2024.05.06

1. 设 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是非负序列. 证明对任意 $1 \leq q \leq p$, 有

$$(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p)^{1/p} \leq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^q)^{1/q}$$

Proof. 记 $\|a\|_p \triangleq (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p)^{1/p}$. 即证 $\|a\|_p \leq \|a\|_q$

对 $q \leq \infty$, 有 $\|a\|_q = (\sum_{m=1}^{\infty} a_m^q)^{1/q} \geq \max a_m = \|a\|_\infty$.

因此, 有 $|a_m|^p = |a_m|^q |a_m|^{p-q} \leq |a_m|^q \|a\|_\infty^{p-q} \leq |a_m|^q \|a\|_q^{p-q}$

对上式求和，得到 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \leq \|a\|_q^{p-q} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^q$

两端同时开 p 次方即可. □

2. 设 $\{a_m\}_{m=1}^{M}$ 是有限非负序列. 证明如果 $p < q \leq \infty$, 则有

$$(\sum_{m=1}^{M} a_m^p)^{1/p} \leq M^{1/p-1/q} (\sum_{m=1}^{M} a_m^q)^{1/q} \text{ 如果} q < \infty$$

$$(\sum_{m=1}^{M} a_m^p)^{1/p} \leq M^{1/p} \max_{1 \leq m \leq M} a_m \text{ 如果} q = \infty$$

Proof. 第二种情况显然，只需要注意 $a_m \leq \max_{1 \leq m \leq M} a_m, \forall m$.

考虑第一种情况，根据 $H\ddot{o}lder$ 不等式，有

$$\sum_{m=1}^{M} a_m^p = \sum_{m=1}^{M} (a_m^p \times 1) \leq \left(\sum_{m=1}^{M} {a_m}^{p \times \frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{m=1}^{M} 1^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} = M^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{m=1}^{M} a_m^q \right)^{\frac{p}{q}}$$

两端开 p 次方即可. □

定理 1 ($H\ddot{o}lder$ 不等式的离散形式)**.** 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 令 $a_1, \ldots a_n$ 和 $b_1, \ldots, b_n$ 是非负实数. 那么

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$