2024.06.03

1. 验证 Stokes 问题的 inf-sup 条件证明中 $\mathbf{v}_2$ 满足

$$\mathrm{div}\mathbf{v}_2 = 0,\ \mathbf{v}_2 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0,\ \mathbf{v}_2 \cdot \tau|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1 \cdot \tau|_{\partial\Omega}$$

Proof.

$$\mathrm{div}\ v_2 = \mathrm{div}\ \mathrm{curl}\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = \mathrm{curl} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = \nabla\psi \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\tau}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \mathrm{curl}\psi \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \nabla\psi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1 \cdot \tau|_{\partial\Omega}$$

□

2. 证明在 $P_2 - P_0$ 元分析中构造的插值算子 Π_h^2 满足以下三条性质

(a) $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Proof. 由 $v \in H^1(\Omega)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边两个端点处连续 (=0)，在公共边积分值连续 ($\int_{e_i} \Pi_h^2 v ds = \int_{e_i} v ds$).
由 $\Pi_h^2 v|_K \in P_2(K)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边上连续，即 $\Pi_h^2 v \in H^1(\Omega)$.
类似的，由 $v \in H_0^1(\Omega)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在边界为 0，即 $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega)$. □

(b) $\|\Pi_h^2 v\|_{0,K} \le C\left(\|v\|_{0,K} + h_K |v|_{1,K}\right), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. 通过尺度变换技巧变换到参考单元：

$$|\Pi_h^2 v|_{1,K} = |\widehat{\Pi_h^2 v}|_{1,\hat{K}} \le C||\hat{v}||_{1,\hat{K}} \le C(h_K^{-1}|v|_{0,K} + |v|_{1,K}).$$

再利用逆估计得到结果. □

(c) $b(\Pi_h^2 \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h), \forall q_h \in Q_h$

Proof. 由 $\Pi_h^2 v$ 的定义有

$$\begin{aligned}
&\int_e (v - \Pi_h v) \cdot \nu q_h ds = 0, \quad \forall e \in \partial K \\
\Rightarrow &\int_{\partial K} (v - \Pi_h v) \cdot \nu q_h ds = 0 \\
\Rightarrow &\int_K \mathrm{div}(v - \Pi_h v) q_h dx = 0, \quad \forall K \subset \Gamma_h \\
\Rightarrow &\int_\Omega \mathrm{div}(v - \Pi_h v) q_h dx = 0 \\
\Rightarrow &b(v - \Pi_h v, q_h) = 0
\end{aligned}$$

□

3. 证明 Stokes 离散问题的分析中构造的 Fortin 插值 Π_h 满足误差估计

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq Ch\,|u|_{2,\Omega}$$

思考当 $u \in H^3(\Omega)$ 时，是否有

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq Ch^2\,|u|_{3,\Omega}$$

Proof. 由 Π_h 的有界性，利用投影算子仿照局部插值误差估计证明过程即可.

即利用

$$\|v - \Pi_h v\|_{i,p,K} \leq C\left\|B^{-1}\right\|^i |\det B|^{1/p}\left\|\widehat{v} - \Pi_{\widehat{h}}\widehat{v}\right\|_{i,p,\widehat{K}}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{v} - \Pi_{\widehat{h}}\widehat{v}\right\|_{i,p,\widehat{K}} &\leq \left\|\widehat{v} - \Pi_{\widehat{h}}\widehat{v}\right\|_{m,p,\widehat{K}} \quad \text{(参考单元上范数等价)}\\
&\leq \|\widehat{v} - P_{m-1}\widehat{v}\| + \left\|P_{m-1}\widehat{v} - \Pi_{\widehat{h}}\widehat{v}\right\|_{m,p,\widehat{K}}\\
&= \|\widehat{v} - P_{m-1}\widehat{v}\| + \left\|\Pi_{\widehat{h}}(P_{m-1}\widehat{v} - \widehat{v})\right\|_{m,p,\widehat{K}}\\
&\leq (1+\sigma(\widehat{K}))C(m,n,\widehat{\gamma})\,|\widehat{v}|_{m,p,\widehat{K}}\\
&\leq (1+\sigma(\widehat{K}))C(m,n,\widehat{\gamma})\,\|B\|^m\,|\det B|^{-1/p}|v|_{m,p,K}
\end{aligned}$$

再结合网格正则性得到插值误差估计. □

4. 证明 $P_1 - P_0$ 元不满足离散的 LBB 条件.(Hint: 可通过数维数的方法导出这时 $\dim V_h < \dim Q_h$, 从而说明存在 $q_h \in Q_h$ 使得 $b(v_h, q_h) = 0.\forall v_h \in V_h$)

Proof. 对于给定的剖分，记 t 为三角形数量，v_I 为内部顶点数量，v_B 为边界定点数量. 由欧拉公式，有 $t = 2v_I + v_B - 2$.

由空间定义，我们有 $\dim V_h = 2v_I, \dim Q_h = t - 1$.

定义算子 $B_h : V_h \to Q_h{}'$, 使得 $\int_\Omega (B_h(v_h) - \nabla \cdot v_h) q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h$, 并记其对偶算子为 $B_h^\top : Q_h \to V_h{}'$.

当 $v_B > 3$ 时，有

$$\dim(\ker(B_h^\top)) = \dim(Q_h) - \dim(\mathrm{im}(B_h^\top)) \geq \dim(Q_h) - \dim(V_h) = t - 1 - 2v_I = v_B - 3 > 0$$

从而存在 $q_h \in Q_h$ 使得 $b(v_h, q_h) = 0.\forall v_h \in V_h$ □