«Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Презентация ВКР

Кононыхин Иван Александрович, группа 20.М03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.
Рецензент: Лектор, Университет Кардиффа (Великобритания), Пепелышев А.Н.

Санкт-Петербург
2022г.

Введение: постановка задачи

Однородный ряд — ряд с постоянной структурой. **Разладка** — нарушение однородности ряда.

Задача обнаружения разладки: Определить момент изменения структуры ряда. Структура — подпространство сигнала.

Метод: Превышение порога функцией обнаружения неоднородности, основанной на разнице структур скользящих отрезков ряда.

Временной ряд:

$$F_N = (f_1, \ldots, f_N), \text{ где } f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

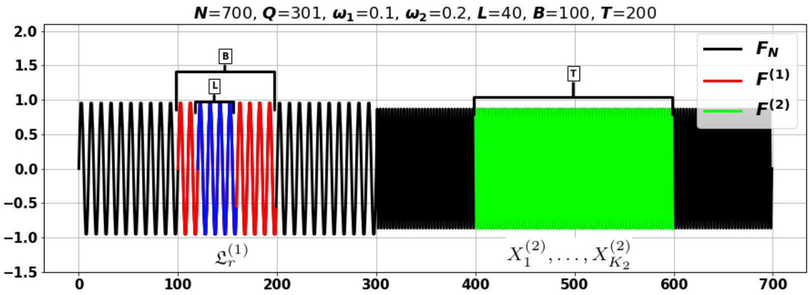
Q — неизвестный момент возмущения.

Цель работы: Создание системы, которая:

1. Определяет разладку, заданную изменением частоты.
2. Автоматически выбирает порог срабатывания.
3. Сообщает о моменте возмущения с заданным значением максимально допустимого запаздывания.

Введение: обозначения

Параметры: L, B, T, $r = 2$.



Индекс неоднородности (Golyandina, Nekrutkin, Zhigljavsky. Analysis of Time Series Structure. 2001):

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \operatorname{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

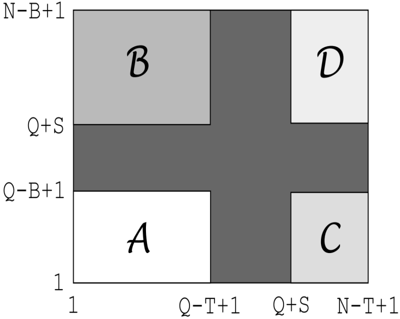


Рис.: Матрица неоднородности

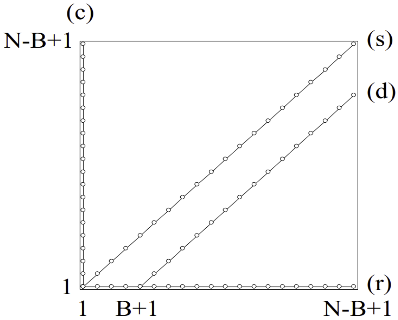


Рис.: Функции обнаружения неоднородности. $B = T$.

Обозначения функций обнаружения неоднородности:

1. Строковая: $d_n^{(r)}$
2. Столбцовая: $d_n^{(c)}$
3. Диагональная: $d_n^{(d)}$
4. Симметричная: $d_n^{(s)}$

Задача: Сравнить функции обнаружения неоднородности для разных видов разладки.

Ряд: $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$

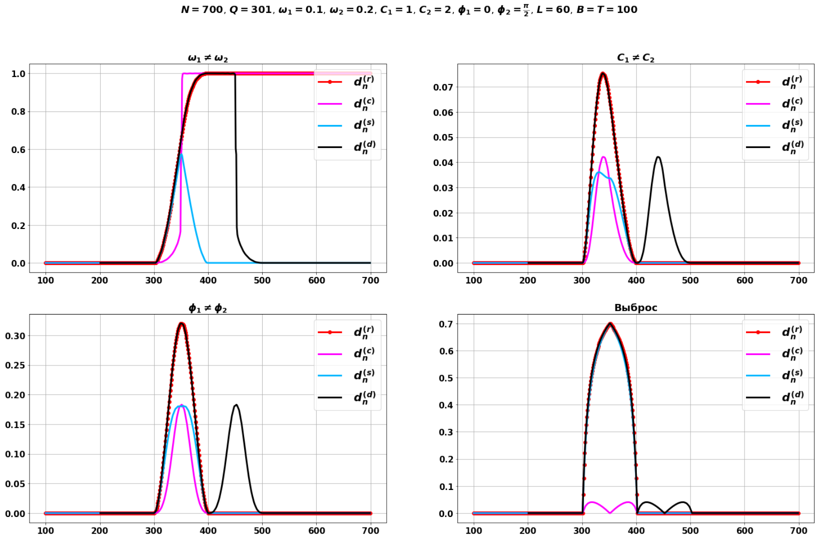
Задание неоднородности ряда F_N:

