

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

Производственная практика 1 (научно-исследовательская работа) (семестр 2)

ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА SSA

Выполнил:

Кононыхин Иван Александрович

группа 20.M03-мм

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

Голяндина Нина Эдуардовна

Кафедра статистического моделирования

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Singular spectrum analysis	5
1.1. Алгоритм базового метода SSA	5
1.1.1. Вложение	5
1.1.2. Сингулярное разложение	5
1.1.3. Группировка	6
1.1.4. Реконструкция	6
1.2. Ранги ряда	6
1.2.1. Пример	7
Глава 2. Поиск разладки	8
2.1. Матрица неоднородности и функции неоднородности	8
2.1.1. Матрица неоднородности	8
2.1.2. Функции обнаружения	10
2.2. Однородность и неоднородность	11
2.2.1. Типы неоднородности	11
Глава 3. Обновление матрицы разладки	13
3.1. Проблема	13
3.2. Формализация реализации	13
3.3. Реализация	14
3.4. Тестирование	14
Глава 4. Сравнение функций разладки	16
4.1. Постановка задачи	16
4.2. Экспериментальные установки	17
4.3. Моделирование	17
4.3.1. Ряды без шума	18
4.3.2. Ряды с шумом	24
4.3.3. Выводы	31

Глава 5. Аналитическая оценка индекса неоднородности при изменении	
частоты гармоник	32
5.1. Отношение	32
5.1.1. Знаменатель	32
5.1.2. Числитель	33
5.2. Индекс неоднородности	34
5.3. Проверка точности аппроксимации	34
5.3.1. Предположения об L	34
5.3.2. Разность ω_1 и ω_2	36
5.4. Анализ	37
Заключение	38
Список литературы	39

Введение

Будем называть временной ряд $F_N = (f_1, \dots, f_N)$ **однородным**, если он управляется некоторым линейным рекуррентным соотношением (LRR) $f_{n+r} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot f_{n+r-i}$, $\alpha_i \neq 0$, размерность которого (r) мала по отношению к N .

Предположим, что из-за внешнего воздействия (или по другой причине) однородный временной ряд подвергается мгновенному возмущению, то есть он перестает следовать исходному LRR. Однако по прошествии определенного периода времени он снова становится управляемым неким LRR, которое может отличаться от исходного. В результате, ряд в целом перестает быть однородным и возникает проблема изучения этой неоднородности.

Метод, основанный на алгоритме SSA (Singular Spectrum Analysis) [1], позволяет изучить эту неоднородность путем построения матрицы разладки, где для обнаружения неоднородности используются строковые, столбцовые и диагональные подмножества этой матрицы.

Целью данной работы является сравнение методов обнаружения неоднородности в синусоидальных рядах, а также расширение существующего функционала в задаче обнаружения разладки в режиме реального времени.

В «Главе 1» приведена теория базового алгоритма SSA.

В «Главе 2» введены коэффициент неоднородности, матрица разладки, функции обнаружения и обозреваются типы неоднородности.

В «Главе 3» описана проблема построения матриц разладки при поступлении новых значений ряда в режиме реального времени, а также представлено и описано ее решение.

«Глава 4» посвящена сравнению функций обнаружения неоднородностей на синусоидальных временных рядах с шумом и без. Неоднородность рядов задавалась изменением частоты, амплитуды, фазовым сдвигом и выбросом.

Глава 1

Singular spectrum analysis

1.1. Алгоритм базового метода SSA

Определим метод SSA как любой метод, состоящий из четырех этапов, описанных ниже. Обозначим входной объект как F_N — упорядоченный набор из N действительных чисел (временной ряд).

1.1.1. Вложение

Процедура вложения переводит исходный временной ряд $F_N = (f_1, \dots, f_N)$ в последовательность многомерных векторов

$$X_i = (f_i, \dots, f_{i+L-1})^T, \quad 1 \leq i \leq K$$

размерности L (длина окна), где $K = N - L + 1$.

Создается траекторная матрица $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_K]$ размерности $L \times K$, имеющую Ганкелеву структуру с одинаковыми значениями на анти-диагоналях

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ f_3 & f_4 & f_5 & \dots & f_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_L & f_{L+1} & f_{L+2} & \dots & f_N \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

1.1.2. Сингулярное разложение

Результатом этого шага является сингулярное разложение траекторной матрицы \mathbf{X} .

Пусть $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ — собственные числа матрицы \mathbf{S} , $d = \text{rank } \mathbf{X} = \max\{j : \lambda_j > 0\}$, U_1, \dots, U_d — ортонормированный набор собственных векторов матрицы \mathbf{S} , соответствующий собственным числам, и $V_j = \mathbf{X}^T U_j / \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \dots, d$ — факторные векторы. Тогда разложение будет иметь вид

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T. \quad (1.2)$$

1.1.3. Группировка

На основе разложения шага 2 процедура группировки делит множество индексов $\{1, \dots, d\}$ на m непересекающихся подмножеств I_1, \dots, I_m .

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, d\}$ - набор индексов. Тогда результирующая матрица \mathbf{X}_I , соответствующая группе $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ определяется как

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для $I = \{I_1, \dots, I_m\}$, тем самым, разложение (1.2) может быть записано в сгруппированном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}. \quad (1.3)$$

1.1.4. Реконструкция

На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (1.3) преобразуется в новый ряд длины N диагональным усреднением элементов.

Пусть Y — матрица $L \times K$ с элементами y_{ij} , где $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. Обозначим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$. Пусть $y_{ij}^* = y_{ij}$ если $L < K$ и $y_{ij}^* = y_{ji}$ в противном случае. Диагональное усреднение преобразует матрицу Y в ряд g_0, \dots, g_{N-1} по формуле

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m,k-m+2}^* & 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,k-m+2}^* & L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m,k-m+2}^* & K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (1.4)$$

Применяя диагональное усреднение (1.4) к результирующим матрицам $\mathbf{X}_{\mathbf{I}_k}$, получаем m рядов $\tilde{F}_k = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$. Тогда исходный ряд F_N раскладывается в сумму рядов:

$$F_N = \sum_{k=1}^m \tilde{\mathbb{X}}_k.$$

1.2. Ранги ряда

Рассмотрим ряд $F_N = (f_1, \dots, f_N)$. После процедуры вложения мы получаем подряды длины L : $X_i^{(L)} = X_i = (f_i, \dots, f_{i+L-1})^T$, $1 \leq i \leq K$, $\mathfrak{L}^{(L)} = \mathfrak{L}^{(L)}(F_N) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(X_1, \dots, X_K)$ — траекторное пространство ряда F_N .

Будем говорить, что ряд имеет ранг d , если $\dim \mathfrak{L}^{(L)} = d$ и записывать это как $\text{rank}_L(F_N) = \text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) = \text{rank}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = d$. Справедливым равенство будет в том случае, если $d \leq \min(L, K)$. Если же равенство $\text{rank}_L(F_N) = d < \frac{N}{2}$ будет достигаться \forall допустимого L , то говорим, что ряд F_N имеет ранг d ($\text{rank}(F_N) = d$) и при существовании такого d ряд F_N — ряд конечного ранга.

Если же мы рассмотрим бесконечный временной ряд $F = (\dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots)$, то такой ряд будем называть рядом конечного ранга тогда и только тогда, когда он управляется LRR размерности d , то есть существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_d \forall n : f_{n+r} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot f_{n+r-i}, \alpha_i \neq 0$.

1.2.1. Пример

Рассмотрим ряд $F_N = C \sin(2\pi\omega n + \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $\omega \in [0, \frac{1}{2}]$. Если $\omega < \frac{1}{2}$, то $\forall L \geq 2$ и $N \geq L + 1$ сингулярное разложение траекторной матрицы имеет 2 члена (то есть ранг равен 2). При $\omega = \frac{1}{2}$ ранг равен 1. Отсюда, на практике при SSA разложении в такого вида рядах (где сигнал задан синусом) даже при наличии шума, в качестве количества рассматриваемых собственных векторов указывают $r = 2$, что соответствует компонентам сигнала.

Глава 2

Поиск разладки

Основная идея метода решения задачи обнаружения структурных изменений может быть описана следующим образом. Временной ряд F_N , управляемый LRR, характеризуется тем, что для достаточно больших значений длины окна L (Гл. 1.1.1) (это значение должно быть больше размерности минимального LRR) вложенные векторы покрывают одно и то же линейное пространство $\mathfrak{L}^{(L)}$ независимо от N (если N достаточно велико). Таким образом, нарушения однородности ряда могут быть описаны в терминах соответствующих сдвинутых векторов: возмущения заставляют эти векторы покидать пространство $\mathfrak{L}^{(L)}$. Соответствующие расхождения определяются в терминах расстояний между сдвинутыми векторами и пространством $\mathfrak{L}^{(L)}$, которые могут быть определены для различных частей ряда (например, до и после возмущения).

2.1. Матрица неоднородности и функции неоднородности

2.1.1. Матрица неоднородности

Рассмотрим два временных ряда $F^{(1)} = F_{N_1}^{(1)}$ и $F^{(2)} = F_{N_2}^{(2)}$ и зададим число $L : 2 \leq L \leq \min(N_1 - 1, N_2)$. Обозначим $\mathfrak{L}^{(L,1)}$ линейное пространство, натянутое на L -сдвинутые векторы ряда $F^{(1)}$.

Пусть $U_l^{(1)} (l = 1, \dots, L)$ — левые сингулярные векторы траекторной матрицы ряда $F^{(1)}$. Для $l > d \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathfrak{L}^{(L,1)}$ в качестве собственных векторов $U_l^{(1)}$ мы берем векторы из любого ортонормированного базиса пространства, ортогонального $\mathfrak{L}^{(L,1)}$.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ — подмножество $\{1, \dots, L\}$ и $\mathfrak{L}_r^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(U_l^{(1)}, l \in I)$. Обозначим через $X_1^{(2)}, \dots, X_{K_2}^{(2)} (K_2 = N_2 - L + 1)$ L -сдвинутые векторы временного ряда $F^{(2)}$.

Введем меру, называемую **индексом неоднородности**, которая характеризует несоответствие между рядом $F^{(2)}$ и структурой ряда $F^{(1)}$ (описываемого подпростран-

ством $\mathfrak{L}_r^{(1)}$):

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} (\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2)}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = 1 - \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}. \quad (2.1)$$

Значения g принадлежат интервалу $[0, 1]$.

Введем обозначения:

1. Исходный временной ряд $F_N : F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$, $N > 2$;
2. Подряды (интервалы) $F_{i,j}$ временного ряда $F_N : F_{i,j} = (f_{i-1}, \dots, f_{j-1})$, $1 \leq i < j \leq N$;
3. Длина окна $L : 1 < L < N$;
4. Длина B базовых подрядов ряда $F_N : B > L$;
5. Длина T тестовых подрядов ряда $F_N : T \geq L$;
6. Предполагаем набор $I = \{j_1, \dots, j_r\}$ различных натуральных чисел: $j < \min(L, B - L + 1) \forall j \in I$.
7. Базовые пространства ($i = 1, \dots, N - B + 1$) натянуты на собственные векторы с индексами из I , полученные сингулярным разложением траекторных матриц $\mathbf{X}^{(i,B)}$ ряда $F_{i,i+B-1}$ с длиной окна L . Соответствующий набор собственных троек называется **базовым набором собственных троек**.

Учитывая эти обозначения, матрица $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{B,T}$, состоящая из элементов g_{ij} :

$$g_{ij} = g(F_{i,i+B-1}; F_{j,j+T-1}), \quad (2.2)$$

$$1 \leq i \leq N - B + 1, \quad 1 \leq j \leq N - T + 1,$$

есть **матрица неоднородности** ($H - matrix$) временного ряда F_N . Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,i)}$ соответствует пространству $\mathfrak{L}_r^{(1)}$. Ряд $F_{i,i+B-1}$ называют **базовым подрядом** (или базовым интервалом), а $F_{j,j+T-1}$ — **тестовым подрядом** (интервалом). По определению, величина g_{ij} является нормированной суммой расстояний между L -сдвинутыми векторами тестового подряда и линейным пространством $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,i)}$.

2.1.2. Функции обнаружения

На основе матрицы неоднородности \mathbf{G} введем различные функции обнаружения.

1. Строковая функция обнаружения

Строковой функцией обнаружения является ряд $D_{T,N}^{(r)}$ с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N, \quad (2.3)$$

что соответствует обнаружению изменений по отношению к начальной части ряда (или, точнее, к его первым B членам, которые представлены пространством $\mathfrak{L}_{I,B}^{(L,1)}$).

2. Столбцовая функция обнаружения

Столбцовой функцией обнаружения является ряд $D_{B,N}^{(c)}$ с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), \quad B \leq n \leq N. \quad (2.4)$$

3. Функция диагонального обнаружения

Функцией диагонального обнаружения является ряд $D_{T+B,N}^{(d)}$ с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), \quad (2.5)$$

$$T + B \leq n \leq N.$$

Поскольку промежуток между базовым и тестовым интервалами отсутствует, данная функция обнаружения может использоваться для обнаружения резких структурных изменений на фоне медленных.

4. Функция симметричного обнаружения

Пусть $T = B$. Функцией симметричного обнаружения является ряд $D_{B,N}^{(s)}$ с членами, определяемыми

$$d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), \quad B \leq n \leq N. \quad (2.6)$$

Эта функция обнаружения измеряет качество приближения базового ряда выбранными собственными тройками.

2.2. Однородность и неоднородность

Пусть F_N — однородный временной ряд, управляемый минимальным LRR размерности d . Выберем L и r такие, что $L \geq d$, $d \leq r \leq \min(L, N - L + 1)$.

Если выбрать $I = \{1, \dots, r\}$, то матрица неоднородности (2.1) будет нулевой, поскольку $B \geq L$, $\forall i \mathfrak{L}^{(L)}(F_{i,i+B-1}) = \mathfrak{L}^{(L)}(F_N)$, следовательно, все L -сдвинутые векторы ряда $F_{j,j+T-1}$ лежат в пространстве $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{i,i+B-1}) \forall i, j$. Это означает, что любой однородный ряд F_N порождает нулевую матрицу неоднородности, а наличие ненулевых элементов g_{ij} в этой матрице свидетельствует о нарушении однородности.

Рассмотрим несколько типов нарушений.

2.2.1. Типы неоднородности

Как указывалось ранее, временной ряд F_N задан LRR до определенного времени Q . Затем происходит мгновенное возмущение, хотя через короткое время ряд снова становится однородным и подчиняется LRR, которое может отличаться от исходного.

Если начальное LRR восстанавливается, то мы имеем **временное** нарушение структуры временного ряда. В противном случае нарушение является **постоянным**.

Момент времени Q будем называть **моментом возмущения** или **точкой изменения**. Положим $d = \text{rank}_L(F_{1,Q-1})$.

Предположим, что через некоторое время $S \geq 0$ после возмущения, временной ряд стал опять однородным (ряд $F_{Q+S,N}$). Обозначим $d_1 = \text{rank}_L(F_{Q+S,N})$. Временной интервал $[Q, Q+S]$ называется **переходным интервалом** (поведение ряда на котором нас не интересует).

Пусть $L \geq \max(d, d_1)$. Дополнительно введем ограничения $L \leq Q - 1$ и $L \leq N - Q - S + 1$. Если L -сдвинутые векторы ряда F_N покрывают исходное подпространство $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{1,Q-1})$ после того, как они покинули переходный интервал (то есть $\mathfrak{L}^{(L)}(F_{1,Q-1}) = \mathfrak{L}^{(L)}(F_{Q+S,N})$), тогда обе однородные части временного ряда соответствуют одному минимальному LRR — случай временной неоднородности. Отсюда вытекает случай постоянной неоднородности.

Опишем вид матрицы неоднородности. Пусть длины базового и тестового интервалов удовлетворяют условию $\max(B, T) < Q$. Предположим, что $I = \{1, \dots, r\}$ и $r = d \leq \min(L, B - L + 1)$. Тогда все элементы g_{ij} матрицы $\mathbf{G}_{B,T}$ равны нулю для $i + B \leq Q$ и $j + T \leq Q$. Это связано с тем, что для этих индексов, и базовый, и тестовый

подряды исходного ряда F_N также являются подряды однородного ряда $F_{1,Q-1}$. Значения остальных элементов матрицы неоднородности зависят от типа неоднородности и значений параметров.

Схематично, общая форма матрицы неоднородности изображена на Рис. 2.1.

Регион \mathcal{A} соответствует элементам g_{ij} где ряды $F_{i,i+B-1}$ и $F_{j,j+T-1}$ являются подряды однородного ряда $F_{1,Q-1}$. Отсюда следует, что данный регион состоит из нулевых элементов.

В регионе \mathcal{D} те же самые ряды являются подряды ряда $F_{Q+S,N}$. Поэтому, если размерность d_1 ряда $F_{Q+S,N}$ не больше размерности d ряда $F_{1,Q-1}$, то данный регион матрицы также состоит из нулевых элементов.

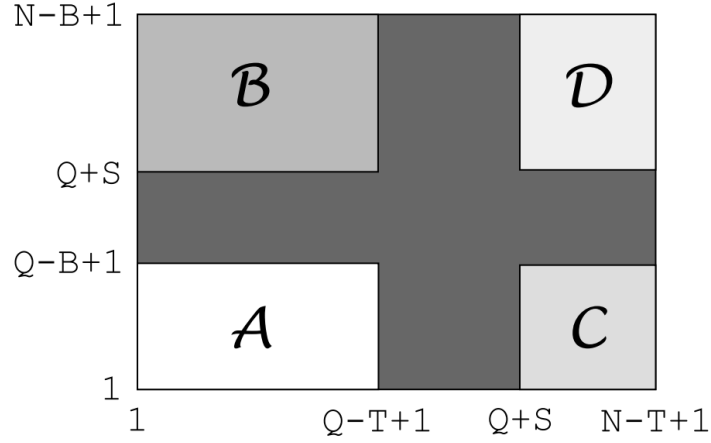


Рис. 2.1. Общая форма матрицы неоднородности.

Крест неоднородности — регион в матрице неоднородности с индексами элементов

$$Q - B + 1 \leq i \leq Q + S - 1, \quad Q - T + 1 \leq j \leq Q + S - 1.$$

Эти элементы соответствуют тому, что либо тестовый интервал, либо базовый имеет пересечение с переходным.

Глава 3

Обновление матрицы разладки

3.1. Проблема

Пусть в режиме реального времени приходят новые значения для исходного ряда. Рассмотрим ситуацию когда у нас получилось два ряда F_N и F_{N+1} , где первые N элементов совпадают.

На данный момент существующий функционал позволяет строить матрицы неоднородности \mathbf{G}^{F_N} и $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$ отдельно. Так как первые N элементов рядов совпадают, индексы неоднородности g будут одинаковые, то есть $(N - B + 1) * (N - T + 1)$ элементов у \mathbf{G}^{F_N} и $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$ будут идентичными.

Выполнение одних и тех же операций некорректно с точки зрения оптимизации, поэтому в такого рода задачах нужен функционал, позволяющий достраивать матрицу разладки $\mathbf{G}^{F_{N+1}}$ поэлементно, сохраняя результаты произведенных вычислений при построении \mathbf{G}^{F_N} .

3.2. Формализация реализации

Новый функционал должен включать в себя:

1. Возможность достраивать матрицу разладки для новых значений ряда.
 - а. Сохранять базисные векторы U_1, \dots, U_r пространства $\mathfrak{L}_r^{(1)}$ и индексы неоднородности $g_{i,j} \forall i \in [1, N - T + 1], \forall j \in [1, N - B + 1]$, вычисленные ранее.
 - б. Вычислять коэффициенты неоднородности $g_{i,N-T+2}$ и $g_{N-B+2,j}$, $\forall i \in [1, N - T + 2], \forall j \in [1, N - B + 2]$, в которых участвует новое значение ряда F_{N+1} и сохранять их.
2. Возможность работать в режиме реального времени.

Хотя избавление от вычисления одних и тех же элементов должно ускорить время работы, функционал должен иметь возможность работать в режиме реального времени.

3.3. Реализация

Для реализации был выбран язык *Python3*. Взаимодействие с пакетом *RSSA* осуществлялось через библиотеку *rpy2*, а именно стадии вложения и сингулярного разложения. Подсчет индексов неоднородности велись функционалом языка *Python3* и библиотеки *numpy*. Работа с графикой велась через библиотеку *matplotlib*.

Был написан класс *Hmart* и реализованы методы:

1. **update_hmatr(newValueOfSeries)** — метод, который принимает новое значение ряда и достраивает матрицу разладки, сохраняя новые значения в соответствующем экземпляре класса.
2. **getRow(n, sync)** — Возвращает строковую функцию обнаружения $d_{n-1}^{(r)}$ под номером n . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
3. **getCol(n, sync)** — Возвращает столбцовую функцию обнаружения $d_{n-1}^{(c)}$ под номером n . Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
4. **getSym(sync)** — Возвращает симметричную функцию обнаружения $d_{n-1}^{(s)}$. Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
5. **getDiag(sync)** — Возвращает диагональную функцию обнаружения $d_{n-1}^{(d)}$. Аргумент *sync* отвечает за синхронизацию элементов функции с исходным рядом.
6. **plotHeterFunc(title, w, h)** — Выводит график со всеми функциями разладки. Для строковой и столбцовой берутся первые элементы матрицы разладки. Также имеется возможность задать подпись графика и его размеры аргументами *title*, *w*, *h* соответственно.
7. **plotHm(title, w, h)** — Выводит рисунок матрицы разладки с подписью *title* и размерами *w*, *h*

3.4. Тестирование

Добавление новой строки в матрицу разладки происходит за константное время — $O(1)$. Новый столбец добавляется за линейное время — $O(N)$ где N — длина ряда.

Получаем, что сложность построения матрицы \mathbf{G} линейная.

Проводя эксперимент, мы фиксируем длину N ряда F_N и строим для него матрицу разладки \mathbf{G}_{F_N} . После чего, добавляем новое значение к F_N и получаем ряд F_{N+1} длины $N + 1$. Далее мы будем сравниваем затраченное время на построение матрицы $\mathbf{G}_{F_{N+1}}$ двумя способами:

1. Старым: построение матрицы $\mathbf{G}_{F_{N+1}}$ независимо от предыдущих вычислений.
2. Новым: к матрице \mathbf{G}_{F_N} добавляем новую строку и столбец.

Был протестирован диапазон $N \in [200, 20200]$. Во всех тестах новый подход построения затрачивал в разы меньшее количество времени. Так, например, при $N = 200$, новый способ справлялся с построением в 20 раз быстрее, а при $N = 20200$ в 2.5 раза. График зависимости времени от длины ряда приведен на Рис. 3.1.

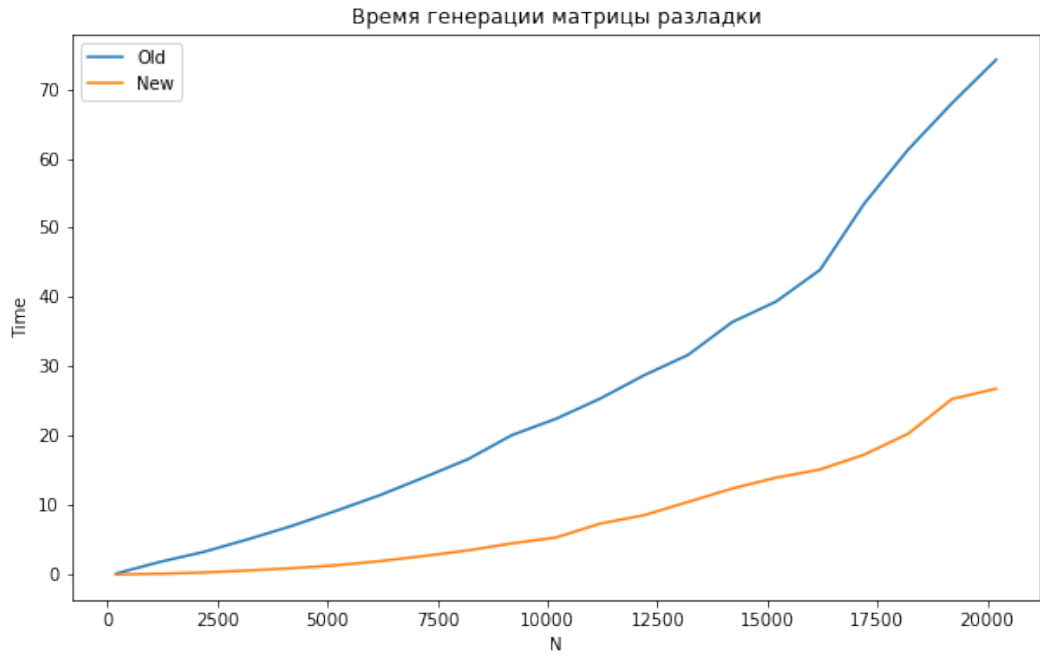


Рис. 3.1. Общая форма матрицы неоднородности.

Тестирование проводилось на процессоре **Intel Core i5-7300HQ**.

Описанный функционал и тесты доступны в гитхаб репозитории:

<https://github.com/Loulaan/researchWork>.

Глава 4

Сравнение функций разладки

Так как у нас есть четыре функции обнаружения неоднородности:

1. Строковая: $d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T}^{(r,1)} = g(F_{1,B}; F_{n-T+1,n}), T \leq n \leq N.$
2. Столбцовая: $d_{n-1}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(1,c)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{1,T}), B \leq n \leq N.$
3. Диагональная: $d_{n-1}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-T-B}^{(d,B)} = g(F_{n-T-B+1,n-T+1}; F_{n-T+1,n}), T+B \leq n \leq N.$
4. Симметричная: $d_{n-1}^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{n-B}^{(s)} = g(F_{n-B+1,n}; F_{n-B+1,n}), B \leq n \leq N.$

можем экспериментальным путем попытаться определить, какая из них лучше обнаруживает разладку в ряде.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим ряд

$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

чьи параметры буду задаваться типом разладки и соответствующим изменением параметров. Рассмотрим два типа неоднородности:

1. Временную, заданную

а. Фазовым сдвигом: $\phi_1 \neq \phi_2$;

б. Выбросом:

$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1) & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1 & n = Q. \end{cases}$$

в. Изменением амплитуды: $C_1 \neq C_2$.

2. Постоянную, заданную

а. Изменением частоты: $\omega_1 \neq \omega_2$.

В качестве оценок функций неоднородности будем учитывать скорость возрастания значений и момент преодоления n_{overcome} заданного порога δ .

4.2. Экспериментальные установки

Для реализации тестов был выбран язык *Python3*. Взаимодействие с пакетом *RSSA* осуществлялось через библиотеку *rpy2* (стадии вложения и сингулярного разложения). Подсчет индексов неоднородности велся функционалом языка *Python3* и библиотеку *numpy*. Работа с графикой велась через библиотеку *matplotlib*.

Параметры ряда были заданы следующим образом:

$$N = 700, \omega_1 = \frac{1}{10}, \omega_2 = \frac{1}{5}, C_1 = 1, C_2 = 2, \phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{\pi}{2}, Q = 301, B = T = 100, L = 50, r = d = \text{rank}(f_n) = 2.$$

В тестах предполагаем, что момент разладки Q известен и для оценки скорости возрастания будем выводить значения функций в точках $[Q, Q + 10, Q + 20, Q + 30]$.

Порог, относительно которого будем определять, какая из функций неоднородности раньше обнаруживает разладку зададим в соответствии с промоделированными значениями, описанными ниже.

4.3. Моделирование

Для определения момента преодоления значения порога δ необходимо этот порог задать. Для этого к рассмотренным рядам добавим шум $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, где $\sigma = 0.5$. Для ряда с временной разладкой, заданной изменением амплитуды ($C_1 \neq C_2$), зададим дисперсию шума до разладки как $\frac{\sigma^2}{2}$, чтобы шум ϵ был пропорционален амплитуде ряда, так как в противном случае, сила шума не позволит корректно определить базис пространства \mathfrak{L}_τ .

Промоделируем реализации шума $n_{mod} = 200$ раз и посчитаем такие характеристики ряда на промежутке $[0, \dots, Q - 1]$, как средний максимум и 95-й процентиль. Эти два значения возьмем в качестве параметра δ .

Результаты моделирования представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Значения моделирования.

Permanent ($\omega_1 \neq \omega_2$)	row	col	sym	diag
meanMax	0.2391	0.2062	0.2339	0.2185
95 procentile	0.2352	0.2054	0.2297	0.2167
Temporary ($C_1 \neq C_2$)	row	col	sym	diag
meanMax	0.0685	0.0593	0.0669	0.0624
95 procentile	0.0673	0.0591	0.0657	0.0616
Temporary ($\phi_1 \neq \phi_2$)	row	col	sym	diag
meanMax	0.2372	0.2044	0.2319	0.2166
95 procentile	0.2336	0.2036	0.2279	0.2143
Temporary (Outlier)	row	col	sym	diag
meanMax	0.2336	0.2069	0.2287	0.2161
95 procentile	0.2307	0.2061	0.2254	0.2139

4.3.1. Ряды без шума

Временные ряды и их функции неоднородности изображены на Рис. 4.1 и Рис. 4.2 соответственно.

Полученные результаты тестирования функций разладки приведены в таблицах 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

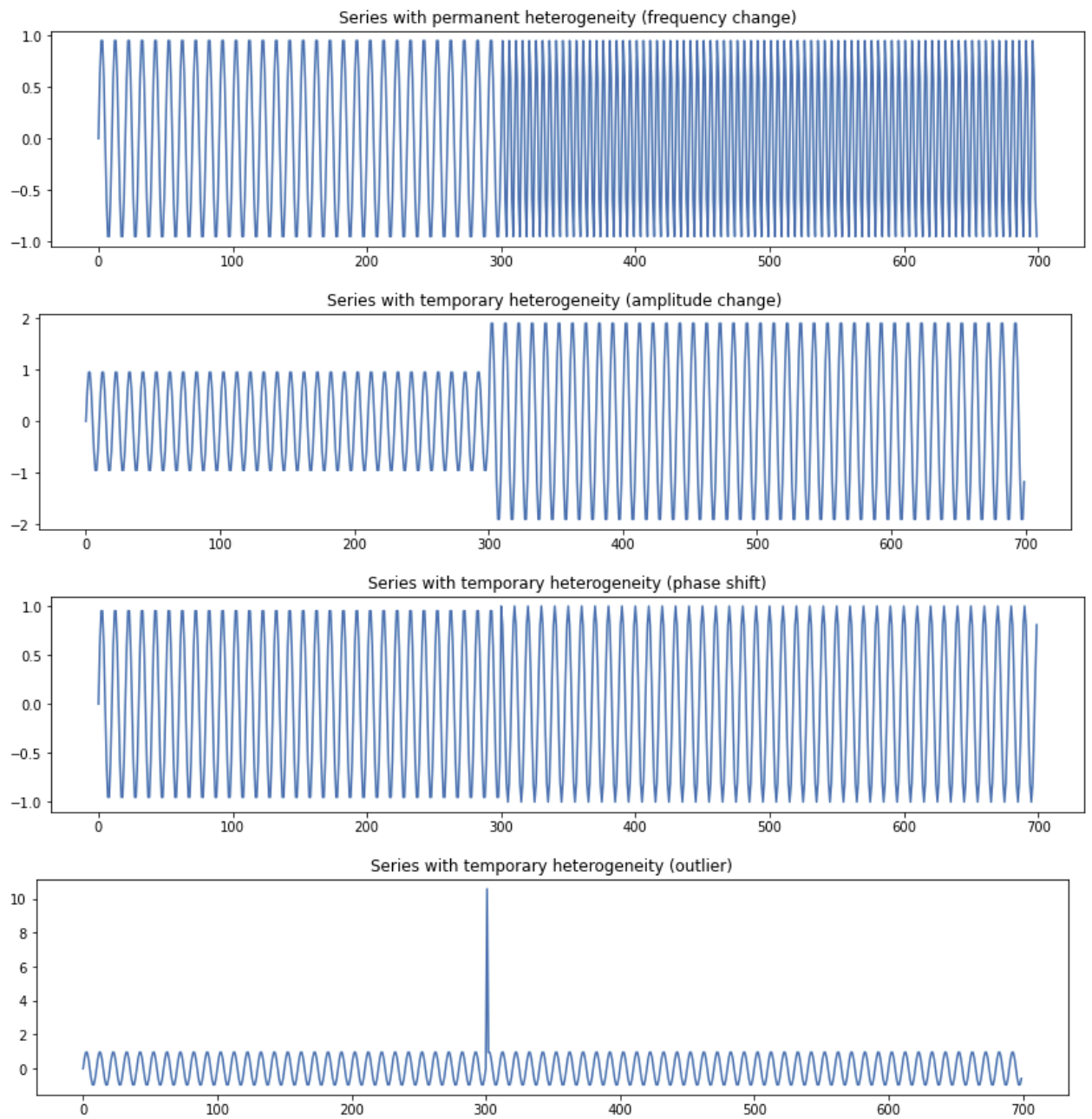


Рис. 4.1. Временные ряды без шума.

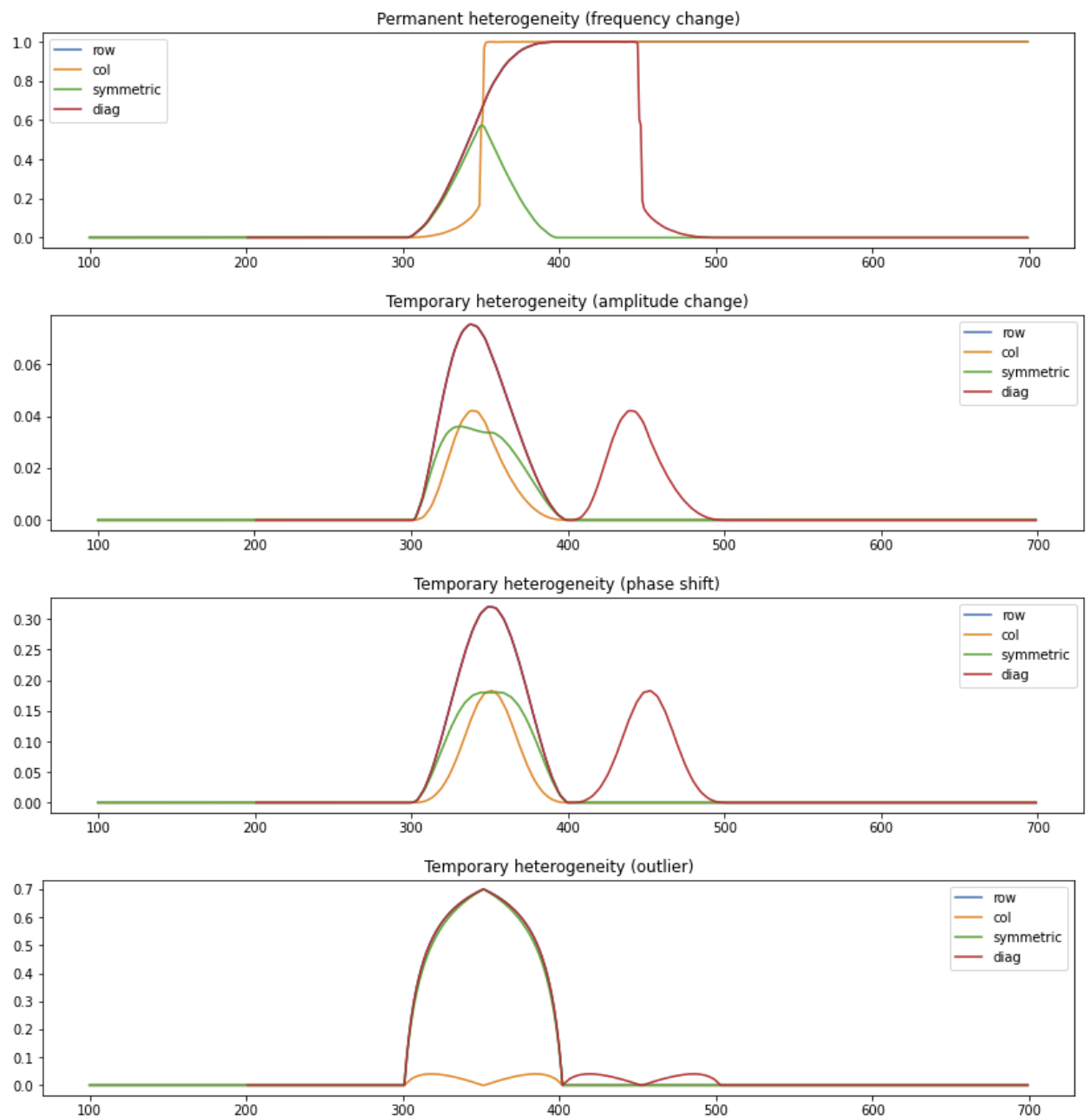


Рис. 4.2. Функции неоднородности рядов без шума.

Таблица 4.2. Характеристики функций неоднородности для постоянной разладки ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	328	328	$n_{overcome}$	350	350
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0428	0.0428	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.0028	0.0028
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1468	0.1468	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.0140	0.0140
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.2962	0.2962	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.0385	0.0385
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	329	329	$n_{overcome}$	327	327
$D_Q^{(s)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.0402	0.0402	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0428	0.0428
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.1354	0.1354	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1468	0.1468
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.2706	0.2706	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.2962	0.2962

Таблица 4.3. Характеристики функций неоднородности для временной разладки ($C_1 \neq C_2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	330	330	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0186	0.0186	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.0491	0.0491	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.0703	0.0703	$D_{Q+30}^{(c)}$		
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$			$n_{overcome}$	327	326
$D_Q^{(s)}$			$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$			$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0186	0.0186
$D_{Q+20}^{(s)}$			$D_{Q+20}^{(d)}$	0.0491	0.0491
$D_{Q+30}^{(s)}$			$D_{Q+30}^{(d)}$	0.0703	0.0703

Таблица 4.4. Характеристики функций неоднородности для временной разладки ($\phi_1 \neq \phi_2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	334	333	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0008	0.0008	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0392	0.0392	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1215	0.1215	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.2161	0.2161	$D_{Q+30}^{(c)}$		
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$			$n_{overcome}$	332	331
$D_Q^{(s)}$			$D_Q^{(d)}$	0.0008	0.0008
$D_{Q+10}^{(s)}$			$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0392	0.0392
$D_{Q+20}^{(s)}$			$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1215	0.1215
$D_{Q+30}^{(s)}$			$D_{Q+30}^{(d)}$	0.2161	0.2161

Таблица 4.5. Характеристики функций неоднородности для временной разладки (выброс).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	306	306	$n_{overcome}$		
$D_Q^{(r)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(c)}$		
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.4012	0.4012	$D_{Q+10}^{(c)}$		
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.5470	0.5470	$D_{Q+20}^{(c)}$		
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.6223	0.6223	$D_{Q+30}^{(c)}$		
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$n_{overcome}$	306	306	$n_{overcome}$	305	305
$D_Q^{(s)}$	0.0000	0.0000	$D_Q^{(d)}$	0.0000	0.0000
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.3806	0.3806	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.4012	0.4012
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.5288	0.5288	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.5470	0.5470
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.6101	0.6101	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.6223	0.6223

В таблицах 4.3, 4.4 и 4.5 можно заметить пустые элементы, которые соответствуют ситуациям, когда рассматриваемая функция неоднородности не смогла преодолеть

соответствующее промоделированное значение из таблицы 4.1.

По таблицам 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 можем сделать вывод, что строковая $d_{n-1}^{(r)}$ и диагональная $d_{n-1}^{(d)}$ функции неоднородности более устойчивые к шуму ϵ , возрастают сильнее, однако $d_{n-1}^{(d)}$ раньше преодолевает промоделированное значение, что значит и более раннее обнаружение разладки.

4.3.2. Ряды с шумом

Возьмем те же параметры ряда, что и в предыдущем примере, однако к ряду добавим шум $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma = 0.5$.

Для ряда с временной разладкой, заданной изменением амплитуды ($C_1 \neq C_2$), зададим дисперсию шума до разладки как $\frac{\sigma^2}{2}$, чтобы шум ϵ был пропорционален амплитуде ряда, так как в противном случае, сила шума не позволит корректно определить базис пространства \mathfrak{L}_τ .

Для оценки функций неоднородности будем моделировать реализации шума во временных рядах и подсчитывать количество преодолений $\#n_{overcome}$, на основе которых будем считать средний момент преодоления значений $n_{overcome}$ из таблицы 4.1.

Временные ряды и их функции неоднородности изображены на Рис. 4.3 и Рис. 4.4 соответственно.

Полученные результаты тестирования функций разладки на рядах с шумом приведены в таблицах 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

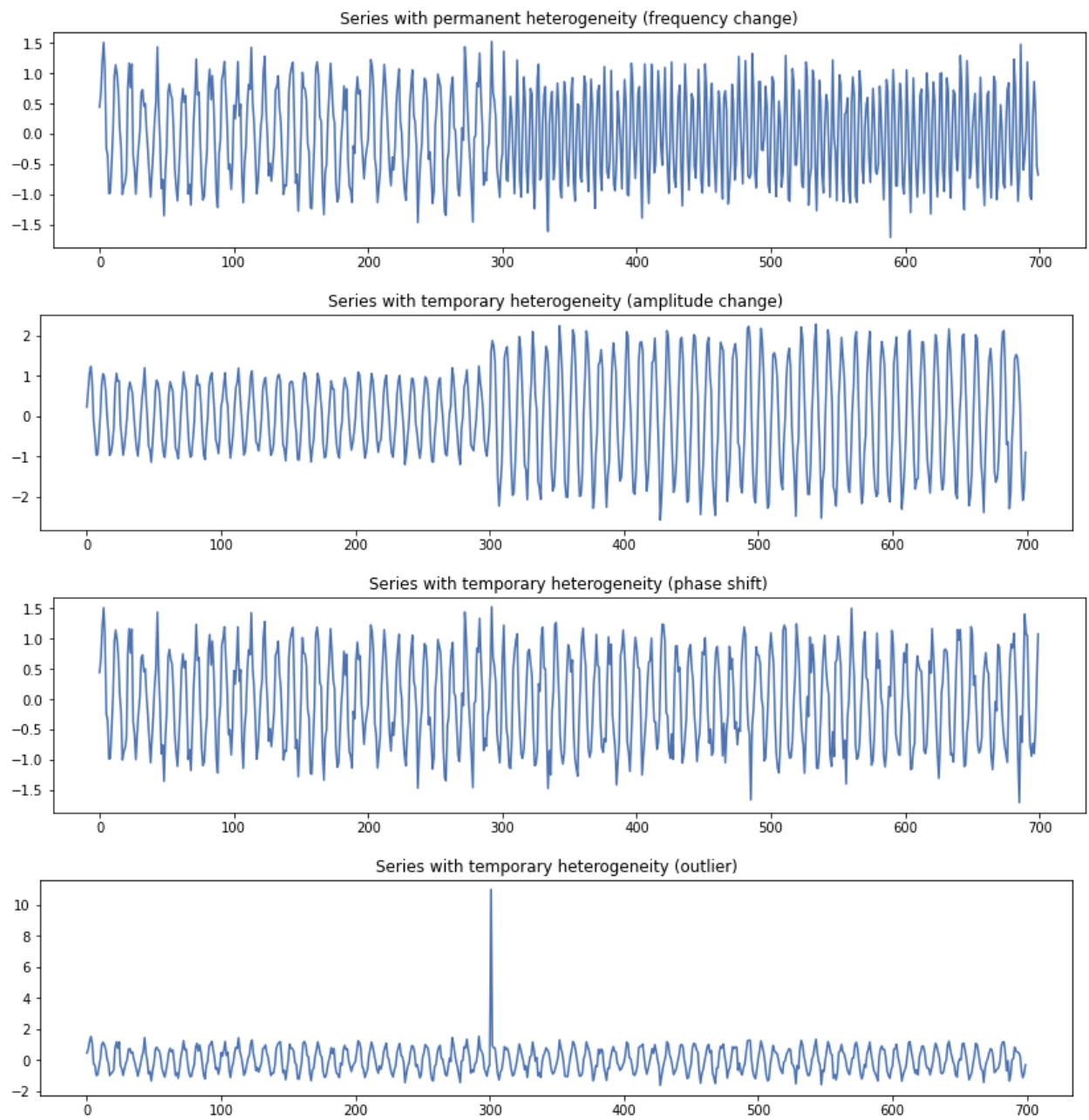


Рис. 4.3. Временные ряды с шумом.

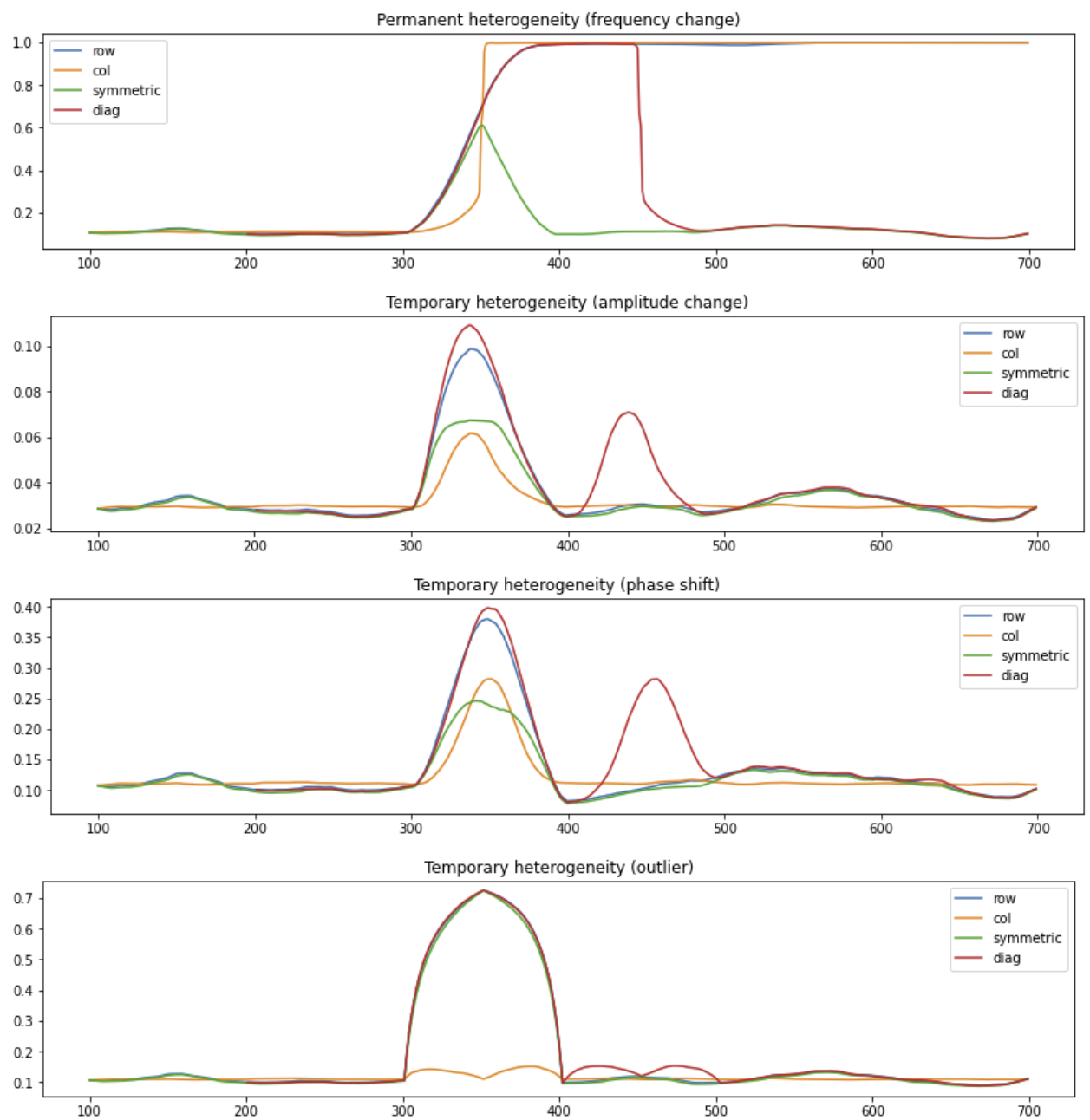


Рис. 4.4. Функции неоднородности рядов с шумом.

Таблица 4.6. Характеристики функций неоднородности для постоянной разладки с шумом ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.36	311.71	$n_{overcome}$	315.69	315.32
$D_Q^{(r)}$	0.1949	0.1949	$D_Q^{(c)}$	0.1979	0.1979
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.2308	0.2308	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2010	0.2010
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.3148	0.3148	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2140	0.2140
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.4345	0.4345	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2379	0.2379
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.91	312.165	$n_{overcome}$	309.195	308.79
$D_Q^{(s)}$	0.1903	0.1903	$D_Q^{(d)}$	0.1950	0.1950
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.2234	0.2234	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.2283	0.2283
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.2976	0.2976	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.3056	0.3056
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.4044	0.4044	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.4210	0.4210

Таблица 4.7. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом ($_1 \neq _2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	308.475	308.03	$n_{overcome}$	309.07	308.88
$D_Q^{(r)}$	0.0564	0.0564	$D_Q^{(c)}$	0.0578	0.0578
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.0768	0.0768	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.0612	0.0612
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.1028	0.1028	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.0735	0.0735
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.1181	0.1181	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.0861	0.0861
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	311.14	309.94	$n_{overcome}$	305.64	305.34
$D_Q^{(s)}$	0.0551	0.0551	$D_Q^{(d)}$	0.0564	0.0564
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.0723	0.0723	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.0789	0.0789
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.0868	0.0868	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.1095	0.1095
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.0900	0.0900	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.1284	0.1284

Таблица 4.8. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом ($\phi_1 \neq \phi_2$).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	312.08	311.395	$n_{overcome}$	310.81	310.52
$D_Q^{(r)}$	0.1994	0.1994	$D_Q^{(c)}$	0.1997	0.1997
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.2313	0.2313	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2053	0.2053
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.2978	0.2978	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2312	0.2312
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.3672	0.3672	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2790	0.2790
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	313.8	312.815	$n_{overcome}$	308.79	308.355
$D_Q^{(s)}$	0.1948	0.1948	$D_Q^{(d)}$	0.1993	0.1993
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.2217	0.2217	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.2277	0.2277
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.2671	0.2671	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.2874	0.2874
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.3009	0.3009	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.3599	0.3599

Таблица 4.9. Характеристики функций неоднородности для временной разладки с шумом (выброс).

Row	meanMax	95 procentile	Col	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	180	181
$n_{overcome}$	302.25	302.185	$n_{overcome}$	311.2389	311.0663
$D_Q^{(r)}$	0.1982	0.1982	$D_Q^{(c)}$	0.2050	0.2049
$D_{Q+10}^{(r)}$	0.4814	0.4814	$D_{Q+10}^{(c)}$	0.2318	0.2316
$D_{Q+20}^{(r)}$	0.5929	0.5929	$D_{Q+20}^{(c)}$	0.2334	0.2333
$D_{Q+30}^{(r)}$	0.6555	0.6555	$D_{Q+30}^{(c)}$	0.2268	0.2266
Sym	meanMax	95 procentile	Diag	meanMax	95 procentile
$\#n_{overcome}$	200	200	$\#n_{overcome}$	200	200
$n_{overcome}$	302.31	302.275	$n_{overcome}$	301.845	301.795
$D_Q^{(s)}$	0.1935	0.1935	$D_Q^{(d)}$	0.1980	0.1980
$D_{Q+10}^{(s)}$	0.4619	0.4619	$D_{Q+10}^{(d)}$	0.4855	0.4855
$D_{Q+20}^{(s)}$	0.5760	0.5760	$D_{Q+20}^{(d)}$	0.5971	0.5971
$D_{Q+30}^{(s)}$	0.6440	0.6440	$D_{Q+30}^{(d)}$	0.6598	0.6598

По результатам видим что в среднем, диагональная функция неоднородности $d_{n-1}^{(d)}$ раньше обнаруживает разладку среди остальных трех, при этом, уступая в скорости возрастания строковой в примерах с постоянной ($\omega_1 \neq \omega_2$) и временной (выброс) разладками.

4.3.3. Выводы

Таблица 4.10. Средние значения характеристик функций обнаружения.

Row	meanMax	95 percentile
$Mean(\#n_{overcome})$	200	200
$Mean(n_{overcome})$	308.791	308.330
$Mean(\ [D_Q^{(r)}, D_{Q+10}^{(r)}, D_{Q+20}^{(r)}, D_{Q+30}^{(r)}] \ _{l_2})$	0.597	0.597
Col	meanMax	95 percentile
$Mean(\#n_{overcome})$	195	195.25
$Mean(n_{overcome})$	311.702	311.447
$Mean(\ [D_Q^{(c)}, D_{Q+10}^{(c)}, D_{Q+20}^{(c)}, D_{Q+30}^{(c)}] \ _{l_2})$	0.370	0.370
Sym	meanMax	95 percentile
$Mean(\#n_{overcome})$	200	200
$Mean(n_{overcome})$	310.040	309.299
$Mean(\ [D_Q^{(s)}, D_{Q+10}^{(s)}, D_{Q+20}^{(s)}, D_{Q+30}^{(s)}] \ _{l_2})$	0.558	0.558
Diag	meanMax	95 percentile
$Mean(\#n_{overcome})$	200	200
$Mean(n_{overcome})$	306.368	306.070
$Mean(\ [D_Q^{(d)}, D_{Q+10}^{(d)}, D_{Q+20}^{(d)}, D_{Q+30}^{(d)}] \ _{l_2})$	0.595	0.595

Явными фаворитами (таблица 4.10) являются строковая $d_{n-1}^{(r)}$ и диагональная $d_{n-1}^{(d)}$ функции неоднородности. Они обе показывают превосходство над столбцовой $d_{n-1}^{(c)}$ и симметричной $d_{n-1}^{(s)}$ в устойчивости к шуму ϵ , моментом обнаружения разладки $n_{overcome}$ и скорости возрастания значений $[D_Q, D_{Q+10}, D_{Q+20}, D_{Q+30}]$ после момента нарушения однородности Q .

Глава 5

Аналитическая оценка индекса неоднородности при изменении частоты гармоник

Рассмотрим ряд $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$, причем

$$f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \in [0, Q-1] \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \in [Q, N-1] \end{cases}$$

Обозначим

$$F^{(1)} = f_n^{(1)}|_{n=0}^B, \quad B \in [0, Q-1],$$

$$F^{(2)} = f_n^{(2)}|_{n=Q}^{Q+T-1}, \quad T \in [Q, N-Q-1],$$

$$X_l^{(2)} = (f_l^{(2)}, \dots, f_{l+L-1}^{(2)})^T, \quad 0 \leq l < K_2$$

В соответствии с формулой (2.1), индекс неоднородности задается как:

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = 1 - \frac{\sum_{l=0}^{K_2-1} \sum_{i=0}^{r-1} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=0}^{K_2-1} \|X_l^{(2)}\|^2}$$

Для простоты зададим амплитуды $C_1 = C_2 = 1$.

Попробуем аналитически упростить данную формулу, чтобы явно увидеть, как разности частот ряда до и после разладки влияют на значения g .

5.1. Отношение

5.1.1. Знаменатель

Начнем со знаменателя $\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2$, а точнее, с квадрата нормы $\|X_l^{(2)}\|^2$. Оценим его:

$$\|X_l^{(2)}\|^2 = \sum_{i=1}^L (X_l^{(2)})_i^2 \approx \int_0^L \sin^2(2\pi\omega_2 y + \psi_l) dy = \frac{L}{2} - \frac{\sin(4\pi L\omega_2 + \psi_l) - \sin(2\psi_l)}{8\pi\omega_2} \approx \frac{L}{2},$$

где ψ_l формируется из ϕ_2 и сдвига, порождаемого номером вектора вложения.

$$\text{Отсюда } \sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2 \approx K_2 \cdot \frac{L}{2}.$$

5.1.2. Числитель

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2 &= \sum_{l=1}^{K_2} \left(\langle X_l^{(2)}, U_1^{(1)} \rangle^2 + \langle X_l^{(2)}, U_2^{(1)} \rangle^2 \right) = \\ &= \sum_{l=1}^{K_2} \left[\left(\sum_{j=1}^L (X_l^{(2)})_j \cdot (U_1^{(1)})_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^L (X_l^{(2)})_j \cdot (U_2^{(1)})_j \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Рассмотрим $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$. В силу задания ряда, базисом $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$ пространства $\mathfrak{L}_r^{(1)}$, порожденного элементами $f_n^{(1)} = \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1)$ являются некие нормированные $\sin(2\pi\omega_1 n + \psi)$ и $\cos(2\pi\omega_1 n + \psi)$.

Пусть $p_1 = \sin(2\pi\omega_1 n + \psi)$, $p_2 = \cos(2\pi\omega_1 n + \psi)$. Вычислим нормы p_1 и p_2 для поиска $U_1^{(1)}$ и $U_2^{(1)}$. По аналогии со знаменателем индекса неоднородности (п. 5.1.1.), $\|p_1\| = \|p_2\| \approx \sqrt{\frac{L}{2}}$, откуда $U_1^{(1)} = \frac{\sin(2\pi\omega_1 n + \psi)}{\sqrt{L/2}}$, $U_2^{(1)} = \frac{\cos(2\pi\omega_1 n + \psi)}{\sqrt{L/2}}$.

Пусть

$$\begin{aligned} I_l &= \left(\sum_{j=1}^L (X_l^{(2)})_j \cdot (U_1^{(1)})_j \right)^2 \\ J_l &= \left(\sum_{j=1}^L (X_l^{(2)})_j \cdot (U_2^{(1)})_j \right)^2 \\ a &= \omega_1 + \omega_2, \quad b = \omega_1 - \omega_2 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_l &\approx \left(\int_0^L \sin(2\pi\omega_2 y + \psi_l) \cdot \frac{\sin(2\pi\omega_1 y + \psi)}{\sqrt{L/2}} dy \right)^2 = \\ &= \frac{2}{L} \left(\int_0^L \sin(2\pi\omega_2 y + \psi_l) \cdot \sin(2\pi\omega_1 y + \psi) dy \right)^2 = \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{\sin(2\pi Lb + \psi - \psi_l) - \sin(\psi - \psi_l)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La + \psi + \psi_l) - \sin(\psi + \psi_l)}{4\pi a} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 \\ J_l &\approx \left(\int_0^L (\sin(2\pi\omega_2 y + \psi_l) \cdot \frac{\cos(2\pi\omega_1 y + \psi)}{\sqrt{L/2}}) dy \right)^2 = \\ &= \frac{2}{L} \left(\int_0^L (\sin(2\pi\omega_2 y + \psi_l) \cdot \cos(2\pi\omega_1 y + \psi)) dy \right)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{L} \left(\frac{\cos(2\pi Lb + \psi - \psi_l) - \cos(\psi - \psi_l)}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La + \psi + \psi_l) - \cos(\psi + \psi_l)}{4\pi a} \right)^2 = \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{\cos(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2
\end{aligned}$$

Получили, что числитель в индексе неоднородности не зависит от фаз ψ_l и ψ . Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{K_2} \sum_{i=1}^r \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2 \approx K_2 \cdot [I_l + J_l] = \\
&= \frac{K_2 \cdot 2}{L} \cdot \left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

5.2. Индекс неоднородности

Собирая все вместе, получаем:

$$\begin{aligned}
g(F^{(1)}; F^{(2)}) &= 1 - \frac{\sum_{l=0}^{K_2-1} \sum_{i=0}^{r-1} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum_{l=0}^{K_2-1} \|X_l^{(2)}\|^2} \approx \\
&\approx 1 - \frac{\frac{K_2 \cdot 2}{L} \cdot \left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 \right]}{K_2 \cdot \frac{L}{2}} = \\
&= 1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi Lb)}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi La)}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}} \tag{5.1}
\end{aligned}$$

5.3. Проверка точности аппроксимации

При сравнении индекса неоднородности, вычисленного классическим способом и аналитически упрощенным, результаты оказались довольно похожи, причем при $L \rightarrow \infty$ оба значения сходятся друг к другу. Все тесты доступны в **гитхаб** репозитории в файле **Analytical.ipynb**.

5.3.1. Предположения об L

Пусть $N = 700$, $Q = 301$, $B = 100$, $T = 100$.

Зададим $w_1 = \frac{1}{10}$, $w_2 = \frac{1}{10}$, $L = 60$. При одинаковых частотах значения индексов неоднородности должны быть равны 0, что на практике и получили.

При $w_2 = \frac{1}{20}$, после разладки классический способ дал результат 1.0, в то время как вычисление по формуле (5.1) показало похожий, но не абсолютно точный результат, равный 0.998749, причем увеличив L до 80, получили 0.999296, а уменьшив L до 60 получаем 0.997186. Значения близки друг к другу и наблюдается эмпирическое подтверждение предположения о зависимости значений аналитической формулы (5.1) от величины L .

Пусть $\omega_2 = \frac{1}{11}$. В таблице 5.1 показаны значения индексов неоднородности при разных L .

Таблица 5.1. Зависимость значений индекса неоднородности, вычисленного классическим g_c и аналитически упрощенным g_a способами от величины L .

L	g_c	g_a
50	0.665933	0.921490
80	0.890753	0.947625
90	0.955854	0.959715

Чтобы наглядно продемонстрировать стремление значений друг к другу, посмотрим на Рис. 5.1.

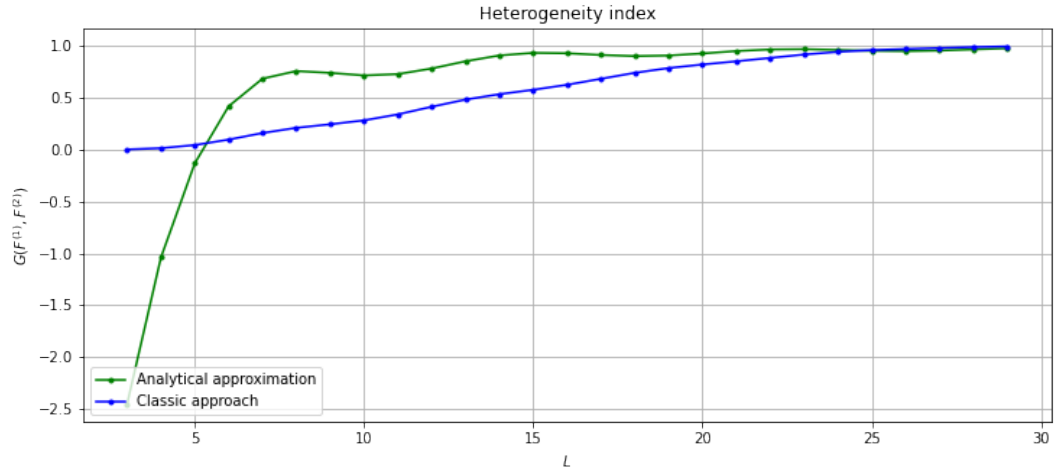


Рис. 5.1. Зависимость индексов g_c и g_a от L .

Исходя из кривых на Рис. 5.1, аналитический подход при слишком маленьких L работает не так, как мы бы того хотели. Однако, можно заметить, что и классический подход также дает неправильные результаты, начиная переходить к 1 при $L > 4$.

Приведенные выше эксперименты подтверждают что при достаточно больших L аппроксимация индекса неоднородности выведенной аналитической формулой (5.1) точна.

5.3.2. Разность ω_1 и ω_2

Утверждение 1. *Чем сильнее разница ω_1 и ω_2 , тем проще определить разладку.*

Смысл данного утверждения в том, что чем сильнее разница ω_1 и ω_2 , тем лучше быстрее индекс неоднородности g переходит в 1.

Проверим это, начав с краевых значений a и b .

Пусть $\omega_1 \geq \omega_2$.

Значения $a \in [\omega_1; 2\omega_1]$, $b \in [0; \omega_1]$, причем при $a = 2\omega_1$, $b = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1$. Тогда

$$g = 1 - \frac{\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(4\pi L\omega_1)}{8\pi\omega_1} + \frac{\omega_2}{2\pi\omega_1^2}\right)^2}{\frac{L^2}{4}} \approx 1 - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{L^2}{4}} = 1 - 1 = 0$$

При проверке данного предположения, получились значения $g_c = 0.0$, $g_a = 3.330669e-16$.

Если $a = \omega_1$, $b = \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = 0$, тогда

$$I_l = 0, J_l = 0 \Rightarrow g = 1 - 0 = 1.$$

При проверке получили $g_c = 1.0$, $g_a = 1.0$.

Посмотрим на график зависимости g от ω_2 при фиксированном $\omega_1 = \frac{1}{10}$.

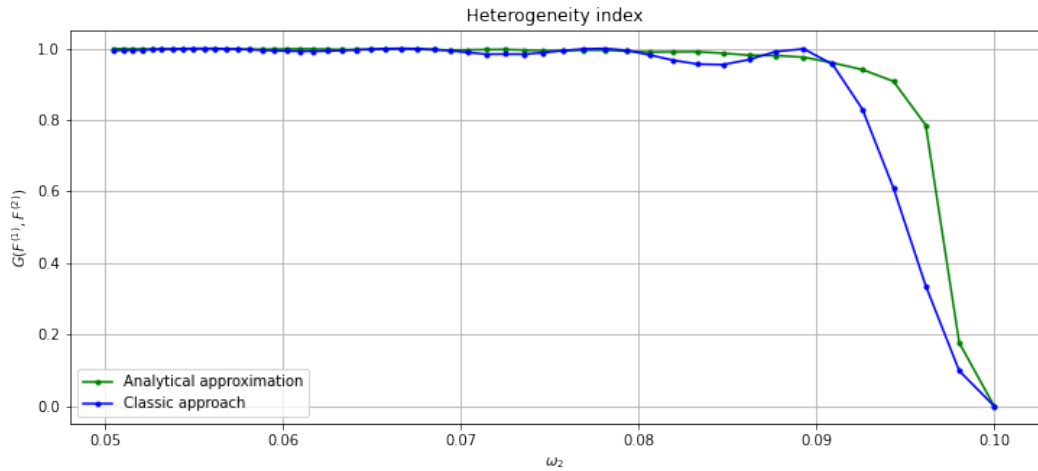


Рис. 5.2. Зависимость индексов g_c и g_a от ω_2 .

По кривым на Рис. 5.2 видим, что аналитический подход при стремлении частот друг к другу начинает позже и более быстро убывать, что говорит о более точном обнаружении неоднородности, по сравнению с классическим подходом.

Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема отсутствия функционала по построению матриц разладки в конкретном роде задач. Был описан инструментарий, решающий описанную проблему, а также приведены его результаты тестирования и оценка скорости работы.

Помимо этого были рассмотрены и сравнены функции обнаружения неоднородности в синусоидальных временных рядах с неоднородностями, заданными изменением частоты, амплитуды, фазовым сдвигом и выбросом.

Список литературы

1. Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of time series structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC.