Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen) **[5+5=10 Punkte]**

1. Seinen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz[1]

$$\neg\Big(\mathcal{A} \wedge \big(\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big)\Big) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

[1]Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist wie üblich mit Hilfe der Standardoperatoren definiert: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

2. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz aus Teil 1) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[5+3+2=10 Punkte]**

1. Sei $z \in \mathbb{Z}$ und $\equiv_z \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Relation definiert durch:[2]

$$x \equiv_z y \;\;\Leftrightarrow_{df}\;\; z \,|\, (y - x).$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_z$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

[2] Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$ ist definiert wie üblich, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{Z}$: $a|b \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists\, z \in \mathbb{Z}.\; a \cdot z = b$.

2. Sei auf den Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, also auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eine Relation $\sqsubsetsim$ definiert durch:

$$f \sqsubsetsim g \;\Leftrightarrow_{df}\; \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\sqsubsetsim$ um eine Quasiordnung handelt. Ist $\sqsubsetsim$ auch eine partielle Ordnung? Begründen Sie Ihre Meinung!

3. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) =_{df} (x \cdot y, \frac{x}{y})$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Beweisen oder widerlegen Sie.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen) [5+5=10 Punkte]

1. Die bekannte Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

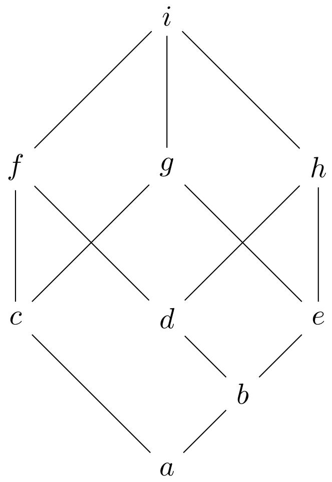
Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

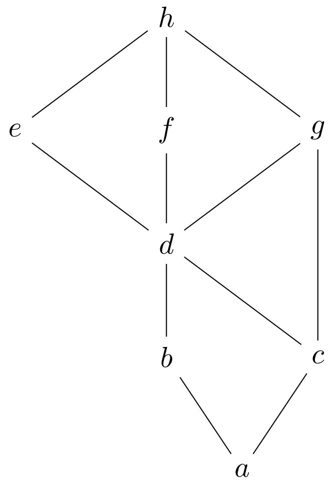
2. Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

Aufgabe 4 (Verbände) **[2+3+3=8 Punkte]**

1. Zeigen Sie, dass die durch das folgende Hasse-Diagramm dargestellte Halbordnung *kein* Verband ist:



2. Zeigen Sie, dass der folgende Verband *nicht* distributiv ist:



3. Handelt es sich bei der Funktion $h : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, |)$ mit $h(n) =_{df} n + 3$ um einen Ordnungs-, $\curlyvee$- bzw. $\curlywedge$-Homomorphismus?

Aufgabe 5 (Gruppen) [**5+5=10 Punkte**]

1. $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ ist für $n \geq 1$ eine Gruppe.

   Gegeben sind die Abbildungen $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7$, definiert durch $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2$ mit $g(n) = n^2 \mod 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche dieser Funktionen ist ein Gruppenhomorphismus, welche nicht. Begründen Sie Ihre Aussage durch einen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.

   Hinweis: Für $a, b, k \in \mathbb{N}$ $(k > 0)$ gilt: $(a + b) \mod k = (a \mod k + b \mod k) \mod k$.

2. Es sei $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \to G$ durch

$$a \odot b \ =_{df} \ a \cdot x \cdot b$$

definiert.

Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ ebenfalls eine Gruppe bildet.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Ringe und Körper) [**6+4=10 Punkte**]

1. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für:
   (a) einen Ring, der kein kommutativer Ring ist.
   (b) einen kommutativen Ring, der kein Integritätsbereich ist.
   (c) einen Integritätsbereich, der kein Körper ist.

   Begründen Sie für jedes Ihrer Beispiele, warum die weitergehende Eigenschaft verletzt ist.

2. Gegeben sei der Ring $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, \oplus, \odot \rangle$, mit $\oplus$ definiert als Matrixaddition und $\odot$ als Matrixmultiplikation. Sei
$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
Zeigen Sie, dass $\langle R, \oplus, \odot \rangle$ kommutativer Unterring mit „1“ (multiplikativem Einselement) von $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, \oplus, \odot \rangle$ ist.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 7 (Basis eines Vektorraums) **[3+7= 10 Punkte]**

Gegeben sind die Untervektorräume $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}$ und $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^4$.

1. Geben Sie jeweils eine Basis für U und V an. Der Nachweis der Basiseigenschaft ist nicht erforderlich.

2. Geben Sie eine Basis für $U \cap V$ an. Beweisen Sie die Basiseigenschaft!

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Determinanten) **[5+5=10 Punkte]**

1. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die folgende 3×3 Matrix invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4-x & 0 & 2 \\ x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

2. Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante von A, indem Sie im ersten Schritt nach der ersten Spalte entwickeln.

Aufgabe 9 (Basistransformation) **[2+8=10 Punkte]**

Gegeben sind die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $E_3 = \{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ und $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $E_2 = \{(1,0)^t, (0,1,)^t\}$. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die Matrix ${}_{E_2}[\varphi]_{E_3}$ von φ bezüglich der Standardbasen E_3 und E_2 an.

2. Bestimmen Sie die Matrix ${}_{B_2}[\varphi]_{B_3}$ von φ, wenn für $\mathbb{R}^3$ die Basis $B_3 = \{(1,2,-1)^t, (2,-1,2)^t, (3,1,-1)^t\}$ und für $\mathbb{R}^2$ die Basis $B_2 = \{(1,2)^t, (2,3)^t\}$ zugrunde gelegt wird.

Aufgabe 10 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Die Idempotenz der Mengenvereinigung folgt allein aus den Absorptionsgesetzen.
2. Unter den ca. 180 Klausurteilnehmern erreichen mindestens zwei exakt dieselbe Punktzahl.[3]
3. Das kartesische Produkt zweier Integritätsbereiche ist wieder ein Integritätsbereich.[4]
4. Die Rechtskürzungsregel ($a \oplus b = c \oplus b \Rightarrow a = c$) gilt allgemein in Monoiden.
5. Die symmetrische Gruppe S_5 hat eine Untergruppe mit 11 Elementen.
6. Es gibt keinen Vektorraumisomorphismus von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^3$.
7. Es gibt keine Relation, die sowohl Äquivalenzrelation als auch partielle Ordnung ist.
8. Für $n \times n$-Matrizen gilt das Gesetz $det(A + B) = det(A) + det(B)$ nicht.

[3] Dabei sei vereinfachend angenommen, dass nur ganzzahlige Gesamtpunktzahlen zwischen 0 und 100 Punkten vergeben werden.

[4] Wobei die additive und multiplikative Verknüpfung durch komponentenweise Anwendung der beteiligten Ringoperationen festgelegt ist.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen