Alle Lösungen ohne Gewähr! – Es haben sich bestimmt irgendwo Tippfehler eingeschlichen.

Im Zweifelsfall sei empfohlen, noch einmal in die Vorlesungsfolien und das Skript zu schauen sowie sich auf sein logisches Denken zu verlassen. Gefundene Fehler können gerne auch an Dennis oder Marcel gemeldet werden.

Aufgabe 1 *logische Aussagen*

Du wirst von einem Gericht wegen eines Mordes zum Tode verurteilt. Kurz bevor du hingerichtet werden sollst, kommt ein Wärter zu dir und sagt:
„Du hast die Wahl, wie du hingerichtet werden sollst. Du darfst eine Aussage treffen. Ist sie *wahr*, so wirst du auf dem elektrischen Stuhl getötet, ist sie hingegen *falsch*, so wirst du mit einer Giftspritze hingerichtet."

Du möchtest natürlich eine Aussage treffen, sodass du weder auf die eine noch auf die andere Weise umgebracht werden kannst. Welche ist das?

Um eine Aussage zu treffen, sodass du weder auf die eine noch auf die andere Weise umgebracht werden kannst, muss sie weder *falsch* noch *wahr* sein.
Betrachten wir hierfür die Aussage: „Ich werde mit einer Giftspritze hingerichtet". Schauen wir nun, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.

Wäre sie *wahr*, so würdest du auf dem elektrischen Stuhl hingerichtet. Dann wäre die Aussage aber *falsch*. Das ist ein Widerspruch.
Wäre sie *falsch*, so würdest du mit einer Giftspritze hingerichtet werden. Dann wäre die Aussage aber *wahr*. Das ist ein Widerspruch.

Somit ist diese Aussage weder *wahr* noch *falsch*.

Aufgabe 2 *Wahrheitstafeln*

Überprüfe folgende Aussagen mithilfe einer Wahrheitstafel auf Richtigkeit!

(a) $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Die Aussage ist *wahr*, denn:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	w	w	w
f	f	w	f	w	w

Die letzten beiden Spalten sind natürlich identisch, was diese semantische Äquivalenz zeigt.
Übrigens: Diese aussagenlogische Äquivalenz ist auch bekannt als „Kontraposition".

(b) $(C \vee (\neg D)) \wedge (\neg C) \equiv (C \wedge D) \wedge ((\neg C) \vee (\neg D))$

Die Aussage ist *falsch*, denn:

C	D	$\neg C$	$\neg D$	$\overbrace{C \vee (\neg D)}^{=:X}$	$X \wedge (\neg C)$	$\overbrace{(C \wedge D)}^{=:Y}$	$\overbrace{((\neg C) \vee (\neg D))}^{=:Z}$	$Y \vee Z$
w	w	f	f	w	f	w	f	f
w	f	f	w	w	f	f	w	f
f	w	w	f	f	f	f	w	f
f	f	w	w	w	w	f	w	f

Dabei sieht man, dass die beiden Aussagen im Fall „C und D beide falsch“ verschiedene Wahrheitswerte haben.

(c) $(E \Rightarrow F) \equiv (\neg E \vee F)$

Die Aussage ist *wahr*, denn:

E	F	$E \Rightarrow F$	$\neg E$	$(\neg E \vee F)$	$(E \Rightarrow F) \equiv (\neg E \vee F)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Aufgabe 3 *Quantoren*

Beschreibe in eigenen Worten, was die quantorisierten Aussagen bedeuten!
Gib außerdem zu jeder Aussage ihren Wahrheitswert (mit Begründung) an!

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} \colon n = 2k$

„Jede natürliche Zahl lässt sich als das Doppelte einer anderen natürlichen Zahl schreiben.“
Diese Aussage ist *falsch*, denn $1 \in \mathbb{N}$, aber $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} \colon k = 5n$

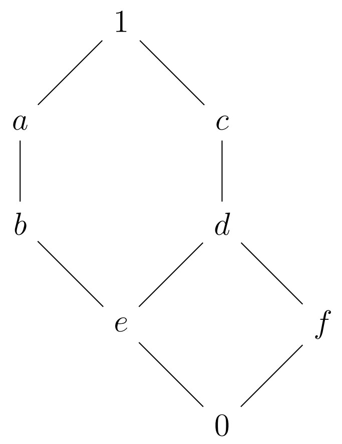
„Das Fünffache jeder natürlichen Zahl ergibt wieder eine natürliche Zahl.“
Diese Aussage ist natürlich *wahr*.

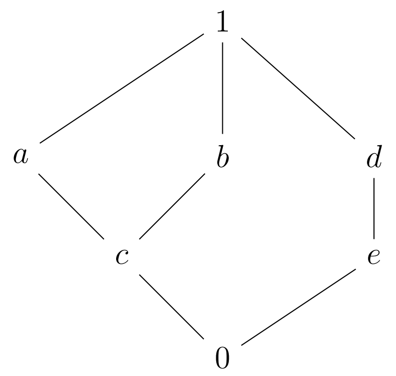
(c) $\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \colon k = 5n$

„Es gibt eine natürliche Zahl, die als das Fünffache jeder natürlichen Zahl darstellbar ist.“
Diese Aussage ist *falsch*, denn verschiedene natürliche Zahlen mit 5 multipliziert liefern immer unterschiedliche Ergebnisse.

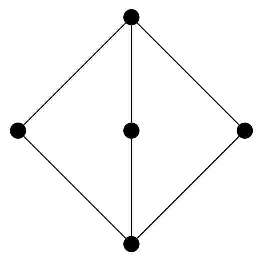
Aufgabe 4 *distributive Verbände*

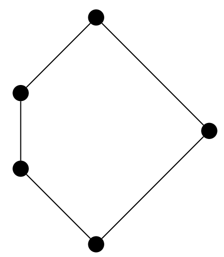
Sind die folgenden Verbände jeweils distributiv? Gib ggf. ein Gegenbeispiel an!



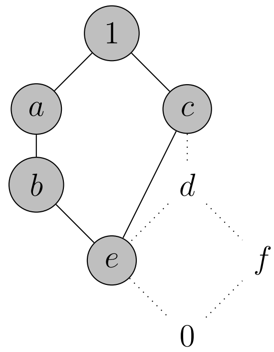


Ein Verband ist *nicht* distributiv genau dann, wenn er einen der beiden folgenden Verbände als Unterverband hat:





Betrachtet man beim ersten Verband nur die hervorgehobenen Elemente $1, a, b, c, e$, so entsteht ein Unterverband „der zweiten Art“.

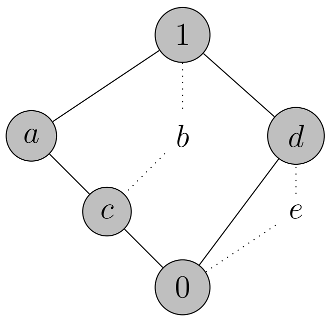


Mit diesen drei Elementen ergibt sich tatsächlich ein Widerspruch:

$$\begin{aligned} (a \curlywedge c) \curlyvee b &= (a \curlyvee b) \curlywedge (c \curlyvee b) \\ \Leftrightarrow \quad e \curlyvee b &= a \curlywedge 1 \\ \Leftrightarrow \quad b &= a \end{aligned}$$

Demnach ist dieser Verband *nicht* distributiv.

Auch im zweiten Verband entsteht bei ausschließlicher Betrachtung der Elemente $1, a, c, d, 0$ ein Unterverband „der zweiten Art“.



Analog leitet man hierfür einen Widerspruch her:

$$\begin{aligned} (a \curlywedge d) \curlyvee c &= (a \curlyvee c) \curlywedge (d \curlyvee c) \\ \Leftrightarrow \quad 0 \curlyvee c &= a \curlywedge 1 \\ \Leftrightarrow \quad c &= a \end{aligned}$$

Auch dieser Verband ist demnach *nicht* distributiv.

Thema *Induktion*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Induktionsanfang
- Induktionsvoraussetzung, Induktionsschritt
- Backus-Naur-Form (BNF)

Aufgabe 5

Beweise per vollständiger Induktion: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ ist dasselbe wie n^2.

Zunächst stellen wir die Gleichung auf, die lautet:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Und jetzt wie immer mit vollständiger Induktion $n \mapsto n + 1 \ldots$
(IA): Für den Fall $n = 1$ ist diese Aussage leicht nachzuprüfen.
(IV): Für ein $n \geq 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
(IS): Wir schließen nun von n auf $n+1$. Sei also die Aussage für n bereits gezeigt. Wir müssen jetzt noch $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \stackrel{!}{=} (n+1)^2$ zeigen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 && \text{((IV) angewendet)} \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2 && \textit{q. e. d.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Zeige die folgende Aussage mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \colon 2n + 1 < n^2 < 2^n < n!$$

Hinweis: Obige Aussage enthält drei Ungleichungen. Man beweise diese Ungleichungen jeweils durch separate Induktionen – oder zumindest in separaten Induktionsschritten.

(IA): Im Fall $n = 5$ sind alle drei Ungleichungen korrekt. Es gilt nämlich:

$$\underbrace{2n+1}_{=11} \stackrel{\text{(i)}}{<} \underbrace{n^2}_{=25} \stackrel{\text{(ii)}}{<} \underbrace{2^n}_{=32} \stackrel{\text{(iii)}}{<} \underbrace{n!}_{=120}$$

(IV): Für ein $n \geq 5$ gilt:
(i) $2n + 1 < n^2$ und
(ii) $n^2 < 2^n$ und
(iii) $2^n < n!$

(IS): Wir schließen nun von n auf $n + 1$. Seien also die Ungleichungen für n bereits bewiesen. Dann:

$$\begin{aligned} 2(n+1)+1 &= 2n+3 = (2n+1)+2 \\ &< n^2 + 2 && \text{((IV) (i) auf } 2n+1 \text{ angewendet)} \\ &< n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 && \text{(wegen } n \geq 5 \text{ ist } 2 < 2n+1) \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< 2^n + 2n + 1 && \text{((IV) (ii) auf } n^2 \text{ angewendet)} \\ &< 2^n + n^2 && \text{(Ungl. (i) auf } 2n+1 \text{ angewendet)} \\ &< 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} && \text{((IV) (ii) auf } n^2 \text{ angewendet)} \end{aligned}$$

Und:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &< 2 \cdot n! && \text{((IV) (iii) auf } 2^n \text{ angewendet)} \\ &< (n+1) \cdot n! = (n+1)! && \text{(wegen } n \geq 5 \text{ ist } 2 < n+1) \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir nun alle drei Ungleichungen bewiesen. *q. e. d.*

Aufgabe 7 *induktives Definieren*

(a) Betrachte die Funktion $f(n) = n^2 - n$ für $n \in \mathbb{N}$. Stelle eine induktive Definition von f auf und verwende dabei nur den Additionsoperator „+“!

Der Induktionsanfang ist meist leicht: Man setzt einfach $n = 1$ ein und schaut, was rauskommt, hier also $f(1) = 1^2 - 1 = 0$.
Um jetzt die eigentliche induktive Definition zu konstruieren, sollte man die gegebene Funktion den Fall für $n{+}1$ betrachten. Dann probiert man, die Funktion $f(n{+}1)$ so umzuformen, dass im Term ein $f(n)$ vorkommt:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)^2 - (n+1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - 1 \\ &= \underbrace{\left(n^2 - n\right)}_{=f(n)} + 2n = f(n) + 2n \end{aligned}$$

Beachtet man, dass die Funktion nur mit dem Additionsoperator geschrieben werden soll, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} f(1) &:= 0, \\ f(n+1) &:= f(n) + n + n. \end{aligned}$$

(b) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(1) &:= \tfrac{1}{2}, \\ f(n+1) &:= \tfrac{1}{2}\left(f(n) + \tfrac{1}{2^n}\right). \end{aligned}$$

Schreibe f in expliziter Form, also ohne Induktion bzw. Rekursion!

Zuerst schreiben wir $f(n+1)$ mal etwas anders:

$$f(n+1) = \tfrac{1}{2}\left(f(n) + \tfrac{1}{2^n}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot f(n) + \tfrac{1}{2^{n+1}}$$

Dann setzten wir $n = 1, 2, \ldots$ ein:

$$f(1) = \tfrac{1}{2}, \quad f(2) = \tfrac{2}{4}, \quad f(3) = \tfrac{3}{8}, \quad f(4) = \tfrac{4}{16}, \quad f(5) = \tfrac{5}{32}, \quad f(6) = \tfrac{6}{64}$$

So sollte man erkennen, dass $f(n) = \frac{n}{2^n}$ die explizite Form ist. Alternativ kann man auch sukzessive $f(n), f(n-1), \ldots$ einsetzten um zu erkennen, was passiert:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \tfrac{1}{2} \cdot f(n) + \tfrac{1}{2^{n+1}} && \text{(Def. von } f(n)\text{)} \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot f(n-1) + \tfrac{1}{2^n}\right) + \tfrac{1}{2^{n+1}} && \text{(Term vereinfachen)} \\ &= \tfrac{1}{2^2} \cdot f(n-1) + \tfrac{2}{2^{n+1}} && \text{(Def. von } f(n-1)\text{)} \\ &= \tfrac{1}{2^3} \cdot f(n-2) + \tfrac{3}{2^{n+1}} \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

So erkennt man auch, dass $f(n) = \frac{n}{2^n}$ die explizite Form ist.

Aufgabe 8

Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(IA): Für den Fall $n = 1$ ist diese Aussage leicht nachzuprüfen.
(IS): Wir schließen von $n-1$ auf n. Sei also die Aussage für $n-1$ bereits gezeigt. Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + n^2 && \text{(nach (IV))} \\ &= \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n + n^2 && \text{(Klammern ausmultipliziert)} \\ &= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \\ &= \tfrac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) && \textit{q. e. d.} \end{aligned}$$

Thema *Relationen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- kartesisches Produkt, Relation, Umkehrrelation
- Reflexivität, Transitivität, Symmetrie, Antisymmetrie
- Quasiordnung, Äquivalenzrelation, Partition
- partielle Ordnung (Halbordnung), totale Ordnung

Aufgabe 9

Es sei M die Menge aller Menschen. S sei die Menge aller Städte, die mehr als 1000 Einwohner haben.

Überprüfe die angegebenen Relationen auf der gegebenen Menge jeweils auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität! Begründe deine Antworten kurz!

$$R_1 := \{(a,b) \in M \times M \colon a \text{ und } b \text{ haben ein gemeinsames Kind.}\}$$
$$R_2 := \{(a,b) \in M \times M \colon a \text{ und } b \text{ haben denselben Vater.}\}$$
$$R_3 := \{(c,d) \in S \times S \colon c \text{ hat mehr Einwohner als } d\}$$
$$R_4 := \{(c,d) \in S \times S \colon \text{Es gibt eine Straße von } c \text{ nach } d\text{.}\}$$
$$R_5 := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m < n\}$$
$$R_6 := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m = n\}$$

Bei R_4 seien Einbahnstraßen mal außer Acht gelassen. ;-)

R_1 ist *nicht* reflexiv, weil man nicht mit sich selbst ein Kind haben kann.
R_1 ist symmetrisch: Wenn a mit b ein Kind hat, dann hat auch b mit a ein Kind.
R_1 ist *nicht* transitiv: Wenn a mit b und b mit c ein Kind hat, kann a mit c kein Kind haben. Schließlich müssen a und c das gleiche Geschlecht haben.

R_2 ist reflexiv, weil man mit sich selbst den gleichen Vater hat.
R_2 ist symmetrisch: Hat a denselben Vater wie b, so hat auch b den gleichen Vater wie a.
R_2 ist transitiv: Hat a denselben Vater wie b und b denselben Vater wie c, dann muss auch a denselben Vater wie c haben.

R_3 ist *nicht* reflexiv, weil eine Stadt c nicht mehr Einwohner als c selbst haben kann.
R_3 ist *nicht* symmetrisch: Wenn eine Stadt c mehr Einwohner als d hat, kann d nicht mehr Einwohner als c haben.
R_3 ist transitiv: Hat c mehr Einwohner als d und d mehr als e, dann hat c auch mehr als e.

R_4 ist reflexiv, da es von c immer eine Straße zu c gibt.
R_4 ist symmetrisch: Führt eine Straße von c nach d, so führt sie auch von d nach c.
R_4 ist transitiv: Wenn eine Straße von c nach d führt und eine Straße von d nach e führt, dann führt auch eine Straße von c nach e (nämlich auf jeden Fall mit Umweg über die Stadt d).

R_5 ist *nicht* reflexiv, denn $m \not< m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.
R_5 ist *nicht* symmetrisch: Wenn $m < n$, dann ist $n \not< m$.
R_5 ist transitiv: Wenn $m < n$ und $n < p$, dann ist auch $m < p$.

R_6 ist reflexiv, denn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt $m = m$.
R_6 ist symmetrisch: Wenn $m = n$, dann ist auch $n = m$.
R_6 ist transitiv: Wenn $m = n$ und $n = p$, dann ist offensichtlich auch $m = n$.

Aufgabe 10

Betrachte die folgende Relation auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon (\lambda x_1, \lambda x_2) = (y_1, y_2)$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist!

Reflexivität: Sei $x \in \mathbb{R}^2$ und wähle $\lambda := 1$. Dann ist $(\lambda x_1, \lambda x_2) = (x_1, x_2)$, also $x \sim x$.
Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \sim y$. Damit gilt für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon (\lambda x_1, \lambda x_2) = (y_1, y_2)$.
Für $\mu := \frac{1}{\lambda} \neq 0$ gilt dann $(x_1, x_2) = (\mu y_1, \mu y_2)$, also $y \sim x$.
Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$. Damit gibt es Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $(\lambda x_1, \lambda x_2) = (y_1, y_2)$ und $(\mu y_1, \mu y_2) = (z_1, z_2)$. Es folgt $(\lambda\mu \cdot x_1, \lambda\mu \cdot x_2) = (z_1, z_2)$.
Wegen $\lambda \cdot \mu \neq 0$ folgt $x \sim z$. *q. e. d.*

Aufgabe 11

Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um eine partielle Ordnung auf der Menge $M := \{a, b, c\}$?

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(a, a), (b, a), (b, b)\} \\ R_2 &:= \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c)\} \\ R_3 &:= \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\} \end{aligned}$$

Gib ggf. an, aus welchem Grund keine partielle Ordnung vorliegt!

Partielle Ordnungen sind *reflexive*, *antisymmetrische* und *transitive* Relationen.

R_1 ist nicht reflexiv, denn $(c, c) \notin R_1$. Jedoch ist R_1 antisymmetrisch und transitiv.
R_2 ist reflexiv und antisymmetrisch, aber nicht transitiv: $(a, b), (b, c) \in R_3$, aber $(a, c) \notin R_3$.
R_3 ist schließlich von diesen drei Relationen die einzige partielle Ordnung.

Aufgabe 12

Überprüfe die angegebenen Relationen auf der Menge $M := \{\alpha, \beta, \gamma\}$ jeweils auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität!
Welche der Relationen ist demzufolge eine Quasiordnung, welche eine Äquivalenzrelation und welche eine partielle Ordnung?

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\gamma,\gamma)\}\\
R_2 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\}\\
R_3 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma)\}\\
R_4 &:= \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\gamma),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\}
\end{aligned}$$

Hier sind keine Begründungen gefordert, eine simple Tabelle zum Ankreuzen genügt.

	reflexiv	symm.	antisymm.	transitiv	Quasiord.	Äquiv.rel.	part. Ord.
R_1	✓	✓	—	✓	✓	✓	—
R_2	✓	—	✓	✓	✓	—	✓
R_3	✓	—	—	—	—	—	—
R_4	✓	—	✓	✓	✓	—	✓

Thema *Abbildungen und Funktionen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Bild und Urbild, Kern
- Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Aufgabe 13

Welche der folgenden Abbildungen ist injektiv, welche surjektiv, welche sogar bijektiv? Gib jeweils auch Begründungen an!

$f_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto$ Quersumme von n
$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor =$ „x abgerundet“
$f_3 \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$
$f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 42x + 5$
$f_5 \colon$ in Deutschland vergebene Postleitzahlen $\to$ Städte und Gemeinden in Deutschland
$f_6 \colon$ Studierende der TU Dortmund $\to \mathbb{N},$ Studierender $\mapsto$ Matrikelnummer

Dabei sei $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der reellen Zahlen ohne die Null.

f_1 ist *nicht* injektiv, weil beispielsweise $f_1(15) = 6 = f_1(42)$.
f_1 ist surjektiv, da sich zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $x \in \mathbb{N}$ mit $f_1(x) = n$ konstruieren lässt: $x = \underbrace{11\ldots11}_{n \text{ mal}}$.

f_2 ist *nicht* injektiv, da beispielsweise $f_2(1{,}2) = 1 = f_2(1{,}5)$.
f_2 ist surjektiv, da beispielsweise für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $f_2(x) = x$.

f_3 ist injektiv, da jedes $y \in \mathbb{R}$ unter der Funktion f_3 höchstens einmal getroffen wird.
f_3 ist *nicht* surjektiv, da es zu $y = 0 \in \mathbb{R}$ kein $x \in \mathbb{R}^*$ mit $f(x) = \frac{1}{x} \stackrel{!}{=} 0 = y$ gibt.

f_4 ist offensichtlich injektiv und surjektiv, also bijektiv. Es lässt sich nämlich eine Umkehrfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \frac{x-5}{42}$ angeben.

f_5 ist *nicht* injektiv, da z. B. mehrere Postleitzahlen wie 44139 und 44225 auf die Stadt Dortmund abgebildet werden.
f_5 ist surjektiv, denn zu jeder Stadt bzw. Gemeinde gehört mindestens eine Postleitzahl.

f_6 ist injektiv, da jede Matrikelnummer höchstens einmal vergeben wird.
f_6 ist *nicht* surjektiv, da sich eine Matrikelnummer finden lässt, die bislang noch keinem Studierenden zugeteilt wurde.

Aufgabe 14

Seien $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{2, 4, 6\}$. Sei $f\colon A \to B$ definiert durch

$$f(1) := 2, \quad f(2) := 2, \quad f(3) := 6, \quad f(4) := 2, \quad f(5) := 6.$$

Was ist die Bildmenge unter f? Bestimme auch alle Urbilder von f!

Das Bild einer Abbildung $f\colon A \to B$ ist die Menge aller Werte $y \in B$, die unter der Abbildung getroffen werden. Das Urbild zu einem Element $y \in B$ ist die Menge aller Elemente, die unter der Abbildung auf y abgebildet werden.

$$\operatorname{Bild} f = \{2, 6\}$$

$$f^{-1}(2) = \{1, 2, 4\}, \quad f^{-1}(4) = \emptyset, \quad f^{-1}(6) = \{3, 5\}$$

Aufgabe 15

Es bezeichne $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ das Intervall zwischen a und b einschließlich.
Sei nun die Abbildung $f\colon [-1, 4] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 4x - 5$ gegeben. Gib $\operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Kern} f$ an!

Es muss einfach die Definition von Bild und Kern einer Abbildung angewendet werden.
Das Bild ist die Menge aller Werte im Zielbereich, die unter der Abbildung getroffen werden.
Der Kern ist die Menge aller Werte im Definitionsbereich, die auf Null abgebildet werden.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild} f &= \{f(x) \colon x \in [-1, 4]\} = \{4x - 5 \colon x \in [-1, 4]\} = \{x \colon x \in [-9, 11]\} = [-9, 11] \\
\operatorname{Kern} f &= \{x \in \mathbb{R} \colon f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 4x - 5 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 4x = 5\} = \left\{\tfrac{5}{4}\right\}
\end{aligned}$$

Thema *Algebraische Strukturen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- neutrales Element, inverses Element
- Halbgruppe, Gruppe, Untergruppe
- Ring, Körper
- Gruppenhomomorphismus, Ringhomomorphismus
- Symmetrische Gruppe, Permutation

Mache dir auch noch einmal klar (z. B. mit einem Diagramm), welche Zusammenhänge zwischen den algebraischen Strukturen bestehen, die in der Vorlesung behandelt wurden!

Aufgabe 16

Entscheide jeweils, ob die vorliegenden Strukturen Gruppen sind!

(a) $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$

(b) $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$

(d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$

(a) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, da es keine additiven Inversen gibt.
$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da es nicht für alle Elemente multiplikative Inverse gibt. Zum Beispiel gibt es kein $x \in \mathbb{N}$, für das $5 \cdot x = 1$ gilt.

(b) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, weil es keine multiplikativen Inversen gibt (siehe Beispiel bei (a)).

(c) $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ebenso.

(d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ ist keine Gruppe, da das neutrale Element 0 nicht in der Menge enthalten ist.

Aufgabe 17

Sei eine Verknüpfung $*\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$a*b := a+b-a\cdot b \quad \text{für } a,b\in\mathbb{R}$$

definiert. Betrachte ferner die Menge $G := \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

(a) Zeige, dass $*$ auf G abgeschlossen ist, d. h. für alle $a,b\in G$: $a*b\neq 1$ gilt!

Angenommen, es existieren $a,b\in G$, also zwei reelle Zahlen $a,b\neq 1$, für die gilt:

$$\begin{aligned}
& 1 = a*b \\
\Leftrightarrow\quad & 1 = a+b-a\cdot b && \text{(Def. von $*$)}\\
\Leftrightarrow\quad & 1 = a+b\cdot(1-a) \\
\Leftrightarrow\quad & 1-a = b\cdot(1-a) && \text{(auf beiden Seiten $-a$)}\\
\Leftrightarrow\quad & 1 = b && \text{(durch $1-a\neq 0$ geteilt)}
\end{aligned}$$

Das steht im Widerspruch zu $b\in G$. Daher ist $a*b\neq 1$ für $a,b\in G$. *q. e. d.*

(b) Zeige, dass $(G,*)$ eine Gruppe bildet!

Assoziativität: Seien $a,b,c\in G$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a*(b*c) &= a*(b+c-bc)\\
&= a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)\\
&= a+b+c-bc-ab-ac+abc\\
&= a+b-ab+c-ac-bc+abc\\
&= (a+b-ab)+c-(a+b-ab)c\\
&= (a+b-ab)*c = (a*b)*c
\end{aligned}$$

neutrales Element: Sei $a\in G$. Suche nun ein $e\in G$, sodass $a*e = a+e-ae \overset{!}{=} a$ gilt.

$$\begin{aligned}
& a+e-ae = a\\
\Leftrightarrow\quad & e-ae = 0 && \text{(auf beiden Seiten $-a$)}\\
\Leftrightarrow\quad & (1-a)e = 0\\
\Leftrightarrow\quad & e = 0 && \text{(durch $1-a\neq 0$ geteilt)}
\end{aligned}$$

Mit $e := 0\in G$ ist nun ein Kandidat für das neutrale Element gefunden. Mit dieser Wahl $e=0$ gilt auch $e*a = 0+a-0\cdot a = a$.
0 ist also tatsächlich neutrales Element von $(G,*)$.

inverse Elemente: Sei $a\in G$. Suche nun ein $a^{-1}\in G$ mit $a*a^{-1} = a+a^{-1}-a\cdot a^{-1} \overset{!}{=} 0 = e$.

$$\begin{aligned}
& a+a^{-1}-a\cdot a^{-1} = 0\\
\Leftrightarrow\quad & a+(1-a)a^{-1} = 0\\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{a}{1-a}+a^{-1} = 0 && \text{(durch $1-a\neq 0$ geteilt)}\\
\Leftrightarrow\quad & a^{-1} = \tfrac{-a}{1-a}
\end{aligned}$$

Mit $a^{-1} := \frac{-a}{1-a} \in G$ ist nun ein Kandidat für das inverse Element gefunden. Mit dieser Wahl $a^{-1} = \frac{-a}{1-a}$ gilt auch:

$$\begin{aligned} a^{-1} * a &= \tfrac{-a}{1-a} + a - \tfrac{-a}{1-a} \cdot a \\ &= \tfrac{-a}{1-a} + \tfrac{a-a^2}{1-a} - \tfrac{-a^2}{1-a} \\ &= \tfrac{-a+a-a^2+a^2}{1-a} = 0 \end{aligned}$$

a^{-1} ist also tatsächlich inverses Element zu a bezüglich $(G, *)$.
Damit ist $(G, *)$ eine Gruppe. *q. e. d.*

(c) Entscheide mit Begründung oder Gegenbeispiel, ob diese Gruppe auch kommutativ ist!

Diese Gruppe $(G, *)$ ist auch kommutativ, wie man leicht einsehen kann:

$$a * b = a + b - a \cdot b = b + a - b \cdot a = b * a \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 18 *Verknüpfungstafeln*

(a) Stelle jeweils die Verknüpfungstafeln von $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ auf!

Für $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ ist die Verknüpfungstafel gegeben durch:

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Für $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ sieht die Verknüpfungstafel wie folgt aus:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

(b) Es ist bekannt, dass $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe darstellt. Zeige mithilfe der Verknüpfungstafel, dass $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe ist!

Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist bekanntlich die 1. Wenn $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe wäre, müsste jedes Element ein eindeutiges Inverses haben. Das bedeutet, es gibt zu jedem $x \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ ein $x^{-1} \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$, sodass $x \cdot x^{-1} = 1$, wie es bei $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ der Fall ist. Betrachtet man jetzt die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$, dann sieht man, dass $2, 3, 4$ keine Inversen in $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ haben. Somit ist $(\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}, \cdot)$ keine Gruppe.

Aufgabe 19

Prüfe, ob $M := \{M_{a,b} \colon a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ die Menge aller Matrizen $M_{a,b}$ mit

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{Z}_2$ einen Körper bildet!

Nach Satz 10.1.4 wissen wir, dass die $n \times n$-Matrizen zusammen mit der Matrixaddition $+$ und -multiplikation $\cdot$ einen Ring bilden. Wir können also zunächst Unterringeigenschaften nachweisen und müssen dann nur noch zeigen, dass die multiplikative Halbgruppe $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ sogar eine kommutative Gruppe ist.

