2024.05.23

1. 证明二维单元 K 上迹定理

$$|e|^{-1}\|\xi\|_{0,e}^2 \le C\Big(h_K^{-2}\|\xi\|_{0,K}^2 + |\xi|_{1,K}^2\Big),\ \forall \xi \in H^1(K)$$

Hint: 利用仿射变换以及尺度 (scailing) 技巧

Proof. 考虑参考单元 $\hat{K}$, 满足 $|\hat{e}| = 1$.

$$C(\|\hat{\xi}\|_{0,\hat{K}}^2 + |\hat{\xi}|_{1,\hat{K}}^2) = C\|\hat{\xi}\|_{1,\hat{K}}^2 \ge \|\hat{\xi}\|_{0,\hat{e}}^2 = \int_{\hat{e}} \hat{\xi}^2 d\hat{s} = \int_e \xi^2 \frac{|\hat{e}|}{|e|} ds = |e|^{-1}\|\xi\|_{0,e}^2$$

结合尺度变换关系以及

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{K}} \le C\,\|B\|^m\,|\text{det}B|^{-1/p}|v|_{m,p,K}$$

代入 $p = 2, m = 2$ 即得证.

□

2. 对于一维单元 e 证明

$$\left\|\xi - P_e^0\xi\right\|_{0,e} \le \frac{|e|}{\pi}|\xi|_{1,e}\,,\ \forall \xi \in H^1(e)$$
$$\|\xi\|_{0,e} \le \frac{|e|}{\pi}|\xi|_{1,e}\,,\ \forall \xi \in H_0^1(e)$$

Hint: 考虑特征值问题 $-\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} = \lambda\xi$ 在 $\xi \in H^1(e)$ 和 $\xi \in H_0^1(e)$ 的特征函数以及最小特征值

Proof. 只需证第二个式子，不妨设一维单元 $e = [0, L]$.
考虑 $-\xi'' = \lambda\xi, \xi(0) = \xi(L) = 0$ 的特征值 $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z}^*$.
有

$$\int_0^L -\xi''\xi d\xi = \lambda\int_0^L \xi^2 d\xi$$

分部积分

$$\int_0^L (\xi')^2 d\xi = \lambda\int_0^L \xi^2 d\xi$$
$$\lambda\|\xi\|_{0,e}^2 = |\xi|_{1,e}^2$$

注意到最小特征值 $\lambda = \frac{\pi^2}{L^2}$, 进而

$$\frac{\pi^2}{L^2}\|\xi\|_{0,e}^2 \leq |\xi|_{1,e}^2$$

□

3. 证明

$$\|v - P_e v\|_{0,e} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v - c\|_{0,e}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|v - P_e v\|_{0,e}^2 &= \int_e \left(v - \frac{1}{|e|}(\int_e v ds)^2 \right) ds \\
&= \int_e v^2 ds - \frac{1}{|e|}(\int_e v ds)^2 \\
&\geq \int_e v^2 ds - 2c\int_e v ds + c^2|e| \qquad \text{（均值不等式）} \\
&= \int_e (v-c)^2 ds \\
&= \|v - c\|_{0,e}^2
\end{aligned}$$

□

4. 证明 Morley 元的 H^1 范数误差估计

Proof. 令 $\Pi_{h_0}^p, \Pi_{h_0}^{p,2}$ 为一次 Lagrange 元与二次 Lagrange 元的协调元插值算子. 记 $w_h = \Pi_{h_0}^p u$.

由协调元插值误差估计以及庞加莱不等式，有

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,h} &\leqslant \|u - w_h\|_{1,h} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} \\
&\quad + \|w_h - u_h - \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,h} \\
&\lesssim |u - w_h|_{1,h} + h|w_h - u_h|_{2,h} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} \\
&\lesssim h^2|u|_{3,\Omega} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{1}$$

下面估计 $\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega}$, 注意到:

$$\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} = \sup_{0\neq g\in L^2(\Omega)} \frac{|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h))|}{\|g\|_{-1,\Omega}} \tag{2}$$

