基于边界位移量测的不稳定波动方程输出反馈控制

孙琦

华北电力大学 数理学院

2023 年 6 月 14 日

镇定问题: 对于一个控制系统，设计控制器使得系统实现渐近稳定.

- 全状态信息反馈
- 输出反馈控制

波动方程是常见的系统. 其主要描述自然界中的各种波动现象.

- 声波
- 光波
- 引力波
- 无线电波
- 地震波

从系统控制器的设计角度出发，希望能够使用最为简便的办法. 但从控制器的实际实现角度，受限于成本或测量工艺等需要，需要工程师尽可能使用最少的测量元件，并且最好测量边界输出信号. 本文的初衷就是研究这样的依赖于单一的边界测量信息的波动方程输出反馈镇定问题.

1. 绪论
   - 研究背景
   - 国内外研究进展
2. 基于状态观测器的输出反馈控制
3. 数值模拟
4. 总结

对于常见的一维波动方程控制系统

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \ x \in (0,1), t > 0, \\ w(0,t) = 0, \ t \geq 0, \\ w_x(1,t) = u(t), \ t \geq 0, \\ y(t) = w_t(1,t), \ t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

可设计如下的基于边界速度信号的输出反馈控制

$$u(t) = -kw_t(1,t), \tag{2}$$

其中 $k>0$ 是调节参数. 在输出反馈控制 (2) 下, 得到如下闭环系统

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \\ w(0,t) = 0, \\ w_x(1,t) = -kw_t(1,t). \end{cases} \tag{3}$$

利用 Lyapunov 能量泛函方法可以证明系统 (3) 是指数稳定的.

当把边界条件 $w(0,t)=0$ 替换为 $w_x(0,t)=0$ 时，只利用输出信号 $y(t)=w_t(1,t)$，无法使得上述系统指数稳定. 利用 Backstepping 变换, M. Krstic 设计了状态反馈:

$$u(t)=-c_1w_t(1,t)-c_0w(1,t)-c_1c_0\int_0^1 w_t(y,t)dy, \tag{4}$$

其中 $c_0,c_1>0$ 是调节参数，经过坐标变换:

$$z(x,t)=w(x,t)+c_0\int_0^x w(y,t)dy, \tag{5}$$

得到目标系统:

$$\begin{cases} z_{tt}(x,t) = z_{xx}(x,t), \\ z_x(0,t) = c_0 z(0,t), \\ z_x(1,t) = -c_1 z_t(1,t). \end{cases} \tag{6}$$

利用 Lyapunov 能量泛函方法可证明上述系统是指数稳定的.

由于 M. Krstic 的方法用到了波动方程的状态信息, 在实际中不容易实行. 随后, 学者们利用两个边界输出信号 $y(t)=\{w(1,t),w_t(1,t)\}$, 设计输出反馈控制器:

$$u(t)=-c_1w_t(1,t)-c_0w(1,t), \tag{7}$$

其中 $c_0,c_1>0$ 是调节参数, 得到闭环系统:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t)=w_{xx}(x,t), \\ w_x(0,t)=0, \\ w_x(1,t)=-c_0w(1,t)-c_1w_t(1,t). \end{cases} \tag{8}$$

同样, 利用 Lyapunov 能量泛函方法可证明上述系统是指数稳定的.

2017 年,H.Feng 和 B.Z.Guo 考虑如下波动方程:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \\ w_x(0,t) = -qw(0,t), \\ w(1,t) = u(t), \\ y(t) = w(0,t). \end{cases} \tag{9}$$

当输出信号为边界位移信号时, 系统 (9) 是近似可观测的但不是完全可观测的. 通过设计基于状态观测器的输出反馈, 作者证明了闭环系统在有限时间内稳定. 不过上述方法, 对波方程的模型有很高的依赖性. 当把右端边界条件替换为 $w_x(1,t) = u(t)$, 上述控制策略便失效了. 本课题就是在此基础上, 研究右端边界条件为 $w_x(1,t) = u(t)$ 的反馈镇定问题.

本文研究如下的一维不稳定波动方程的反馈镇定问题:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), & 0 \le x \le 1, t > 0, \\ w_x(0,t) = -qw(0,t), & t \ge 0, \\ w_x(1,t) = u(t), & t \ge 0, \\ w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), & 0 \le x \le 1, t \ge 0, \\ y(t) = w(0,t), & t \ge 0. \end{cases} \tag{10}$$

仅利用单一输出信号 $y(t)$, 设计如下状态观测器:

$$\begin{cases} \hat{w}_{tt}(x,t) = \hat{w}_{xx}(x,t), \\ \hat{w}_x(0,t) = -qw(0,t) - k_1[y(t) - \hat{w}(0,t)] + k_2 z(t), \\ \hat{w}_x(1,t) = u(t), \\ \dot{z}(t) = -k_2 z(t) + k_2[y(t) - \hat{w}(0,t)], \end{cases} \tag{11}$$

令观测器误差函数为:

$$\tilde{w}(x,t) = w(x,t) - \hat{w}(x,t). \tag{12}$$

将系统 (10) 与 (11) 作差, 得到误差系统

$$\begin{cases} \tilde{w}_{tt}(x,t) = \tilde{w}_{xx}(x,t), \\ \tilde{w}_x(0,t) = k_1\tilde{w}(0,t) - k_2 z(t), \\ \tilde{w}_x(1,t) = 0, \\ \dot{z}(t) = -k_2 z(t) + k_2\tilde{w}(0,t). \end{cases} \tag{13}$$

我们运用了 C_0-半群法以及谱分析方法证明了解的存在性与稳定性.

定理

对任意初值 $(\tilde{w}(\cdot,0),\tilde{w}_t(\cdot,0),z(0))^\top\in\mathcal{H}$，系统 (13) 存在唯一且渐近稳定的解 $(\tilde{w}(\cdot,t),\tilde{w}_t(\cdot,t),z(t))^\top\in C(0,\infty;\mathcal{H})$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|(\tilde{w}(\cdot,t),\tilde{w}_t(\cdot,t),z(t))^\top\|_{\mathcal{H}}=0. \tag{14}$$

推论

如果初值 $(\tilde{w}(\cdot,0),\tilde{w}_t(\cdot,0),z(0))^\top\in D(\mathcal{A})$ 时，那么系统 (13) 存在经典解 $(\tilde{w}(\cdot,t),\tilde{w}_t(\cdot,t),z(t))^\top\in C^1(0,\infty;\mathcal{H})$，满足

$$\lim_{t\to\infty}|\tilde{w}_t(1,t)|=0. \tag{15}$$

引入如下 Backstepping 变换:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [(\mathcal{I}+\mathcal{P})w](x,t) \\ &= w(x,t) + (c_0+q)\int_0^x e^{q(x-\xi)} w(\xi,t)d\xi, \quad x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是 Volterra 变换, $c_0>0$ 是一个调节常数, 上述变换的逆变换是

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \left[(\mathcal{I}+\mathcal{P})^{-1}u\right](x,t) \\ &= u(x,t) - (c_0+q)\int_0^x e^{-c_0(x-\xi)} u(\xi,t)d\xi, \quad x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{17}$$

在变换 (16) 下, 系统 (10) 变为:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \\ u_x(0,t) = c_0 u(0,t), \\ u_x(1,t) = u(t) + (c_0+q)\, q \displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)} w(\xi,t)d\xi + (c_0+q)\, w(1,t). \end{cases} \tag{18}$$

设计如下基于状态观测器的输出反馈控制器:

$$\begin{aligned} u(t) = &- (c_0+q)\, \hat{w}(1,t) - (c_0+q)\, q \int_0^1 e^{q(1-\xi)} \hat{w}(\xi,t)d\xi \\ &- c_1 \left[\hat{w}_t(1,t) + (c_0+q) \int_0^1 e^{q(1-\xi)} \hat{w}_t(\xi,t)d\xi \right], \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $c_1 > 0$ 是调节常数.

在控制器(19)下，闭环系统为:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t), \\ w_x(0,t) = -qw(0,t), \\ w_x(1,t) = -(c_0+q)\hat{w}(1,t) - (c_0+q)q\displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)}\hat{w}(\xi,t)d\xi \\ \qquad\qquad - c_1\left[\hat{w}_t(1,t) + (c_0+q)\displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)}\hat{w}_t(\xi,t)d\xi\right], \\ \hat{w}_{tt}(x,t) = \hat{w}_{xx}(x,t), \\ \hat{w}_x(0,t) = -qw(0,t) - k_1[w(0,t) - \hat{w}(0,t)] + k_2 z(t), \\ \hat{w}_x(1,t) = -(c_0+q)\hat{w}(1,t) - (c_0+q)q\displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)}\hat{w}(\xi,t)d\xi \\ \qquad\qquad - c_1\left[\hat{w}_t(1,t) + (c_0+q)\displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)}\hat{w}_t(\xi,t)d\xi\right], \\ \dot{z}(t) = -k_2 z(t) + k_2[w(0,t) - \hat{w}(0,t)], \end{cases}$$

引入变换

$$\begin{pmatrix} u \\ \tilde{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}+\mathcal{P} & 0 & 0 \\ \mathcal{I} & -\mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \hat{w} \\ z \end{pmatrix} \tag{21}$$

于是，闭环系统变为如下等价系统:

闭环系统

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \\
u_x(0,t) = c_0 u(0,t), \\
u_x(1,t) = -c_1 u_t(1,t) + (c_0+q)\, q \displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)} \tilde{w}(\xi,t) d\xi \\
\qquad\qquad + c_1 \left[\tilde{w}_t(1,t) + (c_0+q) \displaystyle\int_0^1 e^{q(1-\xi)} \tilde{w}_t(\xi,t) d\xi \right] + (c_0+q)\, \tilde{w} \\
\tilde{w}_{tt}(x,t) = \tilde{w}_{xx}(x,t), \\
\tilde{w}_x(0,t) = k_1 \tilde{w}(0,t) - k_2 z(t), \\
\tilde{w}_x(1,t) = 0, \\
\dot{z}(t) = -k_2 z(t) + k_2 \tilde{w}(0,t).
\end{cases}
\tag{22}
$$

我们运用了 Lyapunov 泛函方法证明了该系统是渐近稳定的.

定理

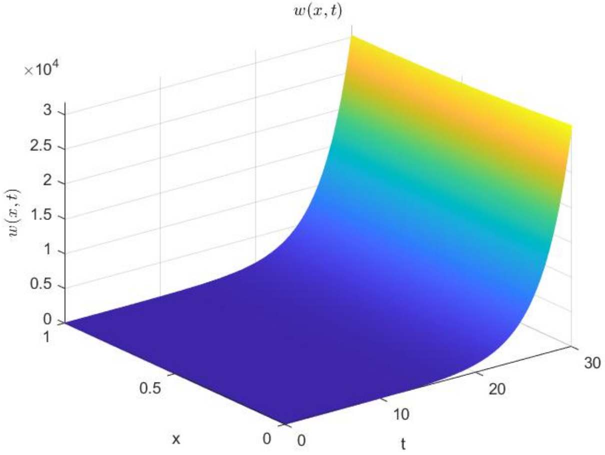
对任意初值 $(u(\cdot,0),u_t(\cdot,0),\tilde{w}(\cdot,0),\tilde{w}_t(\cdot,0),z(0))^\top\in\mathcal{X}$，系统 (22) 存在唯一且渐近稳定的解 $(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),\tilde{w}(\cdot,t),\tilde{w}_t(\cdot,t),z(t))^\top\in C(0,\infty;\mathcal{X})$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\left\|(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),\tilde{w}(\cdot,t),\tilde{w}_t(\cdot,t),z(t))^\top\right\|_{\mathcal{X}}=0. \tag{23}$$

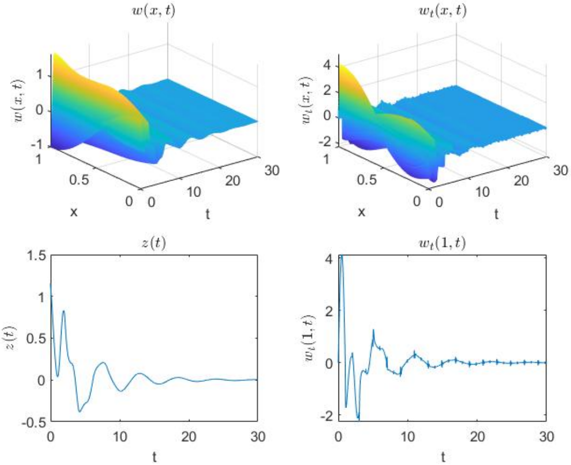
引理

设 $\mathcal{A}$ 是 *Hilbert* 空间 $\mathcal{X}$ 上指数稳定的 C_0-半群 $e^{\mathcal{A}t}$ 的生成元. 假设 $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(U,\mathcal{X}_{-1})$ 是 $e^{\mathcal{A}t}$ 的允许算子. 那么，初值问题 $\dot{x}(t)=\mathcal{A}x(t)+\mathcal{B}u(t)$,$x(0)=x_0$ 存在唯一解 $x\in C(0,\infty;\mathcal{X})$，当 $u\in L^2(0,\infty;U)$ 或 $\lim_{t\to\infty}|u(t)|_U=0$ 时，有 $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\|_{\mathcal{X}}=0$，并且当 $u\in L^\infty(0,\infty;U)$ 时，解是有界的.

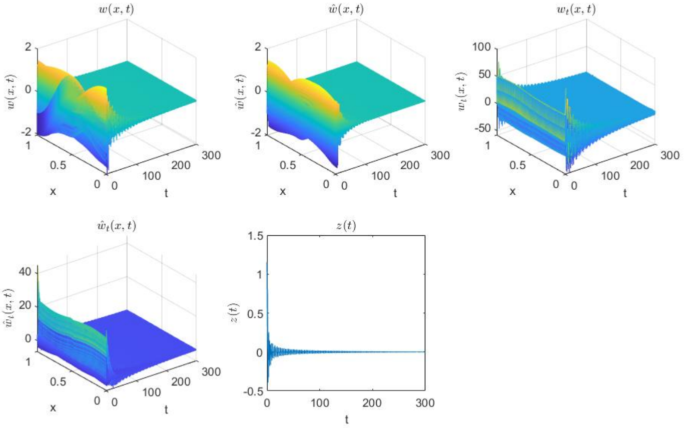
不施加控制的原系统 (10)



误差系统 (13)


$w(x,t)$
$w(x,t)$
1
0
-1
1
0.5
0
x
0
10
20
30
t
$w_t(x,t)$
$w_t(x,t)$
4
2
0
-2
1
0.5
0
x
0
10
20
30
t
$z(t)$
$z(t)$
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
10
20
30
t
$w_t(1,t)$
$w_t(1,t)$
4
2
0
-2
0
10
20
30
t

闭环系统 (18)



本课题的控制策略主要分为两部分，一是利用单一的边界输出，设计动态的状态观测器，实时估计系统状态，克服系统可测信号少的困难；二是基于 Backstepping 变换设计输出反馈控制，保证闭环系统的渐近稳定性.

我们通过严格的数学证明和数值仿真实验，从两个维度论证了所设计输出反馈控制器的有效性.

Thanks!