Vorlesung Mathematik für Informatiker I	
technische universität dortmund	Prof. Dr. B. Steffen und Prof. Dr. G. Kern-Isberner

WS 11/12	Klausur	27. März 2012

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________ Studiengang: ____________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ____________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 24 Punkte im Aufgabenblock *Algebra* (Prof. Steffen) und 16 Punkte im Aufgabenblock *Lineare Algebra* (Prof. Kern-Isberner) erforderlich.

Block	Algebra (Prof. Steffen)						Lineare Algebra (Prof. Kern-Isberner)						
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Punkte	8	10	10	8	12	12	5	3	6	17	3	6	100
Erreicht													

1. Prüfer: ____________________ 2. Prüfer: ____________________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

> *Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.*

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabenblock Algebra (Prof. Steffen)

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) **[3+3+2=8 Punkte]**

Das Beweisprinzip des "*modus ponens*" für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \ \wedge \ \mathcal{A}) \ \Rightarrow \ \mathcal{B}. \qquad \text{(MP)}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (MP) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

2. Beweisen Sie, dass (MP) semantisch äquivalent zu T - mithin also Tautologie - ist unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:
$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl)}$$
Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

3. Ein Kommilitone behauptet:

   Keine Menge M ist gleichmächtig mit der Menge ihrer Selbstabbildungen M^M.

   Hat er Recht? Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Funktionen) [4+2+4=10 Punkte]

1. Die lexikographische Ordnung auf geordneten Paaren natürlicher Zahlen ist definiert wie folgt:

$$(n, m) \leq_{lex} (n', m') \quad \Leftrightarrow_{df} \quad n < n' \ \vee \ (n = n' \wedge m \leq m').$$

   Zeigen Sie, dass $\leq_{lex}$ eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

2. Sei $P =_{df} \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$ eine Partition von $\{1,2,3,4,5,6\}$. Geben sie die zu P gehörige Äquivalenzrelation als Menge geordneter Paare an.

3. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche surjektiv? Beweisen oder widerlegen Sie.

   (a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $z \mapsto 3z - 1$

   (b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $z \mapsto 3z^2 - 1$

   (c) $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
   $q \mapsto 3q - 1$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen) **[5+5=10 Punkte]**

1. Die bekannte Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{array}{lll} \mathit{fib}(0) & =_{df} & 0 \\ \mathit{fib}(1) & =_{df} & 1 \\ \mathit{fib}(n) & =_{df} & \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{array}$$

   Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \;\leq\; \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

2. Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

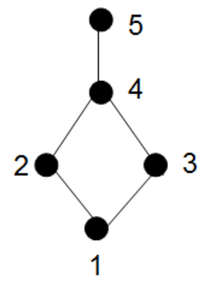
Name,Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) **[3+3+2=8 Punkte]**

1. Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein (algebraischer) Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor? Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Betrachten Sie den durch das folgende Hasse-Diagramm festgelegten Verband $(V, \preceq)$.



Sei weiter $h : V \to V$ gegeben durch $h(v) =_{df} \begin{cases} 5 & \text{falls } v = 4 \\ v & \text{sonst} \end{cases}$

(a) Ist h ein $\curlyvee$-Homomorphismus?

(b) Ist h ein $\curlywedge$-Homomorphismus?

(c) Ist h ein Ordnungshomomorphismus?

Begründen Sie Ihre Antworten.

3. Geben Sie einen unendlichen Verband an, der nicht distributiv ist. Zeigen Sie, wo die Distributivität verletzt wird.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[4+3+2+3=12 Punkte]**

1. Sei $\langle G_1, \oplus_1 \rangle$ Gruppe mit neutralem Element e_1, $\langle G_2, \oplus_2 \rangle$ Gruppe mit neutralem Element e_2 und $h : \langle G_1, \oplus_1 \rangle \to \langle G_2, \oplus_2 \rangle$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie:

$$h \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad Kern(h) = \{e_1\}.$$

2. Wir betrachten die bekannte symmetrische Gruppe S_3. Geben Sie die Resultate folgender Operationen (als Zyklen) an:

   (a) $(13) \circ (12) \ =$

   (b) $(23) \circ (123) \ =$

   (c) $(123) \circ (132) \ =$

3. Geben Sie die Rechts- und Linksnebenklasse der S_3-Untergruppe $\langle\{(), (13)\}, \circ\rangle$ zu (12) an:

4. Geben Sie alle Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ an und begründen Sie dieses. Geben Sie für jeden Normateiler N einen Homomorphismus $h_N : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ mit $N = Kern(h_N)$ an.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Hinweis: Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.

1. Die Freundschaftsbeziehung unter Personen ist eine Äquivalenzrelation.

2. Für eine gegebene Grundmenge M ist deren Potenzmenge gleichmächtig mit $\{0, 1\}^M$.

3. Ein Unterring eines Ringes mit Einselement hat nicht notwendig auch ein Einselement.

4. $\langle \mathbb{Z}_{11}, +_{11} \rangle$ hat nur triviale Untergruppen.

5. Die Funktion $qs : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihre Quersumme zuordnet, ist ein Ordnungshomomorphismus.[1]

6. Jeder Verband besitzt ein kleinstes oder ein größtes Element.

7. $\langle \mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15} \rangle$ ist ein Körper.

8. Ideale sind gegen Schnittbildung abgeschlossen.

[1] Bezüglich der üblichen $\leq$-Ordnung.

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

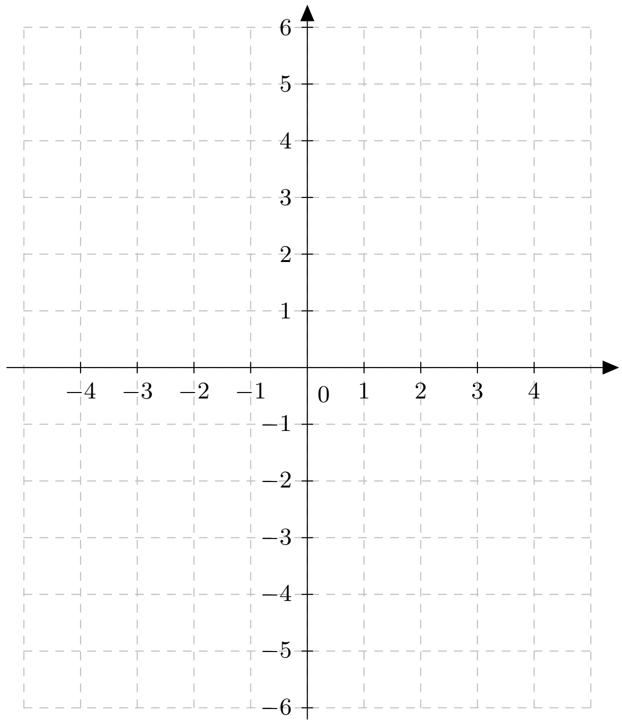
Aufgabenblock Lineare Algebra (Prof. Kern-Isberner)

Aufgabe 7 (Teilraum) **[1+1+3=5 Punkte]**

Gegeben ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Menge

$$U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 2x \leq y \text{ oder } y \leq x\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Zeigen Sie, dass $(0, 0, 0)^t \in U$ ist.
2. Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Menge $W = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y, z)^t \in U\}$ in dem folgenden Koordinatensystem.



3. Entscheiden Sie, ob U ein Teilraum in $\mathbb{R}^3$ ist, und begründen Sie Ihre Antwort ausführlich durch einen formalen Beweis oder durch die Angabe eines Gegenbeispiels.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Basis eines Vektorraums) **[3 Punkte]**

Wir betrachten den Vektorraum $V = (\mathbb{Z}_7)^2$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Lineare Abbildung) **[5+1=6 Punkte]**

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$ und $Bild(\varphi)$ und geben Sie jeweils ein Erzeugendensystem an.
2. Entscheiden Sie, ob φ ein Isomorphismus ist; begründen Sie Ihre Antwort.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Basiswechsel) **[15+2=17 Punkte]**

Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B' = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{B'}[id]_B$ von B auf B'.
2. Wie lässt sich aus ${}_{B'}[id]_B$ die Basiswechselmatrix ${}_{B}[id]_{B'}$ von B' auf B gewinnen?

Aufgabe 11 (Lineares Gleichungssystem) **[3 Punkte]**

Verwenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren, um die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}_7$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 2 \\ 2x + 4y \phantom{{}- 2z} &= 3 \\ -3x - 5y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 12 (Determinate und Inverse einer Matrix) **[5+1=6 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimmen Sie die Determinante von A.
2. Ist A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.