Vorlesung
Mathematik für Informatiker I

Prof. Dr. B. Steffen und Prof. Dr. G. Kern-Isberner

technische universität dortmund

WS 11/12 | Klausur | 27. März 2012

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ______________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 24 Punkte im Aufgabenblock *Algebra* (Prof. Steffen) und 16 Punkte im Aufgabenblock *Lineare Algebra* (Prof. Kern-Isberner) erforderlich.

Block	Algebra (Prof. Steffen)						Lineare Algebra (Prof. Kern-Isberner)						
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
Punkte	8	10	10	8	12	12	5	3	6	17	3	6	100
Erreicht													

1. Prüfer: ______________________ 2. Prüfer: ______________________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

> *Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.*

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabenblock Algebra (Prof. Steffen)

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) **[3+3+2=8 Punkte]**

Das Beweisprinzip des "*modus ponens*" für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \qquad \text{(MP)}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (MP) mit Hilfe einer Wahrheitstafel. **Lösung:**

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\overbrace{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$	$\overbrace{\mathcal{C} \wedge \mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}$
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w

2. Beweisen Sie, dass (MP) semantisch äquivalent zu T - mithin also Tautologie - ist unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:
$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl)}$$
Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

Lösung:

$$\begin{array}{rcll}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} & = & \neg((\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & \text{(Impl)} \\
& = & \neg(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Komm)} \\
& \equiv & \neg((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Dist.)} \\
& \equiv & \neg(\mathsf{F} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Neg)} \\
& \equiv & \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & \text{(Neut.)} \\
& \equiv & (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{B}) & \text{(Komm,Ass)} \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \mathsf{T} & \text{(Neg)} \\
& \equiv & \mathsf{T} \vee \neg\mathcal{A} & \text{(Komm)} \\
& \equiv & \mathsf{T} \vee (\mathsf{T} \wedge \neg\mathcal{A}) & \text{(Neut)} \\
& \equiv & \mathsf{T} & \text{(Absorp)}
\end{array}$$

Der Beweis lässt sich natürlich vereinfachen, wenn man Anwendungen der Assoziativ- und Kommutativitätsgesetze mit anderen Beweisschritten vereint. Auch die Einseigenschaft von T könnte direkt benutzt werden, um die letzten 3 Beweisschritte einzusparen.

3. Ein Kommilitone behauptet:

Keine Menge M ist gleichmächtig mit der Menge ihrer Selbstabbildungen M^M.

Hat er Recht? Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage.

Lösung:

Nein. Die Aussage stimmt zwar für Mengen M mit $|M| > 2$, aber für eine einelementige Menge $\{m\}$ existiert nur eine Abbildung, die Identität. Also gilt: $|\{m\}| = 1 = |\{m\}^{\{m\}}|$. Ebenso ist für die leere Menge auch die Menge der Selbstabbildungen leer. Also gilt hier: $|\emptyset| = |\emptyset^{\emptyset}|$.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen, partielle Ordnungen, Funktionen) [4+2+4=10 Punkte]

1. Die lexikographische Ordnung auf geordneten Paaren natürlicher Zahlen ist definiert wie folgt:

$$(n,m) \leq_{lex} (n',m') \quad \Leftrightarrow_{df} \quad n < n' \ \vee \ (n = n' \wedge m \leq m').$$

Zeigen Sie, dass $\leq_{lex}$ eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist.

Lösung:

Reflexivität: Zu zeigen ist: $(n,m) \leq_{lex} (n,m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
Wegen $n = n$ und $m \leq m$ folgt per Definition sofort $(n,m) \leq_{lex} (n,m)$.

Antisymmetrie: Zu zeigen ist:
$(n,m) \leq_{lex} (n',m') \wedge (n',m') \leq_{lex} (n,m) \ \Rightarrow \ (n,m) = (n',m')$ für alle $n, n', m, m' \in \mathbb{N}$.

Es gelte $(n,m) \leq_{lex} (n',m')$ und $(n',m') \leq_{lex} (n,m)$. Aus $(n,m) \leq_{lex} (n',m')$ folgt $n \leq n'$. Analog folgt $n' \leq n$ aus $(n',m') \leq_{lex} (n,m)$. Mit der Antisymmetrie von "$\leq$" folgt dann $n = n'$.

Mit $n = n'$ folgt weiter $m \leq m'$ aus $(n,m) \leq_{lex} (n',m')$ und $m' \leq m$ aus $(n',m') \leq_{lex} (n,m)$. Wegen der Antisymmetrie von "$\leq$"hat man $m = m'$, insgesamt also $n = n'$ und $m = m'$, was zu zeigen war.

Transitivität: Zu zeigen ist:
$(n,m) \leq_{lex} (n',m') \ \wedge \ (n',m') \leq_{lex} (n'',m'') \ \Rightarrow \ (n,m) \leq_{lex} (n'',m'')$
für alle $n, n', n'', m, m', m'' \in \mathbb{N}$.

Es gelte $(n,m) \leq_{lex} (n',m')$ und $(n',m') \leq_{lex} (n'',m'')$. Aus beiden Voraussetzungen folgt nach Definition von "$\leq_{lex}$", dass sowohl $n \leq n'$ als auch $n' \leq n''$ gilt. Im Falle, dass $n < n'$ oder $n' < n''$ gilt, folgt $n < n''$ und damit auch schon $(n,m) \leq_{lex} (n'',m'')$. Anderenfalls gilt $n = n' = n''$. Aus der Voraussetzung folgt dann $m \leq m'$ und $m' \leq m''$. Insgesamt haben wir also $n = n''$ und $m \leq m''$, was wiederum $(n,m) \leq_{lex} (n'',m'')$ impliziert.

2. Sei $P =_{df} \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$ eine Partition von $\{1,2,3,4,5,6\}$. Geben sie die zu P gehörige Äquivalenzrelation als Menge geordneter Paare an.

Lösung:

$$\begin{aligned} P \;=\; \{ &(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\\ &(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5),\\ &(6,6)\\ \} \end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche surjektiv? Beweisen oder widerlegen Sie.

   (a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $z \mapsto 3z - 1$

   (b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $z \mapsto 3z^2 - 1$

   (c) $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
   $q \mapsto 3q - 1$

Lösung:

(a) f_1 ist injektiv. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$f_1(z_1) = f_1(z_2) \;\Rightarrow\; 3z_1 - 1 = 3z_2 - 1 \;\Rightarrow\; 3z_1 = 3z_2 \;\Rightarrow\; z_1 = z_2.$$

f_1 ist nicht surjektiv, denn $0 \notin f_1(\mathbb{Z})$. Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_1(z) = 0 \;\Rightarrow\; 3z - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 3z = 1.$$

(b) f_2 ist nicht injektiv, denn es gilt $f_2(-1) = 2 = f_2(1)$.

f_2 ist nicht surjektiv, denn analog zu Teil (a) gilt $0 \notin f_2(\mathbb{Z})$.

(c) f_3 ist injektiv. Begründung siehe (a).

f_3 ist surjektiv. Sei $q \in \mathbb{Q}$ beliebig. Dann gilt für $q' =_{df} \frac{q+1}{3} \in \mathbb{Q}$:

$$f_3(q') \;=\; f_3(\tfrac{q+1}{3}) \;=\; 3 \cdot \tfrac{q+1}{3} - 1 \;=\; q + 1 - 1 \;=\; q.$$

Aufgabe 3 (Induktives Beweisen) **[5+5=10 Punkte]**

1. Die bekannte Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung bewiesen für alle $m < n$ (Induktionsannahme). Wir unterscheiden dann folgende 3 Fälle:

- $n = 0$. Dann gilt $fib(0) \overset{\text{Def.}}{=} 0 < 1 = \left(\frac{7}{4}\right)^0$.
- $n = 1$. Dann gilt $fib(1) \overset{\text{Def.}}{=} 1 < \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$.
- $n \geq 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} fib(n) &\overset{\text{Def.}}{=} fib(n-2) + fib(n-1) \\ &\overset{IA}{\leq} \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{7}{4}\right) \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{11}{4} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{44}{16} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{49}{16} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^n \end{aligned}$$

2. Zeigen Sie, dass jeder variablenfreie Boolesche Term $t \in \mathcal{BT}$ semantisch äquivalent zu T oder F ist. Führen Sie den Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t.

   Lösung:

   Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau von t. Sei $t \in \mathcal{BT}$ und die Behauptung für alle echten Teilterme von t bereits bewiesen. Dann unterscheiden wir folgende Fälle:

   $t \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$: Die Behauptung gilt trivialerweise.

   $t = X \in \mathcal{V}$: Da t als variablenfrei vorausgesetzt ist, kann dieser Fall nicht eintreten. Hier ist also nichts zu zeigen.

   $t = \neg t_1$: Nach Induktionsanahme ist t_1 semantisch äquivalent zu einer Konstanten c aus $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$. Dann gilt:

   $$[\![t]\!]_B(\beta) \overset{\text{Def. } t}{=} [\![\neg t_1]\!]_B(\beta) \overset{\text{Def. } [\![]\!]_B}{=} \dot{\neg}[\![t_1]\!]_B(\beta) \overset{\text{I.A.}}{=} \dot{\neg}[\![c]\!]_B(\beta) \overset{c_i \text{ konstant}}{=} \dot{\neg}[\![c]\!]_B$$

   Also wertet t unabhängig von einer Belegung β zu *tt* oder *ff* aus und ist somit semantisch äquivalent zu T oder F.

   $t = (t_1 \wedge t_2)$: Nach Induktionsanahme sind t_1 und t_2 semantisch äquivalent zu konstanten Termen c_1 und c_2 aus $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$. Es gilt:

   $$\begin{aligned}[\![t]\!]_B(\beta) &\overset{\text{Def. } t}{=} [\![(t_1 \wedge t_2)]\!]_B(\beta) \overset{\text{Def. } [\![]\!]_B}{=} [\![t_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![t_2]\!]_B(\beta) \overset{\text{I.A.}}{=} [\![c_1]\!]_B(\beta) \dot{\wedge} [\![c_2]\!]_B(\beta) \\ &\overset{c_i \text{ konstant}}{=} [\![c_1]\!]_B \dot{\wedge} [\![c_2]\!]_B\end{aligned}$$

   Also wertet t unabhängig von einer Belegung β zu *tt* oder *ff* aus und ist somit semantisch äquivalent zu T oder F.

   $t = (t_1 \vee t2)$: Analog zu $(t_1 \wedge t2)$.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) **[3+3+2=8 Punkte]**

1. Sei $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen natürlicher Zahlen. Ist $(\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein (algebraischer) Verband? Wenn ja, liegt auch ein vollständiger Verband vor? Begründen Sie Ihre Antworten.

   Lösung:

   Es liegt ein algebraischer Verdand vor. Dass $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ ein algebraischer Verband ist, also die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität und Absorption gelten, ist bekannt. Es bleibt dann zu zeigen, dass $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ bezüglich der Vereinigungs -und Schnittoperation abgeschlossen ist. Dieses ist aber offensichtlich der Fall, denn sowohl die Vereinigung als auch der Schnitt endlicher Mengen ist wieder endlich.

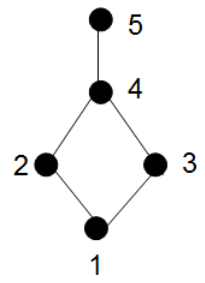
   Es liegt kein vollständiger Verband vor. Die partielle Ordnung des zugörigen ordnungsstrukturellen Verbandes ist die Inklusionsbeziehung "$\subseteq$". Dementsprechend ist das Supremum einer Menge M aus $\mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$ die Vereinigung der in M enthaltenen Mengen. Wir betrachten nun die Menge aller einelementigen Teilmengen:

   $$E =_{df} \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}.$$

   Offensichtlich sind die Elemente von E alle endlich, d.h. $E \subseteq \mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N})$, deren Vereinigung aber nicht, d.h.:

   $$\bigcup_{e \in E} e \;=\; \mathbb{N} \;\notin \mathfrak{P}_{endl}(\mathbb{N}).$$

2. Betrachten Sie den durch das folgende Hasse-Diagramm festgelegten Verband $(V, \preceq)$.



Sei weiter $h : V \to V$ gegeben durch $h(v) =_{df} \begin{cases} 5 & \text{falls } v = 4 \\ v & \text{sonst} \end{cases}$

(a) Ist h ein $\curlyvee$-Homomorphismus?

(b) Ist h ein $\curlywedge$-Homomorphismus?

(c) Ist h ein Ordnungshomomorphismus?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung:

- Es liegt kein $\curlyvee$-Homomorphismus vor, denn:

$$h(2 \curlyvee 3) = h(4) = 5 \neq 4 = 2 \curlyvee 3 = h(2) \curlyvee h(3).$$

- Es liegt allerdings ein $\curlywedge$-Homomorphismus vor. Für Elemente $x, y \in V$ mit $x \preceq y$ gilt:

$$h(x \curlywedge y) = h(x) = h(x) \curlywedge h(y).$$

  Für den einzigen Fall zweier nicht vergleichbarer Elemente haben wir:

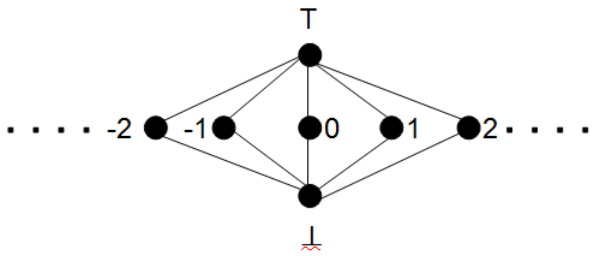
$$h(2 \curlywedge 3) = h(1) = 1 = 2 \curlywedge 3 = h(2) \curlywedge h(3).$$

- Weil ein $\curlywedge$-Homomorphismus vorliegt, ist h nach Vorlesung (Satz 7.19(2)) auch ein Ordnungshomomorphismus.

3. Geben Sie einen unendlichen Verband an, der nicht distributiv ist. Zeigen Sie, wo die Distributivität verletzt wird.

Lösung:

Wir betrachten etwa den bekannten flachen Verband mit Hasse-Diagramm:



Dieser ist nicht distributiv, denn es gilt:

$$0 \curlywedge (1 \curlyvee 2) \;=\; 0 \curlywedge \top \;=\; 0 \;\neq\; \bot \;=\; \bot \curlyvee \bot \;=\; (0 \curlywedge 1) \;\curlyvee\; (0 \curlywedge 2)$$

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[4+3+2+3=12 Punkte]**

1. Sei $\langle G_1, \oplus_1\rangle$ Gruppe mit neutralem Element e_1, $\langle G_2, \oplus_2\rangle$ Gruppe mit neutralem Element e_2 und $h : \langle G_1, \oplus_1\rangle \to \langle G_2, \oplus_2\rangle$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie:

$$h \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad Kern(h) = \{e_1\}.$$

Lösung:

$\Rightarrow$: Per Kontraposition. Angenommen $Kern(h) \neq \{e_1\}$. Weil h Gruppenhomomorphismus ist, muss e_1 auf jeden Fall zu $Kern(h)$ gehören. Also gibt es dann ein weiteres Element $g_1 \in G_1 \backslash \{e_1\}$ mit $h(g_1) = e_2$. Damit haben wir aber insbesondere zwei verschiedene Elemente, nämlich g_1 und e_1, die dasselbe Bild besitzen, sprich $h(g_1) = h(e_1)$. Damit ist h nicht injektiv.

$\Leftarrow$: Seien $g_1, g_1' \in G_1$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} h(g_1) = h(g_1') & \Rightarrow & h(g_1) - h(g_1') = e_2 \\ & \overset{h \text{ Hom.}}{\Rightarrow} & h(g_1 - g_1') = e_2 \\ & \Rightarrow & g_1 - g_1' \in Kern(h) \\ & \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} & g_1 - g_1' = e_1 \\ & \overset{\text{Eind.Inv.}}{\Rightarrow} & g_1 = g_1' \end{array}$$

2. Wir betrachten die bekannte symmetrische Gruppe S_3. Geben Sie die Resultate folgender Operationen (als Zyklen) an:

   (a) $(13) \circ (12) \;=\; \boxed{(123)}$

   (b) $(23) \circ (123) \;=\; \boxed{(13)}$

   (c) $(123) \circ (132) \;=\; \boxed{()}$

3. Geben Sie die Rechts- und Linksnebenklasse der S_3-Untergruppe $\langle \{(), (13)\}, \circ \rangle$ zu (12) an:

   Lösung:

   Sei $H =_{df} \langle \{(), (13)\}, \circ \rangle$. Dann haben wir:

   - Rechtsnebenklasse:

   $$H \circ (12) \;=\; \{() \circ (12), (13) \circ (12)\} \;=\; \{(12), (123)\}.$$

   - Linksnebenklasse:

   $$(12) \circ H \;=\; \{(12) \circ (), (12) \circ (13)\} \;=\; \{(12), (132)\}.$$

4. Geben Sie alle Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ an und begründen Sie dieses. Geben Sie für jeden Normateiler N einen Homomorphismus $h_N : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ mit $N = Kern(h_N)$ an.

Lösung:

Normalteiler sind notwendig Untergruppen. Da nach dem Satz von Lagrange $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ nur die trivialen Untergruppen $\langle \{0\}, +_5 \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ besitzt, sind diese die einzigen Kandidaten. Andererseits sind die trivialen Untergruppen per Defnition immer auch Normalteiler.

Die entsprechenden Homomorphismen sind:

- Für $U =_{df} \langle \{0\}, +_5 \rangle$ die Nullabbildung:
  $h_U : \langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle \to \langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$
  $x \mapsto 0$
- Für $V =_{df} \langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ die identische Abbildung:
  $h_V : \langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle \to \langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$
  $x \mapsto x$

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Hinweis: Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.

1. Die Freundschaftsbeziehung unter Personen ist eine Äquivalenzrelation.

   Lösung: Nein.
   Die Freundschaftsbeziehung ist nicht transitiv. Beispiel: Anna ist mit Bob und Bob mit Cindy befreundet, aber Anna und Cindy können sich überhaupt nicht ausstehen.

2. Für eine gegebene Grundmenge M ist deren Potenzmenge gleichmächtig mit $\{0,1\}^M$.

   Lösung: Ja.
   Die Funktion $\chi_M : \mathfrak{P}(M) \to (M \to \{0,1\})$, die jeder M-Teilmenge A ihre charakteristische Funktion $\chi_M(A) : M \to \{0,1\}$ zuordnet durch:

   $$\chi_M(A)(m) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   ist Bijektion.

3. Ein Unterring eines Ringes mit Einselement hat nicht notwendig auch ein Einselement.

   Lösung: Ja.
   Siehe Skript (Kapitel 8, S.96). Der Unterring $2\,\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ hat kein Einselement.

4. $\langle \mathbb{Z}_{11}, +_{11} \rangle$ hat nur triviale Untergruppen.

   Lösung: Ja.
   Wie bei jeder Gruppe gibt es die trivialen Untergruppen. Dass es keine Weiteren gibt, folgt aus dem Satz von Lagrange.

5. Die Funktion $qs : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl ihre Quersumme zuordnet, ist ein Ordnungshomomorphismus.[1]

   Lösung: Nein.
   Offensichtlich gilt $9 \leq 10$, aber $qs(9) = 9 \not\leq 1 = qs(10)$.

6. Jeder Verband besitzt ein kleinstes oder ein größtes Element.

   Lösung: Nein.
   Man betrachte den Verband $(\mathbb{Z}, \leq)$.

7. $\langle \mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15} \rangle$ ist ein Körper.

   Lösung: Nein.
   $\mathbb{Z}_{15}$ hat die Nullteiler 3 und 5. Damit ist $\langle \mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15} \rangle$ kein Integritätsbereich und damit erst recht kein Körper.

