

2024.04.08

1. 利用 Young 不等式证明 Hölder 不等式.

定理 1. (Young 不等式)

设 $p > 1, q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则对 $\forall a, b \geq 0$, 有

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1)$$

定理 2. (Hölder 不等式)

对 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega), 1 \leq p, q \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 有

$$\|fg\|_{0,1,\Omega} \leq \|f\|_{0,p,\Omega} \|g\|_{0,q,\Omega}. \quad (2)$$

证明. 若 $\|f\|_{0,p,\Omega} = 0$ (或 $\|g\|_{0,q,\Omega} = 0$), 则 $f(\mathbf{x}) = 0$ (或 $g(\mathbf{x}) = 0$), a.e. $\mathbf{x} \in \Omega$, 进而 $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$, a.e. $\mathbf{x} \in \Omega$, 此时 (2) 左侧与右侧均为 0, 成立.

否则 $\|f\|_{0,p,\Omega} \neq 0, \|g\|_{0,q,\Omega} \neq 0$. 取 $a = \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}}, b = \frac{|g(\mathbf{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}}$, 代入 (1) 式后两边在 Ω 上积分, 得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}} \frac{|g(\mathbf{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}} dx &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p dx}{\|f\|_{0,p,\Omega}^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_{\Omega} |g(\mathbf{x})|^q dx}{\|g\|_{0,q,\Omega}^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1 \end{aligned}$$

整理即得(2).

□

2. 证明 $W^{1,p}$ 是 Banach 空间.(利用 L^p 完备)

证明. 直接证明 $W^{m,p}$ 是 Banach 空间. 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 在 Sobolev 范数下是完备的.

令 $\{v_j\} \subset W^{m,p}(\Omega)$ 是 Cauchy 列, 即 $\{D^\alpha v_j : |\alpha| \leq m\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 由于 $L^p(\Omega)$ 是完备的, 从而存在 $v^\alpha \in L^p(\Omega) (|\alpha| \leq m)$, 使得 $D^\alpha v_j \rightarrow v^\alpha$ 在 $L^p(\Omega)$ 中, 当 $j \rightarrow \infty$ 时. 余下只要证明 $v_\alpha = D^\alpha v$, 即 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} v_\alpha \cdot \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \cdot \partial^\alpha \varphi dx.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_\alpha \cdot \varphi dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D^\alpha v_j \cdot \varphi dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_j \cdot \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \cdot \partial^\alpha \varphi dx. \end{aligned}$$

□

3. 设 $\Omega = (-1, 1)$,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ -x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

证明

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

是 f 的一阶广义导数.

证明. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 由分部积分,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \cdot \varphi'(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) \cdot \varphi'(x) dx + \int_0^1 f(x) \cdot \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 g(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

其中

$$g(x) = |x| = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

显然 g 是局部 Lebesgue 可积函数, 故 g 是 f 的一阶广义导数. □

4. 推导 Poisson 方程的混合边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ u|_{\Gamma_1} = g_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_2 \end{cases} \quad (3)$$

的变分形式, 这里 $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. 并证明古典解和弱解在一定条件下等价.

解. 设 $V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0\}$.

对任意 $v \in V$, 用 Green 公式可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v ds &= \int_{\Omega} f v dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds \end{aligned}$$

则问题(3)的变分形式是: 求 $u \in H^1(\Omega)$ 且 $u|_{\Gamma_1} = g_1$ 使得

$$a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds, \quad \forall v \in V. \quad (4)$$

定理 3. 设 $f \in C(\overline{\Omega})$, $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. 如果 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ 是问题(3)的古典解, 则它是弱解. 反过来, 如果 u 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 则它是古典解.

证明. 第一个结论显然.

如果 u 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 立得 $u|_{\Gamma_1} = g_1$.

第一步在(4)中取 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 利用 Green 公式和 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 得到

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)v \, dx = 0.$$

推出 $\Delta u + f = 0$. 第二步在 (4) 中取 $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 且 $v|_{\Gamma_1} = 0$, 注意到 $\Delta u + f = 0$, 可得

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_2} g_2 v \, ds$$

由 v 的任意性得到 u 满足边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_2$.

三个条件均满足, 故 u 是古典解. □