Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Verbände) **[(2+1+1)+4 = 8 Punkte]**

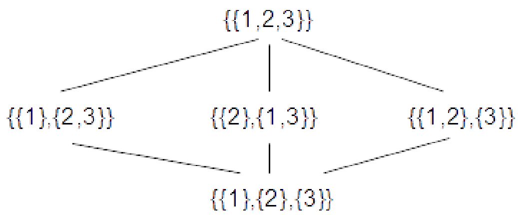
1. Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Menge aller Partitionen $Part(M)$ über M mit der partielle Ordnung $\preceq$ definiert durch:

   $$P \preceq Q \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \sim_P \subseteq \sim_Q \ .$$

   Dabei bezeichnet $\sim_P$ wie üblich die zur Partition P assozierte Äquivalenzrelation.

   Lösung:



   (b) Ist $Part(M)$ ein Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

   Lösung: Es ist offensichtlich ein Verband, da Infima und Suprema für je 2 Elemente existieren.

   (c) Ist $Part(M)$ sogar distributiver Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

   Lösung: Es ist kein distributiver Verband. Es liegt ein typisches Pattern für Nicht-distributivität vor. Benennt man nämlich im Hassediagramm das kleinste und größte Element mit 0 und 1 und die Elemente der mittleren Schicht von links nach rechts mit a,b,c, so gilt:

   $$a \curlywedge (b \curlyvee c) = a \curlywedge 1 = a \neq 0 = 0 \curlyvee 0 = (a \curlywedge b) \curlyvee (a \curlywedge c)$$

2. $(V, \preceq) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen und $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung:

$$h_A : V \to V$$
$$h_A(X) = X \cap A$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h_A ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus.

(b) h_A ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus.

Lösung:

(a) h ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus, denn es gilt für beliebige $X, Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} h_A(X \curlywedge Y) &= (X \cap Y) \cap A \\ &= (X \cap Y) \cap (A \cap A) \\ &= (X \cap A) \cap (Y \cap A) \\ &= h_A(X) \cap h_A(Y) \\ &= h_A(X) \curlywedge h_A(Y) \end{aligned}$$

(b) h_A ist auch ein $\curlyvee$-Homomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned} h_A(X \curlyvee Y) &= (X \cup Y) \cap A \\ &= (X \cap A) \cup (Y \cap A) \\ &= h_A(X) \cup h_A(Y) \\ &= h_A(X) \curlyvee h_A(Y) \end{aligned}$$

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus. Dieses folgt gemäß Satz 7.19 direkt aus Teil (b) oder (c).

Aufgabe 2 (Algebraische Strukturen) **[3+2+2+(3+2)) = 12 Punkte]**

1. Die Menge $GL(n,K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K ist gemäß Vorlesung bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Geben Sie explizit alle Elemente von $GL(2,\mathbb{Z}_2)$ an.

   Hinweis: Hilfreich sind Überlegungen zur Invertierbarkeit anhand von Kriterien wie Nullzeilen, Nullspalten, identischen Zeilen bzw. Spalten oder der Determinante.

   Lösung: Dem Hinweis folgend sind es genau die folgenden sechs 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

2. Geben Sie ein Beispiel einer nicht kommutativen Gruppe an und zeigen Sie die Nichtkommutativität anhand eines Beispiels.

   Lösung:
   Ein einfaches Beispiel ist die S_3. Hier gilt z.B. $(1\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 2\ 3)$ und $(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3\ 2)$. Weitere Beispiele wären etwa $GL(n,K)$ mit $n \geq 2$.

3. Bestimmen Sie in Zykelschreibweise das Resultat von

$$((2\ 5\ 3) \circ (1\ 4\ 3\ 2))^{-1}.$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
&((2\ 5\ 3) \circ (1\ 4\ 3\ 2))^{-1}\\
=&((1\ 4\ 2) \circ (3\ 5))^{-1}\\
=&(1\ 4\ 2)^{-1} \circ (3\ 5)^{-1}\\
=&(1\ 2\ 4) \circ (3\ 5)
\end{aligned}$$

4. Seien $\langle R, +_R, \cdot_R\rangle$ und $\langle S, +_S, \cdot_S\rangle$ Ringe, $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $I \subseteq R$ ein Ideal.

