First Project of Mathematics II

Louka Kristian, AM: 1072625
E-mails :
$xristosloukas2001@gmail.com$
$louka\_kristian@upnet.gr$
$st1072625@ceid.upatras.gr$

April 2020

1 Μιγαδικοί Αριθμοί και Διανυσματική Ανάλυση

1.1 Exercise 1

Για Α = 7, Β = 2, Γ = 6, Δ = 2, Ε = 5 ...
Έχουμε : $\overrightarrow{a} = (2, -7, 6)$, $\overrightarrow{b} = (7, -2, 2)$, $\overrightarrow{c} = (7, 2, -7)$.

a) $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} = (-5, -17, 29)$ Για τα μοναδιαία διανύσματα θα θεωρήσουμε ότι:
$i =< 1, 0, 0 >, j =< 0, 1, 0 >, k =< 0, 0, 1 >$

$\overrightarrow{a} = 2i - 7j + 6k$, $\overrightarrow{b} = 7i - 2j + 2k$, $\overrightarrow{c} = 7i + 2j - 7k$

Τα μοναδιαία διανύσματα του a του b και του c αντίστοιχα θα είναι ...
$\hat{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{2i-7j+6k}{\sqrt{2^2+(-7)^2+6^2}} = \frac{2i}{\sqrt{89}} - \frac{7j}{\sqrt{89}} + \frac{6k}{\sqrt{89}}$
$\hat{b} = \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{7i+2j-7k}{\sqrt{49+4+4}} = \frac{7i}{\sqrt{57}} - \frac{2j}{\sqrt{57}} + \frac{2k}{\sqrt{57}}$
$\hat{c} = \frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|} = \frac{7i+2j-7k}{\sqrt{49+49+4}} = \frac{7i}{\sqrt{102}} + \frac{2j}{\sqrt{102}} - \frac{7k}{\sqrt{102}}$ b) Έστω διάνυσμα $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$. Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι ...
$\overrightarrow{v} = (23, -13, 12)$
i)Το ζητούμενο είναι ...
$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{c} = (23, -13, 12) \cdot (7, 2, -7) = (161, -26, -84)$
ii)Το ζητούμενο είναι ...
$\overrightarrow{d} = (\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c} \iff \overrightarrow{d} = \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 23 & -13 & 12 \\ 7 & 2 & -7 \end{vmatrix} = -i\begin{vmatrix} -13 & 12 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 23 & 12 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 23 & -13 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} =$
$i(-13(-7) - 12 \cdot 2) - j(23(-7) - 12 \cdot 7) + k(23 \cdot 2 + 13 \cdot 7) = 67i + 245j + 137k$
Άρα το διάνυσμα d θα είναι ... $\overrightarrow{d} = 67i + 245j + 137k$
και το μοναδιαίο του θα είναι ...

$\hat{d} = \frac{\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{d}\right|} = \frac{67i}{\sqrt{83{,}283}} + \frac{245j}{\sqrt{83{,}283}} + \frac{137k}{\sqrt{83{,}283}}$

iii) Μεικτό ή βαθμωτό διάνυσμα έστω $\overrightarrow{\eta} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) =$

$= \begin{vmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 7 & -2 & 2 \\ 7 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - (-7)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -7 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2 \cdot (-7) - 4) + 7(7 \cdot (-7) - 2 \cdot 7) +$
$6 \cdot (7 \cdot 2 + 2 \cdot 7) = 20 + 7 \cdot (-49 - 14) + 6 \cdot 28 = 20 - 7 \cdot 63 + 168 = 20 - 441 + 168 = -253$

Επομένως ο όγκος ή αλλιώς η απόλυτη τιμή του διανύσματος η είναι 253 κυβικές μονάδες...

1.2 Exercise 2

(a) $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}| \leq |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|$

Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται και ως εξής ...

$$|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot \cos\theta \leq |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|, \tag{1}$$

όπου ϑ η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.
Η παραπάνω ανισότητα ισχύει διότι το $\cos\theta$ παίρνει τιμές στο $[-1, 1]$ δηλαδή ισχυεί ότι ...
$-1 \preceq \cos\theta \preceq 1 \Longrightarrow \cos\theta \preceq 1$, πολλαπλασιάζοντας και στα δυο μέροι με τα διανύσματα θα έχουμε $\ldots \Longleftrightarrow |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|\cos\theta \leq |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}|$, που είναι το ζητούμενο .

(b)Να δειχθεί ότι

$$\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) = 0 \tag{2}$$

Από την ιδιότητα του τριπλού διανυσματικού γινομένου διανυσμάτων έχουμε ότι :

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \tag{3}$$

Αντίστοιχα για τα διανύσματα v,w,u θα έχουμε στην εξίσωση (2) ...
$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{w}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v}(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}(\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}) = 0$
Άρα η εξίσωση ισχύει.

