2024.06.03

1. 验证 Stokes 问题的 inf-sup 条件证明中 v₂ 满足

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \ \mathbf{v}_2 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0, \ \mathbf{v}_2 \cdot \tau|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1 \cdot \tau|_{\partial\Omega}$$

Proof.

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_{2} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \psi = \frac{\partial^{2} \psi}{\partial x_{1} \partial x_{2}} - \frac{\partial^{2} \psi}{\partial x_{2} \partial x_{1}} = 0$$

$$\mathbf{v}_{2} \cdot \nu|_{\partial \Omega} = \operatorname{curl} \cdot \nu|_{\partial \Omega} = \nabla \psi \cdot \tau|_{\partial \Omega} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}|_{\partial \Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}_{2} \cdot \tau|_{\partial \Omega} = \operatorname{curl} \psi \cdot \tau|_{\partial \Omega} = \nabla \psi \cdot \nu|_{\partial \Omega} = -\frac{\partial \psi}{\partial \nu}|_{\partial \Omega} = -\mathbf{v}_{1} \cdot \tau|_{\partial \Omega}$$

- 2. 证明在 $P_2 P_0$ 元分析中构造的插值算子 Π_h^2 满足以下三条性质
 - (a) $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Proof. 由 $v \in H^1(\Omega)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边两个端点处连续 (=0),在公共边积分值连续 ($\int_{e_i} \Pi_h^2 v ds = \int_{e_i} v ds$).

由 $\Pi_h^2 v|_K \in P_2(K)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边上连续,即 $\Pi_h^2 v \in H^1(\Omega)$.

类似的,由 $v \in H_0^1(\Omega)$,可得 $\Pi_h^2 v$ 在边界为 0,即 $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega)$.

(b)
$$\|\Pi_h^2 v\|_{0,K} \le C (\|v\|_{0,K} + h_K |v|_{1,K}), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. 通过尺度变换技巧变换到参考单元:

$$|\Pi_h^2 v|_{1,K} = |\widehat{\Pi_h^2 v}|_{1,\hat{K}} \le C||\hat{v}||_{1,\hat{K}} \le C(h_K^{-1}|v|_{0,K} + |v|_{1,K}).$$

再利用逆估计得到结果.

(c) $b(\Pi_h^2 \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h), \forall q_h \in Q_h$

Proof. 由 $\Pi_h^2 v$ 的定义有

$$\int_{e} (v - \Pi_{h}^{2}v) \cdot \nu q_{h} ds = 0, \quad \forall q_{h} \in Q_{h}, \quad \forall e \in \partial K$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} (v - \Pi_{h}^{2}v) \cdot \nu q_{h} ds = 0, \quad \forall q_{h} \in Q_{h}$$

$$\Rightarrow \int_{K} \operatorname{div}(v - \Pi_{h}^{2}v) q_{h} dx = 0, \quad \forall q_{h} \in Q_{h}, \quad \forall K \subset \Gamma_{h}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{div}(v - \Pi_{h}^{2}v) q_{h} dx = 0, \quad \forall q_{h} \in Q_{h}$$

$$\Rightarrow b(v - \Pi_{h}^{2}v, q_{h}) = 0, \quad \forall q_{h} \in Q_{h}$$

3. 证明 Stokes 离散问题的分析中构造的 Fortin 插值 Π_h 满足误差估计

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch |u|_{2,\Omega}$$

思考当 $u \in H^3(\Omega)$ 时,是否有

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch^2 |u|_{3,\Omega}$$

Proof.

$$u - \Pi_h u = u - \Pi_h^1 u - \Pi_h^2 (u - \Pi_h^1 u)$$

其中 Π_h^1 为 Scott-Zhang 插值. 有

$$||u - \Pi_h u||_{1,\Omega} \le ||u - \Pi_h^1 u||_{1,\Omega} + ||\Pi_h^2 (u - \Pi_h^1 u)||_{1,\Omega}$$

对于第一项,利用 Scott-Zhang 插值误差结果

$$||u - \Pi_h^1 u||_{1,\Omega} \le ch|u|_{2,\Omega}$$

对第二项,利用逆估计

 $\|\Pi_h^2(u-\Pi_u^1)\|_{1,K} \leq Ch_K^{-1}\|\Pi_h^2(u-\Pi_h^1u)\|_{0,K} \leq Ch_K^{-1}(\|u-\Pi_h^1u\|_{0,K}+h_K|u-\Pi_h^1u|_{1,K})$ 再利用 Scott-Zhang 插值误差结果

$$||u - \Pi_h^1 u||_{0,\Omega} \le Ch^2 |u|_{2,\Omega}$$

故

$$\|\Pi_h^2(u - \Pi_h^1 u)\|_{1,\Omega} \le Ch|u|_{2,\Omega}$$

因此

$$||u - \Pi_h u||_{1,\Omega} \le Ch |u|_{2,\Omega}$$

当 $u \in H^3(\Omega)$ 时,证明方法类似.

4. 证明 $P_1 - P_0$ 元不满足离散的 LBB 条件.(Hint: 可通过数维数的方法导出这时 $\dim V_h < \dim Q_h$, 从而说明存在 $q_h \in Q_h$ 使得 $b(v_h, q_h) = 0. \forall v_h \in V_h$)

Proof. 对于给定的剖分,记 t 为三角形数量, v_I 为内部顶点数量, v_B 为边界顶点数量。由欧拉公式,有 $t=2v_I+v_B-2$.

由空间定义,我们有 $\dim V_h = 2v_I$, $\dim Q_h = t - 1$.

定义算子 $B_h: V_h \to Q_h'$, 使得 $\int_{\Omega} (B_h(v_h) - \nabla \cdot v_h) q_h dx = 0$, $\forall q_h \in Q_h$, 并记其对偶算子为 $B_h^{\top}: Q_h \to V_h'$.

当 $v_B > 3$ 时,有

 $\dim(\ker(B_h^\top)) = \dim(Q_h) - \dim(\operatorname{im}(B_h^\top)) \ge \dim(Q_h) - \dim(V_h) = t - 1 - 2v_I = v_B - 3 > 0$ 从而存在 $q_h \in Q_h$ 使得 $b(v_h, q_h) = 0. \forall v_h \in V_h$