

«Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Презентация ВКР

Кононыхин Иван Александрович, группа 20.M03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.
Рецензент: Лектор, Университет Кардиффа (Великобритания),
Пепелышев А.Н.



Санкт-Петербург
2022г.

Временной ряд **однороден**, если его структура постоянна. При внешнем воздействии ряд терпит возмущение, появляется разладка в его структуре и возникает задача найти момент возмущения.

Задача обнаружения разладки: Определить момент изменения структуры ряда. Структура — подпространство сигнала.

Метод: Превышение порога функцией обнаружения неоднородности, основанной на разнице структур скользящих отрезков ряда.

Временной ряд:

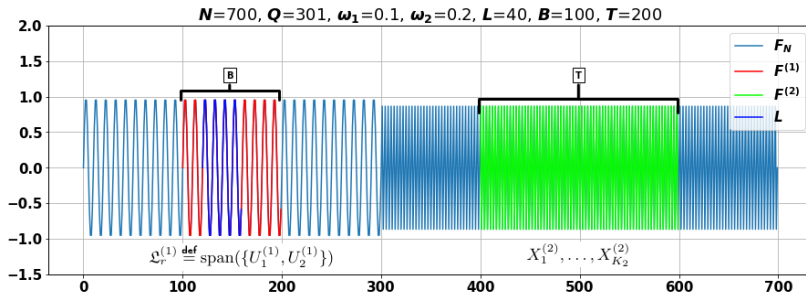
$$F_N = (f_1, \dots, f_N), \text{ где } f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

Q — неизвестный момент возмущения.

Цель работы: Создание системы, которая:

- 1 Определяет разладку, заданную изменением частоты.
- 2 Автоматически выбирает порог срабатывания.
- 3 Сообщает о моменте возмущения с заданным значением максимально допустимого запаздывания.

Параметры: $L, B, T, r = 2$.



Индекс неоднородности:

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

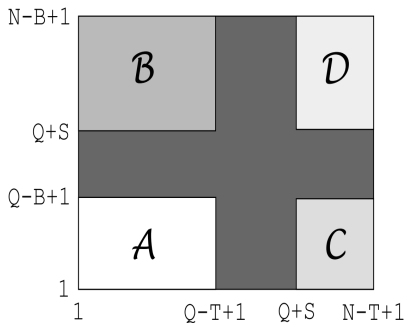


Рис.: Матрица неоднородности

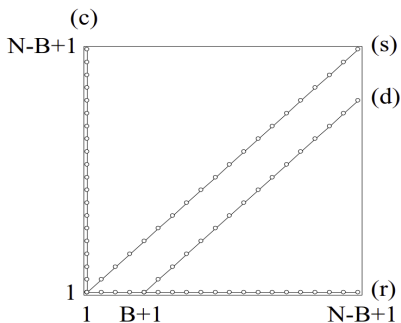


Рис.: Функции обнаружения неоднородности

Обозначения функций обнаружения неоднородности:

- 1 Строковая: $d_{n-1}^{(r)}$
- 2 Столбцовая: $d_{n-1}^{(c)}$
- 3 Диагональная: $d_{n-1}^{(d)}$
- 4 Симметричная: $d_{n-1}^{(s)}$

Задача: Сравнить функции обнаружения неоднородности для разных видов разладки.

Ряд: $F_N = (f_1, \dots, f_N)$, где $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$

Параметры:

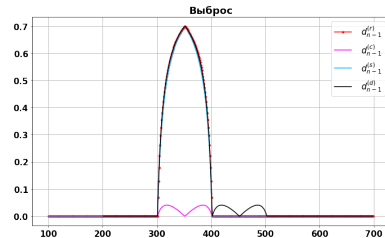
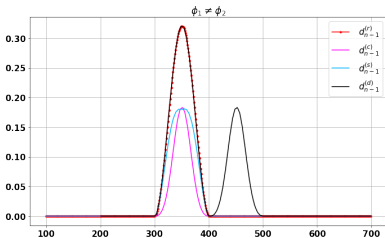
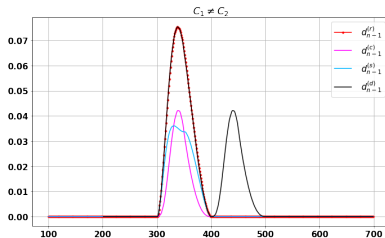
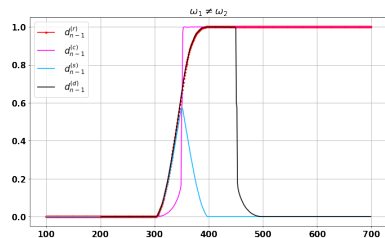
- ❶ $N = 700$.
- ❷ $Q = 301$.
- ❸ $L = 60$.
- ❹ $B = T = 100$.

Задание неоднородности ряда F_N :

- ❶ Изменение частоты: $\omega_1 = \frac{1}{10}, \omega_2 = \frac{1}{5}$.
- ❷ Изменение амплитуды: $C_1 = 1, C_2 = 2$.
- ❸ Фазовый сдвиг: $\phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{\pi}{2}$.
- ❹ Выброс: $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1, & n = Q. \end{cases}$

Часть 1. Сравнение функций обнаружения

$N=700$, $Q=301$, $\omega_1=0.1$, $\omega_2=0.2$, $C_1=1$, $C_2=2$, $\phi_1=0$, $\phi_2=\frac{\pi}{2}$, $L=60$, $B=T=100$



Вывод: Лучшие — строковая $d_{n-1}^{(r)}$ и диагональная $d_{n-1}^{(d)}$ функции обнаружения.

Часть 2. Аппроксимация значения индекса неоднородности после переходного интервала

Ряд: $F_N = (f_1, \dots, f_N)$, где $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q. \end{cases}$

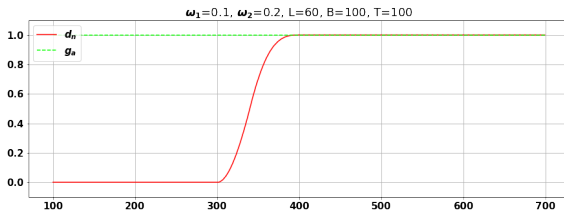
Параметры ряда: $\omega_1 \neq \omega_2$, $C_1 = C_2 = 1$.

Задача: Аппроксимировать индекс неоднородности $g(F^{(1)}; F^{(2)})$, $F^{(1)}$ лежит до Q , $F^{(2)}$ после.

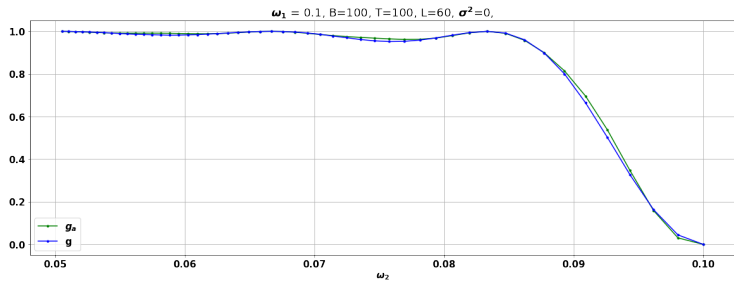
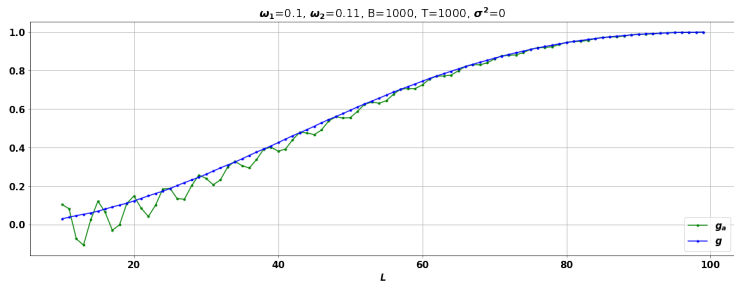
Результат:

$$g_a(\omega_1, \omega_2) = 1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La) - 1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}},$$

где $a = \omega_1 + \omega_2$, $b = \omega_1 - \omega_2$.



Часть 2. Точность аппроксимации



При достаточно маленьком значении L по отношению к T переходный интервал становится линейным.

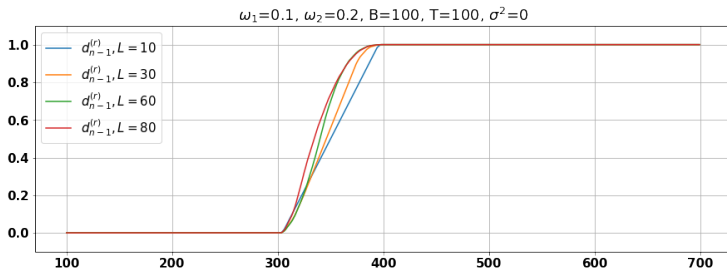


Рис.: Линейность переходного интервала при большом значении $T - L$.

Задача: Обнаружить разладку на интервале от Q до $Q + k$, где Q — неизвестный момент возмущения, а k — максимально допустимое запаздывание.

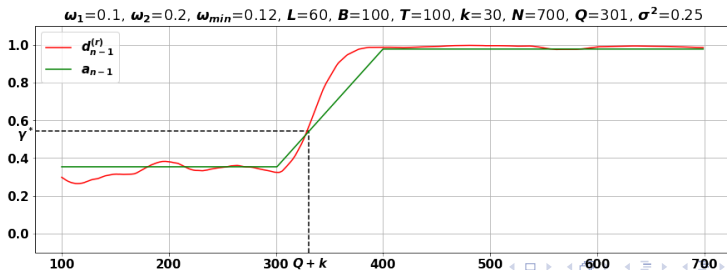
Подход: $d_{n-1}^{(r)} > \gamma^*$ — сигнал о моменте возмущения \hat{Q} .

Ограничение: $\omega_2 > \omega_1 + \Delta_{min} = \omega_{min}$

Как выбрать γ^* ? Построить аппроксимацию $d_{n-1}^{(r)}$ и взять ее значение в точке k .

Описание системы:

- 1 Входные данные: F_N , k , Δ_{min} .
- 2 Результат: \hat{Q} .



Характеристики системы:

- $FP(\gamma^*)$ при $\hat{Q} < Q$.
- $TP(\gamma^*)$ при $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$.
- $FN(\gamma^*)$ при $\hat{Q} > Q + k$.

Промоделируем $n_{iter} = 200$ раз реализацию шума ϵ и на каждой итерации посчитаем характеристики системы.

Вероятности обнаружения:

- $FPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $TPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} TP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $FNR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FN_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$

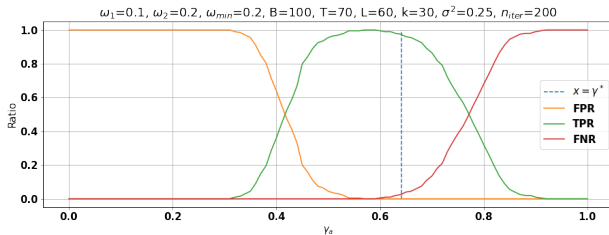


Рис.: Работы системы. Оценка, $T = 70$.

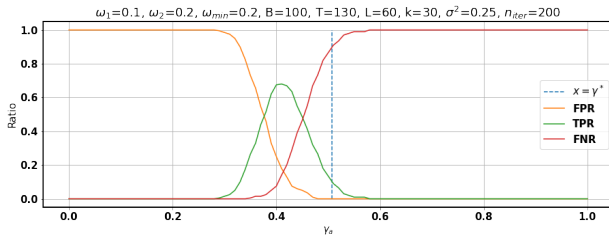


Рис.: Работы системы. Оценка, $T = 130$.

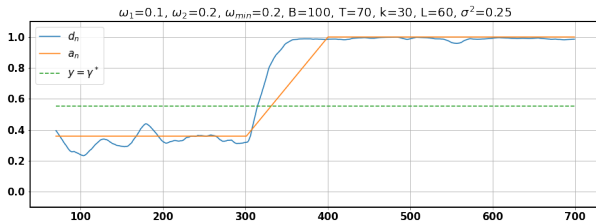


Рис.: Работы системы. Одна итерация, $T - L = 10$.

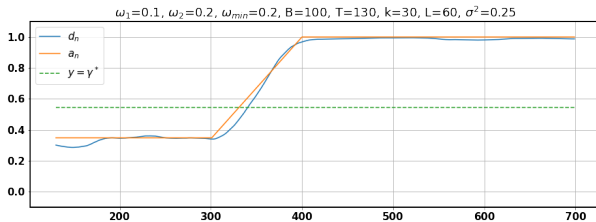


Рис.: Работы системы. Одна итерация, $T - L = 70$.

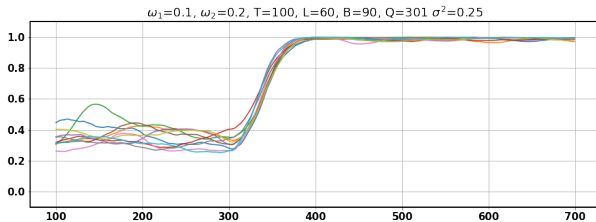


Рис.: Функция d_n . Реализации шума, $B = 90$.

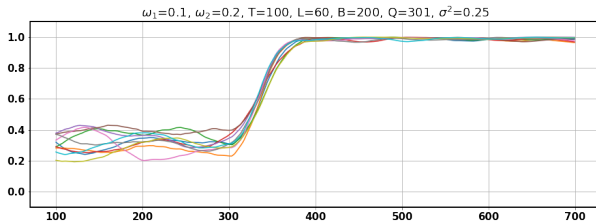


Рис.: Функция d_n . Реализации шума, $B = 200$.

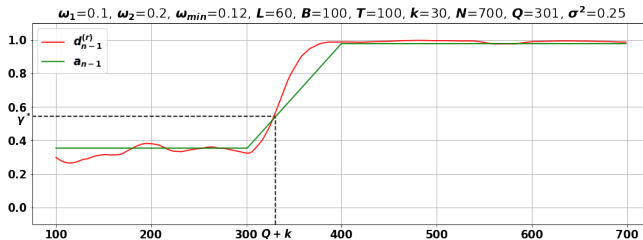


Рис.: Система. Пример работы.

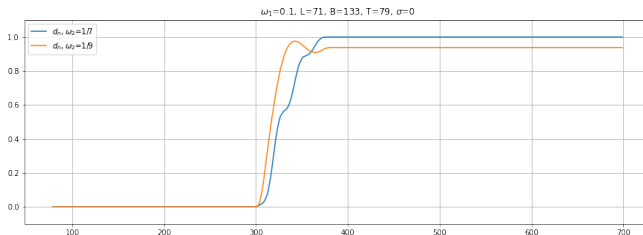


Рис.: Функция d_n . Поведение функции при $\omega_2 = \frac{1}{7}$ и $\omega_2 = \frac{1}{9}$.