Текст

Слайд 2 (Введение: постановка задачи)

Будем называть временной ряд однородным, если его структура постоянна. Если под внешним воздействием в какой-то момент времени ряд терпит возмущение, в его структуре появляется разладка и возникает основная задача обнаружения разладки — найти этот момент возмущения. Под структурой ряда будем понимать подпространство сигнала.

Для обнаружения момента возмущения будем использовать функции обнаружения неоднородности, измеряющие разницу в структуре скользящих отрезков рассматриваемого временного ряда и сообщать об обнаружении разладки, если эта разница превзошла заданный порог.

Будем рассматривать синусоидальные временные ряды, которые в момент времени Q меняют свою структуру.

Основной целью моей работы является создание системы с автоматическим выбора порога, способной обнаруживать разладку, порожденную изменением частоты периодики сигнала не позже, чем за указанный промежуток времени.

Слайд 3 (Введение: обозначения)

Для этого, введем следующие обозначения.

Назовем L - длинной окна, характеризующее длину векторов вложения исходного ряда.

$F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ - базовые и тестовые подряды ряда F_N длины B и T соответственно. На графике базовый подряд отмечен красным, тестовый - зеленым.

Обозначим $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ с верхними индексами 1 собственные векторы траекторной матрицы ряда $F^{(1)}$, соответствующие сигналу. Линейная оболочка, натянутая на эти векторы является подпространством сигнала. Ее размерность равна двум, поскольку для синусоидальных рядов ранг ряда r также равен двум.

Векторы вложений длины L ряда F^2 обозначим как $X_1, \ldots, X_{K_2}$ с верхним индексом 2, где $K_2 = T - L + 1$.

Поскольку у нас есть подпространство сигнала, характеризующее структуру красной части ряда и векторы вложений зеленой части, будем измерять разницу в структуре ряда расстоянием от этих векторов до подпространства. В виде формулы данная мера представлена на слайде.

Слайд 4 (Введение: инструменты поиска неоднородности)

Рассматривая в качестве базовых и тестовых рядов все подряды ряда F_N мы получаем матрицу неоднородности, структура которой указана на слайде.

Подмножества этой матрицы являются функциями обнаружения неоднородности, а именно:

Строковая, где фиксирован базовый подряд, а тестовые итеративно смещаются;

Столбцовая, где, наоборот, фиксируется тестовый и смещаются базовые.

Диагональная, где базовый и тестовый отрезки последовательно смещаются вместе друг за другом и симметричная, где базовый совпадает с тестовым.

Слайд 5 (Часть 1. Сравнение функций обнаружения)

Имея 4 функции обнаружения, установим, какая из них является лучшей для разных видов разладки.

Для этого сравним их численно и зададим неоднородность ряда F_N четырьмя способами - фазовым сдвигом, выбросом, изменением амплитуды и частоты.

Для численного эксперимента были выбраны следующие параметры:

Длина ряда N = 700, момент нарушения однородности Q = 301, длина окна L=60, длины базовых и тестовых подрядов = 100.

До момента Q частота omega_1 задавалась как 0.1, фазовый сдвиг phi_1 = 0, амплитуда C_1 = 1. После момента Q частота omega_2 равна 0.2, фазовый сдвиг pi/2, а амплитуда C_2 = 2.

Все варианты задания неоднородности рассматривались отдельно.

Слайд 6 (Часть 1. Сравнение функций обнаружения)

Численные тесты показали, что лучшими являются диагональная и строковая функция обнаружения. На графиках они соответствуют красным и черным кривым.

При численных тестах с зашумленными рядами вывод остается тем же.

Мы будем изучать только строковую поскольку она вычислительно наименее затратна, в силу фиксирования подпространства сигнала и перебора векторов вложений тестового ряда для подсчета индекса неоднородности.

Дальнейшее исследование посвящено случаю изменения частоты и построению системы обнаружения разладки на основе красной строковой функции обнаружения.

Слайд 7 (Часть 2. Аппроксимация индекса неоднородности)

Чтобы построить систему, основанную на преодолении строковой функцией обнаружения неоднородности заданного порога, необходимо эту функцию проанализировать.

Рассмотрим ряд F_N с неоднородностью, заданную изменением частоты. Попробуем упростить индекс неоднородности g от F первого и F второго, чтобы получить в явном виде его зависимость от частот до и после разладки. F первое целиком лежит в однородной части ряда, а F два после момента Q.

В результате анализа я получил формулу, указанную на слайде. На графике для указанных частот значение аппроксимации соответствует зеленой пунктирной линии.

Причем для достаточно больших L и K_2 аппроксимация точна.

Слайд 8 (Часть 2. Точность аппроксимации)

Первый график на слайде показывает корректность аппроксимации при L стремящемся к бесконечности.

На втором графике на оси x показаны значения частоты omega_2. Полученная аппроксимация повторяет поведение индекса неоднородности. При равных частотах *показываю на графике* значение обращается в 0, а при увеличении разности частот значения довольно быстро переходят примерно в единицу.

Слайд 9 (Часть 2. Аппроксимация переходного интервала)

Поскольку мы получили формулу, аппроксимирующую значения индекса неоднородности по указанным частотам до и после разладки, для построения порога срабатывания разрабатываемой системы, нам надо оценить поведение переходного интервала функции обнаружения.

Было установлено, что при маленьком L, по отношению к T, переходный интервал ведет себя примерно линейно. На графике синяя линия соответствует значению L=10 и на переходном интервале функция неоднородности ведет себя примерно линейно.

Слайд 10 (Часть 3. Система обнаружения момента возмущения)

Принимая во внимание линейность переходного интервала и наличие аппроксимации индекса неоднородности, перейдем к задаче построения системы.

Задача ставилась следующая — создать систему, способную обнаружить разладку в синусоидальных временных рядах за заданный промежуток времени. Причем разладку, порожденную изменением частоты сигнала. Сигнал о моменте возмущения подается при превышении функции обнаружения порога gamma^*.

На вход системе подается ряд F_N и максимально допустимое запаздывание сигнала об обнаружении разладки k. Введем также ограничение на минимальное для обнаружения отклонение от начальной частоты delta_{min}. Эту частоту обозначим как omega_{min}. Результатом работы системы должна быть оценка момента возмущения, содержащаяся в промежутке от Q до Q+k.

Введем также требование к ряду - его первая четверть должна быть однородной. Можно расценивать это как наличие неких исторических данных, на которых оценивается начальная частота ряда и нижняя граница порога gamma^*.

Оценивать нижнюю границу порога необходимо для минимизации ложных срабатываний системы, так как значения индекса неоднородности до разладки зависят от дисперсии шума. Я решил взять значение третьего квартиля.

В качестве значения самого порога gamma^* берем значение прямой в точке k, соединяющей значение нижней границы gamma^* и аппроксимации индекса неоднородности g с нижним индексом a от частот omega_1 и omega_{min}. omega_{min} задается как сумма начальной частоты ряда, оцененное на его однородной части и входного значения Delta_{min}. Численно проверено что значение аппроксимации индекса однородности для omega_{min}, заданной суммой и разностью при достаточно большом L равны.

На слайде показан график примера работы системы. Кривая a с индексом n-1 до момента Q равна значению gamma_{min}, после переходного интервала значению g с индексом a от частот omega_1 и omega_{min}. Переходный интервал - прямая, соединяющая значения до переходного интервала и после.

При параметрах, указанных на изображении, значение строковой функции неоднородности превзошло порог gamma^* за указанный промежуток времени k и система справилась с поставленной задачей.

Слайд 11 (Часть 3. Оценка качества системы)

Чтобы оценить качество работы системы, введем следующие характеристики.

Будем считать, что произошло ложноположительное обнаружение неоднородности если Q с крышкой меньше Q . Если Q с крышкой лежит в отрезке от Q до Q+k, то у нас точное обнаружение . Если же Q с крышкой больше Q+k, то произошло ложноотрицательное обнаружение неоднородности.

Промоделировав 200 реализаций шума будем характеризовать систему с точки зрения вероятности ложноположительного, точного и ложноотрицательного обнаружений.

Перед оценкой качества работы системы, оценим свободные для выбора параметры системы, такие как B, T и L.

Слайд 12 (Часть 3. Оценка системы: T - L)

При исследовании было замечено, что важный вклад в работу системы вносит разность параметров T и L. При близости их значений функция обнаружения неоднородности, отмеченная на графиках синей кривой на переходном интервале растет быстрее линейной и ее значения лежат выше нашей аппроксимации, отмеченной оранжевой линией. Из-за этого функция d пересечет заданный порог раньше и, следовательно, мы точно обнаружим разладку в промежутке от Q до Q+k.

Слайд 13 (Часть 3. Оценка системы: T - L)

При оценке качества системы, вероятность точного обнаружения действительно выше по сравнению с большим значением разности.

Так, на верхнем графике, при разности T и L равной 10, вероятность точного обнаружения, отмеченная зеленой линией, имеет большую площать под собой и выбранный системой порог, отмеченной вертикальной линией, примерно равен единице.

На нижнем графике, при разности T и L равной 70, система не справляется с поставленной задачей и сигнал о моменте возмущения в большинстве случаев будет подаваться после максимально допустимого запаздывания.

Слайд 15 (Часть 3. Проблемы)

Основная проблема при тестировании системы для разных частот и разной дисперсии шума это корректность аппроксимации переходного интервала прямой линией. Обратите внимание на первый график на слайде. Если на вход системе поступит маленькое значение k, значения функции обнаружения на переходном интервале будут меньше значений аппроксимации на первых k точках после момента Q. Это частично нивелируется уменьшением разности параметров T и L. Однако мне встретились параметры сигнала, на которых даже в случае отсутствия шума вероятность ложноотрицательного обнаружения разладки была равна 1. Функция разладки данной ситуации приведена на втором графике, где частота периодики равна 1/7. На графике видно, что функция неоднородности начинает быстро расти с некоторой задержкой и это поведение нуждается в дальнейшем исследовании.

Однако, при достаточно большом значении k, например 30, при стандартном отклонении шума, не превышающем половину амплитуды сигнала, вероятность точного обнаружения для частот от 1/3 до 1/9 составляла не менее 98 процентов. А при k равном 45 - эта вероятность составляла 1.

Таким образом, при достаточно большом значении k, работа системы удовлетворяет требованиям поставленной задачи.

Спасибо за внимание.