1.3 Exercise 3

- Η απόσταση του πρέπει να διανύσει ο πιλότος προς τα ανατολικά είναι (με βάση το ΑΜ μου) =
  $d = 100[(7 + 1)MOD3 + 1] \Longleftrightarrow d = 100km$
- Η ταχύτητα του ανέμου που φυσάει απο βορειοδυτικά είναι $U_w = 10(6 + 2) = 80km/h$
- Ο χρόνος που απαιτείται είναι $t = 10[(2 \cdot 2 + 2)MOD3 + 1) = 10min = \frac{1}{6}Hour$

- Η ταχύτητα που απαιτείται να έχει το αεροπλάνο για να φτάσει στην ώρα του (προφανώς χωρίς να υπολογίζουμε τον άνεμο) είναι ...
$U_a = \frac{d}{t} = \frac{100}{\frac{1}{6}} = 600km/h$

Αναλύοντας την ταχύτητα του ανέμου που "φυσάει" από βορειοδυτικά (επομένως θα έχει ακριβής κλίση ίση με $45°$) , θα έχουμε τα εξής ...

- $U_{w_x} = U_w \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 40\sqrt{2}$ (x'x)
- $U_{w_y} = U_w \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 40\sqrt{2}$ (y'y)

Επομένως η εξίσωση που απαιτείται να γράψουμε για την συνιστώσα χ στην ταχύτητα του αεροπλάνου είναι η εξής ...

$$U_{plane} + U_{w_x} = U_a \iff U_{plane} = 600 - 40\sqrt{2} \tag{4}$$

Για την συνιστώσα y η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 0 οπότε μόνο ο άνεμος επηρεάζει την ταχύτητα. Επομένως η συνισταμένη ταχύτητα που μας ζητάει το ερώτημα λύνεται ως εξής ...

$$U = \sqrt{(U_{plane})^2 + (U_{w_y})^2 + 2U_{plane} \cdot U_{w_y} \cdot \cos(45°)} \tag{5}$$

$U = \sqrt{(600)^2 - 600 \cdot 40\sqrt{2} + 2 \cdot (40)^2 - 2 \cdot (40)^2\sqrt{2}}$
$U = \sqrt{600(600 - 40\sqrt{2} + 2 \cdot (40)^2 \cdot (1 - \sqrt{2}}$ Και επειδή ζητείται το διάνυσμα της ταχύτητας U , πρέπει να γράψουμε και την κλίση για μία ολοκληρωμένη απάντηση για το ερώτημα.

$\tan\varphi = \frac{U_{W_y}}{U_{plane}} = \frac{40\sqrt{2}}{600-40\sqrt{2}} < 1$ (Λογικό) .

1.4 Exercise 4

Αρχικά αναλύοντας την 4χ4 ορίζουσα θα έχουμε ...

$$A = x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} - y_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + z_1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

(6)

Λύνοντας τις αντοίστιχες 3χ3 ορίζουσες φτάνουμε στο τελικό σημείο που γράφεται παρακάτω ...

A $= x_1y_2(z_3-z_4) - x_1z_2(y_3-y_4) + x_1(y_3z_4 - z_3y_4) - y_1x_2(z_3-z_4) + y_1z_2(x_3-x_4) - y_1(x_3z_4 - x_4z_3) + z_1x_2(y_3-y_4) - z_1y_2(x_3-x_4) + z_1(x_3y_4 - x_4y_3) - x_2(y_3z_4 - y_4z_3) + y_2(x_3z_4 - x_4z_3) - z_2(x_3y_4 - x_4y_3)$

Τώρα , εφόσον ξεκαθαρίστηκε το θέμα της ορίζουσας φτάσαμε στο σημείο να λύσουμε το πραγματικό πρόβλημα της άσκησης , το οποίο είναι να αποδείξουμε ότι ο όγκος του τετραέδρου ισούται με ...

$$V = \frac{1}{6} \cdot |A|. \tag{7}$$

Για να αποδειχθεί αυτό , οφείλουμε να ανατρέξουμε στον τύπο του τετραέδρου ο οποίος είναι ...

$$V = \frac{1}{3} \cdot E_{base} \cdot u, (u = height) \tag{8}$$

Αναλύοντας τον τύπο του τετραέδρου σε αντίστοιχα διανύσματα θα έχουμε το εξής ...

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|}{2} \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot \cos[(\overrightarrow{a} \times \hat{\overrightarrow{b}}, \overrightarrow{c})] \tag{9}$$

Ξέρουμε ότι η γωνία θα είναι ίση με ...

$$\frac{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}}{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| \cdot |\overrightarrow{c}|} \tag{10}$$

Από τις 2 προηγούμενες εξισώσεις θα έχουμε ...

$$V = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \frac{1}{6}|A| \tag{11}$$

Επομένως για να λυθεί ωραία το πρόβλημα και εγώ να πάρω τον βαθμό μου ... πρέπει να αποδείξουμε ότι

$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = |A|$
Αρκεί να δείξω δηλαδή ότι ...

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Από την 1_η ορίζουσα θα έχουμε τα εξής ...

$(1) = (x_2 - x_1) \begin{vmatrix} y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} - (y_2 - y_1) \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} + (z_2 - z_1) \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}$
$= (z_4 - z_1)(x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_1y_1) + (z_3 - z_1)(x_4y_2 - x_4y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_4 + x_2y_1 + x_1y_4 - x_1y_1) + (z_2 - z_1)(x_3y_4 - x_3y_1 - x_1y_4 + x_1y_1 - x_4y_3 + x_4y_1 + x_1y_3 - x_1y_1)$

Διαγράφοντας κάποιες μεταβλητές με το z_1 κυρίως και κάνοντας άπειρες πράξεις, μετά από ένα δίωρο αποδεικνύεται πως η (1) είναι -A
Επομένως θα έχουμε ότι $V = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \frac{1}{6} \cdot (-A)$
Άρα με την απόλυτη τιμή θα έχουμε το ζητούμενο τύπο ο οποίος είναι $V = \frac{1}{6} \cdot |A|$

1.5 Exercise 5

(a) $z^4 = 16$
Είναι της μορφής $z = a + bi$, όπου $a = 16$ και $b = 0$ και $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 16$

- $\cos\theta = \frac{a}{|z|} = 1 \iff \theta = 0$ rad

- $\sin\theta = \frac{b}{|b|} = 0 \iff \theta = 0$ or $\pi \iff \theta = 0$ rad accepted

- $\sqrt[4]{16} = 2$

Επομένως θα έχουμε την παρακάτω εξίσωση ...

$$Z_k = \sqrt[\nu]{|z|}[\cos\left(\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}\right)]\forall k = 0, 1, 2, 3 \tag{13}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές μας θα έχουμε το παρακάτω ...

$$z_k = 2(\cos\frac{\kappa\pi}{2} + i\sin\frac{\kappa\pi}{2}) \tag{14}$$

- $z_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$

- $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$

- $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1) = -2$

- $z_3 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(\cos\big(\pi + \frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(\pi + \frac{\pi}{2}\big)) = 2(-i) = -2i$

Στο παρακάτω screenshot αναπαρίστανται τα σημεία z_0, z_1, z_2, z_3 σε πολική μορφή (μπορείτε να δείτε στο text δίπλα από κάθε σημείο τις αντίστοιχες μοίρες του κάθε σημείου.)

Το σχόλιο μου θα ήταν ότι αυτά τα 4 σημεία θα μπορούσαν να ήταν οι γωνείες ενός τετραγώνου.

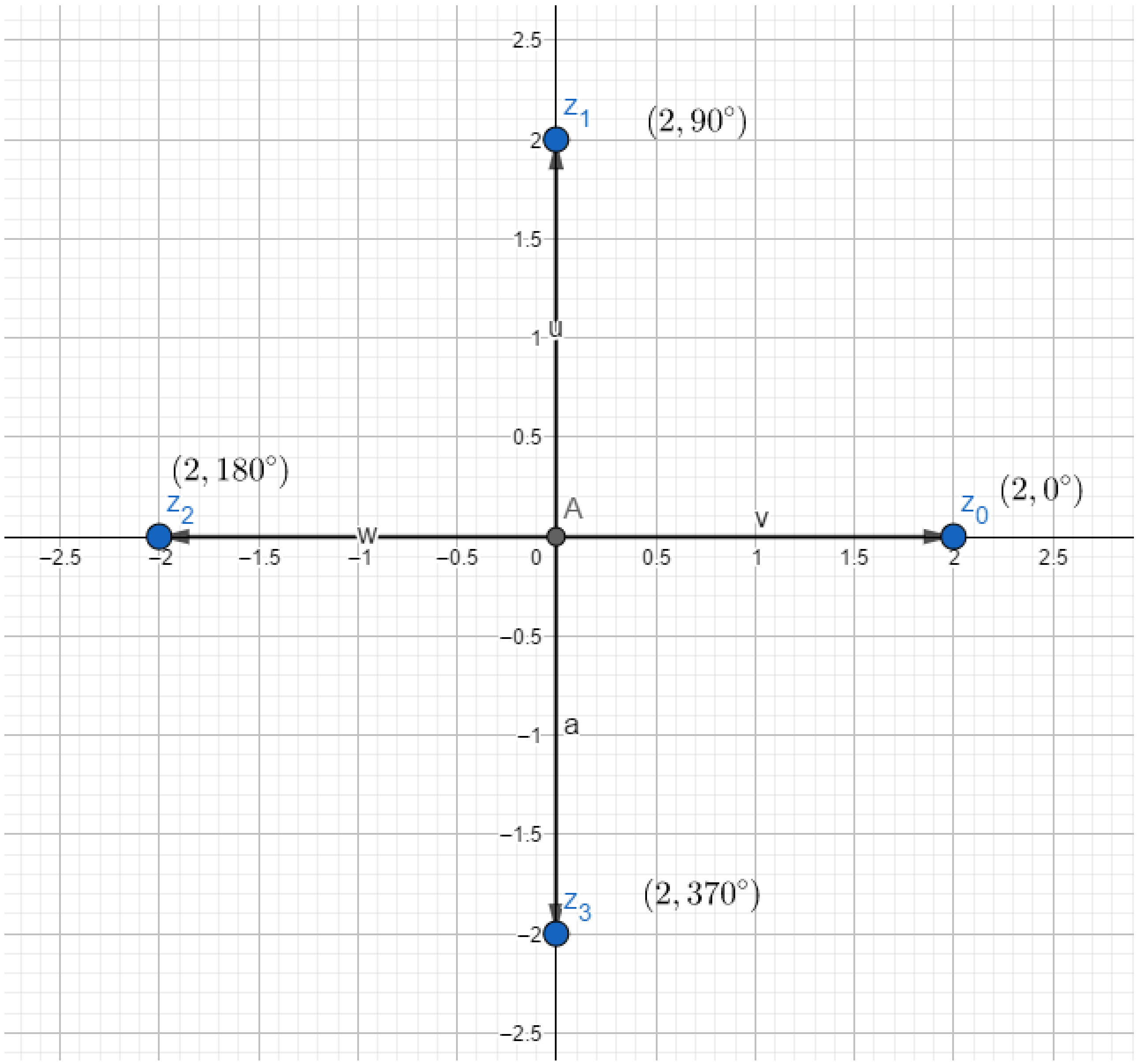

Figure 1: Exercise 1.5a

(b) $z^3 = -27i$ Έχουμε $a = 0$ και $b = -27$

- $\cos\theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} or \theta = \frac{3\pi}{2}$

- $\sin\theta = \frac{b}{|b|} = \frac{-27}{27} = -1 \iff \theta = \frac{3\pi}{2}$

- $\sqrt[3]{27} = 3$

Επομένως δεκτό το $\frac{3\pi}{2}$ και ο τύπος μας θα είναι

$$z_k = 3[\cos\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}]\forall k = 0,1,2 \tag{15}$$

- $z_0 = 3[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}] = 3(0+i) = 3i$

- $z_1 = 3[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}] = 3[\cos\big(\pi + \frac{\pi}{6}\big) + i\sin\big(\pi + \frac{\pi}{6}\big)] = -3(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$

- $z_2 = 3[\cos\frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{4\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}] = 3[\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}] = 3[\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}] = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$

Το σχόλιο μου για την συμμετρία και γενικότερα για το σχήμα είναι ότι τα σημεία θα μπορούσαν να ήταν κορυφές ισοσκελές τριγώνου. Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι οι γωνία μεταβάλεται ανά 120°

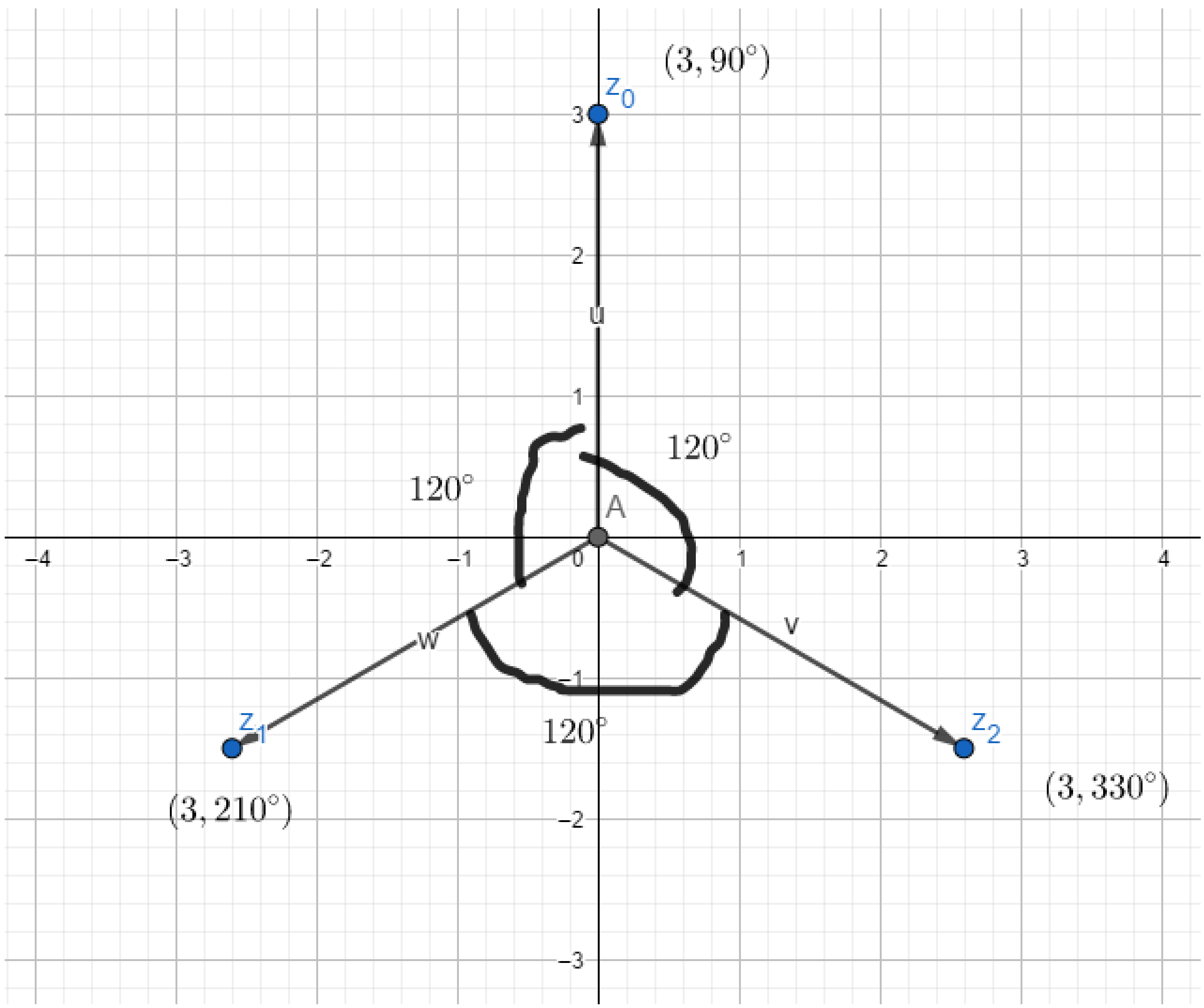

Figure 2: Exercise 1.5b

(c) $z^5 = -1$

$z = a + bi$, όπου $a = -1, b = 0$

- $\cos\theta = -1 \iff \theta = \pi\text{rad}$

- $\sin\theta = 0 \iff \theta = \pi$(δεκτό) ή $\theta = 2\pi$ (απορρίπτεται, διότι $\theta \in [0, 2\pi)$

Άρα για π rad θα έχουμε τον τύπο ...

$$z_k = \cos\frac{2k\pi + \pi}{5} + isin\frac{2k\pi + \pi}{5}, \forall k = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{16}$$

Με υπολογισμούς και πολύ ψάξιμο έχουμε τα εξής ...

- $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$
- $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Έτσι θα έχουμε τα ζητούμενα $z_0, z_1 \ldots z_4$

- $z_0 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$
- $z_1 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
- $z_2 = \cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\pi = -1$
- $z_3 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5} = \cos\bigl(\pi + \frac{2\pi}{5}\bigr) + i\sin\bigl(\pi + \frac{2\pi}{5}\bigr) = -\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = -(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}) - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
- $z_4 = \cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5} = \cos\bigl(2\pi - \frac{\pi}{5}\bigr) + i\sin\bigl(2\pi - \frac{\pi}{5}\bigr) = \cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - i\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$

Το σχόλιο μου για το 5c θα ήταν ότι τα σημεία μας θα μπορούσαν να ήταν κορυφές πενταγώνου μέσα σε ένα κύκλο.

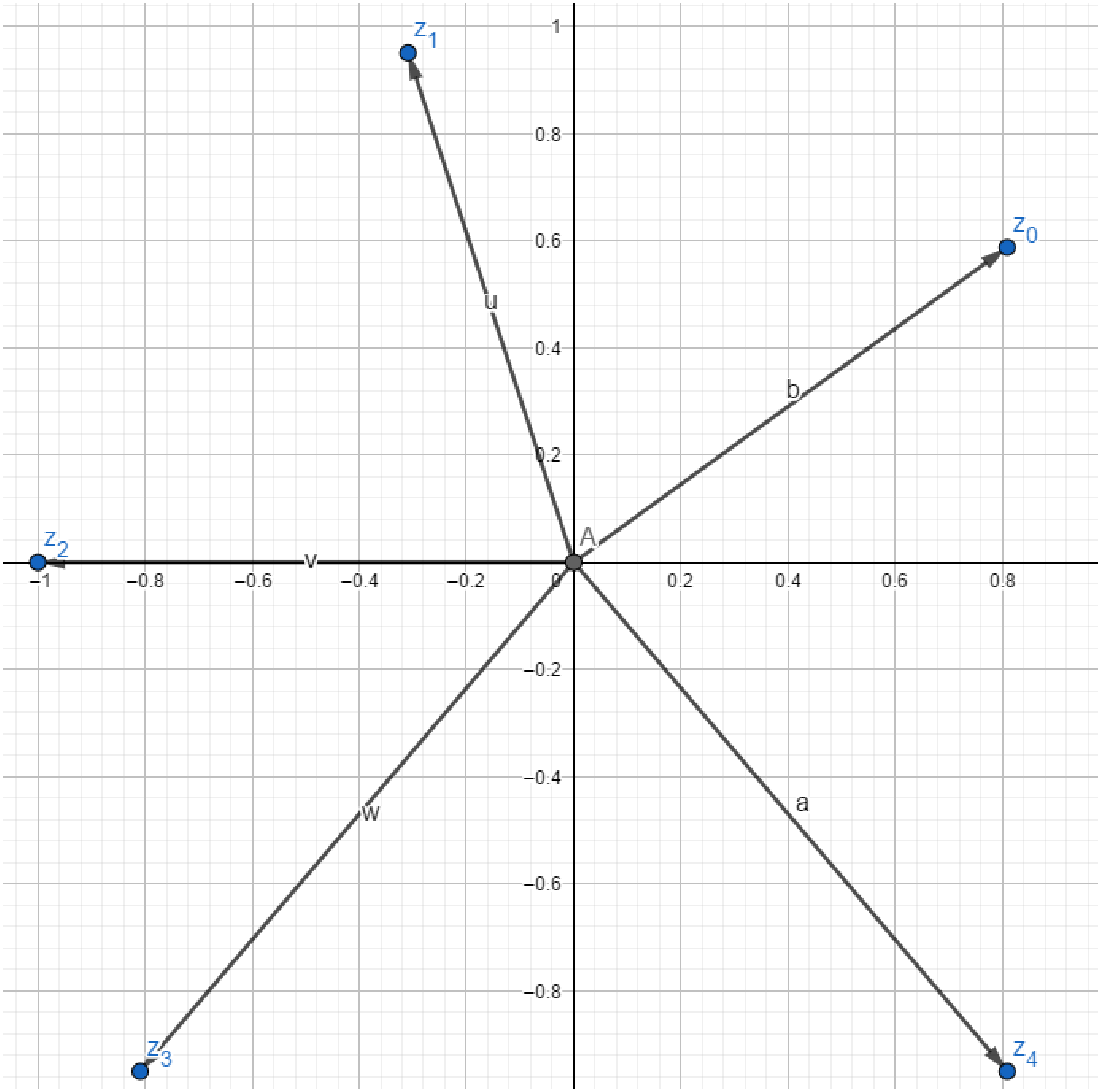

Figure 3: Exercise 1.5c

1.6 Exercise 6

Έχουμε την εξής εξίσωση...

$$1 + 27i(x+1)^3 = 0 \tag{17}$$

η οποία μετατρέπεται ως εξής ...

$27i(x+1)^3 = -1$, για κάθε $x \neq 1 \iff \frac{1}{(x+1)^3} = -27i \iff \sqrt[3]{(\frac{1}{(x+1)})^3} = \sqrt[3]{-27i} \iff$
Με τις λύσεις του 5β έχουμε τα εξής ...

- $\frac{1}{x+1} = 3i$

- $\frac{1}{x+1} = 3(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$

- $\frac{1}{x+1} = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$

Θα έχουμε τα εξής αποτελέσματα ...

(1) $x+1 = \frac{1}{3i} \iff x+1 = \frac{i}{3i^2} \iff x+1 = \frac{1}{3} \iff x = -1 - i\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{x+1} = -3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \iff x+1 = \frac{1}{-3\frac{\sqrt{3}}{2} - 3i\frac{1}{2}} \iff$ πολ/ζω με συζυγή και θα έχω ... $x+1 = \frac{-3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{9\cdot 3}{4} - \frac{9}{4}i^2} \iff x+1 = \frac{-3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{9} \iff x+1 = \frac{-3\sqrt{3}+3i}{18} \longleftarrow x+1 = \frac{-\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6} \iff x = \frac{-\sqrt{3}-6}{6} + \frac{i}{6}$

(3) $\frac{1}{x+1} = 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

ομοίως με πριν κάνουμε συζυγή κλπ και στο τέλος θα έχουμε ...

$\iff x+1 = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{9} \iff x+1 = \frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2} + \frac{i}{3\cdot 2} \iff x = \frac{\sqrt{3}-6}{6} + \frac{i}{6}$

2 Ανάλυση και Συναρτήσεις μίας μεταβλητής

2.1 Exercise 1

Η μέση ταχύτητα που έχει ένα κινητό ορίζεται ως εξής :

$$u_{avg} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{18}$$

Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται ως εξής :

$$u = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{19}$$

Έστω ότι $x = S(t), tE[0,b]$, όπου b μία τυχαία χρονική στιγμή και $t = 0$ η στιγμή που ξεκίνησε την κίνηση. Για να αποδείξουμε το πρόβλημα θα πρέπει η μέση ταχύτητα να είναι ίση με την πρώτη παράγωγο της θέσης που είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Με άλλα λόγια ...

$$u_{t_0} = S'(t_0) \tag{20}$$

Εφόσον $x(t) = S_(t)$ είναι μία συνεχής και παραγωγίσημη συνάρτηση, θα ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής. Επομένως υπάρχει t_0 Ε (0, b) τέτοιο ώστε :

$$S'_{(t_0)} = \frac{S_{(b)} - S_{(0)}}{b - 0} \iff S'_{(t_0)} = \frac{S_{(b)}}{b} \tag{21}$$

$S(0) = 0$ καθώς δεν έχει διανύσει απόσταση από την αφετερία την χρονική στιγμή 0. Επομένως θα έχουμε ...

$$\frac{\Delta\chi}{\Delta t} = \frac{X_b}{t_b} = \frac{S_b}{b} \tag{22}$$

Παρακάτω δίνεται ένα παράδειγμα ...
Έστω ότι ένας ποδηλάτης διένυσε $100km$ σε 5 ώρες.
Η μέση ταχύτητα του θα είναι : $\frac{100}{5} = 20km/hr$. Επομένως, όμοια με πριν ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής και θα έχουμε ...
$S'_{(t0)} = \frac{S_b}{b} = \frac{100}{5} = 20 = U_{avg}$
Άρα θα υπάρξει στιγμή όπου η στιγμιαία ταχύτητα θα γίνει ίση με την μέση ταχύτητα .

2.2 Exercise2

Να δείξω ότι $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$, παίρνοντας το όριο θα έχουμε ...

$lim_{t\to+\infty}(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t) =$

Κάνοντας συζυγή θα φύγει η ρίζα του αριθμητή και έτσι θα έχουμε ...

$lim_{t\to+\infty}\frac{(x+1)\cdot e^{x+t}+1}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}+e^t} = lim_{t\to+\infty}\frac{e^t\cdot[(x+1)\cdot e^x+\frac{1}{e^t}]}{e^t\cdot(\sqrt{1+\frac{(x+1)e^x}{e^t}+\frac{1}{e^2t}}+1)}$
$lim_{t\to+\infty}\frac{(x+1)e^x+\frac{1}{e^t}}{\sqrt{1+\frac{(x+1)e^x}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}+1} = \frac{(x+1)e^x}{2}$
Καθώς γνωρίζουμε ότι από την γραφική της εκθετικής συνάρτησης...

$$lim_{t\to+\infty}e^t = +\infty \tag{23}$$

$$lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = 0 \tag{24}$$

Επομένως θα έχουμε ...
$\frac{(x+1)e^x}{2} = \frac{f'(x)}{2(x+1)} \iff f'(x) = \frac{2e^x(x+1)^2}{2} \longrightarrow f'(x) = e^x(x+1)^2 \longleftrightarrow f'(x) = e^(x^2 + 2x + 1) \iff$
$f'(x) = e^x x^2 + 2xe^x + e^x \longleftrightarrow [f(x)]' = [e^x(x^2 + 1)]'$

Από συνέποιες του θεωρήματος Μέσης Τιμής θα έχουμε ...
$f(x) = e^x(x^2 + 1) + c$.Γνωρίζουμε ότι $f(-1) = \frac{2}{e}$. Επομένως για $\chi = -1$ θα έχουμε...
$\frac{2}{e} = \frac{1}{e}(1 + 1) \iff c = 0$

Άρα θα έχουμε $f(x) = e^x(x^2 + 1)$, $\forall x \in R$

2.3 Exercise3

Η τετμημένη αυξάνεται με ρυθμό 4cm/sec επομένως συμπεραίνουμε ότι $x'(t) = 4cm/sec$, καθώς επίσης έχουμε το σημείο (1,f(1)) άρα γενικά τα δεδομένα μας θα είναι ...

- $x'(t) = 4cm/sec$
- $x(t) = 1$
- $y(t) = 1$, καθώς f(1) = 1 , από δεδομένα.

Για την λύση του ερωτήματος αρκεί να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο που ζητείται. Αυτό θα γίνει με τον παρακάτω τρόπο ...

$f'(x)_t = y'(t) = lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = lim_{x\to 1}\frac{\frac{lnx}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x-1} = lim_{x\to 1}\frac{lnx-x+1}{(x-1)^2} = lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{2x(x-1)} = lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$

Προφανώς , το τελευταίο βήμα στην πάνω ισότητα λύθηκε με κανόνα de l' Hospital .

Όπως είναι γνωστό σε όλους μας ο τύπος του εμβαδού τριγώνου είναι ο εξής ...

$$E = \frac{1}{2}\cdot(Base \cdot Height) \tag{25}$$

Στην δικιά μας περίπτωση ο τύπος προσαρμόζεται ως εξής ...

$$E = \frac{1}{2}\cdot(f(x)_t \cdot x(t)) \tag{26}$$

Η άσκηση μας ζητάει τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού , επομένως θα παραγωγίσουμε τον πάνω τύπο και αντικαθιστώντας θα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

$E'(t) = \frac{f'(x)_t\cdot x'(t)\cdot x(t)+x'(t)\cdot f(x)_t}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1+4\cdot 1}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1cm/sec$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ΑΥΞΆΝΕΤΑΙ κατά 1 cm/sec

2.4 Exercise4

Ελένχουμε την συνέχεια.
Για $x < 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Επομένως η συνάρτηση συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως ρητή.
Για $x \geq 0$, $f(x) = ln(e^x + x)$. Επομένως η συνάρτηση συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως λογαριθμική.
Έλενχος στο $x = 0$
$lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$. (μορφή $\alpha/0^-$)
$lim_{x\to 0^+}[ln(e^x + x)] = ln(e^0 + 0) = 0$
ΕΦόσον τα όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει συνέχεια στο 0 άρα η συνάρτηση είναι μη συνεχής.
(Η συνέχεια δεν ξέρω εάν θα μου χρειαστεί στην συγκεκριμένη άσκηση διότι δουλεύουμε στο διάστημα $(0, a)$)

Επειδή αναφερόμαστε στο διάστημα $\Delta(0, a)$ θα εργαστούμε με το 2_0 μέρος της συνάρτησής μας που είναι το ...

$f(x) = ln(e^x + x), x \in (0, a)$
Επειδή f(x) γνησίως αύξουσα συνάρτηση ως λογαριθμική θα έχουμε

$$a > 0 \Longleftrightarrow f(a) > f(0) \Longleftrightarrow f(a) > 0 \tag{27}$$

Η δοσμένη συνάρτηση στο διάστημα που μας ζητείται πολλαπλασιάζοντας με $x(x-a)$ που είναι διαφορετικό του 0 στο διάστημα μας, θα έχουμε ...

$$(x-a)[e^{ln(e^x+x)} - ln(e^x + x)] + xln(e^x + x) = 0 \Longleftrightarrow (x-a)[e^x + x - ln(e^x + x)] + xln(e^x + x) = 0$$

Ορίζουμε μία συνάρτηση έστω $g(x) = (x-a)[e^x + x - ln(e^x + x)] + xln(e^x + x), \forall x \in R$
$g(a) = a \cdot f(a) > 0$ καθώς έχουμε αποδείξει ότι $f(a) > 0$ και $a > 0$ από δεδομένα.
$g(0) = -a(1 + 0 - ln1) = -a \cdot 1 = -a < 0$

Επομένως θα έχουμε $g(a) \cdot g(0) < 0$.Θα ισχύει το θεώρημα Bolzano , καθώς η g είναι συνεχής στο διάστημα Δ(0,a) και ισχυεί $g(0) \cdot g(a) < 0$. Επομένως θα υπάρξει μία τουάχιστον ρίζα στο Διάστημα Δ τέτοια ώστε η συνάρτηση g να είναι ίση με 0 ή $g(x) = 0$. Επομένως θα ισχυεί το ίδιο και για την ζητούμενη εξίσωση.