lehrstuhl für programmiersysteme

technische universität dortmund

Prof. Dr. Bernhard Steffen

Dawid Kopetzki

Repetitorium zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Sommersemester 2015

Probeklausur Nr. 1

Information

Diese Aufgaben dienen als Grundlage zur Wiederholung und Vertiefung der Themen der Vorlesung "Mathematik für Informatiker 1". Dies ist die erste von zwei Probeklausuren. Um die Studienleistung zu erlangen, muss zu jedem Themengebiet eine Abgabe erfolgen. Die Aufgaben verteilen sich folgendermaßen auf die Themengebiete:

- Aufgaben 1-3: Teil 1 (**Abgabe am 06.05.2015**)
- Aufgaben 4-6: Teil 2 (**Abgabe am 03.06.2015**)
- Aufgaben 7-9: Teil 3 (**Abgabe am 01.07.2015**)
- Aufgabe 10: Bonus

Die Abgabe erfolgt in den Übungen zu den oben genannten Terminen.

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) [**4+3+3 = 10 Punkte**]

Die folgende Gesetzmäßigkeit kann als Variante eines Widerspruchsbeweises gesehen werden:

$$\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B})\big) \;\Rightarrow\; \neg\mathcal{A} \qquad \text{(WB)}$$

Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist hierbei wie üblich über die Standardoperatoren definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (WB), indem Sie zeigen, dass (WB) semantisch äquivalent zu T ist. Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.
2. Zeigen Sie die Gültigkeit von (WB) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.
3. Geben Sie die folgenden Mengen explizit an.
   (a) $\mathfrak{P}(\{1,2,3\}) \,\Delta\, \mathfrak{P}(\{2,3,4\})$
   (b) $\mathfrak{P}(\emptyset)$
   (c) $\mathfrak{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[4+2+4 = 10 Punkte]**

1. Gegeben sei die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und die Relation $R \subseteq A \times A$ mit

$$R = \{(1, 4), (2, 5), (5, 3)\}$$

   (a) Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation $R_\sim$ mit $R \subseteq R_\sim$ an. Erläutern Sie ihr Vorgehen bei der Konstruktion von $R_\sim$.

   (b) Geben Sie die zur Partition $P = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$ zugehörige Äquivalenzrelation an.

2. Sei $\sqsubseteq$ folgende Relation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m) \sqsubseteq (n', m') \;\Leftrightarrow_{df}\; n \leq n' \;\vee\; m \leq m'.$$

   Handelt es sich bei $\sqsubseteq$ um eine Quasiordnung? Beweisen oder widerlegen Sie.

3. Sind folgende Funktionen injektiv und/oder surjektiv, bijektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = (-1)^x \cdot x$

   (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = |x|$

   (c) $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit f, g wie in Teil a) und b) definiert.

   (d) $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit f, g wie in Teil a) und b) definiert.

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! \;=\; (n+1)! - 1.$$

2. Zeigen Sie durch verallgemeinerte Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$ gilt:

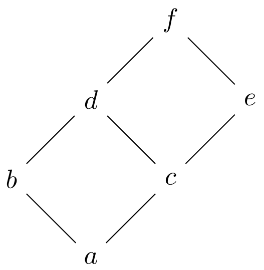
$$\exists\, k, l \in \mathbb{N}.\; n = 4 \cdot k + 5 \cdot l.$$

   Hinweis: Führen Sie den eigentlichen Induktionsschluss für den Fall $n \geq 16$.

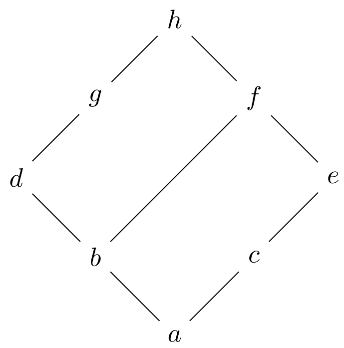
Aufgabe 4 (Verbände) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Im Folgenden sind drei partielle Ordnungen in Form ihrer zugehörigen Hasse-Diagramme angegeben. Welche dieser partiellen Ordnungen ist ein Verband bzw. ein distributiver Verband? Falls die partielle Ordnung kein Verband oder kein distributiver Verband ist, zeigen Sie dieses durch den Nachweis, dass eine entsprechende Eigenschaft eines Verbandes bzw. eines distributiven Verbandes verletzt wird.

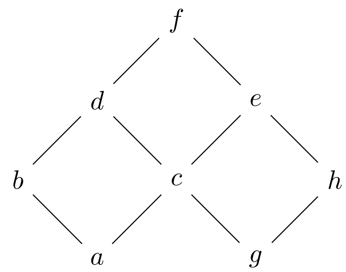
a)



b)



c)



2. Sei $(V_1, \preceq_1) =_{df} (\mathbb{N}, |)$ der Verband der natürlichen Zahlen mit Teilbarkeitsbeziehung und sei $(V_2, \preceq_2) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen. Wir betrachten die Abbildung:

$$h : V_1 \to V_2$$
$$h(n) = \{m \in \mathbb{N} \mid m|n\}$$

Also wird eine natürliche Zahl n auf die Menge ihrer Teiler abgebildet.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h ist ein Ordnungshomomorphismus.

(b) h ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus.

(c) h ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[3+(5+2) = 10 Punkte]**

1. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei die zweistellige Operation $\circ$ definiert durch

$$a \circ b \; =_{df} \; 2^{a+b}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\langle \mathbb{R}, \circ \rangle$ ist keine Halbgruppe.

2. Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe $\langle G, \circ \rangle$ ist definiert als:

$$Z(G) =_{df} \{g \in G \mid x \circ g = g \circ x \text{ für alle } x \in G\} \subseteq G$$

   (a) Zeigen Sie: $\langle Z(G), \circ \rangle$ ist abelsche Untergruppe von $\langle G, \circ \rangle$
   (b) Bestimmen Sie $Z(S_3)$ für die bekannte symmetrische Gruppe S_3.

Aufgabe 6 (Gruppen und Matrizen) **[8 Punkte]**

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Menge der Matrizen

$$A(a_1, a_2, a_3) \; =_{df} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ mit der Matrixmultiplikation eine kommutative Gruppe ist.
Hinweis: Die Assoziativität der Matrixmultiplikation quadratischer Matrizen kann als bekannt vorrausgesetzt werden.

Aufgabe 7 (Basis eines Vektorraums) **[3+7= 10 Punkte]**

Gegeben sind die Untervektorräume $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}$ und $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

1. Geben Sie jeweils eine Basis für U und V an. Der Nachweis der Basiseigenschaft ist nicht erforderlich.
2. Geben Sie eine Basis für $U \cap V$ an. Beweisen Sie die Basiseigenschaft!

Aufgabe 8 (Lineare Abbildungen und Rang) **[3+5+2 = 10 Punkte]**

Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ -2\,x_2 + 2\,x_3 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_3 + 2\,x_4 \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ zu φ an, also diejenige mit
$$\varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^4.$$
2. Bestimmen Sie den Rang von φ, indem Sie den Rang von A berechnen.
3. Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv? Begründen Sie Ihr Urteil.

Aufgabe 9 (Inverse einer Matrix) **[5+5 = 10 Punkte]**

Bestimmen Sie die Inverse (sofern existent) für die Matrix

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. über dem Körper $\mathbb{R}$ und
2. über dem Körper $\mathbb{Z}_5$

durch Gauß-Elimination. Geben Sie dabei die verwendeten elementaren Zeilentransformationen an.

Aufgabe 10 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Hinweis: Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja“-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein“-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.

1. Seien A und B endliche Mengen. Dann gilt $|A \Delta B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. Jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ ist auch eine Quasiordnung.
3. Es gibt einen Booleschen Verband, der nicht auch vollständiger Verband ist.
4. In einem kommutativen Ring ist jeder Unterring bereits ein Ideal.
5. Das kartesische Produkt zweier Körper ist wieder ein Körper.[1]
6. In einem Körper K gilt für jedes Ideal I in K, das das Einselement enthält, $I = K$.
7. Die Menge der Basen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist unendlich.
8. Ein Vektorraum kann höchstens endlich viele Untervektorräume besitzen.

[1]Wobei die additive und multiplikative Verknüpfung durch komponentenweise Anwendung der beteiligten Körperoperationen festgelegt ist.