lehrstuhl für programmiersysteme

technische universität dortmund

Prof. Dr. Bernhard Steffen

Dawid Kopetzki

Repetitorium zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker 1

Sommersemester 2015

Probeklausur Nr. 2

Information

Diese Aufgaben dienen als Grundlage zur Wiederholung und Vertiefung der Themen der Vorlesung "Mathematik für Informatiker 1". Dies ist die zweite von zwei Probeklausuren. Um die Studienleistung zu erlangen, muss zu jedem Themengebiet eine Abgabe erfolgen. Die Aufgaben verteilen sich folgendermaßen auf die Themengebiete:

- Aufgaben 1-3: Teil 1 (**Abgabe am 06.05.2015**)
- Aufgaben 4-6: Teil 2 (**Abgabe am 03.06.2015**)
- Aufgaben 7-9: Teil 3 (**Abgabe am 01.07.2015**)
- Aufgabe 10: Bonus

Die Abgabe erfolgt in den Übungen zu den oben genannten Terminen.

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) [**5+3+2 = 10 Punkte**]

1. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B gilt:[1]

$$A \Delta B = B \backslash A \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B.$$

Hinweis: Behandeln Sie die $\Rightarrow$- und $\Leftarrow$-Richtung separat. Gehen Sie dabei im Falle der $\Rightarrow$-Richtung per Kontraposition vor.

2. Beweisen Sie das folgende aussagenlogische Gesetz durch einen axiomatischen Beweis:

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \neg \mathcal{A}) \;\equiv\; \mathcal{B} \vee \mathcal{A}.$$

Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung eingeführten Gesetze der Aussagenlogik (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

3. Geben Sie die folgenden Mengen explizit an.

   (a) $\emptyset \;\times\; \{1, 2\}$

   (b) $\mathfrak{P}(\emptyset) \;\times\; \mathfrak{P}(\{1, 2\})$

[1] Dabei sei wie in der Vorlesung definiert $A \Delta B =_{df} (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[(4+1)+2+3 = 10 Punkte]**

1. Wir betrachten die Menge der Zeichenreihen A^* über einem mindestens zweielementigen Alphabet A. Die Präfixrelation $\sqsubseteq$ auf A^* sei definiert durch:

$$v \sqsubseteq w \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists\, v' \in A^*.\; v\, v' = w.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung ist.

   (b) Ist $\sqsubseteq$ auch total? Beweisen oder widerlegen Sie.

2. Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Relation $R \subseteq M \times M$ mit

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2)\}.$$

   Bestimmen Sie $(R \odot R^{-1}) \cup I_M$.

3. Sind folgende Funktionen injektiv und/oder surjektiv, bijektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(x) = \begin{cases} (0, |x|) & \text{falls } x < 0 \\ (1, x) & \text{sonst} \end{cases}$

   (b) $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $g((n, m)) = n - m$

   (c) $f \circ g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit f, g wie definiert in Teil a) und b).

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \;\geq\; n\, x + 1.$$

2. Die Menge $M \subseteq \{a, b, c\}^*$ von Zeichenreihen über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ ist induktiv definiert als die kleinste Menge, für die gilt:

   - $ab \in M$ und $ba \in M$.
   - Falls $w_1, w_2 \in M$, dann ist auch $w_1\, w_2 \in M$.
   - Falls $w \in M$, dann ist auch $ac\, w \in M$.

   Zeigen Sie mit struktureller Induktion, dass kein Wort aus M drei aufeinanderfolgende a's enthält.

   Hinweis: Erweitern Sie die Behauptung zunächst um geeignete zusätzliche Aussagen über den Wortanfang bzw. das Wortende (Verschärfung der Induktionsbehauptung).

Aufgabe 4 (Verbände) **[(3+2+3)+2 = 10 Punkte]**

1. Gegeben sei der Verband $(V, |)$ mit $V =_{df} \{1, 2, 3, 5, 6, 15, 30\}$, wobei $|$ die übliche Teilbarkeitsrelation auf natürlichen Zahlen ist.
   (a) Stellen Sie $(V, |)$ als Hasse-Diagramm dar.
   (b) Ist $(V, |)$ distributiv? Zeigen oder widerlegen Sie dieses.
   (c) Ist die identische Abbildung von $(V, |)$ nach $(V, \leq)$ ein Infimums-, Supremums- bzw. Ordnungshomomorphismus? Zeigen oder widerlegen Sie dieses.

2. Bekanntlich ist $(\mathbb{N}, |)$ ein distributiver Verband. Ist dieser auch Boolescher Verband? Begründen Sie Ihr Urteil.

Aufgabe 5 (Halbgruppen und Monoide) **[2+3+3 = 8 Punkte]**

Welche der folgenden Operationen $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to Z$ legt eine Halbgruppe auf $\mathbb{Z}$ fest? Beweisen oder widerlegen Sie. Untersuchen Sie im Falle, dass die Halbgruppeneigenschaft gegeben ist, auch ob ein neutrales Element existiert.

1. $a \circ b \ =_{df} \ 2a + b + 1$
2. $a \circ b \ =_{df} \ a + b - 2$
3. $a \circ b \ =_{df} \ 3ab$

Aufgabe 6 (Algebraische Strukturen) **[4+3+3 = 10 Punkte]**

1. Die folgende Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe S_3 ist unvollständig. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

$\circ$	( )	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
( )						
(1 2)		( )	(1 3 2)	(1 2 3)		(1 3)
(1 3)			( )			
(2 3)			(1 2 3)	( )	(1 3)	
(1 2 3)					(1 3 2)	
(1 3 2)				(1 3)		(1 2 3)

2. Geben Sie alle Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_7, +_7 \rangle$ an (mit Begründung!). Geben Sie für jeden Normateiler N außerdem einen Homomorphismus $h_N : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ an mit $N = Kern(h_N)$.
3. Benennen Sie für die drei folgenden algebraischen Strukturen jeweils ein Ihnen geläufiges Beispiel.
   (a) Eine nicht abelsche Gruppe.
   (b) Ein endlicher Körper.
   (c) Ein Integritätsbereich, der nicht Körper ist.

Aufgabe 7 (Untervektorraum, lineare Unabhängigkeit und Basis) **[3+3+4= 10 Punkte]**

1. Sei $U = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Geben Sie für den Untervektorraum U aus Teil 1) eine Basis an und beweisen Sie die Basiseigenschaft.
3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)^t$, $\vec{v}_2 = (0, 3, 2)^t$ und $\vec{v}_3 = (-1, 1, 4)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

   Lösung: Aus $x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2 + z \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

   $$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

   Löst man dieses Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, so folgt $x = y = z = 0$. Nach Korollar 10.4.4 ergibt sich die lineare Unabhängigkeit von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$.

Aufgabe 8 (Determinante einer Matrix) **[4+6 = 10 Punkte]**

1. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die 3×3-Matrix

   $$A =_{df} \begin{pmatrix} 0 & 2-x & 1 \\ x-1 & 1 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

   in $\mathbb{R}$ invertierbar ist.

   Hinweis: Beachten Sie die Themenangabe zu Aufgabe 8!
2. Bestimmen Sie die Determinate folgender Matrix (über $\mathbb{R}$)

   $$A =_{df} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   durch Entwicklung nach der dritten Spalte.

Aufgabe 9 (Lineare Abbildung und Basiswechsel) **[2+8 = 10 Punkte]**

1. Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 \\ 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 \end{pmatrix}$$

   Geben Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu φ an, also diejenige mit

$$\varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

2. Wir betrachten nun folgende Basis des $\mathbb{R}^3$:

   - $\mathcal{B} =_{df} \{(1,0,0)^t, (1,1,0)^t, (1,1,1)^t\}$

   Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ an, also $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$.

   Hinweis: Beachten Sie, dass für die Matrix A aus Teil 1) gilt $A = {}_{E_3}[\varphi]_{E_3}$. Außerdem gilt $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[id]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[\varphi]_{E_3} \cdot {}_{E_3}[id]_{\mathcal{B}}$ und $_{\mathcal{B}}[id]_{E_3} = (\,{}_{E_3}[id]_{\mathcal{B}})^{-1}$.

Aufgabe 10 (Wissensfragen) **[12 Punkte]**

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Ja/Nein) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Ja"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Nein"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Die Idempotenz der Mengenvereinigung folgt allein aus den Absorptionsgesetzen.
2. Unter den ca. 135 Klausurteilnehmern erreichen mindestens zwei exakt dieselbe Punktzahl.[2]
3. Die Teilbarkeitsrelation $| \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch $x|y \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists\, z \in \mathbb{Z}.\; x \cdot z = y$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{Z}$.
4. Für jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ist $(M, |)$ ein Verband, wobei $|$ die bekannte Teilbarkeitsrelation auf natürlichen Zahlen ist.
5. Für jede Untergruppe H einer Gruppe G und Elemente $a, b \in G$ gilt:

$$aH \cap bH \neq \emptyset \;\Rightarrow\; aH = bH.$$

6. Das kartesische Produkt zweier Integritätsbereiche ist wieder ein Integritätsbereich.[3]
7. $3\mathbb{Z}$ ist ein maximales Ideal des Ringes der ganzen Zahlen.
8. Jede Basis eines Vektorraumes ist endlich.

[2] Dabei sei vereinfachend angenommen, dass nur ganzzahlige Gesamtpunktzahlen zwischen 0 und 100 Punkten vergeben werden.

[3] Wobei die additive und multiplikative Verknüpfung durch komponentenweise Anwendung der beteiligten Ringoperationen festgelegt ist.