

2024.05.27

1. 证明 Poisson 问题的混合变分形式的弱解在一定光滑条件下是古典解

Poisson 问题:

$$\begin{cases} \mathbf{p} - \nabla u = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{p} = -f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

混合变分形式: 求  $(\mathbf{p}, u) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ , 使

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} u dx = 0, & \forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{p} v dx = \int_{\Omega} -f v dx, & \forall v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

*Proof.* 当解足够光滑, 由  $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{p} v = \int_{\Omega} -f v dx$ ,  $\forall v \in L^2(\Omega)$ , 有

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{p} + f) v dx = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

由  $v$  的任意性, 得到  $\operatorname{div} \mathbf{p} + f = 0$ . 即  $\operatorname{div} \mathbf{p} = -f$ .

在  $\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} u dx = 0$  中取  $\forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap (H_0^1(\Omega))^2$ , 得到

$$\int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} - \nabla u) dx = 0$$

由  $\mathbf{q}$  的任意性, 得到  $\mathbf{p} - \nabla u = 0$ .

再在  $\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} u = 0$  中取  $\forall \mathbf{q} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ , 得到

$$\int_{\partial\Omega} u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

由  $\mathbf{q}$  的任意性, 得到  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . □

2. 推导 Stokes 问题的混合变分形式

Stokes 问题:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

*Proof.* 在  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$  中, 对  $\forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$  有

$$\int_{\Omega} -\Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx$$

利用两次 Green 公式和  $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$  以及散度积分公式可得

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{v} p dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} dx$$

在  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  中, 对  $\forall q \in L_0^2(\Omega)$ , 有

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q dx = 0$$

得到混合变分形式. □

3. 证明 inf-sup 条件的定理中 (3) 等价于 (1) 和 (2).

*Proof.* 已有 (1)  $\Leftrightarrow$  (2).

(2)  $\Rightarrow$  (3):

假设 (2) 成立, 则对给定的  $u \in U^\perp$ , 定义函数  $g \in U'$  如下

$$g(w) = (u, w), \quad \forall w \in U \tag{*}$$

容易验证  $g \in U^0$ , 又因为  $B'$  是  $V$  到  $U^0$  的同构, 故存在  $\lambda \in V$ , 使

$$b(w, \lambda) = (w, B' \lambda) = g(w) \tag{★}$$

又由 (\*) 易证  $\|g\|_{U'} = \|u\|_U$ , 从而

$$\|u\|_U = \|g\|_{U'} = \|B' \lambda\|_{U'} \geq \beta \|\lambda\|_V.$$

在 (★) 中令  $w = u$ , 则有

$$\sup_{v \in V} \frac{b(u, v)}{\|v\|_V} \geq \frac{b(u, \lambda)}{\|\lambda\|_V} = \frac{(u, u)}{\|\lambda\|_V} \geq \beta \|u\|_U,$$

从而  $B : U^\perp \rightarrow V'$  满足 Babuška 定理的三个条件, 故  $B$  是一个同构映射.

(3)  $\Rightarrow$  (1):

因 (3) 成立, 故  $B : U^\perp \rightarrow V'$  是一个同构, 对给定的  $v \in V$ ,

$$\begin{aligned} \|v\|_V &= \sup_{g \in V'} \frac{\langle g, v \rangle}{\|g\|_{V'}} = \sup_{u \in U^\perp} \frac{\langle Bu, v \rangle}{\|Bu\|_{V'}} \\ &= \sup_{u \in U^\perp} \frac{b(u, v)}{\|Bu\|_{V'}} \leq \sup_{u \in U^\perp} \frac{b(u, v)}{\beta \|u\|_U} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{u \in U} \frac{b(u, v)}{\|u\|_U}, \end{aligned}$$

从而 (1) 成立, 证毕.

□

4. 如果  $\dim U_h = \dim V_h$ , 离散的 inf-sup 条件

$$\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \beta_h > 0$$

成立. 说明离散问题: 求  $u_h \in U_h$  使得

$$b(u_h, v_h) = \langle f, v \rangle_{V' \times V}$$

存在唯一解.

(注: 该结果说明对于离散问题只需验证 Babuška 定理中 (b) 对应的离散形式和维数相等, 无需验证 (c) 的离散形式)

*Proof.* 当  $\dim U_h = \dim V_h$  时, 根据闭值域定理可以推导出

$$\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \inf_{v_h \in V_h} \sup_{u_h \in U_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V}$$

从而有

$$\inf_{u_h \in U_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \inf_{v_h \in V_h} \sup_{u_h \in U_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_U \|v_h\|_V} = \beta_h > 0$$

从而 (b) 与 (b') 成立, 进而可以推出 (b) 与 (c) 成立.

思路大概是这样, 过程不知道怎么写, 有大佬会的话发我一个:)

□

5. 证明  $H(\text{div}, \Omega)$  空间在范数  $\|\cdot\|_{\text{div}, \Omega}$  下是完备的

$$\|\cdot\|_{\text{div}, \Omega} := (\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

*Proof.* 设  $\{u_m = (u^1, \dots, u^n)\}_{m \in \mathbb{N}}$  是  $(H(\text{div}, \Omega), \|\cdot\|_{\text{div}, \Omega})$  中的 Cauchy 列。

对于  $i \in \{1, \dots, n\}$ , 有

$$(u_m^i - u_l^i, u_m^i - u_l^i) = \|u_m^i - u_l^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_m - u_l\|_{\text{div}, \Omega}^2$$

由于  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  是  $(H(\text{div}, \Omega), \|\cdot\|_{\text{div}, \Omega})$  中的 Cauchy 列, 有  $\{u_m^i\}_{m \in \mathbb{N}}$  是  $L^2(\Omega)$  中的 Cauchy 列。由于  $L^2(\Omega)$  的完备性, 有  $u_m^i \rightarrow u^i \in L^2(\Omega)$ ,  $m \rightarrow \infty$ . 因此  $u = (u^1, \dots, u^n) \in \{L^2(\Omega)\}^n$

类似地,

$$(\operatorname{div}(u_m - u_l), \operatorname{div}(u_m - u_l))_{L^2(\Omega)} = \|\operatorname{div} u_m - \operatorname{div} u_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_m - u_l\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2$$

因此  $\{\operatorname{div} u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  在  $L^2(\Omega)$  中是 Cauchy 列。由于  $L^2(\Omega)$  的完备性, 有  $\operatorname{div} u_m \rightarrow g \in L^2(\Omega)$ ,  $m \rightarrow \infty$

下面只需要说明  $\operatorname{div} u = g$ , 这等价于证明  $\int_{\Omega} g \phi dx = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \phi dx$ ,  $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

事实上, 只需注意到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} u_m dx &= - \int_{\Omega} u_m \cdot \nabla \phi dx. \\ \operatorname{div} u_m \rightarrow g \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} &\implies \int_{\Omega} \phi \operatorname{div} u_m dx \rightarrow \int_{\Omega} \phi g dx \\ u_m \rightarrow u \text{ in } \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} &\implies \int_{\Omega} u_m \cdot \nabla \phi dx \rightarrow \int_{\Omega} u \cdot \nabla \phi dx. \end{aligned}$$

即可得到。 □