

Научная и компьютерная коммуникация в современных условиях

«Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Кононыхин Иван Александрович

группа 20.М03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

2022

Введение в теорию

Основные обозначения

Обозначения

$F^{(1)} = F_{N_1}^{(1)}$, $F^{(2)} = F_{N_2}^{(2)}$ - временные ряды.

$L : 2 \leq L \leq \min(N_1 - 1, N_2)$ - длина окна.

$U_l^{(1)}$, $l = 1, \dots, L$ — собственные векторы траекторной матрицы ряда $F^{(1)}$

$\mathfrak{L}^{(L,1)}$ — линейное пространство, натянутое на L —сдвинутые векторы ряда $F^{(1)}$, $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathfrak{L}^{(L,1)}$

$I = \{i_1, \dots, i_r\}$ — подмножество $\{1, \dots, L\}$

$\mathfrak{L}_r^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(U_l^{(1)}, l \in I)$

$X_1^{(2)}, \dots, X_{K_2}^{(2)}$ — L -сдвинутые векторы ряда $F^{(2)}$

Индекс неоднородности

Определение

Индекс неоднородности:

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} (\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2)}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}. \end{aligned}$$

Индекс неоднородности характеризует несоответствие между рядом $F^{(2)}$ и структурой ряда $F^{(1)}$ (описываемого подпространством $\mathfrak{L}_r^{(1)}$). $g \in [0, 1]$.

Обозначения

$F_N : F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$, $N > 2$ — исходный временной ряд;
 $F_{i,j}$ — подряды ряда $F_N : F_{i,j} = (f_i, \dots, f_j)$, $0 \leq i < j \leq N - 1$;
 B — длина базовых подрядов ряда $F_N : B > L$;
 T — длина тестовых подрядов ряда $F_N : T \geq L$;
 $F_{i,i+B-1}$ — Базовый подряд.
 $F_{j,j+T-1}$ — Тестовый подряд.

Строковая функция обнаружения неоднородности

Определение

Ряд $D_{T,N}^{(r)}$, элементы которого задаются как

$$d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N.$$

есть **строковая функция обнаружения**.

Аналитическая оценка индекса неоднородности при изменении частоты гармоника

Постановка задачи

Задача

Попробуем аналитически упростить индекс неоднородности g , чтобы явно увидеть, как разности частот ряда до и после разладки влияют на его значения.

Рассмотрим ряд

$$F_N = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \in [0, Q - 1], \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \in [Q, N - 1]. \end{cases}$$

Пусть $\omega_1 \neq \omega_2$; $C_1 = C_2$. Для простоты зададим амплитуды $C_1 = C_2 = 1$.

Индекс неоднородности

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} (\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2)}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}. \end{aligned}$$

Индекс неоднородности: аппроксимация

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= 1 - \frac{\sum_{l=0}^{K_2-1} \sum_{i=0}^{r-1} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=0}^{K_2-1} \|X_l^{(2)}\|^2} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\frac{K_2 \cdot 2}{L} \cdot \left[\left(\frac{\sin(2\pi L b)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi L a)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi L b) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi L a) - 1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{K_2 \cdot \frac{L}{2}} = \\ &1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi L b)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi L a)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi L b) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi L a) - 1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}} = g_a(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

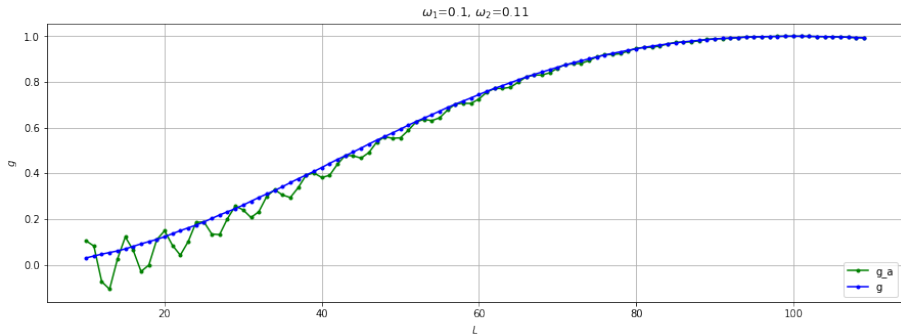
где $a = \omega_1 + \omega_2$, $b = \omega_1 - \omega_2$.

Проверка точности аппроксимации: изменения L

Зададим параметры:

$N = 700$, $Q = 301$, $B = 200$, $T = 200$

Зафиксируем частоты и будем изменять L .



Система обнаружения структурной неоднородности ряда с автоматически выстраиваемым порогом срабатывания на основе выведенной аналитической формулы.

Постановка задачи

Рассмотрим ряд

$$F_N = \begin{cases} C \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \in [0, Q - 1], \\ C \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \in [Q, N - 1], \end{cases}$$

где Q — момент возмущения.

Система:

- Вход:

- 1 F_N ;

- 2 k — длина интервала, за который нужно определить момент возмущения \hat{Q} .

- Выход:

- 1 \hat{Q} — момент обнаружения неоднородности.

Задача:

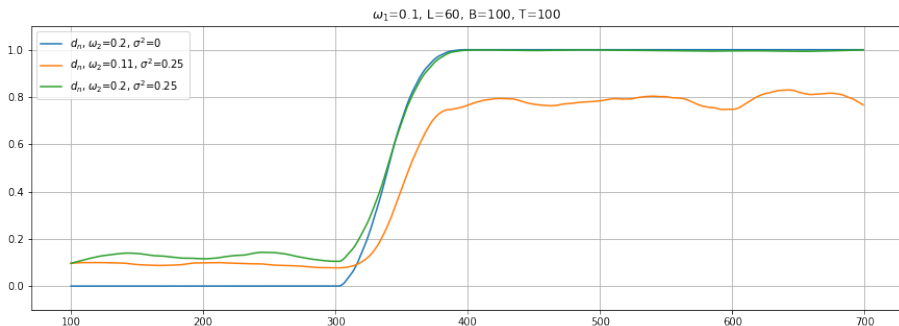
Выбрать порог γ так, чтобы $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$.

Оценка γ

В качестве верхней границы можно взять значение $\gamma = 1$, однако в таком случае \hat{Q} будет либо больше $Q + k$, либо, при $\omega_1 \approx \omega_2$ функция d_n никогда не достигнет 1.

При добавлении шума с дисперсией σ^2 строковая функция неоднородности d_n до разладки смещается от 0. Если взять слишком маленькое значение γ , $\hat{Q} < Q$.

Для таких рядов надо либо знать σ^2 , либо иметь данные для оценки значений d_n где точно отсутствует неоднородность.



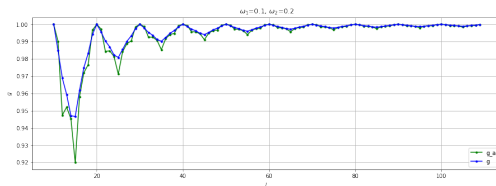
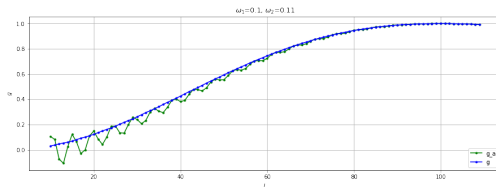
Оценка γ : нижняя граница

Предположим, у нас есть нужные данные и мы смогли оценить нижнюю границу $\gamma = \gamma_{min}$.

Оценка γ : верхняя граница

Для определения верхней границы $\gamma = \gamma_{max}$ мы можем воспользоваться аналитической аппроксимацией g_a .

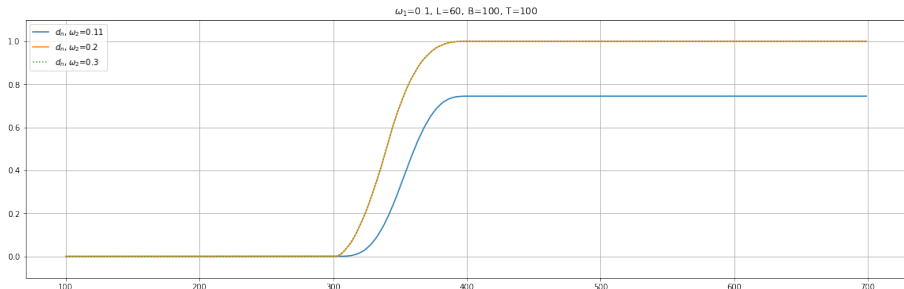
При достаточно больших L $g_a \approx g$.



Однако, для того, чтобы использовать $g_a(\omega_1, \omega_2)$, нам нужно знать частоты до и после разладки.

Предпосылки: влияние изменения частот.

По свойству индекса неоднородности, чем больше $|\omega_2 - \omega_1|$, тем ближе g к 1 после переходного интервала.



Оценка γ : верхняя граница

Добавим еще 2 параметра, подаваемых на вход системе:

- ω_1 — начальная частота ряда;
- $\omega_{min} = \omega_1 + \Delta_{min}$, где Δ_{min} — минимальное для обнаружения неоднородности отклонение частоты ряда от ω_1 ;

Таким образом, можем взять $\gamma_{max} = g(\omega_1, \omega_{min})$.

Так как мы не знаем значения ω_2 , а ω_{min} — входной параметр, мы не можем положить $\gamma = \gamma_{max}$ по тем же причинам, почему и $\gamma_{max} = 1$. Однако при наличии аппроксимации a_T переходного интервала кривой d_n , мы можем взять γ как значение a_T в точке k .

Предпосылки: переходный интервал

Матрица \mathbb{X} имеет размерность $L \times K$. Рассмотрим траекторные матрицы $\mathbb{X}_{test}^{(j)}$ размерности $L \times K_{test}$ тестовых рядов $F_{j,j+T}$, где $K_{test} = T - L + 1$, $j \in [0, N - T)$.

$\forall j \in [0, Q - T), \forall n \in [1, K_{test}] : X_n \in \mathbb{X}_{test}^{(j)}, X_n \in \mathfrak{L}_r^{(1)}.$

$\forall j \in [Q + T, N - T), \forall n \in [1, K_{test}] : X_n \in \mathbb{X}_{test}, X_n \notin \mathfrak{L}_r^{(1)}.$

При $T > 2 \cdot L$, $\forall j \in [Q - T + L, Q - L)$, $X_{test}^{(j)}$ состоит из:

- $n_B = n_B(j)$ векторов вложений, лежащих в $\mathfrak{L}_r^{(1)}$;
- $n_T = n_T(j)$ векторов вложений, содержащих момент возмущения;
- $n_H = n_H(j)$ векторов вложений, содержащих только значения ряда после разладки.

Причем $K_{test} = n_B + n_T + n_H$

Предпосылки: переходный интервал

Пусть L — фиксировано.

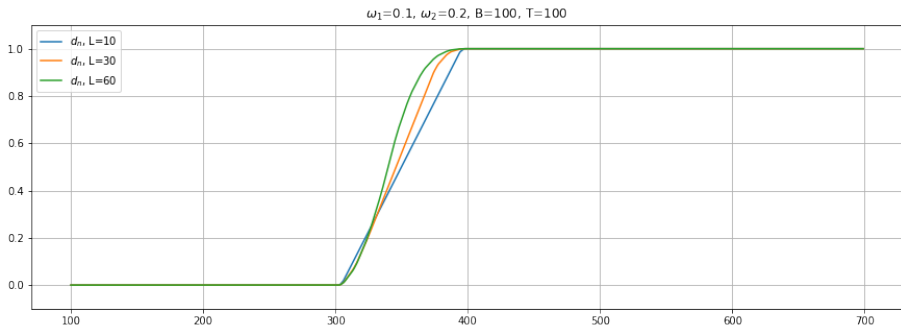
$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_{\text{test}}} \sum_{i=1}^r \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_{\text{test}}} \|X_l\|^2} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{n_B} \sum_{i=1}^r \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + \sum_{l=n_B}^{n_B+n_T} \sum_{i=1}^r \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + \sum_{l=n_B+n_T}^{K_{\text{test}}} \sum_{i=1}^r \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{n_B} \|X_l\|^2 + \sum_{l=n_B}^{n_B+n_T} \|X_l\|^2 + \sum_{l=n_B+n_T}^{K_{\text{test}}} \|X_l\|^2} = \\ &= 1 - \frac{0 + \sum_{l=n_B}^{n_B+n_T} \sum_{i=1}^r \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + n_H(j) \cdot c_H}{c_1 + \sum_{l=n_B}^{n_B+n_T} \|X_l\|^2 + c_2} \approx 1 - \frac{n_H(j) \cdot c_H}{c_1 + c_2}. \end{aligned}$$

При $j \in [Q - T + L, Q]$, $n_H(j) = j - Q + T - L$.

Отсюда, при $T \rightarrow \infty$, $n_H \rightarrow \infty$ и переходный интервал d_n более линеен.

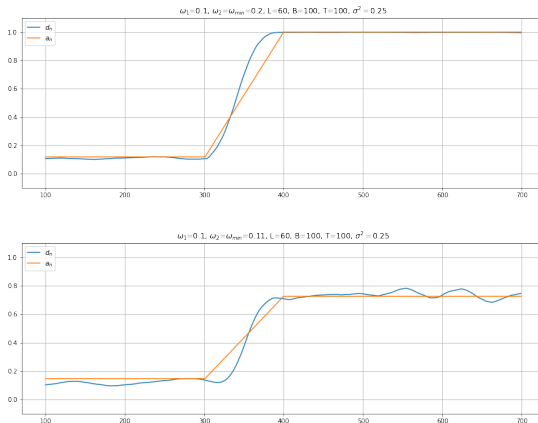
Предпосылки: переходный интервал

Аналогично, увеличивается $n_T(j)$ и при уменьшении L .



Аппроксимация: Идея

Таким образом, мы можем аппроксимировать переходный интервал от γ_{min} до γ_{max} прямой a_T .



Важно отметить, раз мы хотим брать γ как значение a_T в точке k , нам важно чтобы начало прямой a_T было не больше, чем значения d_n на переходном интервале. Однако такая аппроксимация не всегда корректна.

Определение \hat{Q}

Таким образом, выбрав $\gamma = \gamma_a$ — значение линейной аппроксимации a_T переходного интервала функции d_n в точке k , будем сигнализировать об обнаружении неизвестного момента возмущения Q как момент \hat{Q} преодоления γ_a .

Алгоритм работы

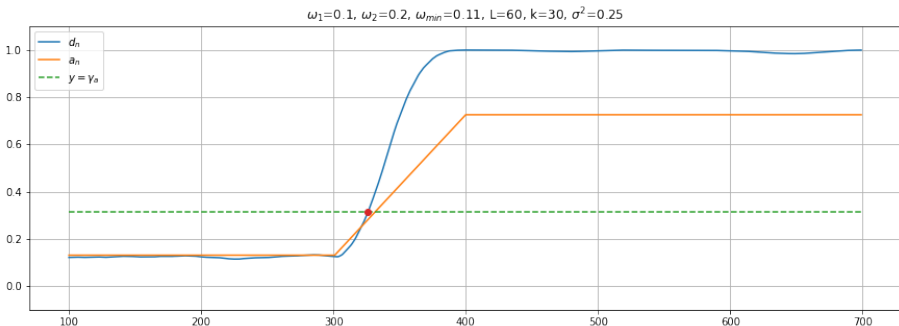
Формализуем систему:

- Входные данные: $F_N, \omega_1, \omega_{min}, k$;
- Результат: \hat{Q} ;
- Алгоритм:
 - 1 Вычисление $\gamma_{min}, \gamma_{max}$;
 - 2 Аппроксимация переходного интервала a_T ;
 - 3 Фиксирование γ_a ;
 - 4 Определение \hat{Q} как момент преодоления d_n значения γ_a .

Пример работы

Зафиксируем параметры: $\omega_1 = \frac{1}{10}$, $\omega_{min} = \frac{1}{100}$, $k = 30$, $\omega_2 = \frac{1}{5}$, $Q = 301$, $L = 60$, $B = 100$, $T = 100$, $\sigma^2 = 0.25$.

При таких параметрах, для графика ниже $\gamma_{min} = 0.13$, $\gamma_{max} = 0.725$, $\gamma_a = 0.311$, $\hat{Q} = 326$.



Параметры

Все параметры, используемые выше можно разделить на категории:

- 1 Входные: $\omega_1, \omega_{min}, k$;
- 2 Зависимые от входных параметров: $\gamma_{min}, \gamma_{max}, \gamma_a$.
- 3 Неизвестные: ω_2, Q ;
- 4 Произвольные, выбираемые системой: L, B, T .

Первую категорию параметров можно интерпретировать как заданные пользователем системы. Они фиксированы и не могут меняться для определения более хорошего порога.

Вторая категория зависит от входных параметров и определяется алгоритмом работы.

Третья категория зависит от ряда, подаваемого системе и вообще говоря не известны.

Четвертая категория параметров - те, которые система может подстраивать под тот или иной ряд. Позже попробуем оценить их влияние на оценку системы.

Оценка системы

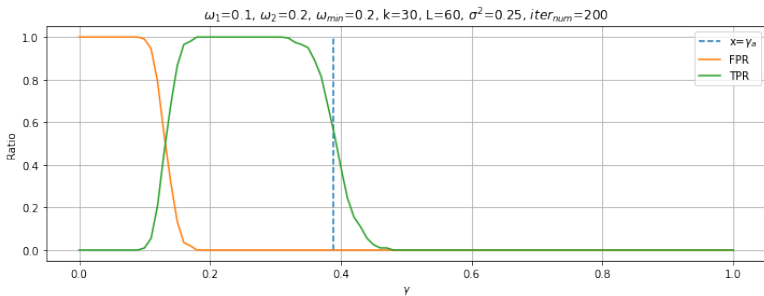
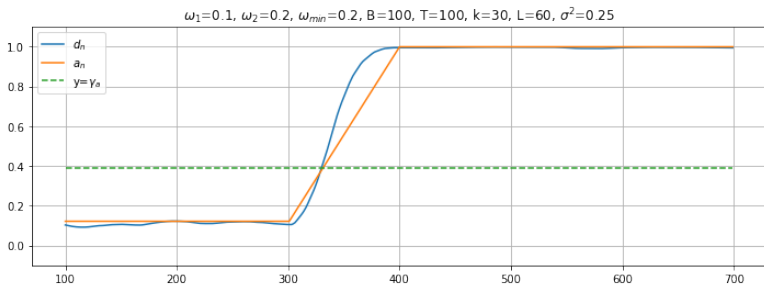
Зафиксируем дисперсию шума $\sigma^2 = 0.25$ и введем характеристики системы:

- $FP(\gamma)$ - преодоление порога γ кривой d_n до момента Q
- $TP(\gamma)$ - преодоление порога γ кривой d_n в промежутке $[Q, Q + k]$

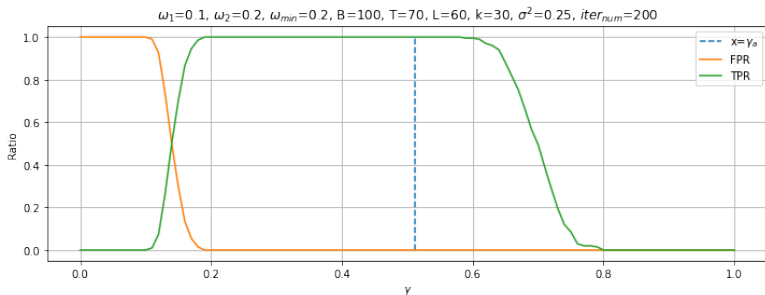
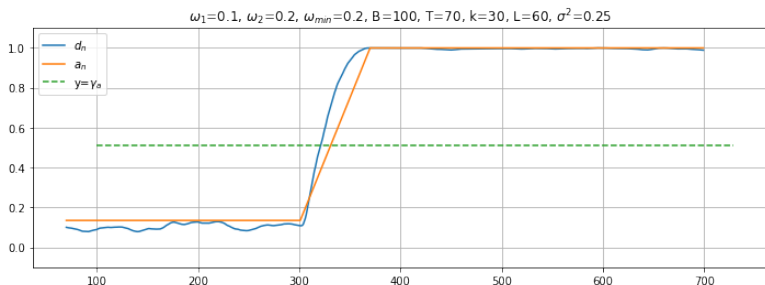
Значения параметров рассмотренных категорий оставим такими же.

Промоделируем реализации шума $n_{iter} = 200$ раз и для $\forall \gamma \in [0, 1]$ с шагом 0.01 определим $FPR(\gamma) = \frac{FP}{n_{iter}}$ и $TPR(\gamma) = \frac{TP}{n_{iter}}$.
Также будем смотреть на $FPR(\gamma_a)$.

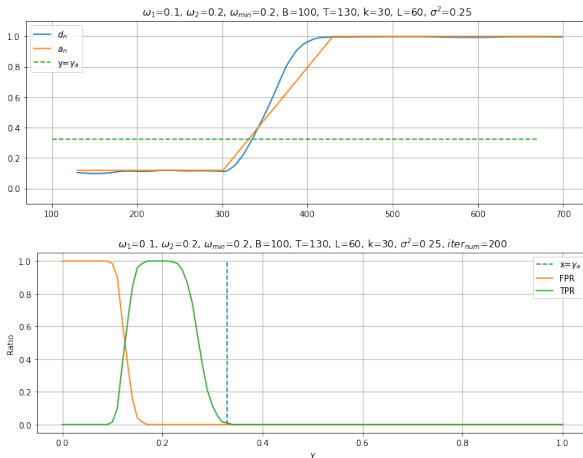
Оценка системы



Оценка влияния параметров: $T=70$



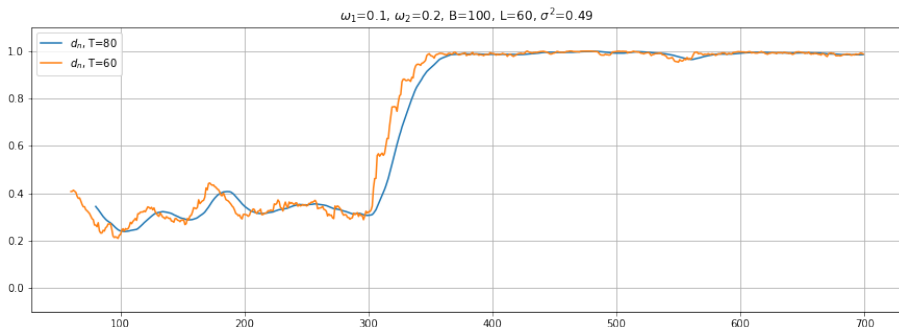
Оценка влияния параметров: $T=130$



Из изображений видно, что влияя на параметр T мы можем регулировать скорость возрастания d_n на переходном интервале и добиться основного требования к a_T — значения должны быть не больше чем y_{d_n} .

Оценка влияния параметров: $T \approx L$

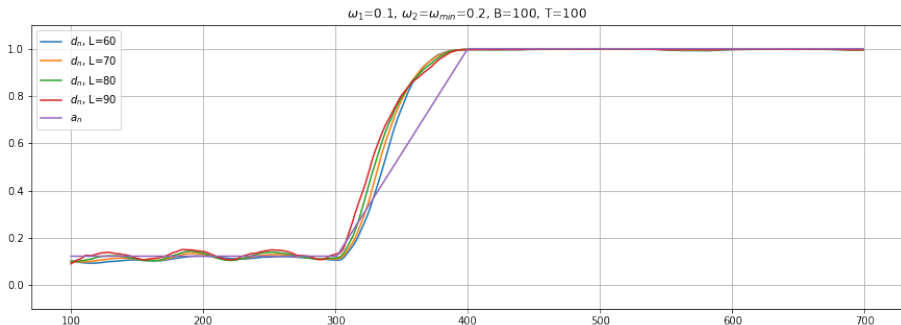
Выше было видно, что уменьшая T , мы можем уменьшить значение $FPR(\gamma_a)$. Однако при $T \rightarrow L$, количество элементов в тестовых рядах для подсчета индекса неоднородности g сокращается, усиливая влияние шума на подсчет элементов d_n , что приводит к усилению колебаний и увеличению $FPR(\gamma_a)$.



Оценка влияния параметров: L

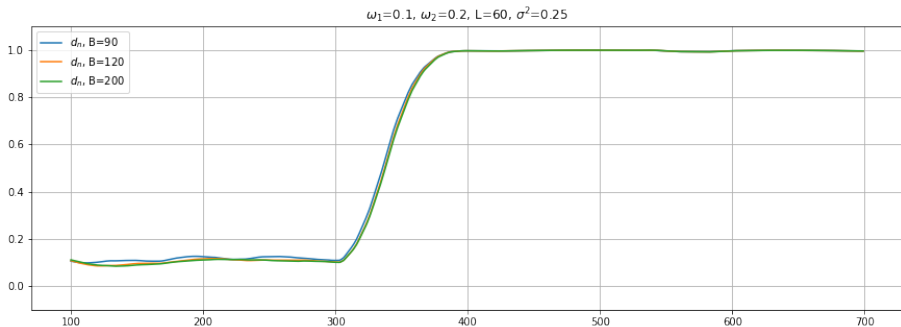
Как было отмечено ранее, сходимость g_a и g достигается при достаточно больших L , однако уменьшая L , переходный интервал d_n более линеен.

Изменяя параметр L , мы регулируем скорость возрастания кривой d_n . Таким образом, подстраивая параметр L мы можем определять \hat{Q} раньше момента $Q + k$.



Оценка влияния параметров: B

В целом, параметр B не влияет на устойчивость системы в силу предположении о наличии исторических данных и отсутствия влияния на переходный интервал d_n .



Дальнейшие планы

- 1 Исследовать применимость описанной системы.

Литература:



Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of time series structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC.