

## «Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Кононыхин Иван Александрович, группа 20.M03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.  
Рецензент: Лектор, Университет Кардиффа (Великобритания),  
Пепелышев А.Н.



Санкт-Петербург  
2022г.

**Однородный ряд** — ряд с постоянной структурой. **Разладка** — нарушение структуры ряда.

**Задача обнаружения разладки:** Определить момент изменения структуры ряда. Структура — подпространство сигнала.

**Метод:** Превышение порога функцией обнаружения неоднородности, основанной на разнице структур скользящих отрезков ряда.

**Временной ряд:**

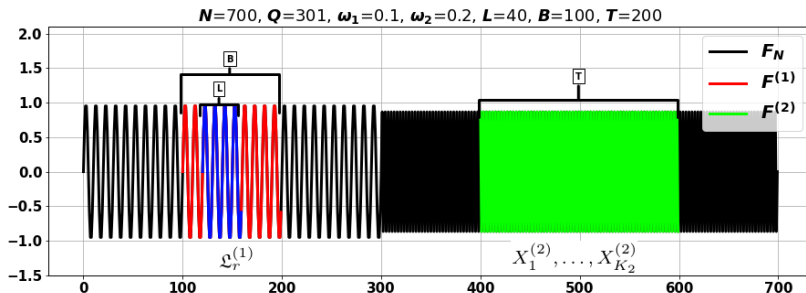
$$F_N = (f_1, \dots, f_N), \text{ где } f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$$

$Q$  — неизвестный момент возмущения.

**Цель работы:** Создание системы, которая:

- 1 Определяет разладку, заданную изменением частоты.
- 2 Автоматически выбирает порог срабатывания.
- 3 Сообщает о моменте возмущения с заданным значением максимально допустимого запаздывания.

Параметры:  $L, B, T, r = 2$ .



Индекс неоднородности (Golyandina, Nekrutkin, Zhigljavsky, Analysis of Time Series Structure — SSA and Related Techniques, 2001):

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum_{l=1}^{K_2} \text{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathcal{L}_r^{(1)})}{\sum_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

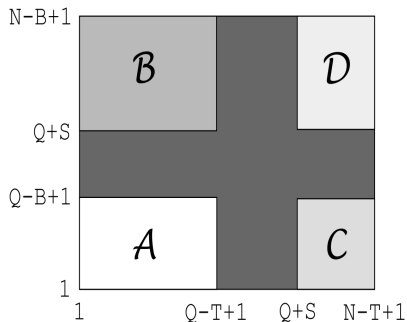


Рис.: Матрица неоднородности

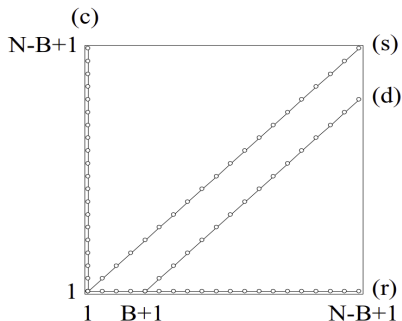


Рис.: Функции обнаружения неоднородности.  $B = T$ .

## Обозначения функций обнаружения неоднородности:

- 1 Строковая:  $d_n^{(r)}$
- 2 Столбцовая:  $d_n^{(c)}$
- 3 Диагональная:  $d_n^{(d)}$
- 4 Симметричная:  $d_n^{(s)}$

**Задача:** Сравнить функции обнаружения неоднородности для разных видов разладки.

**Ряд:**  $F_N = (f_1, \dots, f_N)$ , где  $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q, \end{cases}$

**Задание неоднородности ряда  $F_N$ :**

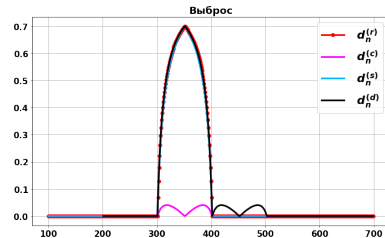
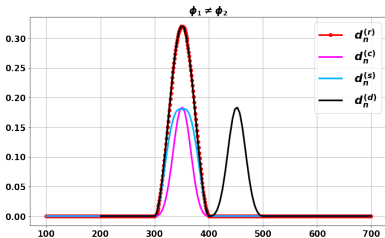
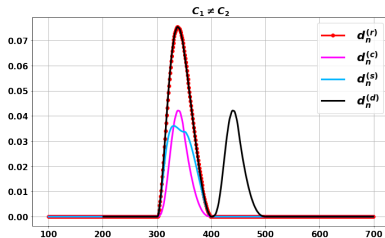
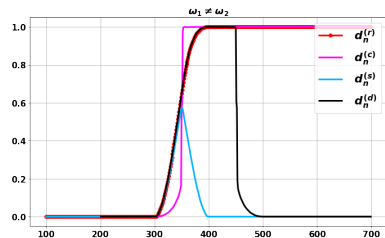
- ❶ Изменение частоты:  $\omega_1 = \frac{1}{10}, \omega_2 = \frac{1}{5}, C_1 = C_2 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0$ .
- ❷ Изменение амплитуды:  $C_1 = 1, C_2 = 2, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{10}, \phi_1 = \phi_2 = 0$ .
- ❸ Фазовый сдвиг:  $\phi_1 = 0, \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{10}, C_1 = C_2 = 1$ .
- ❹ Выброс:  $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \neq Q, \\ 10 \cdot C_1, & n = Q. \end{cases}$

**Параметры:**

- ❶  $N = 700$ .
- ❷  $Q = 301$ .
- ❸  $L = 60$ .
- ❹  $B = T = 100$ .

# Часть 1. Сравнение функций обнаружения

$N = 700$ ,  $Q = 301$ ,  $\omega_1 = 0.1$ ,  $\omega_2 = 0.2$ ,  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $L = 60$ ,  $B = T = 100$



**Вывод:** Лучшие — строковая  $d_{n-1}^{(r)}$  и диагональная  $d_{n-1}^{(d)}$  функции обнаружения.

## Часть 2. Аппроксимация значения индекса неоднородности после переходного интервала

**Ряд:**  $F_N = (f_1, \dots, f_N)$ , где  $f_n = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n < Q, \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \geq Q. \end{cases}$

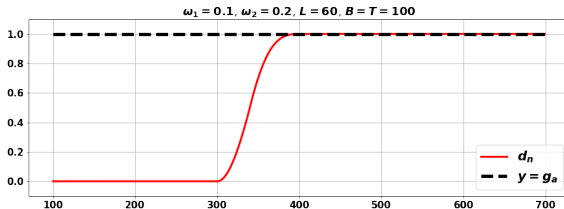
**Параметры ряда:**  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,  $C_1 = C_2 = 1$ .

**Задача:** Аппроксимировать индекс неоднородности  $g(F^{(1)}; F^{(2)})$ ,  $F^{(1)}$  лежит до  $Q$ ,  $F^{(2)}$  после.

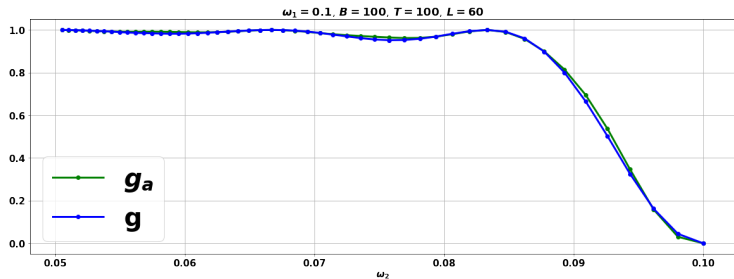
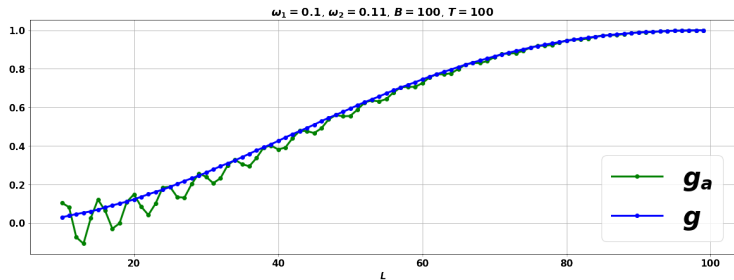
**Результат:**

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) \approx g_a(\omega_1, \omega_2) = 1 - \frac{\left[ \left( \frac{\sin(2\pi L b)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi L a)}{4\pi a} \right)^2 + \left( \frac{\cos(2\pi L b) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi L a) - 1}{4\pi a} \right)^2 \right]}{\frac{L^2}{4}},$$

при больших  $L$  и  $K_2$ , где  $a = \omega_1 + \omega_2$ ,  $b = \omega_1 - \omega_2$ .



## Часть 2. Точность аппроксимации





При достаточно маленьком значении  $L$  по отношению к  $T$  переходный интервал становится линейным.

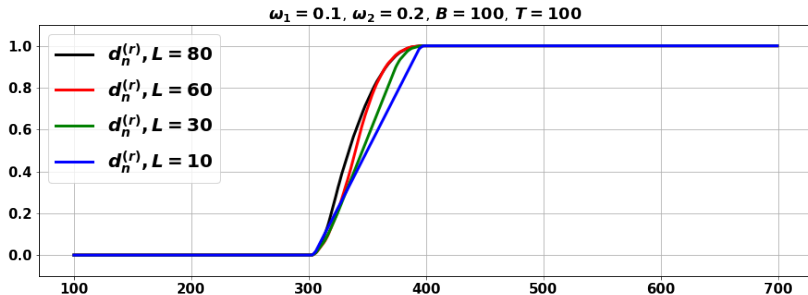


Рис.: Линейность переходного интервала при большом значении  $T - L$ .

**Задача:** Обнаружить разладку на интервале от  $Q$  до  $Q + k$ , где  $Q$  — неизвестный момент возмущения, а  $k$  — максимально допустимое запаздывание.

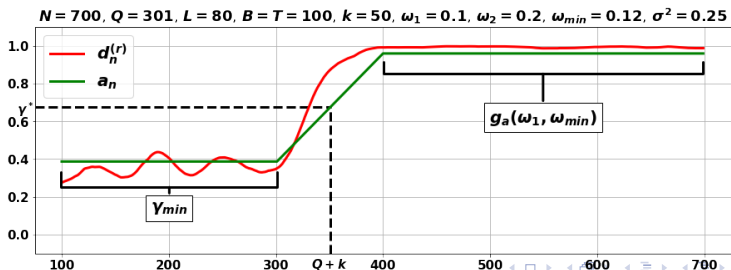
**Подход:**  $d_n^{(r)} > \gamma^* \rightarrow$  **сигнал** о разладке в момент  $\hat{Q}$ .

**Ограничение:**  $\Delta_{min} : |\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta_{min}$ . Обозначим  $\omega_{min} = \omega_1 + \Delta_{min}$ .

**Описание системы:**

- 1 Входные данные:  $F_N$ ,  $k$ ,  $\Delta_{min}$ .
- 2 Результат:  $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$ .

**Как выбрать  $\gamma^*$ ?** Значение в точке  $k$  аппроксимации переходного интервала функции  $d_n^{(r)}$ .



### Характеристики системы:

- $FP(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} < Q$ .
- $TP(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} \in [Q, Q + k]$ .
- $FN(\gamma^*)$  при  $\hat{Q} > Q + k$ .

Промоделируем  $n_{iter} = 200$  раз реализацию шума  $\epsilon$  и на каждой итерации посчитаем характеристики системы.

### Вероятности обнаружения:

- $FPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $TPR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} TP_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$
- $FNR(\gamma^*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{iter}} FN_i(\gamma^*)}{n_{iter}}.$

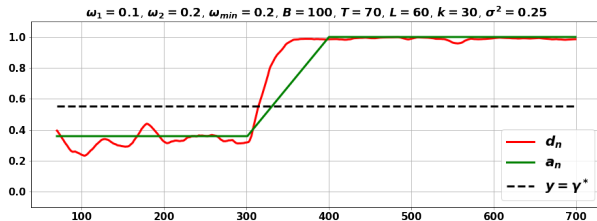


Рис.: Функция обнаружения неоднородности.  $T - L = 10$ .

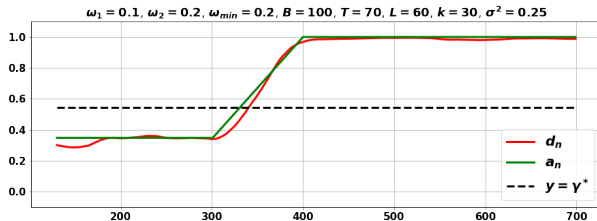


Рис.: Функция обнаружения неоднородности.  $T - L = 70$ .

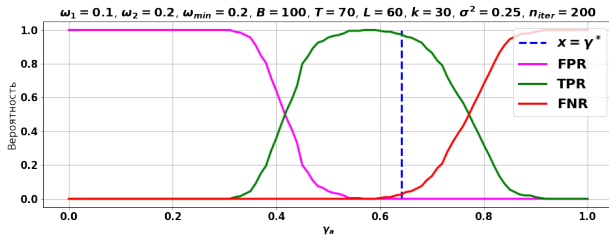


Рис.: Работы системы. Оценка,  $T - L = 10$ .

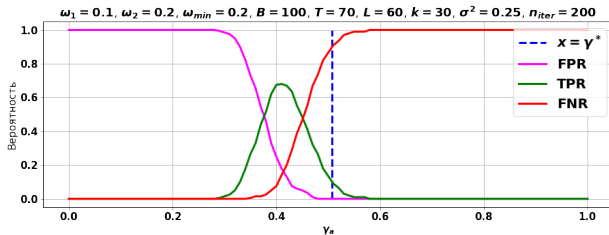


Рис.: Работы системы. Оценка,  $T - L = 70$ .

**Параметры тестирования:**  $N = 800, Q = 301, \omega_1 = \frac{1}{10}, \Delta_{min} = \frac{1}{50}, \sigma = 0.5, B = 133, T = 79, L = 71, C_1 = C_2 = 1, \phi_1 = \phi_2 = 0.$

**Таблица:** Результаты тестирования.

**Таблица:**  $k = 30$

$\omega_2$	$FPR$	$TPR$	$FNR$
1/3	0.0	0.99	0.01
1/4	0.0	0.98	0.02
1/5	0.0	0.99	0.01
1/6	0.0	0.995	0.005
1/7	0.0	0.945	0.055
1/8	0.0	0.855	0.145
1/9	0.0	1.0	0.0

**Таблица:**  $k = 15$

$\omega_2$	$FPR$	$TPR$	$FNR$
1/3	0.040	0.745	0.215
1/4	0.040	0.745	0.215
1/5	0.040	0.720	0.240
1/6	0.040	0.820	0.140
1/7	0.040	0.340	0.660
1/8	0.040	0.920	0.040
1/9	0.050	0.950	0.000

**Выводы:** При большом  $k$  система работает хорошо, но аппроксимация нуждается в доработке.