Vorlesung Mathematik für Informatik I	
technische universität dortmund	Dr. O. Rüthing

WS 2018/2019	Klausur	27. März 2019

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer:______________________Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ____________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	10	10	9	10	9	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: ______________ 2. Prüfer: ______________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) [**4+4+2=10 Punkte**]

Für Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ betrachten wir folgende aussagenlogischen Formeln:

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \text{ und } (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))$$

1. Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstabelle, dass gilt:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \equiv ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{C})))$$

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

2. Beweisen Sie
$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))$$
unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Außerdem darf die übliche Definition der Implikation mittels der Standardoperatoren verwendet werden:
$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} =_{df} \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl.)}$$
Führen Sie die Umformungen so durch, dass in jedem Schritt genau eine Regel verwendet und entsprechend benannt wird.

3. Geben Sie folgende Menge explizit unter Aufzählung aller ihrer Elemente an:

$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset)) \times \{1, \{2\}\} =$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[6+2+2=10 Punkte]**

1. Gegeben sei die Menge $M = \{w, x, y, z\}$ und die Relation $R \subseteq M \times M$ mit

$$R = \{(w, w), (x, x), (y, y), (z, z)\}.$$

Handelt es sich bei den im folgenden dargestellten Relationen um Äquivalenzrelationen, Partielle Ordnungen oder Quasiordnungen? Geben Sie gegebenenfalls die verletzen Eigenschaften an. Beweisen Sie **nicht** die erfüllten Eigenschaften.

(a) $R_1 =_{df} R$

(b) $R_2 =_{df} R \cup \{(w, z), (z, w), (x, w), (x, z), (w, x), (z, x)\}$

(c) $R_3 =_{df} R \cup \{(w, z)\}$

(d) $R_4 =_{df} R \cup \{(w, z), (y, w)\}$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

2. Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie:[1]

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \forall X, Y \subseteq A.\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Hinweis: Im Beweis der "$\Rightarrow$"–Richtung ist nur die Mengeninklusion $f(X \cap Y) \supseteq f(X) \cap f(Y)$ zu zeigen. Der Nachweis der umgekehrten Inklusionsbeziehung ist trivial.

3. Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) =_{df} 2x$ und $g(x) =_{df} x + 1$. Ist die komponierte Funktion

$$g \circ f$$

injektiv/surjektiv? Beweisen Sie ihre Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

[1] $f(X)$ bezeichnet hier die mengenwertige Fortsetzung von f, also $f(X) =_{df} \{f(a) \mid a \in X\}$.

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Die Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n+2) \; = \; 1 + \sum_{i=0}^{n} \mathit{fib}(i)$$

2. Die Menge $Pal =_{df} \{w \in \{c, d\}^* \mid w$ ist Palindrom gerader Länge$\}$ kann induktiv definiert werden als die kleinste Menge, für die gilt:[2]

   - $\varepsilon \in Pal$.
   - Wenn $w \in Pal$, dann auch $cwc,\ dwd \in Pal$.

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion die folgende Aussage:

   $$\forall w \in Pal.\ \#_d(w) \text{ ist gerade.}$$

   Dabei bezeichnet $\#_d(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens „d“ im Wort w.

[2] Generell sind Palindrome Worte, die vorwärts und rückwärts gelesen übereinstimmen.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) **[3+4+3 = 10 Punkte]**

1. Sei M eine beliebige Menge. Gelte $L(M) =_{df} M \cup \{\bot, \top\}$, wobei $\bot, \top \notin M$ spezielle Elemente darstellen. Wir definieren den Verband $(L(M), \preceq)$, wobei die partielle Ordnung $\preceq$ für alle $x, y \in L(M)$ wie folgt definiert ist:

$$x \preceq y \Longleftrightarrow_{df} (x = \bot) \vee (y = \top)$$

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(L(\{a, b, c, d\}), \preceq)$.

   (b) Ist $(L(\{a, b, c, d\}), \preceq)$ vollständig? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Ist $(L(\{a, b, c, d\}), \preceq)$ distributiv? Falls ja, so nennen Sie eine Begründung. Falls nein, so widerlegen Sie anhand eines Gegenbeispiels.

2. Betrachten Sie die folgenden Hasse-Diagramme. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich um Folgendes handelt:

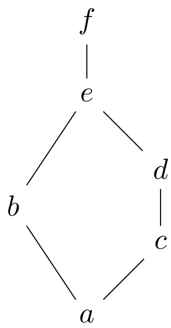
   (a) Vollständiger Verband

   (b) Distributiver Verband

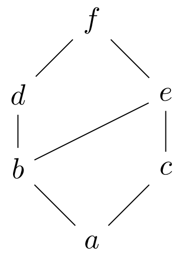
   (c) Boolescher Verband

   Begünden Sie Ihre Antwort in folgenden Fällen: Falls ein Diagramm kein Verband ist, so zeigen Sie dies anhand eines Gegenbeispiels. Ebenso ist ein Gegenbeispiel zu nennen, falls ein Verband nicht distributiv ist. Falls es sich um einen Booleschen Verband handelt, so nennen sie die komplementären Elemente.

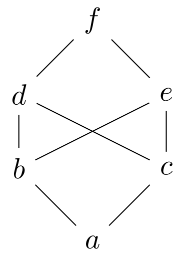
i.



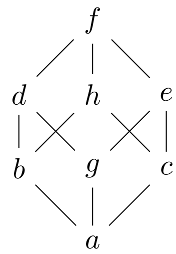
ii.



iii.



iv.



3. Welche der Strukturen aus Teilaufgabe 2. ist isomorph zu $(\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, |)$?

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[5+2+3 = 10 Punkte]**

1. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Für ein beliebiges $a \in G$ sei $h_a : G \to G$ definiert durch:

$$h_a(x) \ =_{df} \ a \oplus x.$$

   (a) Zeigen Sie, dass

$$H \ =_{df} \ \{h_a \mid a \in G\}$$

   mit der üblichen Funktionskomposition, also $\langle H, \circ \rangle$, eine Gruppe ist.

   Hinweis: Die Assoziativität der Funktionskomposition $\circ$ ist bekannt. Es ist daher die Abgeschlossenheit von T bezüglich $\circ$ zu untersuchen.

   (b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \langle G, \oplus \rangle \to \langle H, \circ \rangle$ mit $\varphi(a) \ =_{df} \ h_a$ ein Gruppenhomomorhismus ist.

2. Geben Sie eine Gruppe G und eine Untergruppe U von G an, so dass U kein Normalteiler von G ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

3. Geben Sie die **multiplikative** Verknüpfungstafel für den Ring $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$ an. Handelt es sich bei $\langle \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot_6 \rangle$ um eine Gruppe?

Aufgabe 6 (Basen, Untervektorräume) **[4+4=8 Punkte]**

1. Gegeben sind folgende vier Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Geben sie jeweils

   - eine Basis und
   - die Dimension

   des Untervektorraums an. Begründen Sie Ihre Antwort bezüglich (c) und (d). Bei (a) und (b) ist keine Begründen notwendig.

   (a) $V_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 8x = 6z\}$

   (b) $V_2 =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid (x = 3y) \wedge (4y = z)\}$

   (c) $V_3 =_{df} V_1 \cap V_2$

   (d) $V_4 =_{df} V_1 + V_2$

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?[3] Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

   (a) $U_1 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid (x = y) \vee (x = z)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (b) $U_2 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid (x, y, z)^t \bullet (2, 4, -6)^t = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (c) $U_3 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid (x = 2y) \wedge (y = 2z)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

[3] Es liegt stets der bekannte Körper $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ zugrunde.

Aufgabe 7 (Lineare Gleichungssysteme) **[6+4=10 Punkte]**

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 6x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & & & = & 4 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ x_1 & - & 4x_2 & & & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

1. Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
   (a) Geben Sie zu dem Gleichungssystem die erweiterte Koeffizientenmatrix an.
   (b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.
   (c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

2. Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_3$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

   (a) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix nach $\mathbb{Z}_3$.

   (b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.

   (c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_3$.

Aufgabe 8 (Determinante einer Matrix) **[4+6=10 Punkte]**

1. Gegeben ist die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $det(A^t \cdot A \cdot A^{-1})$.

Hinweis: A^t bezeichnet die transponierte Matrix von A, A^{-1} die inverse Matrix von A.

2. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Matrix

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist.

Hinweis: Beachten Sie die Themenangabe zu Aufgabe 8! Entwickeln Sie im ersten Schritt nach der dritten Zeile.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Darstellende Matrix, Basiswechsel) **[10 Punkte]**

Gegeben seien die Vektorräume $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ sowie die linearen Funktionen $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$, mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \qquad \psi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Weiter seien B und B' zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnen Sie die Matrix von $\psi \circ \varphi$ bezüglich der Basen B und B', also ${}_{B'}[\psi \circ \varphi]_B$.

Hinweis: Eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist die Standardbasis.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Wissensfragen) [**12 Punkte**]

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch.

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Wahr/Falsch) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Wahr"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Falsch"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Sei G eine Gruppe. Die Vereinigung zweier Untergruppen von G ist dann auch Untergruppe von G.
2. Es gibt einen Körperhomomorhismus von $\mathbb{Z}_{11}$ nach $\mathbb{Z}_7$.
3. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sind gleichmächtig.
4. Sei $\sim$ eine Relation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert durch: $X \sim Y \Leftrightarrow_{df} X \cap Y \neq \emptyset$. Dann ist $\sim$ keine Äquivalenzrelation.
5. Sei $M =_{df} \{21, 22, \ldots, 28\}$. Es gibt zwei verschiedene Teilmengen $X, Y \subseteq M$, deren Elemente aufsummiert jeweils den selben Wert ergeben.
6. Es gibt keinen S_3-Gruppenendomorphismus $\varphi : S_3 \to S_3$, der den Zykel $(1\,2)$ auf den Zykel $(1\,2\,3)$ abbildet.
7. Ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ lösbar, so ist dieses auch über dem Körper $\mathbb{Q}$ lösbar.
8. Für $n \times n$-Matrizen gilt das Gesetz $det(A + B) = det(A) + det(B)$ nicht.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen