2024.04.08

1. 利用 $Young$ 不等式证明 $H\ddot{o}lder$ 不等式.

   定理 1. *($Young$ 不等式)*

   设 $p>1, q>1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则对 $\forall a, b \geq 0$, 有

   $$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1}$$

   定理 2. *($H\ddot{o}lder$ 不等式)*

   对 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega), 1 \leqslant p, q \leqslant +\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有

   $$\|fg\|_{0,1,\Omega} \leqslant \|f\|_{0,p,\Omega}\|g\|_{0,q,\Omega}. \tag{2}$$

   Proof. 若 $\|f\|_{0,p,\Omega}=0$ (或 $\|g\|_{0,q,\Omega}=0$), 则 $f(\boldsymbol{x})=0$(或 $g(\boldsymbol{x})=0$), a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 进而 $f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=0$, a.e. $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 此时 (2)左侧与右侧均为 0, 成立.

   否则 $\|f\|_{0,p,\Omega} \neq 0, \|g\|_{0,q,\Omega} \neq 0$. 取 $a=\frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}}, b=\frac{|g(\boldsymbol{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}}$, 代入 (1)式后两边在 Ω 上积分, 得到

   $$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{\|f\|_{0,p,\Omega}} \frac{|g(\boldsymbol{x})|}{\|g\|_{0,q,\Omega}} dx &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^p dx}{\|f\|_{0,p,\Omega}^p}+\frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^q dx}{\|g\|_{0,q,\Omega}^q} \\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \\ &=1\end{aligned}$$

   整理即得(2).

   □

2. 证明 $W^{1,p}$ 是 Banach 空间.(利用 L^p 完备)

   Proof. 直接证明 $W^{m,p}$ 是 Banach 空间. 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 在 Sobolev 范数下是完备的.

   令 $\{v_j\} \subset W^{m,p}(\Omega)$ 是 Cauchy 列, 即 $\{D^\alpha v_j : |\alpha| \leq m\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 由于 $L^p(\Omega)$ 是完备的, 从而存在 $v_\alpha \in L^p(\Omega)(|\alpha| \leq m)$, 使得 $D^\alpha v_j \to v_\alpha$ 在 $L^p(\Omega)$ 中, 当 $j \to \infty$ 时. 余下只要证明 $v_\alpha = D^\alpha v$, 即 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

   $$\int_\Omega v_\alpha \cdot \varphi dx=(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi dx.$$

   事实上,

   $$\begin{aligned}\int_\Omega v_\alpha \cdot \varphi dx &= \lim_{j \to \infty} \int_\Omega D^\alpha v_j \cdot \varphi \mathrm{d}x \\ &= \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_j \cdot \partial^\alpha \varphi dx=(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi dx.\end{aligned}$$

   □

3. 设 $\Omega=(-1,1)$，

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ -x, & -1<x<0\end{cases}$$

证明

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$$

是 f 的一阶广义导数.

Proof. $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_{-1}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &=-\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$$

显然 g 是局部 Lesbegue 可积函数, 故 g 是 f 的一阶广义导数. □

4. 推导 Poisson 方程的混合边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f, \text{ 在}\Omega \text{ 内}\\ u|_{\Gamma_1}=g_1\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=g_2\end{cases}\tag{3}$$

的变分形式, 这里 $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, 且 $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$. 并证明古典解和弱解在一定条件下等价.

解. 设 $V=\{v\ |v\in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1}=0\}$.

对任意 $v\in V$, 用 Green 公式可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{dx}-\int_{\Gamma_2}\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{ds}=\int_\Omega fv\mathrm{dx}\\ \Rightarrow&\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{dx}=\int_\Omega fv\mathrm{dx}+\int_{\Gamma_2} g_2v\mathrm{ds}\end{aligned}$$

则问题(3)的变分形式是: 求 $u\in H^1(\Omega)$ 且 $u|_{\Gamma_1}=g_1$ 使得

$$a(u,v)=(f,v)+\int_{\Gamma_2} g_2v\mathrm{ds},\quad \forall v\in V.\tag{4}$$

定理 3. 设 $f \in C(\overline{\Omega}), g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. 如果 $u \in C^2(\overline{\Omega})$ 是问题(3)的古典解, 则它是弱解. 反过来, 如果 u 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 则它是古典解.

Proof. 第一个结论显然.

如果 u 是问题(3)的弱解且 $u \in C^2(\overline{\Omega})$, 立得 $u|_{\Gamma_1} = g_1$.

第一步在(4)中取 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 利用 Green 公式和 $v|_{\partial\Omega} = 0$ 得到

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \mathrm{dx} = 0.$$

推出 $\Delta u + f = 0$. 第二步在 (4) 中取 $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 且 $v|_{\Gamma_1} = 0$, 注意到 $\Delta u + f = 0$, 可得

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \mathrm{ds} = \int_{\Gamma_2} g_2 v \mathrm{ds}$$

由 v 的任意性得到 u 满足边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Gamma_2} = g_2$.

三个条件均满足，故 u 是古典解. $\square$

2024.04.15

1. 推导 $\int_\Omega v\Delta^2 u\ \mathrm{dx} - \int_\Omega \Delta u\Delta v\ \mathrm{dx}$ 边界项

解. 给定 $u, v \in H^1(\Omega)$, 根据 Green 公式：对 $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_\Omega u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\partial_i u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma uvn_i \mathrm{d}s \tag{5}$$

若 $u \in H^2(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega)$, 则可用 $\partial_i u$ 代替(5)式中的 u, 可得

$$\int_\Omega \partial_i u\partial_i v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\partial_{ii} u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \partial_i uvn_i \mathrm{d}s$$

对 i 从 1 到 n 求和可得

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega v\Delta u \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{6}$$

若 $v \in H^2(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega)$, 类似地有

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u\Delta v \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s \tag{7}$$

则当 $u, v \in H^2(\Omega)$,(6)(7)两式相减，得：

$$\int_\Omega \big(u\Delta v - v\Delta u\big) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\big) \mathrm{d}s, \forall u, v \in H^2(\Omega) \tag{8}$$

若 $u \in H^4(\Omega), v \in H^2(\Omega)$., 则可用 Δu 代替(8)中的 u, 可得

$$\int_\Omega \Delta u\Delta v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega v\Delta^2 u \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Gamma v\frac{\partial \Delta u}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_\Gamma \Delta u\frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s$$

2. 当双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 对称时，利用 $a(\cdot,\cdot)$ 可定义 V 上的新内积和 Riesz 表示定理证明 Lax-Milgram 定理 (根据注的提示)

定理 4. *(Lax-Milgram 定理)*

设 V 是一个 Hilbert 空间，$a(u, v)$ 是 $V \times V$ 上的对称、连续、强制的双线性形式，f 是 V 中的线性连续泛函，则变分问题

$$求 u \in V,\ 使得 a(u, v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V,$$

存在唯一解 u^*, 且满足范数估计

$$\|u^*\|_V \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V^*},$$

Proof. 因 $a(u,v)$ 是对称、正定的，故可在 V 上定义新内积 $[u,v]\triangleq a(u,v)$, 且

$$\alpha\|u\|_V^2\leqslant[u,u]\leqslant M\|u\|_V^2,$$

其中左侧由强制性, 右侧由连续性.

