2024.05.13

1. 给出三次 Lagrange 元的局部插值误差 $\|u-\Pi_K u\|_{\ell,K}\,(0\le\ell\le1)$ 估计结果

$$\|u-\Pi_K u\|_{0,K}\le Ch^4|u|_{4,K}$$
$$\|u-\Pi_K u\|_{1,K}\le Ch^3|u|_{4,K}$$

2. 给出三次 Lagrange 元求解 Poisson 问题的解的最优能量 (H^1) 范数误差估计 (最高几阶)、凸区域情形的 L^2 范数误差估计结果, 具有最高正则性假设下 (即给出 s 的最大值) 的负范数估计.

   H^1 误差估计：
$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\le Ch^3\left|u\right|_{4,\Omega}$$

   L^2 误差估计：(假设区域光滑或凸)
$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\le Ch\left\|u-u_h\right\|_{1,\Omega}\le Ch^4\left|u\right|_{4,\Omega}$$

   负范数估计：(假设正则性、逼近性)
$$\|u-u_h\|_{-2,\Omega}\le Ch^3\left\|u-u_h\right\|_{1,\Omega}\le Ch^6\left|u\right|_{4,\Omega}$$

3. 利用对偶论证的方法证明重调和问题中的 H^1 误差估计定理

   Proof. 设 $\phi_g\in V$ 是变分问题
$$a\left(v,\phi_g\right)=(g,v),\forall v\in V$$
   的解. 有
$$\begin{aligned}(g,u-u_h)&=a\left(u-u_h,\phi_g\right)\\&=a\left(u-u_h,\phi_g-v_h\right)\qquad\qquad\forall v_h\in V_h\\&\le\|u-u_h\|_{2,\Omega}\inf_{v_h\in V_h}\|\phi_g-v_h\|_{2,\Omega}\end{aligned}$$
   再利用
$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}=\sup_{0\ne g\in H^{-1}(\Omega)}\frac{(g,u-u_h)}{\|g\|_{-1,\Omega}}$$
   □

4. 证明二阶积分公式
$$\int_K\phi\mathrm{dx}\approx\frac{S_K}{3}\sum_{i=4}^{6}\phi\left(a_i\right)$$
   对 $\phi\in P_2(K)$ 精确成立

Proof. 令

$$\phi_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$\phi_4 = 4\lambda_2\lambda_3, \phi_5 = 4\lambda_3\lambda_1, \phi_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

对任意多项式 $\phi \in P_2(K)$, 有

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi(a_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \phi(m_i)\phi_{i+3},$$

由积分公式

$$\iint_K \lambda_1^m \lambda_2^n \lambda_3^k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2S_K \frac{m! \cdot n! \cdot k!}{(m+n+k+2)!}.$$

代入计算可得

$$\int_K \phi \mathrm{dx} \approx \frac{S_K}{3} \sum_{i=4}^{6} \phi\left(a_i\right)$$

□

5. 写出 Linbo Zhang 2009 论文中六点积分公式, 并说明阶数（积分点和权重可保留 8 位小数)

$$|T| \sum_{i=1}^{6} f(p_i) w_i = \int_T f(x) dx$$

其中，积分点、权重以及对应阶数由下列表格给出 (积分点由重心坐标表示，轮换对称)：

6-point order 3 rule on triangle		
Orbit	Abscissas	Weight
S_{111}	0.23193337 0.10903901	0.16666667

6-point order 4 rule on triangle		
Orbit	Abscissas	Weight
S_{21}	0.09157621	0.10995174
S_{21}	0.44594849	0.22338159