Als erstes sollte auffallen, dass es nur vier verschiedene Matrizen in M gibt:

$$M_{00} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{01} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{10} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun zeigen wir, dass $M \subseteq {\mathbb{Z}_2}^{2\times 2}$ ein Unterring von 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ ist.
Abgeschlossenheit bzgl. $+$ und $\cdot$: Es seien

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Matrizen aus M.
Dann gilt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & (a+c)+(b+d) \end{pmatrix} = M_{a+b,\ c+d} \in M$$

Und:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+b(c+d) \\ bc+(a+b)d & bd+(a+b)\cdot(c+d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc+bd \\ ad+bc+bd & (ac+bd)+(ad+bc+bd) \end{pmatrix} = M_{ac+bd,\ ad+bc+bd} \in M \end{aligned}$$

Existenz der Null: $M_{00} \in M$ ist die Nullmatrix.
Existenz des additiven Inversen: Jede Matrix aus M ist selbstinvers, denn:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2(a+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{00} \in M$$

Da M jetzt als Unterring nachgewiesen ist, müssen wir die Assoziativität bzgl. $+$ und $\cdot$, die Kommutativität bzgl. $+$ und die Distributivität nicht mehr nachweisen, weil diese vererbt werden. Jetzt sind für $(M \setminus \{M_{00}\}, \cdot)$ noch Kommutativität, Existenz des Eins-Elementes und Existenz der Inversen zu zeigen.

Existenz der Eins: Offensichtlich ist die Einheitsmatrix $M_{10} \in M$ das Eins-Element.

Existenz der multiplikativen Inversen: Da M_{00} aus der Menge ausgeschlossen ist und M_{10} das Eins-Element ist, was selbstinvers ist, bleiben nur noch die Inversen zu M_{01} und M_{11} zu überprüfen.

Zu M_{01} ist M_{11} das Inverse:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Zu M_{11} ist M_{01} das Inverse:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Kommutativität: Seien wieder $a, b \in \mathbb{Z}_2$ beliebig. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a & b\\ b & a+b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}c & d\\ d & c+d\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}ac+bd & ad+b(c+d)\\ bc+d(a+b) & bd+(a+b)\cdot(c+d)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}ac+bd & ad+bc+bd\\ ad+bc+bd & (ac+bd)+(ad+bc+bd)\end{pmatrix} := P_1\\
\begin{pmatrix}c & d\\ d & c+d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ b & a+b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}ca+db & cb+d(a+b)\\ da+(c+d)b & db+(c+d)\cdot(a+b)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}ac+bd & ad+bc+bd\\ ad+bc+bd & (ac+bd)+(ad+bc+bd)\end{pmatrix} := P_2
\end{aligned}$$

Da $P_1 = P_2$, ist die Kommutativität gezeigt.

Daraus folgt, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 20 *Exponentialfunktion*

Sei $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ mit $f(x) := e^x$ die aus der Schule bekannte e-Funktion.

(a) Zeige, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist!

(b) Bestimme Kern f und Bild f!

(a) Die aus der Schule bekannten Potenzgesetze liefern genau die Homomorphieeigenschaft. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y).$$

(b) Das neutrale Element von $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist 1. Also ist Kern $f = \{x \in \mathbb{R} \colon e^x = 1\} = \{0\}$.
Der Bildbereich ist Bild $f = \{e^x \colon x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen.

Aufgabe 21 *Permutationen*

Betrachte die Symmetrische Gruppe S_6. Seien daraus die drei Permutationen

$$\sigma := (1\ 4\ 6\ 3\ 5), \quad \tau := (1\ 4\ 2\ 5)(3\ 6), \quad \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

gegeben.

(a) Bringe zunächst die Permutation π in Zykelschreibweise!

(b) Bestimme $(\sigma \circ \tau) \circ \pi$ und $\pi \circ (\tau \circ \sigma)$ jeweils in Zykelschreibweise!

(c) Ist die Symmetrische Gruppe S_6 kommutativ?

(a) Es ist $\pi = (1\ 6)(2\ 5\ 4)$.

(b) Zunächst ein kleiner Hinweis: Wegen der Assoziativität – wir arbeiten ja in der Symmetrischen *Gruppe* – kann auf die Klammerung verzichtet werden.
Es gilt $\sigma \circ \tau \circ \pi = (1\ 5\ 2\ 4)(3)(6) = (1\ 5\ 2\ 4)$ und $\pi \circ \tau \circ \sigma = (1\ 5\ 2\ 4\ 3\ 6)$.

(c) Wie in Aufgabenteil (b) gesehen, ist $\sigma \circ \tau \circ \pi \neq \pi \circ \tau \circ \sigma$. Die Kommutativität gilt in der Symmetrischen Gruppe S_6 also nicht.

Thema *Gaußsches Eliminationsverfahren*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Koeffizientenmatrix
- elementare Zeilenumformungen
- Zeilenstufenform
- Matrix invertieren
- Determinante

Aufgabe 22

Löse das folgende Lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$!

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem wird von genau einem Vektor erfüllt. Die Lösungsmenge ist

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13\end{pmatrix}^\top\right\} \subset \mathbb{R}^7.$$

Aufgabe 23

Löse das folgende Lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper $\mathbb{Z}_5$!

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \\ -x_1 & & & - & 3x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \end{array}$$

Das LGS ist als erweiterte Koeffizientenmatrix geschrieben: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Über dem Körper $\mathbb{R}$ ergibt sich damit die Lösungsmenge $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}^\top\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ ergibt sich damit die Lösungsmenge $\left\{\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\end{pmatrix}^\top\right\} \subset {\mathbb{Z}_5}^3$.

Aufgabe 24

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Zeige mithilfe der Determinante, dass die Matrix A über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar ist!

(b) Invertiere A über $\mathbb{R}$!

(c) Invertiere A über $\mathbb{Z}_5$!

(a) Wegen $\det A = 1$ ist $\det A \neq 0$ und auch $\det A \not\equiv 0 \mod 5$, also ist A sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar.

(b) Zuerst stellt man die Matrix A der Einheitsmatrix E_3 gegenüber:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 7 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Durch Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens, kommt man zu dem Ergebnis:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

Es ist also über $\mathbb{R}$ die Inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -8 & -1 & 12 \\ 6 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

(c) Durch das Anwenden des gleichen Verfahrens wie in (b) über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ (also modulo 5) erhält man

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse über $\mathbb{Z}_5$ könnte man auch errechnen, indem man das Ergebnis aus (b) modulo 5 berechnet. Das klappt aber nur, wenn im Gaußschen Eliminationsverfahren die Zeilen ausschließlich mit ganzzahligen Faktoren multipliziert wurden.

Aufgabe 25

Bestimme jeweils die Determinanten der folgenden reellen Matrizen!

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Determinanten der Matrizen lassen sich einfach durch

- Anwenden der sogenannten *Regel von Sarrus* und
- Überlegungen zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

bestimmen:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -10 - 12 = -22 \qquad \text{(Formel für } 2 \times 2\text{-Matrizen)}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 16 + 15 - 2 - 24 + 20 = -3 \qquad \text{(Regel von Sarrus)}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 30 - 8 + 5 - 6 + 16 = 35 \qquad \text{(Regel von Sarrus)}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(erste und dritte Spalte linear abhängig)}$$

Aufgabe 26

Invertiere die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}_3$!

Über $\mathbb{R}$ erhält man per Gaußschem Eliminationsverfahren die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 9 & 10 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{Z}_3$ muss man nun das Gaußsche Eliminationsverfahren erneut anwenden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27

Berechne jeweils die Determinanten dieser reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = (a_{ij})$ ist zum Glück bereits in Dreiecksform. Daher können wir die Determinante als Produkt der Diagonaleinträge direkt ablesen:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Da die Matrix B in der ersten Zeile viele Nullen enthält, entwickeln wir nach der ersten Zeile (gemäß Satz 13.1.2) und wenden dann die Sarrus-Regel an.

