

«Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Презентация ВКР

Кононыхин Иван Александрович, группа 20.M03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.
Рецензент: Лектор, Университет Кардиффа (Великобритания),
Пепелышев А.Н.



Санкт-Петербург
2022г.

Временной ряд **однороден**, если его структура постоянна. При внешнем воздействии ряд терпит возмущение, появляется разладка в его структуре и возникает задача найти момент возмущения.

Задача обнаружения разладки: Определить момент изменения структуры ряда. Структура — подпространство сигнала.

Метод: Превышение заданного порога функцией обнаружения, основанной на скользящих отрезках ряда.

Временной ряд:

$$F_N = (f_1, \dots, f_N), \text{ где } f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

Q — неизвестный момент возмущения.

Цель работы: Создать систему, автоматически выбирающую порог срабатывания и способную обнаруживать разладку, заданную изменением частоты в синусоидальном временном ряде F_N за указанный промежуток времени.

Параметры:

- $L : 2 \leq L \leq \min(B - 1, T)$ — длина окна,
- $B > L$ — длина базовых подрядов, $T \geq L$ — длина тестовых подрядов,
- $F^{(1)} = (f_i, \dots, f_{i+B-1}), 1 \leq i \leq N - B + 1$ — базовые подряды,
- $F^{(2)} = (f_i, \dots, f_{i+T-1}), 1 \leq i \leq N - T + 1$ — тестовые подряды,
- $U_l^{(1)}, l = 1, \dots, L$ — собственные векторы траекторной матрицы ряда $F^{(1)}$,
- $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ — подмножество $\{1, \dots, L\}$, r — ранг ряда,
- $\mathfrak{L}_r^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(U_l^{(1)}, l \in I)$,
- $X_1^{(2)}, \dots, X_{K_2}^{(2)}$ — векторы вложений длины L ряда $F^{(2)}$.

Индекс неоднородности:

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} (\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2)}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \\ &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}. \end{aligned}$$

Матрица неоднородности:

Матрица $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{B,T}$, состоящая из элементов g_{ij} :

$$g_{ij} = g(F_{i,i+B-1}; F_{j,j+T-1}),$$

$$1 \leq i \leq N - B + 1, \quad 1 \leq j \leq N - T + 1,$$

есть **матрица неоднородности** временного ряда F_N .

Строковая:

Ряд $D_{T,N}^{(r)}$ с элементами $d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N.$

Столбцовая:

Ряд $D_{B,N}^{(c)}$ с элементами $d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), \quad B \leq n \leq N.$

Диагональная:

Ряд $D_{T+B,N}^{(d)}$ с элементами

$d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), \quad T+B \leq n \leq N.$

Симметричная:

Ряд $D_{B,N}^{(s)}$ с элементами $d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), \quad B \leq n \leq N.$

Постановка задачи: Численно сравнить имеющиеся четыре функций обнаружения неоднородности и выбрать лучшую в смысле момента преодоления заданного порога γ^* и скорости роста для ряда $F'_N = F_N + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

Задание неоднородности ряда F_N :

- ❶ Фазовый сдвиг: $\phi_1 \neq \phi_2$.
- ❷ Выброс: $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1, & n = Q. \end{cases}$
- ❸ Изменение амплитуды: $C_1 \neq C_2$.
- ❹ Изменение частоты: $\omega_1 \neq \omega_2$.

$N=700$, $Q=301$, $\omega_1=0.1$, $\omega_2=0.2$, $C_1=1$, $C_2=2$, $\phi_1=0$, $\phi_2=\frac{\pi}{2}$, $\sigma^2=0.25$, $L=60$, $B=T=100$

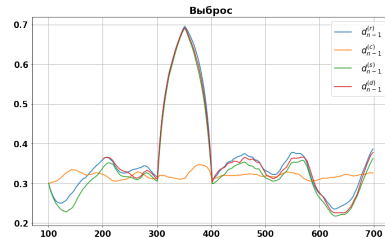
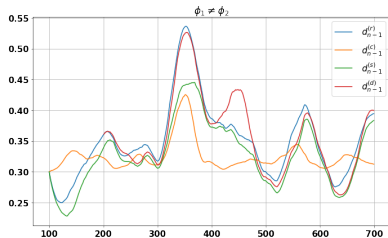
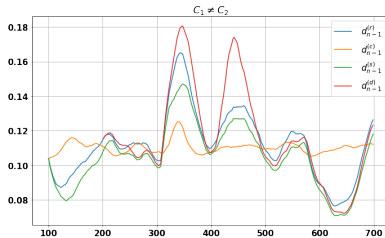
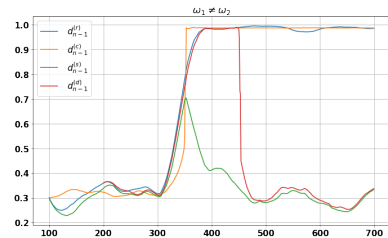


Рис.: Функции обнаружения. Пример на одной реализации шума.

Рассмотрим ряд F_N с неоднородностью, заданной изменением частоты периодики — $\omega_1 \neq \omega_2$. Пусть $C_1 = C_2 = 1$.

Постановка задачи: Аналитически упростить индекс неоднородности $g(F^{(1)}; F^{(2)})$ для строковой функции обнаружения $d_{n-1}^{(r)}$, чтобы получить в явном виде зависимость от частот до и после разладки.

Результат:

$$\begin{aligned} g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} \approx \\ &\approx 1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb)-1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)-1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}} = g_a(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

где $a = \omega_1 + \omega_2$, $b = \omega_1 - \omega_2$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$, $K_2 \rightarrow \infty$, $|g(F^{(1)}; F^{(2)}) - g_a(\omega_1, \omega_2)| < \varepsilon$.

Аппроксимация индекса однородности: точность аппроксимации

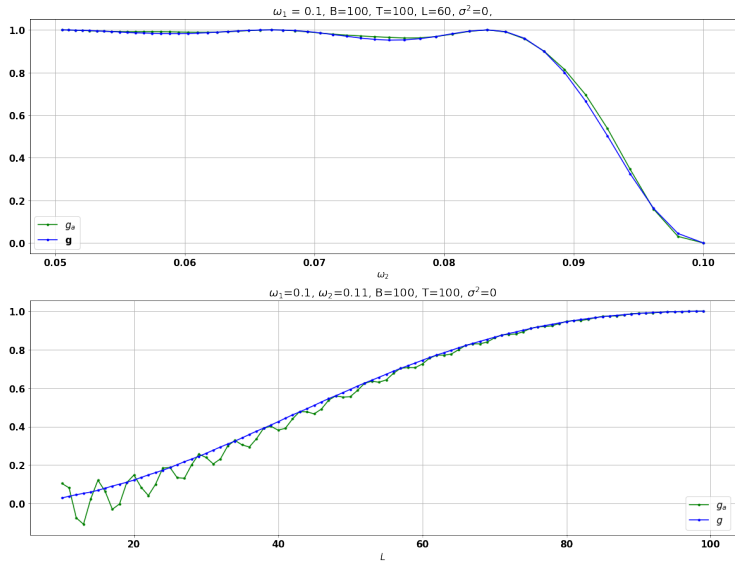


Рис.: Корректность аппроксимации $g(\omega_1, \omega_2)$.

При достаточно маленьком значении L по отношению к T переходный интервал становится линейным.

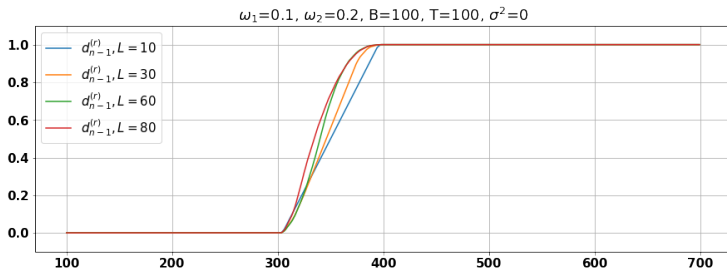


Рис.: Линейность переходного интервала при большом значении $T - L$.

Постановка задачи: Создать систему, способную обнаружить разладку за заданный промежуток времени в синусоидальных временных рядах, порожденную изменением частоты. Сигнал о моменте возмущения — превышение $d_{n-1}^{(r)}$ порога γ^* .

Описание системы:

- 1 Входные данные: F_N , k , Δ_{min} .
- 2 Результат: \hat{Q} .

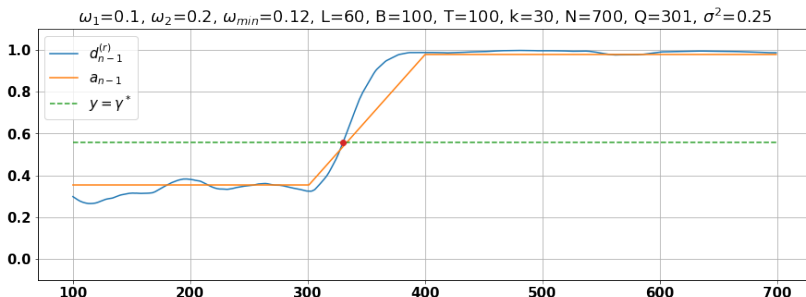


Рис.: Система. Пример работы.

Характеристики системы:

- $FP(\gamma^*)$ при $\hat{Q} < Q$.
- $TP(\gamma^*)$ при $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$.
- $FN(\gamma^*)$ при $\hat{Q} > Q + k$.