[1] Bezüglich der üblichen $\leq$-Ordnung.

8. Ideale sind gegen Schnittbildung abgeschlossen.

   Lösung: Ja.
   Siehe Skript (Kapitel 8.2, Seite 97). Seien I, J Ideale eines Ringes R. Um zu zeigen, dass $I \cap J$ Linksideal ist, nehmen wir Elemente $a, r \in R$ an. Dann gilt:

   $$a \in I \cap J \ \Rightarrow a \in I \wedge a \in J \ \Rightarrow \ r \odot a \in I \wedge r \odot a \in J \ \Rightarrow \ r \odot a \in I \cap J.$$

   Die Rechtsidealeigenschaft zeigt man analog.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabenblock Lineare Algebra (Prof. Kern-Isberner)

Aufgabe 7 (Teilraum) **[1+1+3=5 Punkte]**

Gegeben ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Menge

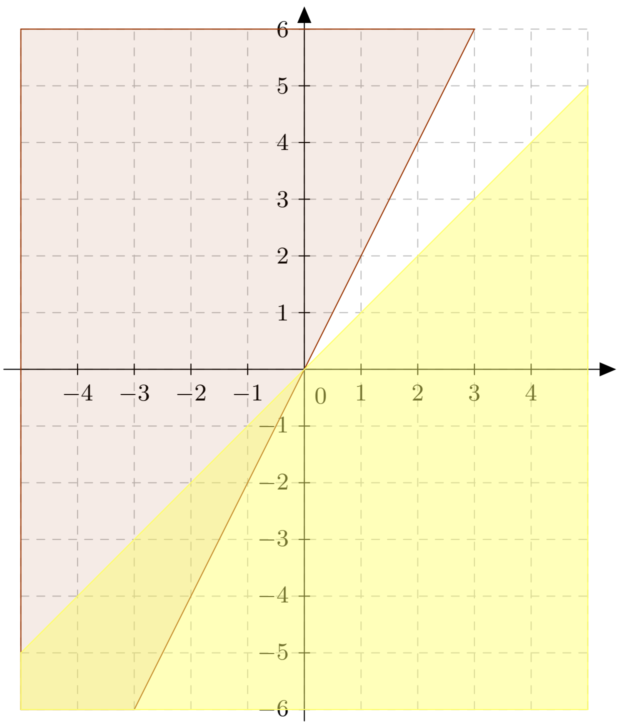
$$U = \left\{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid 2x \leq y \text{ oder } y \leq x\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

1. Zeigen Sie, dass $(0, 0, 0)^t \in U$ ist.

   Lösung: Für $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ist z.B. die zweite Bedingung $y \leq x$ erfüllt, da $0 \leq 0$ offensichtlich gilt.

2. Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Menge $W = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y, z)^t \in U\}$ in dem folgenden Koordinatensystem.

   Lösung: Die Bereich, der die Bedingung $2x \leq y$ erfüllt, ist blass-violett, der Bereich, der die Bedingung $y \leq x$ erfüllt, blass-gelb markiert. Der farbig markierte Bereich stellt die gesuchte Menge dar.



3. Entscheiden Sie, ob U ein Teilraum in $\mathbb{R}^3$ ist, und begründen Sie Ihre Antwort ausführlich durch einen formalen Beweis oder durch die Angabe eines Gegenbeispiels.

   Lösung:

   U ist kein Teilraum, da z.B. $(-3, -4, 0) \in U$, aber $(3, 4, 0) = (-1) \cdot (-3, -4, 0) \notin U$.

Aufgabe 8 (Basis eines Vektorraums) **[3 Punkte]**

Wir betrachten den Vektorraum $V = (\mathbb{Z}_7)^2$ über dem Körper $\mathbb{Z}_7$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V bilden.

Lösung:

Da $\dim V = 2$, genügt es zu zeigen, dass die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.
$\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind linear unabhängig genau dann, wenn aus $\alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = 0$ folgt $\alpha = \beta = 0$.
Wir bilden die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten mit $A_{2,1}(1)$ und $M_1(6)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_{1,2}(2)$ und $M_2(2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\alpha = \beta = 0$. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind somit linear unabhängig.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Lineare Abbildung) **[5+1=6 Punkte]**

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$ und $Bild(\varphi)$ und geben Sie jeweils ein Erzeugendensystem an.

   Lösung:

   Es ist

$$\begin{aligned} Kern\,(\varphi) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \mid \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \mid \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \mid x = -2y \right\} \end{aligned}$$

   Ein Erzeugendensystem für $Kern\,(\varphi)$ ist z.B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Es ist

$$\begin{aligned} Bild\,(\varphi) &= \left\{ \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

   Ein Erzeugendensystem für $Bild\,(\varphi)$ ist z.B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Entscheiden Sie, ob φ ein Isomorphismus ist; begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung:

   Da die Dimension von $Kern(\varphi)$ nicht 0 ist, ist φ nicht injektiv und folglich auch kein Isomorphismus.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Basiswechsel) **[15+2=17 Punkte]**

Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die beiden Basen

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$B' = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

1. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix ${}_{B'}[id]_B$ von B auf B'.

Lösung:

Die Basiswechselmatrix errechnet sich folgendermaßen: ${}_{B'}id_B = {}_{B'}id_{E_3} \circ {}_{E_3}id_{E_3} \circ {}_{E_3}id_B$. Es ist

$${}_{E_3}id_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$${}_{B'}id_{E_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wir können ${}_{B'}id_{E_3}$ dadurch berechnen, dass wir zu der Matrix der Spaltenvektoren von B' eine erweiterte Matrix bilden, indem wir hinter diese Matrix die Einheitsmatrix schreiben. Wir führen dann Operationen durch, die die Matrix der Spaltenvektoren von B' in die Einheitsmatrix überführen. Dieselben Operationen fürhren wir auf der zweiten Matrix.durch. Die zum Schluss erhaltene Matrix ist dann ${}_{B'}id_{E_3}$. Wir müssen dann noch ${}_{B'}id_{E_3}$ mit ${}_{E_3}id_B$ multiplizieren.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$M_2(2)$ und $M_3(2)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$A_{1,2}(-1)$ und $A_{1,3}(-1)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

$V_{2,3}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$A_{2,3}(-3)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & 2 & -6 \end{array}$$

$M_3\left(-\frac{1}{8}\right)$ und $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

$A_{3,2}(-3)$ und $A_{3,1}\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

$A_{2,1}\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Wir müssen noch ${}_{B'}id_{E_3}$ mit ${}_{E_3}id_B$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} {}_{B'}id_B &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Wie lässt sich aus ${}_{B'}[id]_B$ die Basiswechselmatrix ${}_B[id]_{B'}$ von B' auf B gewinnen?

   Lösung:

   Durch die Berechnung der Inversen von ${}_{B'}[id]_B$.

Name,Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 11 (Lineares Gleichungssystem) [3 Punkte]

Verwenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren, um die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}_7$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 2 \\ 2x + 4y &= 3 \\ -3x - 5y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Lösung:
Wir bilden die erweiterte Koefffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -3 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_{1,3}(3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A_{1,2}(5)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A_{2,3}(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$M_3(2)$ und $M_2(3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_{3,2}(2)$ und $A_{3,1}(2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_{2,1}(4)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge ist daher $\left\{(1,2,6)^t\right\}$.

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 12 (Determinate und Inverse einer Matrix) **[5+1=6 Punkte]**

Betrachten Sie die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

1. Bestimmen Sie die Determinante von A.

   Lösung:

   Wir bestimmen die Determinante mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Wir entwickeln dazu nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-4-3+4-2) - (-2-3+2+4) - 2\cdot(6-2+6-3-8+3) \\ &= -5-1-2\cdot 2 \\ &= -10 \end{aligned}$$

2. Ist A invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

   Lösung:

   Da $det(A) \neq 0$ ist A invertierbar.

Name,Vorname, Matrikelnummer

Bitte unbedingt leserlich ausfüllen