Научная и компьютерная коммуникация в современных условиях

«Обнаружение разладки с помощью метода SSA»

Кононыхин Иван Александрович

группа 20.М03-мм
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

2022

Введение в теорию

Основные обозначения

Обозначения

$F^{(1)} = F^{(1)}_{N_1}$, $F^{(2)} = F^{(2)}_{N_2}$ - временные ряды.
$L : 2 \leq L \leq \min(N_1 - 1, N_2)$ - длина окна.
$U^{(1)}_l, l = 1, \dots, L$ — собственные векторы траекторной матрицы ряда $F^{(1)}$
$\mathfrak{L}^{(L,1)}$ — линейное пространство, натянутое на L—сдвинутые векторы ряда $F^{(1)}$, $d \stackrel{\text{def}}{=} dim\ \mathfrak{L}^{(L,1)}$
$I = \{i_1, \dots, i_r\}$ — подмножество $\{1, \dots, L\}$
$\mathfrak{L}^{(1)}_r \stackrel{\text{def}}{=} span(U^{(1)}_l, l \in I)$
$X^{(2)}_1, \dots, X^{(2)}_{K_2}$ — L-сдвинутые векторы ряда $F^{(2)}$

Индекс неоднородности

Определение

Индекс неоднородности:

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \operatorname{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \left(\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)}\rangle^2\right)}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} =$$

$$= 1 - \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)}\rangle^2}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

Индекс неоднородности характеризует несоответствие между рядом $F^{(2)}$ и структурой ряда $F^{(1)}$ (описываемого подпространством $\mathfrak{L}_r^{(1)}$). $g \in [0, 1]$.

Обозначения

$F_N : F_N = (f_0, \dots, f_{N-1}), N > 2$ — исходный временной ряд;
$F_{i,j}$ — подряды ряда $F_N : F_{i,j} = (f_i, \dots, f_j),\ 0 \leq i < j \leq N-1$;
B — длина базовых подрядов ряда $F_N : B > L$;
T — длина тестовых подрядов ряда $F_N : T \geq L$;
$F_{i,i+B-1}$ — Базовый подряд.
$F_{j,j+T-1}$ — Тестовый подряд.

Строковая функция обнаружения неоднородности

Определение

Ряд $D_{T,N}^{(r)}$, элементы которого задаются как

$$d_{n-1}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} g(F_{1,B};\ F_{n-T+1,n}), \quad T \leq n \leq N.$$

есть **строковая функция обнаружения**.

Аналитическая оценка индекса неоднородности при изменении частоты гармоники

Постановка задачи

Задача

Попробуем аналитически упростить индекс неоднородности g, чтобы явно увидеть, как разности частот ряда до и после разладки влияют на его значения.

Рассмотрим ряд

$$F_N = \begin{cases} C_1 \sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \in [0, Q-1], \\ C_2 \sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \in [Q, N-1]. \end{cases}$$

Пусть $\omega_1 \neq \omega_2$; $C_1 = C_2$. Для простоты зададим амплитуды $C_1 = C_2 = 1$.

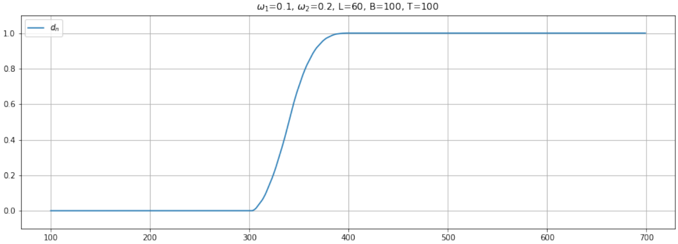
Индекс неоднородности

$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \mathrm{dist}^2(X_l^{(2)}, \mathfrak{L}_r^{(1)})}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \left(\|X_l^{(2)}\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2\right)}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2} =$$

$$= 1 - \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum\limits_{l=1}^{K_2} \|X_l^{(2)}\|^2}.$$

Индекс неоднородности: аппроксимация

Пусть $F^{(1)}$ - часть ряда F_N при $n < Q$, а $F^{(2)}$, при $n >= Q$.



$$g(F^{(1)}; F^{(2)}) = 1 - \frac{\sum\limits_{l=0}^{K_2-1} \sum\limits_{i=0}^{r-1} \langle X_l^{(2)}, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum\limits_{l=0}^{K_2-1} \|X_l^{(2)}\|^2} \approx$$

$$1 - \frac{\left[\left(\frac{\sin(2\pi L b)}{4\pi b} - \frac{\sin(2\pi L a)}{4\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\cos(2\pi L b) - 1}{4\pi b} - \frac{\cos(2\pi L a) - 1}{4\pi a}\right)^2\right]}{\frac{L^2}{4}} = g_a(\omega_1, \omega_2),$$

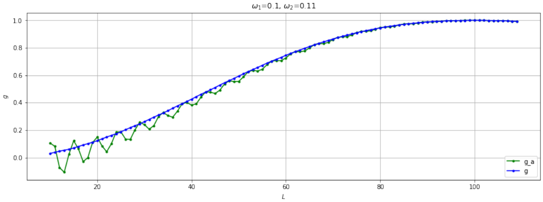
где $a = \omega_1 + \omega_2$, $b = \omega_1 - \omega_2$.

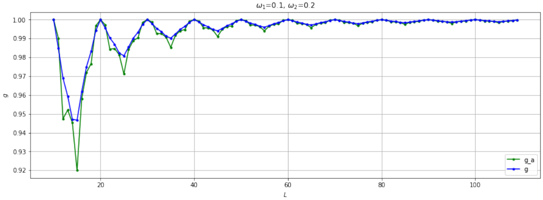
Проверка точности аппроксимации: изменения L

Зададим параметры:

$N = 700,\ Q = 301,\ B = 200,\ T = 200$

Зафиксируем частоты и будем изменять L.





Система обнаружения структурной неоднородности ряда с автоматически выстраиваемым порогом срабатывания на основе выведенной аналитической формулы.

Постановка задачи

Рассмотрим ряд

$$F_N = \begin{cases} C\sin(2\pi\omega_1 n + \phi_1), & n \in [0, Q-1], \\ C\sin(2\pi\omega_2 n + \phi_2), & n \in [Q, N-1], \end{cases}$$

где Q — момент возмущения.

Система:

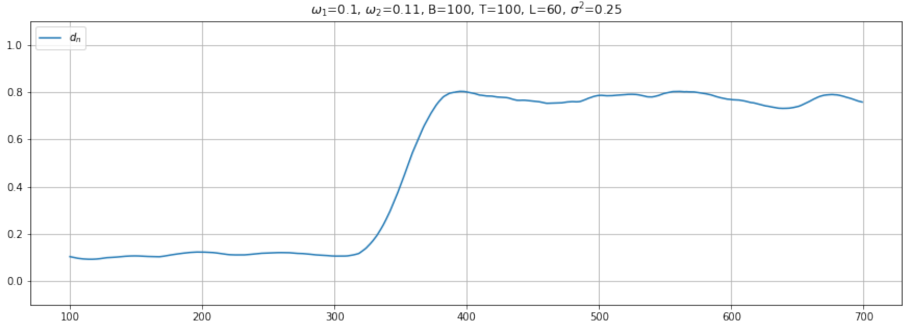
- Вход:
  1. F_N;
  2. k — длина интервала, за который нужно определить момент возмущения $\hat{Q}$.
- Выход:
  1. $\hat{Q}$ — момент обнаружения неоднородности.
- Алгоритм:
  1. Вычисляем порог γ;
  2. Определяем $\hat{Q}$ как преодоление порога γ кривой d_n.

Задача:

Выбрать порог γ так, чтобы $\hat{Q} \in [Q, Q+k]$.

Оценка γ

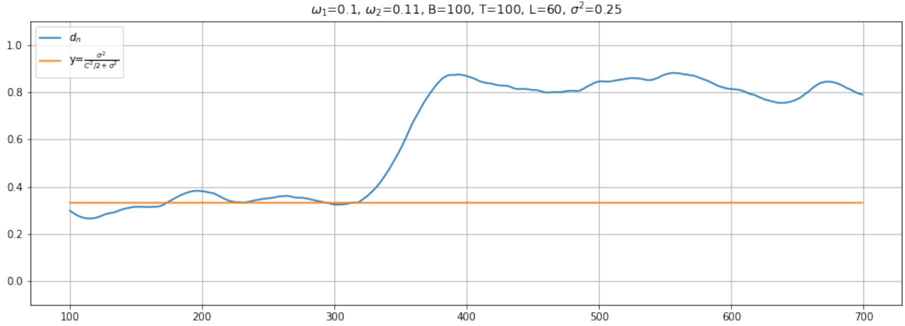
В качестве верхней границы γ можно взять значение переходного интервала в точке k.
При добавлении шума с дисперсией σ^2 строковая функция неоднородности d_n до разладки смещается от 0. Если взять слишком маленькое значение γ, $\hat{Q} < Q$, поэтому нижняя граница зависит от дисперсии шума σ^2.
Для таких рядов надо либо знать σ^2, либо иметь данные для оценки значений d_n где точно отсутствует неоднородность.



Оценка γ: нижняя граница

Предположим, у нас есть нужные данные и мы смогли оценить нижнюю границу $\gamma = \gamma_{min}$.

Если мы знаем σ^2, то $\gamma_{min} \approx \frac{\sigma^2}{C^2/2+\sigma^2}$.

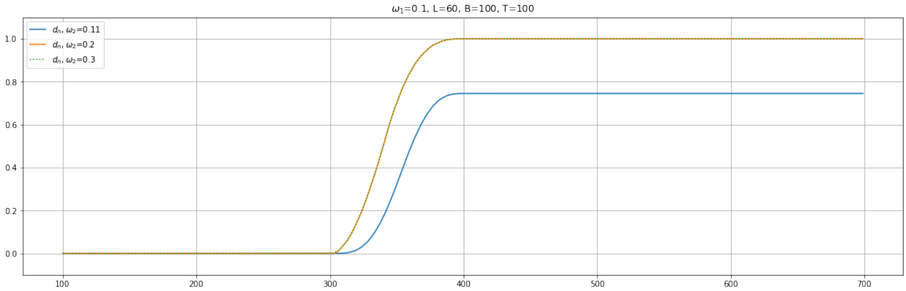


Оценка γ: верхняя граница

Для определения верхней границы γ мы можем воспользоваться аналитической аппроксимацией $g_a(\omega_1, \omega_2)$, однако для этого нам нужно знать частоты до и после разладки.

Предпосылки: влияние изменения частот.

По свойству индекса неоднородности, чем больше $|\omega_2 - \omega_1|$, тем ближе g к 1 после переходного интервала, следовательно, кривая d_n на переходном интервале будет иметь более крутой наклон.



Оценка γ: верхняя граница

Добавим еще 2 параметра, подаваемых на вход системе:

- ω_1 — начальная частота ряда;
- $\omega_{min} = \omega_1 + \Delta_{min}$, где Δ_{min} — минимальное для обнаружения неоднородности отклонение частоты ряда от ω_1;

Таким образом, имея значение $g(\omega_1, \omega_{min})$, для определения порога γ, мы можем попытаться аппроксимировать переходный интервал функции обнаружения d_n.
Обозначим эту аппроксимацию a_T.

Предпосылки: переходный интервал

Матрица $\mathbb{X}$ имеет размерность $L \times K$. Рассмотрим траекторные матрицы $\mathbb{X}_{test}^{(j)}$ размерности $L \times K_{test}$ тестовых рядов $F_{j,j+T}$, где $K_{test} = T - L + 1$, $j \in [0, N - T)$.
$\forall\, j \in [0, Q - T), \forall\, n \in [1, K_{test}] : \mathrm{X}_n \in \mathbb{X}_{test}^{(j)}, \mathrm{X}_n \in \mathfrak{L}_r^{(1)}$.
$\forall\, j \in [Q + T, N - T), \forall\, n \in [1, K_{test}] : \mathrm{X}_n \in \mathbb{X}_{test}, \mathrm{X}_n \notin \mathfrak{L}_r^{(1)}$.

При $T > 2 \cdot L$, $\forall\, j \in [Q - T + L, Q - L)$, $X_{test}^{(j)}$ состоит из:

- $n_B = n_B(j)$ векторов вложений, лежащих в $\mathfrak{L}_r^{(1)}$;
- $n_Q = n_Q(j)$ векторов вложений, содержащих момент возмущения;
- $n_A = n_A(j)$ векторов вложений, содержащих только значения ряда после разладки.

Причем $K_{test} = n_B + n_Q + n_A$

Предпосылки: переходный интервал

Пусть L — фиксировано.

$$1 - \frac{\sum\limits_{l=1}^{K_{test}} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum\limits_{l=1}^{K_{test}} \|X_l\|^2} =$$

$$= 1 - \frac{\sum\limits_{l=1}^{n_B} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + \sum\limits_{l=n_B}^{n_B+n_Q} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + \sum\limits_{l=n_B+n_Q}^{K_{test}} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2}{\sum\limits_{l=1}^{n_B} \|X_l\|^2 + \sum\limits_{l=n_B}^{n_B+n_Q} \|X_l\|^2 + \sum\limits_{l=n_B+n_Q}^{K_{test}} \|X_l\|^2} =$$

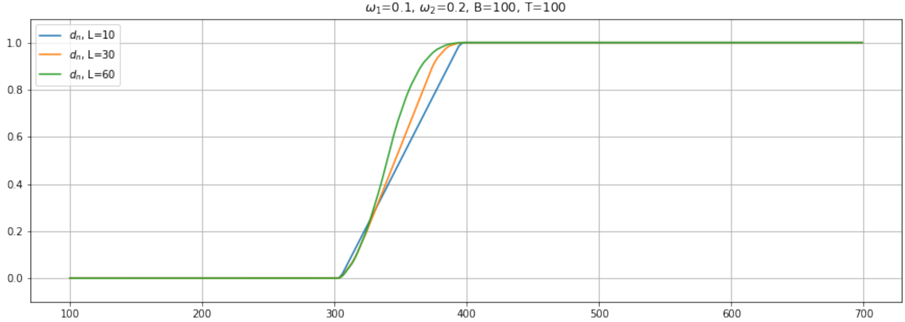
$$= 1 - \frac{0 + \sum\limits_{l=n_B}^{n_B+n_Q} \sum\limits_{i=1}^{r} \langle X_l, U_i^{(1)} \rangle^2 + n_A(j) \cdot c_H}{c_1 + \sum\limits_{l=n_B}^{n_B+n_Q} \|X_l\|^2 + c_2} \approx 1 - \frac{n_A(j) \cdot c_H}{c_1 + c_2},$$

при $T \to \infty$ в силу $n_Q = o(T)$.

Так как для вычисления d_n мы последовательно смещаем тестовые ряды на 1 элемент, $n_A(j)$ возрастает линейно, начиная с $j = Q - T + L$, $n_A(j) = j - Q + T - L$.

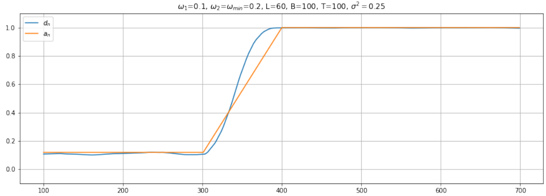
Предпосылки: переходный интервал

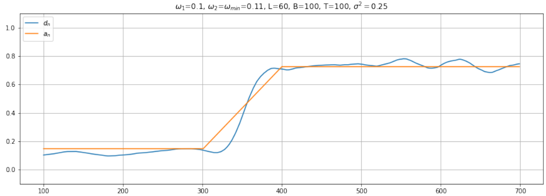
Аналогично, при уменьшении L переходный интервал также становится более линейным в силу увеличения $K_{test}^{(j)}$ и, следовательно, $n_A(j)$.



Аппроксимация: Идея

Таким образом, мы можем аппроксимировать переходный интервал от γ_{min} до $g(\omega_1, \omega_{min})$ прямой a_T.





Важно отметить, раз мы хотим брать γ как значение a_T в точке k, нам важно чтобы начало прямой a_T было не больше, чем значения d_n на переходном интервале. Однако такая аппроксимация не всегда корректна.

Алгоритм выбора γ

Таким образом, мы выбраем γ как значение линейной аппроксимации a_T переходного интервала функции d_n в точке k.

Алгоритм:

1. Оцениваем γ_{min};
2. Вычисляем $g(\omega_1, \omega_{min})$;
3. Строим a_T;
4. Фиксируем γ.

Алгоритм работы

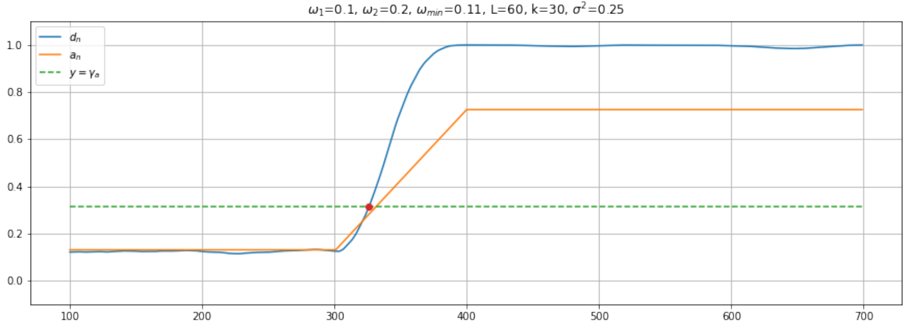
Собирая все вместе, получаем систему:

- Входные данные: F_N, ω_1, ω_{min}, k;
- Результат: $\hat{Q}$;
- Алгоритм:
  1. Оцениваем γ_{min};
  2. Вычисляем $g(\omega_1, \omega_{min})$;
  3. Строим a_T;
  4. Фиксируем γ.
  5. Определение $\hat{Q}$ как момент преодоления d_n значения γ_a.

Пример работы

Зафиксируем параметры: $\omega_1 = \frac{1}{10}, \omega_{min} = \frac{1}{100}, k = 30, \omega_2 = \frac{1}{5}, Q = 301, L = 60, B = 100, T = 100, \sigma^2 = 0.25$.

При таких параметрах, для графика ниже $\gamma_{min} = 0.13, \gamma_{max} = 0.725, \gamma_a = 0.311, \hat{Q} = 326$.



Параметры

Все параметры, используемые выше можно разделить на категории:

1. Входные: $\omega_1, \omega_{min}, k$;
2. Зависимые от входных параметров: $\gamma_{min}, \gamma_{max}, \gamma_a$.
3. Неизвестные: ω_2, Q;
4. Произвольные, выбираемые системой: L, B, T.

Первую категорию параметров можно интерпретировать как заданные пользователем системы. Они фиксированы и не могут меняться для определения более хорошего порога.

Вторая категория зависит от входных параметров и определяется алгоритмом работы.

Третья категория зависит от ряда, подаваемого системе и вообще говоря не известны.

Четвертая категория параметров - те, которые система может подстраивать под тот или иной ряд. Позже попробуем оценить их влияние на оценку системы.

Оценка системы

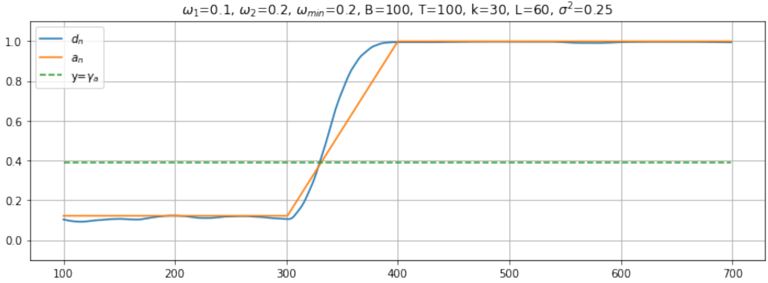
Зафиксируем дисперсию шума $\sigma^2 = 0.25$ и введем характеристики системы:

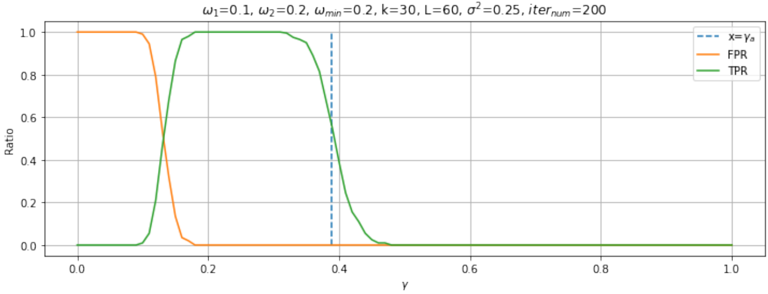
- $FP(\gamma)$ - преодоление порога γ кривой d_n до момента Q
- $TP(\gamma)$ - преодоление порога γ кривой d_n в промежутке $[Q, Q+k]$

Значения параметров рассмотренных категорий оставим такими же.

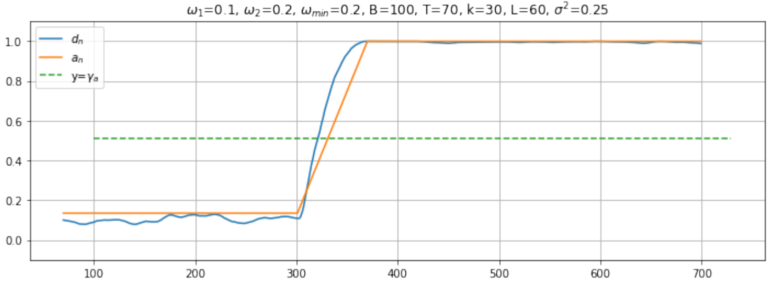
Промоделируем реализации шума $n_{iter} = 200$ раз и для $\forall\gamma \in [0, 1]$ с шагом 0.01 определим $FPR(\gamma) = \frac{FP}{n_{iter}}$ и $TPR(\gamma) = \frac{TP}{n_{iter}}$.
Также будем смотреть на $FPR(\gamma_a)$.

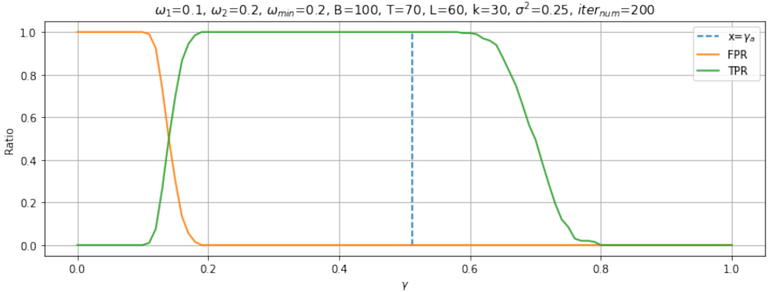
Оценка системы



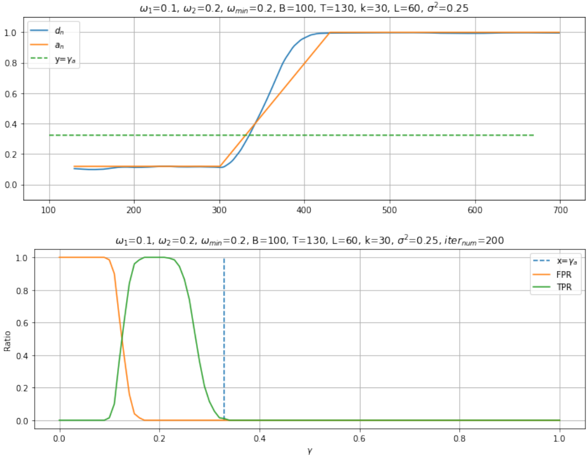


Оценка влияния параметров: T=70





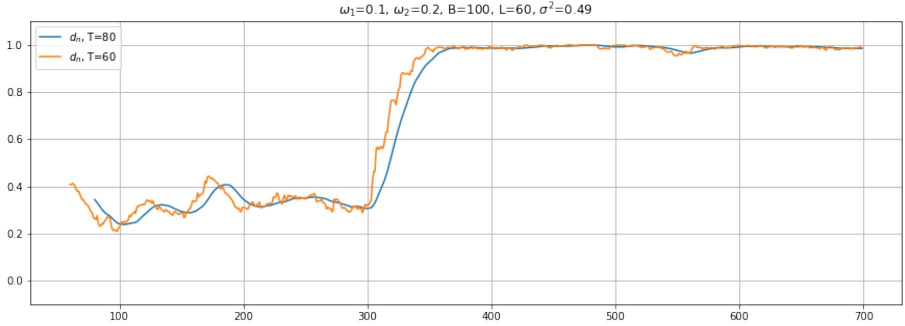
Оценка влияния параметров: T=130



Из изображений видно, что влияя на параметр T мы можем регулировать скорость возрастания d_n на переходном интервале и добиться основного требования к a_T — значения должны быть не больше чем у d_n.

Оценка влияния параметров: $T \approx L$

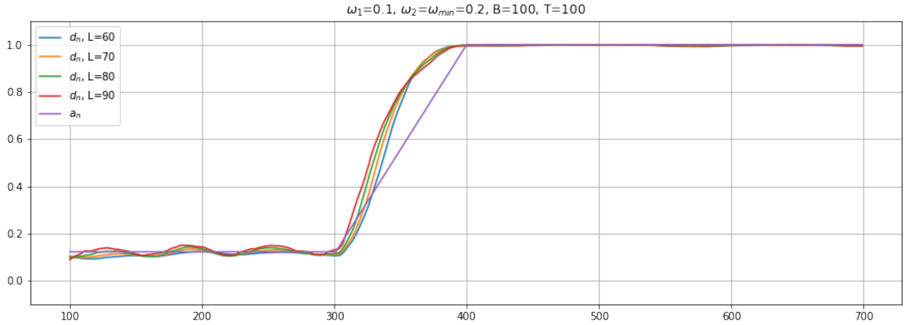
Выше было видно, что уменьшая T, мы можем уменьшить значение $FPR(\gamma_a)$. Однако при $T \to L$, количество элементов в тестовых рядах для подсчета индекса неоднородности g сокращается, усиливая влияние шума на подсчет элементов d_n, что приводит к усилению колебаний и увеличению $FPR(\gamma_a)$.



Оценка влияния параметров: L

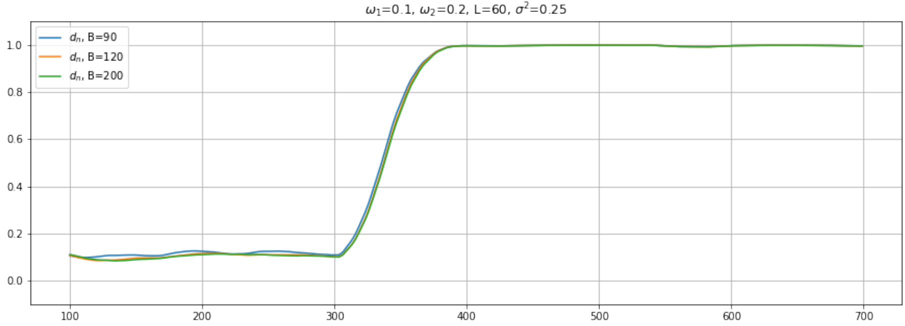
Как было отмечено ранее, сходимость g_a и g достигается при достаточно больших L, однако уменьшая L, переходный интервал d_n более линеен.

Изменяя параметр L, мы регулируем скорость возрастания кривой d_n. Таким образом, подстраивая параметр L мы можем определять $\hat{Q}$ раньше момента $Q + k$.



Оценка влияния параметров: B

В целом, параметр B не влияет на устойчивость системы в силу предположении о наличии исторических данных и отсутствия влияния на переходный интервал d_n.



Дальнейшие планы

1. Исследовать применимость описанной системы.

Литература:

Golyandina, N., Nekrutkin, V., & Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of time series structure: SSA and related techniques. Chapman & Hall/CRC.