

2024.04.22

1. 证明如下引理.

设 P_k 是 d 维空间, $\{N_1, \dots, N_d\}$ 是 P_k 的对偶空间 $(P_k)'$ 的一个子集. 则下面两个条件等价

(a) $\{N_1, \dots, N_d\}$ 是 $(P_k)'$ 的一组基

(b) 对任意 $\phi \in P_k, N_i(\phi) = 0, 1 \leq i \leq d$ 等价于 $\phi \equiv 0$.

证明. 令 $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ 为 P_k 的一组基. $\{N_1, \dots, N_d\}$ 是 P_k' 的一组基当且仅当对于 \mathcal{P}' 中的任意 L ,

$$L = \alpha_1 N_1 + \dots + \alpha_d N_d \quad (1)$$

因为 $d = \dim P_k = \dim P_k'$. 式(1)等价于

$$\begin{aligned} y_i &:= L(\phi_i) \\ &= \alpha_1 N_1(\phi_i) + \dots + \alpha_d N_d(\phi_i), \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (2)$$

令 $B = (N_j(\phi_i)), i, j = 1, \dots, d$. 因此, (a) 等价于 $B\alpha = y$ 有解, 即 B 可逆。

对于 \mathcal{P} 中的任意 v , 我们可以写成 $v = \beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_d \phi_d$. $N_i v = 0$ 意味着 $\beta_1 N_i(\phi_1) + \dots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0$. 因此, (b) 等价于

$$\beta_1 N_i(\phi_1) + \dots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, d \implies \beta_1 = \dots = \beta_d = 0. \quad (3)$$

令 $C = (N_i(\phi_j)), i, j = 1, \dots, d$. 那么 (b) 等价于 $Cx = 0$ 只有零解, 即 C 可逆。

由于 $C = B^\top$, (a) 等价于 (b).

□

2. 利用网格生成软件包给出 L 型区域 $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ 的一个三角形剖分, 画出剖分图 (例如 gmsh, distmesh 等)

3. 验证

$$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3, \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1, \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

是 Lagrange 二次元节点基函数.

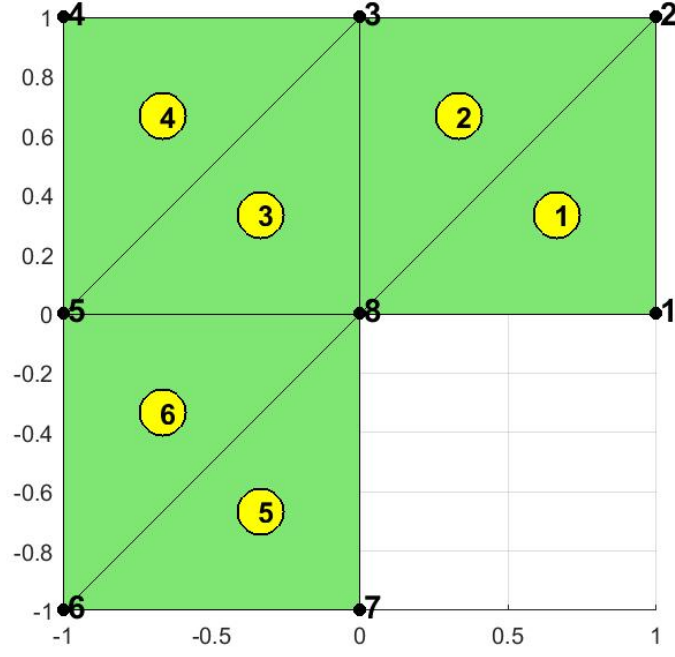


Figure 1: 网格图

Proof. 直接代入计算可得

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 0(2 * 0 - 1) = 0, \quad i = 2, 3, 4$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = \frac{1}{2}(2 * \frac{1}{2} - 1) = 0, \quad i = 5, 6$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 1(2 * 1 - 1) = 1, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4 * 0 * 0 = 0, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4 * \frac{1}{2} * 0 = 0, \quad i = 5, 6$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4 * 1 * 0 = 0, \quad i = 2, 3$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = 1, \quad i = 4$$

由对称性以及 Lagrange 元定义, 可得 $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$, 从而 ϕ 是 Lagrange 二次元节点基函数 \square

4. 证明如下定义的 Hermite 空间属于 $H^1(\Omega)$

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_3(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v \text{ 在 } \mathcal{T}_h \text{ 的所有顶点连续}, \nabla v \text{ 在 } \mathcal{T}_h \text{ 的所有顶点连续}\}$$

(Hint: 要证 $V_h \subset H^1(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上, $v|_{K_1} = v|_{K_2}$)

证明. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓, 仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.

记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_3 的多项式.

记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2 , 根据 V_h 定义, 有

$$w(z_1) = w(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$. 即 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$ □

5. 证明如下定义的 Argyris 空间属于 $H^2(\Omega)$

$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_5(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v$ 和其一阶以及二阶导数在 \mathcal{T}_h 的所有顶点连续, 在

\mathcal{T}_h 的所有边中点, v 关于该边的法向导数连续}

(Hint: 要证 $V_h \subset H^2(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上, $v|_{K_1} = v|_{K_2}$, $\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$)

证明. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓, 仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.

记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_5 的多项式.

记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2 , 中点为 z_0 , 根据 V_h 定义, 有

$$w(z_1) = w(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

$$w''_L(z_1) = w''_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$, 进而 $w'_L|_L = 0$.

考虑 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}$ 与 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓, 仍记为 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}, \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$.

记 $r := \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1} - \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$, 则 r 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_4 的多项式.

根据 V_h 定义, 有

$$r(z_1) = r(z_2) = r(z_0) = 0$$

$$r'_L(z_1) = r'_L(z_2) = 0$$

从而有 $r|_L \equiv 0$.

结合上述讨论, 可得 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$, $\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$ □