Diese Aufgabensammlung soll Studierende auf die Klausur zur Vorlesung „Mathematik für Informatik 1“ im Wintersemester 2014/2015 vorbereiten. Es sind einfachere und schwierigere Aufgaben vorhanden. Am Anfang jedes Themenbereiches findet sich eine kleine Übersicht wichtiger Begriffe, die vielleicht vor Bearbeitung der entsprechenden Aufgaben kurz wiederholt werden sollten.

Diese Aufgabensammlung ist etwas anders strukturiert als die Vorlesung und deckt nicht alle der behandelten Themen in ihrer ganzen Breite ab. Insbesondere gibt es zu manchen Aufgabentypen mehr, zu manchen weniger Aufgaben.
Jedoch wird hoffentlich ein grober Überblick vermittelt, welche Themengebiete und Aufgabentypen in den Übungsblättern behandelt wurden.

In diesem Sinne: Viel Erfolg bei der Klausur!
Und auf dass diese Aufgaben bei der Klausurvorbereitung tatsächlich hilfreich sind! ;-)

Aufgabe 1 *logische Aussagen*

Du wirst von einem Gericht wegen eines Mordes zum Tode verurteilt. Kurz bevor du hingerichtet werden sollst, kommt ein Wärter zu dir und sagt:
„Du hast die Wahl, wie du hingerichtet werden sollst. Du darfst eine Aussage treffen. Ist sie *wahr*, so wirst du auf dem elektrischen Stuhl getötet, ist sie hingegen *falsch*, so wirst du mit einer Giftspritze hingerichtet.“

Du möchtest natürlich eine Aussage treffen, sodass du weder auf die eine noch auf die andere Weise umgebracht werden kannst. Welche ist das?

Aufgabe 2 *Wahrheitstafeln*

Überprüfe folgende Aussagen mithilfe einer Wahrheitstafel auf Richtigkeit!

(a) $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(b) $(C \vee (\neg D)) \wedge (\neg C) \equiv (C \wedge D) \wedge ((\neg C) \vee (\neg D))$

(c) $(E \Rightarrow F) \equiv (\neg E \vee F)$

Aufgabe 3 *Quantoren*

Beschreibe in eigenen Worten, was die quantorisierten Aussagen bedeuten!
Gib außerdem zu jeder Aussage ihren Wahrheitswert (mit Begründung) an!

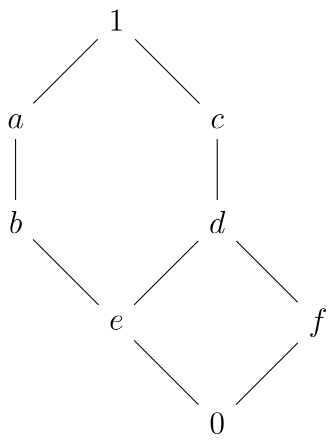
(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon n = 2k$

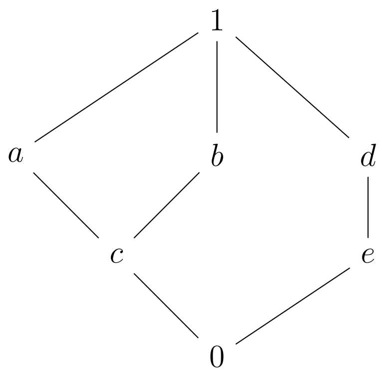
(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon k = 5n$

(c) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon k = 5n$

Aufgabe 4 *distributive Verbände*

Sind die folgenden Verbände jeweils distributiv? Gib ggf. ein Gegenbeispiel an!





Thema *Induktion*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Induktionsanfang
- Induktionsvoraussetzung, Induktionsschritt
- Backus-Naur-Form (BNF)

Aufgabe 5

Beweise per vollständiger Induktion: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ ist dasselbe wie n^2.

Aufgabe 6

Zeige die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5\colon\ 2n+1 < n^2 < 2^n < n!$$

Hinweis: Obige Aussage enthält drei Ungleichungen. Man beweise diese Ungleichungen jeweils durch separate Induktionen – oder zumindest in separaten Induktionsschritten.

Aufgabe 7 *induktives Definieren*

(a) Betrachte die Funktion $f(n) = n^2 - n$ für $n \in \mathbb{N}$. Stelle eine induktive Definition von f auf und verwende dabei nur den Additionsoperator „+“!

(b) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) &:= \tfrac{1}{2}, \\ f(n+1) &:= \tfrac{1}{2}\left(f(n) + \tfrac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Schreibe f in expliziter Form, also ohne Induktion bzw. Rekursion!

Aufgabe 8

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Thema *Relationen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- kartesisches Produkt, Relation, Umkehrrelation
- Reflexivität, Transitivität, Symmetrie, Antisymmetrie
- Quasiordnung, Äquivalenzrelation, Partition
- partielle Ordnung (Halbordnung), totale Ordnung

Aufgabe 9

Es sei M die Menge aller Menschen. S sei die Menge aller Städte, die mehr als 1000 Einwohner haben.

Überprüfe die angegebenen Relationen auf der gegebenen Menge jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität! Begründe deine Antworten kurz!

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(a,b) \in M \times M \colon a \text{ und } b \text{ haben ein gemeinsames Kind.}\} \\
R_2 &:= \{(a,b) \in M \times M \colon a \text{ und } b \text{ haben denselben Vater.}\} \\
R_3 &:= \{(c,d) \in S \times S \colon c \text{ hat mehr Einwohner als } d\} \\
R_4 &:= \{(c,d) \in S \times S \colon \text{Es gibt eine Straße von } c \text{ nach } d.\} \\
R_5 &:= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m < n\} \\
R_6 &:= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m = n\}
\end{aligned}$$

Bei R_4 seien Einbahnstraßen mal außer Acht gelassen. ;-)

Aufgabe 10

Betrachte die folgende Relation auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon (\lambda x_1, \lambda x_2) = (y_1, y_2)$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist!

Aufgabe 11

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um eine partielle Ordnung auf der Menge $M := \{a, b, c\}$?

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(a,a), (b,a), (b,b)\} \\
R_2 &:= \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,c)\} \\
R_3 &:= \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,c)\}
\end{aligned}$$

Gib ggf. an, aus welchem Grund keine partielle Ordnung vorliegt!

Aufgabe 12

Überprüfe die angegebenen Relationen auf der Menge $M := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ jeweils auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität!
Welche der Relationen ist demzufolge eine Quasiordnung, welche eine Äquivalenzrelation und welche eine partielle Ordnung?

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma)\}\\
R_2 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\}\\
R_3 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma)\}\\
R_4 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\}
\end{aligned}$$

Hier sind keine Begründungen gefordert, eine simple Tabelle zum Ankreuzen genügt.

Thema *Abbildungen und Funktionen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Bild und Urbild, Kern
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Aufgabe 13

Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv, welche surjektiv, weche sogar bijektiv? Gib jeweils auch Begründungen an!

$f_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \text{Quersumme von } n$
$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor = \text{„}x \text{ abgerundet“}$
$f_3 \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$
$f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 42x + 5$
$f_5 \colon$ in Deutschland vergebene Postleitzahlen $\to$ Städte und Gemeinden in Deutschland
$f_6 \colon$ Studierende der TU Dortmund $\to \mathbb{N},$ Studierender $\mapsto$ Matrikelnummer

Dabei sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der reellen Zahlen ohne die Null.

Aufgabe 14

Seien $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{2, 4, 6\}$. Sei $f \colon A \to B$ definiert durch

$$f(1) := 2, \quad f(2) := 2, \quad f(3) := 6, \quad f(4) := 2, \quad f(5) := 6.$$

Was ist die Bildmenge unter f? Bestimme auch alle Urbilder von f!

Aufgabe 15

Es bezeichne $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ das Intervall zwischen a und b einschließlich.
Sei nun die Abbildung $f \colon [-1, 4] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 4x - 5$ gegeben. Gib Bild f und Kern f an!

Thema *Algebraische Strukturen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- neutrales Element, inverses Element
- Halbgruppe, Gruppe, Untergruppe
- Ring, Körper
- Gruppenhomomorphismus, Ringhomomorphismus
- Symmetrische Gruppe, Permutation

Mache dir auch noch einmal klar (z. B. mit einem Diagramm), welche Zusammenhänge zwischen den algebraischen Strukturen bestehen, die in der Vorlesung behandelt wurden!

Aufgabe 16

Entscheide jeweils, ob die vorliegenden Strukturen Gruppen sind!

(a) $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

(d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$

Aufgabe 17

Sei eine Verknüpfung $*\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$a * b := a + b - a \cdot b \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

definiert. Betrachte ferner die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(a) Zeige, dass $*$ auf G abgeschlossen ist, d. h. für alle $a, b \in G\colon a * b \neq 1$ gilt!

(b) Zeige, dass $(G, *)$ eine Gruppe bildet!

(c) Entscheide mit Begründung oder Gegenbeispiel, ob diese Gruppe auch kommutativ ist!

Aufgabe 18 *Verknüpfungstafeln*

(a) Stelle jeweils die Verknüpfungstafeln von $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ auf!

(b) Es ist bekannt, dass $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe darstellt. Zeige mithilfe der Verknüpfungstafel, dass $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist!

Aufgabe 19

Prüfe, ob $M := \{M_{a,b} \colon a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ die Menge aller Matrizen $M_{a,b}$ mit

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}_2$ einen Körper bildet!

Aufgabe 20 *Exponentialfunktion*

Sei $f \colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ mit $f(x) := e^x$ die aus der Schule bekannte e-Funktion.

(a) Zeige, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist!

(b) Bestimme $\operatorname{Kern} f$ und $\operatorname{Bild} f$!

Aufgabe 21 *Permutationen*

Betrachte die Symmetrische Gruppe S_6. Seien daraus die drei Permutationen

$$\sigma := (1\ 4\ 6\ 3\ 5), \quad \tau := (1\ 4\ 2\ 5)(3\ 6), \quad \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

gegeben.