只需估计 $|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h))|$, 对 $g \in L^2(\Omega)$, 令 $\phi_g \in H_0^2(\Omega)$ 和 $\phi_{gh} \in V_{h_0}$ 分别是下面问题的解：

$$a(v, \phi_g) = (g, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

$$a_h(v_h, \phi_{gh}) = (g, \Pi_{h0}^{p,2} v_h), \quad \forall v_h \in V_{h0}.$$

由 H^2 范数误差估计以及椭圆方程正则性结果，得

$$|\phi_g - \phi_{gh}|_{2,h} \lesssim h|\phi_g|_{3,\Omega}, \quad \|\phi_g\|_{3,\Omega} \lesssim \|g\|_{-1,\Omega} \tag{3}$$

我们有

$$\begin{aligned}(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)) &= a_h(w_h - u_h, \phi_{gh}) \\ &= a_h(u - w_h, \phi_g - \phi_{gh}) + (a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g)) \\ &\quad + \Big(a_h(w_h - u, \phi_g) - (g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u))\Big) + (g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)).\end{aligned}$$

下面只需要对上式右侧的四项分别估计：

对第一项，由算子有界性、协调元插值误差以及(3), 有

$$|a_h(u - w_h, \phi_g - \phi_{gh})| \lesssim h^2|u|_{3,\Omega}\|g\|_{-1,\Omega}. \tag{4}$$

对第四项, 有

$$|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u))| \lesssim \|g\|_{-1,\Omega}\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)\|_{1,\Omega}.$$

由逆不等式与插值误差估计，有

$$\begin{aligned}|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{T \in T_h} |\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{1,T}^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in T_h} h_T^{-2}|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{0,T}^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in T_h} h_T^{-2}|w_h - u|_{0,T}^2 \lesssim h^4|u|_{3,\Omega}^2,\end{aligned}$$

再利用庞加莱不等式，得到

$$\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)\|_{1,\Omega} \lesssim h^2|u|_{3,\Omega} \tag{5}$$

对第二项，记

$$e_{h1} = \phi_{gh} - \Pi_{h0}^p \phi_g, \quad e_{h2} = \Pi_{h0}^p \phi_g - \phi_g,$$

则

$$\begin{aligned}&a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \Big(a_h(u, e_{hi}) - (f, \Pi_{h0}^p e_{hi}) - (f, e_{hi} - \Pi_{h0}^p e_{hi})\Big).\end{aligned}$$

令 $i \in \{1, 2\}$. 由 Morley 元相容项误差估计，有

$$\left|a_h(u, e_{hi}) - (f, \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi})\right| \lesssim |u|_{3,\Omega} \left(h|e_{hi}|_{2,h} + |e_{hi} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi}|_{1,h}\right).$$

另一方面，

$$|(f, e_{hi} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi})| \lesssim \|f\|_{0,\Omega} \|e_{hi} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi}\|_{0,\Omega}.$$

由协调元误差估计，得到

$$\|e_{h1} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{h1}\|_{0,\Omega} + h\|e_{h1} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{h1}\|_{1,h} \lesssim h^2 |e_{h1}|_{2,h}.$$

对于 e_{h2}, 类似于式(5) 有

$$\|\Pi_{h0}^{p,2} e_{h2}\|_{1,\Omega} \lesssim h^2 |\phi_g|_{3,\Omega}.$$

由协调元插值误差，有

$$|e_{h2}|_{1,\Omega} \lesssim h^2 |\phi_g|_{3,\Omega}.$$

$$\|e_{h2} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{h2}\|_{0,\Omega} \lesssim \|e_{h2}\|_{0,\Omega} \lesssim h^3 |\phi_g|_{3,\Omega}.$$

总结上面的讨论得到

$$|a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g)| \lesssim h^2 (|u|_{3,\Omega} + h\|f\|_{0,\Omega}) |\phi_g|_{3,\Omega}.$$

结合(3), 得到

$$|a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g)| \lesssim h^2 (|u|_{3,\Omega} + h\|f\|_{0,\Omega}) \|g\|_{-1,\Omega} \tag{6}$$

对第三项，与第二项做类似讨论可得

$$|a_h(w_h - u, \phi_g) - (g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u))| \lesssim h^2 |u|_{3,\Omega} \|g\|_{-1,\Omega}. \tag{7}$$

结合式(1)(2)(3)(5)(6)(7), 得到 Morley 元 H^1 误差估计：

$$\|u - u_h\|_{1,h} \lesssim h^2 \left(|u|_{3,\Omega} + h\|f\|_{0,\Omega}\right).$$

□