

Vervollständigen Sie den unten angedeuteten Beweis zu folgender semantischer Äquivalenz:

$$\mathcal{B} \vee ((\mathcal{C} \vee (\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{A})) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$$

Ziehen Sie die unten dargestellten Umformungsschritte sowie die bei der jeweiligen Umformung verwendeten Gesetze und Definitionen an die entsprechende Stelle im Beweis. Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \vee ((\mathcal{C} \vee (\neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{A})) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \\ \equiv &\mathcal{B} \vee ((\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) && \text{(Idempotenz)} \\ \equiv &\mathcal{B} \vee \boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\mathcal{B} \vee \boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\mathcal{B} \vee \boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ \equiv &\boxed{\phantom{\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}}} \\ = &\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \end{aligned}$$

$$(\mathcal{B} \vee \neg \mathcal{A}) \vee \mathbf{F}$$

$$(\neg \mathcal{A} \vee (\mathcal{C} \wedge \neg \mathcal{C}))$$

$$((\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{C}))$$

$$((\mathcal{C} \vee \neg \mathcal{A}) \wedge (\neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{C}))$$

$$\mathcal{B} \vee (\neg \mathcal{A} \vee \mathbf{F})$$

$$\mathbf{F} \vee (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

(Kommutativität)

(Implikation)

(Absorption)

(De Morgan)

(Assoziativität)

(Idempotenz)

(Distributivität)

(Negation)

(Neutralität)

(Doppelnegation)

Ziehen Sie für jede der folgenden Mengen Elemente  $x \in M_i$  in den Bereich unterhalb der jeweiligen Menge  $M_i$ , so dass alle enthaltenen Elemente dargestellt sind.

$\{1\} \times \mathcal{P}(\{1\})$	$\{(x, y) \mid x \in \{1, 2\} \wedge y = 2x\} \setminus \{1, 2\}$	$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \setminus \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

- ☐  $\emptyset$
- ☐  $\{1\}$
- ☐  $\{2\}$
- ☐  $\{3\}$
- ☐  $\{1, 2\}$
- ☐  $\{2, 3\}$
- ☐  $\{1, 3\}$
- ☐  $\{1, 2, 3\}$
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐  $(1, \emptyset)$
- ☐  $(1, \{1\})$
- ☐  $(1, 1)$
- ☐  $(1, 2)$
- ☐  $(2, 4)$

Betrachten Sie die Menge  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$  mit 12 Elementen.  
Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(M)$ ?

Wählen Sie eine Antwort:

- ☐ a. 12
- ☐ b. 1
- ☐ c.  $2^{(2^{12})}$
- ☐ d.  $2^{12}$
- ☐ e.  $12!$

Sei  $M$  eine endliche Menge. Wie viele Elemente enthält  $\mathfrak{P}(M) \setminus \{\{m\} \mid m \in M\}$ ?

Wählen Sie eine Antwort:

- ☐ a.  $2^{|M|}$
- ☐ b.  $2^{|M|} - |M|$
- ☐ c.  $|M|$
- ☐ d. 0
- ☐ e. 1
- ☐ f.  $2^{|M|} - 1$
- ☐ g.  $|M^2| - 1$

Sei  $M$  eine endliche Menge. Wie viele Elemente enthält  $\mathfrak{P}(M) \setminus \{M\}$ ?

Wählen Sie eine Antwort:

- ☐ a. 0
- ☐ b.  $|M|$
- ☐ c.  $2^{|M|} - 1$
- ☐ d.  $2^{|M|} - |M|$
- ☐ e. 1
- ☐ f.  $|M^2| - 1$
- ☐ g.  $2^{|M|}$

Sei  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$  eine Menge mit 12 Elementen. Ferner bezeichnen  $M_{1,5} = \{x_1, \dots, x_5\}$  sowie  $M_{6,12} = \{x_6, \dots, x_{12}\}$  die Teilmengen von  $M$  mit den ersten 5 bzw. letzten 7 Elementen aus  $M$ .