新定义的内积所确定的范数 $\sqrt{a(u,u)}$ 与范数 $\|\cdot\|_V$ 等价. 对于 V 的新范数 $\sqrt{a(u,u)}$ 而言 f 仍是线性连续泛函. 根据 Riesz 表示定理可知，存在唯一的 $u^*\in V$ 使得

$$[u^*,v]=\langle f,v\rangle\,,\quad\forall\, v\in V,$$

即

$$a(u^*,v)=\langle f,v\rangle,\quad\forall\, v\in V.$$

于是 u^* 就是变分问题的唯一解. 另一方面

$$\alpha\|u^*\|_V^2\leqslant a(u^*,u^*)=[u^*,u^*]=\langle f,u^*\rangle\leqslant\|f\|_{V^*}\|u^*\|_V.$$

从而得到范数估计. □

3. 证明 Poincaré 不等式

$$\|v\|_{m,\Omega}^2\leq C_2\Big(|v|_{m,\Omega}^2+\sum_{|\alpha|<m}\Big(\int_\Omega\partial^\alpha v\mathrm{dx}\Big)^2\Big),\forall v\in H^m(\Omega),\tag{9}$$

Proof. 利用反证法. 假设(9)不成立. 对每个正整数 k, 存在 $v_k\in H^m(\Omega)$ 使

$$\|v_k\|_{m,\Omega}^2>k\Big(|v_k|_{m,\Omega}^2+\sum_{|\alpha|<m}\Big(\int_\Omega\partial^\alpha v_k\mathrm{dx}\Big)^2\Big).$$

不失一般性，设 v_k 满足

$$\|v_k\|_{m,\Omega}=1,\ k=1,2,\cdots,$$

这样有

$$\lim_{k\to\infty}|v_k|_{m,\Omega}=0.$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega\partial^\alpha v_k\mathrm{dx}=0,\quad\forall\alpha\quad s.t.|\alpha|<m$$

因为 $\{v_k\}$ 是 $H^m(\Omega)$ 的有界序列，所以存在 $v_\infty \in H^m(\Omega)$ 和一个子列 (仍记为 $\{v_k\}$) 满足：$\{v_k\}$ 弱收敛于 v_∞. 利用嵌入定理 $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{m-1}(\Omega)$, 在 $H^{m-1}(\Omega)$ 中 $\{v_k\}$ 强收敛于 v_∞.

于是

$$\lim_{k,\ell\to\infty} \|v_k - v_\ell\|_{m,\Omega} \le \lim_{k,\ell\to\infty} (\|v_k - v_\ell\|_{m-1,\Omega} + |v_k - v_\ell|_{m,\Omega}) = 0.$$

因此 $\{v_k\}$ 是 $H^m(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，进而 $\{v_k\}$ 在 $H^m(\Omega)$ 中强收敛于 v_∞. 由极限得到 $\|v_\infty\|_{m,\Omega} = 1$ 和 $|v_\infty|_{m,\Omega} = 0$, 即 v_∞ 是一个 $m-1$ 次多项式.

注意到

$$\int_\Omega \partial^\alpha v_\infty \mathrm{dx} = 0, \quad \forall \alpha \quad s.t.\ |\alpha| < m$$

,

可得 $v_\infty \equiv 0$. 与 $v_\infty \neq 0$ 矛盾. 上面讨论可推出 Poincaré 不等式成立.

□

4. 考虑 Robin 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha(x)u = f, \text{ 在}\Omega\text{上} \\ (\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u)\ |_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{10}$$

这里 $\alpha(x) \ge \alpha_0 > 0, \beta(x) \ge 0$ 以及 f 均为足够光滑的已知函数

(i) 试建立该边值问题的变分问题

(ii) 讨论变分问题解的存在唯一性 (适定性)

解. (i) 对任意 $v \in H^1(\Omega)$, 用 Green 公式可得

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\mathrm{ds} = \int_\Omega fv\mathrm{dx} \\ &\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \beta(x)uv\mathrm{ds} = \int_\Omega fv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{ds} \end{aligned}$$

则问题(10)的变分形式是: 求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得

$$a(u,v) = (f,v) + \int_{\partial\Omega} gv\mathrm{ds}, \quad \forall v \in V. \tag{11}$$

其中 $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x)uv\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \beta(x)uv\mathrm{ds}$.

(ii) 只需要验证 Lax-Milgram 定理的条件：

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega (\nabla u)^2 + \alpha(x)u^2\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \beta(x)u^2\mathrm{ds} \\
&\geqslant \int_\Omega (\nabla u)^2 + \alpha(x)u^2\mathrm{dx} \\
&\geqslant \min\{1,\alpha_0\}\|u\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}$$

从而 $a(u,v)$ 满足强制性

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant |u|_{1,\Omega}\cdot|v|_{1,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\alpha(\boldsymbol{x})\cdot\|u\|_{0,\Omega}\cdot\|v\|_{0,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\beta(\boldsymbol{x})\cdot\|u\|_{0,\partial\Omega}\cdot\|v\|_{0,\partial\Omega} \\
&\leqslant (1+\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\alpha(\boldsymbol{x})+\sup_{\boldsymbol{x}\in\Omega}\beta(\boldsymbol{x}))\|u\|_{1,\Omega}\cdot\|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u,v\in V
\end{aligned}$$

其中上式第一行用到了柯西积分不等式，第二行用到了范数性质以及迹定理.
从而 $a(u,v)$ 满足连续性.

$$\left|\int_\Omega fv\mathrm{dx}\right| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

$$\left|\int_\Omega gv\mathrm{ds}\right| \leq \|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C\|g\|_{0,\partial\Omega}\|v\|_{1,\Omega}$$

从而得到右端泛函有界性.

综上，利用 Lax-Milgram 定理，变分问题(11)的解存在且唯一.

2024.04.22

1. 证明如下引理.

   设 P_k 是 d 维空间，$\{N_1, \cdots, N_L\}$ 是 P_k 的对偶空间 $(P_k)'$ 的一个子集. 则下面两个条件等价

   (a) $\{N_1, \cdots, N_d\}$ 是 $(P_k)'$ 的一组基

   (b) 对任意 $\phi \in P_K$,$N_i(\phi) = 0, 1 \leq i \leq d$ 等价于 $\phi \equiv 0$.

   Proof. 令 $\{\phi_1, \ldots, \phi_d\}$ 为 P_k 的一组基.$\{N_1, \ldots, N_d\}$ 是 P_k' 的一组基当且仅当对于 $\mathcal{P}'$ 中的任意 L，

   $$L = \alpha_1 N_1 + \ldots + \alpha_d N_d \tag{12}$$

   因为 $d = \dim P_k = \dim P_k'$. 式(12)等价于

   $$\begin{aligned} y_i &:= L(\phi_i) \\ &= \alpha_1 N_1(\phi_i) + \ldots + \alpha_d N_d(\phi_i), \quad i = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{13}$$

   令 $B = (N_j(\phi_i)), i, j = 1, \ldots, d$. 因此，(a) 等价于 $B\alpha = y$ 有解，即 B 可逆。

   对于 $\mathcal{P}$ 中的任意 v，我们可以写成 $v = \beta_1\phi_1 + \ldots + \beta_d\phi_d$. $N_i v = 0$ 意味着 $\beta_1 N_i(\phi_1) + \ldots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0$. 因此，(b) 等价于

   $$\beta_1 N_i(\phi_1) + \ldots + \beta_d N_i(\phi_d) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, d \Longrightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_d = 0. \tag{14}$$

   令 $C = \Big(N_i(\phi_j)\Big)$, $i, j = 1, \ldots, d$. 那么 (b) 等价于 $Cx = 0$ 只有零解，即 C 可逆。由于 $C = B^\top$, (a) 等价于 (b).

   □

2. 利用网格生成软件包给出 L 型区域 $\Omega = (-1,1)^2 \backslash [0,1] \times [-1,0]$ 的一个三角形剖分，画出剖分图 (例如 gmsh，distmesh 等)

3. 验证

   $$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3$$

   $$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3,\ \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1,\ \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

   是 Lagrange 二次元节点基函数.

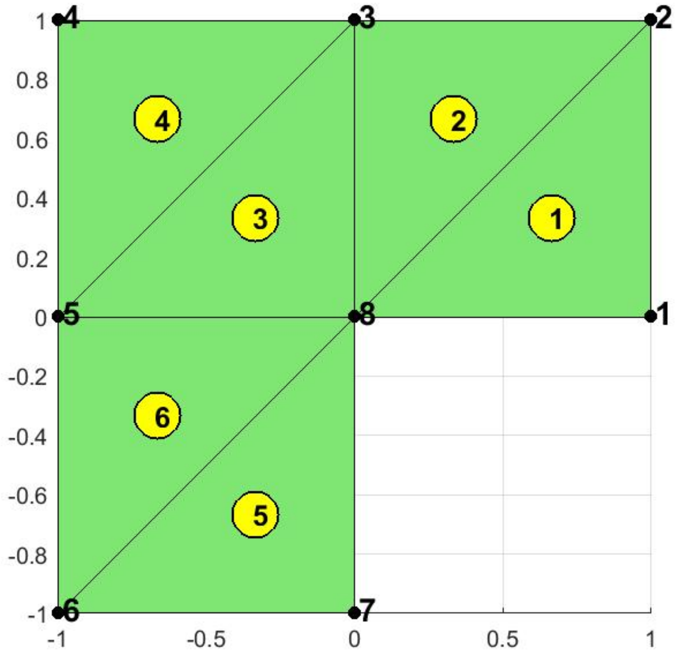


Figure 1: 网格图

Proof. 直接代入计算可得

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 0(2*0-1) = 0, \quad i = 2,3,4$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = \frac{1}{2}(2*\frac{1}{2}-1) = 0, \quad i = 5,6$$

$$\phi_1(z_i) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) = 1(2*1-1) = 1, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*0*0 = 0, \quad i = 1$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*\frac{1}{2}*0 = 0, \quad i = 5,6$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*1*0 = 0, \quad i = 2,3$$

$$\phi_4(z_i) = 4\lambda_2\lambda_3 = 4*\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = 1, \quad i = 4$$

由对称性以及 Lagrange 元定义，可得 $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$, 从而 ϕ 是 Lagrange 二次元节点基函数 □

4. 证明如下定义的 Hermite 空间属于 $H^1(\Omega)$

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_3(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v\text{在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续}, \nabla v\text{在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续}\}$$

(Hint: 要证 $V_h \subset H^1(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}$)

Proof. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.
记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_3 的多项式.
记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2, 根据 V_h 定义，有

$$w(z_1) = w_(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$. 即 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$ □

5. 证明如下定义的 Argyris 空间属于 $H^2(\Omega)$

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_5(K), \forall K \in \mathcal{T}_h, v\text{和其一阶以及二阶导数在}\mathcal{T}_h\text{的所有顶点连续，在}$$
$$\mathcal{T}_h\text{的所有边中点，}v\text{关于该边的法向导数连续}\}$$

(Hint: 要证 $V_h \subset H^2(\Omega)$ 只需证在公共边 $F = K_1 \cap K_2$ 上，$v|_{K_1} = v|_{K_2}$, $\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$)

Proof. 考虑 $v|_{K_1}$ 与 $v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $v|_{K_1}, v|_{K_2}$.
记 $w := v|_{K_1} - v|_{K_2}$, 则 w 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_5 的多项式.
记 $L := K_1 \cap K_2$ 的两个端点为 z_1, z_2, 中点为 z_0, 根据 V_h 定义，有

$$w(z_1) = w_(z_2) = 0$$

$$w'_L(z_1) = w'_L(z_2) = 0$$

$$w''_L(z_1) = w''_L(z_2) = 0$$

从而有 $w|_L \equiv 0$, 进而 $w'_L|_L = 0$.
考虑 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}$ 与 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$ 在 $K_1 \cup K_2$ 上的延拓，仍记为 $\frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1}, \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$.
记 $r := \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_1} - \frac{\partial}{\partial n} v|_{K_2}$, 则 r 是定义在 $K_1 \cup K_2$ 上的 P_4 的多项式.
根据 V_h 定义, 有

$$r(z_1) = r(z_2) = r(z_0) = 0$$

$$r'_L(z_1) = r'_L(z_2) = 0$$

从而有 $r|_L \equiv 0$.
结合上述讨论, 可得 $v|_{K_1} = v|_{K_2}$, $\nabla v|_{K_1} = \nabla v|_{K_2}$ □

2024.04.29

1. 证明任意次的张量积元是唯一可解的. 其中 $P_K = Q_k(K), \mathcal{N}_K$ 是下面 $(k+1)^2$ 个点的值
$$\left(x_1^0 + h_1\left(\frac{2i}{k} - 1\right), x_2^0 + h_2\left(\frac{2j}{k} - 1\right)\right), 0 \leq i, j \leq k$$
其中 (x_1^0, x_2^0) 是矩形的形心, $2h_1, 2h_2$ 分别是长和宽.

Proof. 记 $\left(x_1^0 + h_1\left(\frac{2i}{k} - 1\right), x_2^0 + h_2\left(\frac{2j}{k} - 1\right)\right), 0 \leq i, j \leq k$ 为 x_{ij}. 记 $x_{ij}(0 \leq j \leq k)$ 所在的直线为 $L_i(0 \leq i \leq k-1)$. 记 $x_{ij}(0 \leq i \leq k)$ 所在的直线为 $L'_j(0 \leq j \leq k-1)$.

则由 $v(x_{ij}) = 0$ 可得 $v|_{L_i} = 0, v|_{L'_j} = 0 \ (0 \leq i, j \leq k)$,

从而 $v = cL_0L_1L_2...L_{k-1}L'_0L'_1...L'_{k-1}$, 其中 c 是常数. 利用

$$0 = v(x_{kk}) = cL_0(x_{kk})L_1(x_{kk})L_2(x_{kk})...L_{k-1}(x_{kk})L'_0L'_1(x_{kk})...L'_{k-1}(x_{kk})$$

可得 $c = 0$. □

2. 证明 Sobolev 空间范数等价定理: 给定次数 $\leq k(k \geq 0)$ 的多项式全体 $P_k(\Omega), N = \dim P_k(\Omega)$, 又设 $f_i \in \left(W^{k+1,p}(\Omega)\right)', \quad i = 1, 2, \cdots, N, \ 1 \leq p \leq \infty$, 使得当 $f_i(q) = 0, \forall 1 \leq i \leq N, q \in P_k(\Omega)$ 时, 就有 $q = 0$, 则存在 $C_\Omega = \text{const} > 0$, 使得
$$\|v\|_{k+1,p,\Omega} \leq C_\Omega \left(|v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)|\right), \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega).$$

Hint: 仿照第二次课 Poincaré-Friedrichs 不等式的反证法证明.

Proof. 假设命题不成立, 则存在一个序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}, v_i \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 使得

$$\|v_i\|_{k+1,p,\Omega} = 1, \quad \forall i \geqslant 1 \tag{15}$$

及

$$\lim_{i\to\infty}\left(|v_i|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{j=1}^N |f_j(v_i)|\right) = 0. \tag{16}$$

因为序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中有界, 以及 $W^{k+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,p}(\Omega)$, 由嵌入定理可知, 在 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 中存在一个子序列, 仍记为 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$, 以及 $v \in W^{k,p}(\Omega)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty}\|v_i - v\|_{k,p,\Omega} = 0. \tag{17}$$

又由 (16), 有

$$\lim_{i \to \infty} |v_i|_{k+1,p,\Omega} = 0. \tag{18}$$

故 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 而 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 是完备的, 因此 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中收敛, 从而序列 $\{v_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 的极限 v 满足:

$$|D^\alpha v|_{0,p,\Omega} = \lim_{j \to \infty} |D^\alpha v_j|_{0,p,\Omega} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| = k+1. \tag{19}$$

由此可知 v 是一个次数不超过 k 的多项式. 由 (16) 还可知

$$f_j(v) = \lim_{i \to \infty} f_j(v_i) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{20}$$

据定理的条件可知, $v = 0$. 这与 (15) 式发生了矛盾. 证毕

□

3. 假设仿射变换 $F : \widehat{K} \to K$. 并且 ∂K 是光滑的（保证法向导数是存在且就有一定的光滑性）. 证明一下通过如下的变换

$$\nu = \frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$$

保单位外法向

Proof. 设法向量 $\widehat{\nu} = (\widehat{\nu}_1, \widehat{\nu}_2, ..., \widehat{\nu}_n)^\top$. 则与其正交的平面上面的点 $\widehat{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top$ 满足 $\widehat{\nu}^\top \widehat{\boldsymbol{x}} = C(C$ 为常数).

进而有 $\widehat{\nu}^\top B^{-1}(B\widehat{\boldsymbol{x}} + b) = C$, 即 $(B^{-T}\widehat{\nu})^\top \boldsymbol{x} = C$, 其中 $\boldsymbol{x}$ 是 $\widehat{\boldsymbol{x}}$ 经过仿射变换得到的对应点.

经过归一化, 易得 $\nu = \frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$ 保单位法向.

下面只需证其是外法向, 反证法, 假设 $\nu = -\frac{B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|}$ 是外法向:

当 $t > 0$ 足够小时, 因为 ν 是外法向量, 所以 $\boldsymbol{x} + t\nu \notin K$. 这样就有

$$\Psi^{-1}(\boldsymbol{x} + t\nu) = \widehat{\boldsymbol{x}} - t\frac{B^{-1}B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|} \notin \hat{K}.$$

另一方面,

$$\frac{\hat{\nu}^T B^{-1} B^{-T}\widehat{\nu}}{\|B^{-T}\widehat{\nu}\|} > 0$$

即 $\hat{\nu}$ 和 $\frac{B^{-1}B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}}{\|B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}\|}$ 之间的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$, 进而 $\hat{\nu}$ 和 $-t\frac{B^{-1}B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}}{\|B^{-\mathrm{T}}\hat{\nu}\|}$ 之间的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$. 这样就得到当 t 足够小时, $\hat{\boldsymbol{x}} - t\frac{B^{-1}B^{-T}\hat{\nu}}{\|B^{-T}\hat{\nu}\|} \in K$, 矛盾. □

2024.05.06

1. 设 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是非负序列. 证明对任意 $1 \le q \le p$, 有

$$(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p)^{1/p} \le (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^q)^{1/q}$$

Proof. 记 $\|a\|_p \triangleq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p)^{1/p}$. 即证 $\|a\|_p \le \|a\|_q$

对 $q \le \infty$, 有 $\|a\|_q = (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^q)^{1/q} \ge \max a_m = \|a\|_\infty$.

因此, 有 $|a_m|^p = |a_m|^q |a_m|^{p-q} \le |a_m|^q \|a\|_\infty^{p-q} \le |a_m|^q \|a\|_q^{p-q}$

对上式求和，得到 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \le \|a\|_q^{p-q} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^q$

两端同时开 p 次方即可. □

2. 设 $\{a_m\}_{m=1}^{M}$ 是有限非负序列. 证明如果 $p < q \le \infty$, 则有

$$(\sum_{m=1}^{M} a_m^p)^{1/p} \le M^{1/p-1/q} (\sum_{m=1}^{M} a_m^q)^{1/q} \text{ 如果} q < \infty$$

$$(\sum_{m=1}^{M} a_m^p)^{1/p} \le M^{1/p} \max_{1 \le m \le M} a_m \text{ 如果} q = \infty$$

Proof. 第二种情况显然，只需要注意 $a_m \le \max_{1 \le m \le M} a_m, \forall m$.

考虑第一种情况，根据 $H\ddot{o}lder$ 不等式，有

$$\sum_{m=1}^{M} a_m^p = \sum_{m=1}^{M} (a_m^p \times 1) \le \left(\sum_{m=1}^{M} {a_m}^{p \times \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{m=1}^{M} 1^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} = M^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{m=1}^{M} a_m^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

两端开 p 次方即可. □

定理 5 ($H\ddot{o}lder$ 不等式的离散形式)**.** 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 令 $a_1, \ldots a_n$ 和 $b_1, \ldots, b_n$ 是非负实数. 那么

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

2024.05.13

1. 给出三次 Lagrange 元的局部插值误差 $\|u-\Pi_K u\|_{\ell,K}\,(0\leq\ell\leq 1)$ 估计结果

$$\|u-\Pi_K u\|_{0,K}\leq Ch^4|u|_{4,K}$$
$$\|u-\Pi_K u\|_{1,K}\leq Ch^3|u|_{4,K}$$

2. 给出三次 Lagrange 元求解 Poisson 问题的解的最优能量 (H^1) 范数误差估计 (最高几阶)、凸区域情形的 L^2 范数误差估计结果, 具有最高正则性假设下 (即给出 s 的最大值) 的负范数估计.

   H^1 误差估计：

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leq Ch^3\,|u|_{4,\Omega}$$

   L^2 误差估计：(假设区域光滑或凸)

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leq Ch\,\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leq Ch^4\,|u|_{4,\Omega}$$

   负范数估计：(假设正则性、逼近性)

$$\|u-u_h\|_{-2,\Omega}\leq Ch^3\,\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leq Ch^6\,|u|_{4,\Omega}$$

3. 利用对偶论证的方法证明重调和问题中的 H^1 误差估计定理

   Proof. 设 $\phi_g\in V$ 是变分问题

$$a\,(v,\phi_g)=(g,v),\forall v\in V$$

   的解. 有

$$\begin{aligned}(g,u-u_h)&=a\,(u-u_h,\phi_g)\\&=a\,(u-u_h,\phi_g-v_h)\qquad\qquad \forall v_h\in V_h\\&\leq\|u-u_h\|_{2,\Omega}\inf_{v_h\in V_h}\|\phi_g-v_h\|_{2,\Omega}\end{aligned}$$

   再利用

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}=\sup_{0\neq g\in H^{-1}(\Omega)}\frac{(g,u-u_h)}{\|g\|_{-1,\Omega}}$$

   □

4. 证明二阶积分公式

$$\int_K\phi\mathrm{dx}\approx\frac{S_K}{3}\sum_{i=4}^{6}\phi\,(a_i)$$

   对 $\phi\in P_2(K)$ 精确成立

Proof. 令

$$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \le i \le 3$$

$$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3, \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1, \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

对任意多项式 $\phi \in P_2(K)$, 有

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(a_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \phi(m_i)\phi_{i+3},$$

由积分公式

$$\iint_K \lambda_1^m \lambda_2^n \lambda_3^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2S_K \frac{m! \cdot n! \cdot k!}{(m+n+k+2)!}.$$

代入计算可得

$$\int_K \phi \mathrm{dx} \approx \frac{S_K}{3} \sum_{i=4}^{6} \phi\left(a_i\right)$$

□

5. 写出 Linbo Zhang 2009 论文中六点积分公式, 并说明阶数（积分点和权重可保留 8 位小数)

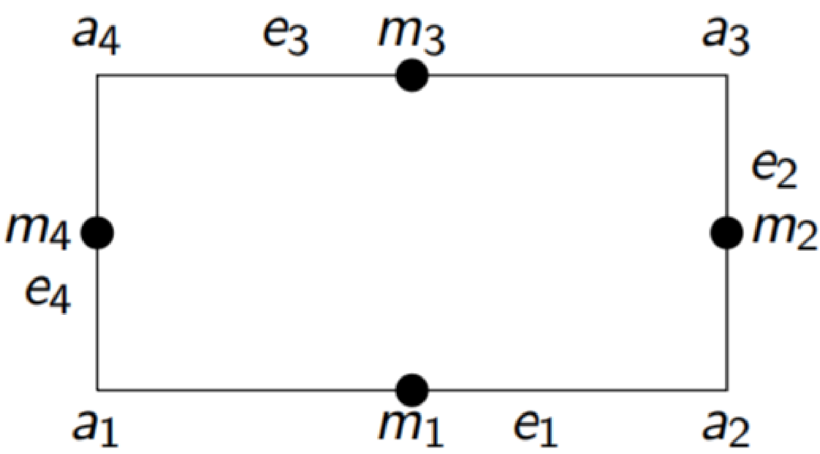
$$|T| \sum_{i=1}^{6} f(p_i) w_i = \int_T f(x) dx$$

其中，积分点、权重以及对应阶数由下列表格给出 (积分点由重心坐标表示，轮换对称)：

6-point order 3 rule on triangle		
Orbit	Abscissas	Weight
S_{111}	0.23193337 0.10903901	0.16666667

6-point order 4 rule on triangle		
Orbit	Abscissas	Weight
S_{21}	0.09157621	0.10995174
S_{21}	0.44594849	0.22338159

1. 如果 K 是矩形, $P_K = Q_1(K)$, 证明如图所示的边的中点值所确定的节点参数对 P_K 不是唯一可解的 (Hint 试着构造 $v \in Q_1(K)$ 使得 $v(m_i) = 0, 1 \le i \le 4$)



Proof. 令 $\xi = \frac{x-x_0}{\ell_1}$, $\quad \eta = \frac{y-y_0}{\ell_2}$.

考虑 $v = \xi\eta$. 显然 $v \in Q_1(K)$ 且 $v(m_i) = 0$, 且 $v \not\equiv 0$ □

2. 如果 K 是矩形, $P_K = \{1, x, y, \xi^2 - \eta^2\}$, 证明 $\mathcal{N}_K = \{N_i, 1 \le i \le 4\}$, 其中 $N_i(v) = \frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} v\mathrm{ds}, 1 \le i \le 4$ 对 P_K 是唯一可解的.

Proof. 易得 $P_K = \{1, \xi, \eta, \xi^2 - \eta^2\}$, 设 $v = a_1(\xi^2 - \eta^2) + a_2\xi + a_3\eta + a_4$.

由 $N_i(v) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$, 可得

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\eta^2) + a_2 + a3\eta + a_4 d\eta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\xi^2) + a_2 + a3\xi + a_4 d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\eta^2) - a_2 + a3\eta + a_4 d\eta = 0$$

$$\int_{-1}^{1} -a_1(1-\xi^2) - a_2 + a3\xi + a_4 d\xi = 0$$

即

$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_4) = 0$$
$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 + a_2 + a_3) = 0$$
$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 - a_2 + a_4) = 0$$
$$-\frac{2}{3}a_1 + 2(a_1 - a_2 + a_3) = 0$$

解得

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

从而 $v \equiv 0$. $\square$

3. 证明 Morley 有限元空间 V_h 满足 $V_h \not\subseteq H^2(\Omega)$ 且 $V_h \not\subseteq H^1(\Omega)$

Morley 元的有限元空间:

$V_h = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in P_2(K), \forall K \in T_h, v$ 在 T_h 的所有顶点连续，$\frac{\partial v}{\partial \nu_e}$ 在 $\mathcal{T}_h$ 所有内边 e 的中点连续 $\}$

Proof. 不妨设某条内边 $e = (-1,0) \to (1,0)$, 相邻单元为 K_1, K_2.

考虑 $v|_{K_1} = x^2 - 1, v|_{K_2} = 1 - x^2$. 满足 $v \in V_h$ 但 $v \notin H^1(\Omega)$ $\square$

4. 验证课件中给出的函数是 Morley 元的节点基函数

$$\begin{aligned} p_i =& 1 - (\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}) + 2\lambda_{i-1}\lambda_{i+1} \\ & - (\nabla\lambda_{i-1})^T \nabla\lambda_{i+1} \sum_{k=i-1,i+1} \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)}{\|\nabla\lambda_k\|^2}, \quad 1 \le i \le 3 \\ p_{i+3} =& \frac{\lambda_i(\lambda_i - 1)}{\|\nabla\lambda_i\|}, 1 \le i \le 3. \end{aligned}$$

$$N_i(v) = v(a_i), 1 \le i \le 3$$
$$N_{i+3}(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(m_i), 1 \le i \le 3$$

$$a_1 = (1,0,0), a_2 = (0,1,0), a_3 = (0,0,1)$$
$$m_1 = (0, 0.5, 0.5), m_2 = (0.5, 0, 0.5), m_3 = (0.5, 0.5, 0)$$

Proof. 注意到 $\nabla\lambda_i = \frac{1}{2|S_K|}(y_j - y_k, x_k - x_j)$,$e_i = (x_k - x_j, y_k - y_j)$. 从而 $-\nabla\lambda_i^\top$ 为 e_i 的外法向量，$-\frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|}^\top$ 为 e_i 的单位外法向量 ν_{e_i}。

$$N_1(p_1) = 1 - (0 + 0) + 2 * 0 * 0 - 0 = 0$$
$$N_1(p_2) = 1 - (1 + 0) - 2 * 1 * 0 - 0 = 0$$
$$N_1(p_4) = \frac{0}{\|\nabla\lambda_1\|} = 0$$

计算得

$$\nabla p_k = \left(-\nabla\lambda_i - \nabla\lambda_j + 2(\lambda_i\nabla\lambda_j + \lambda_j\nabla\lambda_i) - \nabla\lambda_i^\top \nabla\lambda_j \sum_{k=i,j} \frac{(2\lambda_k - 1)\nabla\lambda_k}{\|\nabla\lambda_k\|^2} \right) \quad k = 1,2,3$$

$$N_4(p_1) = \nabla p_1(m_1) \cdot \nu_{e_1} = 0 \cdot \nu_{e_1} = 0$$

$$\begin{aligned} N_4(p_2) &= \nabla p_2(m_1) \cdot \nu_{e_1} \\ &= \Big(- \nabla\lambda_2 + \nabla\lambda_1^\top \nabla\lambda_2 \frac{\nabla\lambda_1}{\|\nabla\lambda_1\|^2} \Big) \cdot \Big(- \frac{\nabla\lambda_1}{\|\nabla\lambda_1\|} \Big)^\top \\ &= 0.(\text{利用单位外法向量}) \end{aligned}$$

计算得

$$\nabla p_{i+3} = \frac{1}{\|\nabla\lambda_i\|}(2\lambda_i - 1)\nabla\lambda_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4(p_4) = \nabla p_4(m_1) \cdot \nu_{e_1} = \Big(- \frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|} \Big)^\top \cdot \Big(- \frac{\nabla\lambda_i}{\|\nabla\lambda_i\|} \Big) = 1$$

$$N_4(p_5) = \nabla p_5(m_1) \cdot \nu_{e_1} = 0 \cdot \nu_{e_1} = 0$$

结合对称性，验证完毕。 $\square$

2024.05.23

1. 证明二维单元 K 上迹定理

$$|e|^{-1}\|\xi\|_{0,e}^2 \leq C\Big(h_K^{-2}\|\xi\|_{0,K}^2 + |\xi|_{1,K}^2\Big),\ \forall \xi \in H^1(K)$$

Hint: 利用仿射变换以及尺度 (scailing) 技巧

Proof. 考虑参考单元 $\hat{K}$, 满足 $|\hat{e}| = 1$.

$$C(\|\hat{\xi}\|_{0,\hat{K}}^2 + |\hat{\xi}|_{1,\hat{K}}^2) = C\|\hat{\xi}\|_{1,\hat{K}}^2 \geq \|\hat{\xi}\|_{0,\hat{e}}^2 = \int_{\hat{e}} \hat{\xi}^2 d\hat{s} = \int_e \xi^2 \frac{|\hat{e}|}{|e|} ds = |e|^{-1}\|\xi\|_{0,e}^2$$

结合尺度变换关系以及

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{K}} \leq C \,\|B\|^m \, |\mathrm{det} B|^{-1/p} |v|_{m,p,K}$$

代入 $p = 2, m = 2$ 即得证.

□

2. 对于一维单元 e 证明

$$\begin{aligned} \left\|\xi - P_e^0\xi\right\|_{0,e} &\leq \frac{|e|}{\pi}|\xi|_{1,e}\ ,\ \forall \xi \in H^1(e) \\ \|\xi\|_{0,e} &\leq \frac{|e|}{\pi}|\xi|_{1,e}\ ,\ \forall \xi \in H_0^1(e) \end{aligned}$$

Hint: 考虑特征值问题 $-\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} = \lambda\xi$ 在 $\xi \in H^1(e)$ 和 $\xi \in H_0^1(e)$ 的特征函数以及最小特征值

Proof. 只需证第二个式子，不妨设一维单元 $e = [0, L]$.

考虑 $-\xi'' = \lambda\xi, \xi(0) = \xi(L) = 0$ 的特征值 $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z}^*$.

有

$$\int_0^L -\xi''\xi d\xi = \lambda \int_0^L \xi^2 d\xi$$

分部积分

$$\int_0^L (\xi')^2 d\xi = \lambda \int_0^L \xi^2 d\xi$$
$$\lambda\|\xi\|_{0,e}^2 = |\xi|_{1,e}^2$$

注意到最小特征值 $\lambda = \frac{\pi^2}{L^2}$, 进而

$$\frac{\pi^2}{L^2}\|\xi\|_{0,e}^2 \leq |\xi|_{1,e}^2$$

□

3. 证明

$$\|v - P_e v\|_{0,e} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v - c\|_{0,e}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\|v - P_e v\|_{0,e}^2 &= \int_e \left(v - \frac{1}{|e|}(\int_e v ds)^2\right) ds \\
&= \int_e v^2 ds - \frac{1}{|e|}(\int_e v ds)^2 \\
&\geq \int_e v^2 ds - 2c\int_e v ds + c^2|e| \qquad \text{（均值不等式）} \\
&= \int_e (v-c)^2 ds \\
&= \|v - c\|_{0,e}^2
\end{aligned}$$

□

4. 证明 Morley 元的 H^1 范数误差估计

Proof. 令 $\Pi_{h_0}^p, \Pi_{h_0}^{p,2}$ 为一次 Lagrange 元与二次 Lagrange 元的协调元插值算子. 记 $w_h = \Pi_{h_0}^p u$.

由协调元插值误差估计以及庞加莱不等式，有

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,h} &\leqslant \|u - w_h\|_{1,h} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} \\
&\quad + \|w_h - u_h - \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,h} \\
&\lesssim |u - w_h|_{1,h} + h|w_h - u_h|_{2,h} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} \\
&\lesssim h^2|u|_{3,\Omega} + \|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega},
\end{aligned} \tag{21}$$

下面估计 $\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega}$, 注意到:

$$\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)\|_{1,\Omega} = \sup_{0\neq g\in L^2(\Omega)} \frac{|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h))|}{\|g\|_{-1,\Omega}} \tag{22}$$

只需估计 $|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h))|$, 对 $g \in L^2(\Omega)$, 令 $\phi_g \in H_0^2(\Omega)$ 和 $\phi_{gh} \in V_{h_0}$ 分别是下面问题的解：

$$a(v, \phi_g) = (g, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

$$a_h(v_h, \phi_{gh}) = (g, \Pi_{h0}^{p,2} v_h), \quad \forall v_h \in V_{h0}.$$

由 H^2 范数误差估计以及椭圆方程正则性结果，得

$$|\phi_g - \phi_{gh}|_{2,h} \lesssim h|\phi_g|_{3,\Omega}, \quad \|\phi_g\|_{3,\Omega} \lesssim \|g\|_{-1,\Omega} \tag{23}$$

我们有

$$\begin{aligned}(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u_h)) &= a_h(w_h - u_h, \phi_{gh}) \\ &= a_h(u - w_h, \phi_g - \phi_{gh}) + (a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g)) \\ &\quad + \Big(a_h(w_h - u, \phi_g) - (g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u))\Big) + (g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)).\end{aligned}$$

下面只需要对上式右侧的四项分别估计：

对第一项，由算子有界性、协调元插值误差以及(23), 有

$$|a_h(u - w_h, \phi_g - \phi_{gh})| \lesssim h^2|u|_{3,\Omega}\|g\|_{-1,\Omega}. \tag{24}$$

对第四项, 有

$$|(g, \Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u))| \lesssim \|g\|_{-1,\Omega}\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)\|_{1,\Omega}.$$

由逆不等式与插值误差估计，有

$$\begin{aligned}|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{T\in T_h} |\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{1,T}^2 \\ &\lesssim \sum_{T\in T_h} h_T^{-2}|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)|_{0,T}^2 \\ &\lesssim \sum_{T\in T_h} h_T^{-2}|w_h - u|_{0,T}^2 \lesssim h^4|u|_{3,\Omega}^2,\end{aligned}$$

再利用庞加莱不等式，得到

$$\|\Pi_{h0}^{p,2}(w_h - u)\|_{1,\Omega} \lesssim h^2|u|_{3,\Omega} \tag{25}$$

对第二项，记

$$e_{h1} = \phi_{gh} - \Pi_{h0}^p\phi_g, \quad e_{h2} = \Pi_{h0}^p\phi_g - \phi_g,$$

则

$$\begin{aligned}&a_h(u, \phi_{gh} - \phi_g) - (f, \phi_{gh} - \phi_g) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\Big(a_h(u, e_{hi}) - (f, \Pi_{h0}^p e_{hi}) - (f, e_{hi} - \Pi_{h0}^p e_{hi})\Big).\end{aligned}$$

令 $i \in \{1, 2\}$. 由 Morley 元相容项误差估计，有

$$\left|a_h(u, e_{hi}) - (f, \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi})\right| \lesssim |u|_{3,\Omega}\left(h|e_{hi}|_{2,h} + |e_{hi} - \Pi_{h0}^{p,2} e_{hi}|_{1,h}\right).$$

另一方面，

$$|(f,e_{hi}-\Pi_{h0}^{p,2}e_{hi})|\lesssim\|f\|_{0,\Omega}\|e_{hi}-\Pi_{h0}^{p,2}e_{hi}\|_{0,\Omega}.$$

由协调元误差估计，得到

$$\|e_{h1}-\Pi_{h0}^{p,2}e_{h1}\|_{0,\Omega}+h\|e_{h1}-\Pi_{h0}^{p,2}e_{h1}\|_{1,h}\lesssim h^2|e_{h1}|_{2,h}.$$

对于 e_{h2}, 类似于式(25) 有

$$\|\Pi_{h0}^{p,2}e_{h2}\|_{1,\Omega}\lesssim h^2|\phi_g|_{3,\Omega}.$$

由协调元插值误差，有

$$|e_{h2}|_{1,\Omega}\lesssim h^2|\phi_g|_{3,\Omega}.$$

$$\|e_{h2}-\Pi_{h0}^{p,2}e_{h2}\|_{0,\Omega}\lesssim\|e_{h2}\|_{0,\Omega}\lesssim h^3|\phi_g|_{3,\Omega}.$$

总结上面的讨论得到

$$|a_h(u,\phi_{gh}-\phi_g)-(f,\phi_{gh}-\phi_g)|\lesssim h^2(|u|_{3,\Omega}+h\|f\|_{0,\Omega})|\phi_g|_{3,\Omega}.$$

结合(23), 得到

$$|a_h(u,\phi_{gh}-\phi_g)-(f,\phi_{gh}-\phi_g)|\lesssim h^2(|u|_{3,\Omega}+h\|f\|_{0,\Omega})\|g\|_{-1,\Omega}\tag{26}$$

对第三项，与第二项做类似讨论可得

$$|a_h(w_h-u,\phi_g)-(g,\Pi_{h0}^{p,2}(w_h-u))|\lesssim h^2|u|_{3,\Omega}\|g\|_{-1,\Omega}.\tag{27}$$

结合式(21)(22)(23)(25)(26)(27), 得到 Morley 元 H^1 误差估计：

$$\|u-u_h\|_{1,h}\lesssim h^2\left(|u|_{3,\Omega}+h\|f\|_{0,\Omega}\right).$$

□

2024.05.27

1. 证明 Poisson 问题的混合变分形式的弱解在一定光滑条件下是古典解

   Poisson 问题：

$$\begin{cases} \mathbf{p} - \nabla u = 0 \\ div\mathbf{p} = -f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

   混合变分形式：求 $(\mathbf{p}, u) \in H(\mathrm{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$, 使

$$\begin{cases} \int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u dx = 0, \quad \forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \\ \int_\Omega div\mathbf{p} v dx = \int_\Omega -f v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

   Proof. 当解足够光滑，由 $\int_\Omega div\mathbf{p} v = \int_\Omega -f v dx, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$，有

$$\int_\Omega (div\mathbf{p} + f) v dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

   由 v 的任意性，得到 $div\mathbf{p} + f = 0$. 即 $div\mathbf{p} = -f$.

   在 $\int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u dx = 0$ 中取 $\forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \cap (H_0^1(\Omega))^2$, 得到

$$\int_\Omega \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \nabla u) dx = 0$$

   由 $\mathbf{q}$ 的任意性，得到 $\mathbf{p} - \nabla u = 0$.

   再在 $\int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_\Omega div\mathbf{q} u = 0$ 中取 $\forall \mathbf{q} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, 得到

$$\int_{\partial\Omega} u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

   由 $\mathbf{q}$ 的任意性，得到 $u|_{\partial\Omega} = 0$. □

2. 推导 Stokes 问题的混合变分形式

   Stokes 问题:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0, \text{在}\Omega\text{内} \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Proof. 在 $-\Delta \mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f}$ 中，对 $\forall \mathbf{v}\in (H_0^1(\Omega))^2$ 有

$$\int_\Omega -\Delta \mathbf{u}\cdot \mathbf{v}+\nabla p\mathbf{v}dx=\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}dx$$

利用两次 Green 公式和 $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}=\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}=0$ 以及散度积分公式可得

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u}:\nabla \mathbf{v}+div\mathbf{v}pdx=\int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v}dx$$

在 $div\mathbf{u}=0$ 中，对 $\forall q\in L_0^2(\Omega)$，有

$$\int_\Omega div\mathbf{u}qdx=0$$

得到混合变分形式. □

3. 证明 inf-sup 条件的定理中 (3) 等价于 (1) 和 (2).

Proof. 已有 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3):

假设 (2) 成立，则对给定的 $u\in U^\perp$, 定义函数 $g\in U'$ 如下

$$g(w)=(u,w),\quad \forall w\in U \tag{$*$}$$

容易验证 $g\in U^0$, 又因为 B' 是 V 到 U^0 的同构，故存在 $\lambda\in V$, 使

$$b(w,\lambda)=(w,B'\lambda)=g(w) \tag{$\star$}$$

又由 $(*)$ 易证 $||g||_{U'}=||u||_U$, 从而

$$||u||_U=||g||_{U'}=||B'\lambda||_{U'}\geq \beta||\lambda||_V.$$

在 $(\star)$ 中令 $w=u$, 则有

$$\sup_{v\in V}\frac{b(u,v)}{||v||_V}\geq \frac{b(u,\lambda)}{||\lambda||_V}=\frac{(u,u)}{||\lambda||_V}\geq \beta||u||_U,$$

从而 $B:U^\perp\to V'$ 满足 Babuška 定理的三个条件，故 B 是一个同构映射.

(3) $\Rightarrow$ (1):

因 (3) 成立，故 $B:U^\perp\to V'$ 是一个同构，对给定的 $v\in V$,

$$\begin{aligned}||v||_V&=\sup_{g\in V'}\frac{\langle g,v\rangle}{||g||_{V'}}=\sup_{u\in U^\perp}\frac{\langle Bu,v\rangle}{||Bu||_{V'}}\\&=\sup_{u\in U^\perp}\frac{b(u,v)}{||Bu||_{V'}}\leq \sup_{u\in U^\perp}\frac{b(u,v)}{\beta||u||_U}\leq \frac{1}{\beta}\sup_{u\in U}\frac{b(u,v)}{||u||_U},\end{aligned}$$

从而 (1) 成立，证毕.

□

4. 如果 $\dim U_h = \dim V_h$, 离散的 inf-sup 条件

$$\inf_{u_h\in U_h}\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(u_h,v_h)}{\|u_h\|_U\|v_h\|_V}=\beta_h>0$$

成立. 说明离散问题：求 $u_h\in U_h$ 使得

$$b(u_h,v_h)=\langle f,v\rangle_{V'\times V}$$

存在唯一解.

(注：该结果说明对于离散问题只需验证 Babuška 定理中 (b) 对应的离散形式和维数相等，无需验证 (c) 的离散形式)

Proof. 定义算子 B 以及对偶算子 B'

$$B:U\to V' \quad < Bu,v >_{V'\times V}=b(u,v)\quad \forall u\in U,v\in V$$

$$B':V\to U' \quad < B'v,u >_{U'\times U}=b(u,v)\quad \forall u\in U,v\in V.$$

当 $\dim U=\dim V$ 时，根据闭值域定理, 算子 B 有连续逆算子 $B^{-1}:V'\to U$,B' 有连续逆算子 $(B')^{-1}:U'\to V$, 满足

$$\|(B')^{-1}\|=\|(B^{-1})'\|=\|B^{-1}\|$$

从而有

$$\inf_{u_h\in U_h}\sup_{v_h\in V_h}\frac{b(u_h,v_h)}{\|u_h\|_U\|v_h\|_V}=\inf_{v_h\in V_h}\sup_{u_h\in U_h}\frac{b(u_h,v_h)}{\|u_h\|_U\|v_h\|_V}=\beta_h>0$$

从而 (b) 与 (b') 成立，进而可以推出 (b) 与 (c) 成立.

□

5. 证明 $H(div,\Omega)$ 空间在范数 $\|\cdot\|_{div,\Omega}$ 下是完备的

$$\|\cdot\|_{div,\Omega}:=(\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)}+\|div(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

Proof. 设 $\{u_m=(u^1,\cdots,u^n)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $(H(div,\Omega),\|\cdot\|_{div,\Omega})$ 中的 Cauchy 列。

对于 $i\in\{1,\cdots,n\}$，有

$$(u^i_m-u^i_l,u^i_m-u^i_l)=\left\|u^i_m-u^i_l\right\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|u_m-u_l\|^2_{div,\Omega}$$

由于 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $(H(div,\Omega),\|\cdot\|_{div,\Omega})$ 中的 Cauchy 列，有 $\{u_m^i\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 列。由于 $L^2(\Omega)$ 的完备性，有 $u_m^i \to u^i \in L^2(\Omega), \quad m\to\infty$. 因此 $u=(u^1,\cdots,u^n)\in\{L^2(\Omega)\}^n$

类似地,

$$(\mathrm{div}\,(u_m-u_l),\mathrm{div}\,(u_m-u_l))_{L^2(\Omega)} = \|\mathrm{div}\,u_m-\mathrm{div}\,u_l\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|u_m-u_l\|^2_{H(div,\Omega)}$$

因此 $\{\mathrm{div}\,u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是 Cauchy 列。由于 $L^2(\Omega)$ 的完备性，有 $\mathrm{div}u_m \to g\in L^2(\Omega), \quad m\to\infty$

下面只需要说明 $divu=g$, 这等价于证明 $\int_\Omega g\phi dx = -\int_\Omega u\cdot\nabla\phi dx, \quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$. 事实上，只需注意到

$$\int_\Omega \phi\,\mathrm{div}\,u_m dx = -\int_\Omega u_m\cdot\nabla\phi dx.$$

$$\mathrm{div}\,u_m\to g \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \implies \int_\Omega \phi\,\mathrm{div}\,u_m dx \to \int_\Omega \phi g dx$$

$$u_m\to u \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} \implies \int_\Omega u_m\cdot\nabla\phi dx \to \int_\Omega u\cdot\nabla\phi dx.$$

即可得到。 $\square$

2024.06.03

1. 验证 Stokes 问题的 inf-sup 条件证明中 $\mathbf{v}_2$ 满足

$$\mathrm{div}\mathbf{v}_2 = 0,\ \mathbf{v}_2 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0,\ \mathbf{v}_2 \cdot \tau|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1 \cdot \tau|_{\partial\Omega}$$

Proof.

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v}_2 = \mathrm{div}\ \mathrm{curl}\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \nu|_{\partial\Omega} = \mathrm{curl} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = \nabla\psi \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\tau}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \mathrm{curl}\psi \cdot \tau|_{\partial\Omega} = \nabla\psi \cdot \nu|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = -\mathbf{v}_1 \cdot \tau|_{\partial\Omega}$$

□

2. 证明在 $P_2 - P_0$ 元分析中构造的插值算子 Π_h^2 满足以下三条性质

(a) $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Proof. 由 $v \in H^1(\Omega)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边两个端点处连续 (=0)，在公共边积分值连续 ($\int_{e_i} \Pi_h^2 v ds = \int_{e_i} v ds$).
由 $\Pi_h^2 v|_K \in P_2(K)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在公共边上连续，即 $\Pi_h^2 v \in H^1(\Omega)$.
类似的，由 $v \in H_0^1(\Omega)$, 可得 $\Pi_h^2 v$ 在边界为 0，即 $\Pi_h^2 v \in H_0^1(\Omega)$. □

(b) $\|\Pi_h^2 v\|_{0,K} \leq C\left(\|v\|_{0,K} + h_K |v|_{1,K}\right), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Proof. 通过尺度变换技巧变换到参考单元：

$$|\Pi_h^2 v|_{1,K} = |\widehat{\Pi_h^2 v}|_{1,\hat{K}} \leq C||\hat{v}||_{1,\hat{K}} \leq C(h_K^{-1}|v|_{0,K} + |v|_{1,K}).$$

再利用逆估计得到结果. □

(c) $b(\Pi_h^2 \mathbf{v}, q_h) = b(\mathbf{v}, q_h), \forall q_h \in Q_h$

Proof. 由 $\Pi_h^2 v$ 的定义有

$$\begin{aligned}
&\int_e (v - \Pi_h^2 v) \cdot \nu q_h ds = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall e \in \partial K \\
\Rightarrow &\int_{\partial K} (v - \Pi_h^2 v) \cdot \nu q_h ds = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \\
\Rightarrow &\int_K \mathrm{div}(v - \Pi_h^2 v) q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall K \subset \Gamma_h \\
\Rightarrow &\int_\Omega \mathrm{div}(v - \Pi_h^2 v) q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \\
\Rightarrow & b(v - \Pi_h^2 v, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h
\end{aligned}$$

□

3. 证明 Stokes 离散问题的分析中构造的 Fortin 插值 Π_h 满足误差估计

$$\|\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch\,|u|_{2,\Omega}$$

思考当 $u\in H^3(\Omega)$ 时，是否有

$$\|\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le Ch^2\,|u|_{3,\Omega}$$

Proof.

$$u-\Pi_h u = u-\Pi_h^1 u - \Pi_h^2(u-\Pi_h^1 u)$$

其中 Π_h^1 为 Scott-Zhang 插值. 有

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \le \|u-\Pi_h^1 u\|_{1,\Omega} + \|\Pi_h^2(u-\Pi_h^1 u)\|_{1,\Omega}$$

对于第一项，利用 Scott-Zhang 插值误差结果

$$\|u-\Pi_h^1 u\|_{1,\Omega} \le ch|u|_{2,\Omega}$$

对第二项，利用逆估计

$$\|\Pi_h^2(u-\Pi_u^1)\|_{1,K} \le Ch_K^{-1}\|\Pi_h^2(u-\Pi_h^1 u)\|_{0,K} \le Ch_K^{-1}(\|u-\Pi_h^1 u\|_{0,K}+h_K|u-\Pi_h^1 u|_{1,K})$$

再利用 Scott-Zhang 插值误差结果

$$\|u-\Pi_h^1 u\|_{0,\Omega} \le Ch^2|u|_{2,\Omega}$$

故

$$\|\Pi_h^2(u-\Pi_h^1 u)\|_{1,\Omega} \le Ch|u|_{2,\Omega}$$

因此

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \le Ch\,|u|_{2,\Omega}$$

当 $u\in H^3(\Omega)$ 时，证明方法类似.

□

4. 证明 P_1-P_0 元不满足离散的 LBB 条件.(Hint: 可通过数维数的方法导出这时 $\dim V_h<\dim Q_h$, 从而说明存在 $q_h\in Q_h$ 使得 $b(v_h,q_h)=0.\forall v_h\in V_h$)

Proof. 对于给定的剖分，记 t 为三角形数量，v_I 为内部顶点数量，v_B 为边界顶点数量. 由欧拉公式，有 $t=2v_I+v_B-2$.

由空间定义，我们有 $\dim V_h=2v_I,\dim Q_h=t-1$.

定义算子 $B_h:V_h\to {Q_h}'$, 使得 $\int_\Omega(B_h(v_h)-\nabla\cdot v_h)q_h dx=0,\quad \forall q_h\in Q_h$, 并记其对偶算子为 $B_h^\top:Q_h\to {V_h}'$.

当 $v_B>3$ 时，有

$$\dim(\ker(B_h^\top))=\dim(Q_h)-\dim(\mathrm{im}(B_h^\top))\ge\dim(Q_h)-\dim(V_h)=t-1-2v_I=v_B-3>0$$

从而存在 $q_h\in Q_h$ 使得 $b(v_h,q_h)=0.\forall v_h\in V_h$ □