Промоделируем $n_{iter} = 200$ раз реализацию шума ϵ и на каждой итерации посчитаем характеристики системы.

Вероятности обнаружения:

- $FPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $TPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} TP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $FNR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FN_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$

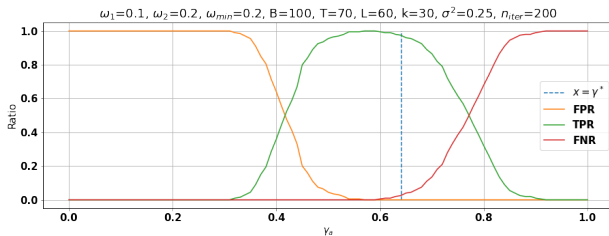


Рис.: Работы системы. Оценка, $T = 70$.

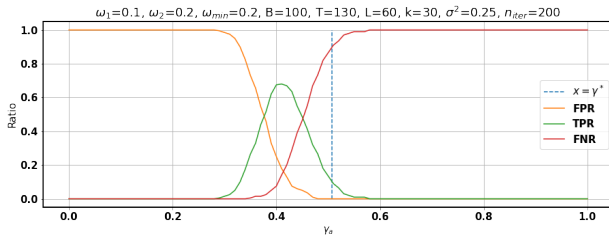


Рис.: Работы системы. Оценка, $T = 130$.

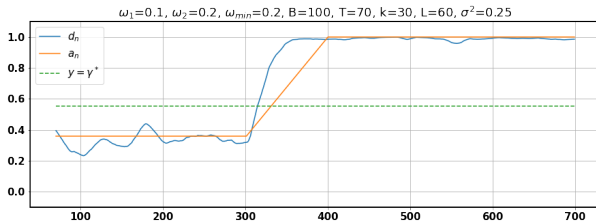


Рис.: Работы системы. Одна итерация, $T - L = 10$.

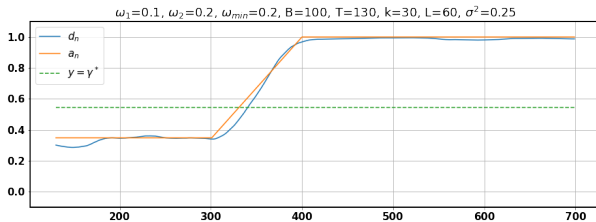


Рис.: Работы системы. Одна итерация, $T - L = 70$.

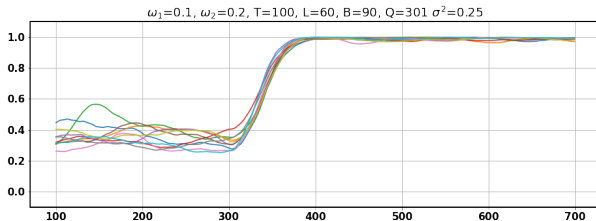


Рис.: Функция d_n . Реализации шума, $B = 90$.

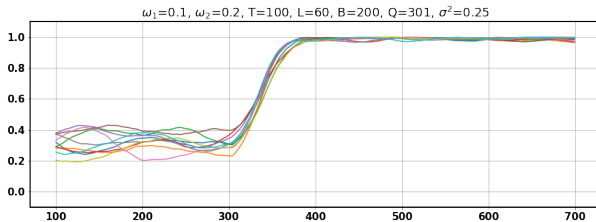


Рис.: Функция d_n . Реализации шума, $B = 200$.

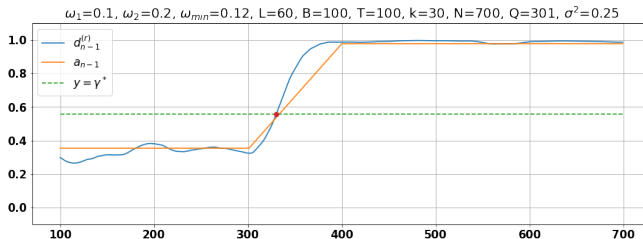


Рис.: Система. Пример работы.

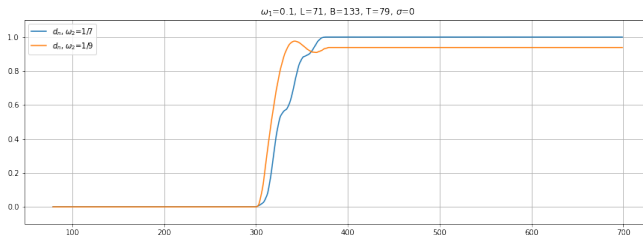


Рис.: Функция d_n . Поведение функции при $\omega_2 = \frac{1}{7}$ и $\omega_2 = \frac{1}{9}$.