Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) **[6+3+1 = 10 Punkte]**

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien Mengen über einer gemeinsamen Grundmenge M.

1. Beweisen Sie schrittweise die Gleichheit

$$((A \cap B^{\complement}) \cap (B \cap A^{\complement})^{\complement}) \cup B = A \cup B$$

   unter ausschließlicher Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Mengengesetze

   (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplement, Idempotenz, Doppelkomplement, De Morgan, Neutralität).

   Geben Sie in *jedem* Beweisschritt die jeweils verwendeten Regeln an.

2. Beweisen Sie ausführlich, dass für alle Mengen A und B gilt:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B.$$

3. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$, wobei $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer Menge M beschreibt.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Funktionen) [**8+2=10 Punkte**]

1. Sei

$$R =_{df} \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}.$$

Geben Sie für alle folgenden Relationen an, ob es sich um Äquivalenzrelationen bzw. partielle Ordnungen auf $\{1,2,3\}$ handelt. Belegen Sie dieses durch Angabe der zugehörigen Partitionsdarstellung bzw. des zugehörigen Hasse-Diagrammes, oder widerlegen Sie dieses durch Angabe einer verletzten Eigenschaft (wie z.B. nicht reflexiv, weil ...).

Relation	Äq.-Rel. ja nein	Begründung	Part. Ord. ja nein	Begründung
R	☐ ☐		☐ ☐	
$R \cup \{(3,1)\}$	☐ ☐		☐ ☐	
$R \cup \{(1,2),(3,1)\}$	☐ ☐		☐ ☐	
$R \cup \{(1,3),(3,1)\}$	☐ ☐		☐ ☐	

2. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f((n,m)) =_{df} n + m$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen) **[5+5=10 Punkte]**

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$5 \text{ teilt } 6^n + 4.$$

2. Die Menge $Pal =_{df} \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom gerader Länge}\}$ kann induktiv definiert werden als die kleinste Menge, für die gilt:[1]

   - $\varepsilon \in Pal$.
   - Wenn $w \in Pal$, dann auch $awa,\ bwb \in Pal$.

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion die folgende Aussage:

   $$\forall w \in Pal.\ \#_a(w) \text{ ist gerade.}$$

   Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens „a“ im Wort w.

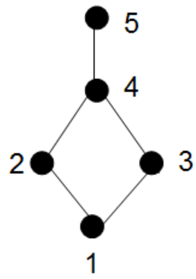
[1] Generell sind Palindrome Worte, die vorwärts und rückwärts gelesen übereinstimmen.

Aufgabe 4 (Verbände) **[3+3+2=8 Punkte]**

1. Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein (algebraischer) Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor? Begründen Sie Ihre Antworten.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

2. Betrachten Sie den durch das folgende Hasse-Diagramm festgelegten Verband $(V, \preceq)$.



Sei weiter $h : V \to V$ gegeben durch $h(v) \; =_{df} \begin{cases} 5 & \text{falls} \;\; v = 4 \\ v & \text{sonst} \end{cases}$

(a) Ist h ein $\curlyvee$-Homomorphismus?

(b) Ist h ein $\curlywedge$-Homomorphismus?

(c) Ist h ein Ordnungshomomorphismus?

Begründen Sie Ihre Antworten.

3. Geben Sie einen unendlichen Verband an, der nicht distributiv ist. Zeigen Sie, wo die Distributivität verletzt wird.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Gruppen und Untergruppen) **[(5+2)+3 = 10 Punkte]**

1. Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe $\langle G, \circ \rangle$ ist definiert als:

$$Z(G) =_{df} \{g \in G \mid x \circ g = g \circ x \text{ für alle } x \in G\} \subseteq G$$

   (a) Zeigen Sie: $\langle Z(G), \circ \rangle$ ist abelsche Untergruppe von $\langle G, \circ \rangle$

(b) Bestimmen Sie $Z(S_3)$ für die bekannte symmetrische Gruppe S_3.

2. Sei $n \geq 2$ und S_n die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$U_n =_{df} \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = 1\}$$

eine Untergruppe von S_n ist.

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Algebraische Strukturen) [**6+4=10 Punkte**]

1. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für:
   (a) einen Ring, der kein kommutativer Ring ist.
   (b) einen kommutativen Ring, der kein Integritätsbereich ist.
   (c) einen Integritätsbereich, der kein Körper ist.

   Begründen Sie für jedes Ihrer Beispiele, warum die weitergehende Eigenschaft verletzt ist.

2. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Menge der Matrizen

$$A(a_1, a_2, a_3) =_{df} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ mit der Matrixmultiplikation eine kommutative Gruppe ist.

Hinweis: Die Assoziativität der Matrixmultiplikation quadratischer Matrizen kann als bekannt vorrausgesetzt werden.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 7 (Untervektorraum, lineare Unabhängigkeit und Basis) [3+3+4= 10 Punkte]

1. Sei $U = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Geben Sie für den Untervektorraum U aus Teil 1) eine Basis an und beweisen Sie die Basiseigenschaft.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)^t$, $\vec{v}_2 = (0, 3, 2)^t$ und $\vec{v}_3 = (-1, 1, 4)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} r + 0s - t &=& 0 \\ 2r + 3s + t &=& 0 \\ -r + 2s + 4t &=& 0 \end{array}\right| \; 2 \cdot \mathrm{III} + \mathrm{II}$$

$$\begin{array}{rcl} r + 0s - t &=& 0 \\ 0 + 7s + 9t &=& 0 \\ -r + 2s + 4t &=& 0 \quad \mathrm{III} + \mathrm{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} r + 0s - t &=& 0 \\ 0 + 7s + 9t &=& 0 \\ 0 + 2s + 3t &=& 0 \quad \mathrm{III} \cdot 7 - \mathrm{II} \cdot 2 \end{array}$$

$r + 0s - t = 0$

$0 + 7s + 5t = 0$

$0 + 0 + 3t = 0$

$3t = 0 \mid :3$

$t = 0$

$0 + 7s + 0 = 7s \quad // \; s = 0$

$r + 0 \cdot 0 - 0 \mid r = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$12 + 0 - 4 = 8$

$3 - 2 + 0 = 1$ $\Big\}$ 7 ü

Aufgabe 8 (Darstellende Matrix) [**10 Punkte**]

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Berechnen Sie die darstellende Matrix von φ_A bezüglich der Basis

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9 (Eigenwerte) [**10 Punkte**]

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Spektrum von A, also die Menge $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$

Hinweis: *Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms*

Aufgabe 10 (Wissensfragen) [**12 Punkte**]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Es gibt jeweils 1 Punkt pro richtiger Antwort. Begründen Sie eine „**wahr**“ Antwort und eine „**falsch**“ Antwort <u>ausführlich</u> (jew. 2 Punkte pro richtiger Begründung). Falls mehr als zwei Antworten begründet wurden, machen Sie die zu wertenden Antworten kenntlich. Andernfalls werden die ersten beiden Antworten gewertet.

1. Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}^3$.
2. Jede Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ ist auch eine Quasiordnung.
3. Die Teilbarkeitsrelation $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch $x|y \ \Leftrightarrow_{df} \exists\, z \in \mathbb{Z}.\ x \cdot z = y$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z}$.
4. Für jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist $(M, |)$ ein Verband, wobei $|$ die bekannte Teilbarkeitsrelation auf natürlichen Zahlen ist.
5. Jede Basis eines Vektorraumes ist endlich.
6. $\langle \mathbb{Z}_{12}, +_{12} \rangle$ hat keine Untergruppe mit 5 Elementen.
7. Es existiert ein Körperhomomorhismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$.
8. In einer Abelschen Gruppe ist jede Untergruppe auch ein Normalteiler.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen