有限元方法

马睿

rui.ma@bit.edu.cn

课程名称：现代有限元方法
课程学时：32学时　课程学分：2学分
参考书目：

1. 杜其奎、陈金如. 有限元方法的数学理论. 科学出版社. 2012.
2. 王烈衡、许学军. 有限元方法的数学基础. 科学出版社. 2007.
3. 石钟慈、王鸣. 有限元方法的数学基础. 科学出版社. 2010.
4. S. C. Brenner and L. R. Scott. The mathematical theory of fintie element methods. Third Edition, Springer, 2008.
5. P. G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. SIAM. 2002.

成绩：期末60 + 平时成绩25 + 大作业15
作业要求：书写清楚步骤完整独立完成

课程主要内容

- Sobolev空间和变分原理
- 有限元和有限元空间
- 协调有限元方法的误差分析
- 数值积分和等参元
- 非协调有限元方法
- 混合有限元方法

Sobolev空间

设Ω是$\mathbb{R}^n$中的一个有界连通区域，记边界为$\partial\Omega$. $x=(x_1,\cdots,x_n)$表示空间$\mathbb{R}^n$中的点. 当m非负整数或∞时：

- $C^m(\Omega)$: Ω上m次连续可微的函数组成的集合
- $C^m(\overline{\Omega})$: $\overline{\Omega}$上m次连续可微的函数组成的集合
- $C_0^m(\Omega)$: $C^m(\Omega)$中紧支集都包含在Ω内函数的集合
- $m=0$, 记$C(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$和$C_0(\Omega)$

多重指标$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，记$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，偏导数算子

$$\partial^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{|\alpha_1|}\cdots\partial x_1^{|\alpha_n|}}.$$

$C^m(\overline{\Omega})$在如下范数下是Banach空间

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})}=\max_{|\alpha|\leq m}\max_{x\in\overline{\Omega}}|\partial^\alpha u(x)|,\quad u\in C^m(\overline{\Omega})$$

L^p空间

f是Ω上实值Lebesgue可测函数，记Lebesgue积分$\int_\Omega f(x)\ \mathrm{dx}$

$$\|f\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

$p = 2$, 记$\|f\|_{0,\Omega}$

定义$L^p(\Omega)$空间：$L^p(\Omega) = \{f \mid \|f\|_{0,p,\Omega} < \infty\},\ 1 \le p \le \infty$

L^p空间

f是Ω上实值Lebesgue可测函数，记Lebesgue积分$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\|f\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\right)^{1/p},\ 1 \le p < \infty$$

$$\|f\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

$p = 2$, 记$\|f\|_{0,\Omega}$

定义$L^p(\Omega)$空间: $L^p(\Omega) = \{f \mid \|f\|_{0,p,\Omega} < \infty\},\ 1 \le p \le \infty$

空间$L^p(\Omega)$中两个函数f, g如果$\|f - g\|_{0,p,\Omega} = 0$，则视为同一函数

定理 对于$1 \le p \le \infty$，$L^p(\Omega)$是Banach空间.

定理 对于$1 \le p < \infty$，$C_0^\infty(\Omega)$在L^p中稠密.

Young不等式 $1 \le p, q \le \infty, 1 = 1/p + 1/q,\ a, b \ge 0$

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Hölder不等式(HW:证) $1 \le p, q \le \infty, 1 = 1/p + 1/q,\ f, g \in L^p(\Omega)$

$$\|f \cdot g\|_{0,1,\Omega} \le \|f\|_{0,p,\Omega}\|g\|_{0,q,\Omega}$$

Schwarz不等式 $p, q = 2$，Hölder不等式为

$$\|f \cdot g\|_{0,1,\Omega} \le \|f\|_{0,\Omega}\|g\|_{0,\Omega}$$

Minkowski不等式 $1 \le p \le \infty,\ f, g \in L^p(\Omega)$

$$\|f + g\|_{0,p,\Omega} \le \|f\|_{0,p,\Omega} + \|g\|_{0,p,\Omega}$$

Sobolev空间

广义导数： Ω上局部Lebesgue可积函数u，存在另一个Ω上局部Lebesgue可积函数v满足

$$\int_\Omega v\phi \ \mathrm{dx} = (-1)^\alpha \int_\Omega u\partial^\alpha \phi \ \mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

称v为u的一个广义导数，记作$\partial^\alpha u$ (古典导数的推广)

Sobolev空间

广义导数：Ω上局部Lebesgue可积函数u，存在另一个Ω上局部Lebesgue可积函数v满足

$$\int_\Omega v\phi \, \mathrm{dx} = (-1)^\alpha \int_\Omega u\partial^\alpha \phi \, \mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

称v为u的一个广义导数，记作$\partial^\alpha u$ (古典导数的推广)

例 设$\Omega = (-1, 1)$，

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Sobolev空间

广义导数：Ω上局部Lebesgue可积函数u，存在另一个Ω上局部Lebesgue可积函数v满足

$$\int_\Omega v\phi \, \mathrm{dx} = (-1)^\alpha \int_\Omega u\partial^\alpha \phi \, \mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

称v为u的一个广义导数，记作$\partial^\alpha u$ (古典导数的推广)

例 设$\Omega = (-1, 1)$，

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

一阶广义导数$\partial^1 f = g$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Sobolev空间

广义导数：Ω上局部Lebesgue可积函数u，存在另一个Ω上局部Lebesgue可积函数v满足

$$\int_\Omega v\phi \, \mathrm{dx} = (-1)^\alpha \int_\Omega u\partial^\alpha \phi \, \mathrm{dx}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

称v为u的一个广义导数，记作$\partial^\alpha u$ (古典导数的推广)

例 设$\Omega = (-1, 1)$，

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

一阶广义导数$\partial^1 f = g$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

不存在二阶广义导数

Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$: 对于非负整数m和实数$p \in [1, \infty]$，定义

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le m\}$$

及Sobolev范数$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \, \mathrm{dx} \Big)^{1/p}, \ 1 \le p \le \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \le m} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)|$$

则$W^{m,p}(\Omega)$是Banach空间(HW证). 当$p = 2$，记$H^m(\Omega)$，相应范数$\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$: 对于非负整数m和实数$p \in [1,\infty]$，定义

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

及Sobolev范数$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \,\mathrm{dx}\right)^{1/p}, \ 1 \leq p \leq \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|\leq m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\partial^\alpha u(x)|$$

则$W^{m,p}(\Omega)$是Banach空间(HW证). 当$p=2$，记$H^m(\Omega)$，相应范数$\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

$W^{m,p}(\Omega)$半范数

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|= m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p \,\mathrm{dx}\right)^{1/p}, \ 1 \leq p \leq \infty$$

$$|u|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|= m} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\partial^\alpha u(x)|$$

- $W^{m,p}(\Omega)$: $C^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间(等价定义)
- $W_0^{m,p}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间

当$p=2$, 记$H^m(\Omega)$和$H_0^m(\Omega)$，都是Hilbert空间. 定义$H_0^m(\Omega)$的对偶空间为$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))'$，对偶范数

$$\|f\|_{-m,\Omega}=\sup_{v\in H_0^m(\Omega)}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

- $W^{m,p}(\Omega)$: $C^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间(等价定义)
- $W_0^{m,p}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间

当$p=2$, 记$H^m(\Omega)$和$H_0^m(\Omega)$，都是Hilbert空间．定义$H_0^m(\Omega)$的对偶空间为$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))'$，对偶范数

$$\|f\|_{-m,\Omega}=\sup_{v\in H_0^m(\Omega)}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

定理[Poincaré-Friedrich不等式] 设Ω单连通，且至少一个方向有界，则对任意非负整数m，存在正常数C_m使得

$$\|v\|_{m,\Omega}\leq C_m|v|_{m,\Omega}\quad\forall v\in H_0^m(\Omega)$$

- $W^{m,p}(\Omega)$: $C^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间(等价定义)
- $W_0^{m,p}(\Omega)$: $C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m.p,\Omega}$下的完备化空间

当$p=2$, 记$H^m(\Omega)$和$H_0^m(\Omega)$，都是Hilbert空间．定义$H_0^m(\Omega)$的对偶空间为$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))'$，对偶范数

$$\|f\|_{-m,\Omega}=\sup_{v\in H_0^m(\Omega)}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}$$

定理[Poincaré-Friedrich不等式]　设Ω单连通，且至少一个方向有界，则对任意非负整数m，存在正常数C_m使得

$$\|v\|_{m,\Omega}\le C_m|v|_{m,\Omega}\quad\forall v\in H_0^m(\Omega)$$

定理　如果区域Ω的边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的且$1\le p<\infty$，则$C^\infty(\overline{\Omega})$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密．

Sobolev空间嵌入定理

定义 称X嵌入(连续地)到Y，记$X \hookrightarrow Y$，如果(i) $X \subset Y$. (ii)由$Ix = x$定义的恒同算子(内射)$I: X \to Y$是连续的，即存在与x无关的常数C使得$\|Ix\|_Y \le C\|x\|_X$

定义 称X紧嵌入到Y，记$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$，如果(i) $X \subset Y$. (ii)恒同算子I是紧的：X中有界集为Y中的紧集，即设$B \subset X$是X的一个有界集，则在B中存在一序列使得在Y中收敛

Sobolev空间嵌入定理

定义 称X嵌入(连续地)到Y，记$X \hookrightarrow Y$，如果(i) $X \subset Y$. (ii)由$Ix = x$定义的恒同算子(内射)$I : X \to Y$是连续的，即存在与x无关的常数C使得$\|Ix\|_Y \le C\|x\|_X$

定义 称X紧嵌入到Y，记$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$，如果(i) $X \subset Y$. (ii)恒同算子I是紧的：X中有界集为Y中的紧集，即设$B \subset X$是X的一个有界集，则在B中存在一序列使得在Y中收敛

定理 设有界区域Ω边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的，且$1 \le p \le \infty, m \ge 1$，则

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega),\ 1 \le q \le \frac{np}{n-mp} & \text{当} m < \frac{n}{p} \\ L^q(\Omega),\ 1 \le q < \infty & \text{当} m = \frac{n}{p} \\ C(\overline{\Omega}) & \text{当} m > \frac{n}{p} \end{cases}$$

（事实上，上述也是紧嵌入的，对于无界区域Ω只有嵌入）

当$n=2$，有$H^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$以及

$$H^1(\Omega) \not\hookrightarrow C(\overline{\Omega}),\ H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$$

在$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$上，$f(x) = \log|\log|x||$有$f \in H^1(\Omega)$但$f \notin C(\overline{\Omega})$（感兴趣可以去证一下）
当$n=3$，$H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^6(\Omega)$

迹定理

由嵌入定理，当$m > \frac{n}{p}$时，$W^{m,p}(\Omega)$可紧嵌入到$C(\overline{\Omega})$，因此可以将$u \in C(\overline{\Omega})$在$\partial\Omega$上的值作为$u \in W^{m,p}(\Omega)$在$\partial\Omega$上的值.

迹定理

由嵌入定理，当$m > \frac{n}{p}$时，$W^{m,p}(\Omega)$可紧嵌入到$C(\overline{\Omega})$，因此可以将$u \in C(\overline{\Omega})$在$\partial\Omega$上的值作为$u \in W^{m,p}(\Omega)$在$\partial\Omega$上的值.

当$m \geq 1$且$\partial\Omega$是m阶光滑时，存在只跟Ω有关的常数C_Ω使得

$$\|v\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C_\Omega \|v\|_{m,p,\Omega} \ \forall v \in C^m(\overline{\Omega})$$

迹定理

由嵌入定理，当$m > \frac{n}{p}$时，$W^{m,p}(\Omega)$可紧嵌入到$C(\overline{\Omega})$，因此可以将$u \in C(\overline{\Omega})$在$\partial\Omega$上的值作为$u \in W^{m,p}(\Omega)$在$\partial\Omega$上的值.

当$m \geq 1$且$\partial\Omega$是m阶光滑时，存在只跟Ω有关的常数C_Ω使得

$$\|v\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C_\Omega \|v\|_{m,p,\Omega} \ \forall v \in C^m(\overline{\Omega})$$

对$u \in W^{m,p}(\Omega)$，由于$C^\infty(\overline{\Omega})$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密，存在$\{u_k\} \in C^m(\bar{\Omega})$

$$\|u - u_k\|_{0,p,\partial\Omega} \to 0 \text{ 当} k \to \infty$$

故$\{u_k\}$在$L^p(\partial\Omega)$中收敛，记极限为$u|_{\partial\Omega}$. (与所选序列无关)

迹定理

由嵌入定理，当$m > \frac{n}{p}$时，$W^{m,p}(\Omega)$可紧嵌入到$C(\overline{\Omega})$，因此可以将$u \in C(\overline{\Omega})$在$\partial\Omega$上的值作为$u \in W^{m,p}(\Omega)$在$\partial\Omega$上的值.

当$m \geq 1$且$\partial\Omega$是m阶光滑时，存在只跟Ω有关的常数C_Ω使得

$$\|v\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C_\Omega \|v\|_{m,p,\Omega} \ \forall v \in C^m(\overline{\Omega})$$

对$u \in W^{m,p}(\Omega)$，由于$C^\infty(\overline{\Omega})$在$W^{m,p}(\Omega)$中稠密，存在$\{u_k\} \in C^m(\bar{\Omega})$

$$\|u - u_k\|_{0,p,\partial\Omega} \to 0 \text{ 当} k \to \infty$$

故$\{u_k\}$在$L^p(\partial\Omega)$中收敛，记极限为$u|_{\partial\Omega}$. (与所选序列无关)

称$u|_{\partial\Omega}$是函数$u \in W^{m,p}(\Omega)$的**迹**，**算子**$\mathrm{tr} : u \to u|_{\partial\Omega}$**称为迹算子**

迹定理

定理 设Ω边界$\partial\Omega$是Lipschitz连续的且分片m阶光滑，$mp < n$且$p \leq q \leq (n-1)p/(n-mp)$，则

$$\mathrm{tr} : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega),$$

如果$mp = n$，则上式对$1 \leq p \leq q < \infty$也成立

迹定理

定理 设Ω边界∂Ω是Lipschitz连续的且分片m阶光滑，$mp < n$且$p \leq q \leq (n-1)p/(n-mp)$，则

$$\mathrm{tr} : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega),$$

如果$mp = n$，则上式对$1 \leq p \leq q < \infty$也成立

特别地，当∂Ω是Lipschitz连续，

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

对于空间$W_0^{1,p}(\Omega)$，有

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

迹定理

定理　设Ω边界∂Ω是Lipschitz连续的且分片m阶光滑，$mp < n$且$p \le q \le (n-1)p/(n-mp)$，则

$$\mathrm{tr} : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega),$$

如果$mp = n$，则上式对$1 \le p \le q < \infty$也成立

特别地，当∂Ω是Lipschitz连续，

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

对于空间$W_0^{1,p}(\Omega)$，有

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \mid v \in W^{1,p}(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$$

大部分内容见杜、陈．关于Sobolev空间详细介绍可参考R. A. Admas, Sobolev spaces, 1975.（有中文翻译）

变分原理

Poisson方程的Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ 在\Omega内 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{1}$$

变分原理

Poisson方程的Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ \text{在}\Omega\text{内} \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{1}$$

假设解$u \in C^2(\overline{\Omega})$. 对任意$v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_\Omega v\Delta u \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}\,.$$

变分原理

Poisson方程的Dirichlet边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ 在\Omega内 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{1}$$

假设解$u \in C^2(\overline{\Omega})$. 对任意$v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$-\int_\Omega v\Delta u \ \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \ \mathrm{dx}\,.$$

利用Green公式和$v|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{dx} = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \ \mathrm{dx} = \int_\Omega fv \ \mathrm{dx}$$

令

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \ \mathrm{dx}$$

Poisson方程的变分形式

则

$$a(u, v) = (f, v)$$

不仅对$v \in C_0^\infty(\Omega)$成立，而且由$H_0^1(\Omega)$定义，对$v \in H_0^1(\Omega)$也成立

Poisson方程的变分形式

则

$$a(u,v) = (f,v)$$

不仅对$v \in C_0^\infty(\Omega)$成立，而且由$H_0^1(\Omega)$定义，对$v \in H_0^1(\Omega)$也成立

令$f \in L^2(\Omega)$, g是$u \in H^1(\Omega)$的迹，则问题(1)的变分形式是：
求$u \in H^1(\Omega)$且$u|_{\partial\Omega} = g$使得

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

称问题(2)的解为问题(1)的**弱解，也称(2)为(1)的弱形式**

定理 设$f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$. 如果$u \in C^2(\overline{\Omega})$是问题(1)的古典解，则它是弱解. 反过来，如果$u$是问题(2)的弱解且$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则它是古典解.

证明 第一个结论显然。如果u是问题(2)的弱解且$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则在(2)中取$v \in C_0^\infty(\Omega)$，利用Green公式得到

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \ \mathrm{dx} = 0.$$

推出$\Delta u + f = 0$几乎处处成立(利用L^p**空间性质**)，因为Δu和f都是连续函数，因此$\Delta u + f = 0$. 又由迹的定义，在$\partial\Omega$上u等于g. 故u满足(1)，即u是古典解.

证明 第一个结论显然。如果u是问题(2)的弱解且$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则在(2)中取$v \in C_0^\infty(\Omega)$，利用Green公式得到

$$\int_\Omega (\Delta u + f) v \, \mathrm{dx} = 0.$$

推出$\Delta u + f = 0$几乎处处成立(利用L^p**空间性质**)，因为Δu和f都是连续函数，因此$\Delta u + f = 0$. 又由迹的定义，在$\partial\Omega$上u等于g. 故u满足(1)，即u是古典解.

设已知$u_0 \in H^1(\Omega)$满足$u_0|_{\partial\Omega} = g$. 令$u = u^* + u_0$，则(2)等价于：求$u^* \in H_0^1(\Omega)$使得

$$a(u^*, v) = (f, v) - a(u_0, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

注： 当边界$\partial\Omega$和函数f, g足够光滑时，问题(1)的弱解的正则性也会变高.

Neumann边值问题的变分形式

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \ 在\Omega内 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{3}$$

问题(3)解不唯一，相差一个常数意义下唯一. 可加条件保证唯一性，如

$$\int_{\Omega} u \ \mathrm{dx} = 0.$$

Neumann边值问题的变分形式

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{3}$$

问题(3)解不唯一，相差一个常数意义下唯一. 可加条件保证唯一性，如

$$\int_\Omega u \, \mathrm{dx} = 0.$$

假设解$u \in C^2(\overline{\Omega})$. 对任意$v \in C^\infty(\overline{\Omega})$，用Green公式可得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{ds} = \int_\Omega f v \, \mathrm{dx}$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{dx} = \int_\Omega f v \, \mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g v \, \mathrm{ds}$$

由于$C^\infty(\overline{\Omega})$在$H^1(\Omega)$的稠密性，上式对$v \in H^1(\Omega)$也成立

令$f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$，则问题(3)的变分形式是：求$u \in H^1(\Omega)$使得

$$a(u,v) = (f,v) + \int_{\partial\Omega} gv \,\mathrm{ds}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

称问题(4)的解为问题(3)的**弱解**，也称(4)为(3)的**弱形式**. 问题(4)有解的必要条件是(取$v=1$可得)

$$\int_\Omega f \,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{ds} = 0$$

定理 设$f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$. 如果$u \in C^2(\overline{\Omega})$是问题(3)的古典解，则它是弱解. 反过来，如果$u$是问题(4)的弱解且$u \in C^2(\overline{\Omega})$，则它是古典解.

证明 第一个结论显然。如果u是问题(4)的弱解且$u \in C^2(\overline{\Omega})$. 第一步在(4)中取$v \in C_0^\infty(\Omega)$，利用Green公式和$v|_{\partial\Omega} = 0$得到

$$\int_\Omega (\Delta u + f)v \,\mathrm{dx} = 0.$$

推出$\Delta u + f = 0$. 第二步在(4)中取$v \in C^\infty(\overline{\Omega})$，注意到$\Delta u + f = 0$，可得

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{ds} = \int_\Omega g v \,\mathrm{ds}$$

由v的任意性得到u满足边界条件$\frac{\partial u}{\partial n} = g$，故$u$是古典解.

重调和方程的变分形式

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

重调和方程的变分形式

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在}\Omega\text{内} \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

假设解$u \in C^4(\overline{\Omega})$. 对任意$v \in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega v\Delta^2 u \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}\,.$$

重调和方程的变分形式

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

假设解$u \in C^4(\overline{\Omega})$. 对任意$v \in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega v\Delta^2 u \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}.$$

利用两次Green公式和$v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$可得

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \,\mathrm{dx} = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\Big) \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}$$

由于$C_0^\infty(\Omega)$在$H_0^2(\Omega)$的稠密性，上式对$v \in H_0^2(\Omega)$也成立

类似于$H_0^1(\Omega)=\{v \mid v\in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega}=0\}$有

$$H_0^2(\Omega)=\{v \mid v\in H^2(\Omega), v|_{\partial\Omega}=\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0\}$$

设边界的法向$n=(n_1,\cdots,n_n)$，这里法向导数$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega}=\sum_{i=1}^n n_i \mathrm{tr}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$

令$f\in L^2(\Omega)$，则问题(5)的变分形式是：求$u\in H_0^2(\Omega)$使得

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \,\mathrm{dx}=(f,v), \quad \forall v\in H_0^2(\Omega). \tag{6}$$

称问题(6)是(5)的**弱解**，也称(6)为(5)的**弱形式**.

定理　设$f\in C(\overline{\Omega})$. 如果$u\in C^4(\overline{\Omega})$是问题(5)的古典解，则它是弱解. 反过来，如果$u$是问题(6)的弱解且$u\in C^4(\overline{\Omega})$，则它是古典解.
(证明类似Poisson方程的Dirichlet问题)

注：(6)等价的变分形式

注意到Laplace算子满足$\Delta = \nabla \cdot \nabla$，利用导数算子的交换性$\Delta^2 = (\nabla \cdot \nabla)^2 = \nabla \cdot (\nabla \cdot \nabla^2)$(这里$\nabla^2$表示二阶导数，$\nabla \cdot \nabla^2$表示按行对$\nabla^2$求散度). 故对

$$\int_\Omega v\Delta^2 u \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}\,.$$

利用两次Green公式和$v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$可得

$$\int_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 v \,\mathrm{dx} = \int_\Omega \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i x_j} \,\mathrm{dx} = \int_\Omega fv \,\mathrm{dx}$$

因此(6)等价于变分形式：求$u \in H_0^2(\Omega)$使得

$$\int_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 v \,\mathrm{dx} = (f, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{7}$$

作业

1. 利用Young不等式证明Hölder不等式
2. 证明$W^{1,p}(\Omega)$是Banach空间
3. 设$\Omega=(-1,1)$，

   $$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & 0\leq x<1 \\ -x, & -1<x<0 \end{cases}$$

   证明

   $$g(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ -1, & -1<x<0 \end{cases}$$

   是f的一阶广义导数
4. 推导Poisson方程的混合边值问题

   $$\begin{cases} -\Delta u=f, \text{ 在}\Omega\text{内} \\ u|_{\Gamma_1}=g_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2}=g_2 \end{cases}$$

   的变分形式，这里$\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，且$\Gamma_1\cap\Gamma_2=\emptyset$. 并证明古典解和弱解在一定条件下等价.