MafI 1 – Gedächtnisprotokoll zum 1. Klausurtermin WS 2012/2013

Aufgabe 1: *BOOLESCHE ALGEBRA*

$\big(A \vee \neg(C \vee (\neg B \vee C))\big) \equiv \big(A \Rightarrow (\neg B \vee C)\big)$ *(Boolesche Gleichung ähnlicher Art)*

a)
Zeigen Sie die semantische Äquivalenz der beiden oben aufgeführten Ausdrücke durch die aus der Vorlesung bekannten Gesetze (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, usw.) Wenden sie dazu zunächst die DeMorgan'schen Gesetze an, bis keine Klammern und höchstens Negationen vor den einzelnen Aussagen stehen. Verwenden sie dann andere Gesetze, um die Ausdrücke zu vereinfachen. (Die Implikation ist dabei wie üblich definiert durch: $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$)
b)
Zeigen Sie die semantische Äquivalenz der beiden oben aufgeführten Ausdrücke durch Wahrheitstafeln.

Aufgabe 2: *RELATIONEN & ORDNUNGEN*

Sei A={1,2,3,4}; R={(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4)} ∪ {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

1. a) Zeigen Sie, dass R eine Quasiordnung ist.
   b) Bestimmen Sie R^{-1} und zeigen Sie, dass es sich ebenfalls um eine Quasiordnung handelt.
   c) Bestimmen Sie $R \cap R^{-1}$ und zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.
   d) Bestimmen Sie die durch $R \cap R^{-1}$ induzierte Partition.
2. Verallgemeinreung der Teilaufgabe 1: Zeigen Sie, dass wenn R eine Quasiordnung ist, es sich bei $R \cap R^{-1}$ um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 3: *INDUKTIVES BEWEISEN*

a)
Die Fibonacci-Zahlen definieren sich für alle n ∈ ℕ folgendermaßen:

Fib(0) = 0; Fib(1) = 1; $Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2)\ \ \forall n \geq 2$

Zeigen sie, dass für alle n ∈ ℕ gilt: $\sum_{i=0}^{n} (Fib(i))^2 = Fib(n) \cdot Fib(n+1)$

b)
Die Menge aller positiven booleschen Terme ist wie folgt induktiv definiert:

- T und F sind boolesche Konstanten und gehören zu den positiven Termen
- Die Menge aller Variablen X gehört zu den positiven Termen. Ein x ∈ X kann immer nur für T oder F stehen
- Sind t_1 und t_2 positive Terme, so sind es auch $t_1 \vee t_2$ und $t_1 \wedge t_2$

Zeigen Sie: $\#_v(t) \leq 2 \cdot \#_o(t)$
wobei $\#_v(t)$ die Menge der Variablen und $\#_o(t)$ die Menge der Operatoren eines Terms t beschreiben

Aufgabe 4: *VERBÄNDE*

1. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen sie ihre Antworten.
   a) Ein endlicher Verband hat immer ein größtes und kleinstes Element.
   b) Jede partiell geordnete Menge mit größtem & kleinstem Element ist ein Verband.
2. Gegeben sei eine Funktion $h: V_1 \to V_2$ zwischen 2 Verbänden
   mit $(V_1, \lesssim_1) = (\mathbb{N}, |)$ und $(V_2, \lesssim_2) = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ und $h(x) = \begin{cases} \infty \text{ falls } x = 0 \\ x\ sonst \end{cases}$
   a) Ist $h: V_1 \to V_2$ ein Ordnungshomomorphismus?
   b) Ist h ein $\curlyvee$-Homomorphismus?
   c) Ist h ein $\curlywedge$-Homomorphismus?

Aufgabe 5: *ALGEBRAISCHE STRUKTUREN*

1.

Zeigen Sie: $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}, \oplus, \odot \right\rangle$ ist ein Körper. Dabei seien $\oplus$ und $\odot$ durch die übliche Matrizenaddition und –multiplikation definiert.

2. a) Sei $g: \langle G_1, \oplus_1, e_1 \rangle \rightarrow \langle G_2, \oplus_2, e_2 \rangle$ ein Monoidenhomomorphismus.
   Zeigen Sie: $g \text{ injektiv} \Rightarrow Kern(g) = \{e_1\}$

   b) Die in a) zu zeigende Aussage ist aus den Übungen zu algebraische Gruppen als Äquivalenz aufgetaucht. Geben Sie ein Gegenbeispiel für g an, dass zeigt, dass eben die Rückrichtung „$\Leftarrow$"im Allgemeinen bei Monoidenhomomorphismen nicht gilt.

Aufgabe 6: *LINEARE ABBILDUNGEN*

Sei $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung in einem Vektorraum V

1. Für $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist $\varphi(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   Welche der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ liegt in $Kern(\varphi)$, welche in $Bild(\varphi)$?
2. Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$ und $Bild(\varphi)$. Geben Sie auch jeweils ein Erzeugendensystem an. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.
3. Ist φ ein Isomorphismus?
4. Überlegen Sie Sich ein ϕ, sodass $Bild(\phi) = Kern(\phi)$

Aufgabe 7: *LINERARE GLEICHUNGSSYSTEME*

1. Gegeben sei folgendes LGS:

   $ax + by + dz = 6c$ *(a,b,d,e,f,g,h,k) waren ganze Zahlen zwischen 0 und 10*

   $ex - fy + gz = 3$

   $hx \quad\quad - kz = 12c$

   Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das LGS eindeutig lösbar? Geben Sie ggf. auch die Lösung an.
2. Gegeben sei die folgende 3x3 Matrix über dem Körper $\mathbb{Z}_7$:

   $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ Bestimmen Sie das Inverse A^{-1} durch das Gauss-Verfahren.

   (a,b,c,d,e,f,g,h,i) waren natürliche Zahlen zwischen 0 und 6

Aufgabe 8: *BASEN VON VEKTORRÄUMEN*

1. Geben Sie 4 Charakterisierungen einer Basis an.
2. Gegeben sind 5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie aus diesen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 9:

[…]

Aufgabe 10: *WISSENSFRAGEN*

1 Punkt pro richtiger Antwort, 2 Zusatzpunkte für eine korrekte Begründung (Max 3 Punkte pro Frage).

1. Jeder endliche Verband ist zugleich vollständig.
2. Die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist gleichmächtig mit $\mathbb{N}$.
3. Der Schnitt zweier Untermonoiden ist wieder ein Monoid.
4. Die symmetrische Gruppe $\langle S_4, \circ \rangle$ besitzt eine Untergruppe mit 10 Elementen.
5. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) = 1$.
6. $\{\vec{0}\}$ ist eine Basis des Nullvektorraums.
7. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind senkrecht zueinander.

[…]