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= - \underbrace{(0 - 15 + 0 + 4 - 9 - 0)}_{=-20} = 20$$

Bei der Matrix C addieren wir nun das Vielfache von Zeilen aufeinander, führen also elementare Zeilentransformationen (gemäß Korollar 13.1.6) durch. Dadurch erhalten wir eine Matrix in Dreiecksform und können die Determinante einfach ablesen.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle -\mathrm{I}} \\ {\scriptstyle -\mathrm{I}} \\ {\scriptstyle -\mathrm{I}} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & 8 \\ 0 & 4 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle -4\cdot\mathrm{II}} \\ {\scriptstyle -2\cdot\mathrm{II}} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & -7 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ {\scriptstyle -\mathrm{III}} \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-7) \cdot (-10) = 140$$

Thema *Vektorräume*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Vektorraum, Untervektorraum
- Linearkombination, Erzeugnis/Erzeugendensystem
- lineare (Un-) Abhängigkeit, Basis, Dimension

Aufgabe 28

Betrachte die sechs folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = -2x_2\} \\
U_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \\
U_3 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \cdot x_2 = 0\} \\
U_4 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 = 5x_2\} \\
U_5 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x_1 - 5x_2 = 1\} \\
U_6 &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2 \lor x_1 = -x_2\}
\end{aligned}
$$

Welche dieser Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$?

U_1 ist ein UVR, denn:

- $\mathbf{0} \in U_1 \Rightarrow U_1 \neq \emptyset$
- $x, y \in U_1 \;\Rightarrow\; x_1 = -2x_2$ und $y_1 = -2y_2 \;\Rightarrow\; x_1 + y_1 = -2(x_2 + y_2) \;\Rightarrow\; (x + y) \in U_1$
- $\lambda \in \mathbb{R}, x \in U_1 \;\Rightarrow\; x_1 = -2x_2 \;\Rightarrow\; \lambda \cdot x_1 = -2\lambda \cdot x_2 \;\Rightarrow\; (\lambda \cdot x) \in U_1$ ✓

U_2 ist *kein* UVR, da der Nullvektor $\mathbf{0}$ nicht enthalten ist.

U_3 ist ebenfalls *kein* UVR, da die Vektoraddition hier nicht abgeschlossen ist. So sind beispielsweise $(1, 0), (0, 1) \in U_3$, aber die Summe dieser beiden Vektoren $(1, 1) \notin U_3$.

U_4 ist ein UVR. Die Bedingung $2x_1 = 5x_2$ ist nämlich äquivalent zu $2x_1 - 5x_2 = 0$. Mit dieser umgeformten Bedingung zeigt man ähnlich wie bei U_1, dass U_4 ein UVR ist (also $U_4 \neq \emptyset$ und Abgeschlossenheit bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation). ✓

U_5 ist *kein* UVR, da $\mathbf{0} \notin U_5$.

U_6 ist *kein* UVR: $v := (1, 1), w := (1, -1) \in U_6$, aber $v + w = (2, 0) \notin U_6$.

Aufgabe 29

Es sei $U := \langle\{v, w\}\rangle \subset \mathbb{R}^3$ der von den beiden Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannte Untervektorraum.

(a) Entscheide jeweils für die beiden Vektoren

$$a := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

ob sie in U liegen!

Löse die Gleichung $\lambda v + \mu w \stackrel{!}{=} a$ bzw. $\lambda v + \mu w \stackrel{!}{=} b$.

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & & & = & -2 \\ \lambda & + & 2\mu & = & 0 \\ -\lambda & + & 3\mu & = & 5 \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & -1 \\ \lambda + 2\mu & = & 0 \\ \mu & = & 1 \end{array} \right.$$

Das ist offensichtlich nicht möglich. Also ist $a \notin U$.

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\lambda & & & = & -2 \\ \lambda & + & 2\mu & = & 3 \\ -\lambda & + & 3\mu & = & 7 \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & -1 \\ \lambda + 2\mu & = & 3 \\ \mu & = & 2 \end{array} \right.$$

Somit wird b von $\{v, w\}$ erzeugt, d. h. $b \in U$.

(b) Entscheide, ob v, w und a bzw. v, w und b den $\mathbb{R}^3$ aufspannen!

Da v, w, a linear unabhängig sind und $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist, folgt $\langle\{v, w, a\}\rangle = \mathbb{R}^3$.

Für $b \in U$ gilt allerdings $\langle\{v, w, b\}\rangle = \langle\{v, w\}\rangle = U \neq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 30

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Beweise oder widerlege:

(a) $U \cap W$ ist ein Untervektorraum von V.

Wir zeigen, dass $U \cap W$ auch wieder ein Untervektorraum ist, indem wir die UVR-Axiome nachweisen.

nicht leer: Es ist $\mathbf{0} \in U$ und $\mathbf{0} \in W$. Daher ist auch $\mathbf{0} \in U \cap W$, insbesondere ist $U \cap W \neq \emptyset$.

Abgeschlossenheit von $+$: Seien $a, b \in U \cap W$. Dann sind $a, b \in U$ und $a, b \in W$. Es folgt $a + b \in U$ und $a + b \in W$, also $a + b \in U \cap W$.

Abgeschlossenheit von $\cdot$: Sei $a \in U \cap W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $a \in U$ und $a \in W$. Es folgt $\lambda a \in U$ und $\lambda a \in W$, also $\lambda a \in U \cap W$. *q. e. d.*

(b) $U \cup W$ ist ein Untervektorraum von V.

$U \cup W$ ist natürlich *kein* Untervektorraum. Als Gegenbeispiel wähle $V := \mathbb{R}^2$ und

$$U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subset V, \quad W := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subset V.$$

Betrachte nun $u := e_1 \in U$ und $w := e_2 \in W$. Es sind natürlich $u, w \in U \cup W$. Für

$$u + w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt allerdings $u + w \notin U$ und $u + w \notin W$, also auch $u + w \notin U \cup W$.
Also ist in diesem Beispiel die Abgeschlossenheit der Vektoraddition nicht erfüllt.

(c) $U \setminus W$ ist ein Untervektorraum von V.

$U \setminus W$ ist natürlich *kein* Untervektorraum.
In (Unter-) Vektorräumen ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ immer enthalten: $\mathbf{0} \in W$. Daher folgt aber sofort $\mathbf{0} \notin U \setminus W$. Also kann $U \setminus W$ kein Vektorraum sein, insbesondere auch kein UVR irgendeines anderen Vektorraums.

Aufgabe 31

Betrachte die Menge der quadratischen Matrizen über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}^{n \times n}$ für $n \geq 2$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{Z}^{n \times n}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

$\mathbb{Z}^{n \times n}$ ist *kein* Vektorraum über $\mathbb{R}$, da die Skalarmultiplikation dort nicht abgeschlossen ist. Als Gegenbeispiel betrachte die Einheitsmatrix $I_n \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Nun gilt aber offensichtlich $\frac{1}{2} I_n \notin \mathbb{Z}^{n \times n}$, da diese Matrix auf der Hauptdiagonalen die Einträge $\frac{1}{2}$ hat.

(b) $\mathbb{Z}^{n\times n}$ ist ein Ring bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen.

Es ist bekannt, dass die quadratischen Matrizen über den reellen Zahlen einen Ring bilden. Wir zeigen nun, dass $\mathbb{Z}^{n\times n} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ einen Unterring bildet.

Abgeschlossenheit von $+$: Die Addition ist komponentenweise definiert. Daher lässt sich die Abgeschlossenheit der Addition von Matrizen über $\mathbb{Z}$ komponentenweise auf die Abgeschlossenheit der Addition von $\mathbb{Z}$ zurückführen – die offensichtlich gilt.

Existenz von 0: Die Nullmatrix hat nur ganzzahlige Einträge, also $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Existenz der Inversen: Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Die zu A inverse Matrizen bezüglich der Addition ist $-A$, die wieder ausschließlich ganzzahlige Einträge hat. Es ist also $(-A) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Abgeschlossenheit von $\cdot$: Seien $A, B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Die Matrizenmultiplikation summiert und multipliziert Einträge nach einem bestimmten Muster, das hier für uns nicht relevant ist. Da Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ abgeschlossen sind, hat $A \cdot B$ wiederum ausschließlich ganzzahlige Einträge. Es gilt also $A \cdot B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. *q. e. d.*

Aufgabe 32

Es sei mit

$$P_n[x] := \{a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n \colon a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Polynome höchstens n-ten Grades bezeichnet.

(a) Zeige, dass die drei Polynome

$$B := \{2x^2 - x - 1, \quad -2x^2 + 3x + 2, \quad -x^2 + x + 1\}$$

eine Basis von $P_2[x]$ bilden!

Man überlegt sich leicht, dass man den Raum $P_n[x]$ der Polynome des Grades kleiner oder gleich n mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren kann. Hier lässt sich beispielsweise jedes Polynom eindeutig darstellen als

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2[x] \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Damit lassen sich die Polynome aus B auch schreiben als

$$p_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dafür lässt sich die lineare Unabhängigkeit z. B. zeigen, indem man die „Vektoren“ zeilenweise in eine Matrix schreibt und Zeilenumformungen durchführt, bis man (hoffentlich) eine Dreiecksmatrix erhält:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2\cdot\mathrm{III} \\ -2\cdot\mathrm{III} \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\cdot\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach passender Zeilenvertauschung entsteht nun eine obere Dreiecksmatrix, d. h. die „Polynome“ in den *Zeilen* sind linear unabhängig. Jetzt ist wegen $\dim P_n[x] = n+1$ klar, dass drei linear unabhängige Vektoren eine Basis bilden.

(b) Entferne aus der Menge

$$M := \{2x^3+2x^2+2x+2, \quad x^3+x^2-x+2, \quad -x^3+4x^2+6x-2, \quad x^2, \quad -x^3+4x^2+6x-2, \quad 7x^3-5x-24, \quad -x^3+x^2+3x+2, \quad x^2-4\}$$

solche Polynome, sodass eine Basis von $P_3[x]$ übrig bleibt! Begründe die Auswahl – entweder durch Rechnung oder aus der Vorlesung bekannte Argumente!

Auch hier ist das Vergehen deutlich einfacher, wenn man den $P_3[x]$ mit dem $\mathbb{R}^4$ identifiziert:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_3[x] \quad \widehat{=} \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

In der folgenden Matrix sind alle „Vektoren“ aus M spaltenweise zusammengefasst:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 6 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & -24 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \end{array}$$

Eine mögliche Überlegung wäre nun, den vierten und den achten „Vektor“ auszuwählen. Damit lassen sich schon mal die Einträge für zweite und vierte Komponente frei erzeugen, die erste und dritte Komponente ist jeweils Null:

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ a_0 \end{pmatrix} : a_2, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Bei der Auswahl der beiden weiteren „Vektoren“ ist nur noch wichtig, dass die Vektoren in erster und dritter Komponente linear unabhängig sind. Die zweite und die vierte Komponente sind nicht weiter von Bedeutung.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 & 6 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} x^3 \\ x^1 \end{array} \end{array}$$

Hier lassen sich z. B. die ersten beiden „Vektoren“ auswählen, die offenbar linear unabhängig sind. Insgesamt erhält man beispielsweise die Basis

$$\{2x^3+2x^2+2x+2, \quad x^3+x^2-x+2, \quad x^2, \quad x^2-4\} \subset M.$$

Aufgabe 33

Betrachte den $\mathbb{K}$-Vektorraum $V := (\mathbb{Z}_3)^3$ über dem Körper $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_3$.

(a) Bestimme die Mächtigkeit $|V|$ dieses Vektorraums!

Bekanntlich ist $|\mathbb{Z}_3| = 3$. Nun können wir auch $|V| = |\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3|$ angeben durch $|V| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

(b) Entscheide mit Begründung, wie viele Untervektorräume von V existieren mit der Dimension 0 bzw. mit der Dimension 3!

Es gibt genau *einen* UVR von V mit der Dimension 0, das ist der Vektorraum, der nur den Nullvektor enthält: $W := \{\mathbf{0}\} \subset V$
Es gibt genau *einen* UVR von V mit der Dimension 3, nämlich den Vektorraum V selbst.

Thema *Lineare Abbildungen*

Bevor du dich mit den Aufgaben beschäftigst, wiederhole kurz die folgenden Begriffe:

- Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen
- Bild und Kern, Rang
- Basiswechselmatrix, Basiswechsel

Außerdem überlege einmal: Woran kann man bei einer Matrix in Zeilenstufenform erkennen, ob die Spalten linear unabhängige Vektoren bilden?

Aufgabe 34

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$ mit der Darstellungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) $\boxed{\text{Bestimme den Rang}\,\varphi_A \text{ sowie eine Basis von Bild}\,\varphi_A!}$

Das Bild ist quasi das Erzeugnis der Spalten von A. Um eine Basis des Bildes zu erhalten, müssen also nur lineare abhängige Spalten entfernt werden. Der Rang ist definiert als die Dimension des Bildes. Insgesamt entspricht der Rang also der Anzahl von linear unabhängigen Spalten in A.

Mittels bekannter Spaltenumformungen lässt sich A beispielsweise umformen zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus lässt sich

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als eine mögliche Basis von $\operatorname{Bild}\varphi_A$ leicht ablesen. Auch der Rang ist direkt zu erkennen: $\operatorname{Rang}\varphi_A = \dim B = 2$.

(b) Gib den Kern φ_A an!

Für welche $x \in \mathbb{R}^4$ gilt $Ax = \mathbf{0}$? Eine Umformung des entsprechenden Gleichungssystems $(A \mid \mathbf{0})$ liefert beispielsweise:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

Bei zwei linear unabhängigen Gleichungen mit vier Variablen sind zwei Variablen frei wählbar. Setze z. B. $x_3 := \lambda, x_4 := \mu$ und löse die beiden Gleichungen nach x_1 und x_2 auf. Es ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & = & -\lambda & & \\ x_2 & = & -\frac{1}{2}\lambda & - & \frac{1}{2}\mu \\ x_3 & = & \lambda & & \\ x_4 & = & & & \mu \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{Kern}\varphi_A = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(c) Ist φ_A injektiv? Ist φ_A surjektiv?

Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild}\varphi = V$ (oder äquivalent dazu: $\operatorname{Rang}\varphi = \dim V$).
Wegen $\operatorname{Rang}\varphi_A = 2 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ ist dies hier nicht der Fall, also ist φ_A *nicht* surjektiv.

Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist injektiv genau dann, wenn $\operatorname{Kern}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.
Diese Bedingung ist für φ_A nicht erfüllt, demnach ist φ_A auch *nicht* injektiv.

Aufgabe 35

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto Av$, die bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ beschrieben wird von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Betrachte ferner zwei Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme die darstellende Matrix ${}_C[\varphi]_B$ bezüglich B und C!

Sei $E_2 = \{e_1, e_2\}$ die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^2$ und $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ die des $\mathbb{R}^3$.
Um die Darstellungsmatrix ${}_C[\varphi]_B$ zu berechnen, stellen wir zunächst

- die Basiswechselmatrix ${}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B$ von B in die Einheitsbasis E_2 sowie
- die Basiswechselmatrix ${}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}$ von der Einheitsbasis E_3 in C auf.

Dann ist

$${}_C[\varphi]_B \quad = \quad {}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} \cdot \underbrace{{}_{E_3}[\varphi]_{E_2}}_{=A} \cdot {}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B$$

ganz einfach durch zweimalige Multiplikation dieser Matrizen zu berechnen.

Zunächst stellen wir die Basiswechselmatrix ${}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B$ auf. Man erhält ${}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B$ ganz einfach, indem man die Spaltenvektoren aus B in eine Matrix schreibt:

$${}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog ist

$${}_{E_3}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um nun an die Basiswechselmatrix ${}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3}$ von der Einheitsbasis E_3 in C zu kommen, muss man diese Matrix einfach invertieren:

$${}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} = \left({}_{E_3}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich lässt sich, wie oben bereits angekündigt, ${}_C[\varphi]_B$ durch zweimalige Matrixmultiplikation einfach berechnen:

$$\begin{aligned}
{}_C[\varphi]_B &= {}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[\varphi]_{E_2} \cdot {}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B \\
&= {}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{E_3} \cdot A \cdot {}_{E_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 36

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$ mit der Darstellungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Bild} \varphi_A$ und daraus den $\operatorname{Rang} \varphi_A$!

Mittels bekannter Spaltenumformungen lässt sich A beispielsweise umformen zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus lässt sich

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

als eine mögliche Basis von $\operatorname{Bild} \varphi_A$ leicht ablesen. Auch der Rang ist direkt zu erkennen: $\operatorname{Rang} \varphi_A = \dim B = 3$.

(b) Gib eine Basis von $\operatorname{Kern} \varphi_A$ an!

Für welche $x \in \mathbb{R}^4$ gilt $Ax = \mathbf{0}$? Eine Umformung des entsprechenden Gleichungssystems $(A \mid \mathbf{0})$ liefert beispielsweise:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\
 & - & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\
 & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}$$

Bei drei linear unabhängigen Gleichungen mit vier Variablen ist genau eine Variable frei wählbar. Setze z. B. $x_4 := \lambda$ und löse die Gleichungen nach x_1, x_2 und x_3 auf.

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 & = & -\frac{3}{2}\lambda \\ x_2 & = & -\lambda \\ x_3 & = & \frac{1}{2}\lambda \\ x_4 & = & \lambda \end{array}\right\} \implies \operatorname{Kern}\varphi_A = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

(c) Was lässt sich über die Injektivität bzw. Surjektivität von φ_A sagen?

Wegen $\operatorname{Rang}\varphi_A = 3 \neq 4 = \dim \mathbb{R}^4$ ist φ_A *nicht* surjektiv.
Wegen $\dim \operatorname{Kern}\varphi_A = 1$ ist $\operatorname{Kern}\varphi_A \neq \{\mathbf{0}\}$. Also ist die Abbildung φ_A auch *nicht* injektiv.

Aufgabe 37

Betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto Av$, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ beschrieben wird von der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Betrachte ferner zwei Basen des $\mathbb{R}^4$:

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Bestimme den $\operatorname{Rang}\varphi_A$ und gib eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi_A$ an!

Am schnellsten ist es hier sicherlich, zuerst eine Basis des Kerns zu bilden. Der Rang lässt sich dann mithilfe des Dimensionssatzes sofort ausrechnen.

Um nun den Kern zu bestimmen, betrachte das LGS $(A \mid \mathbf{0})$. Nach einigen Umformungsschritten ergibt sich z. B. die folgende Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus liest man die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & & & & & & & = & 0 \end{array}$$

Also ist sicher $x_1 = 0$. Nun wähle beispielsweise die Variable $x_3 := \lambda$. Damit lösen wir die beiden übrigen Gleichungen nach x_2 und x_4 auf:

$$\begin{aligned} 2x_2 - 3\lambda = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = \tfrac{3}{2}\lambda \\ 4\lambda - 2x_4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_4 = 2\lambda \end{aligned}$$

Noch einmal übersichtlich aufgeschrieben:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \tfrac{3}{2}\lambda, \quad x_3 = \lambda, \quad x_4 = 2\lambda$$

Daraus kann man ablesen:

$$\operatorname{Kern}\varphi_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Insbesondere folgt nun mit dem Dimensionssatz der Rang der Abbildung φ_A, denn:

$$\operatorname{Rang}\varphi_A = \dim(\operatorname{Bild}\varphi_A) = \underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^4\right)}_{=4} - \underbrace{\dim\left(\operatorname{Kern}\varphi_A\right)}_{=1} = 3.$$

(b) $\boxed{\text{Verifiziere, dass } C \text{ eine Basis des } \mathbb{R}^4 \text{ darstellt!}}$

Sind die Vektoren aus C jeweils linear unabhängig, so folgt aus Gründen der Dimension sofort, dass C eine Basis ist.

Die lineare Unabhängigkeit lässt sich über das Gaußsche Eliminationsverfahren prüfen. Eine Möglichkeit dafür ist z. B. die Vektoren aus C *zeilenweise* in eine Matrix einzutragen und dann die Vektoren durch *Zeilentransformationen* zu vereinfachen.[1]
Seien $c_1, c_2, c_3, c_4 \in C$ die Vektoren aus der Basis C. Dann bilde nun die Matrix:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2\cdot\text{III} \\ \\ \\ -2\cdot\text{III} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\text{I} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3\cdot\text{IV} \\ +2\cdot\text{IV} \\ -\text{IV} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die sich ergebenden Vektoren $e_4, e_2, e_1, e_3 \in \mathbb{R}^4$ (stehen *zeilenweise* in der umgeformten Matrix) sind natürlich linear unabhängig. Damit ist C auch linear unabhängig und insbesondere eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

[1] Im Prinzip könnte man auch die Vektoren einfach *spaltenweise* in eine Matrix eintragen und dann *Spaltentrafos* durchführen. Nur ich persönlich finde halt Zeilentrafos immer etwas schöner als Spaltentrafos. ;-)

(c) Bestimme die darstellende Matrix ${}_C[\varphi]_B$ bezüglich B und C!

Im weiteren Verlauf dieser Aufgabe sei mit $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ stets die kanonische Einheitsbasis des $\mathbb{R}^4$ gemeint.
Man erhält ${}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B$ nun, indem man die Spaltenvektoren aus B in eine Matrix schreibt:

$${}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Analog ist

$${}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um nun an ${}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_E$ zu kommen (immer genau aufpassen: welche Basis steht vorne, welche hinten?), muss man diese Matrix einfach invertieren. Mit den üblichen Verfahren – mittlerweile sollte das Invertieren dieser Matrix schnell von der Hand gehen – ergibt sich:

$${}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_E = \left({}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Schließlich lässt sich, wie oben bereits angekündigt, ${}_C[\varphi]_B$ durch zweimalige Matrixmultiplikation einfach berechnen. Weil die Matrixmultiplikation ja assoziativ ist, kann man sich die Reihenfolge, in der die Matrixmultiplikationen durchgeführt werden, aussuchen.

$$\begin{aligned} {}_C[\varphi]_B &= {}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_E \cdot {}_E[\varphi]_E \cdot {}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B \\ &= \left({}_C[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_E \cdot A\right) \cdot {}_E[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_B \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 2 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 & -29 & 20 \\ 7 & 1 & -7 & 9 \\ -7 & -1 & 7 & -9 \\ 15 & -9 & -27 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$