

VORLESUNG
MATHEMATIK FÜR INFORMATIKER I



PROF. DR. B. STEFFEN

WS 2013/14

KLAUSUR

29. MÄRZ 2014

Name: _____ Vorname: _____

Matrikelnummer: _____ Studiengang: _____

Unterschrift: _____

Pseudonym (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): _____

Ihre Klausurnote wird unter dem gewählten Pseudonym online veröffentlicht. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Pseudonym, welches nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann! Bitte schreiben Sie leserlich und prägen Sie sich Ihr gewähltes Pseudonym gut ein.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	8	10	10	10	10	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: _____

2. Prüfer: _____

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen)**[6+3+1 = 10 Punkte]**

A und B seien Mengen über einer gemeinsamen Grundmenge M .

1. Beweisen Sie schrittweise die Gleichheit

$$((A \cap B^c) \cap (B \cap A^c)^c) \cup B = A \cup B$$

unter ausschließlicher Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Mengengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplement, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität).

Geben Sie in jedem Beweisschritt die jeweils verwendeten Regeln an.

2. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Mengen A und B gilt:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B.$$

3. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelation, Quasiordnung)**[4+4=8 Punkte]**

1. Betrachten Sie die wie folgt definierte Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$a R b \Leftrightarrow_{df} (a \bmod 4) \mid (b \bmod 4) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Erinnerung: Hierbei bezeichnet „ \mid “ die Teilbarkeitsrelation auf ganzen Zahlen, die wie folgt definiert ist:

$$a \mid b \Leftrightarrow_{df} \exists k \in \mathbb{Z}. b = a \cdot k \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Beweisen Sie: R ist eine Quasiordnung.
- (b) Ist R auch eine totale Quasiordnung? Begründen Sie!

2. Sei M eine beliebige Menge, und sei $R \subseteq M \times M$ eine totale Quasiordnung auf M . Beweisen Sie:

(a) $R \cap R^{-1}$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) $R \cup R^{-1} = M \times M$.

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen)

[4+6=10 Punkte]

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$5 \text{ teilt } 6^n + 4.$$

2. Die Menge $Pal =_{df} \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom gerader Länge}\}$ kann induktiv definiert werden als die kleinste Menge, für die gilt:¹

- $\varepsilon \in Pal$.
- Wenn $w \in Pal$, dann auch $awa, bwb \in Pal$.

Zeigen Sie mit struktureller Induktion die folgende Aussage:

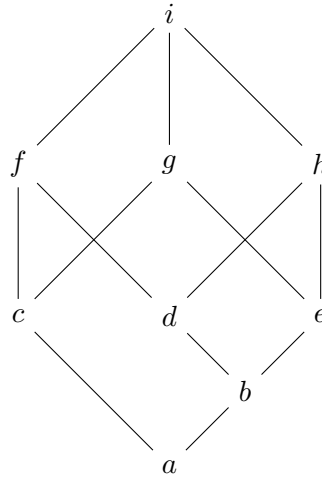
$$\forall w \in Pal. \#_a(w) \text{ ist gerade.}$$

Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens „a“ im Wort w .

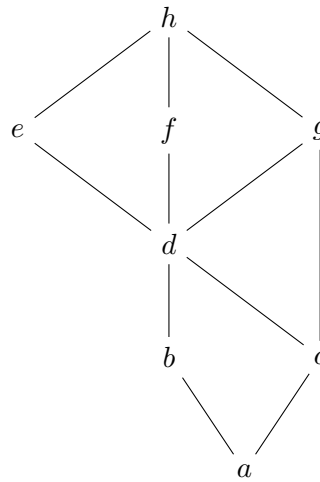
¹Generell sind Palindrome Worte, die vorwärts und rückwärts gelesen übereinstimmen.

Aufgabe 4 (Verbände)**[2+3+5=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie, dass die durch das folgende Hasse-Diagramm dargestellte Halbordnung kein Verband ist:



2. Zeigen Sie, dass der folgende Verband nicht distributiv ist:



3. (V, \wedge, \vee) sei ein distributiver Verband und a und b zwei Elemente von V mit $a \preceq b$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f: V \rightarrow V$, definiert durch

$$f(x) =_{df} (x \vee a) \wedge b \quad \text{für alle } x \in V,$$

- (a) ein \wedge -Homomorphismus und
- (b) ein \vee -Homomorphismus ist.

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Gruppen)**[4+2+4=10 Punkte]**

1. Die folgende Verknüpfungstafel einer kommutativen Gruppe mit den vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ lässt sich auf genau eine Weise vervollständigen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge und begründen Sie, dass diese in eindeutiger Weise festliegen.

\circ	a	b	c	d
a				
b			a	
c			d	
d			c	b

Tipp: Bestimmen Sie zuerst das neutrale Element.

2. Wir betrachten die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe S_4 und die Hintereinanderausführung jeweils zweier in Zykelschreibweise gegebener Permutationen. Geben Sie das Resultat ebenfalls in Zykelschreibweise an:

(a) $(1\,2\,3\,4) \circ (1\,3\,4) =$

(b) $(1\,4\,2) \circ (1\,3\,4) =$

3. Sei $n \geq 2$ und S_n die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$U_n \stackrel{\text{df}}{=} \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = 1\}$$

eine Untergruppe von S_n ist.

Aufgabe 6 (Ringe und Körper)**[6+4=10 Punkte]**

1. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für:

- (a) einen Ring, der kein kommutativer Ring ist.
- (b) einen kommutativen Ring, der kein Integritätsbereich ist.
- (c) einen Integritätsbereich, der kein Körper ist.

Begründen Sie für jedes Ihrer Beispiele, warum die weitergehende Eigenschaft verletzt ist.

2. Sei U die Menge der 2×2 -Matrizen über dem Körper \mathbb{R} , deren Eintrag für die zweite Zeile und erste Spalte Null ist. Also

$$U =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Offensichtlich bildet U mit der Matrizenaddition und -multiplikation einen Unterring von $\langle \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot \rangle$, was hier ohne Nachweis vorausgesetzt werden kann.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} =_{df} a$ ein Ringhomomorphismus von $\langle U, +, \cdot \rangle$ nach $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ist.

Aufgabe 7 (Vektorräume, Untervektorräume)**[3+3+4=10 Punkte]**

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume \mathbb{R}^2 bzw. $(\mathbb{Z}_5)^2$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $\{(a + b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. $\{(a + b, b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $\{(a + b, b^2) \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^2$.

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Lineare Unabhängigkeit)**[3+7=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie: die Menge $M =_{df} \{(0, 4, 1, 0)^t, (1, 2, 4, -1)^t, (2, 2, 1, -2)^t, (3, 0, 4, -3)^t\}$ ist eine linear abhängige Menge von Vektoren des Vektorraums \mathbb{R}^4 .

2. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} =_{df} \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $f_1(x) =_{df} 2^x$, $f_2(x) =_{df} x^2$ und $f_3(x) =_{df} 2x$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Beachten Sie, dass die Funktionen f_1, f_2 und f_3 linear unabhängig sind, wenn die Gleichung

$$a \cdot f_1 + b \cdot f_2 + c \cdot f_3 = \mathbf{0}$$

über Variablen $a, b, c \in \mathbb{R}$ nur die triviale Lösung $a = b = c = 0$ hat, wobei $\mathbf{0}$ die konstante Nullfunktion ist.

Aufgabe 9 (Gleichungssystem, Rang einer Matrix)**[8+2=10 Punkte]**

1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix $A \in (\mathbb{Z}_3)^{4 \times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Betrachten Sie erneut die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Wert hat $\det(A)$?

Aufgabe 10 (Wissensfragen)**[8+2+2=12 Punkte]**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch (jew. 1 Punkt pro richtiger Antwort)? Begründen Sie insgesamt **zwei** Antworten ausführlich (jew. 2 Punkte pro richtiger Begründung). Falls mehr als zwei Antworten begründet wurden, machen Sie die zu wertenden Antworten kenntlich. Andernfalls werden die ersten beiden Antworten gewertet.

Hinweis: Anders als in der Probeklausur ist für die Begründungen eine Differenzierung zwischen „wahr“- und „falsch“-Antworten **nicht** vorgesehen.

1. Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}^3$.
2. Die Verknüpfung einer injektiven Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit einer surjektiven Abbildung $g : B \rightarrow C$ ergibt eine bijektive Abbildung $g \circ f : A \rightarrow C$.
3. In einem Verband (V, \preceq) ist jeder \wedge -Homomorphismus auch ein Ordnungshomomorphismus.
4. Die Rechtskürzungsregel $(a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c)$ gilt allgemein in Monoiden.
5. Die symmetrische Gruppe S_5 hat eine Untergruppe mit 11 Elementen.
6. In einer Abelschen Gruppe ist jede Untergruppe auch ein Normalteiler.
7. Es gibt keinen Vektorraumisomorphismus von \mathbb{R}^5 nach \mathbb{R}^3 .
8. $\{\vec{0}\}$ ist eine Basis des Nullvektorraums $V_0 =_{df} \{\vec{0}\}$.

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name, Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen