区域,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为法向导数, $a(\boldsymbol{x}) \geqslant a_0 > 0, \beta(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$, $f(\boldsymbol{x})$ 均为足够光滑的已知函数.

(i) 试建立该边值问题的 Galerkin 变分问题;

(ii) 讨论 (i) 中变分问题解的适定性.

2. 对于椭圆型方程的第一边值问题

$$\begin{cases} -\partial_1\left(p(\boldsymbol{x})\partial_1 u\right) - \partial_2\left(p(\boldsymbol{x})\partial_2 u\right) + q(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x})|_\Gamma = g(\boldsymbol{x}), \end{cases}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中具有光滑边界 Γ 的有界单连通区域,$p(\boldsymbol{x}) \geqslant p_0 > 0, q(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, f(\boldsymbol{x})$ 足够光滑. 试建立该边值问题的 Galerkin 变分问题, 并研究其适定性.