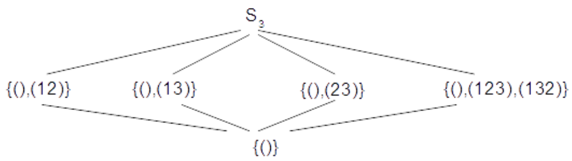
Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Verbände) **[(2+2)+2+4 = 10 Punkte]**

1. Sei S_3 die bekannte symmetrische Gruppe.

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm des Untergruppenverbandes der S_3.

   Lösung:



   (b) Ist der Untergruppenverband aus Teil a) distributiv? Begründen oder widerlegen Sie.

   Lösung: Es ist kein distributiver Verband. Es liegt ein typisches Pattern für Nicht-distributivität vor. Benennt man nämlich im Hassediagramm das kleinste und größte Element mit 0 und 1 und die Elemente der mittleren Schicht von links nach rechts mit a,b,c,d so gilt:

$$a \curlywedge (b \curlyvee c) = a \curlywedge 1 = a \neq 0 = 0 \curlyvee 0 = (a \curlywedge b) \curlyvee (a \curlywedge c)$$

2. Geben Sie jeweils ein Beispiel an (ohne Begründung) für:

   (a) einen distributiven, aber nicht Booleschen Verband.

   Lösung: Etwa $(\mathbb{N}, \leq)$ oder $(\mathbb{N}, |)$

   (b) einen distributiven, aber nicht vollständigen Verband.

   Lösung: Etwa $(\mathbb{N}, \leq)$ oder $(\mathfrak{P}(\mathbb{N})_{endl}, \subseteq)$, wobei $\mathfrak{P}(\mathbb{N})_{endl}$ die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind.

3. $(V, \preceq) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen und $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung:

$$h_A : V \to V$$
$$h_A(X) = X \cup A$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h_A ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus.

(b) h_A ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus.

Lösung:

(a) h ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus, denn es gilt für beliebige $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} h_A(X \curlywedge Y) &= (X \cap Y) \cup A \\ &\overset{\text{Distr.}}{=} (X \cup A) \cap (Y \cup A) \\ &= h_A(X) \cap h_A(Y) \\ &= h_A(X) \curlywedge h_A(Y) \end{aligned}$$

(b) h_A ist auch ein $\curlyvee$-Homomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned} h_A(X \curlyvee Y) &= (X \cup Y) \cup A \\ &\overset{\text{Idemp.}}{=} (X \cup Y) \cup (A \cup A) \\ &= (X \cup A) \cup (Y \cup A) \\ &= h_A(X) \cup h_A(Y) \\ &= h_A(X) \curlyvee h_A(Y) \end{aligned}$$

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus. Dieses folgt gemäß Satz 7.19 direkt aus Teil (b) oder (c).

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Algebraische Strukturen) **[4+4+2=10 Punkte]**

1. Die folgende Verknüpfungstafel einer *kommutativen* Gruppe mit den vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ lässt sich auf genau eine Weise vervollständigen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge und begründen Sie, dass diese in eindeutiger Weise festliegen.

$\circ$	a	b	c	d
a				b
b	d			a
c				
d				c

Tipp: Bestimmen Sie zuerst das neutrale Element.

Lösung: Wegen der Rechts- und Linkskürzungsregeln muss es in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag der Elemente aus $\{a, b, c, d\}$ geben. Da der d-Eintrag für Zeile c in Spalte d fehlt muss c das neutrale Element sein. Es folgen damit sofort die Einträge:

$\circ$	a	b	c	d
a			a	b
b	d		b	a
c	a	b	c	d
d			d	c

Mit der Kommutativität ergänzt man dann leicht zu

$\circ$	a	b	c	d
a		d	a	b
b	d		b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Die beiden fehlenden Einträge sind wegen der Eindeutigkeit der Zeilen und Spalteneinträge klar und wir erhalten:

$\circ$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

2. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine beliebige Gruppe und $\alpha : G \to G$ ein Gruppenautomorphismus (d.h. bijektiver Gruppenhomomorphismus auf G).

