作业

(1) 验证Stokes问题的inf-sup条件证明中$\mathbf{v}_2$满足

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_2 = 0,\ \mathbf{v}_2\cdot\nu|_{\partial\Omega} = 0,\ \mathbf{v}_2\cdot\tau|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1\cdot\tau|_{\partial\Omega}$$

(2) 证明在$P_2 - P_0$元分析中构造的插值算子Π_h^2满足以下三条性质

$$(1)\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(2)\ \left\|\Pi_h^2 v\right\|_{0,K} \le C\left(\|v\|_{0,K} + h_K\,|v|_{1,K}\right),\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(3) b(\Pi_h^2\mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h)\ \forall q_h \in Q_h$$

(3) 证明Stokes离散问题的分析中构造的Fortin插值Π_h满足误差估计

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch\,|u|_{2,\Omega}$$

思考当$u \in H^3(\Omega)$时，是否有

$$\|\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch^2\,|u|_{3,\Omega}$$

(4) 证明$P_1 - P_0$元不满足离散的LBB条件. (Hint: 可通过数维数的方法导出这时$\dim V_h < \dim Q_h$，从而说明存在$q_h \in Q_h$使得$b(v_h, q_h) = 0. \forall v_h \in V_h$)