Vorlesung Mathematik für Informatik I		
technische universität dortmund		Dr. O. Rüthing
WS 2018/2019	Klausur	07. Februar 2019

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ______________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	10	10	9	10	9	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: ______________ 2. Prüfer: ______________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) [**4+4+2=10 Punkte**]

Für Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ betrachten wir folgende aussagenlogische Formel:

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))) \qquad (*)$$

1. Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstabelle, dass gilt: $(*) \equiv \top$.

2. Beweisen Sie (*) unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Außerdem darf die übliche Definition der Implikation mittels der Standardoperatoren verwendet werden:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} =_{df} \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl.)}$$

   Führen Sie die Umformungen so durch, dass in jedem Schritt genau eine Regel verwendet und entsprechend benannt wird.

3. Geben Sie folgende Menge explizit unter Aufzählung aller ihrer Elemente an:

   $\mathfrak{P}(\emptyset) \times \mathfrak{P}(\{\emptyset, 1\}) =$

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[5+3+2=10 Punkte]**

1. Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ und die Relation $R \subseteq M \times M$ mit

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}.$$

Handelt es sich bei den im folgenden dargestellten Relationen um Äquivalenzrelationen, Partielle Ordnungen oder Quasiordnungen? Geben Sie gegebenenfalls die verletzen Eigenschaften an. Beweisen Sie **nicht** die erfüllten Eigenschaften.

(a) $R_1 =_{df} R$

(b) $R_2 =_{df} R \cup \{(a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b), (a, b)\}$

(c) $R_3 =_{df} R \cup \{(a, d)\}$

(d) $R_4 =_{df} R \cup \{(a, d), (c, a)\}$

2. Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Beweisen Sie:[1]

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \forall X, Y \subseteq A.\ f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Hinweis: Im Beweis der "$\Rightarrow$"–Richtung ist die Mengeninklusion $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ trivial. Es bleibt nur der Nachweis der umgekehrten Inklusionsbeziehung.

3. Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) =_{df} 2x$ und $g(x) =_{df} x + 1$. Ist die komponierte Funktion

$$f \circ g$$

injektiv/surjektiv? Beweisen Sie ihre Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

[1] $f(X)$ bezeichnet hier die mengenwertige Fortsetzung von f, also $f(X) =_{df} \{f(a) \mid a \in X\}$.

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Die Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} (\mathit{fib}\,(i))^2 = \mathit{fib}\,(n) \cdot fib\,(n+1)\,.$$

2. Die Menge $M \subseteq \{a, b\}^*$ von Zeichenreihen über dem Alphabet $\{a, b\}$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

   - $\varepsilon \in M$.
   - Wenn $w \in M$, dann auch $awb \in M$ und $bwa \in M$.
   - Wenn $w_1 \in M$ und $w_2 \in M$, dann auch $w_1 w_2 \in M$.

   Zeigen Sie mit Hilfe struktureller Induktion die folgende Aussage:

   $$\forall w \in M.\ \#_a(w) \ = \ \#_b(w)$$

   Dabei bezeichnet $\#_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $x \in \{a, b\}$ im Wort w.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) **[(2+1+2)+4 = 9 Punkte]**

1. Wir betrachten im Folgenden Intervalle von natürlichen Zahlen

$$[a,b] =_{df} \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{N}$. Für $x, y \in \mathbb{N}$ bezeichnet

$$I(x,y) =_{df} \{[a,b] \mid x \leq a \leq b \leq y\}$$

die Menge aller solcher Intervalle im Bereich von x bis y.

(a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Menge $I(1,3)$ mit der partielle Ordnung $\preceq$ definiert durch:

$$[a_1, b_1] \preceq [a_2, b_2] \quad \Leftrightarrow_{df} \quad (a_2 \leq a_1) \wedge (b_1 \leq b_2)$$

(b) Ist $(I(1,3), \preceq)$ ein Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

(c) Wir erweitern die Intervallmenge aus Teil 1. um das leere Intervall:

$$I_{[\,]}(x, y) =_{df} I(x, y) \cup \{[\,]\}$$

Zudem ergänzen wir $\preceq$ zu folgender partieller Ordnung basierend auf $i_1, i_2 \in I_{[\,]}(x, y)$:

$$\begin{aligned} i_1 \sqsubseteq i_2 \quad \Leftrightarrow_{df} \quad & i_1 = [\,] \vee \\ & ((i_1 \in I(x, y)) \wedge (i_2 \in I(x, y)) \wedge (i_1 \preceq i_2)) \end{aligned}$$

Handelt es sich bei $(I_{[\,]}(1, 2), \sqsubseteq)$ um einen Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

2. Sei $(V, \sqsubseteq) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen und $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung:

$$h_A : V \to V$$
$$h_A(X) = X \cup A$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h_A ist ein $\sqcap$-Homomorphismus für alle $A \subseteq \mathbb{N}$.

(b) h_A ist ein $\sqcup$-Homomorphismus für alle $A \subseteq \mathbb{N}$.

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus für alle $A \subseteq \mathbb{N}$.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[4+3+3 = 10 Punkte]**

1. Welche der folgenden Operationen $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ legt eine Halbgruppe auf $\mathbb{Z}$ fest? Beweisen oder widerlegen Sie. Untersuchen Sie im Falle, dass die Halbgruppeneigenschaft gegeben ist, auch ob ein neutrales Element existiert.

   (a) $a \circ b =_{df} a - b + 2$

   (b) $a \circ b =_{df} a + b + 2$

2. Geben Sie alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3 an (ohne Beweis!). Geben Sie außerdem für jeden nichttrivialen Normalteiler die Menge seiner Nebenklassen an.

3. Wir betrachten die regulären $n \times n$-Matrizen über einem Körper K

$$GL(n, K) =_{df} \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$

Offensichtlich bildet $GL(n, K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$SL(n, K) =_{df} \{A \in K^{n \times n} \mid det(A) = 1\}$$

eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Basen, Untervektorräume) **[4+5=9 Punkte]**

1. Gegeben sind folgende vier Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Geben sie jeweils (ohne Beweis)
   - eine Basis und
   - die Dimension

   des Untervektorraums an.

   (a) $V_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$

   (b) $V_2 =_{df} \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y\}$

   (c) $V_3 =_{df} V_1 \cap V_2$

   (d) $V_4 =_{df} V_1 + V_2$

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?[2] Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.[3]

   (a) $U_1 =_{df} \left\{(x, y)^t \mid x = |y|\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
   (b) $U_2 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid (x, y, z)^t \bullet (3, 6, -9)^t = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (c) $U_3 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid x = \max(y, z)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   (d) $U_4 =_{df} \left\{(x, y, z)^t \mid 3x - 15y + 2z = 7\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

[2] Es liegt stets der bekannte Körper $\langle\mathbb{R}, +, \cdot\rangle$ zugrunde.

[3] $|x|$ bezeichnet wie üblich den Absolutbetrag von x: Es gilt $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|x| = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 7 (Lineare Gleichungssysteme) [**6+4=10 Punkte**]
Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 2 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

1. Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
   (a) Geben Sie zu dem Gleichungssystem die erweiterte Koeffizientenmatrix an.
   (b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.
   (c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

2. Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_3$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

   (a) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix nach $\mathbb{Z}_3$.

   (b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.

   (c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_3$.

Name,Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Determinante einer Matrix) **[5+5=10 Punkte]**

1. Geben Sie die Menge aller $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an, für die die Matrix

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 4 & x-1 \\ 4 & 0 & -6 \\ y & 3 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Beachten Sie die Themenangabe zur Aufgabe!

2. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Entwickeln Sie im ersten Schritt nach der vierten Spalte.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Darstellende Matrix, Basiswechsel) **[4+6=10 Punkte]**
Gegeben seien die Vektorräume $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2$ sowie die lineare Abbildung $\varphi : U \to V$ mit der darstellenden Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Weiter seien B und B' zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b'}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sowie B'' eine Basis des $\mathbb{R}^2$ mit

$$B'' = \left\{ \vec{b''}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b''}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix zwischen den Basen B und B', also ${}_{B'}\left[id_{\mathbb{R}^3}\right]_B$.

2. Berechnen Sie **unter Verwendung der Basiswechselmatrix aus Aufgabenteil 1** die Matrix von φ bezüglich der Basen B und B'', also ${}_{B''}[\varphi]_B$.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Wissensfragen) [**12 Punkte**]

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch.

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Wahr/Falsch) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Wahr"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Falsch"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Die Vereinigung zweier Äquivalenzrelationen (über derselben Grundmenge) ist im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation.
2. $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$ ist gleichmächtig zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
3. Beim Teilbarkeitsverband $(\mathbb{N}, |)$ liegt ein Boolescher Verband vor.
4. Es gibt einen S_3-Gruppenendomorphismus $\varphi : S_3 \to S_3$, der den Zykel $(1\,2)$ auf den Zykel $(1\,2\,3)$ abbildet.
5. Es gibt keinen Körperhomomorhismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$.
6. Das kartesische Produkt zweier Integritätsbereiche ist in der Regel kein Integritätsbereich.
7. Sei $A \in K^{n\times m}$. Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ ist möglicherweise unlösbar, d.h.: $\mathbb{L} = \emptyset$.
8. Die durch eine 2×3-Matrix A bestimmte lineare Abbildung φ_A kann nicht injektiv sein.