lehrstuhl für programmiersysteme
Dr. Oliver Rüthing

technische universität dortmund

Fakultät Informatik
Lehrstuhl für
Künstliche Intelligenz
Prof. Dr. Kristian Kersting

Andrej Dudenhefner – Nils Kriege – Florian Kurpicz – Oliver Rüthing – Vanessa Volz – Hubert Wagner

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Wintersemester 2014/15

Lösung der Probeklausur

Aufgabe 1 *Aussagenlogik* (3+3 Punkte)

Das Beweisprinzip des "*modus ponens*" für Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet:

$$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}. \qquad \text{(MP)}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (MP) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.
2. Beweisen Sie, dass (MP) semantisch äquivalent zu T - mithin also Tautologie - ist unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl)}$$

Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

Lösung:

1.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\overbrace{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$	$\overbrace{\mathcal{C} \wedge \mathcal{A}}^{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}$
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w

2.

$$\begin{array}{rcll}
((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} & \equiv & \neg((\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{A}) \vee \mathcal{B} & \text{(Impl)} \\
& \equiv & \neg(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Komm)} \\
& \equiv & \neg((\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Dist.)} \\
& \equiv & \neg(\mathsf{F} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})) \vee \mathcal{B} & \text{(Neg)} \\
& \equiv & \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & \text{(Neut.)} \\
& \equiv & (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \vee \mathcal{B} & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{B}) & \text{(Komm,Ass)} \\
& \equiv & \neg\mathcal{A} \vee \mathsf{T} & \text{(Neg)} \\
& \equiv & \mathsf{T} \vee \neg\mathcal{A} & \text{(Komm)} \\
& \equiv & \mathsf{T} \vee (\mathsf{T} \wedge \neg\mathcal{A}) & \text{(Neut)} \\
& \equiv & \mathsf{T} & \text{(Absorp)}
\end{array}$$

Der Beweis lässt sich natürlich vereinfachen, wenn man Anwendungen der Assoziativ- und

Kommutativitätsgesetze mit anderen Beweisschritten vereint. Auch die Einseigenschaft von T könnte direkt benutzt werden, um die letzten 3 Beweisschritte einzusparen.

Aufgabe 2 *Induktion* (5 Punkte)

Die Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe **verallgemeinerter** Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n .$$

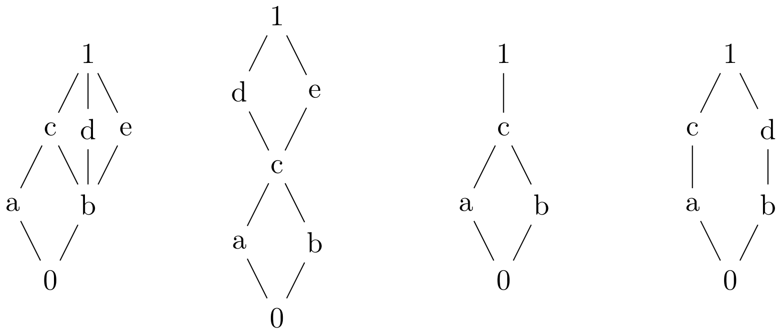
Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung bewiesen für alle $m < n$ (Induktionsannahme). Wir unterscheiden dann folgende 3 Fälle:

- $n = 0$. Dann gilt $fib(0) \overset{\text{Def.}}{=} 0 < 1 = \left(\frac{7}{4}\right)^0$.
- $n = 1$. Dann gilt $fib(1) \overset{\text{Def.}}{=} 1 < \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$.
- $n \geq 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} fib(n) &\overset{\text{Def.}}{=} fib(n-2) + fib(n-1) \\ &\overset{IA}{\leq} \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{7}{4}\right) \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{11}{4} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{44}{16} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \frac{49}{16} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *Verbände* (4+2 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Verbände in Form ihrer Hasse-Diagramme.



1. Unter den Verbänden befinden sich zwei, die nicht distributiv sind. Geben Sie diese an und begründen Sie die Nichtdistributivität.

2. Geben Sie zum vierten Verband (der ganz rechts) zu jedem Element alle komplementären Elemente an.

Lösung:

1. Die Verbände ganz links und ganz rechts sind nicht distributiv. Für den Verband ganz links gilt nämlich:
$$c \curlyvee (d \curlywedge e) = c \curlyvee b = c \neq 1 = 1 \curlywedge 1 = (c \curlyvee d) \curlywedge (c \curlyvee e)$$
Für den Verband ganz rechts haben wir:
$$b \curlyvee (a \curlywedge d) = b \curlyvee 0 = b \neq d = 1 \curlywedge d = (b \curlyvee a) \curlywedge (b \curlyvee d)$$

2. Bezeichnen wir hier die Menge alle Komplemente von x vereinfacht auch als $\bar{x}$, so haben wir für den vierten Verband: $\bar{0} = \{1\},\ \bar{a} = \bar{c} = \{b, d\},\ \bar{b} = \bar{d} = \{a, c\},\ \bar{1} = \{0\}$

Aufgabe 4 *Algebraische Strukturen* (2+3 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel einer nicht kommutativen Gruppe an und erläutern Sie, warum die Kommutativität verletzt ist.

2. Wir betrachten die regulären $n \times n$-Matrizen über einem Körper K
$$GL(n, K) \ =_{df} \ \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}.$$
Offensichtlich bildet $GL(n, K)$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Zeigen Sie, dass
$$SL(n, K) \ =_{df} \ \{A \in K^{n\times n} \mid det(A) = 1\}$$
eine Untergruppe von $GL(n, K)$ ist.

Lösung:

1. Aus der Vorlesung kennen wir folgende zwei Besipiele.
   a) Die symmetrische Gruppe S_3. Diese ist nicht kommutativ denn:
   $$(1\,2) \circ (1\,3) \ = \ (1\,3\,2) \ \neq \ (1\,2\,3) \ = \ (1\,3) \circ (1\,2).$$

b) Die invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Matrixmultiplikation bilden offensichtlich eine Gruppe. Bezüglich der Kommutativität gilt aber:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Weil eine $n \times n$-Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn $det(A) \neq 0$ gilt, liegt mit $SL(n, K)$ eine Teilmenge von $GL(n, K)$ vor.

   Wir müssen nur noch zeigen

   Abgeschlossenheit: Seien $A, B \in SL(n, K)$. Dann gilt:

   $$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B) \overset{\text{Vor.}}{=} 1 \cdot 1 = 1.$$

   Also gilt auch $A \cdot B \in SL(n, K)$.

   Neutrales Element: Offensichtlich gilt $det(E_n) = 1$ und somit $E_n \in SL(n, K)$.

   Inverse: Sei $A \in SL(n, K)$. Damit existiert A^{-1} und es bleibt zu zeigen, dass A^{-1} in $SL(n, K)$ liegt. Hier gilt aber:

   $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Aufgabe 5 *Basis, Kern und Bild einer linearen Abbildung* (4+2 Punkte)

1. Geben Sie 4 verschiedene Charakterisierungen einer Basis eines Vektorraums an.
2. Sei

   $$A =_{df} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   und $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige lineare Abbildung, d.h.: $\varphi_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. Geben Sie Kern und Bild von φ_A an.

Lösung:

1. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraumes V heißt *Basis* genau dann, wenn
   - B ein inklusionsminimales Erzeugendensystem von V ist: $\langle B \rangle = V$, und $\forall v \in B : \langle B \setminus \{v\} \rangle \neq V$.
   - B eine inklusionsmaximale linear unabhängige Teilmenge von V ist: B ist linear unabhängig, und $\forall v \in V \setminus B$ ist $B \cup \{v\}$ nicht linear unabhängig.
   - B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist: $\langle B \rangle = V$ und B ist linear unabhängig.
   - jeder Vektor $v \in V$ durch eine *eindeutige* Linearkombination von Vektoren aus B dargestellt werden kann.
2. Offensichtlich gilt

   $$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

   Damit haben wir:

   $$Kern(\varphi_A) = \{(x, y)^t \mid x \in \mathbb{R}, y = 0\} = \{(x, 0)^t \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$Bild(\varphi_A) = \{(y,0)^t \mid y \in \mathbb{R}\} \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Aufgabe 6 *Rang einer Matrix* (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times5}$:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Im folgenden ist eine nicht streng am Gauß-Algorithmus orientierte, jedoch schnellere Vorgehensweise dargestellt.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{A_{25}(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_{13}(-2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{A_{23}(-2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{V_{34},V_{13}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{A_{13}(-4)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & -20 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A_{23}(7)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 17 & -27 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{M_3(\frac{1}{17})}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{17} & \frac{12}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Darstellung gilt also $Rang(A) = 3$.

Aufgabe 7 *Wissensfragen* (12 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch (jew. 1 Punkt pro richtiger Antwort)? Begründen Sie insgesamt **zwei** Antworten ausführlich (jew. 2 Punkte pro richtiger Begründung). Falls mehr als zwei Antworten begründet wurden, machen Sie die zu wertenden Antworten kenntlich. Andernfalls werden die ersten beiden Antworten gewertet.

1. Ist $g \circ f$ injektiv, wobei $f : A \to B$ und $g : B \to C$, so muss sowohl f als auch g selbst injektiv sein.

2. Die Vereinigung zweier Äquivalenzrelationen (über derselben Grundmenge) ist im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation.

3. $\langle \mathbb{Z}_{31}, +_{31} \rangle$ besitzt keinen nichttrivialen Normalteiler.

4. Ein kommutativer nullteilerfreier Ring ist ein Körper.

5. Die Vektoren $(-4, 3, -1)^t$ und $(5, 7, 1)^t$ sind orthogonal zueinander.

6. Für eine 3×2-Matrix A kann die durch A bestimmte lineare Abbildung φ_A nicht injektiv sein.

7. Für $n \times n$-Matrizen gilt das Gesetz $det(A + B) = det(A) + det(B)$.

8. Ist S eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann lässt sich jeder Vektor in S als Linearkombination der übrigen Vektoren in darstellen.

Lösung:

1. Falsch. Wichtig ist allein, dass f injektiv ist und g auf dem Bildbereich von f injektiv ist. g selbst muss aber nicht notwendig injektiv sein. Beispiel: Sei $A = C = \{1\}$ und $B = \{1, 2\}$ und weiter $f(1) = 1, g(1) = g(2) = 1$. Dann ist offensichtlich $g \circ f$ injektiv, g aber nicht.

2. Richtig. Auf einer dreielementigen Menge $\{1, 2, 3\}$ sind $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ und $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ Äquivalenzrlationen. Allerdings ist $R_1 \cup R_2$ keine, da die Transitivität verletzt ist. $(1, 2), (2, 3) \in R_1 \cup R_2$, aber $(1, 3) \notin R_1 \cup R_2$.

3. Richtig. Jeder Normalteiler ist insbesondere Untergruppe von $\mathbb{Z}_{31}$. Nach dem Satz von Lagrange kann es aber nur die trivialen Untergruppen geben.

4. Falsch. Beispielsweise liegt mit dem Integritätsbereich der ganzen Zahlen eine solche Struktur vor. Wegen des Fehlens multiplikativ inverser Elemente ist das aber kein Körper.

5. Richtig, weil das Skalarprodukt der Vektoren 0 ist:

$$(-4, 3, -1)^t \bullet (5, 7, 1)^t \; = \; (-4) \cdot 5 + 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 \; = \; -20 + 21 - 1 \; = \; 0.$$

6. Falsch. Betrache 3×2 Matrix

$$A \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Offenbar gilt $\varphi_A((x, y)^t) \; = \; (x, y, 0)^t$. Damit ist insbersondere $Kern(\varphi_A) = (0, 0)^t$, was die Injektivität von φ_A impliziert.

7. Falsch. Betrachte die 2×2 Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt offensichtlich $det(A) = det(B) = 0$, aber $det(A + B) = det(E_2) = 1$.

8. Falsch. Betrachte $S = \{(1, 0)^t, (2, 0)^t, (0, 1)^t\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist S linear abhängig, aber der Vektor $(0, 1)$ lässt sich nicht linear aus den anderen beiden kombinieren.