2024.04.22

1. 证明如下引理.

   设 P_k 是 d 维空间，$\{N_1, \cdots, N_L\}$ 是 P_k 的对偶空间 $(P_k)'$ 的一个子集. 则下面两个条件等价

   (a) $\{N_1, \cdots, N_d\}$ 是 $(P_k)'$ 的一组基

   (b) 对任意 $\phi \in P_K$,$N_i(\phi) = 0, 1 \le i \le d$ 等价于 $\phi \equiv 0$.

   证明. 令 $\{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ 为 P_k 的一组基.$\{N_1, \ldots, N_d\}$ 是 P_k' 的一组基当且仅当对于 $\mathcal{P}'$ 中的任意 L，

   $$L = \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_d N_d \tag{1}$$

   因为 $d = \dim P_k = \dim P_k'$. 式(1)等价于

   $$\begin{aligned} y_i &:= L(\phi_i) \\ &= \alpha_1 N_1(\phi_i) + \ldots + \alpha_d N_d(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{2}$$

   令 $B = (N_j(\phi_i)), i, j = 1, \ldots, d$. 因此，(a) 等价于 $B\alpha = y$ 有解，即 B 可逆。

   对于 $\mathcal{P}$ 中的任意 v，我们可以写成 $v = \beta_1\phi_1 + \ldots + \beta_d\phi_d$. $N_i v = 0$ 意味着 $\beta_1 N_i(\phi_1) + \ldots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0$. 因此，(b) 等价于

   $$\beta_1 N_i(\phi_1) + \ldots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, d \Longrightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_d = 0. \tag{3}$$

   令 $C = \Big(N_i(\phi_j)\Big)$, $i, j = 1, \ldots, d$. 那么 (b) 等价于 $Cx = 0$ 只有零解，即 C 可逆。由于 $C = B^\top$, (a) 等价于 (b).

   $\square$

2. 利用网格生成软件包给出 L 型区域 $\Omega = (-1, 1)^2 \backslash [0, 1] \times [-1, 0]$ 的一个三角形剖分，画出剖分图 (例如 gmsh，distmesh 等)

3. 验证

   $$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \le i \le 3$$

   $$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3,\ \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1,\ \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

   是 Lagrange 二次元节点基函数.

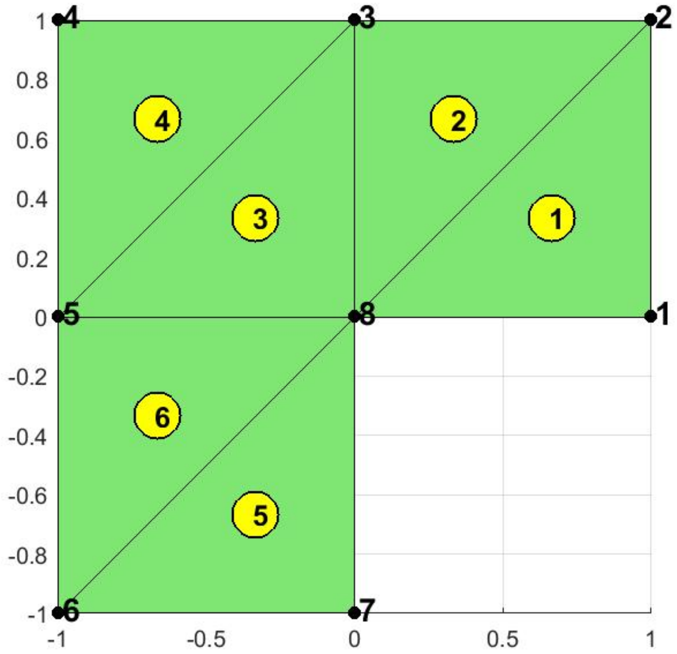

Figure 1: 网格图

Proof. 直接代入计算可得

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 0(2*0-1) = 0, \quad i = 2,3,4$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = \frac{1}{2}(2*\frac{1}{2}-1) = 0, \quad i = 5,6$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 1(2*1-1) = 1, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*0*0 = 0, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*\frac{1}{2}*0 = 0, \quad i = 5,6$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*1*0 = 0, \quad i = 2,3$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = 1, \quad i = 4$$

由对称性以及 Lagrange 元定义，可得 $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$, 从而 ϕ 是 Lagrange 二次元节点基函数 □

4. 证明如下定义的 Hermite 空间属于 $H^1(\Omega)$

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_3(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v\text{在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续}, \nabla v\text{在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续}\}$$

(Hint: 要证 $V_h \subset H^1(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}$)

证明. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.

记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_3 的多项式.

记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2, 根据 V_h 定义，有

$$w(z_1) = w_(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$. 即 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$ □

5. 证明如下定义的 Argyris 空间属于 $H^2(\Omega)$

$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_5(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v$和其一阶以及二阶导数在$\mathcal{T}_h$的所有顶点连续，在

$\mathcal{T}_h$的所有边中点，v关于该边的法向导数连续$\}$

(Hint: 要证 $V_h \subset H^2(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}, \nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$)

证明. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.

记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_5 的多项式.

记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2, 中点为 z_0, 根据 V_h 定义，有

$$w(z_1) = w_(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

$$w''_L(z_1) = w''_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$, 进而 $w'_L|_L = 0$.

考虑 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}$ 与 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}, \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$.

记 $r := \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1} - \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$, 则 r 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_4 的多项式.

根据 V_h 定义, 有

$$r(z_1) = r(z_2) = r(z_0) = 0$$

$$r'_L(z_1) = r'_L(z_2) = 0$$

从而有 $r|_L \equiv 0$.

结合上述讨论, 可得 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$, $\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$ □