(a) Bringe zunächst die Permutation π in Zykelschreibweise!

(b) Bestimme $(\sigma \circ \tau) \circ \pi$ und $\pi \circ (\tau \circ \sigma)$ jeweils in Zykelschreibweise!

(c) Ist die Symmetrische Gruppe S_6 kommutativ?

Thema *Gaußsches Eliminationsverfahren*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Koeffizientenmatrix
- elementare Zeilenumformungen
- Zeilenstufenform
- Matrix invertieren
- Determinante

Aufgabe 22

Löse das folgende Lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$!

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 23

Löse das folgende Lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper $\mathbb{Z}_5$!

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ -x_1 & & & - & 3x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

Aufgabe 24

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige mithilfe der Determinante, dass die Matrix A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar ist!

(b) Invertiere A über $\mathbb{R}$!

(c) Invertiere A über $\mathbb{Z}_5$!

Aufgabe 25

Bestimme jeweils die Determinanten der folgenden reellen Matrizen!

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26

Invertiere die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}_3$!

Aufgabe 27

Berechne jeweils die Determinanten dieser reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Thema *Vektorräume*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Vektorraum, Untervektorraum
- Linearkombination, Erzeugnis/Erzeugendensystem
- lineare (Un-) Abhängigkeit, Basis, Dimension

Aufgabe 28

Betrachte die sechs folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = -2x_2\} \\
U_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \\
U_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \cdot x_2 = 0\} \\
U_4 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 = 5x_2\} \\
U_5 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 - 5x_2 = 1\} \\
U_6 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2\}
\end{aligned}$$

Welche dieser Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 29

Es sei $U := \langle\{v, w\}\rangle \subset \mathbb{R}^3$ der von den beiden Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannte Untervektorraum.

(a) Entscheide jeweils für die beiden Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

ob sie in U liegen!

(b) Entscheide, ob v, w und a bzw. v, w und b den $\mathbb{R}^3$ aufspannen!

Aufgabe 30

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Beweise oder widerlege:

(a) $U \cap W$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V.

(c) $U \setminus W$ ist ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 31

Betrachte die Menge der quadratischen Matrizen über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^{n\times n}$ für $n \geq 2$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{Z}^{n\times n}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $\mathbb{Z}^{n\times n}$ ist ein Ring bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

Aufgabe 32

Es sei mit

$$P_n[x] := \{a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \colon a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Polynome höchstens n-ten Grades bezeichnet.

(a) Zeige, dass die drei Polynome

$$B := \{2x^2 - x - 1, \quad -2x^2 + 3x + 2, \quad -x^2 + x + 1\}$$

eine Basis von $P_2[x]$ bilden!

(b) Entferne aus der Menge

$$\begin{aligned} M := \Big\{ & 2x^3 + 2x^4 + 2x + 2, && x^3 + x^2 - x + 2, && -x^3 + 4x^4 + 6x - 2, && x^2, \\ & -x^3 + 4x^4 + 6x - 2, && 7x^3 - 5x - 24, && -x^3 + x^2 + 3x + 2, && x^2 - 4 \Big\} \end{aligned}$$

solche Polynome, sodass eine Basis von $P_3[x]$ übrig bleibt! Begründe die Auswahl – entweder durch Rechnung oder aus der Vorlesung bekannte Argumente!

Aufgabe 33

Betrachte den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V := (\mathbb{Z}_3)^3$ über dem Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_3$.

(a) Bestimme die Mächtigkeit $|V|$ dieses Vektorraums!

(b) Entscheide mit Begründung, wie viele Untervektorräume von V existieren mit der Dimension 0 bzw. mit der Dimension 3!

Thema ***Lineare Abbildungen***

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen
- Bild und Kern, Rang
- Basiswechselmatrix, Basiswechsel

Außerdem überlege einmal: Woran kann man bei einer Matrix in Zeilenstufenform erkennen, ob die Spalten linear unabhängige Vektoren bilden?

Aufgabe 34

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$ mit der Darstellungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimme den $\operatorname{Rang} \varphi_A$ sowie eine Basis von $\operatorname{Bild} \varphi_A$!

(b) Gib den $\operatorname{Kern} \varphi_A$ an!

(c) Ist φ_A injektiv? Ist φ_A surjektiv?

Aufgabe 35

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$, die bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ beschrieben wird von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Betrachte ferner zwei Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme die darstellende Matrix ${}_C[\varphi]_B$ bezüglich B und C!

Aufgabe 36

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$ mit der Darstellungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Bild}\varphi_A$ und daraus den $\operatorname{Rang}\varphi_A$!

(b) Gib eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi_A$ an!

(c) Was lässt sich über die Injektivität bzw. Surjektivität von φ_A sagen?

Aufgabe 37

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ beschrieben wird von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Betrachte ferner zwei Basen des $\mathbb{R}^4$:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Bestimme den $\operatorname{Rang}\varphi_A$ und gib eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi_A$ an!

(b) Verifiziere, dass C eine Basis des $\mathbb{R}^4$ darstellt!

(c) Bestimme die darstellende Matrix ${}_C[\varphi]_B$ bezüglich B und C!