



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Τμήμα Μηχανικών Υπολογιστών & Πληροφορικής
Εργαστήριο Μαθηματικών Θεμελιώσεων και Εφαρμογών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Εξαμηνιαία Εργασία 1

Υποβάλλεται στους:

Αθανάσιος Ανδρικόπουλος
Ιωάννης Γουναρίδης

Υποβάλλεται από:

Student Name
AM: 10*****



CEID
COMPUTER ENGINEERING & INFORMATICS DEPARTMENT

Contents

1	Οδηγίες	2
1.1	Πληροφορίες βαθμολόγησης μαθήματος	2
1.2	Οδηγίες εκπόνησης	2
1.3	Οδηγίες υποβολής	3
1.4	Κανόνες Βαθμολόγησης	5
2	Εκφωνήσεις	6
2.1	Μιγαδικοί Αριθμοί-Διανυσματική Ανάλυση	6
2.2	Ανάλυση-Συναρτήσεις μίας μεταβλητής	7

1 Οδηγίες

1.1 Πληροφορίες βαθμολόγησης μαθήματος

Οι παρούσες ασκήσεις αποτελούν την πρώτη από τις τρεις εξαμηνιαίες εργασίες για το μάθημα των Μαθηματικών II. Η παρούσα εργασία καταλαμβάνει το **10%** του τελικού σας βαθμού, δηλαδή μία (1) μονάδα στις δέκα (10). Το ίδιο ποσοστό θα λαμβάνουν και οι εργασίες 2 και 3. Το σύνολο των εργασιών επομένως βαθμολογείται με τρεις (3) μονάδες στις δέκα (10). Δύο μονάδες (2) στις δέκα (10) θα λαμβάνει η πρόοδος και πέντε (5) μονάδες η τελική εξέταση. Δηλαδή

$$0.1 \cdot (project_1) + 0.1 \cdot (project_2) + 0.1 \cdot (project_3) + 0.2 \cdot (midterm) + 0.5 \cdot (exams) \\ = \text{Final}$$

Για παράδειγμα κάποιος συμμετέχων έχει βαθμολογηθεί με 9 στην πρώτη εργασία, 8 στην δεύτερη, 5 στην τρίτη, έγραψε 7 στην πρόοδο και στις τελικές εξετάσεις βαθμολογήθηκε με 6. Τότε ο τελικός του βαθμός είναι:

$$0.1 \cdot (9) + 0.1 \cdot (8) + 0.1 \cdot (5) + 0.2 \cdot (7) + 0.5 \cdot (6) = 0.9 + 0.8 + 0.5 + 1.4 + 3 = \\ = 6.6$$

1.2 Οδηγίες εκπόνησης

Οι απαντήσεις θα πρέπει να γραφούν σε κώδικα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας (L^AT_EX) σε online έκδοση του και συγκεκριμένα στο Overleaf. Για απορίες σχετικά με τη L^AT_EX ανατρέξτε στον οδηγό που υπάρχει στο eclass ή/και στα online μαθήματα που έγιναν.

Για να μπορέσετε να επιλύσετε τις παρακάτω ασκήσεις θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τα πέντε τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας, τα οποία θα αντικαθιστάτε κάθε φορά στις εκφωνήσεις που το απαιτούν. Έτσι προκύπτουν μοναδικά θέματα θέματα για τον καθέναν σας. **ΠΡΟΣΟΧΗ!** Χρησιμοποιείτε **ΟΛΟΙ**, αποκλειστικά τον καινούργιου τύπου **AM** σας και **ΟΧΙ** το τετραψήφιο που έχουν οι παλαιότεροι!

Εάν **ABCDE** τα πέντε τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας, να λύσετε αναλυτικά τις παρακάτω ασκήσεις. Σε κάποια σημεία απαιτείται να υπολογίσετε τους συντελεστές των ασκήσεων με τη χρήση **MOD**, **DIV** και των **ABCDE**. Το **MOD** εκφράζει το υπόλοιπο Ευκλείδειας διαίρεσης ενώ το **DIV** εκφράζει το ηλίκο. Τα **DIV** και **MOD** είναι πράξεις που ορίζονται μόνο μεταξύ ακεραίων αριθμών. Για παράδειγμα:

- $17 \text{ DIV } 5 = 3, \quad 17 \text{ MOD } 5 = 2$
- $7 \text{ DIV } 15 = 0, \quad 7 \text{ MOD } 15 = 7$

- $(-17) \text{ DIV } 5 = -3$, $(-17) \text{ MOD } 5 = -2$ (άποψη Γλωσσών Προγραμματισμού)
- $17 \text{ DIV } (-5) = -3$, $17 \text{ MOD } (-5) = 2$

Οι δύο παραπάνω απόψεις διαφέρουν μόνο όταν ο διαιρετέος είναι αρνητικός

1.3 Οδηγίες υποβολής

Τις απαντήσεις σας θα τις αποστείλετε ηλεκτρονικά μέσω eclass στο πεδίο "Εργασίες". Η τελική ημερομηνία υποβολής είναι η **18η Απριλίου, 23:55**. Όπως ειπώθηκε παραπάνω, απαιτείται να γράψετε την παρούσα εργασία μέσω κώδικα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας και όχι χειρόγραφα. Τα βήματα που θα ακολουθήσετε όταν είστε έτοιμοι και εντός χρονικών πλαισίων για να υποβάλετε την εργασία σας είναι τα εξής:

BHMA 1: Share

Ο καθένας από τους συμμετέχοντες πρέπει να διαμοιράσει (share) την εργασία του στο Overleaf με τον λογαριασμό **igounaridis@upatras.gr** όπως φαίνεται στο fig.1.

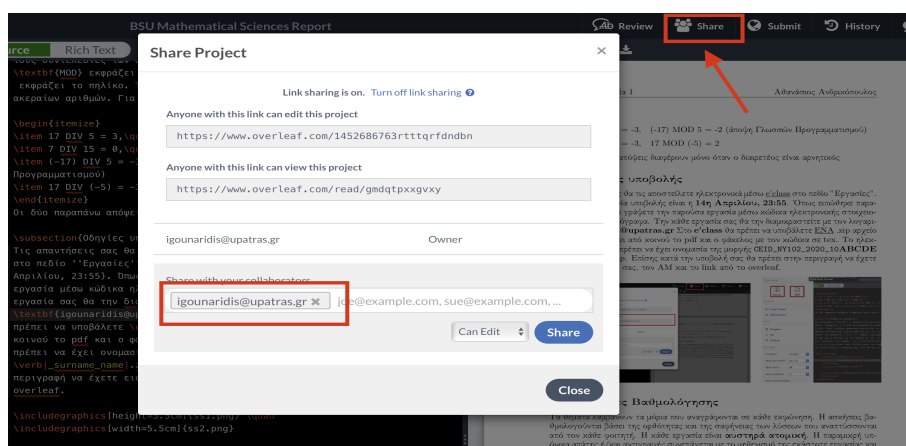


Figure 1: Διαμοιρασμός εργασίας

BHMA 2: Export and Rename

Εξάγετε το .pdf αρχείο από το overleaf το οποίο πρόκειται να υποβάλετε αποκλειστικά στο eclass. Η εξαγωγή γίνεται όπως φαίνεται στο fig 2.

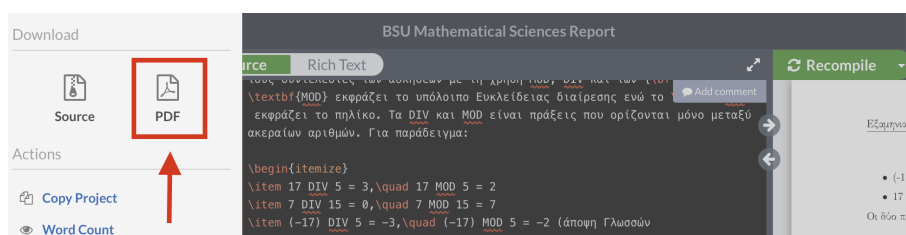


Figure 2: Διαμοιρασμός εργασίας

Το .pdf αρχείο που θα κατεβάσετε θα πρέπει να το μετονομάσετε βάσει του παρακάτω κανόνα:

CEID_NY102_2020_10ABCDE _surname_name.pdf ,

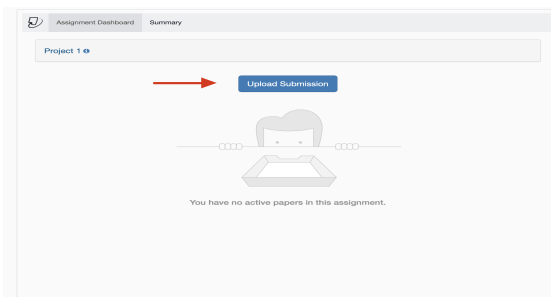
όπου NY102 είναι ο κωδικός μαθήματος, 10ABCDE είναι ο αριθμός σας μητρώου, surname το επώνυμο και name το όνομά σας.

BHMA 3: Upload and Submit

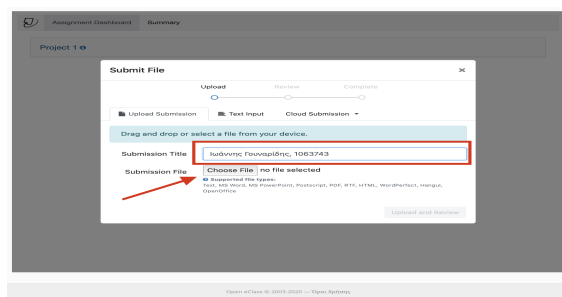
Υποβάλετε το αρχείο .pdf με την εργασία σας στο eclass μέσω του Turnitin. Αρχικά στην περιοχή Εργασίες, επιλέγετε το "Project 1". Πατάτε στο **"Upload Submission"**. Οδηγήστε στη συνέχεια στο περιβάλλον του Turnitin όπου και θα βρίσκεστε στο πεδίο "Upload Submission". Στο "Submission Title" εισάγετε το ονομ/μο και τον AM σας ως εξής:

Όνομα Επώνυμο, 10ABCDE

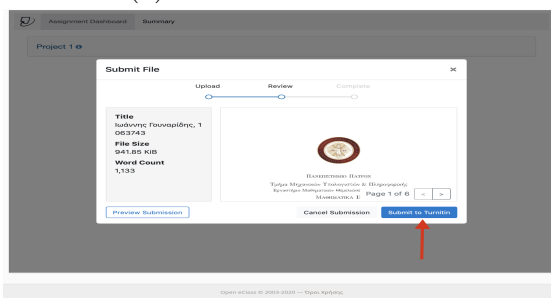
Στο πεδίο "Submission File" επισυνάπτετε το .pdf αρχείο που δημιουργήσατε στο BHMA 2. Στη συνέχεια πατάτε **"Submit to Turnitin"** για να οριστικοποιήσετε την υποβολή. Στο τέλος εμφανίζονται η ημ/νια και ώρα υποβολής και οι επιλογές να κατεβάσετε την εργασία σας και το αποδεικτικό υποβολής. Στην ίδια οθόνη θα φαίνεται το ποσοστό ομοιότητας της εργασίας σας με άλλες, βάσει του ελέγχου που θα έχει πραγματοποιήσει το σύστημα. Παρακάτω στο fig. 3 βρίσκονται αναλυτικά τα βήματα υποβολής.



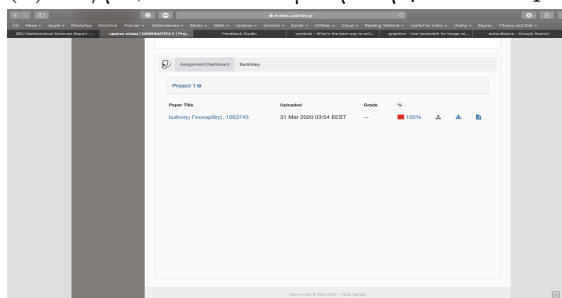
(a) Είσοδος στο Turnitin



(b) Ον/μο, AM και ανέβασμα εργασίας σε pdf



(c) Οριστική Υποβολή



(d) Αποδεικτικό Υποβολής

Figure 3: Upload to Turnitin

1.4 Κανόνες Βαθμολόγησης

Τα θέματα λαμβάνουν τα μόρια που αναγράφονται σε κάθε εκφώνηση. Οι ασκήσεις βαθμολογούνται βάσει της ορθότητας και της σαφήνειας των λύσεων που αναπτύσσονται από τον κάθε φοιτητή. Η κάθε εργασία είναι **αυστηρά ατομική**. Η παραμικρή υπόνοια απάτης ή/και αντιγραφής συνεπάγεται με το μηδενισμό της εκάστοτε εργασίας και την απαγόρευση συμμετοχής στις επόμενες διαδικασίες. Θα υπάρξει αυστηρός έλεγχος σε αυτό το κομμάτι! Ως μηχανικοί υποχρεούστε να παραδώσετε τις λύσεις που βασίζονται στο διάβασμά σας και όχι στην αντιγραφή πνευματικής ιδιοκτησίας συναδέλφου σας. Έχετε την ηθική υποχρέωση να ΜΗ ΒΡΕΘΕΙΤΕ στη θέση του αποκλεισμένου από τις εξετάσεις.

Για το λόγο αυτό, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 1.3, στο eclass υποβάλετε τις εργασίες σας μέσω του Turnitin. Το Turnitin αποτελεί ένα λογισμικό ανίχνευσης, αντιγραφής και λογοκλοπής ακαδημαϊκών εργασιών. Έχοντας ενσωματώσει το turnitin στην πλατφόρμα του eclass, σαν εκπαιδευτές του μαθήματος έχουμε τη δυνατότητα να ανιχνεύσουμε το κατά πόσο οι εργασίες που θα ανεβάσουν οι εκπαιδευόμενοι του μαθήματος είναι προϊόν δικιάς τους δουλειάς ή προϊόν αντιγραφής. Οι εκπαιδευόμενοι εκπονούν τις εργασίες τους και ο grader του Turnitin συγκρίνει το περιεχόμενο αυτών με άλλες πηγές μέσα από βάσεις δεδομένων που διαθέτει. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτή να εξετάζει εάν η εργασία που έχει υποβληθεί είναι αποτέλεσμα λογοκλοπής. Με το ποσοστό ομοιότητας θα διαγράφονται οι εργασίες σας από το σύστημα.

ΤΕΛΟΣ ΟΔΗΓΙΩΝ

2 Εκφωνήσεις

2.1 Μιγαδικοί Αριθμοί-Διανυσματική Ανάλυση

- ✓ 1. [10] Έστω τα διανύσματα $\vec{a} = (B, -A, C)$, $\vec{b} = (A, -B, D)$ και $\vec{c} = (A, B, -A)$.
Να υπολογιστούν:

- (a) Τα διανύσματα $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ και τα αντίστοιχα μοναδιαία τους,
(b) Τα γινόμενα $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{d} = (\vec{a} + 3\vec{b}) \times \vec{c}$ και $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση \vec{d}

- 2. [10] Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

- (a) $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \leq |\vec{v}||\vec{u}|$
(b) $\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) + \vec{u} \times (\vec{w} \times \vec{v}) + \vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = 0$

- ✓ 3. [10] Ο πιλότος ενός αεροπλάνου πρέπει να διανύσει απόσταση κινούμενος προς ανατολικά. ίση με $100 \cdot [(A+B) \bmod 3 + 1] km$. Από βορειοδυτικά φυσάει άνεμος με ταχύτητα $10 \cdot (C+2) km/h$. Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας του αεροπλάνου ως προς τον άνεμο αν, σύμφωνα με το δρομολόγιο, το αεροπλάνο πρέπει να φτάσει στον προορισμό του σε $10 \cdot [(B \cdot D + 2) \bmod 3 + 1] min$.

- 4. [10] Δείξτε ότι, αν $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράεδρο με κορυφή A όπου $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $\Gamma(x_3, y_3, z_3)$, $\Delta(x_4, y_4, z_4)$, τότε ο όγκος του τετραέδρου ισούται με

$$V = \frac{1}{6}|A|, \quad \text{όταν} \quad A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

- ✓ 5. [10] Χρησιμοποιώντας το θεώρημα de Moivre, βρείτε όλες τις λύσεις στις ακόλουθες εξισώσεις δίνοντας τις απαντήσεις σας σε πολική μορφή. Σχεδιάστε κάθε σύνολο ριζών σε ένα διάγραμμα Argand και σχολιάστε τη συμμετρία.

✓ (a) $z^4 = 16$

✓ (b) $z^3 = -27i$

✓ (c) $z^5 = -1$

- ✓ 6. [10] Χρησιμοποιώντας τις λύσεις της άσκησης 5b, επιλύστε την εξίσωση

$$1 + 27i(x+1)^3 = 0$$

δίνοντας τις απαντήσεις στη μορφή $a + bi$.

2.2 Ανάλυση-Συναρτήσεις μίας μεταβλητής

- ✓ 1. [10] Έστω ένα κινητό διανύει μία απόσταση S . Υπάρχει χρονική στιγμή όπου η στιγμιαία ταχύτητα να γίνεται ίση με την μέση ταχύτητα; Να δώσετε ένα παράδειγμα.
- ✓ 2. [10] Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t) = \frac{f'(x)}{2(x+1)}, \quad x \neq -1 \text{ και } f(-1) = \frac{2}{e}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

- ✓ 3. [10] Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Έστω επίσης ότι σημείο M κινείται στην γραφική παράσταση \mathcal{C}_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν A είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και B τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABM την χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $(1, f(1))$.

- ✓ 4. [10] Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln(e^x + x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$, η εξίσωση

$$\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x-a} = 0,$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, a)$.

ΤΕΛΟΣ ΕΚΦΩΝΗΣΕΩΝ