   Zeigen Sie, dass
   $$U_\alpha =_{df} \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}.$$
   eine Untergruppe von G ist.

   Lösung:

   Neutrales Element: Sei e das neutrale Element von G. Offensichtlich gilt $\alpha(e) = e$ (gilt bereits für beliebige Gruppenendomorphismen), also $e \in U_\alpha$.

   Abgeschlossenheit: Seien $g, h \in U_\alpha$. Dann gilt:
   $$\alpha(g \oplus h) \overset{\text{Homom.}}{=} \alpha(g) \oplus \alpha(h) \overset{g,h \in U_\alpha}{=} g \oplus h$$
   und somit $g \oplus h \in U_\alpha$.

   Existenz der Inversen: Sei $g \in U_\alpha$. Dann existiert ein Inverses g^{-1} in in G. Wir zeigen, dass dieses ein Element von U_α ist.
   $$\alpha(g^{-1}) \overset{\text{Homom.}}{=} \alpha(g)^{-1} \overset{g \in U_\alpha}{=} g^{-1}$$
   und somit $g^{-1} \in U_\alpha$.

3. Geben Sie ein Beispiel eines nicht kommutativen Ringes an und zeigen Sie die Nichtkommutativität anhand eines Beispiels.

Lösung:
Ein einfaches Beispiel ist $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die Menge der 2×2-Matrizen. Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation folgt aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Vektorräume, Untervektorräume) **[2+2+2+2=8 Punkte]**

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $U_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid x = y = 3z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
2. $U_2 =_{df} \left\{\left(a + b, b^2\right)^t \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^2$.
3. $U_3 =_{df} \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $U_4 =_{df} \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \textit{bijektiv}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Lösung:

1. U_1 ist ein Untervektorraum: Seien $\vec{v}, \vec{w} \in U_1$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt:

   (a)
   $$\vec{v} + \vec{w} \quad = \quad \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

   mit

   $$\begin{aligned} v_1 + w_1 &= (3v_3 + 3w_3) \\ &= 3(v_3 + w_3) \\ \text{und} & \\ v_2 + w_2 &= (3v_3 + 3w_3) \\ &= 3(v_3 + w_3) \end{aligned}$$

   (b)
   $$s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} sv_1 \\ sv_2 \\ sv_3 \end{pmatrix}$$

   mit

   $$\begin{aligned} sv_1 &= s(3v_3) \\ &= 3(sv_3) \\ \text{und} & \\ sv_2 &= s(3v_3) \\ &= 3(sv_3) \end{aligned}$$

2. Es liegt kein Untervektorraum vor:

   Es ist $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Die Quadrate der Elemente von $\mathbb{Z}_5$ sind $0,1$ und 4, da $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 \mod 5 = 4$ und $4^2 \mod 5 = 1$.

   Es gilt für das Element $(0,1) = (4+1, 1^2) \in \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}$ und für $2 \in \mathbb{Z}_5$

   $$2 \cdot (0,1) = (0,2) \notin \left\{\left(a+b, b^2\right) \mid a,b \in \mathbb{Z}_5\right\}.$$

3. Mit U_3 liegt ein Untervektorraum vor:

   (a) U_3 ist offensichtlich nicht leer, da $id \in U_3$

   (b) Seien $f, g \in U_3$, dann gilt:

   $$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= -f(x) - g(x) \\ &= -(f+g)(x) \end{aligned}$$

   (c) Sei $f \in U_3$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt:

   $$\begin{aligned} s \cdot f(-x) &= s \cdot (-f(x)) \\ &= -(s \cdot f)(x) \end{aligned}$$

   und

4. U_4 ist kein Untervektorraum: Wir betrachten die Funktionen $f(x) = -x$ und $g(x) = x^3$. Beide Funktionen sind bijektiv, somit gilt $f, g \in U_4$. Es gilt aber:

   $$\begin{aligned} (g+f)(x) &= x^3 - x \\ &= x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

   somit hat $(f+g)(x)$ drei unterschiedliche Nullstellen und ist nicht bijektiv.