2024.05.27

1. 证明 Poisson 问题的混合变分形式的弱解在一定光滑条件下是古典解

   Poisson 问题：

$$\begin{cases} \mathbf{p} - \nabla u = 0 \\ div\mathbf{p} = -f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

   混合变分形式：求 $(\mathbf{p}, u) \in H(\mathrm{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, 使

$$\begin{cases} \int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u dx = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \\ \int_\Omega div\mathbf{p} v dx = \int_\Omega -f v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

   Proof. 当解足够光滑，由 $\int_\Omega div\mathbf{p} v = \int_\Omega -f v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$，有

$$\int_\Omega (div\mathbf{p} + f) v dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

   由 v 的任意性，得到 $div\mathbf{p} + f = 0$. 即 $div\mathbf{p} = -f$.

   在 $\int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u dx = 0$ 中取 $\forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H_0^1(\Omega))^2$, 得到

$$\int_\Omega \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \nabla u) dx = 0$$

   由 $\mathbf{q}$ 的任意性，得到 $\mathbf{p} - \nabla u = 0$.

   再在 $\int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u = 0$ 中取 $\forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, 得到

$$\int_{\partial\Omega} u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

   由 $\mathbf{q}$ 的任意性，得到 $u|_{\partial\Omega} = 0$. □

2. 推导 Stokes 问题的混合变分形式

   Stokes 问题:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Proof. 在 $-\Delta\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f}$ 中，对 $\forall\mathbf{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$ 有

$$\int_\Omega -\Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\nabla p\mathbf{v}dx=\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}dx$$

利用两次 Green 公式和 $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega}=0$ 以及散度积分公式可得

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}+div\mathbf{v}pdx=\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}dx$$

在 $div\mathbf{u}=0$ 中，对 $\forall q\in L_0^2(\Omega)$，有

$$\int_\Omega div\mathbf{u}qdx=0$$

得到混合变分形式. □

3. 证明 inf-sup 条件的定理中 (3) 等价于 (1) 和 (2).

Proof. 已有 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3):

假设 (2) 成立，则对给定的 $u\in U^\perp$, 定义函数 $g\in U'$ 如下

$$g(w)=(u,w),\quad \forall w\in U \tag{$*$}$$

容易验证 $g\in U^0$, 又因为 B' 是 V 到 U^0 的同构，故存在 $\lambda\in V$, 使

$$b(w,\lambda)=(w,B'\lambda)=g(w) \tag{$\star$}$$

又由 $(*)$ 易证 $||g||_{U'}=||u||_U$, 从而

$$||u||_U=||g||_{U'}=||B'\lambda||_{U'}\geq\beta||\lambda||_V.$$

在 $(\star)$ 中令 $w=u$, 则有

$$\sup_{v\in V}\frac{b(u,v)}{||v||_V}\geq\frac{b(u,\lambda)}{||\lambda||_V}=\frac{(u,u)}{||\lambda||_V}\geq\beta||u||_U,$$

从而 $B:U^\perp\to V'$ 满足 Babuška 定理的三个条件，故 B 是一个同构映射.

(3) $\Rightarrow$ (1):

因 (3) 成立，故 $B:U^\perp\to V'$ 是一个同构，对给定的 $v\in V$,

$$\begin{aligned}||v||_V&=\sup_{g\in V'}\frac{\langle g,v\rangle}{||g||_{V'}}=\sup_{u\in U^\perp}\frac{\langle Bu,v\rangle}{||Bu||_{V'}}\\&=\sup_{u\in U^\perp}\frac{b(u,v)}{||Bu||_{V'}}\leq\sup_{u\in U^\perp}\frac{b(u,v)}{\beta||u||_U}\leq\frac{1}{\beta}\sup_{u\in U}\frac{b(u,v)}{||u||_U},\end{aligned}$$

从而 (1) 成立，证毕.

□

4. 如果 $\dim U_h = \dim V_h$, 离散的 inf-sup 条件

$$\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \beta_h > 0$$

成立. 说明离散问题：求 $u_h \in U_h$ 使得

$$b(u_h, v_h) = \langle f, v \rangle_{V' \times V}$$

存在唯一解.

(注：该结果说明对于离散问题只需验证 Babuška 定理中 (b) 对应的离散形式和维数相等，无需验证 (c) 的离散形式)

Proof. 定义算子 B 以及对偶算子 B'

$$B : U \to V' < Bu, v >_{V' \times V} = b(u, v) \quad \forall u \in U, v \in V$$

$$B' : V \to U' < B'v, u >_{U' \times U} = b(u, v) \quad \forall u \in U, v \in V.$$

当 $\dim U = \dim V$ 时，根据闭值域定理, 算子 B 有连续逆算子 $B^{-1} : V' \to U$,B' 有连续逆算子 $(B')^{-1} : U' \to V$, 满足

$$\|(B')^{-1}\| = \|(B^{-1})'\| = \|B^{-1}\|$$

从而有

$$\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \inf_{v_h \in V_h} \sup_{u_h \in U_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \beta_h > 0$$

从而 (b) 与 (b') 成立，进而可以推出 (b) 与 (c) 成立.

□

5. 证明 $H(div, \Omega)$ 空间在范数 $\|\cdot\|_{div,\Omega}$ 下是完备的

$$\|\cdot\|_{div,\Omega} := (\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)} + \|div(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

Proof. 设 $\{u_m = (u^1, \cdots, u^n)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 是 $(H(div, \Omega), \|\cdot\|_{div,\Omega})$ 中的 Cauchy 列。

对于 $i \in \{1, \cdots, n\}$，有

$$(u^i_m - u^i_l, u^i_m - u^i_l) = \left\|u^i_m - u^i_l\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u_m - u_l\|^2_{div,\Omega}$$

由于 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $(H(div,\Omega),\|\cdot\|_{div,\Omega})$ 中的 Cauchy 列，有 $\{u_m^i\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 列。由于 $L^2(\Omega)$ 的完备性，有 $u_m^i \to u^i \in L^2(\Omega), \quad m\to\infty$. 因此 $u=(u^1,\cdots,u^n)\in\{L^2(\Omega)\}^n$

类似地,

$$(\mathrm{div}\,(u_m-u_l),\mathrm{div}\,(u_m-u_l))_{L^2(\Omega)} = \|\mathrm{div}\,u_m - \mathrm{div}\,u_l\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u_m-u_l\|^2_{H(div,\Omega)}$$

因此 $\{\mathrm{div}\,u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是 Cauchy 列。由于 $L^2(\Omega)$ 的完备性，有 $\mathrm{div} u_m \to g\in L^2(\Omega), \quad m\to\infty$

下面只需要说明 $divu=g$, 这等价于证明 $\int_\Omega g\phi dx = -\int_\Omega u\cdot\nabla\phi dx, \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$. 事实上，只需注意到

$$\int_\Omega \phi\,\mathrm{div}\,u_m dx = -\int_\Omega u_m\cdot\nabla\phi dx.$$

$$\mathrm{div}\,u_m \to g \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \implies \int_\Omega \phi\,\mathrm{div}\,u_m dx \to \int_\Omega \phi g dx$$

$$u_m \to u \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \implies \int_\Omega u_m\cdot\nabla\phi dx \to \int_\Omega u\cdot\nabla\phi dx.$$

即可得到。 □