抽象变分原理

记号

- V：赋范向量空间，范数为$\|\cdot\|_V$
- $a(\cdot,\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$的双线性型，即$\forall\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2, v)=\alpha_1 a(u_1,v)+\alpha_2 a(u_2,v),\ \forall u_1,u_2,v\in V\\ a(u,\beta_1 v_1+\beta_2 v_2)=\beta_1 a(u_1,v)+\beta_2 a(u_2,v),\ \forall u,v_1,v_2\in V\end{cases}$$

- 称双线性型$a(\cdot,\cdot)$是连续的，如果存在$M=\mathrm{const}>0$，使得

$$|a(u,v)|\le M\|u\|_V\|v\|_V,\ \forall u,v\in V$$

- $f: V\to\mathbb{R}$ 连续线性泛函（即$f\in V'$，V'是V的对偶空间），对应的对偶积记作$\langle\cdot,\cdot\rangle$，对偶范数$\|f\|_{V'}=\sup_{0\neq v\in V}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|_V}$
- K : $K\subset V$非空子集

Lax-Milgram定理(非对称)

椭圆边值问题可以归纳为抽象变分问题

$$a(u,v)=\langle f,v\rangle,\ \forall v\in V \tag{1}$$

进一步考虑V是Hilbert空间，其内积为$(\cdot,\cdot)_V$

定理 假设V是Hilbert空间，$a(\cdot,\cdot)$是从$V\times V$到$\mathbb{R}$的连续双线性泛函，f是V到$\mathbb{R}$的连续线性泛函. 设$a(\cdot,\cdot)$是V-**椭圆的(强制的)**，即存在$\alpha=\mathrm{const}>0$，使得

$$\alpha\|v\|_V^2\le a(v,v),\ \forall v\in V$$

则问题(1)存在唯一解u，且

$$\|u\|_V\le\frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}$$

Reisz表示定理 设V是Hilbert空间，则对任一$f \in V'$，必存在唯一x_f，使

$$\langle f, v\rangle = (x_f, v)_V,\ \forall v \in H,\quad \text{且}\ \|f\|_{V'} = \|x_f\|_V.$$

证明　定义连续线性映射. 由于$a(\cdot,\cdot)$连续，则存在常数M使得

$$|a(u,v)| \le M\,\|u\|_V\,\|v\|_V\,.$$

则$\forall u$，$a(u,\cdot)$是V上的连续线性泛函. Riesz表示定理表明存在$Au \in V$使

$$a(u,v) = (Au, v)_V. \tag{2}$$

这样得到连续线性映射$A: V \to V$.
(i)证明算子A是单射. 假设$u, w \in V$且$Au = Aw$，则

$$a(u-w, v) = (Au - Aw, v)_V = 0, \forall v \in V,\ \forall v \in V$$

特别令$v = u - w$, $a(u-w, u-w) = 0$. 利用$a(\cdot,\cdot)$的V-椭圆性得到$u = w$. 则A是一对一映射且其逆$A^{-1}: AV \to V$存在.

(ii)证明AV是闭的. 对$w \in AV$,

$$\alpha \left\|A^{-1}w\right\|_V^2 \le a(A^{-1}w, A^{-1}w) = (w, A^{-1}w)_V \le \|w\|_V \|A^{-1}w\|_V$$

得到

$$\|A^{-1}w\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|w\|_V\,.$$

故A^{-1}是连续的，空间AV是V中的闭子空间.

(iii)证明$AV = V$(即AV在V中稠密). 反证法. 假设$AV \neq V$，则存在$0 \neq u_0 \in V$，满足u_0与AV正交. 因为$Au_0 \in AV$

$$0 = (Au_0, u_0)_V = a(u_0, u_0) \ge \alpha \|u_0\|_V^2\,,$$

即$u_0 = 0$，与$0 \neq u_0$矛盾.

对于连续线性泛函f，由Riesz表示定理，存在唯一的$w \in V$使

$$\langle f, v\rangle = (w, v)_V,\ \forall v \in V \ \text{且}\ \|w\|_V = \|f\|_{V'}$$

于是$A^{-1}w$是(1)的唯一解且满足范数估计. □

Lax-Milgram定理(对称情形，课上基本是对称情形)

定义

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle$$

考虑如下问题: 求$u \in V$满足

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v). \tag{3}$$

定理 假设V是Hilbert空间，$a(\cdot, \cdot)$是从$V \times V$到$\mathbb{R}$的对称连续双线性泛函，f是V到$\mathbb{R}$的连续线性泛函. 设$a(\cdot, \cdot)$是V-椭圆的，则变分问题(1)有唯一解且等价于问题(3).

注: 对于对称情形，可利用$a(\cdot, \cdot)$定义V上的新内积，且该内积诱导的范数与V的范数$\|\cdot\|_V$等价. 进而利用Riesz表示定理证明解的存在唯一性. (HW证)

等价性证明 首先，令u是问题(3)的解. 对任意$v \in V$和$t \in (-1,1)$，由双线性泛函$a(\cdot,\cdot)$的对称性，有

$$
\begin{aligned}
J(u+tv) - J(u) =& \frac{1}{2}a(u+tv.u+tv) - \langle f, u+tv\rangle \\
& - \frac{1}{2}a(u,u) + \langle f, u\rangle \\
=& t\Big(a(u,v) - \langle f, v\rangle\Big) + t^2 a(v,v) \geq 0
\end{aligned}
$$

由t的任意性，u是(1)的解.
反之，令u是问题(1)的解. 当$v \in V$时，

$$
\begin{aligned}
J(v) - J(u) =& \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle - \frac{1}{2}a(u,u) + \langle f, u\rangle \\
=& a(u, v-u) - \langle f, v-u\rangle + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \\
\geq& \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \geq 0.
\end{aligned}
$$

即u是问题(3)的解. $\square$

可微二次凸泛函极小化问题(了解即可)

考虑

$$\begin{cases} \text{求}u \in K, & \text{使得} \\ J(u) \leq J(v), & \forall v \in K \end{cases}$$

定理　假定(i)空间V是Banach空间，(ii)K是V的非空闭凸子集,(iii)双线性型$a(\cdot,\cdot)$是连续的，对称的，且(iv)$a(\cdot,\cdot)$是V-椭圆的, 则上述问题存在唯一解.

Sobolev空间中等价范数

定理 设$m > 0$是整数，如果Ω的边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的，则存在常数C_1, C_2, C_3，使得Poincaré-Friedrichs不等式

$$\|v\|_{m,\Omega} \le C_1 |v|_{m,\Omega}, \ \forall v \in H_0^m(\Omega), \tag{4}$$

Poincaré不等式

$$\|v\|_{m,\Omega}^2 \le C_2 \Big(|v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<m} \big(\int_\Omega \partial^\alpha v \, \mathrm{d}x \big)^2 \Big), \ \forall v \in H^m(\Omega), \tag{5}$$

成立，而且Friedrichs不等式

$$\|v\|_{m,\Omega} \le C_3 \big(|v|_{m,\Omega} + \|v\|_{0,\partial\Omega} \big), \ \forall v \in H^m(\Omega) \tag{6}$$

当$m < 3$时成立.

证明 利用反证法. 假设(4)不成立. 对每个正整数k，存在$v_k \in H_0^m(\Omega)$使

$$\|v_k\|_{m,\Omega} > k|v_k|_{m,\Omega}.$$

不失一般性，设v_k满足

$$\|v_k\|_{m,\Omega} = 1,\ k = 1, 2, \cdots,$$

这样有

$$\lim_{k\to\infty} |v_k|_{m,\Omega} = 0.$$

因为$\{v_k\}$是$H_0^m(\Omega)$的有界序列，所以存在$v_\infty \in H_0^m(\Omega)$和一个子列(仍记为$\{v_k\}$)满足:$\{v_k\}$弱收敛于$v_\infty$. 利用嵌入定理$H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{m-1}(\Omega)$，在$H_0^{m-1}(\Omega)$中$\{v_k\}$强收敛于$v_\infty$.

于是

$$\lim_{k,\ell\to\infty}\|v_k - v_\ell\|_{m,\Omega} \le \lim_{k,\ell\to\infty}\left(\|v_k - v_\ell\|_{m-1,\Omega} + |v_k - v_\ell|_{m,\Omega}\right) = 0.$$

因此$\{v_k\}$是$H_0^m(\Omega)$中的Cauchy序列，进而$\{v_k\}$在$H_0^m(\Omega)$中强收敛于v_∞.

由极限得到$\|v_\infty\|_{m,\Omega} = 1$和$|v_\infty|_{m,\Omega} = 0$，即$v_\infty$是一个$m-1$次多项式．注意到$v_\infty \in H_0^m(\Omega)$，可得$v_\infty \equiv 0$．与$v_\infty \neq 0$矛盾．上面讨论可推出Poincaré-Friedrichs不等式(4)成立.

其他两个不等式证明方法类似(HW．证明Poincaré不等式(5)). $\square$

注： 设$u \in H^m(\Omega)$．若$|u|_{m,\Omega} = 0$，则u几乎处处等于一个次数不超过$m-1$次多项式．(感兴趣可以查证明)

Poisson方程的齐次Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ 在\Omega内 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

给定$f \in L^2(\Omega)$，变分问题：求$u \in H_0^1(\Omega)$使得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \ \mathrm{dx}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

由Poincaré-Friedrichs不等式可得V-椭圆性

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} \geq C_1 \|v\|_{1,\Omega}^2, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

有界性

$$\left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} \right| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

$$\left| \int_\Omega fv \ \mathrm{dx} \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

Lax-Milgram定理可得到变分问题解的存在唯一性$\|u\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{C_1} \|f\|_{0,\Omega}$

Poisson方程的Neumann边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

给定$f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$，变分问题：求$u \in H^1(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \ \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} gv \ \mathrm{ds}, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

相容性条件(存在解的必要条件)：$\int_\Omega f \ \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g \ \mathrm{ds} = 0.$

在$H^1(\Omega)$上加上限制条件令

$$u, v \in V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Omega v \ \mathrm{dx} = 0\}.$$

由Poincaré不等式可得V-椭圆性

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq C_2\Big(|v|_{1,\Omega}^2 + \big(\int_\Omega v \ \mathrm{dx}\big)^2\Big) = C_2|v|_{1,\Omega}^2, \ \forall v \in V$$

有界性：$\left|\int_{\partial\Omega} gv \ \mathrm{ds}\right| \leq \|g\|_{0,\partial\Omega} \|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|g\|_{0,\partial\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$(最后一步迹定理)

重调和方程的变分形式

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

变分问题求：$u \in H_0^2(\Omega)$使得

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \, \mathrm{dx}, \ \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

等价地求$u \in H_0^2(\Omega)$使得

$$\int_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 v \, \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \, \mathrm{dx}, \ \forall v \in H_0^2(\Omega)$$

V-椭圆性利用$\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = |v|_{2,\Omega}^2, \ \forall v \in H_0^2(\Omega)$

Galerkin方法和Ritz方法

取$V_h \subset V$是V的一个有限维子空间. 求解变分问题(1)的**Galerkin方法**是: 求$u_h \in V_h$满足

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \ \forall v \in V_h. \tag{7}$$

当$a(\cdot,\cdot)$对称时，求解变分问题(1)或(3) 的**Ritz方法**是：求$u_h \in V_h$满足

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h). \tag{8}$$

问题(7)的解叫做问题(1)的**Galerkin解**，问题(8)的解叫做问题(1)或(3)的**Ritz解**.

将Lax-Milgram定理应用到V_h，可得离散问题(7)存在唯一解，且

$$\|u_h\|_V \le \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}$$

如果$a(\cdot,\cdot)$对称，则问题(7)和(8)等价.

Céa定理

定理[Céa定理] 假设Lax-Milgram定理中的条件满足. 如果u是问题(1)的解，u_h是问题(7)的解，则

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{M}{\alpha}\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V.$$

证明 对任意$w_h\in V_h$，由得$a(u-u_h,w_h)=0$. 利用有，对任意$v_h\in V_h$.

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|_V^2 &\le a(u-u_h,u-u_h)=a(u-u_h,u-v_h)\\ &\le M\|u-u_h\|_V\|u-v_h\|_V.\end{aligned}$$

这样就证明了估计式. □

作业

1. 推导
$$\int_\Omega v\Delta^2 u \, dx - \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx$$
边界项
2. 当双线性型$a(\cdot,\cdot)$对称时，利用$a(\cdot,\cdot)$可定义V上的新内积和Riesz表示定理证明Lax-Milgram定理(根据注的提示)
3. 证明Poincaré不等式(5)
$$\|v\|_{m,\Omega}^2 \le C_2\Big(|v|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|<m}\Big(\int_\Omega \partial^\alpha v \, dx\Big)^2\Big), \ \forall v \in H^m(\Omega),$$
4. 考虑Robin边值问题
$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = f, \ \text{在}\Omega\text{内} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x) u\right)\Big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$
这里$\alpha(x) \ge \alpha_0 > 0$, $\beta(x) \ge 0$以及f均为足够光滑的已知函数
   (i) 试建立该边值问题的变分问题
   (ii) 讨论变分问题解的存在唯一性(适定性)