

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Производственная практика 1 (научно-исследовательская работа)  
(семестр 2)

ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА SSA

Выполнил:

Кононыхин Иван Александрович

группа 20.М03-мм



Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

Голяндина Нина Эдуардовна

Кафедра статистического

моделирования

Санкт-Петербург

2021

## Оглавление

<b>Введение</b>	4
<b>Глава 1. Singular spectrum analysis</b>	5
1.1. Алгоритм базового метода SSA	5
1.1.1. Вложение	5
1.1.2. Сингулярное разложение	5
1.1.3. Группировка	6
1.1.4. Реконструкция	6
1.2. Разложение ряда	7
<b>Глава 2. Поиск разладки</b>	11
2.1. Матрица неоднородности и функции неоднородности	11
2.1.1. Матрица неоднородности	11
2.1.2. Функции неоднородности	13
2.2. Функции обнаружения	15
2.2.1. Структурные изменения и функции неоднородности	15
2.2.2. Типы функций обнаружения	15
2.3. Однородность и неоднородность	17
2.3.1. Типы неоднородности	17
<b>Глава 3. Обновление матрицы разладки</b>	20
3.1. Проблема	20
3.2. Формализация реализации	20
3.3. Реализация	21
3.4. Тестирование	22

<b>Глава 4. Сравнение функций разладки . . . . .</b>	<b>24</b>
4.1. Постановка задачи . . . . .	24
4.2. Экспериментальные установки . . . . .	25
4.3. Моделирование . . . . .	26
4.3.1. Ряды без шума . . . . .	27
4.3.2. Ряды с шумом . . . . .	33
4.3.3. Выводы . . . . .	40
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>42</b>

## Введение

Будем называть временной ряд  $D_N$  **однородным**, если он управляется некоторым линейным рекуррентным соотношением ( $LRR$ ), размерность которого мала по отношению к  $N$ .

Предположим, что из-за внешнего воздействия (или по другой причине) однородный временной ряд подвергается мгновенному возмущению, то есть он перестает следовать исходному  $LRR$ . Однако по прошествии определенного периода времени он снова становится управляемым неким  $LRR$ , которое может отличаться от исходного. В результате, ряд в целом перестает быть однородным и возникает проблема изучения этой неоднородности.

Целью данной работы является оценка методов обнаружения неоднородности рядов, а также расширение существующего функционала в задаче обнаружения разладки в режиме реального времени.

## Глава 1

## Singular spectrum analysis

## 1.1. Алгоритм базового метода SSA

Определим метод SSA как любой метод, состоящий из четырех этапов, описанных ниже. Обозначим входной объект как  $\mathbb{X}$  - упорядоченный набор из  $N$  действительных чисел (временной ряд).

## 1.1.1. Вложение

Процедура вложения переводит исходный временной ряд  $\mathbb{X} = (x_0, \dots, x_{N-1})$  в последовательность многомерных векторов

$$X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T, \quad 1 \leq i \leq K$$

размерности  $L$  (длина окна), где  $K = N - L + 1$ .

Создается траекторная матрица  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_K]$  размерности  $L \times K$ , имеющую Ганкелеву структуру с одинаковыми значениями на анти-диагоналях

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{K+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_L & x_{L+1} & x_{L+2} & \dots & x_N \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

## 1.1.2. Сингулярное разложение

Результатом этого шага является сингулярное разложение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ .

Пусть  $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$  - собственные числа матрицы  $\mathbf{S}$ ,  $d = \text{rank } \mathbf{X} = \max\{j : \lambda_j > 0\}$ ,  $U_1, \dots, U_d$  - ортонормированный набор собственных векторов матрицы  $\mathbf{S}$ , соответствующий собственным числам, и  $V_j = \mathbf{X}^T U_j / \sqrt{\lambda_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$  - факторные векторы. Тогда разложение будет иметь вид

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad (1.2)$$

### 1.1.3. Группировка

На основе разложения шага 2 процедура группировки делит множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, d\}$  - набор индексов. Тогда результирующая матрица  $\mathbf{X}_I$ , соответствующая группе  $I$  определяется как

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тем самым, разложение (1.2) может быть записано в сгруппированном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m} \quad (1.3)$$

### 1.1.4. Реконструкция

На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (1.3) преобразуется в новый ряд длины  $N$  диагональным усреднением элементов.

Пусть  $Y$  - матрица  $L \times K$  с элементами  $y_{ij}$ , где  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Обозначим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$  если  $L < K$  и  $y_{ij}^* = y_{ji}$  в противном случае. Диагональное усреднение преобразует

матрицу  $Y$  в ряд  $g_0, \dots, g_{N-1}$  по формуле

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m,k-m+2}^* & 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,k-m+2}^* & L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m,k-m+2}^* & K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (1.4)$$

Применяя диагональное усреднение (1.4) к результирующим матрицам  $\mathbf{X}_{\mathbf{I}_k}$ , получаем  $m$  рядов  $\tilde{\mathbb{X}}_k = (\tilde{x}_0^{(k)}, \dots, \tilde{x}_{N-1}^{(k)})$ . Тогда исходный ряд  $\mathbb{X}$  раскладывается в сумму рядов:

$$\mathbb{X} = \sum_{k=1}^m \tilde{\mathbb{X}}_k$$

## 1.2. Разложение ряда

Продemonстрируем работу метода SSA, целью которого является разложение временного ряда на интерпретируемые аддитивные составляющие. Возможность разбить совокупность элементарных матриц сингулярного разложения на группы, соответствующие этим интерпретируемым составляющим, связано с понятием разделимости рядов. Бывают ситуации, когда выделить такие элементы, как тренд или сезонность невозможно. Подробнее с условиями разделимости рядов можно ознакомиться в [1].

Зададим исходный ряд (Рис. 1.1) длины  $N = 249$  как  $F_N = F^{(1)} + F^{(2)} + \epsilon$ .  $F^{(1)} = C \sin(2\pi\omega n + \phi)$  - сезонность,  $F^{(2)} = 0.025n + 1$  - линейный тренд  $\epsilon = \epsilon(n)$  - гауссовский шум в момент  $n$ . Зафиксируем значения переменных:  $C = 1$ ,  $\omega = 1/8$ ,  $\phi = 0$ . Возьмем  $L = 80$ . Такой выбор длины окна обусловлен тем, что данный параметр, вообще говоря, должен выбираться достаточно большим, чтобы каждый  $L$ -сдвинутый вектор траекторной матрицы содержал существенную часть поведения исходного

ряда. Тогда, например, можно рассматривать  $X_i$  как отдельные ряды и исследовать динамику поведения исходного ряда.

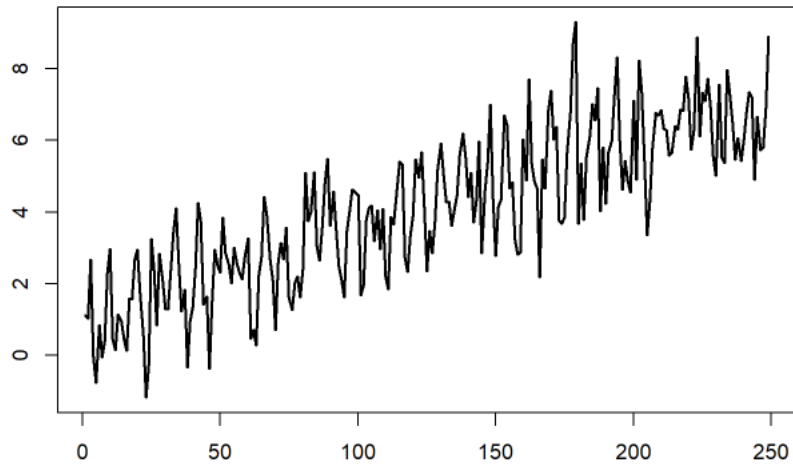


Рис. 1.1. Исходный ряд

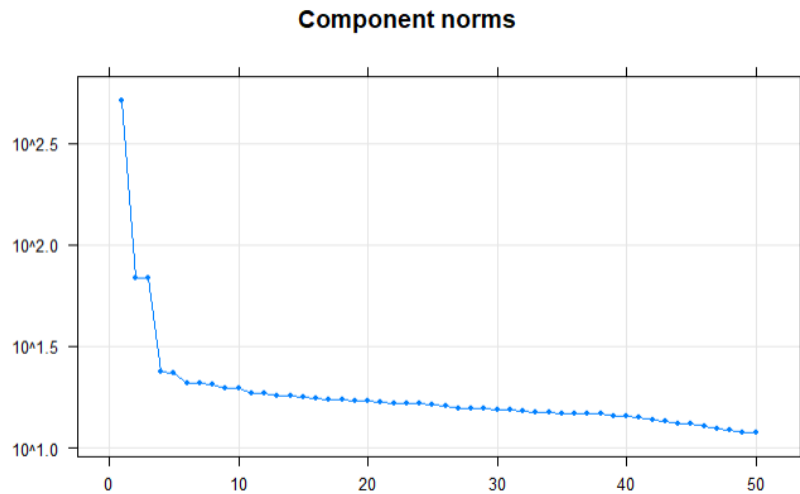


Рис. 1.2. Нормы компонент

Вообще, теоретически, наш сгенерированный ряд имеет ранг 4 - количество базисных векторов траекторных пространств, натянутых на вектора траекторных матриц, заданных для любых допустимых  $L$ . Из этих



4-х, 2-а соответствуют полиному 1-й степени (нашему тренду), а оставшиеся - экспоненциально-модулированному гармоническому ряду (т.к.  $\omega \in [0, 1/2]$ ). Соответственно, имеет смысл рассматривать только 4 компоненты, однако мы рассмотрим первые 6 и убедиться в результатах на практике.

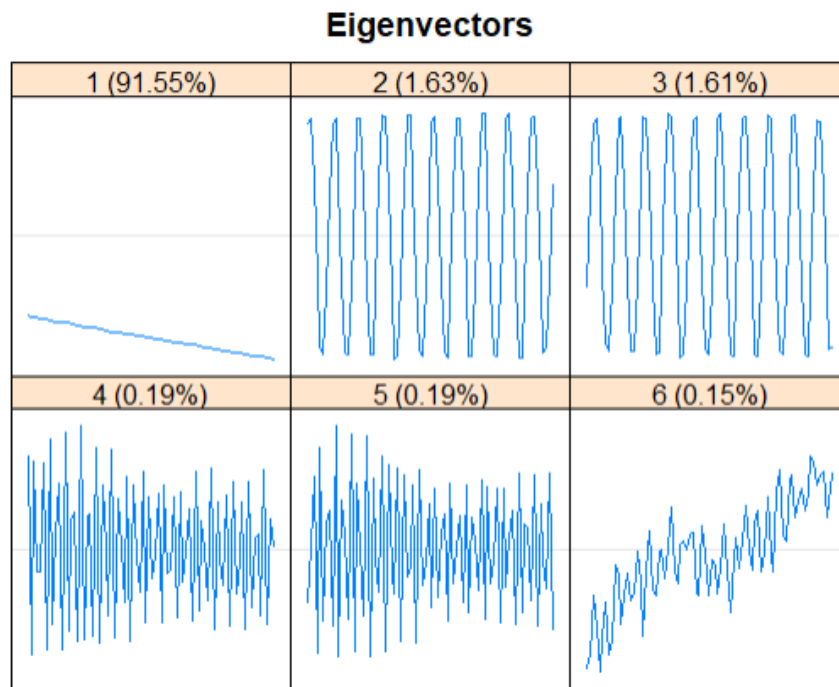


Рис. 1.3. Собственные векторы

Из Рис. 1.3 видно, что первая компонента характеризует тренд  $F^{(2)}$  (медленно меняющаяся), вторая и третья относятся к сезонности  $F^{(1)}$  (периодическая компонента), а оставшиеся скорее относятся к шуму.

На Рис. 1.4 изображен исходный ряд, его главные составляющие - тренд и сезонность, а также шум. Можем сказать, что метод успешно разделил ряд на 3 составляющие.

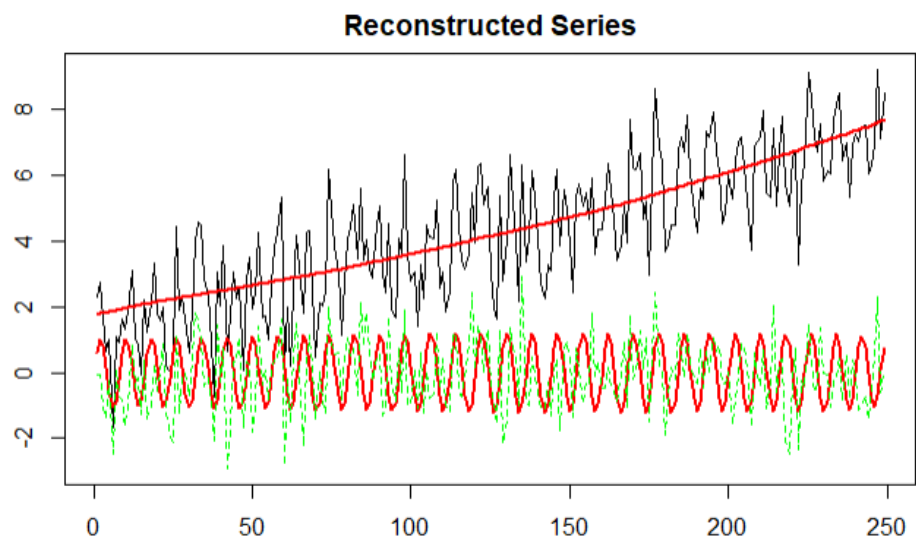


Рис. 1.4. Восстановленный ряд

## Глава 2

### Поиск разладки

Основная идея метода решения задачи обнаружения структурных изменений может быть описана следующим образом. Временной ряд  $F_N$ , управляемый LRR, характеризуется тем, что для достаточно больших значений длины окна  $L$  (это значение должно быть больше размерности LRR) векторы этого ряда со сдвигом  $L$  покрывают одно и то же линейное пространство  $\mathfrak{L}^{(L)}$  независимо от  $N$  (если  $N$  достаточно велико).

Таким образом, нарушения однородности ряда могут быть описаны в терминах соответствующих сдвинутых векторов: возмущения заставляют эти векторы покидать пространство  $\mathfrak{L}^{(L)}$ . Соответствующие расхождения определяются в терминах расстояний между сдвинутыми векторами и пространством  $\mathfrak{L}^{(L)}$ , которые могут быть определены для различных частей ряда (например, до и после возмущения).

#### 2.1. Матрица неоднородности и функции неоднородности

##### 2.1.1. Матрица неоднородности

Рассмотрим два временных ряда  $F^{(1)} = F_{N_1}^{(1)}$  и  $F^{(2)} = F_{N_2}^{(2)}$  и зададим число  $L : 2 \leq L \leq \min(N_1 - 1, N_2)$ . Обозначим  $\mathfrak{L}^{(L,1)}$  линейное пространство, натянутое на  $L$ -сдвинутые векторы ряда  $F^{(1)}$ .

Пусть  $U_l^{(1)} (l = 1, \dots, L)$  - собственные векторы траекторной матрицы ряда  $F^{(1)}$ . Для  $l > d \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathfrak{L}^{(L,1)}$  в качестве собственных векторов  $U_l^{(1)}$  мы берем векторы из любого ортонормированного базиса пространства, ортогонального  $\mathfrak{L}^{(L,1)}$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$  - подмножество  $\{1, \dots, L\}$  и  $\mathfrak{L}_r^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(U_l^{(1)}, l \in I)$ . Обозначим через  $X_1^{(2)}, \dots, X_{K_2}^{(2)}$  ( $K_2 = N_2 - L + 1$ )  $L$ -сдвинутые векторы временного ряда  $F^{(2)}$ .

Введем меру, называемую **индексом неоднородности**, которая характеризует несоответствие между рядом  $F^{(2)}$  и структурой ряда  $F^{(1)}$  (описываемого подпространством  $\mathfrak{L}_r^{(1)}$ ):

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}, \quad (2.1)$$

где  $\text{dist}(X, \mathfrak{L})$  - Евклидово расстояние между вектором  $X \in \mathbb{R}^L$  и линейным пространством  $\mathfrak{L} \subset \mathbb{R}^L$ . Значения  $g$  принадлежат интервалу  $[0, 1]$ .

Введем обозначения:

1. Исходный временной ряд  $F_N : F_N = (f_0, \dots, f_{N-1}), N > 2$ ;
2. Подряды (интервалы)  $F_{i,j}$  временного ряда  $F_N : F_{i,j} = (f_{i-1}, \dots, f_{j-1}), 1 \leq i < j \leq N$ ;
3. Длина окна  $L : 1 < L < N$ ;
4. Длина  $B$  базовых подрядов ряда  $F_N : B > L$ ;
5. Длина  $T$  тестовых подрядов ряда  $F_N : T \geq L$ ;
6. Предполагаем набор  $I = \{j_1, \dots, j_r\}$  различных натуральных чисел:  $j < \min(L, B - L + 1) \forall j \in I$ .
7. Базовые пространства ( $i = 1, \dots, N - B + 1$ ) натянуты на собственные векторы с индексами из  $I$ , полученные сингулярным разложением траекторных матриц  $\mathbf{X}^{(i,B)}$  ряда  $F_{i,i+B-1}$  с длиной окна  $L$ . Соответствующий набор собственных троек называется **базовым набором собственных троек**.

Учитывая эти обозначения, матрица  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{B,T}$ , состоящая из элементов  $g_{ij}$ :

$$g_{ij} = g(F_{i,i+B-1}; F_{j,j+T-1}), \quad (2.2)$$

$$1 \leq i \leq N - B + 1, \quad 1 \leq j \leq N - T + 1,$$

есть **матрица неоднородности** (*H-matrix*) временного ряда  $F_N$ . Отсюда следует, что пространство  $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,i)}$  соответствует пространству  $\mathfrak{L}_r^{(1)}$ . Ряд  $F_{i,i+B-1}$  называют **базовым подрядом** (или базовым интервалом), а  $F_{j,j+T-1}$  - **тестовым подрядом** (интервалом). По определению, величина  $g_{ij}$  является нормированной суммой расстояний между  $L$ -сдвинутыми векторами тестового подряда и линейным пространством  $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,i)}$ .

### 2.1.2. Функции неоднородности

На основе матрицы неоднородности  $G$  введем различные функции неоднородности.

#### 1. Строковая функция неоднородности.

Для фиксированных  $i \in [1, N - B + 1]$  строковая функция неоднородности представляет собой ряд  $H_{N-T+1}^{(r,i)}$ , общий член которого задается

$$h_{n-1}^{(r,i)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{in} = g(F_{i,i+B-1}; F_{n,n+T-1}), \quad n = 1, \dots, N - T + 1.$$

Таким образом, ряд  $H_{N-T+1}^{(r,i)}$  соответствует  $i$ -й строке матрицы  $\mathbf{G}$

Строковая функция неоднородности  $H_{N-T+1}^{(r,i)}$  отражает однородность тестового подряда  $F_{n,n+T-1}$  относительно фиксированного базового подряда  $F_{i,i+B-1}$  (или относительно базового пространства  $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,i)}$ ).

#### 2. Столбцовая функция неоднородности.

В дополнение к строковой функции неоднородности мы можем рассматривать столбцовую функцию неоднородности, которая соответствует столбцам матрицы  $\mathbf{G}$ . Для фиксированного  $j \in [1, \dots, N - T + 1]$  данная функция  $H_{N-B+1}^{(r,j)}$  длины  $N - B + 1$  определяется как временной ряд с общим членом

$$h_{n-1}^{(c,j)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{nj} = g(F_{n,n+B-1}; F_{j,j+T-1}).$$

В этом случае, тестовый подряд фиксирован. Функция неоднородности столбцов также отражает однородность базовых пространств  $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,n)}$  относительно фиксированного тестового подряда  $F_{j,j+T-1}$  (его  $L$ -сдвинутых векторов).

### 3. Функции диагональной неоднородности.

Функцией диагональной неоднородности является ряд  $H_{N-T-\delta+1}^{(d,\delta)}$  с параметром  $0 \leq \delta \leq N - T$ , такой что

$$h_{n-1}^{(d,\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{n,n+\delta} = g(F_{n,n+B-1}; F_{n+\delta,n+\delta+T-1}),$$

для  $n = 1, \dots, N - T + \delta + 1$ . Данный ряд соответствует диагонали  $j = i + \delta$  матрицы  $\mathbf{G}$  и характеризует локальную неоднородность ряда, поскольку базовый и тестовый интервалы не фиксированы.

### 4. Функция симметричной неоднородности

Когда  $\delta = 0$  и  $T = B$  базовый подряд совпадает с тестовым. Матрица  $\mathbf{G}$  становится квадратной и ряд  $H_{N-B+1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} H_{N-B+1}^{(d,0)}$  соответствуют её главной диагонали. Общий член ряда  $H_{N-B+1}^{(s)}$  задается как

$$h_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} g_{n-1}^{(d,0)} = g(F_{n,n+B-1}; F_{n,n+B-1}),$$

и равен доле собственных значений:

$$h_{n-1}^{(s)} = 1 - \sum_{l \in I} \lambda_l^{(n)} / \sum_l \lambda_l^{(n)}, \quad (2.3)$$

где  $\lambda_l^{(n)}$  - собственные значения сингулярного разложения траекторной матрицы ряда  $F_{n,n+B-1}$ . Ряд  $H_{N-B+1}^{(s)}$  является функцией симметричной неоднородности.

## 2.2. Функции обнаружения

Как правило, задачи обнаружения изменений - это задачи проверки однородности структуры ряда по отношению к структуре начальной части ряда.

### 2.2.1. Структурные изменения и функции неоднородности

Однократное изменение ряда  $F_N$  должно в общем случае соответствовать одному или нескольким радикальным изменениям значений функций неоднородности - для строковой функции неоднородности таких изменений может быть не более двух.

В дополнение к полной информации, содержащейся в матрице неоднородности, будем использовать только некоторые частные случаи функций неоднородности в виде так называемых **функций обнаружения**.

### 2.2.2. Типы функций обнаружения

Рассматриваемые ниже функции обнаружения будут отличаться от функций неоднородности в нескольких аспектах. Будем использовать только ряд  $F_{1,B}$  в качестве базовой части ряда для строковой и столбцовой функций неоднородности.

А также, для диагональных (но не симметричных) функций неоднородности мы всегда будем считать, что  $\delta = B$ . Это означает, что между базовым и тестовым интервалами нет разрыва. Таким образом, мы всегда сравниваем соседние части временного ряда.

Мы вводим формально функции обнаружения, которые связаны с функциями неоднородности из предыдущего раздела.

### 1. Строковая функция обнаружения

Строковой функцией обнаружения является ряд  $D_{T,N}^{(r)}$  с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T}^{(r,1)} = g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N, \quad (2.4)$$

что соответствует обнаружению изменений по отношению к начальной части ряда (или, точнее, к его первым  $B$  членам, которые представлены пространством  $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,1)}$ ).

### 2. Столбцовая функция обнаружения

Столбцовой функцией обнаружения является ряд  $D_{B,N}^{(c)}$  с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(1,c)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), \quad B \leq n \leq N. \quad (2.5)$$

### 3. Функция диагонального обнаружения

Функцией диагонального обнаружения является ряд  $D_{T+B,N}^{(d)}$  с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T-B}^{(d,B)} = g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), \quad (2.6)$$

$$T + B \leq n \leq N.$$



Поскольку промежуток между базовым и тестовым интервалами отсутствует, данная функция обнаружения может использоваться для обнаружения резких структурных изменений на фоне медленных.

#### 4. Функция симметричного обнаружения

Пусть  $T = B$ . Функцией симметричного обнаружения является ряд  $D_{B,N}^{(s)}$  с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(s)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), \quad B \leq n \leq N. \quad (2.7)$$

Эта функция обнаружения измеряет качество приближения базового ряда выбранными собственными тройками.

### 2.3. Однородность и неоднородность

Пусть  $F_N$  - однородный временной ряд, управляемый минимальным LRR размерности  $d$ . Выберем  $L$  и  $r$  такие, что  $L \geq d$ ,  $d \leq r \leq \min(L, N - L + 1)$ .

Если выбрать  $I = \{1, \dots, r\}$  то матрица неоднородности (2.1) будет нулевой, поскольку  $B \geq L$ ,  $\forall i \quad \mathfrak{L}^{(L)}(F_{i,i+B-1}) = \mathfrak{L}^{(L)}(F_N)$ , следовательно, все  $L$ -сдвинутые векторы ряда  $F_{j,j+T-1}$  лежат в пространстве  $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{i,i+B-1}) \forall i, j$ . Это означает, что любой однородный ряд  $F_N$  порождает нулевую матрицу неоднородности, а наличие ненулевых элементов  $g_{ij}$  в этой матрице свидетельствует о нарушении однородности.

Рассмотрим несколько типов нарушений.

#### 2.3.1. Типы неоднородности

Как указывалось ранее, временной ряд  $F_N$  задан LRR до определенного времени  $Q$ . Затем происходит мгновенное возмущение, хотя через

короткое время ряд снова становится однородным и подчиняется LRR, которое может отличаться от исходного.

Если начальное LRR восстанавливается, то мы имеем **временное** нарушение структуры временного ряда. В противном случае нарушение является **постоянным**.

Момент времени  $Q$  будем называть **моментом возмущения** или **точкой изменения**. Положим  $d = fdim(F_{1,Q-1})$ .

Предположим, что через некоторое время  $S \geq 0$  после возмущения, временной ряд стал опять однородным (ряд  $F_{Q+S,N}$ ). Обозначим  $d_1 = fdim(F_{Q+S,N})$ . Временной интервал  $[Q, Q + S]$  называется **переходным интервалом** (поведение ряда на котором нас не интересует).

Пусть  $L \geq \max(d, d_1)$ . Дополнительно введем ограничения  $L \leq Q - 1$  и  $L \leq N - Q - S + 1$ . Если  $L$ -сдвинутые векторы ряда  $F_N$  покрывают исходное подпространство  $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{1,Q-1})$  после того, как они покинули переходный интервал (то есть  $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{1,Q-1}) = \mathfrak{L}^{(L)}(F_{Q+S,N})$ ), тогда обе однородные части временного ряда соответствуют одному минимальному LRR - случай временной неоднородности. Отсюда вытекает случай постоянной неоднородности.

Опишем вид матрицы неоднородности. Пусть длины базового и тестового интервалов удовлетворяют условию  $\max(B, T) < Q$ . Предположим, что  $I = \{1, \dots, r\}$  и  $r = d \leq \min(L, B - L + 1)$ . Тогда все элементы  $g_{ij}$  матрицы  $\mathbf{G}_{B,T}$  равны нулю для  $i + B \leq Q$  и  $j + T \leq Q$ . Это связано с тем, что для этих индексов, и базовый, и тестовый подряды исходного ряда  $F_N$  также являются подрядами однородного ряда  $F_{1,Q-1}$ . Значения остальных элементов матрицы неоднородности зависят от типа неоднородности и значений параметров.

Схематично, общая форма матрицы неоднородности изображена на Рис. 2.1.

Регион  $\mathcal{A}$  соответствует элементам  $g_{ij}$  где ряды  $F_{i,i+B-1}$  и  $F_{j,j+T-1}$  являются подрядами однородного ряда  $F_{1,Q-1}$ . Отсюда следует, что данный регион состоит из нулевых элементов.

В регионе  $\mathcal{D}$  те же самые ряды являются подрядами ряда  $F_{Q+S,N}$ . Поэтому, если размерность  $d_1$  ряда  $F_{Q+S,N}$  не больше размерности  $d$  ряда  $F_{1,Q-1}$ , то данный регион матрицы также состоит из нулевых элементов.

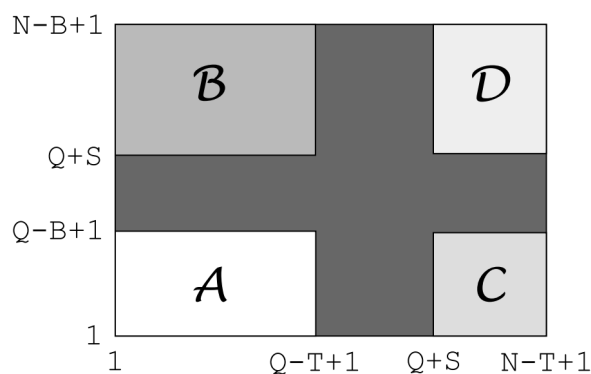


Рис. 2.1. Общая форма матрицы неоднородности.

**Крест неоднородности** - регион в матрице неоднородности с индексами элементов

$$Q - B + 1 \leq i \leq Q + S - 1, \quad Q - T + 1 \leq j \leq Q + S - 1.$$

Эти элементы соответствуют тому, что либо тестовый интервал, либо базовый имеет пересечение с переходным.

## Глава 3

### Обновление матрицы разладки

#### 3.1. Проблема

Пусть в режиме реального времени приходят новые значения для исходного ряда. Рассмотрим ситуацию когда у нас получилось два ряда  $F_N$  и  $F_{N+1}$ , где первые  $N$  элементов совпадают.

На данный момент существующий функционал позволяет строить матрицы неоднородности  $\mathbf{G}^{F_N}$  и  $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$  отдельно. Так как первые  $N$  элементов рядов совпадают, индексы неоднородности  $g$  будут одинаковые, то есть  $(N - B + 1) * (N - T + 1)$  элементов у  $\mathbf{G}^{F_N}$  и  $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$  будут идентичными.

Выполнение одних и тех же операций некорректно с точки зрения оптимизации, поэтому в такого рода задачах нужен функционал, позволяющий достраивать матрицу разладки  $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$  поэлементно, сохраняя результаты произведенных вычислений при построении  $\mathbf{G}^{F_N}$ .

#### 3.2. Формализация реализации

Новый функционал должен включать в себя:

1. Возможность достраивать матрицу разладки для новых значений ряда.
  - а. Сохранять базисные векторы пространства  $\mathfrak{L}_r^{(1)}$  и индексы неоднородности  $g$ , вычисленные ранее.
  - б. Вычислять и сохранять элементы строковой функции обнаружения  $g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n})$ ,  $T \leq n \leq N + 1$ , а так же считать

столбцовую функцию обнаружения  $g(F_{N-B+2,N+1}; F_{1,T})$  для заполнения соответствующих элементов, в которых участвует новое значение ряда.

## 2. Возможность работать в режиме реального времени.

Хотя избавление от вычисления одних и тех же элементов должно ускорить время работы, функционал должен иметь возможность работать в режиме реального времени.

### 3.3. Реализация

Для реализации был выбран язык *Python3*. Взаимодействие с пакетом *RSSA* осуществлялось через библиотеку *rpy2*, а именно стадии вложения и сингулярного разложения. Подсчет индексов неоднородности велась функционалом языка *Python3* и библиотеки *numpy*. Работа с графикой велась через библиотеку *matplotlib*.

Был написан класс *Hmart* и реализованы методы:

1. **update\_hmatr(newValueOfSeries)** - метод, который принимает новое значение ряда и достраивает матрицу разладки, сохраняя новые значения в соответствующем экземпляре класса.
2. **getRow(n, sync)** - Возвращает строковую функцию обнаружения  $d_{n-1}^{(r)}$  под номером  $n$ . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
3. **getCol(n, sync)** - Возвращает столбцовую функцию обнаружения  $d_{n-1}^{(c)}$  под номером  $n$ . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.

4. **getSym(sync)** - Возвращает симметричную функцию обнаружения  $d_{n-1}^{(s)}$ . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
5. **getDiag(sync)** - Возвращает диагональную функцию обнаружения  $d_{n-1}^{(d)}$ . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
6. **plotHeterFunc(title, w, h)** - Выводит график со всеми функциями разладки. Для строковой и столбцовой берутся первые элементы матрицы разладки. Также имеется возможность задать подпись графика и его размеры аргументами *title*, *w*, *h* соответственно.
7. **plotHm(title, w, h)** - Выводит рисунок матрицы разладки с подписью *title* и размерами *w*, *h*

### 3.4. Тестирование

Добавление новой строки в матрицу разладки происходит за константное время -  $O(c)$ . Новый столбец добавляется за линейное время -  $O(K)$  где  $K$  - количество новых значений ряда. Получаем, что сложность достроения матрицы **G** линейное.

При сравнении скорости работы в случае построения матрицы **G** на ряде  $F_N$ , имевшийся ранее функционал справлялся быстрее, нежели построение **G** на ряде  $F_{N-K}$  и итеративного добавления элементов до  $F_N$ . Однако, в случае работы в режиме реального времени тесты показали эффективность поэлементного достроения в сравнении с полной перестройкой в  $\approx 620\%$  и способность корректно работать при поступлении новых значений ряда не чаще, чем каждые 0.03 сек.

Тестирование проводилось на процессоре **Intel Core i5-7300HQ**.

Описанный функционал доступен в гитхаб репозитории:

**<https://github.com/Loulaan/researchWork>**.

## Глава 4

## Сравнение функций разладки

Так как у нас есть четыре функции обнаружения неоднородности:

1. Строковая:  $d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T}^{(r,1)} = g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N.$
2. Столбцовая:  $d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(1,c)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), \quad B \leq n \leq N.$
3. Диагональная:  $d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T-B}^{(d,B)} = g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), T + B \leq n \leq N.$
4. Симметричная:  $d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(s)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), \quad B \leq n \leq N..$

можем экспериментальным путем попытаться определить, какая из них лучше обнаруживает разладку в ряде.

## 4.1. Постановка задачи

Рассмотрим ряд

$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1) & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2) & n \geq Q. \end{cases}$$

чьи параметры буду задаваться типом разладки и соответствующим изменением параметров. Рассмотрим два типа неоднородности:

1. Временную, заданную

а. Фазовым сдвигом:  $\phi_1 \neq \phi_2$ ;

б. Выбросом:

$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1) & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1 & n = Q. \end{cases}$$



в. Изменением амплитуды:  $C_1 \neq C_2$ .

2. Постоянную, заданную

а. Изменением частоты:  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

В качестве оценок функций неоднородности будем учитывать скорость возрастания значений и момент преодоления  $n_{overcome}$  заданного порога  $threshold$ .

## 4.2. Экспериментальные установки

Для реализации тестов был выбран язык *Python3*. Взаимодействие с пакетом *RSSA* осуществлялось через библиотеку *rpy2* (стадии вложения и сингулярного разложения). Подсчет индексов неоднородности велся функционалом языка *Python3* и библиотеку *numpy*. Работа с графикой велась через библиотеку *matplotlib*.

Параметры ряда были заданы следующим образом:

$N = 700$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{10}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{5}$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $Q = 301$ ,  $B = T = 100$ ,  $L = 50$ ,  $r = d = rank(f_n) = 2$ .

В тестах предполагаем, что момент разладки  $Q$  известен и для оценки скорости возрастания будем выводить значения функций в точках  $[Q, Q + 10, Q + 20, Q + 30]$ .

Порог, относительно которого будем определять, какая из функций неоднородности раньше обнаруживает разладку зададим в соответствии с промоделированными значениями, описанными ниже.

### 4.3. Моделирование

Для определения момента преодоления значения порога *threshold* необходимо этот порог задать. Для этого к рассмотренным рядам добавим шум  $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , где  $\sigma = 0.5$ . Промоделируем реализации шума  $n_{mod} = 200$  раз и посчитаем такие характеристики ряда на промежутке  $[0, \dots, Q - 1]$ , как средний максимум и 95-й процентиль. Эти два значения возьмем в качестве параметра *threshold*.

Результаты моделирования представлены в таблице 4.1.

Permanent ( $\omega_1 \neq \omega_2$ )	row	col	sym	diag
meanMax	0.2391	0.2062	0.2339	0.2185
95 percentile	0.2352	0.2054	0.2297	0.2167
Temporary ( $C_1 \neq C_2$ )	row	col	sym	diag
meanMax	0.0685	0.0593	0.0669	0.0624
95 percentile	0.0673	0.0591	0.0657	0.0616
Temporary ( $\phi_1 \neq \phi_2$ )	row	col	sym	diag
meanMax	0.2372	0.2044	0.2319	0.2166
95 percentile	0.2336	0.2036	0.2279	0.2143
Temporary (Outlier)	row	col	sym	diag
meanMax	0.2336	0.2069	0.2287	0.2161
95 percentile	0.2307	0.2061	0.2254	0.2139

Таблица 4.1. Значения моделирования.

### 4.3.1. Ряды без шума

Посмотрим на наши ряды и их функции неоднородности:

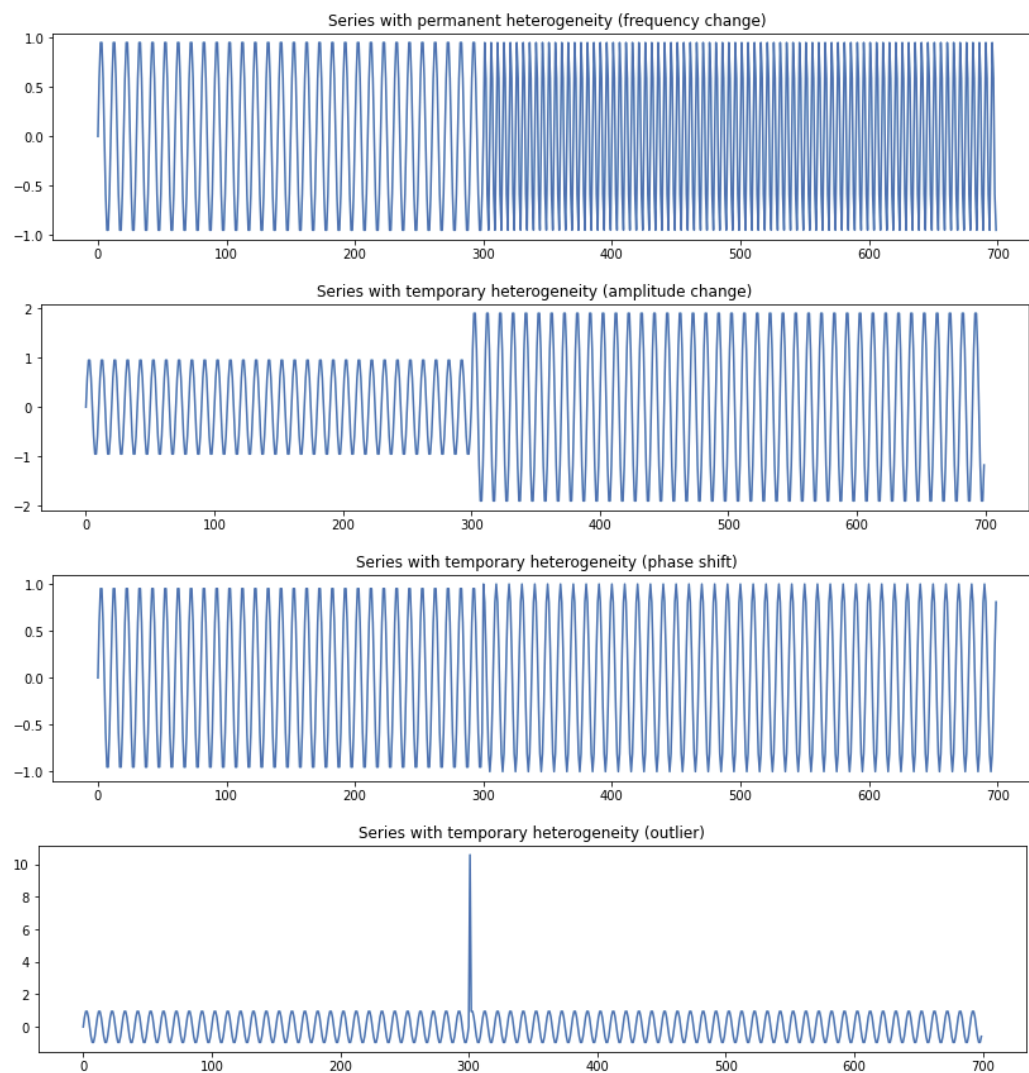


Рис. 4.1. Временные ряды без шума.

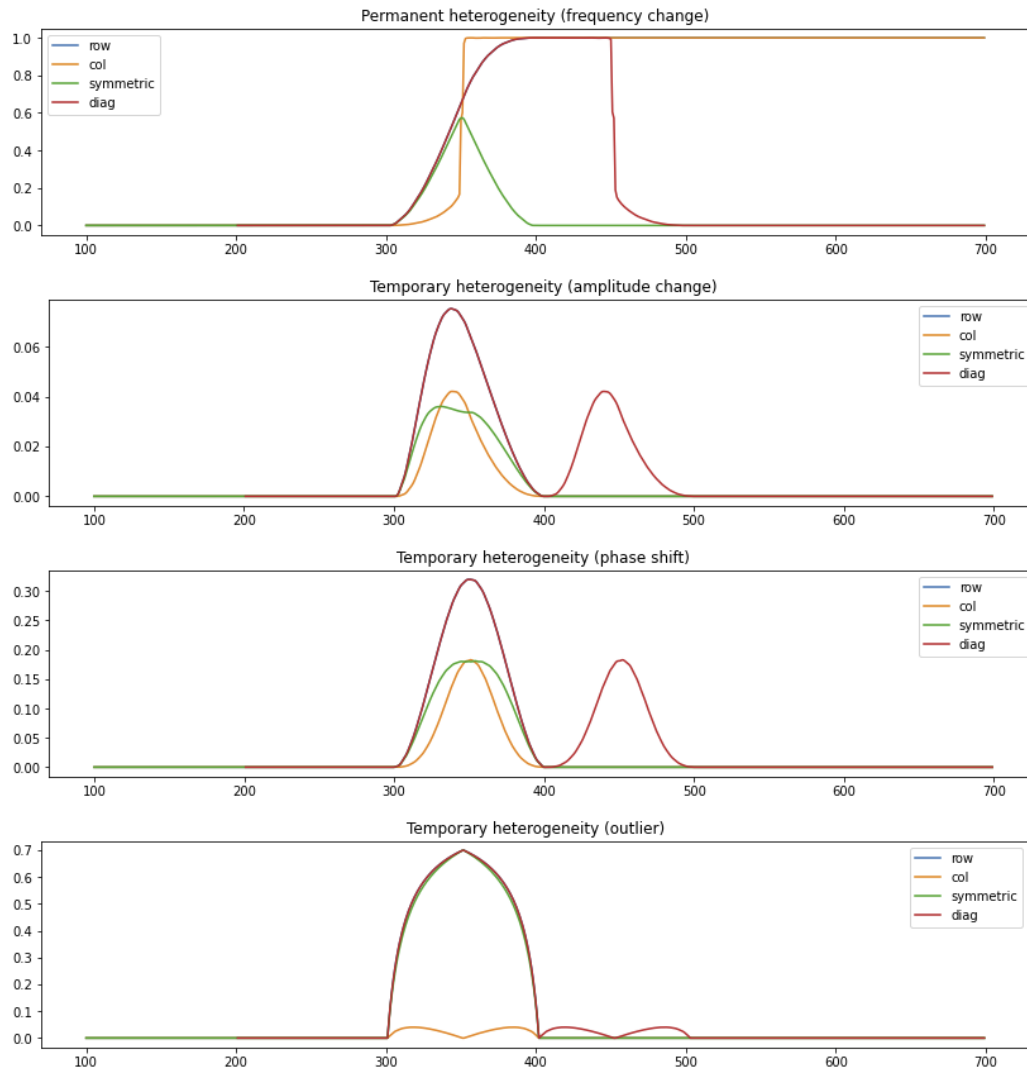


Рис. 4.2. Функции неоднородности рядов без шума.

Полученные результаты тестирования функций разладки приведены в таблицах 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	328	328	$n_{overcome}$	350	350
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0428	0.0428	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.0028	0.0028
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1468	0.1468	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.0140	0.0140
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.2962	0.2962	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.0385	0.0385
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	329	329	$n_{overcome}$	327	327
$D_Q^{(s)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.0402	0.0402	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0428	0.0428
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.1354	0.1354	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1468	0.1468
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.2706	0.2706	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.2962	0.2962

Таблица 4.2. Характеристики функций неоднородности для постоянной разладки ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	330	330	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0186	0.0186	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.0491	0.0491	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.0703	0.0703	$D_{Q+30}^{(c)}$		
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$			$n_{overcome}$	327	326
$D_Q^{(s)}$			$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$			$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0186	0.0186
$D_{Q+20}^{(s)}$			$D_{Q+20}^{(d)}$	0.0491	0.0491
$D_{Q+30}^{(s)}$			$D_{Q+30}^{(d)}$	0.0703	0.0703

Таблица 4.3. Характеристики функций неоднородности для временной разладки ( $C_1 \neq C_2$ ).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	334	333	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0008	0.0008	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0392	0.0392	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1215	0.1215	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.2161	0.2161	$D_{Q+30}^{(c)}$		
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$			$n_{overcome}$	332	331
$D_Q^{(s)}$			$D_Q^d$	0.0008	0.0008
$D_{Q+10}^{(s)}$			$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0392	0.0392
$D_{Q+20}^{(s)}$			$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1215	0.1215
$D_{Q+30}^{(s)}$			$D_{Q+30}^{(d)}$	0.2161	0.2161

Таблица 4.4. Характеристики функций неоднородности для временной разладки ( $\phi_1 \neq \phi_2$ ).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	306	306	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.4012	0.4012	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.5470	0.5470	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.6223	0.6223	$D_{Q+30}^{(c)}$		

Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	306	306	$n_{overcome}$	305	305
$D_Q^{(s)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.3806	0.3806	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.4012	0.4012
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.5288	0.5288	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.5470	0.5470
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.6101	0.6101	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.6223	0.6223

Таблица 4.5. Характеристики функций неоднородности для временной разладки (выброс).

В таблицах 4.3, 4.4 и 4.5 можно заметить пустые элементы, которые соответствуют ситуациям, когда рассматриваемая функция неоднородности не смогла преодолеть соответствующее промоделированное значение из таблицы 4.1.

По таблицам 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 можем сделать вывод, что строковая  $d_{n-1}^{(r)}$  и диагональная  $d_{n-1}^{(d)}$  функции неоднородности более устойчивые к шуму  $\epsilon$ , возрастают сильнее, однако  $d_{n-1}^{(d)}$  раньше преодолевает промоделированное значение, что значит и более раннее обнаружение разладки.



#### 4.3.2. Ряды с шумом

Возьмем те же параметры ряда, что и в предыдущем примере, однако к ряду добавим шум  $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $\sigma = 0.5$ .

Для ряда с временной разладкой, заданной изменением амплитуды ( $C_1 \neq C_2$ ), зададим дисперсию шума до разладки как  $\frac{\sigma^2}{2}$ , чтобы шум  $\epsilon$  был пропорционален амплитуде ряда, так как в противном случае, сила шума не позволит корректно определить базис пространства  $\mathfrak{L}_T$ .

Для оценки функций неоднородности будем моделировать реализации шума во временных рядах и подсчитывать количество преодолений  $\#n_{overcome}$ , на основе которых будем считать средний момент преодоления значений  $n_{overcome}$  из таблицы 4.1.

Посмотрим на наши ряды (Рис. 4.3) и их функции неоднородности (Рис. 4.4):

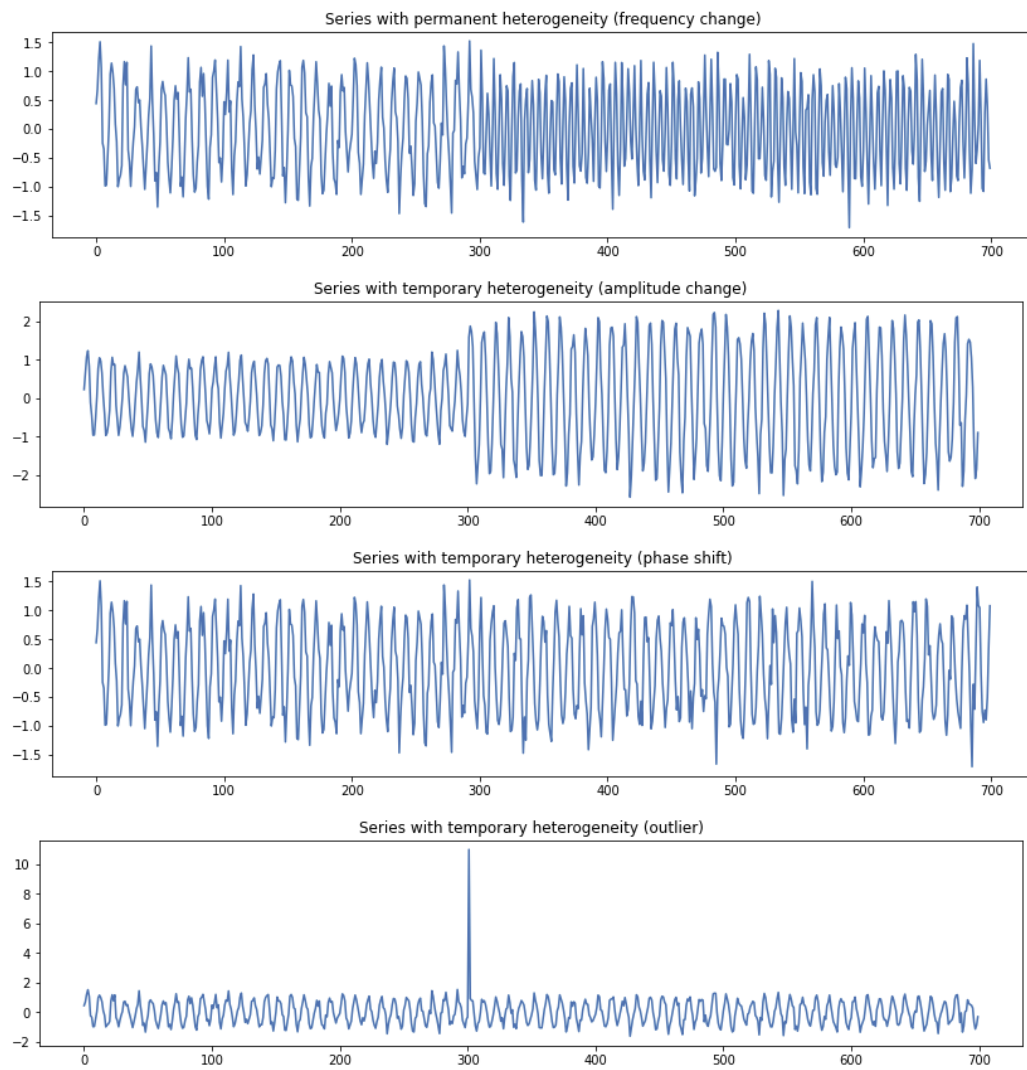


Рис. 4.3. Временные ряды с шумом.

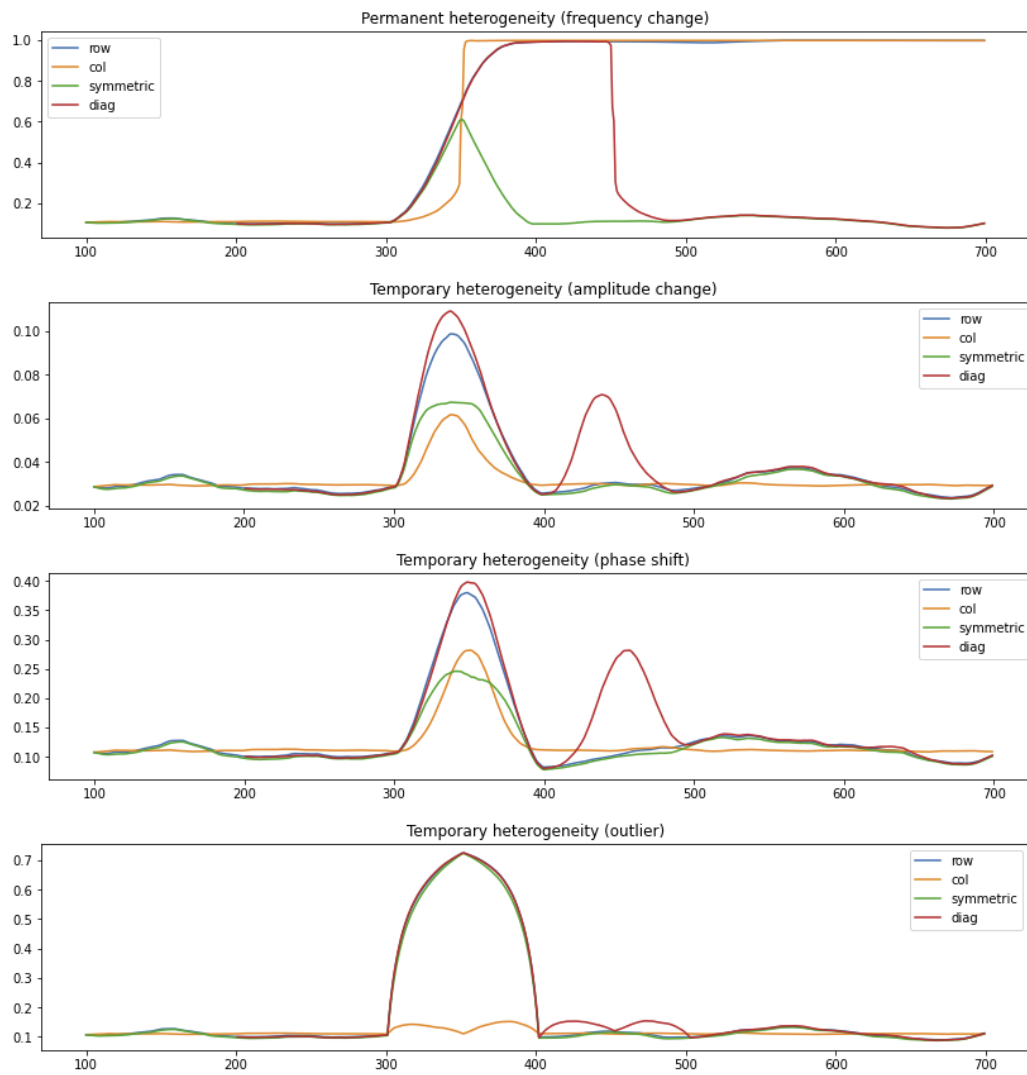


Рис. 4.4. Функции неоднородности рядов с шумом.

Полученные результаты тестирования функций разладки на рядах с шумом приведены в таблицах 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

Row	meanMax	95 percentile	Col	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.36	311.71	$n_{overcome}$	315.69	315.32
$D_Q^{(r)}$	0.1949	0.1949	$D_Q^{(c)}$	0.1979	0.1979
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.2308	0.2308	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2010	0.2010
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.3148	0.3148	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2140	0.2140
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.4345	0.4345	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2379	0.2379

Sym	meanMax	95 percentile	Diag	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.91	312.165	$n_{overcome}$	309.195	308.79
$D_Q^{(s)}$	0.1903	0.1903	$D_Q^{(d)}$	0.1950	0.1950
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.2234	0.2234	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.2283	0.2283
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.2976	0.2976	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.3056	0.3056
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.4044	0.4044	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.4210	0.4210

Таблица 4.6. Характеристики функций неоднородности для постоянной разладки с шумом ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ).

Row	meanMax	95 percentile	Col	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	308.475	308.03	$n_{overcome}$	309.07	308.88
$D_Q^{(r)}$	0.0564	0.0564	$D_Q^{(c)}$	0.0578	0.0578
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0768	0.0768	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.0612	0.0612
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1028	0.1028	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.0735	0.0735
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.1181	0.1181	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.0861	0.0861

Sym	meanMax	95 percentile	Diag	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	311.14	309.94	$n_{overcome}$	305.64	305.34
$D_Q^{(s)}$	0.0551	0.0551	$D_Q^{(d)}$	0.0564	0.0564
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.0723	0.0723	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0789	0.0789
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.0868	0.0868	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1095	0.1095
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.0900	0.0900	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.1284	0.1284

Таблица 4.7. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом ( $1 \neq 2$ ).

Row	meanMax	95 percentile	Col	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.08	311.395	$n_{overcome}$	310.81	310.52
$D_Q^{(r)}$	0.1994	0.1994	$D_Q^{(c)}$	0.1997	0.1997
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.2313	0.2313	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2053	0.2053
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.2978	0.2978	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2312	0.2312
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.3672	0.3672	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2790	0.2790

Sym	meanMax	95 percentile	Diag	meanMax	95 percentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	313.8	312.815	$n_{overcome}$	308.79	308.355
$D_Q^{(s)}$	0.1948	0.1948	$D_Q^{(d)}$	0.1993	0.1993
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.2217	0.2217	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.2277	0.2277
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.2671	0.2671	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.2874	0.2874
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.3009	0.3009	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.3599	0.3599

Таблица 4.8. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом ( $\phi_1 \neq \phi_2$ ).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	180	181
$n_{overcome}$	302.25	302.185	$n_{overcome}$	311.2389	311.0663
$D_Q^{(r)}$	0.1982	0.1982	$D_Q^{(c)}$	0.2050	0.2049
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.4814	0.4814	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2318	0.2316
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.5929	0.5929	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2334	0.2333
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.6555	0.6555	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2268	0.2266

Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	302.31	302.275	$n_{overcome}$	301.845	301.795
$D_Q^{(s)}$	0.1935	0.1935	$D_Q^{(d)}$	0.1980	0.1980
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.4619	0.4619	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.4855	0.4855
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.5760	0.5760	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.5971	0.5971
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.6440	0.6440	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.6598	0.6598

Таблица 4.9. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом (выброс).

По результатам видим что в среднем, диагональная функция неоднородности  $d_{n-1}^{(d)}$  раньше обнаруживает разладку среди остальных трех, при этом, уступая в скорости возрастания строковой в примерах с постоянной ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ) и временной (выброс) разладками.

### 4.3.3. Выводы

Явными фаворитами являются строковая  $d_{n-1}^{(r)}$  и диагональная  $d_{n-1}^{(d)}$  функции неоднородности. Они обе показывают превосходство над столбцовой  $d_{n-1}^{(c)}$  и симметричной  $d_{n-1}^{(s)}$  в устойчивости к шуму  $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ , моментом обнаружения разладки  $n_{overcome}$  и скорости возрастания значений после момента нарушения однородности  $[D_Q, D_{Q+10}, D_{Q+20}, D_{Q+30}]$ . Дальнейшие исследования будут направлены на оценку влияния шума на устойчивость функций неоднородности.



## Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема отсутствия функционала по построению матриц разладки в конкретном роде задач. Был описан инструментарий, решающий описанную проблему, а также приведены его результаты тестирования и оценка скорости работы.

Помимо этого были рассмотрены и оценены все существующие функции обнаружения неоднородности во временных рядах, а также приведены выводы о качестве обнаружения неоднородности и описан дальнейший план исследований.

## Список литературы

1. Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of time series structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC.