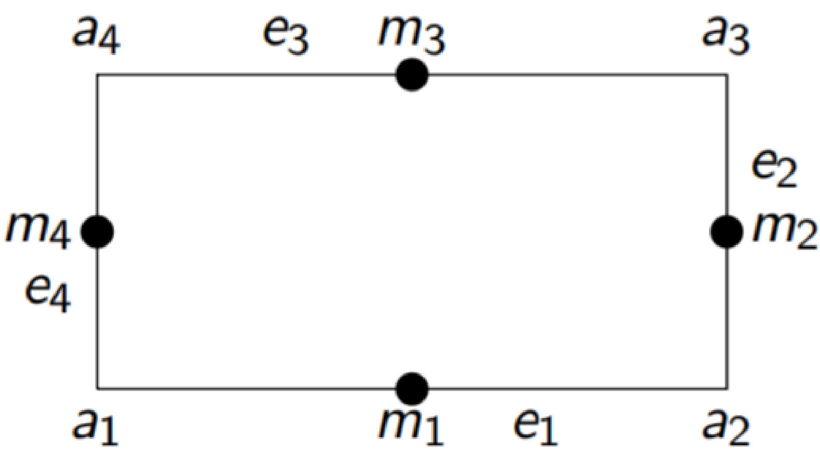
2024.05.20

1. 如果 K 是矩形, $P_K = Q_1(K)$, 证明如图所示的边的中点值所确定的节点参数对 P_K 不是唯一可解的 (Hint 试着构造 $v \in Q_1(K)$ 使得 $v(m_i) = 0, 1 \le i \le 4$)



Proof. 令 $\xi = \frac{x-x_0}{\ell_1}, \quad \eta = \frac{y-y_0}{\ell_2}$.

考虑 $v = \xi\eta$. 显然 $v \in Q_1(K)$ 且 $v(m_i) = 0$, 且 $v \not\equiv 0$ □

2. 如果 K 是矩形, $P_K = \{1, x, y, \xi^2 - \eta^2\}$, 证明 $\mathcal{N}_K = \{N_i, 1 \le i \le 4\}$, 其中 $N_i(v) = \frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} v\mathrm{ds}, 1 \le i \le 4$ 对 P_K 是唯一可解的.

Proof. 易得 $P_K = \{1, \xi, \eta, \xi^2 - \eta^2\}$, 设 $v = a_1(\xi^2 - \eta^2) + a_2\xi + a_3\eta + a_4$.

由 $N_i(v) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$, 可得

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\eta^2) + a_2 + a3\eta + a_4 d\eta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\xi^2) + a_2 + a3\xi + a_4 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\eta^2) - a_2 + a3\eta + a_4 d\eta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\xi^2) - a_2 + a3\xi + a_4 d\xi = 0$$

即

$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_4) = 0$$
$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_3) = 0$$
$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 - a_2 + a_4) = 0$$

$$-\frac{2}{3}a_1+2(a_1-a_2+a_3)=0$$

解得

$$a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

从而 $v\equiv 0$. □

3. 证明 Morley 有限元空间 V_h 满足 $V_h\not\subseteq H^2(\Omega)$ 且 $V_h\not\subseteq H^1(\Omega)$

Morley 元的有限元空间:

$V_h=\{v\in L^2(\Omega)\mid v|_K\in P_2(K),\forall K\in T_h, v$ 在 T_h 的所有顶点连续，$\frac{\partial v}{\partial \nu_e}$ 在 $\mathcal{T}_h$ 所有内边 e 的中点连续 $\}$

Proof. 不妨设某条内边 $e=(-1,0)\to(1,0)$, 相邻单元为 K_1,K_2.

考虑 $v|_{K_1}=x^2-1, v|_{K_2}=1-x^2$. 满足 $v\in V_h$ 但 $v\notin H^1(\Omega)$ □

4. 验证课件中给出的函数是 Morley 元的节点基函数

$$\begin{aligned}p_i=&1-(\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1})+2\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\\&-(\nabla\lambda_{i-1})^T\nabla\lambda_{i+1}\sum_{k=i-1,i+1}\frac{\lambda_k(\lambda_k-1)}{\|\nabla\lambda_k\|^2},\quad 1\le i\le 3\\p_{i+3}=&\frac{\lambda_i(\lambda_i-1)}{\|\nabla\lambda_i\|},1\le i\le 3.\end{aligned}$$

$$N_i(v)=v(a_i),1\le i\le 3$$
$$N_{i+3}(v)=\frac{\partial v}{\partial \nu}(m_i),1\le i\le 3$$

$$a_1=(1,0,0),a_2=(0,1,0),a_3=(0,0,1)$$
$$m_1=(0,0.5,0.5),m_2=(0.5,0,0.5),m_3=(0.5,0.5,0)$$

Proof. 注意到 $\nabla\lambda_i=\frac{1}{2|S_K|}(y_j-y_k,x_k-x_j)$,$e_i=(x_k-x_j,y_k-y_j)$. 从而 $-\nabla\lambda_i^\top$ 为 e_i 的外法向量，$-\frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|}^\top$ 为 e_i 的单位外法向量 ν_{e_i}。

$$N_1(p_1)=1-(0+0)+2*0*0-0=0$$
$$N_1(p_2)=1-(1+0)-2*1*0-0=0$$
$$N_1(p_4)=\frac{0}{\|\nabla\lambda_1\|}=0$$

计算得

$$\nabla p_k=\left(-\nabla\lambda_i-\nabla\lambda_j+2(\lambda_i\nabla\lambda_j+\lambda_j\nabla\lambda_i)-\nabla\lambda_i^\top\nabla\lambda_j\sum_{k=i,j}\frac{(2\lambda_k-1)\nabla\lambda_k}{\|\nabla\lambda_k\|^2}\right)\quad k=1,2,3$$

$$N_4(p_1) = \nabla p_1(m_1) \cdot \nu_{e_1} = 0 \cdot \nu_{e_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
N_4(p_2) &= \nabla p_2(m_1) \cdot \nu_{e_1} \\
&= \Big(- \nabla\lambda_2 + \nabla\lambda_1^\top \nabla\lambda_2 \frac{\nabla\lambda_1}{\|\nabla\lambda_1\|^2} \Big) \cdot \Big(- \frac{\nabla\lambda_1}{\|\nabla\lambda_1\|} \Big)^\top \\
&= 0.(\text{利用单位外法向量})
\end{aligned}$$

计算得

$$\nabla p_{i+3} = \frac{1}{\|\nabla\lambda_i\|}(2\lambda_i - 1)\nabla\lambda_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4(p_4) = \nabla p_4(m_1) \cdot \nu_{e_1} = \Big(- \frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|} \Big)^\top \cdot \Big(- \frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|} \Big) = 1$$

$$N_4(p_5) = \nabla p_5(m_1) \cdot \nu_{e_1} = 0 \cdot \nu_{e_1} = 0$$

结合对称性，验证完毕。 □