

Dipl.Inf. Malte Isberner – Dr. Oliver Rüthing – Dipl.Inf. Melanie Schmidt – Dr. Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Informatiker 1
Wintersemester 2013/14
Übungsblatt (Probeklausur) 9

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen zu „Mathematik für Informatiker I“ Briefkästen im Raum E06 der Otto-Hahn-Straße 20 zur Verfügung.

Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 10.1.2014, 14:00 Uhr

Aufgabe 9.1 *Aussagen und Mengen*

(5 + 5 = 10 Punkte)

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz¹

$$\neg(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A}))) \equiv \mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den linksseitigen Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

2. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz aus Teil 1) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

¹Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist wie üblich mit Hilfe der Standardoperatoren definiert: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv_{df} \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Aufgabe 9.2 *Relationen, Ordnungen und Äquivalenzrelationen*

(6 + 4 = 10 Punkte)

1. Es sei die Menge $M =_{df} \{a, e, k, y\}$ gegeben. Wir definieren die Relation

$$R =_{df} \{(a, a), (a, y), (e, e), (k, a), (k, k), (k, y), (y, a), (y, y)\}.$$

- a) Ist R eine Quasiordnung? Ist R eine partielle Ordnung? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.
- b) Geben Sie R^{-1} und $R \cup R^{-1}$ an.
- c) Ist $R \cup R^{-1}$ eine partielle Ordnung? Ist $R \cup R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation? Beweisen bzw. widerlegen Sie jeweils.

2. Wir definieren die Relation $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$a S b \Leftrightarrow_{df} a - b \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar.}$$

Zeigen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Erinnerung: Eine Zahl $x \in \mathbb{Z}$ ist durch eine Zahl $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = k \cdot y$ gilt.

Aufgabe 9.3 *Induktion*

(5 + 5 = 10 Punkte)

1. Zeigen Sie die folgende Aussage mit verallgemeinerter Induktion. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Erinnerung: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat bspw. die Zahl 108 die Quersumme $1 + 0 + 8 = 9$, und in der Tat sind sowohl 9 als auch 108 durch 3 teilbar.

Erinnerung 2: Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch eine Zahl $t \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = t \cdot k$ gilt.

2. Betrachten Sie die folgende BNF mit den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und Nichtterminalsymbolen $\{\langle A \rangle, \langle E \rangle, \langle H \rangle, \langle M \rangle, \langle T \rangle\}$, deren Startsymbol $\langle T \rangle$ ist:

$$\langle A \rangle ::= 11$$
$$\langle E \rangle ::= 101$$
$$\langle H \rangle ::= 010$$
$$\langle M \rangle ::= 00$$
$$\langle T \rangle ::= \langle M \rangle \langle A \rangle \langle T \rangle \mid \langle H \rangle \langle E \rangle$$

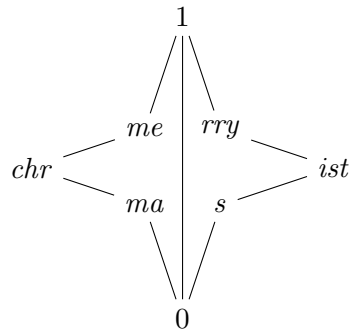
Mit dieser BNF lassen sich unendlich viele Bitstrings erzeugen.

Beweisen Sie mit struktureller Induktion: In jedem Bitstring, der von $\langle T \rangle$ abgeleitet werden kann, ist die Anzahl der enthaltenen 0en und 1en gleich.

Aufgabe 9.4 *Verbände*

(5 + 3 = 8 Punkte)

1. Sei M eine beliebige Menge und $T(M)$ die Menge aller transitiven Relationen auf M . In $T(M)$ sind also alle Relationen $R \subseteq M \times M$ enthalten, die erfüllen, dass für alle $a, b, c \in M$ gilt: Wenn $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann ist auch $(a, c) \in R$.
Ist $(T(M), \subseteq)$ ein Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.
2. Wir definieren die Menge $V =_{df} \{0, chr, ist, ma, me, rry, s, 1\}$, die acht verschiedene Symbole enthält. Auf dieser Menge V legen wir durch folgendes Hasse-Diagramm eine Ordnung so fest, dass V mit dieser Ordnung einen Verband bildet:



Ist dieser Verband distributiv?

Aufgabe 9.5 *Algebraische Strukturen*

(2 + 4 + 4 = 12 Punkte)

1. Sei $\langle M_1, \oplus_1 \rangle$ Monoid mit neutralem Element e_1 , $\langle M_2, \oplus_2 \rangle$ Monoid mit neutralem Element e_2 und $h : \langle M_1, \oplus_1 \rangle \rightarrow \langle M_2, \oplus_2 \rangle$ ein Monoidhomomorphismus. Beweisen Sie:²

$$h \text{ ist injektiv} \Rightarrow \text{Kern}(h) = \{e_1\}.$$

2. Im Gegensatz zu Gruppenhomomorphismen gilt die Umkehrung der Implikation in Teil 1) für Monoidhomomorphismen im allgemeinen nicht. Geben Sie zwei Monoide und einen nicht injektiven Monoidhomomorphismus zwischen diesen an, so dass dessen Kern dennoch trivial ist.
3. Es sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \rightarrow G$ durch

$$a \odot b =_{df} a \oplus x \oplus b$$

definiert.

- a) Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist.
- b) Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle für \odot konkret für das Beispiel $\langle G, \oplus \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$.

²Wie üblich gilt $\text{Kern}(h) =_{df} \{m \in M_1 \mid h(m) = e_2\}$.

Aufgabe 9.6 Wissensfragen

(10 Punkte)

Hinweis: Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja“-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein“-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.

1. Die Menge der durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen ist echt mächtiger als die Menge der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen.
2. Die Funktion $qs : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihre Quersumme zuordnet, ist ein Ordnungshomomorphismus bzgl. der \leq -Ordnung auf den natürlichen Zahlen.
3. Wenn die Relationen $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ transitiv sind, dann ist auch die Relation $R \cup S$ transitiv.
4. Die Menge der positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit der Teilbarkeitsrelation bildet einen vollständigen Verband.
5. Es gibt keinen Körperhomomorphismus von \mathbb{R} nach \mathbb{Q} .
6. $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ hat keine Untergruppe mit 5 Elementen.