lehrstuhl für programmiersysteme
Dr. Oliver Rüthing

technische universität dortmund

Fakultät Informatik
Lehrstuhl für
Künstliche Intelligenz
Prof. Dr. Kristian Kersting

Andrej Dudenhefner – Nils Kriege – Florian Kurpicz – Oliver Rüthing – Vanessa Volz – Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2014/15

Probeklausur

Die Probeklausur wird im Rahmen des letzten Vorlesungstermins zur Verfügung gestellt. Es erfolgt keine Abgabe und keine Korrektur der Aufgaben. Für die Bearbeitung sind 90 Minuten vorgesehen. Dabei sind maximal 50 Punkte erreichbar. Beachten Sie, dass dieses dem halben Umfang einer tatsächlichen Klausur entspricht, bei der die Bearbeitungszeit 180 Minuten beträgt und 100 Punkte erreicht werden können.

Für eine erfolgreiche Bearbeitung der Probeklausur sind 20 Punkte erforderlich. Eine Lösung zur Selbstkontrolle mit Bewertungshinweisen finden Sie im EWS.

Aufgabe 1 *Aussagenlogik* (3+3 Punkte)

Das Beweisprinzip des "*modus ponens*" für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \qquad \text{(MP)}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (MP) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.
2. Beweisen Sie, dass (MP) semantisch äquivalent zu T - mithin also Tautologie - ist unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:

   $$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl)}$$

   Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

Aufgabe 2 *Induktion* (5 Punkte)

Die Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

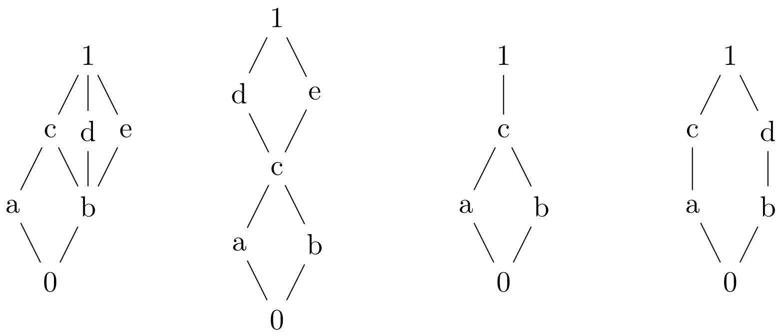
$$\begin{array}{lll} \mathit{fib}(0) & =_{\mathit{df}} & 0 \\ \mathit{fib}(1) & =_{\mathit{df}} & 1 \\ \mathit{fib}(n) & =_{\mathit{df}} & \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \ \text{ für } \ n \geq 2 \end{array}$$

Beweisen Sie mit Hilfe **verallgemeinerter** Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \ \leq \ \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

Aufgabe 3 *Verbände* (4+2 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Verbände in Form ihrer Hasse-Diagramme.



1. Unter den Verbänden befinden sich zwei, die nicht distributiv sind. Geben Sie diese an und begründen Sie die Nichtdistributivität.
2. Geben Sie zum vierten Verband (der ganz rechts) zu jedem Element alle komplementären Elemente an.

Aufgabe 4 *Algebraische Strukturen* (2+3 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel einer nicht kommutativen Gruppe an und erläutern Sie, warum die Kommutativität verletzt ist.
2. Wir betrachten die regulären $n \times n$-Matrizen über einem Körper K

   $$GL(n, K) \ =_{\mathit{df}} \ \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

   Offensichtlich bildet $GL(n, K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

   $$SL(n, K) \ =_{\mathit{df}} \ \{A \in K^{n \times n} \mid \mathit{det}(A) = 1\}$$

   eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist.

Aufgabe 5 *Basis, Kern und Bild einer linearen Abbildung* (4+2 Punkte)

1. Geben Sie 4 verschiedene Charakterisierungen einer Basis eines Vektorraums an.
2. Sei
$$A =_{df} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
und $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung, d.h.: $\varphi_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Geben Sie Kern und Bild von φ_A an.

Aufgabe 6 *Rang einer Matrix* (10 Punkte)
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 *Wissensfragen* (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch (jew. 1 Punkt pro richtiger Antwort)? Begründen Sie insgesamt **zwei** Antworten ausführlich (jew. 2 Punkte pro richtiger Begründung). Falls mehr als zwei Antworten begründet wurden, machen Sie die zu wertenden Antworten kenntlich. Andernfalls werden die ersten beiden Antworten gewertet.

1. Ist $g \circ f$ injektiv, wobei $f : A \to B$ und $g : B \to C$, so muss sowohl f als auch g selbst injektiv sein.
2. Die Vereinigung zweier Äquivalenzrelationen (über derselben Grundmenge) ist im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation.
3. $\langle \mathbb{Z}_{31}, +_{31} \rangle$ besitzt keinen nichttrivialen Normalteiler.
4. Ein kommutativer nullteilerfreier Ring ist ein Körper.
5. Die Vektoren $(-4, 3, -1)^t$ und $(5, 7, 1)^t$ sind orthogonal zueinander.
6. Für eine 3×2-Matrix A kann die durch A bestimmte lineare Abbildung φ_A nicht injektiv sein.
7. Für $n \times n$-Matrizen gilt das Gesetz $det(A + B) = det(A) + det(B)$.
8. Ist S eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann lässt sich jeder Vektor in S als Linearkombination der übrigen Vektoren in darstellen.