

# «Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

## Презентация ВКР

Кононыхин Иван Александрович, группа 20.M03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.  
Рецензент: Лектор, Университет Кардиффа (Великобритания),  
Пепелышев А.Н.



Санкт-Петербург  
2022г.

Временной ряд **однороден**, если его структура постоянна. При внешнем воздействии ряд терпит возмущение, появляется разладка в его структуре и возникает задача найти момент возмущения.

**Задача обнаружения разладки:** Определить момент изменения структуры ряда. Структура — подпространство сигнала.

**Метод:** Превышение заданного порога функцией обнаружения, основанной на скользящих отрезках ряда.

**Временной ряд:**

$$F_N = (f_1, \dots, f_N), \text{ где } f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

$Q$  — неизвестный момент возмущения.

**Цель работы:** Создать систему, автоматически выбирающую порог срабатывания и способную обнаруживать разладку, заданную изменением частоты в синусоидальном временном ряде  $F_N$  за указанный промежуток времени.

## Параметры:

- $L : 2 \leq L \leq \min(B - 1, T)$  — длина окна.
- $B > L$  — длина базовых подрядов,  $T \geq L$  — длина тестовых подрядов.
- $F^{(1)} = (f_i, \dots, f_{i+B-1}), 1 \leq i \leq N - B + 1$  — базовые подряды.
- $F^{(2)} = (f_i, \dots, f_{i+T-1}), 1 \leq i \leq N - T + 1$  — тестовые подряды.
- $U_l^{(1)}, l = 1, \dots, L$  — собственные векторы траекторной матрицы ряда  $F^{(1)}$ .
- $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  — подмножество  $\{1, \dots, L\}$ ,  $r$  — ранг ряда.
- $\mathfrak{L}_r^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(U_l^{(1)}, l \in I)$ .
- $X_1^{(2)}, \dots, X_{K_2}^{(2)}$  — векторы вложений длины  $L$  ряда  $F^{(2)}$ ,  
 $K_2 = T - L + 1$ .

## Индекс неоднородности:

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

## Матрица неоднородности:

Матрица  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{B,T}$ , состоящая из элементов  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = g(F_{i,i+B-1}; F_{j,j+T-1}), \\ 1 \leq i \leq N - B + 1, \quad 1 \leq j \leq N - T + 1.$$

## Функции обнаружения неоднородности:

- ❶ Строковая: Ряд  $d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N.$
- ❷ Столбцовая: Ряд  $d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), \quad B \leq n \leq N.$
- ❸ Диагональная: Ряд  $d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), \quad T+B \leq n \leq N.$
- ❹ Симметричная: Ряд  $d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), \quad B \leq n \leq N.$

**Постановка задачи:** Численно сравнить имеющиеся четыре функций обнаружения неоднородности и выбрать лучшую в смысле момента преодоления заданного порога  $\gamma^*$  и скорости роста для ряда  $F'_N = F_N + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ .

**Задание неоднородности ряда  $F_N$ :**

- ❶ Фазовый сдвиг:  $\phi_1 \neq \phi_2$ .
- ❷ Выброс: 
$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1, & n = Q. \end{cases}$$
- ❸ Изменение амплитуды:  $C_1 \neq C_2$ .
- ❹ Изменение частоты:  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

$N=700$ ,  $Q=301$ ,  $\omega_1=0.1$ ,  $\omega_2=0.2$ ,  $C_1=1$ ,  $C_2=2$ ,  $\phi_1=0$ ,  $\phi_2=\frac{\pi}{2}$ ,  $\sigma^2=0.25$ ,  $L=60$ ,  $B=T=100$

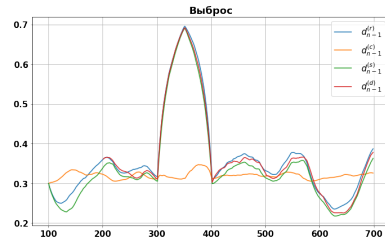
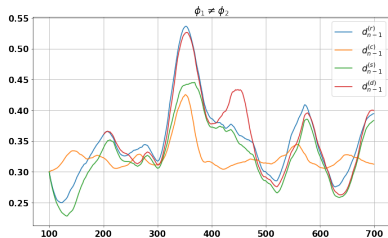
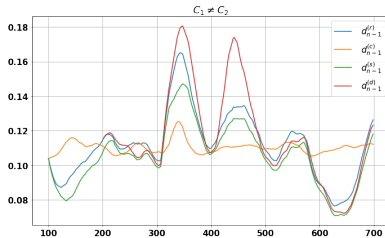
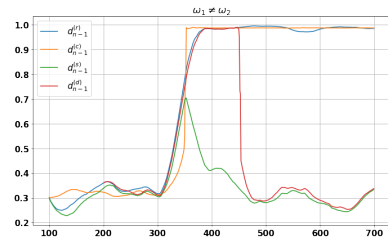


Рис.: Функции обнаружения. Пример на одной реализации шума.

Рассмотрим ряд  $F_N$  с неоднородностью, заданной изменением частоты периодики —  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Пусть  $C_1 = C_2 = 1$ .

**Постановка задачи:** Аналитически упростить индекс неоднородности  $g(F^{(1)}; F^{(2)})$  для строковой функции обнаружения  $d_{n-1}^{(r)}$ , чтобы получить в явном виде его зависимость от частот до и после разладки.

**Результат:**

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\left[ \left( \frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left( \frac{\cos(2\pi Lb)-1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)-1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}} = g_a(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

где  $a = \omega_1 + \omega_2$ ,  $b = \omega_1 - \omega_2$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $L \rightarrow \infty$ ,  $K_2 \rightarrow \infty$ ,  $|g(F^{(1)}; F^{(2)}) - g_a(\omega_1, \omega_2)| < \varepsilon$ .

# Аппроксимация индекса однородности: точность аппроксимации

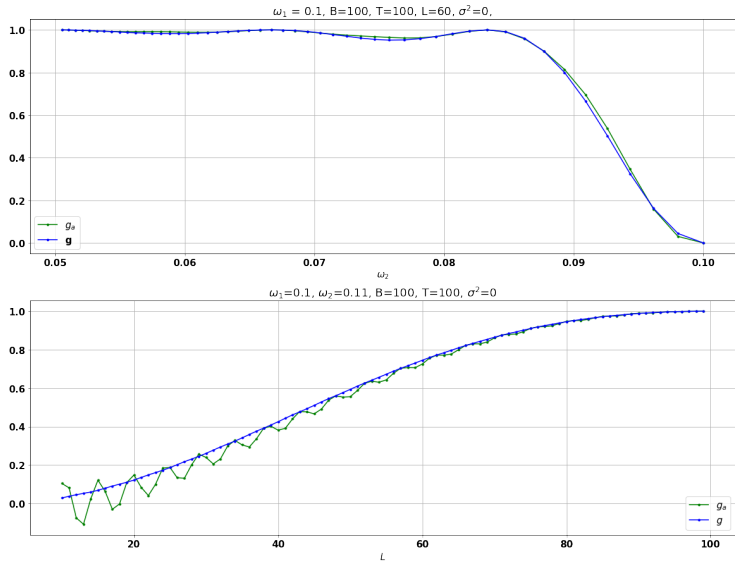


Рис.: Корректность аппроксимации  $g(\omega_1, \omega_2)$ .



При достаточно маленьком значении  $L$  по отношению к  $T$  переходный интервал становится линейным.

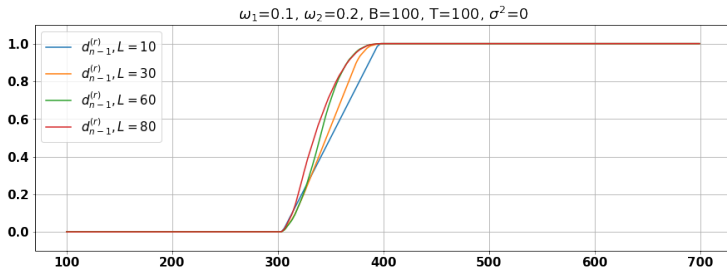


Рис.: Линейность переходного интервала при большом значении  $T - L$ .

**Постановка задачи:** Создать систему, способную обнаружить разладку за заданный промежуток времени в синусоидальных временных рядах, порожденную изменением частоты. Сигнал о моменте возмущения — превышение  $d_{n-1}^{(r)}$  порога  $\gamma^*$ .

**Описание системы:**

- 1 Входные данные:  $F_N$ ,  $k$ ,  $\Delta_{min}$ .
- 2 Результат:  $\hat{Q}$ .

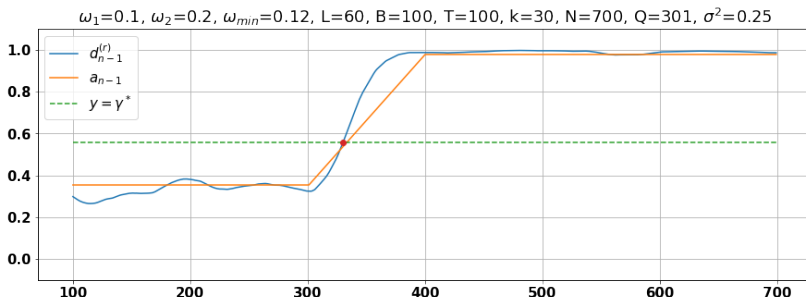


Рис.: Система. Пример работы.

## Характеристики системы:

- $FP(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} < Q$ .
- $TP(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$ .
- $FN(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} > Q + k$ .

Промоделируем  $n_{iter} = 200$  раз реализацию шума  $\epsilon$  и на каждой итерации посчитаем характеристики системы.

## Вероятности обнаружения:

- $FPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $TPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} TP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $FNR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FN_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$

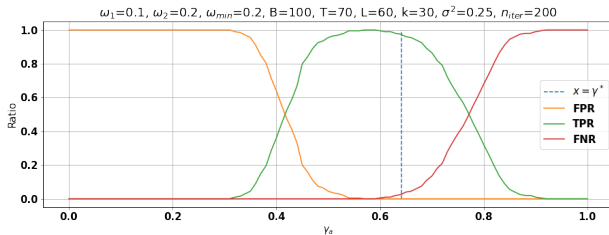


Рис.: Работы системы. Оценка,  $T = 70$ .

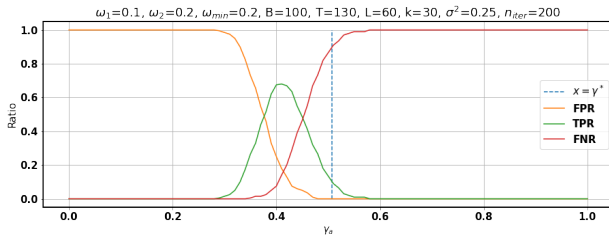


Рис.: Работы системы. Оценка,  $T = 130$ .

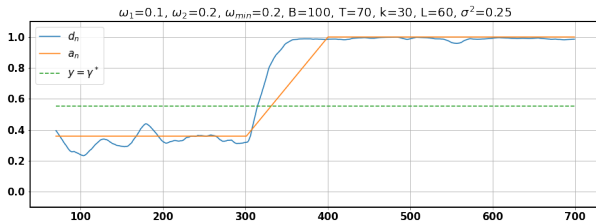


Рис.: Работы системы. Одна итерация,  $T - L = 10$ .

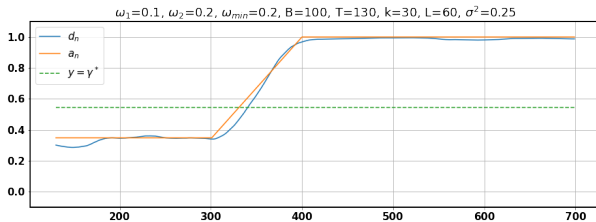


Рис.: Работы системы. Одна итерация,  $T - L = 70$ .

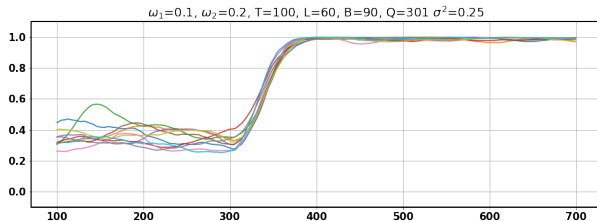


Рис.: Функция  $d_n$ . Реализации шума,  $B = 90$ .

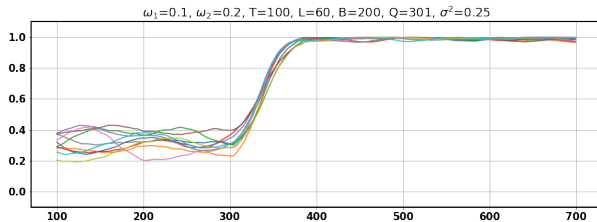


Рис.: Функция  $d_n$ . Реализации шума,  $B = 200$ .

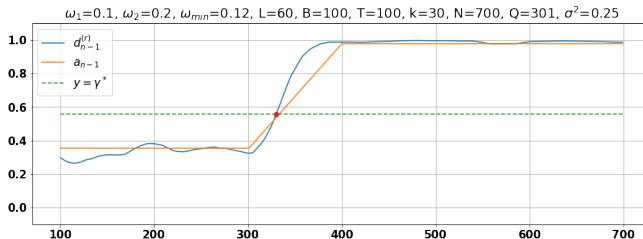


Рис.: Система. Пример работы.

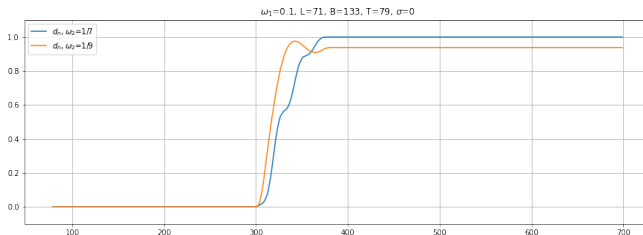


Рис.: Функция  $d_n$ . Поведение функции при  $\omega_2 = \frac{1}{7}$  и  $\omega_2 = \frac{1}{9}$ .