1. Изменение частоты: $\omega_1 = \frac{1}{10}, \omega_2 = \frac{1}{5}, C_1 = C_2 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0.$
2. Изменение амплитуды: $C_1 = 1, C_2 = 2, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{10}, \phi_1 = \phi_2 = 0.$
3. Фазовый сдвиг: $\phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{10}, C_1 = C_2 = 1.$
4. Выброс: $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1, & n = Q. \end{cases}$

Параметры:

1. $N = 700.$
2. $Q = 301.$
3. $L = 60.$
4. $B = T = 100.$

Часть 1. Сравнение функций обнаружения



Вывод: Лучшие — **строковая** $d_{n-1}^{(r)}$ и **диагональная** $d_{n-1}^{(d)}$ функции обнаружения.

Ряд: $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q. \end{cases}$

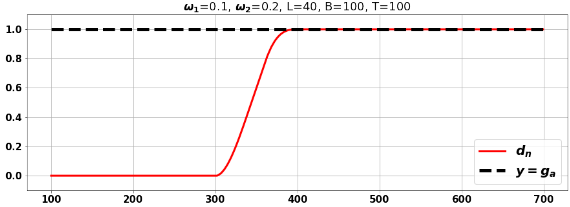
Параметры ряда: $\omega_1 \neq \omega_2$, $C_1 = C_2 = 1$.

Задача: Аппроксимировать индекс неоднородности $g(F^{(1)}; F^{(2)})$, $F^{(1)}$ лежит до Q, $F^{(2)}$ после.

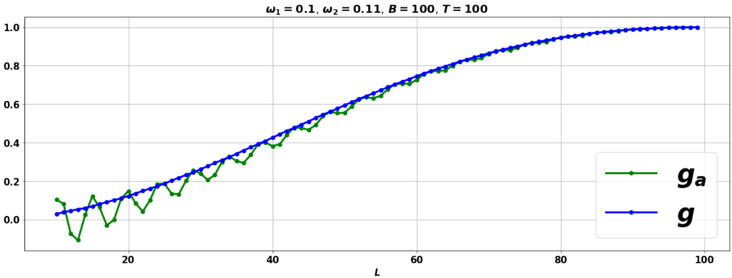
Результат:

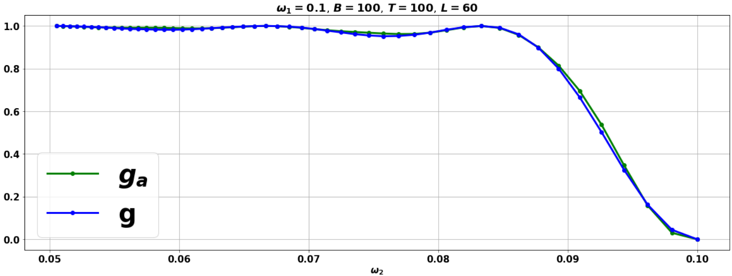
$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) \approx g_a(\omega_1, \omega_2) = 1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La) - 1}{4\pi a}\right)^2\right]}{\frac{L^2}{4}},$$

при больших L и K_2, где $a = \omega_1 + \omega_2$, $b = \omega_1 - \omega_2$.



Часть 2. Точность аппроксимации





При достаточно маленьком значении L по отношению к T переходный интервал становится линейным.

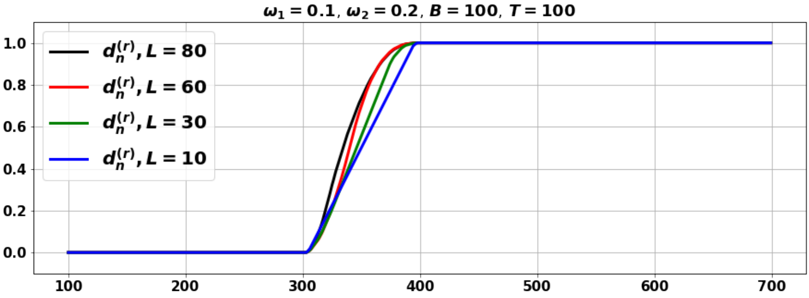


Рис.: Линейность переходного интервала при большом значении $T - L$.

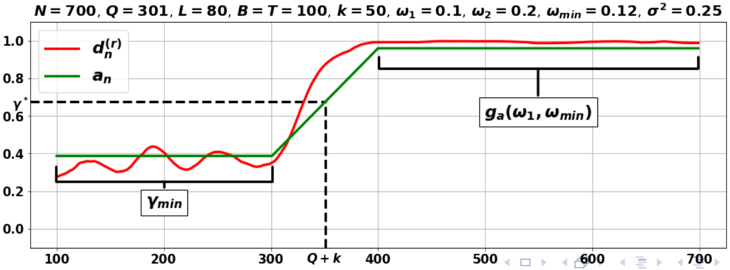
Задача: Обнаружить разладку на интервале от Q до $Q+k$, где Q — неизвестный момент возмущения, а k — максимально допустимое запаздывание.
Подход: $d_n^{(r)} > \gamma^* \to$ сигнал о разладке в момент $\hat{Q}$.

Ограничение: $\Delta_{min} : |\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta_{min}$. Обозначим $\omega_{min} = \omega_1 + \Delta_{min}$.

Описание системы:

1. Входные данные: F_N, k, Δ_{min}.
2. Результат: $\hat{Q} \in [Q, Q+k]$.

Как выбрать γ^*? Значение в точке k аппроксимации переходного интервала функции $d_n^{(r)}$.



Характеристики системы:

- $\mathrm{FP}(\gamma^*)$ при $\hat{Q} < Q$.
- $\mathrm{TP}(\gamma^*)$ при $\hat{Q} \in [Q, Q+k]$.
- $\mathrm{FN}(\gamma^*)$ при $\hat{Q} > Q+k$.

Промоделируем $n_{iter} = 200$ раз реализацию шума ϵ и на каждой итерации посчитаем характеристики системы.

Вероятности обнаружения:

- $\mathrm{FPR}(\gamma^*) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_{iter}} \mathrm{FP}_i(\gamma^*)}{n_{iter}}$.
- $\mathrm{TPR}(\gamma^*) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_{iter}} \mathrm{TP}_i(\gamma^*)}{n_{iter}}$.
- $\mathrm{FNR}(\gamma^*) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_{iter}} \mathrm{FN}_i(\gamma^*)}{n_{iter}}$.

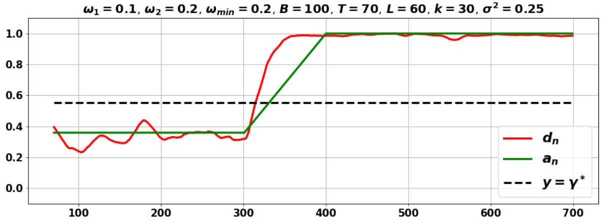


Рис.: Функция обнаружения неоднородности. $T - L = 10$.

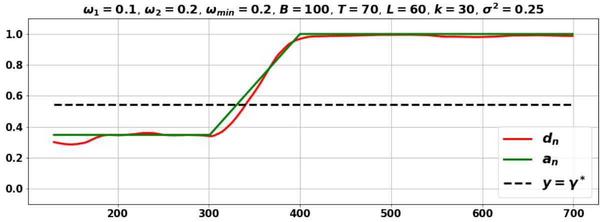


Рис.: Функция обнаружения неоднородности. $T - L = 70$.

Часть 3. Оценка системы: параметр $T - L$

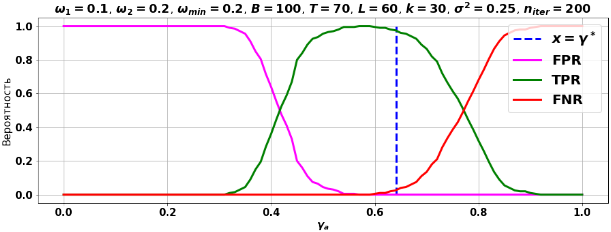


Рис.: Работы системы. Оценка, $T - L = 10$.

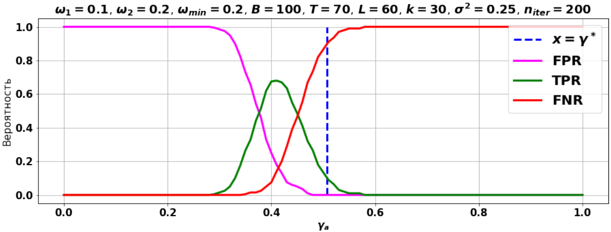


Рис.: Работы системы. Оценка, $T - L = 70$.

Параметры тестирования: $N = 800, Q = 301, \omega_1 = \frac{1}{10}, \Delta_{min} = \frac{1}{50}, \sigma = 0.5, B = 133, T = 79, L = 71, C_1 = C_2 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0$.

Таблица: Результаты тестирования.

Таблица: $k = 30$

ω_2	FPR	TPR	FNR
1/3	0.0	0.99	0.01
1/4	0.0	0.98	0.02
1/5	0.0	0.99	0.01
1/6	0.0	0.995	0.005
1/7	0.0	0.945	0.055
1/8	0.0	0.855	0.145
1/9	0.0	1.0	0.0

Таблица: $k = 15$

ω_2	FPR	TPR	FNR
1/3	0.040	0.745	0.215
1/4	0.040	0.745	0.215
1/5	0.040	0.720	0.240
1/6	0.040	0.820	0.140
1/7	0.040	0.340	0.660
1/8	0.040	0.920	0.040
1/9	0.050	0.950	0.000

Выводы: При большом k система работает хорошо, но аппроксимация нуждается в доработке.