2024.04.15

1. 推导 $\int_\Omega v\Delta^2 u \text{ dx} - \int_\Omega \Delta u\Delta v \text{ dx}$ 边界项

解. 给定 $u, v \in H^1(\Omega)$, 根据 Green 公式：对 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\partial_i u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma uvn_i \mathrm{d}s \tag{1}$$

若 $u \in H^2(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega)$, 则可用 $\partial_i u$ 代替(1)式中的 u, 可得

$$\int_\Omega \partial_i u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\partial_{ii} u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \partial_i uvn_i \mathrm{d}s$$

对 i 从 1 到 n 求和可得

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{2}$$

若 $v \in H^2(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega)$, 类似地有

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u\Delta v \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{3}$$

则当 $u, v \in H^2(\Omega)$,(2)(3)两式相减，得：

$$\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\big) \mathrm{d}s, \forall u, v \in H^2(\Omega) \tag{4}$$

若 $u \in H^4(\Omega), v \in H^2(\Omega)$., 则可用 Δu 代替(4)中的 u, 可得

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega v\Delta^2 u \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Gamma v\frac{\partial \Delta u}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_\Gamma \Delta u\frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s$$

2. 当双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 对称时，利用 $a(\cdot,\cdot)$ 可定义 V 上的新内积和 Riesz 表示定理证明 Lax-Milgram 定理 (根据注的提示)

定理 1. *(Lax-Milgram 定理)*

设 V 是一个 Hilbert 空间，$a(u, v)$ 是 $V \times V$ 上的对称、连续、强制的双线性形式，f 是 V 中的线性连续泛函，则变分问题

$$\text{求} u \in V, \text{ 使得} a(u, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V,$$

存在唯一解 u^*, 且满足范数估计

$$\|u^*\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V^*},$$

证明. 因 $a(u,v)$ 是对称、正定的，故可在 V 上定义新内积 $[u,v] \triangleq a(u,v)$, 且

$$\alpha\|u\|_V^2 \leqslant [u,u] \leqslant M\|u\|_V^2,$$

其中左侧由强制性, 右侧由连续性.

新定义的内积所确定的范数 $\sqrt{a(u,u)}$ 与范数 $\|\cdot\|_V$ 等价. 对于 V 的新范数 $\sqrt{a(u,u)}$ 而言 f 仍是线性连续泛函. 根据 Riesz 表示定理可知，存在唯一的 $u^* \in V$ 使得

$$[u^*, v] = \langle f, v \rangle, \quad \forall\, v \in V,$$

即

$$a(u^*, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall\, v \in V.$$

于是 u^* 就是变分问题的唯一解. 另一方面

$$\alpha\|u^*\|_V^2 \leqslant a(u^*, u^*) = [u^*, u^*] = \langle f, u^* \rangle \leqslant \|f\|_{V^*}\|u^*\|_V.$$

从而得到范数估计. □

3. 证明 Poincaré 不等式

$$\|v\|_{m,\Omega}^2 \leq C_2\Big(|v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<m}\Big(\int_\Omega \partial^\alpha v \mathrm{dx}\Big)^2\Big), \forall v \in H^m(\Omega), \tag{5}$$

证明. 利用反证法. 假设(5)不成立. 对每个正整数 k, 存在 $v_k \in H^m(\Omega)$ 使

$$\|v_k\|_{m,\Omega}^2 > k\Big(|v_k|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<m}\Big(\int_\Omega \partial^\alpha v_k \mathrm{dx}\Big)^2\Big).$$

不失一般性，设 v_k 满足

$$\|v_k\|_{m,\Omega} = 1,\ k = 1, 2, \cdots,$$

这样有

$$\lim_{k\to\infty} |v_k|_{m,\Omega} = 0.$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \partial^\alpha v_k \mathrm{dx} = 0, \quad \forall \alpha \quad s.t. |\alpha| < m$$

因为 $\{v_k\}$ 是 $H^m(\Omega)$ 的有界序列，所以存在 $v_\infty \in H^m(\Omega)$ 和一个子列 (仍记为 $\{v_k\}$) 满足：$\{v_k\}$ 弱收敛于 v_∞. 利用嵌入定理 $H^m(\Omega)\overset{c}{\hookrightarrow}H^{m-1}(\Omega)$, 在 $H^{m-1}(\Omega)$ 中 $\{v_k\}$ 强收敛于 v_∞.

于是

$$\lim_{k,\ell\to\infty}\|v_k - v_\ell\|_{m,\Omega} \le \lim_{k,\ell\to\infty}(\|v_k - v_\ell\|_{m-1,\Omega} + |v_k - v_\ell|_{m,\Omega}) = 0.$$

因此 $\{v_k\}$ 是 $H^m(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，进而 $\{v_k\}$ 在 $H^m(\Omega)$ 中强收敛于 v_∞. 由极限得到 $\|v_\infty\|_{m,\Omega} = 1$ 和 $|v_\infty|_{m,\Omega} = 0$, 即 v_∞ 是一个 $m-1$ 次多项式.

注意到

$$\int_\Omega \partial^\alpha v_\infty \mathrm{dx} = 0, \quad \forall\alpha \quad s.t.\ |\alpha| < m$$

,

可得 $v_\infty \equiv 0$. 与 $v_\infty \neq 0$ 矛盾. 上面讨论可推出 Poincaré 不等式成立.

□

4. 考虑 Robin 边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u + \alpha(x)u = f,\ \text{在}\Omega\text{上}\\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u)\ |_{\partial\Omega} = g\end{cases} \tag{6}$$

这里 $\alpha(x) \ge \alpha_0 > 0, \beta(x) \ge 0$ 以及 f 均为足够光滑的已知函数

(i) 试建立该边值问题的变分问题

(ii) 讨论变分问题解的存在唯一性 (适定性)

解. (i) 对任意 $v \in H^1(\Omega)$, 用 Green 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{ds} = \int_\Omega fv\mathrm{dx}\\ &\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega}\beta(x)uv\mathrm{ds} = \int_\Omega fv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{ds}\end{aligned}$$

则问题(6)的变分形式是: 求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得

$$a(u,v) = (f,v) + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{ds}, \quad \forall v \in V. \tag{7}$$

其中 $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega}\beta(x)uv\mathrm{ds}$.

(ii) 只需要验证 Lax-Milgram 定理的条件：

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u)^2 + \alpha(x)u^2 \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \beta(x)u^2 \mathrm{ds} \\
&\geqslant \int_\Omega (\nabla u)^2 + \alpha(x)u^2 \mathrm{dx} \\
&\geqslant \min\{1,\alpha_0\}\|u\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}
$$

从而 $a(u,v)$ 满足强制性

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant |u|_{1,\Omega}\cdot|v|_{1,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\alpha(\boldsymbol{x})\cdot\|u\|_{0,\Omega}\cdot\|v\|_{0,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\beta(\boldsymbol{x})\cdot\|u\|_{0,\partial\Omega}\cdot\|v\|_{0,\partial\Omega} \\
&\leqslant (1+\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\alpha(\boldsymbol{x})+\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\beta(\boldsymbol{x}))\|u\|_{1,\Omega}\cdot\|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u,v\in V
\end{aligned}
$$

其中上式第一行用到了柯西积分不等式，第二行用到了范数性质以及迹定理.
从而 $a(u,v)$ 满足连续性.

$$
\left|\int_\Omega fv\mathrm{dx}\right| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}
$$

$$
\left|\int_\Omega gv\mathrm{ds}\right| \leq \|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C\|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_{1,\Omega}
$$

从而得到右端泛函有界性.

综上，利用 Lax-Milgram 定理，变分问题(7)的解存在且唯一.