KHÓA TẬP HUẤN GIẢNG VIÊN KHU VỰC MIỀN BẮC 2022

Khoảng tin cậy và kiểm định tham số

Hoàng Văn Hà
University of Science, VNU - HCM
hvha@hcmus.edu.vn

VIETNAM INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY IN MATHEMATICS

Mục lục

Đặt vấn đề

Các tham số đặc trưng của tổng thể như trung bình, tỷ lệ, phương sai, ...được sử dụng rất nhiều trong những phân tích về kinh tế, xã hội, y học, môi trường, ... Tuy nhiên, do kích thước của tổng thể thường rất lớn hoặc những hạn chế về năng lực chọn mẫu, rất khó để biết được chính xác giá trị thực của các tham số này. Điều này đặt ra bài toán ước lượng các tham số này từ mẫu được chọn từ tổng thể.

Bài toán tổng quát

Giả sử ta cần khảo sát một đặc tính X (thu nhập, điểm số, giá bán, chỉ số sức khỏe, ...) thuộc một tổng thể xác định. Đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối $F(x;\theta)$ trong đó tham số θ chưa biết. Mục tiêu: ước lượng tham số θ.

Ước lượng điểm

- Xét $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: phân phối chuẩn với kỳ vọng μ và phương sai σ^2.
- Với $(X_1, \ldots, X_n)$ là một mẫu ngẫu nhiên (độc lập và có cùng phân phối với X), hai ước lượng điểm (point estimator) cho μ và σ^2 lần lượt là

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Khoảng tin cậy

- Đối với bài toán ước lượng điểm, một câu hỏi được đặt ra là: làm sao xác định được độ bất định (uncertainty) của một ước lượng điểm cho một tham số của tổng thể?
- Khoảng tin cậy (confidence interval) cho phép ta trả lời câu hỏi trên.

Khoảng tin cậy và độ tin cậy

Định nghĩa

Cho $0 < \alpha < 1$, một khoảng $[L, U]$ được gọi là một khoảng tin cậy $100 \times (1-\alpha)\%$ cho tham số θ nếu

$$\mathbb{P}(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha.$$

$1 - \alpha$ *(hay $100 \times (1-\alpha)\%$) được gọi là độ tin cậy (confidence level) của khoảng này.*

Chú ý:

- $[L, U]$ là một khoảng ngẫu nhiên, tức là $L = u(X_1, \ldots, X_n)$ và $U = v(X_1, \ldots, X_n)$, với u, v là các hàm nào đó của mẫu $(X_1, \ldots, X_n)$.
- Một khi ta có $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, tính được l và u, ta có kết quả khoảng tin cậy cho θ là $l \leq \theta \leq u$.

Ý nghĩa:

- Nếu lặp lại nhiều lần việc lấy mẫu từ một tổng thể, thì sẽ có $100 \times (1-\alpha)\%$ số khoảng được tính toán theo cách này sẽ chứa giá trị thực của tham số θ.

Khoảng tin cậy cho kỳ vọng

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn, tức là $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  - Nếu tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn, cần chọn cỡ mẫu đủ lớn.
- **Hai trường hợp:**
  - giả sử biết phương sai σ^2,
  - không biết phương sai σ^2 (phổ biến hơn trong thực tế).

Trong **R**, việc kiểm tra giả định phân phối chuẩn của dữ liệu có thể thực hiện bằng cách vẽ đồ thị Q-Q Norm hoặc dùng kiểm định Shapiro-Wilk (dùng hàm `shapiro.test`).

Khoảng tin cậy cho kỳ vọng

Với $0 < \alpha < 1$, khoảng tin cậy $100 \times (1 - \alpha)\%$ cho kỳ vọng μ cho bởi

- trường hợp biết σ^2:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

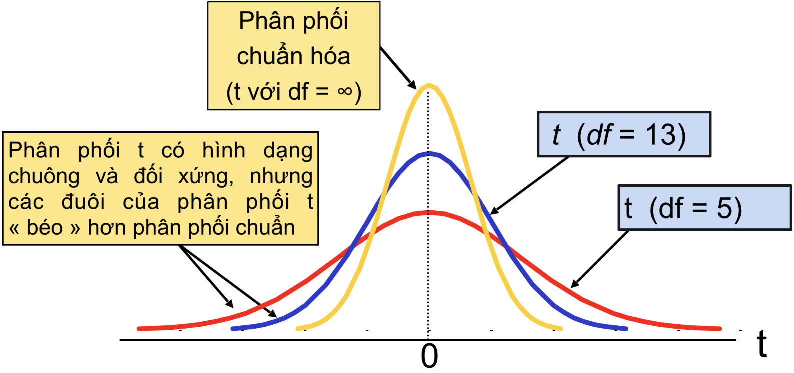
- trường hợp không biết σ^2:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

trong đó

- $\bar{x}$ và s là trung bình mẫu và độ lệch chuẩn mẫu,
- $z_{\alpha/2}$ là phân vị trên (upper percentile) mức $\alpha/2$ của phân phối chuẩn tắc (standard normal distribution) $\mathcal{N}(0, 1)$.
- $t_{\alpha/2}^{n-1}$ là phân vị trên mức $\alpha/2$ của phân phối Student với $n - 1$ bậc tự do.

Phân phối Student



Khi cỡ mẫu n đủ lớn: $t_{\alpha/2}^{n-1} \approx z_{\alpha/2}$.

Lựa chọn cỡ mẫu cho khoảng tin cậy

- Sai số biên (margin error) của khoảng tin cậy:

$$E = \begin{cases} z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{nếu biết } \sigma^2, \\ t_{\alpha/2}^{n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} & \text{nếu không biết } \sigma^2. \end{cases}$$

- **Câu hỏi:** cỡ mẫu n cần chọn là bao nhiêu để có được sai số E nhỏ như mong muốn?
- Cỡ mẫu cần tìm được cho bởi

$$n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 \quad \text{hoặc } n = \left(z_{\alpha/2}\frac{s^*}{E}\right)^2.$$

Trong trường hợp không biết σ^2, s^* có thể được tính từ một mẫu đã khảo sát, hoặc được chọn từ các nghiên cứu đã có.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ

- Gọi p là tỷ lệ của những phần tử thỏa một đặc tính $\mathcal{A}$ của tổng thể, mà ta quan tâm.
  - Ví dụ: tỷ lệ khách hàng hài lòng/không hài lòng đối với một sản phẩm, tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng, tỷ lệ người thất nghiệp, ...
- **Bài toán:** lập khoảng tin cậy cho tỷ lệ p với độ tin cậy $100(1-\alpha)\%$.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ

- Khảo sát n phần tử, đặt

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu phần tử thứ } i \text{ thỏa tính chất } \mathcal{A}, \\ 0, & \text{nếu không,} \end{cases}$$

  Ta có $Y_i \sim B(p)$, $i = 1, \ldots, n$.
- Đặt $X = Y_1 + \ldots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ thì $X =$ tổng số phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ trong n phần tử khảo sát và $X \sim B(n, p)$.
- Tỷ lệ mẫu được tính bởi

$$\hat{P} = \frac{X}{n}.$$

Phân phối của tỷ lệ mẫu

- Khi n đủ lớn (thông thường $n \geq 40$), ta có thể xấp xỉ phân phối của $\hat{P}$ bởi phân phối chuẩn.
- Khi đó,

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Do vậy, ta sử dụng phân phối chuẩn tắc khi tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể p.

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ

- **Giả định:** cỡ mẫu n đủ lớn.
- **Công thức:** khoảng tin cậy $100(1-\alpha)\%$ cho p cho bởi

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},$$

  trong đó $z_{\alpha/2}$ là phân vị trên mức $\alpha/2$ của phân phối chuẩn tắc, $\hat{p}$ là tỷ lệ mẫu.
- Sai số biên:

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Lựa chọn cỡ mẫu

- **Câu hỏi:** cần chọn cỡ mẫu n bao nhiêu để có sai số E bé như mong muốn?
- Cách 1:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p^*(1 - p^*).$$

p^* cần được xác định trước (chọn từ các nghiên cứu tin cậy hoặc một mẫu đã khảo sát).

- Cách 2:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 0.25.$$

Cách này sẽ cho cỡ mẫu rất nhiều so với cách 1 vì $p(1-p) \leq 0.25$ với mọi $0 \leq p \leq 1$.

Định nghĩa

Giả thuyết (hypothesis) là những phát biểu về các tham số, quy luật phân phối, hoặc tính độc lập của các đại lượng ngẫu nhiên. Việc tìm ra kết luận để bác bỏ hay không bác bỏ một giả thuyết từ một mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể được gọi là kiểm định giả thuyết (hypothesis testing).

Định nghĩa

Trong bài toán kiểm định giả thuyết, giả thuyết cần được kiểm định gọi là Giả thuyết không (null hypothesis), ký hiệu là H_0*. Mệnh đề đối lập với* H_0 *gọi là đối thuyết (alternative hypothesis), ký hiệu là* H_1 *(hoặc* H_a*).*

Trong bài này, ta chỉ xét các bài toán kiểm định giả thuyết về tham số.

Kiểm định giả thuyết về tham số

Tổng quát, một bài toán kiểm định giả thuyết cho tham số θ (có thể là μ, σ^2 hay tỷ lệ p) sẽ có một trong 3 dạng dưới đây (θ_0 là giá trị cần so sánh):

Hai phía:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases},$$

Một phía bên trái:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases},$$

Một phía bên phải:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}.$$

Một số quy tắc đặt giả thuyết H_0

1. Giả thuyết được đặt ra với ý đồ bác bỏ nó, nghĩa là giả thuyết đặt ra ngược lại với điều ta muốn chứng minh, muốn thuyết phục.
2. Giả thuyết H_0 đặt ra thường mang ý nghĩa: *"bằng nhau"*, *"không khác nhau"* hoặc *"khác nhau không có ý nghĩa"*.
3. Khi đặt giả thuyết, ta thường so sánh cái chưa biết với cái đã biết. *"Cái chưa biết"* là điều mà ta cần kiểm định, kiểm tra, làm rõ. *"Cái đã biết"* là những thông tin trong quá khứ, các định mức kinh tế, kỹ thuật.
4. Giả thuyết được đặt ra sao cho khi chấp nhận hay bác bỏ nó sẽ có tác dụng trả lời bài toán thực tế đặt ra.
5. Giả thuyết được đặt ra sao cho nếu nó đúng thì ta sẽ xác định được quy luật phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên được chọn làm thống kê kiểm định (test statistics).

Cách đặt giả thuyết

- **Ví dụ 1:** trong một nhà máy sản xuất kem đánh răng, theo định mức các dây chuyền tự động được lập trình để đóng những ống kem có trọng lượng trung bình là 200g. Kỹ sư bảo trì cần kiểm tra định kỳ xem dây chuyền có vận hành tốt hay không? Gọi $X =$ trọng lượng một ống kem. Giả sử $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Trong một dây chuyền, kỹ sư bảo trì chọn ngẫu nhiên 30 ống kem để kiểm tra. Kỹ sư quan tâm đến giả thuyết sau:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 200 \\ H_1 : \mu \neq 200 \quad \text{(dây chuyền có vấn đề)} \end{cases}.$$

- **Ví dụ 2:** Trong một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử, biết rằng tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng là 7%. Các kỹ sư của nhà máy nghiên cứu cải tiến quy trình sản xuất để nâng cao chất lượng sản phẩm. Để kiểm tra hiệu quả của quy trình sản xuất mới, 100 sản phẩm được chọn ngẫu nhiên và thấy có 5 sản phẩm không đạt. Gọi p là tỷ lệ sản phẩm kém chất lượng được sản xuất bởi quy trình mới. Giả thuyết cần kiểm định là:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.07 \\ H_1 : p < 0.07 \quad \text{(quy trình SX mới có hiệu quả)} \end{cases}.$$

Miền bác bỏ - Thống kê kiểm định

Định nghĩa

Xét bài toán kiểm định giả thuyết có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Giả sử rằng H_0 đúng, từ mẫu ngẫu nhiên $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ chọn hàm $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ sao cho với số $\alpha > 0$ bé tùy ý ta có thể tìm được tập hợp W_α thỏa điều kiện

$$\mathbb{P}(T \in W_\alpha) = \alpha$$

Tập hợp W_α gọi là Miền bác bỏ (Rejection Region) của giả thuyết H_0 và phần bù W_α^c gọi là Miền chấp nhận (Acceptance Region) giả thuyết H_0. Đại lượng ngẫu nhiên $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)$ gọi là thống kê kiểm định (Test Statistic). Giá trị α gọi là mức ý nghĩa (Significant Level) của bài toán kiểm định.

- Với mẫu $(x_1, \ldots, x_n)$, tính được giá trị thống kê kiểm định tương ứng là $t = T(x_1, \ldots, x_n; \theta_0)$, khi đó:
  - Nếu $t \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ giả thuyết H_0.
  - Nếu $t \in W_\alpha^c$ thì ta kết luận chưa đủ cơ sở để bác bỏ H_0.

Sai lầm loại I và loại II

Trong bài toán kiểm định giả thuyết thống kê, ta có thể mắc phải các sai lầm sau

a. Sai lầm loại I (Type I error): là sai lầm mắc phải khi ta bác bỏ H_0 trong khi thực tế giả thuyết H_0 đúng. Sai lầm loại I ký hiệu là α, chính là mức ý nghĩa của kiểm định.

$$\alpha = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha | H_0\right).$$

b. Sai lầm loại II (Type II error): là sai lầm mắc phải khi ta chấp nhận giả thuyết H_0 trong khi thực tế H_0 sai. Sai lầm loại II ký hiệu là β.

$$\beta = \mathbb{P}\left(T \in W_\alpha^c | H_1\right).$$

Sai lầm loại I và loại II

Quyết định \ Thực tế	H_0 đúng	H_0 sai
Không bác bỏ H_0	Không có sai lầm $(1-\alpha)$	Sai lầm loại II β
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I α	Không có sai lầm $(1-\beta)$

Trường hợp một mẫu

Từ phần này trở đi, ta chỉ xét các trường hợp không biết phương sai.

- **Các giả định:**
  - Mẫu ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được chọn từ tổng thể có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ với kỳ vọng μ chưa biết.
  - Cho trước giá trị μ_0, cần so sánh kỳ vọng μ với μ_0.

- **Bài toán kiểm định có 3 trường hợp:**

$$(a) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

Các bước thực hiện

- Phát biểu H_0 và H_1. Xác định α.
- Tính giá trị thống kê kiểm định:

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Khi H_0 đúng, $T_0 \sim t(n-1)$ - phân phối Student với $n-1$ bậc tự do.

- Xác định miền bác bỏ:

Giả thuyết	**Miền bác bỏ**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : \lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2}^{n-1} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 < -t_{\alpha}^{n-1} \right\}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$W_\alpha = \left\{ t_0 : t_0 > t_{\alpha}^{n-1} \right\}$

- Kết luận.

P - giá trị (P - value)

• Trong thực hành, ta thường dùng P - giá trị (P - value) để kết luận hơn là so sánh giá trị thống kê kiểm định t_0 với $t_{\alpha/2}^{n-1}$ (hoặc t_{α}^{n-1}).

Định nghĩa

P - giá trị là xác suất nhận được một mẫu mà ít nhất là không phù hợp với giả thuyết H_0 (và ủng hộ đối thuyết H_1) giống như mẫu đã thu được. Nói cách khác P - giá trị chính là mức ý nghĩa nhỏ nhất được tính trên mẫu đã khảo sát để dẫn tới bác bỏ H_0.

Quy tắc

Xét một bài toán kiểm định có giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Ta bác bỏ H_0 nếu

$$P\text{-giá trị} \leq \alpha,$$

với α là mức ý nghĩa cố định được chọn.

• Kiểm định một mẫu trong **R**: sử dụng hàm `t.test` và đọc P-giá trị để kết luận.

Trường hợp hai mẫu độc lập

- Các giả định:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể thứ nhất có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_1 và phương sai σ_1^2.
  - $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ là mẫu ngẫu nhiên được chọn từ tổng thể thứ hai có phân phối chuẩn với kỳ vọng μ_2 và phương sai σ_2^2.
  - Hai mẫu độc lập với nhau.

- Bài toán kiểm định giả thuyết trên hai mẫu độc lập gồm các dạng sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

với mức ý nghĩa α cho trước.

So sánh hai mẫu độc lập: phương sai bằng nhau

- Trường hợp ta giả sử phương sai hai tổng thể bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tính phương sai mẫu gộp (pooled variance)

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}.$$

- Khi đó thống kê kiểm định cho bởi

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}.$$

Khi H_0 đúng, $T_0 \sim t(df)$ với $df = n + m - 2$.

So sánh hai mẫu độc lập: phương sai khác nhau

- Trường hợp $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, thống kê kiểm định được tính bởi

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n} + \dfrac{S_2^2}{m}}}.$$

- Khi H_0 đúng, $T_0 \sim t(df)$ với

$$df = \frac{\left[(s_1^2/n) + (s_2^2/m)\right]^2}{\dfrac{(s_1^2/n)^2}{n-1} + \dfrac{(s_2^2/m)^2}{m-1}}.$$

Trong **R**, ta dùng hàm `t.test(x, y, var.equal = ...)` và chọn `var.equal` = T hay F nếu phương sai bằng nhau hoặc khác nhau.

Trường hợp hai mẫu không độc lập (paired t-test)

- Trường hợp này xảy ra khi mỗi giá trị quan trắc được trong một mẫu có mối liên hệ tương ứng với một giá trị quan trắc ở mẫu thứ hai. Như vậy, ta có thể ghép cặp từng giá trị trong hai mẫu với nhau.
- Việc ghép cặp là kết quả của việc
  - quan trắc giá trị trước và sau khi thực hiện 1 thí nghiệm. Chẳng hạn như đo trọng lượng trước và sau khi thực hiện một chế độ ăn kiêng.
  - so sánh cùng 1 đặc tính.
  - thí nghiệm trên cùng 1 địa điểm.
  - thí nghiệm với cùng thời gian.

- Xét (X_{1i}, X_{2i}), với $i = 1, 2, \dots, n$, là tập gồm n cặp giá trị quan trắc với giả sử rằng kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_1 là μ_1 và σ_1^2 và kỳ vọng và phương sai của tổng thể đại diện bởi X_2 là μ_2 và σ_2^2. X_{1i} và X_{2j} $(i \neq j)$ độc lập.
- Định nghĩa độ sai khác giữa mỗi cặp trong tập hợp các giá trị quan trắc là

$$D_i = X_{1i} - X_{2i},\ i = 1, \dots, n.$$

- Các $D_i, i = 1, \dots, n$ được giả sử có phân phối chuẩn với trung bình

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2,$$

  và phương sai σ_D^2.
- Do vậy, việc kiểm định $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ với $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ tương đương với

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = \Delta_0 \\ H_1 : \mu_D \neq \Delta_0 \end{cases}.$$

  Thông thường, $\Delta_0 = 0$. Ta cũng có trường hợp tương tự với kiểm định 1 phía (bên trái hoặc bên phải).

Các bước kiểm định

- Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Xác định mức ý nghĩa α.
- Tính giá trị thống kê kiểm định

$$T_0 = \frac{\bar{D} - D_0}{S_D/\sqrt{n}},$$

với

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \quad \text{và} \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2.$$

Khi H_0 đúng, $T_0 \sim t(n-1)$.

- Miền bác bỏ và P - giá trị trong trường hợp này có dạng

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	**p - giá trị**
$H_1 : \mu_D \neq \Delta_0$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2}^{n-1}$	$p = 2\mathbb{P}(T_{n-1} \geq \lvert t_0\rvert)$
$H_1 : \mu_D < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha}^{n-1}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \leq t_0)$
$H_1 : \mu_D > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha}^{n-1}$	$p = \mathbb{P}(T_{n-1} \geq t_0)$

- Kết luận. Trong **R**, dùng hàm `t.test(x, y, paired = T)`.

Trường hợp 1 mẫu

- **Giả định:** cỡ mẫu đủ lớn.

- Xét p là tỷ lệ những phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$ mà ta cần quan tâm nghiên cứu. Bài toán kiểm định giả thuyết cho tỷ lệ p gồm các dạng sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

  với mức ý nghĩa α.

- Giả sử khảo sát n phần tử, có x phần tử thỏa tính chất $\mathcal{A}$, tính được tỷ lệ mẫu

$$\hat{P} = \frac{x}{n}.$$

- Giá trị thống kê kiểm định cho bởi

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}.$$

- Miền bác bỏ và *P*-giá trị:

Giả thuyết	**Miền bác bỏ**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : \lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}\right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 < -z_\alpha\right\}$
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$W_\alpha = \left\{z_0 : z_0 > z_\alpha\right\}$

Kiểm định tương tự trong **R**: dùng hàm `binom.test` hoặc `prop.test`.

Trường hợp hai mẫu độc lập

- Khảo sát những phần tử thỏa một ttính chất $\mathcal{A}$ nào đó trên hai tổng thể độc lập với tỷ lệ tương ứng là p_1 và p_2. Từ hai tổng thể chọn ra hai mẫu với cỡ lần lượt là n và m. Gọi X và Y là số phần tử thỏa tính chất A trong mẫu 1 và mẫu 2. Khi đó, ta có $X \sim B(n, p_1)$ và $Y \sim B(m, p_2)$.

- Bài toán so sánh p_1 và p_2 gồm các trường hợp sau:

$$(a)\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases}$$

- Các giả định
  - Hai mẫu độc lập.
  - Cỡ của hai mẫu cần chọn đủ lớn.

Các bước kiểm định

- Phát biểu giả thuyết H_0 và đối thuyết H_1. Xác định mức ý nghĩa α.
- Tính thống kê kiểm định

$$z_0 = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}$$

với

$$\hat{p}_1 = \frac{x}{n}, \; \hat{p}_2 = \frac{y}{m}, \; \hat{P} = \frac{x+y}{n+m}.$$

- Xác định miền bác bỏ

Đối thuyết	**Miền bác bỏ**	p **- giá trị**
$H_1 : p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$	$p = 2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$
$H_1 : p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$	$p = \Phi(z_0)$
$H_1 : p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$	$p = 1 - \Phi(z_0)$

- Kết luận.