Wie viele Elemente enthält die Menge  $\mathfrak{P}(M_{1,5}) \cap \mathfrak{P}(M_{6,12})$ ?

Wählen Sie eine Antwort:

- ☐ a. 12
- ☐ b.  $5!$
- ☐ c.  $2^{(2^{12})}$
- ☐ d. 1
- ☐ e.  $2^6$
- ☐ f.  $7^2$
- ☐ g. 0
- ☐ h.  $2^2$

Betrachten Sie die Menge der aussagenlogischen Formeln über der Variablenmenge  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{15}\}$  ( $M$  enthält 15 Elemente). Wie viele semantische Äquivalenzklassen gibt es?

Wählen Sie eine Antwort:

- ☐ a. 15
- ☐ b.  $2^{(2^{15})}$
- ☐ c. 15!
- ☐ d.  $2^{15}$
- ☐ e. 1

Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  und eine beliebige Aussage  $A(n, k)$  bezeichnet  $\operatorname{argmax}_{k \in \mathbb{N}}\{A(n, k)\}$  die größte Zahl  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $A(n, k)$  gilt. Gegeben sind folgende drei Funktionen:

1.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(n) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathbb{N}}\{\left(\sum_{i=1}^k i\right) \leq n\}$
2.  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(n) = n - \sum_{i=1}^{f(n)} i$
3.  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $h(n) = f(n) - g(n)$

Füllen Sie die unten stehende Wertetabelle aus.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$g(n)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
$h(n)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Sei zudem  $p(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert mit  $p(n) = (g(n), h(n))$ . Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, ob sie bijektiv, surjektiv oder injektiv sind. Bei Bijektivität ist nur diese zu nennen.

- $f(n)$  ist
- $g(n)$  ist
- $h(n)$  ist
- $p(n)$  ist

Gegeben sei die Menge  $M = \{a, b, c, d\}$  und die Relation  $S \subset M \times M$  mit  $S = \{(a, a), (b, b), (d, d)\}$ . Unten sehen Sie drei Spalten mit unterschiedlichen Definitionen einer weiteren Relation  $R \subset M \times M$ . Ordnen Sie folgende Informationen zu.

1. Tragen Sie in der ersten Reihe ein, ob es sich um eine (a) Quasiordnung, (b) partielle Ordnung und/oder (c) Äquivalenzrelation handelt. Nennen Sie alle zutreffenden Antworten.
2. In der zweiten Reihe nennen Sie *alle* verletzten Eigenschaften , die zu (a), (b) und (c) aus Schritt 1 gehören.
3. Nennen Sie pro verletzter Eigenschaft eine Begründung in der dritten Reihe.

**Wichtig:** Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen. Ziehen Sie ein Element *nicht* mehrfach in denselben Bereich.

$R := S$ ist eine	$R := S \cup \{(c, c), (c, d)\}$ ist eine	$R := S \cup \{(c, c), (c, d), (d, c)\}$ ist eine
$R$ verletzt:	$R$ verletzt:	$R$ verletzt:
Begründung:	Begründung:	Begründung:

Quasiordnung

partielle Ordnung

Äquivalenzrelation

Reflexivität

Symmetrie

Homomorphie

Antisymmetrie

Linkstotalität

Transitivität

$(c,d) \in R \wedge (d,c) \in R$

$(c,c) \notin R$

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R$

$(c,d) \in R \wedge (d,c) \in R \wedge c \neq d$

$(c,d) \in R \Rightarrow (d,c) \in R$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$5^{2n+1} - 5 \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar}$$



Die Veterinärin *Dr. Marie Huana* ist zu einem Forschungsergebnis gekommen, welches die Welt der Tiermedizin revolutioniert. Sie hat einen formalen Beweis dafür gefunden, dass alle Tiere die gleiche Anzahl an Beinen besitzen.

Dazu argumentiert sie mittels verallgemeinerter Induktion, dass in einer nicht-leeren Menge von  $n$  Tieren, alle Tiere gleich viele Beine besitzen:

**Induktionsanfang:** Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Für  $n = 1$  gilt offensichtlich, dass jedes Tier genau so viele Beine besitzt wie es selbst.

**Induktionsschluss:**

**Induktionsvoraussetzung:** Die Aussage gilt für ein beliebiges, aber fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}$ .

**Induktionsschritt:** Sei  $M = \{m_1, \dots, m_{n+1}\}$  eine  $n + 1$ -elementige Menge von Tieren. Diese Menge kann auf zwei  $n$ -elementige Teilmengen

$$\{m_1, \dots, m_n\} \text{ und } \{m_2, \dots, m_{n+1}\}$$

aufgeteilt werden. Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Tiere in den beiden Teilmengen gleich viele Beine. Da das Tier  $m_n$  in beiden Mengen vorkommt, folgt aufgrund der Transitivität von  $=$  (hier also die Gleichheit der Anzahl der Beine), dass alle  $n + 1$  Tiere gleich viele Beine besitzen.

Glauben Sie der Aussage der Veterinärin oder finden Sie einen Fehler in ihrer Argumentation? Begründen Sie ihre Antwort.

Sei  $A = \{a, b\}$  ein Alphabet. Wir definieren induktiv eine Sprache  $L \subseteq A^*$  wie folgt:

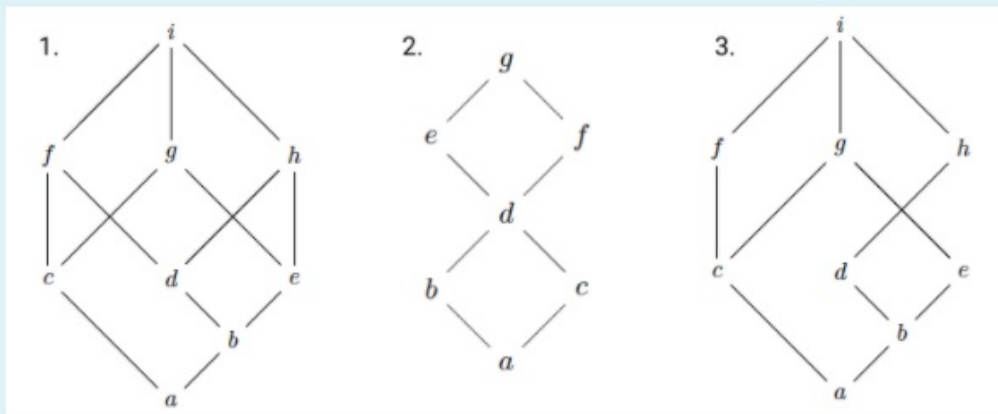
- $\varepsilon \in L$
- $a \in L$
- $b \in L$
- sei  $w \in L$ , dann ist auch  $a \cdot w \cdot a \in L$
- sei  $w \in L$ , dann ist auch  $b \cdot w \cdot b \in L$

wobei  $\cdot$  die bekannte Konkatination von Symbolen beziehungsweise Worten beschreibt.

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass alle Worte in  $L$  Palindrome<sup>a</sup> sind.

---

<sup>a</sup>Palindrome sind Worte welche sowohl vorwärts als auch rückwärts gelesen gleich sind.



Ermitteln Sie, ob es sich jeweils um keinen Verband, einen distributiven Verband oder einen nicht-distributiven Verband handelt.

Im Falle, dass es sich um keinen Verband oder einen nicht-distributiven Verband handelt, geben Sie zusätzlich an mit welcher der **unten angegebenen** Mengen von Elementen sich ein Gegenbeispiel konstruieren lässt.

Ziehen Sie dazu die unten angegebenen Labels auf die entsprechenden Stellen in der Tabelle.

Sollte es sich um einen distributiven Verband handeln, so lassen Sie den Eintrag "Gegenbeispiel" leer.

**Wichtig:** Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen.

1. ist	2. ist	3. ist
Gegenbeispiel	Gegenbeispiel	Gegenbeispiel

- {b, c}

{c, e, g}

Verband, nicht-distributiv

{a, b, e}

{c, d}

{c, h}

{c, d, g}

Verband, distributiv

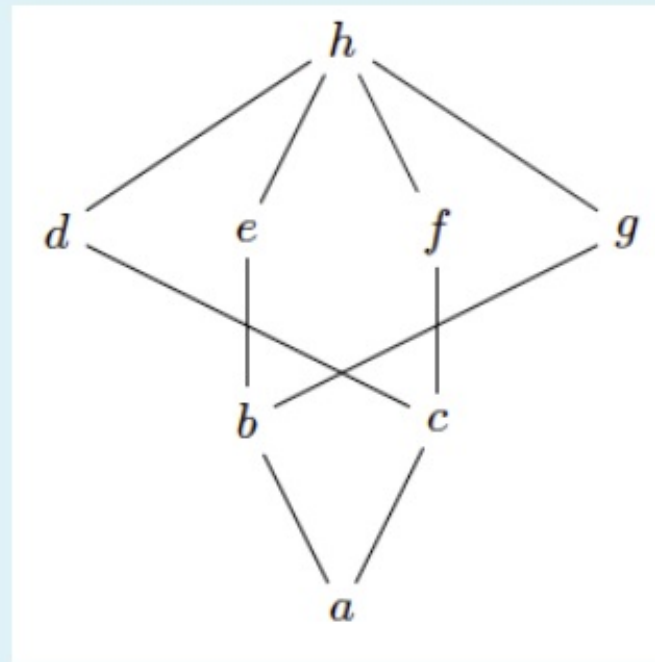
kein Verband

{d, e}

{f, g, h}

{c, e}

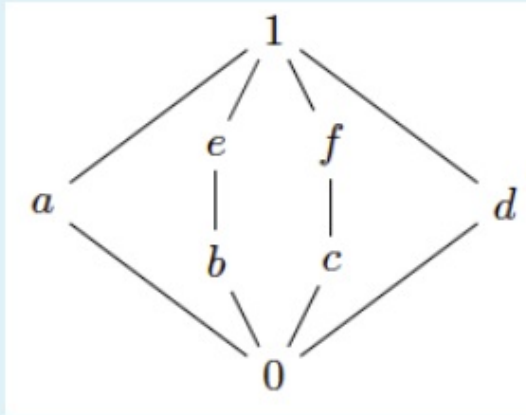
Betrachten Sie den folgenden Verband:



Geben Sie die folgenden Suprema und Infima an:

$\sup(b, d) =$	<input type="text"/>	$\inf(b, d) =$	<input type="text"/>
$\sup(b, g) =$	<input type="text"/>	$\inf(b, g) =$	<input type="text"/>
$\sup(c, d) =$	<input type="text"/>	$\inf(c, d) =$	<input type="text"/>
$\sup(c, f) =$	<input type="text"/>	$\inf(c, f) =$	<input type="text"/>
$\sup(d, g) =$	<input type="text"/>	$\inf(d, g) =$	<input type="text"/>
$\sup(e, f) =$	<input type="text"/>	$\inf(e, f) =$	<input type="text"/>
$\sup(f, g) =$	<input type="text"/>	$\inf(f, g) =$	<input type="text"/>

Betrachten Sie den folgende als Hasse-Diagramm gegebenen Verband.



Geben Sie zu jedem Element alle komplementären Elemente an.

**Beachten Sie:** Wir bezeichnen die Menge alle Komplemente von bspw.  $x$  hier vereinfacht als  $\bar{x}$ .

**Wichtig:** Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen.

$\bar{0}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{e}$	$\bar{f}$	$\bar{1}$

0

a

b

c

d

e

f

1

Bei welchen der folgenden Verbände handelt es sich um vollständige Verbände?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ a.  $(\mathbb{N}, \leq)$
- ☐ b.  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$  mit  $n \leq \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$
- ☐ c.  $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$  für jede Menge  $M$

Seien  $(A, \sqcup_A, \sqcap_A)$  und  $(B, \sqcup_B, \sqcap_B)$  algebraische Verbände und  $f: A \rightarrow B$  eine Funktion.

Wir betrachten weiter die zugehörigen ordnungsstrukturellen Verbände  $(A, \subseteq_A)$  und  $(B, \subseteq_B)$ .

Wählen Sie alle richtigen Aussagen:

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ a. Falls  $f$  ein Ordnungshomomorphismus, so ist  $f$  ein  $\sqcap$ -Homomorphismus
- ☐ b.  
Falls  $f$  ein  $\sqcap$ -Homomorphismus ist, so ist  $f$  ein Ordnungshomomorphismus
- ☐ c. Falls  $f$  ein  $\sqcup$ -Homomorphismus ist, so ist  $f$  ein Ordnungshomomorphismus
- ☐ d.  
Falls  $f$  ein Ordnungshomomorphismus, so ist  $f$  ein  $\sqcup$ -Homomorphismus
- ☐ e. Falls  $f$  **kein** Ordnungshomomorphismus, so ist  $f$  weder ein  $\sqcup$ -Homomorphismus noch ein  $\sqcap$ -Homomorphismus



Beweisen Sie: Die Menge aller Automorphismen einer Gruppe ist zusammen mit der Funktionskomposition selbst eine Gruppe.

**Hinweis:** Hierbei handelt es sich um Satz 8.28. Sie sollen die erforderlichen Eigenschaften explizit nachweisen und können den Satz **nicht** mit sich selbst beweisen!

Aus den Übungen ist bekannt, dass für einen Gruppen-Homomorphismus  $h$  unter anderem gilt:

$$\text{Kern}(h) = \{e_1\} \Rightarrow h \text{ ist injektiv.}$$

Gilt diese Eigenschaft auch für Monoid-Homomorphismen? Zeigen oder widerlegen Sie die Eigenschaft.

**Hinweis:**  $e_1$  bezeichnet hier das neutrale Element des Argument-Monoids von  $h$ .

Die folgende Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe  $S_3$  ist unvollständig. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

$\circ$	$()$	$(12)$	$(13)$	$(23)$	$(123)$	$(132)$
$()$						
$(12)$		$()$	$(132)$	$(123)$		$(13)$
$(13)$			$()$			
$(23)$			$(123)$	$()$	$(13)$	
$(123)$					$(132)$	
$(132)$				$(13)$		$(123)$

$()$

$(12)$

$(13)$

$(23)$

$(123)$

$(132)$

$\langle \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap \rangle$  ist kein Ring, weil i.A. keine additiv Inversen existieren.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ☐ Wahr  
☐ Falsch



$\mathbb{Z}$  ist kein Körper, weil  $\mathbb{Z}$  Nullteiler besitzt.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch

Seien  $x, y, z$  drei verschiedene Elemente. Vervollständigen Sie folgende Verknüpfungstabellen so, dass  $\langle \{x, y, z\}, \oplus, \odot \rangle$  ein Körper ist.

$\oplus$	$x$	$y$	$z$
$x$	$x$		
$y$			
$z$		$x$	

$\odot$	$x$	$y$	$z$
$x$			
$y$			
$z$		$z$	

$x$   $y$   $z$

Gegeben sei der Ring  $\langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot \rangle$ , mit  $+$  definiert als Matrixaddition und  $\cdot$  als Matrixmultiplikation. Sei

$$U =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\langle U, +, \cdot \rangle$  ein Unterring von  $\langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot \rangle$  ist.
- (b) Handelt es sich bei  $U$  auch um ein Ideal? Beweisen oder widerlegen Sie!

Gegeben sind folgende vier Untervektorräume des  $\mathbb{R}^4$ .

- (a)  $V_1 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 = 5x_2 \wedge x_3 = 2x_4\}$
- (b)  $V_2 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 = 3x_3\}$
- (c)  $V_3 =_{df} V_1 \cap V_2$
- (d)  $V_4 =_{df} V_1 + V_2$

Entscheiden Sie per Drag-and-Drop, ob mit den folgenden Mengen eine Basis eines  $V_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) vorliegt.

- $B_1 = \emptyset$
- $B_2 = \{(1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$
- $B_3 = \{(1, 0, 0, 0)^t, (0, 2, 3, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$
- $B_4 = \{(1, 0, 0, 0)^t, (0, 3, 2, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$
- $B_5 = \{(5, 3, 0, 0)^t, (0, 0, 2, 1)^t\}$
- $B_6 = \{(3, 5, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 2)^t\}$
- $B_7 = \{(5, 3, 2, 1)^t\}$
- $B_8 = \{(1, 0, 0, 0)^t, (3, 6, 4, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$
- $B_9 = \{(1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 1, 0)^t, (0, 0, 0, 1)^t\}$

**Wichtig:** Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen.

Basis $V_1$	Basis $V_2$	Basis $V_3$	Basis $V_4$	keine Basis

Seien  $\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  gegeben durch:

$$\vec{x} =_{df} (-4, 4, -4)^t$$

$$\vec{u} =_{df} (7, 8, -8)^t$$

$$\vec{v} =_{df} (2, 3, -2)^t$$

$$\vec{w} =_{df} (3, 2, 0)^t$$

Stellen Sie  $\vec{x}$  als Linearkombination der Vektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  dar.

**Hinweis:** Alle Koeffizienten sind ganzzahlig.

$$\vec{x} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} \quad \text{mit}$$

$$a = \boxed{\phantom{00}}, \quad b = \boxed{\phantom{00}} \quad \text{und} \quad c = \boxed{\phantom{00}}$$

Wir betrachten den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ -4x - 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem für  $\text{Kern}(\varphi)$  und  $\text{Bild}(\varphi)$ .

$$\text{ES1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ES2} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ES3} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ES4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ES5} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ES6} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Wählen Sie dazu jeweils eins der obigen Erzeugendensysteme (ES1 - ES6) aus.

Das Erzeugendensystem von  $\text{Kern}(\varphi)$  ist

Das Erzeugendensystem von  $\text{Bild}(\varphi)$  ist

Wir betrachten den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^2$  und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow V, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ -4x - 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

c) Sortieren Sie die folgenden Vektoren (u1 - u8) so ein, dass diese zum Kern( $\varphi$ ), Bild( $\varphi$ ) oder "Keins davon" gehören.

$$u1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad u3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad u4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u6 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad u7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u8 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$


**Wichtig:**


Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt.


Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet.


Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen.


Kern( $\varphi$ )	Bild( $\varphi$ )	Keins davon


 u1


 u2


 u3

 u4

 u5

 u6

 u7

 u8

Bestimmen Sie die Determinante der gegebenen  $10 \times 10$  Matrix  $A_2$ .

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 3 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -2 & -8 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Überführen Sie zunächst die obige Matrix in eine **Dreiecksmatrix** unter ausschließlicher Verwendung elementarer Vertauschungen von Zeilen.

Die enthaltenen Nullen müssen **nicht** eingetragen werden und werden auch **nicht gewertet**.

*Hinweis:* Die Werte sind ganzzahlig.


Geben Sie nun  $\det(A_2)$  an:



Gegeben seien die invertierbaren  $3 \times 3$ -Matrizen  $A$  und  $B$ .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie  $\det(B \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1})$ .

$$\det(B \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1}) = \boxed{\phantom{000}}.$$

*Hinweis:* Die Determinante ist ganzzahlig.

Es gibt eine lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit  $\text{Kern}(\varphi) = \langle (1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \rangle$ .

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ☐ Wahr
- ☐ Falsch