作业

(1) 证明如下引理. 设P_K是L维空间，$\{N_1, \cdots, N_L\}$是P_K的对偶空间$(P_K)'$的一个子集. 则下面两个条件等价

(a) $\{N_1, \cdots, N_L\}$是$(P_K)'$的一组基

(b) 对任意$\phi \in P_K$, $N_i(\phi) = 0, 1 \leq i \leq L$等价于$\phi \equiv 0$.

(2)利用网格生成软件包给出L型区域$\Omega = (-1,1)^2 \backslash [0,1] \times [-1,0]$的一个三角形剖分，画出剖分图(例如gmsh,distmesh等)

(3)验证

$$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3$$
$$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3, \ \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1, \ \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

是Lagrange二次元节点基函数.

(4)证明如下定义的Hermite空间属于$H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} V_h =& \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_3(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v\text{在}\mathcal{T}_h \\ & \text{的所有顶点连续}, \nabla v\text{在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续}\} \end{aligned}$$

(Hint:要证$V_h \subset H^1(\Omega)$只需证在公共边$F = K_1 \cap K_2$上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}$)

(5)证明如下定义的Argyris空间属于$H^2(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
V_h =&\{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_5(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v\text{和其一阶以及二阶导数在}\mathcal{T}_h \\
&\text{的所有顶点连续，在}\mathcal{T}_h\text{的所有边中点，}v\text{关于该边的法向导数连续}\}
\end{aligned}
$$

(Hint:要证$V_h \subset H^2(\Omega)$只需证在公共边$F = K_1 \cap K_2$上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}$，$\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$)