   (a) Zeigen Sie, dass dann auch $\varphi(I) \subseteq S$ Ideal ist.
   Hinweis: Dass $\varphi(I)$ Untergruppe von S ist, darf ohne Beweis benutzt werden.

   Lösung: Sei $I \subseteq R$ Ideal und φ surjektiv. Nach Voraussetzung ist $\varphi(I)$ Untergruppe von S. Wir haben dann noch die Rechts- und Linksidealeigenschaft von $\varphi(I)$ nachzuweisen. Sei $s \in \varphi(I)$ und $s' \in S$. Dann ist zu zeigen:

   i) $s \cdot s' \in \varphi(I)$ und
   ii) $s' \cdot s \in \varphi(I)$

   Wir beweisen exemplarisch nur i), da ii) völlig analog ist. Offensichtlich existiert ein $r \in I$ mit $\varphi(r) = s$ und wegen der Surjektivität von φ auch ein $r' \in R$ mit $\varphi(r') = s'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
s \cdot s' &= \varphi(r) \cdot \varphi(r')\\
&= \varphi(r' \cdot r) \in \varphi(I) \text{ ,da } I \text{ Ideal}
\end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie, dass auf die Voraussetzung der Surjektivität von φ im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann, indem Sie R, S, φ und I so wählen, dass φ nicht surjektiv und $\varphi(I)$ kein Ideal ist.

   Lösung: Wir wählen R als Ring der ganzen Zahlen und S als Körper der rationalen Zahlen mit der kanonischen Einbettung $\varphi(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Betrachten wir nun das Ideal $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, dann ist dieses nicht Ideal von $\mathbb{Q}$, denn $\frac{1}{2} \cdot 2 \notin 2\mathbb{Z}$.

Name,Vorname, Matrikelnummer   Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Vektorräume, Untervektorräume) **[2+2+2+2=8 Punkte]**

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $U_1 =_{df} \{(x,y,z)^t \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
2. $U_2 =_{df} \{(x,y)^t \mid x^2 = y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $U_3 =_{df} \left\{\left(a+b, b^2\right)^t \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
4. $U_4 =_{df} \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = A^t\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$

Lösung:

1. U_1 ist ein Untervektorraum: Seien $\vec{v}, \vec{w} \in U_1$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt:

   (a)
   $$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$
   mit
   $$\begin{aligned} v_1 + w_1 &= (2v_3 + 2w_3) \\ &= 2(v_3 + w_3) \\ &\text{und} \\ v_2 + w_2 &= (2v_3 + 2w_3) \\ &= 2(v_3 + w_3) \end{aligned}$$

   (b)
   $$s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} sv_1 \\ sv_2 \\ sv_3 \end{pmatrix}$$
   mit
   $$\begin{aligned} sv_1 &= s(2v_3) \\ &= 2(sv_3) \\ &\text{und} \\ sv_2 &= s(2v_3) \\ &= 2(sv_3) \end{aligned}$$

2. U_2 ist ein Unterverktorraum. Da der angegebene Körper $\mathbb{R}$ ist folgt aus $x^2 = y^4 = 0$ dass $x = y = 0$ gilt. U_2 ist also der Vektorraum $\{(0,0)^t\}$

3. Mit U_3 liegt kein Untervektorraum vor:
   Es ist $(0,1)^t = ((-1)+1, 1^2)^t \in U_2$, aber $(-1)\cdot(0,1)^t = (0,-1)^t \notin U_2$.

4. U_4 ist ein Untervektorraum: Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $s \in \mathbb{R}$, dann gilt

   (a)

$$
\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \\
&= (A+B)^T
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
s \cdot A &= \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & sa_{13} \\ sa_{12} & sa_{22} & sa_{23} \\ sa_{13} & sa_{23} & sa_{33} \end{pmatrix} \\
&= (s \cdot A)^T
\end{aligned}
$$