# 2024.04.08

1. 利用 $Young$ 不等式证明 $H\ddot{o}lder$ 不等式.

   **定理 1.** *($Young$ 不等式)*

   设 $p > 1, q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对 $\forall a, b \geq 0$, 有

   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1}$$

   **定理 2.** *($H\ddot{o}lder$ 不等式)*

   对 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega), 1 \leqslant p, q \leqslant +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

   $$\|fg\|_{0,1,\Omega} \leqslant \|f\|_{0,p,\Omega}\|g\|_{0,q,\Omega}. \tag{2}$$

   *证明.* 若 $\|f\|_{0,p,\Omega} = 0$ (或 $\|g\|_{0,q,\Omega} = 0$), 则 $f(\boldsymbol{x}) = 0$(或 $g(\boldsymbol{x}) = 0$), a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 进而 $f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = 0$, a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 此时 (2)左侧与右侧均为 0, 成立.

   否则 $\|f\|_{0,p,\Omega} \neq 0, \|g\|_{0,q,\Omega} \neq 0$. 取 $a = \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}}, b = \frac{|g(\boldsymbol{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}}$, 代入 (1)式后两边在 $\Omega$ 上积分, 得到

   $$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}} \frac{|g(\boldsymbol{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}} dx &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^p dx}{\|f\|_{0,p,\Omega}^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^q dx}{\|g\|_{0,q,\Omega}^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1\end{aligned}$$

   整理即得(2).

   □

2. 证明 $W^{1,p}$ 是 Banach 空间.(利用 $L^p$ 完备)

   *证明.* 直接证明 $W^{m,p}$ 是 Banach 空间. 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 在 Sobolev 范数下是完备的.

   令 $\{v_j\} \subset W^{m,p}(\Omega)$ 是 Cauchy 列, 即 $\{D^\alpha v_j : |\alpha| \leq m\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 由于 $L^p(\Omega)$ 是完备的, 从而存在 $v_\alpha \in L^p(\Omega)(|\alpha| \leq m)$, 使得 $D^\alpha v_j \to v_\alpha$ 在 $L^p(\Omega)$ 中, 当 $j \to \infty$ 时. 余下只要证明 $v_\alpha = D^\alpha v$, 即 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,

   $$\int_\Omega v_\alpha \cdot \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi dx.$$

   事实上,

   $$\begin{aligned}\int_\Omega v_\alpha \cdot \varphi dx &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha v_j \cdot \varphi \mathrm{d}x \\ &= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_j \cdot \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi dx.\end{aligned}$$

   □

3. 设 $\Omega=(-1,1)$，

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ -x, & -1<x<0\end{cases}$$

证明

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$$

是 $f$ 的一阶广义导数.

*证明.* $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=|x|=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$$

显然 $g$ 是局部 Lesbegue 可积函数, 故 $g$ 是 $f$ 的一阶广义导数. □

4. 推导 Poisson 方程的混合边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f,\ \text{在}\Omega\ \text{内}\\ u|_{\Gamma_1}=g_1\\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2}=g_2\end{cases}\tag{3}$$

的变分形式, 这里 $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, 且 $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$. 并证明古典解和弱解在一定条件下等价.

*解.* 设 $V=\{v\ |v\in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1}=0\}$.

对任意 $v\in V$, 用 Green 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{dx}-\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{ds}=\int_\Omega fv\mathrm{dx}\\ \Rightarrow&\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{dx}=\int_\Omega fv\mathrm{dx}+\int_{\Gamma_2}g_2v\mathrm{ds}\end{aligned}$$

则问题(3)的变分形式是: 求 $u\in H^1(\Omega)$ 且 $u|_{\Gamma_1}=g_1$ 使得

$$a(u,v)=(f,v)+\int_{\Gamma_2}g_2v\mathrm{ds},\quad\forall v\in V.\tag{4}$$

**定理 3.** 设 $f \in C(\overline{\Omega}), g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. 如果 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ 是问题(3)的古典解, 则它是弱解. 反过来, 如果 $u$ 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 则它是古典解.

证明. 第一个结论显然.

如果 $u$ 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 立得 $u|_{\Gamma_1} = g_1$.

第一步在(4)中取 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 利用 Green 公式和 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 得到

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \mathrm{dx} = 0.$$

推出 $\Delta u + f = 0$. 第二步在 (4) 中取 $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 且 $v|_{\Gamma_1} = 0$, 注意到 $\Delta u + f = 0$, 可得

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{ds} = \int_{\Gamma_2} g_2 v \mathrm{ds}$$

由 $v$ 的任意性得到 $u$ 满足边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = g_2$.

三个条件均满足，故 $u$ 是古典解. $\square$