Vorlesung
Mathematik für Informatik I

technische universität dortmund

Prof. Dr. B. Steffen

WS 2017/2018 | Klausur | 09. Februar 2018

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Studiengang: ______________________

Unterschrift: ____

Kennwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse): ______________

Das Kennwort dient dazu, die Klausurergebnisse online zu veröffentlichen. Wählen Sie aus Datenschutzgründen ein Kennwort, das nicht mit Ihnen in Verbindung gebracht werden kann.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erzielbar. Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 40 Punkte erforderlich.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	10	10	10	8	12	8	10	10	10	12	100
Erreicht											

1. Prüfer: ______________ 2. Prüfer: ______________

Achtung: Für die Bearbeitung aller Aufgaben gilt ohne Ausnahmen (!):

> *Achten Sie auf eine vollständige Darlegung und Kommentierung des Lösungsweges. Wenn Sie Sätze der Vorlesung benutzen, so müssen Sie diese zum Lösungsweg deutlich in Bezug setzen.*

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) **[6+3+1=10 Punkte]**

X, Y und Z seien Mengen.

1. Beweisen Sie die Gleichheit

$$(X \cup Y) \cap (Z \cap X^{\complement})^{\complement} = X \cup (Y \cap Z^{\complement})$$

   unter ausschließlicher Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Mengengesetze (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Komplement, Idempotenz, Doppelkomplement, De Morgan, Neutralität).

   Geben Sie die in den Beweisschritten verwendeten Regeln an.

2. Zeigen Sie $\mathfrak{P}(X \cap Y) = \mathfrak{P}(X) \cap \mathfrak{P}(Y)$.

3. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage

$$Y \neq Z \;\Rightarrow\; X \cap Y \neq X \cap Z.$$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelation, Quasiordnung) **[7+3=10 Punkte]**

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$. $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ sei eine binäre Relation auf A.
   (a) Zeigen Sie: R ist eine Quasiordnung auf A.
   (b) Geben Sie R^{-1} an und weisen Sie nach, dass R^{-1} eine Quasiordnung ist.
   (c) Geben Sie $R \cap R^{-1}$ an und weisen Sie nach, dass $R \cap R^{-1}$ eine Äquivalenzrelation ist.
   (d) Geben Sie die durch $R \cap R^{-1}$ induzierte Partition von A an.

2. Zeigen Sie die Verallgemeinerung der vorhergehenden Teilaufgabe:
   Für jede Menge A und jede Quasiordnung $R \subseteq A \times A$ auf A gilt

$$R \cap R^{-1} \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A.$$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Induktion) **[3+4+3 = 10 Punkte]**

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

2. Wir definieren induktiv eine Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch:

$$\begin{aligned} h(0) &=_{df} 1 \\ h(1) &=_{df} 2 \\ h(n) &=_{df} 3 \cdot h(n{-}1) \; - \; 2 \cdot h(n{-}2) \quad \text{falls } n \geq 2 \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch verallgemeinerte Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $h(n) = 2^n$.

3. Die Booleschen Terme sind gemäß Vorlesung induktiv durch die folgende BNF definiert:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{BT} & := & \mathsf{T} \mid \mathsf{F} \mid \mathcal{V} \mid \neg\, \mathcal{BT} \mid (\mathcal{BT} \vee \mathcal{BT}) \mid (\mathcal{BT} \wedge \mathcal{BT}) \\ \mathcal{V} & := & X_0 \mid X_1 \mid \ldots \end{array}$$

Weiter sind zwei Funktionen gegeben, die von der Menge der Booleschen Terme auf die natürlichen Zahlen abbilden: $\#_K : \mathcal{BT} \to \mathbb{N}$ und $\#_O : \mathcal{BT} \to \mathbb{N}$

$\#_K(t)$ berechnet dabei die Anzahl der Klammerpaare und $\#_O(t)$ die Anzahl der Vorkommen atomarer Operanden in einem Booleschen Term t.

Beispiel: Für den Booleschen Term

$$t = (\neg\mathsf{T} \wedge ((X_0 \vee X_1) \vee (X_0 \wedge X_2)))$$

gilt $\#_K(t) = 4$ und $\#_O(t) = 5$.

Geben Sie induktive Definitionen für

$$\#_K(\mathcal{BT}) \;\text{ und }\; \#_O(\mathcal{BT})$$

an.

Aufgabe 4 (Verbände) **[(2+1+1)+4 = 8 Punkte]**

1. Sei $M = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Menge aller Partitionen $Part(M)$ über M mit der partielle Ordnung $\preceq$ definiert durch:

   $$P \preceq Q \quad \Leftrightarrow_{df} \quad \sim_P \subseteq \sim_Q .$$

   Dabei bezeichnet $\sim_P$ wie üblich die zur Partition P assozierte Äquivalenzrelation.

   (b) Ist $Part(M)$ ein Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

   (c) Ist $Part(M)$ sogar distributiver Verband? Begründen oder widerlegen Sie.

2. $(V, \preceq) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ der bekannte Potenzmengenverband natürlicher Zahlen und $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung:

$$h_A : V \to V$$
$$h_A(X) = X \cap A$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) h_A ist ein $\curlywedge$-Homomorphismus.

(b) h_A ist ein $\curlyvee$-Homomorphismus.

(c) h_A ist ein Ordnungshomomorphismus.

Name,Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) **[3+2+2+(3+2)) = 12 Punkte]**

1. Die Menge $GL(n, K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K ist gemäß Vorlesung bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Geben Sie explizit alle Elemente von $GL(2, \mathbb{Z}_2)$ an.

   Hinweis: Hilfreich sind Überlegungen zur Invertierbarkeit anhand von Kriterien wie Nullzeilen, Nullspalten, identischen Zeilen bzw. Spalten oder der Determinante.

2. Geben Sie ein Beispiel einer nicht kommutativen Gruppe an und zeigen Sie die Nichtkommutativität anhand eines Beispiels.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

3. Bestimmen Sie in Zykelschreibweise das Resultat von

$$((2\ 5\ 3) \circ (1\ 4\ 3\ 2))^{-1}.$$

4. Seien $\langle R, +_R, \cdot_R\rangle$ und $\langle S, +_S, \cdot_S\rangle$ Ringe, $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $I \subseteq R$ ein Ideal.

   (a) Zeigen Sie, dass dann auch $\varphi(I) \subseteq S$ Ideal ist.
   Hinweis: Dass $\varphi(I)$ Untergruppe von S ist, darf ohne Beweis benutzt werden.

   (b) Zeigen Sie, dass auf die Voraussetzung der Surjektivität von φ im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann, indem Sie R, S, φ und I so wählen, dass φ nicht surjektiv und $\varphi(I)$ kein Ideal ist.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Vektorräume, Untervektorräume) **[2+2+2+2=8 Punkte]**

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis.

1. $U_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
2. $U_2 =_{df} \{(x, y)^t \mid x^2 = y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. f
3. $U_3 =_{df} \left\{\left(a + b, b^2\right)^t \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
4. $U_4 =_{df} \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = A^t\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ transpornierte matrix

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1+2\\2^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3+4\\4^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+2\\2^2\end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & 7\\ 5 & 7 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 6 & 10\\ 6 & 4 & 14\\ 10 & 14 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 9 & 6 & 21 \\ 15 & 21 & 12 \end{pmatrix} * 3$$

Aufgabe 7 (Lineare Abbildungen und Rang) **[4+6 = 10 Punkte]**

Sei $V[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome über einer Variablen x vom Grad ≤ 2, also:

$$V[x] = \{\sum_{i=0}^{2} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

(Dass $V[x]$ ein Vektorraum ist, kann vorausgesetzt werden und ist hier nicht zu zeigen.)
Sei $f : V[x] \to V[x]$ definiert durch:

$$f(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i) = (a_2 + 2a_1)x + (a_1 + a_0)$$

1. Beweisen Sie, dass f linear ist
2. Bestimmen Sie Basen von $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$

Name,Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Determinante einer Matrix) **[4+6 = 10 Punkte]**

1. Gegeben ist die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $det(A \cdot A^t)$.

2. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die 4×4-Matrix

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ invertierbar ist.

Hinweis: Beachten Sie die Themenangabe zu Aufgabe 8! Entwickeln Sie nach der dritten Zeile.

Name,Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Darstellende Matrix, Basiswechsel) **[10 Punkte]**

Gegeben seien die Vektorräume $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ sowie die linearen Funktionen $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$, mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \qquad \psi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiter seien B und B' zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnen Sie die Matrix von $\psi \circ \varphi$ bezüglich der Basen B und B', also $_{B'}[\psi \circ \varphi]_B$.

Hinweis: Eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist die Standardbasis.

Aufgabe 10 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch.

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Wahr/Falsch) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Wahr"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Falsch"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Ein Monoid, in dem die Rechts- und Linkskürzungsregeln gelten, ist bereits eine Gruppe.
2. Seien A, B Mengen, wobei A echt in B enthalten ist. Dann ist eine Funktion $f : A \to B$ nicht surjektiv.
3. Jede total geordnete Menge ist ein Verband.
4. Ein Ring mit 1, in dem jedes von der 0 verschiedene Element ein multiplikativ Inverses besitzt, ist nullteilerfrei.
5. Alle Zeilentransformationen, die im Gauss-Verfahren angewendet werden dürfen, lassen die Determinante einer quadratischen Matrix unverändert.
6. Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $GL(n, K)$ über einem Körper K bilden zusammen mit der Nullmatrix einen Unterring von $K^{n\times n}$ für alle $n \geq 1$.
7. Das kartesische Produkt der symmetrischen Gruppe S_3 mit sich selbst, also $S_3 \times S_3$, besitzt keine Unteruppe mit 8 Elementen.
8. Es gibt keine Menge, die echt mächtiger als jede andere Menge ist.