Vorlesung
Mathematik für Informatik I

technische universität dortmund

Prof. Dr. B. Steffen

WS 2017/2018 — Klausur — 04. April 2018

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ____________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	10	10	10	10	8	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: ______________ 2. Prüfer: ______________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen) **[5+5=10 Punkte]**

1. Seinen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz[1]

$$\Big(\mathcal{A} \wedge \big(\mathcal{B} \vee \neg(\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{A})\big)\Big) \quad \equiv \quad \neg\big(\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})\big)$$

unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Formen Sie den **linksseitigen** Ausdruck unter Verwendung der De Morganschen Gesetze und dem Gesetz der Doppelnegation zunächst soweit um, dass Negationen höchstens noch vor den elementaren Aussagen stehen. Formen Sie dann unter Verwendung anderer Gesetze weiter um. Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

[1]Die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist wie üblich mit Hilfe der Standardoperatoren definiert: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

2. Zeigen Sie die semantische Äquivalenz aus Teil 1) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelation, Quasiordnung) **[4+6=10 Punkte]**

1. Seien $A = \{1, 3, 8\}$, $B = \{2, 3\}$, $R_1 = A \times B$, $R_2 = \{(1, 8), (1, 1), (3, 1)\} \subseteq A \times A$.

   (a) Erweitern Sie die Relation R_1 mit den minimal notwendigen Elementen, sodass R_1 eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Geben Sie R_2^{-1} an und erweitern sie R_2^{-1} mit den minimal notwendigen Elementen, sodass R_2^{-1} eine Quasiordnung ist.

2. Sind folgende Funktionen injektiv und/oder surjektiv, bijektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = (-1)^x \cdot x$

$f(1) = -1$ inj.

$f(2) = 2$

nicht sur weil 1 nicht getroffen wird

   (b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = |x|$

$-1 = 1$ nicht inj $g(1) = g(-1)$

surj. $n \in N$ $g(n) = n$

5 $g(5) = |5|$

$h(x) = x - 1$ $h: \underline{R} \to Z$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

(c) $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit f, g wie definiert in Teil a) und b).

(d) $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit f, g wie definiert in Teil a) und b).

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}.$$

2. Die Menge $Pal =_{df} \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom gerader Länge}\}$ kann induktiv definiert werden als die kleinste Menge, für die gilt:[2]

   - $\varepsilon \in Pal$.
   - Wenn $w \in Pal$, dann auch $awa,\ bwb \in Pal$.

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion die folgende Aussage:

   $$\forall w \in Pal.\ \#_a(w) \text{ ist gerade.}$$

   Dabei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens „a" im Wort w.

[2] Generell sind Palindrome Worte, die vorwärts und rückwärts gelesen übereinstimmen.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) [**(2+2)+2+4 = 10 Punkte**]

1. Sei S_3 die bekannte symmetrische Gruppe.
   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm des Untergruppenverbandes der S_3.

   (b) Ist der Untergruppenverband aus Teil a) distributiv? Begründen oder widerlegen Sie.

2. Geben Sie jeweils ein Beispiel an (ohne Begründung) für:
   (a) einen distributiven, aber nicht Booleschen Verband.
   (b) einen distributiven, aber nicht vollständigen Verband.

3. $(V, \preceq) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen und $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung:

$$h_A : V \to V$$
$$h_A(X) = X \cup A$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h_A ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus.

(b) h_A ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[4+4+2=10 Punkte]**

1. Die folgende Verknüpfungstafel einer *kommutativen* Gruppe mit den vier Elementen $\{a, b, c, d\}$ lässt sich auf genau eine Weise vervollständigen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge und begründen Sie, dass diese in eindeutiger Weise festliegen.

$\circ$	a	b	c	d
a				b
b	d			a
c				
d				c

Tipp: Bestimmen Sie zuerst das neutrale Element.

2. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine beliebige Gruppe und $\alpha : G \to G$ ein Gruppenautomorphismus (d.h. bijektiver Gruppenhomomorphismus auf G).

   Zeigen Sie, dass
   $$U_\alpha =_{df} \{g \in G \mid \alpha(g) = g\}.$$
   eine Untergruppe von G ist.

3. Geben Sie ein Beispiel eines nicht kommutativen Ringes an und zeigen Sie die Nichtkommutativität anhand eines Beispiels.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Vektorräume, Untervektorräume) **[2+2+2+2=8 Punkte]**

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $U_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid x = y = 3z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
2. $U_2 =_{df} \left\{\left(a + b, b^2\right)^t \mid a, b \in \mathbb{Z}_5\right\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^2$.
3. $U_3 =_{df} \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $U_4 =_{df} \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } bijektiv\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 7 (Lineare Abbildungen und Rang) **[4+6 = 10 Punkte]**

Sei $V[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome über einer Variablen x vom Grad ≤ 2, also:

$$V[x] = \{\sum_{i=0}^{2} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{0,1,2\}\}.$$

(Dass $V[x]$ ein Vektorraum ist, kann vorausgesetzt werden und ist hier nicht zu zeigen.)
Sei $f : V[x] \to V[x]$ definiert durch:

$$f(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i) = (2a_1 + a_2)x^2 + (4a_0 + 2a_2)$$

1. Beweisen Sie, dass f linear ist
2. Bestimmen Sie Basen von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$

Aufgabe 8 (Eigenwerte und Determinanten) [**10 Punkte**]

Gegeben ist die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Spektrum von A, also die Menge $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$

Hinweis: Beachten Sie die Themenangabe zur Aufgabe.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Darstellende Matrix, Basiswechsel) **[4 + 6 Punkte]**

Gegeben seien die Vektorräume $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^3$ sowie die lineare Funktion $\varphi : U \to V$ mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiter seien B und B' zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b'}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix zwischen den Basen B und B', also ${}_{B'}[id_{\mathbb{R}^3}]_B$.
2. Berechnen Sie **unter Verwendung der Basiswechselmatrix aus Aufgabenteil 1** die Matrix von φ bezüglich der Basen B und E_3, also ${}_{E_3}[\varphi]_B$. E_3 bezeichnet hierbei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Wissensfragen) [**12 Punkte**]

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch.

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Wahr/Falsch) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Wahr"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Falsch"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Die Idempotenz der Mengenvereinigung folgt allein aus den Absorptionsgesetzen.
2. Falls für Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ gilt $g \circ f = id_A$, so ist f bijektiv.
3. Jede total geordnete Menge ist ein vollständiger Verband.
4. Es gibt eine Menge, die echt mächtiger als jede andere Menge ist.
5. Die symmetrische Gruppe $\langle S_4, \circ \rangle$ besitzt eine Untergruppe mit 10 Elementen.
6. Es gibt keine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $Kern(\varphi) = Bild(\varphi)$.
7. Ein kommutativer nullteilerfreier Ring ist nicht notwendig bereits ein Körper.
8. In einer linear abhängigen Menge von Vektoren lässt sich jeder Vektor als Linearkombination der übrigen Vektoren in darstellen.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \frac{1}{J} = 3x + 4$

$x \mapsto \underline{3x + 4}$

Df. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \quad | -4$

$3x_1 = 3x_2 \quad | :3$

$x_1 = x_2$