# 2024.04.29

1. 证明任意次的张量积元是唯一可解的. 其中 $P_K = Q_k(K), \mathcal{N}_K$ 是下面 $(k+1)^2$ 个点的值
$$\left(x_1^0 + h_1\left(\frac{2i}{k}-1\right), x_2^0 + h_2\left(\frac{2j}{k}-1\right)\right), 0 \leq i, j \leq k$$
其中 $(x_1^0, x_2^0)$ 是矩形的形心, $2h_1, 2h_2$ 分别是长和宽.

证明. 记 $\left(x_1^0 + h_1\left(\frac{2i}{k}-1\right), x_2^0 + h_2\left(\frac{2j}{k}-1\right)\right), 0 \leq i, j \leq k$ 为 $x_{ij}$. 记 $x_{ij}(0 \leq j \leq k)$ 所在的直线为 $L_i(0 \leq i \leq k-1)$. 记 $x_{ij}(0 \leq i \leq k)$ 所在的直线为 $L'_j(0 \leq j \leq k-1)$.

则由 $v(x_{ij}) = 0$ 可得 $v|_{L_i} = 0, v|_{L'_j} = 0$ $(0 \leq i, j \leq k)$,

从而 $v = cL_0L_1L_2...L_{k-1}L'_0L'_1...L'_{k-1}$, 其中 $c$ 是常数. 利用

$$0 = v(x_{kk}) = cL_0(x_{kk})L_1(x_{kk})L_2(x_{kk})...L_{k-1}(x_{kk})L'_0L'_1(x_{kk})...L'_{k-1}(x_{kk})$$

可得 $c = 0$. □

2. 证明 Sobolev 空间范数等价定理: 给定次数 $\leq k(k \geq 0)$ 的多项式全体 $P_k(\Omega), N = \dim P_k(\Omega)$, 又设 $f_i \in \left(W^{k+1,p}(\Omega)\right)'$, $\quad i = 1, 2, \cdots, N$, $1 \leq p \leq \infty$, 使得当 $f_i(q) = 0, \forall 1 \leq i \leq N, q \in P_k(\Omega)$ 时, 就有 $q = 0$, 则存在 $C_\Omega = \text{const} > 0$, 使得
$$\|v\|_{k+1,p,\Omega} \leq C_\Omega \left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)|\right), \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Hint: 仿照第二次课 Poincaré-Friedrichs 不等式的反证法证明.

证明. 假设命题不成立, 则存在一个序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}, v_i \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 使得

$$\|v_i\|_{k+1,p,\Omega} = 1, \quad \forall i \geqslant 1 \tag{1}$$

及

$$\lim_{i\to\infty}\left(|v_i|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{j=1}^N |f_j(v_i)|\right) = 0. \tag{2}$$

因为序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中有界, 以及 $W^{k+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega)$, 由嵌入定理可知, 在 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 中存在一个子序列, 仍记为 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 以及 $v \in W^{k,p}(\Omega)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}\|v_i - v\|_{k,p,\Omega} = 0. \tag{3}$$

又由 (2), 有

$$\lim_{i\to\infty}|v_i|_{k+1,p,\Omega}=0. \tag{4}$$

故 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 而 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 是完备的, 因此 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中收敛, 从而序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 的极限 $v$ 满足:

$$|D^\alpha v|_{0,p,\Omega}=\lim_{j\to\infty}|D^\alpha v_j|_{0,p,\Omega}=0,\quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,|\alpha|=k+1. \tag{5}$$

由此可知 $v$ 是一个次数不超过 $k$ 的多项式. 由 (2) 还可知

$$f_j(v)=\lim_{i\to\infty}f_j\left(v_i\right)=0,\quad j=1,2,\cdots,N. \tag{6}$$

据定理的条件可知, $v=0$. 这与 (1) 式发生了矛盾. 证毕

□

3. 假设仿射变换 $F:\widehat{K}\to K$. 并且 $\partial K$ 是光滑的（保证法向导数是存在且就有一定的光滑性）. 证明一下通过如下的变换

$$\nu=\frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$$

保单位外法向

证明. 设法向量 $\widehat{\nu}=(\widehat{\nu}_1,\widehat{\nu}_2,...,\widehat{\nu}_n)^\top$. 则与其正交的平面上面的点 $\widehat{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,...,x_n)^\top$ 满足 $\widehat{\nu}^\top\widehat{\boldsymbol{x}}=C(C$ 为常数).

进而有 $\widehat{\nu}^\top B^{-1}(B\widehat{\boldsymbol{x}}+b)=C$, 即 $(B^{-T}\widehat{\nu})^\top\boldsymbol{x}=C$, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 经过仿射变换得到的对应点.

经过归一化, 易得 $\nu=\frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$ 保单位法向.

下面只需证其是外法向, 反证法, 假设 $\nu=-\frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$ 是外法向:

当 $t>0$ 足够小时, 因为 $\nu$ 是外法向量, 所以 $\boldsymbol{x}+t\nu\notin K$. 这样就有

$$\Psi^{-1}(\boldsymbol{x}+t\nu)=\widehat{\boldsymbol{x}}-t\frac{B^{-1}B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}\notin\hat{K}.$$

另一方面,

$$\frac{\hat{\nu}^TB^{-1}B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}>0$$

即 $\hat{\nu}$ 和 $\frac{B^{-1}B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}}{\|B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}\|}$ 之间的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 进而 $\hat{\nu}$ 和 $-t\frac{B^{-1}B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}}{\|B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}\|}$ 之间的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$. 这样就得到当 $t$ 足够小时, $\hat{\boldsymbol{x}}-t\frac{B^{-1}B^{-T}\hat{\nu}}{\|B^{-T}\hat{\nu}\|}\in K$, 矛盾. □