Probeklausur

21. April 2020

Aufgabe 1 (Aussagen und Mengen) **[3+3+2+2 = 10 Punkte]**

Für Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt folgendes Gesetz der Kettenimplikation:

$$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \quad \equiv \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C} \qquad \text{(KI)}$$

1. Beweisen Sie die Gültigkeit von (KI) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

2. Beweisen Sie (KI) unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Gesetze über semantisch äquivalente Aussagen (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität, Negation, Idempotenz, Doppelnegation, De Morgan, Neutralität). Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \qquad \text{(Impl)}$$

Machen Sie bei jeder Umformung die verwendeten Regeln kenntlich.

3. Geben Sie folgende Menge explizit unter Aufzählung aller ihrer Elemente an. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg.
$$\{(1, b) \mid b \in \{1, 2\}\} \cap (\mathfrak{P}(\{1\}) \times \{1\})$$

4. Sei M eine beliebige Menge. Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Aussage für beliebige $A, B, C \subseteq M$ gilt:
$$A \neq B \quad \Rightarrow \quad (A \cup C) \neq (B \cup C)$$

Name, Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 2 (Relationen und Funktionen) **[(3+2)+2+(1+2)=10 Punkte]**

1. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $R_n \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch:

$$x \, R_n \, y \;\Leftrightarrow_{df}\; x^n - y^n = nx - ny.$$

Zeigen Sie, dass R_n eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch:

$$x \, R \, y \;\Leftrightarrow_{df}\; x \cdot y \geq -1.$$

Zeigen Sie, dass R keine Äquivalenzrelation ist.

2. Geben Sie **alle** partiellen Ordunungen auf der Menge $\{a, b, c\}$ in Form ihrer zugehörigen Hasse-Diagramme an, für die a minimales und b maximales Element ist.

3. (a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist. Begründen Sie.

   (b) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. Begründen Sie.

Name, Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 3 (Induktion) **[5+5 = 10 Punkte]**

1. Beweisen Sie die folgende Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion.

$$\sum_{i=0}^{n}(i^2 - i) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

2. Die Fibonacci-Funktion $\mathit{fib} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &=_{df} 0 \\ \mathit{fib}(1) &=_{df} 1 \\ \mathit{fib}(n) &=_{df} \mathit{fib}(n-2) + \mathit{fib}(n-1) \quad \text{für} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit Hilfe verallgemeinerter Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathit{fib}(n) \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

Name, Vorname, Matrikelnummer Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 4 (Verbände) **[3+2+3 = 8 Punkte]**

1. Geben Sie eine endliche Menge $V \subseteq \mathbb{N}$ an, so dass $(V, |)$ ein nichtdistributiver Verband ist. Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm und weisen Sie die Nichtdistributivität nach.

2. Wir betrachten die Abbildung $id : (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$ mit $id(n) =_{df} n$. Handelt es sich um einen Ordnungs-, einen $\sqcup$- oder einen $\sqcap$-Homomorhismus. Begründen Sie!

3. Sei $(V, \sqsubseteq)$ ein Verband und $a, b \in V$ mit $a \sqsubseteq b$. Sei weiter definiert:

$$U_{a,b} =_{df} \{x \in V \mid a \sqsubseteq x \sqsubseteq b\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_{a,b}$ ein Unterverband von V ist.[1]

[1] $U \subseteq V$ heißt *Unterverband* von V, falls für alle $x, y \in U$ gilt: $x \sqcup y \in U$ und $x \sqcap y \in U$. Dabei sind $\sqcup$ und $\sqcap$ das Supremum bzw. Infimum in V.

Name, Vorname, Matrikelnummer	Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 5 (Algebraische Strukturen) [**2+4+4 = 10 Punkte**]

1. Wir betrachten das zweielementige Alphabet $A = \{a, b\}$ und das zugehörige Monoid A^* mit der Konkatenation von Worten als Verknüpfung. Welche der folgenden Wortmengen ist ein Untermonoid von A^*? Beweisen oder widerlegen Sie.

   (a) $X \subseteq A^*$ mit $X =_{df} \{w \in A^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$

   (b) $Y \subseteq A^*$ mit $Y =_{df} \{w \in A^* \mid w \text{ enthält nicht die Sequenz } \text{“}abba\text{”}\}$

2. Es sei $\langle G, \cdot \rangle$ eine Gruppe. Zu festem $x \in G$ sei auf G eine weitere Verknüpfung $\odot : G \times G \to G$ durch

$$a \odot b =_{df} a \cdot x \cdot b$$

definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass $\langle G, \odot \rangle$ eine Gruppe ist.

   (b) Erstellen Sie die Verknüpfungstabelle für $\odot$ konkret für das Beispiel $\langle G, \cdot \rangle = \langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ und $x = 2$.

3. $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ ist für $n \geq 1$ eine Gruppe.

   Gegeben sind die Abbildungen

   (a) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7$, mit $f(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   (b) $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2$, mit $g(n) = n \mod 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

   Welche dieser Funktionen ist ein Gruppenhomorphismus, welche nicht. Begründen Sie Ihre Aussage durch einen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.

Name, Vorname, Matrikelnummer — Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 6 (Basen, Untervektorräume) **[5+5=10 Punkte]**

1. Gegeben sind folgende vier Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$. Geben sie jeweils

   - eine Basis und
   - die Dimension

   des Untervektorraums an. Begründen Sie Ihre Antwort bezüglich (c) und (d). Bei (a) und (b) ist keine Begründung notwendig.

   (a) $V_1 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 = 5x_2 \wedge x_3 = 2x_4\}$

   (b) $V_2 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 = 3x_3\}$

   (c) $V_3 =_{df} V_1 \cap V_2$

   (d) $V_4 =_{df} V_1 + V_2$

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume? Beweisen oder widerlegen Sie!

   (a) $U_1 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid (x = y) \vee (x = z)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (b) $U_2 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid (x, y, z)^t \bullet (3, 5, 7)^t = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (c) $U_3 =_{df} \{(x, y, z)^t \mid (x = 2y) \wedge (y = 2z) \wedge (z = 2x)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Aufgabe 7 (Lineare Abbildungen, Kern und Bild) **[4+6=10 Punkte]**

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht. Beweisen Sie die Linearitätseigenschaften oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

   (a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $f(\vec{x}) = x_1 + \cdots + x_n$

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$

2. Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ gegeben durch:

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ -2\,x_2 + 2\,x_3 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_3 + 2\,x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ zu φ an, also diejenige mit

$$\varphi(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^4.$$

(b) Bestimmen Sie $Kern(\varphi)$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von $Bild(\varphi)$

Name, Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 8 (Determinante einer Matrix) **[4 + 6 = 10 Punkte]**

1. Gegeben ist die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $det(A \cdot A^t)$.

2. Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die 4×4-Matrix

$$A =_{df} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & x & x & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ invertierbar ist. Entwickeln Sie nach der zweiten Spalte.

Hinweis: Beachten Sie die Themenangabe zu Aufgabe 8!

Name, Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 9 (Basiswechselmatrix) [**10 Punkte**]
Gegeben sei der Vektorraum $U = \mathbb{R}^3$ sowie die lineare Funktion $\varphi : U \to U$ mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix}$$

Weiter seien B und B' zwei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit

$$B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B' = \left\{ \vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b'}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Berechnen Sie die Matrix von $\varphi \circ \varphi$ bezüglich der Basen B und B', also ${}_{B'}\left[\varphi \circ \varphi\right]_B$.

Hinweis: Eine weitere Basis für $\mathbb{R}^3$ ist die Standardbasis E_3.

Name, Vorname, Matrikelnummer | Bitte unbedingt leserlich ausfüllen

Aufgabe 10 (Wissensfragen) [**12 Punkte**]

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch.

Hinweis: *Pro richtiger Antwort (Wahr/Falsch) gibt es einen Punkt. Begründen Sie eine Ihrer „Wahr"-Antworten (2 Zusatzpunkte) und eine Ihrer „Falsch"-Antworten (2 Zusatzpunkte) ausführlich. Machen Sie kenntlich, welche Antwort Sie begründet haben. Sofern es mehrere Begründungen gibt, wird die erste Begründung bewertet.*

1. Für zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ eine Tautologie.
2. $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$ ist gleichmächtig zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
3. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe, a ein Element von G und $f_a : G \to G$ definiert durch $f_a(x) =_{df} x \oplus a$. Dann ist f_a bijektiv.
4. Ein Monoid, in dem die Rechts- und Linkskürzungsregel gilt, ist eine Gruppe.
5. Es gibt unendlich viele paarweise nicht isomorphe endliche Körper.
6. Die symmetrische Gruppe $\langle S_5, \circ \rangle$ besitzt eine Untergruppe mit 25 Elementen.
7. Die durch eine $A \in K^{3\times 4}$ bestimmte lineare Abbildung φ_A kann nicht injektiv sein.
8. Die Menge der $n \times n$-Matrizen ($n \geq 2$) über einem Körper K bildet mit der Matrixaddition und der Matrixmultiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement.