Frage 1

Bisher nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 5,00

Frage markieren

Vervollständigen Sie den unten angedeuteten Beweis zu folgender semantischer Äquivalenz:

$$\neg((\neg\neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))) \quad \equiv \quad \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$$

Ziehen Sie die unten dargestellten Umformungsschritte sowie die bei der jeweiligen Umformung verwendeten Gesetze und Definitionen an die entsprechende Stelle im Beweis. Die Implikation ist wie üblich mit den Standardoperatoren definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \quad =_{df} \quad \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

	$\neg((\neg\neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})))$	
$\equiv$	$\neg((\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})))$	(Doppelnegation)
$\equiv$	$\neg((\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$	
$\equiv$	$\neg((\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$	
$\equiv$	$\neg((\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$	
$\equiv$		
$\equiv$		
$\equiv$		
$\equiv$		
$\equiv$		

$\neg((\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})) \Rightarrow \mathcal{B})$ | $\neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ | $\neg\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ | $\Rightarrow (\top \wedge \mathcal{B}))$ | $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ | $\Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge (\neg\mathcal{C} \vee \mathcal{C})))$ | $\Rightarrow ((\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{C}) \wedge \mathcal{B}))$ | $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$

(Implikation) | (Negation) | (Assoziativität) | (Absorption) | (Doppelnegation) | (De Morgan) | (Kommutativität) | (Neutralität) | (Idempotenz) | (Distributivität)

Ziehen Sie für jede der folgenden Mengen Elemente $x \in M_i$ in den Bereich unterhalb der jeweiligen Menge M_i, so dass alle enthaltenen Elemente dargestellt sind.

Wichtig: Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen. Ziehen Sie ein Element *nicht* mehrfach in denselben Bereich.

$\mathfrak{P}(\{1,2\}) \cup \{\{1\},3\}$	$\{1,3\} \times \mathfrak{P}(\{2\})$	$\{\emptyset\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$

$\emptyset$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4 $\quad$ $\{1\}$ $\quad$ $\{2\}$ $\quad$ $\{3\}$ $\quad$ $\{1,2\}$ $\quad$ $\{1,2,3\}$ $\quad$ $(1,\emptyset)$ $\quad$ $(2,\emptyset)$ $\quad$ $(3,\emptyset)$ $\quad$ $(1,\{2\})$ $\quad$ $(\{1\},\{2\})$ $\quad$ $(3,\{2\})$

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ sowie die Partition

$$P = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}.$$

Wie aus der Vorlesung bekannt induziert P eine zugehörige Äquivalenzrelation. Ziehen Sie die unten aufgelisteten Elemente aus $M \times M$ in das Feld unter die jeweilige Partitionsklasse $C \in P$, so dass die zu C gehörende Äquivalenzklasse dargestellt wird.

Wichtig: Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen. Ziehen Sie ein Element *nicht* mehrfach in denselben Bereich.

$\{a, b, c\}$	$\{d, e\}$

(a,a) (a,b) (a,c) (a,d) (a,e) (b,a) (b,b) (b,c) (b,d) (b,e) (c,a) (c,b) (c,c) (c,d) (c,e) (d,a) (d,b)

(d,c) (d,d) (d,e) (e,a) (e,b) (e,c) (e,d) (e,e)

Welche Möglichkeiten gibt es für die Anzahl $|\mathfrak{P}(M) \cap M|$ an Elementen, wenn M als beliebige dreielementige Menge gewählt werden darf? Kreuzen Sie alle zutreffenden Optionen an.

Hinweis: Falsche Antworten geben Punktabzug. Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] 6
- [ ] 7
- [ ] 8
- [ ] 9

Sei $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ eine Menge mit 10 Elementen. Ferner bezeichnen $M_{1,5} = \{x_1, \ldots, x_5\}$ sowie $M_{6,10} = \{x_6, \ldots, x_{10}\}$ die Teilmengen von M mit den ersten 5 bzw. letzten 5 Elementen aus M.
Wie viele Elemente enthält die Menge $\mathfrak{P}(M_{1,5}) \cup \mathfrak{P}(M_{6,10})$?

Wählen Sie eine Antwort:

- a. 10
- b. $2^{(2^{10})}$
- c. 2
- d. 0
- e. 5^2
- f. $5!$
- g. $2^6 - 1$

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c\}$ und die Relation $S \subset M \times M$ mit $S = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Unten sehen Sie drei Spalten mit unterschiedlichen Definitionen einer weiteren Relation $R \subset M \times M$. Ordnen Sie folgende Informationen zu.

1. Tragen Sie in der ersten Reihe ein, ob es sich um eine (a) Quasiordnung, (b) partielle Ordnung und/oder (c) Äquivalenzrelation handelt. Nennen Sie alle zutreffenden Antworten.

2. In der zweiten Reihe nennen Sie *alle* verletzten Eigenschaften , die zu (a), (b) und (c) aus Schritt 1 gehören.

3. Nennen Sie pro verletzter Eigenschaft eine Begründung in der dritten Reihe.

Wichtig: Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen. Ziehen Sie ein Element *nicht* mehrfach in denselben Bereich.

$R := S$ ist eine	$R := S \cup \{(a, b), (c, b)\}$ ist eine	$R := S \cup \{(a, b), (c, b), (a, c)\}$ ist eine
R verletzt:	R verletzt:	R verletzt:
Begründung:	Begründung:	Begründung:

Quasiordnung | partielle Ordnung | Äquivalenzrelation | Reflexivität | Symmetrie | Homomorphie | Antisymmetrie | Linkstotalität | Transitivität

$(c,b) \in R \wedge (b,c) \notin R$ | $(c,c) \notin R$ | $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R$ | $(c,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge c \neq b$ | $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d\}$. Welche der folgenden Hasse-Diagramme stellen partielle Ordnungen auf M dar, bei denen a und b maximale Elemente von M sind? Wählen Sie alle zutreffenden Optionen aus.

Hinweis: Falsche Antworten geben Punktabzug. Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

☐ 1.
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & d \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & a & \end{tikzcd}$$

☐ 2.
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[d] & \\ c \arrow[d] & b \arrow[dl] \\ d & \end{tikzcd}$$

☐ 3.
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[d] \\ b \arrow[d] \\ c \arrow[d] \\ d \end{tikzcd}$$

☐ 4.
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] a \arrow[d] & b \arrow[d] \\ c & d \end{tikzcd}$$

☐ 5. $a \quad b \quad c \quad d$

Für eine beliebige endliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ bezeichnet $\max M$ die größte Zahl in M. Gegeben sind folgende Funktionen, jeweils mit Definitions- sowie Zielbereich $\mathbb{N}$:

1. $f(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
2. $a(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid f(k) \leq n\}$
3. $p(n) = f(a(n))$
4. $x(n) = \begin{cases} a(n) & \text{falls } n > a(n) + p(n) \\ n - p(n) & \text{sonst} \end{cases}$
5. $y(n) = \begin{cases} a(n) & \text{falls } n \leq a(n) + p(n) \\ 2a(n) + p(n) - n & \text{sonst} \end{cases}$

Füllen Sie die unten stehende Wertetabelle aus.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$										
$p(n)$										
$x(n)$										
$y(n)$										

Sei zudem $d(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert mit $d(n) = (x(n), y(n))$. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils an, ob sie bijektiv, surjektiv oder injektiv sind. Bei Bijektivität ist nur diese zu nennen.

$f(n)$ ist

$a(n)$ ist

$p(n)$ ist

$d(n)$ ist

Vervollständigen Sie folgenden Satz zu einer korrekten Aussage.

Die Funktion $d(n)$ ist nützlich für .

Die Booleschen Terme sind induktiv durch die folgende BNF definiert

$$\begin{aligned}\mathcal{BT} &\coloneqq \mathsf{T} \mid \mathsf{F} \mid \mathcal{V} \mid \neg\, \mathcal{BT} \mid (\mathcal{BT} \vee \mathcal{BT}) \mid (\mathcal{BT} \wedge \mathcal{BT}) \\ \mathcal{V} &\coloneqq X_0 \mid X_1 \mid \dots\end{aligned}$$

Weiter sind zwei Funktionen gegeben, die von der Menge der Booleschen Terme auf die natürlichen Zahlen abbilden: $\#_K : \mathcal{BT} \to \mathbb{N}$ und $\#_O : \mathcal{BT} \to \mathbb{N}$

$\#_K(\mathcal{BT})$ berechnet die Anzahl der Klammerpaare in einem Booleschen Term und $\#_O(\mathcal{BT})$ die Anzahl der Operatoren.

Beispiel: Für den Booleschen Term

$$t = (\neg\mathsf{T} \wedge ((X_0 \vee X_1) \vee (X_0 \wedge X_2)))$$

gilt $\#_K(t) = 4$ und $\#_O(t) = 5$.

1. Geben Sie eine induktive Definition für $\#_K(\mathcal{BT})$ und $\#_O(\mathcal{BT})$ an.

2. Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass gilt: $\#_K(\mathcal{BT}) \leq \#_O(\mathcal{BT})$.

Die Fibonacci-Funktion $fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bekanntlich induktiv definiert durch:

$$
\begin{aligned}
fib(0) &=_{df} 0 \\
fib(1) &=_{df} 1 \\
fib(n) &=_{df} fib(n-2) + fib(n-1) \qquad \text{für } n \geq 2
\end{aligned}
$$

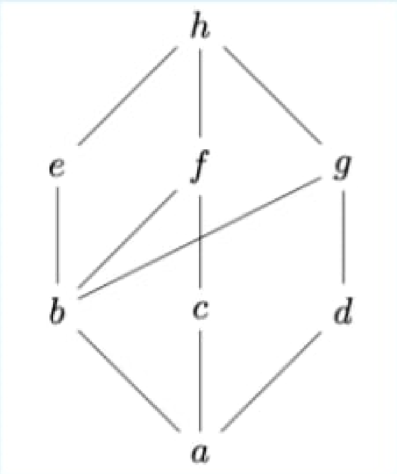
Beweisen Sie mittels verallgemeinerter Induktion folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$2 | fib(n) \Leftrightarrow 3 | n$$

Das heißt, der Wert der Fibonnacci-Funktion ist genau für die Vielfachen von 3 gerade.

Hinweis: Unterscheiden Sie für $n \geq 2$ verschiedene Fälle für n in Abhängigkeit der 3-Teilbarkeit von n.

Betrachten Sie den folgenden als Hasse-Diagramm angegebenen Verband:



Geben Sie die folgenden Suprema und Infima an:

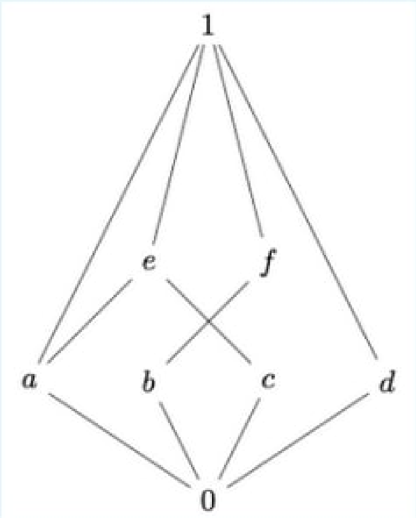
sup(e, g) = ☐ inf(e, g) = ☐

sup(c, d) = ☐ inf(c, d) = ☐

sup(a, f) = ☐ inf(a, f) = ☐

sup(h, c) = ☐ inf(h, c) = ☐

Betrachten Sie den folgende als Hasse-Diagramm gegebenen Verband.



Geben Sie zu jedem Element alle komplementären Elemente an.

Beachten Sie: Wir bezeichnen die Menge alle Komplemente von bspw. x hier vereinfacht als $\bar{x}$.

Wichtig: Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des Labels dürfen überstehen und sich überlappen.

$\bar{0}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{e}$	$\bar{f}$	$\bar{1}$

0 a b c d e f 1

Gegeben seien die folgenden drei Verbände:

$(V_1, \sqsubseteq_1) =_{df} (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$: Die linear geordneten natürlichen Zahlen mit zusätzlichem größten Element ∞
$(V_2, \sqsubseteq_2) =_{df} (\mathbb{N}, |)$:Die natürlichen Zahlen mit Teilbarkeitsbeziehung
$(V_3, \sqsubseteq_3) =_{df} (\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$: Der Potenzmengenverband der natürlichen Zahlen

Betrachten Sie die beiden folgenden Funktionen:

$$f : V_1 \to V_3 \text{ mit } f(n) =_{df} \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n \wedge m \bmod 2 = 0\}$$

$$g : V_1 \to V_2 \text{ mit } g(n) =_{df} \begin{cases} 0 & \text{falls } n = \infty \\ n & \text{falls } n \bmod 2 = 0 \\ n+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Welche der Funktionen sind Ordnungs-, $\sqcup$- oder $\sqcap$-Homomorphismen? Beweisen Sie bzw. geben Sie Gegenbeispiele an und begründen Sie diese.

Geben Sie alle Elemente der Rechts-Nebenklasse der S_4-Untergruppe

$$\langle\{(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\},\circ\rangle$$

zu (12) an.

Hinweis: Falsche Antworten geben Punktabzug. Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- [ ] a. ( )
- [ ] b. (1 2)
- [ ] c. (1 3)
- [ ] d. (1 4)
- [ ] e. (2 3)
- [ ] f. (2 4)
- [ ] g. (3 4)
- [ ] h. (1 2)(3 4)
- [ ] i. (1 3)(2 4)
- [ ] j. (1 4)(2 3)
- [ ] k. (1 2 3)
- [ ] l. (1 2 4)
- [ ] m. (1 3 2)
- [ ] n. (1 3 4)
- [ ] o. (1 4 2)
- [ ] p. (1 4 3)
- [ ] q. (2 3 4)
- [ ] r. (2 4 3)
- [ ] s. (1 2 3 4)
- [ ] t. (1 2 4 3)
- [ ] u. (1 3 2 4)
- [ ] v. (1 3 4 2)
- [ ] w. (1 4 2 3)
- [ ] x. (1 4 3 2)

Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sei die zweistellige Operation $\oplus$ definiert durch

$$x \oplus y =_{df} 3^{x+y}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $\langle \mathbb{R}, \oplus \rangle$ ist eine Halbgruppe.

Geben Sie alle Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_5, +_5 \rangle$ an und begründen Sie diese.
Geben Sie für jeden Normalteiler N einen Homomorphismus $h_N : \mathbb{Z}_5 \to N$ an.

Gegeben sei der Ring $\langle \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot \rangle$ mit $+$ und $\cdot$ wie üblich auf Funktionen definiert durch $(f+g)(x) \;=_{df}\; f(x)+g(x)$ und $(f \cdot g)(x) \;=_{df}\; f(x)\cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$.[a]

(a) Ist auch $\langle \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \circ \rangle$ ein Ring, falls $\circ$ wie üblich die Funktionskomposition darstellt?

(b) Sei $x \in \mathbb{Z}$ und $U_x \;=_{df}\; \{f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \mid f(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\langle U_x, +, \cdot \rangle$ ein Ideal von $\langle \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot \rangle$ ist.

---

[a] Wie in der Vorlesung definiert ist $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \;=_{df}\; \{f \mid f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$. Die Ringeigenschaft von $\langle \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}, +, \cdot \rangle$ kann vorausgesetzt werden und ist nicht zu zeigen.

Es gibt genau einen Körper $\langle\{0,1,u,v\},\oplus,\odot\rangle$ mit vier verschiedenen Elementen $\{0,1,u,v\}$, wobei 0 und 1 das 0- bzw. 1-Element des Körpers sei. Vervollständigen Sie unter dieser Voraussetzung folgende Verknüpfungstafeln.

$\oplus$	0	1	u	v
0				
1		0		
u				
v				

$\odot$	1	u	v
1			
u			
v			

v	0	u	1

$\langle \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap \rangle$ ist ein kommutativer Ring mit 1. Hierbei ist Δ die bekannte symmetrische Differenz.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ○ Wahr
- ○ Falsch

Die Mächtigkeit eines endlichen Körpers muss eine Primzahl sein.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ○ Wahr
- ○ Falsch

Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$. Finden Sie Koeffizienten $r, s, t \in \mathbb{R}$, so dass

$$r \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v}) + s \cdot (2\vec{w} - \vec{v}) + t \cdot (\vec{u} - 3\vec{w}) \;=\; \vec{0}.$$

Für $r = 1$ gilt: $s =$ ____ und $t=$ ____

Für s = -6 gilt: $r =$ ____ und $t =$ ____

Die drei Vektoren $(2\vec{u} - 3\vec{v})$, $(2\vec{w} - \vec{v})$ und $(\vec{u} - 3\vec{w})$ sind ____

Seien U, W Untervektorräume des $\mathbb{R}^{12}$ mit $\dim(U) = 3$ und $\dim(W) = 11$. Bestimmen Sie den Bereich, in dem $\dim(U \cap W)$ liegen kann, indem Sie eine möglichst genaue untere und obere Schranke angeben.

Hinweis: Die Dimensionsformel für Untervektorräume (Satz 9.5.12, Skript) kann hilfreich sein.

$\square \leq \dim(U \cap W) \leq \square$

Seien U_1 und U_2 beliebige Untervektorräume eines Vektorraumes V. Welche Bedingungen sind hinreichend dafür, dass $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

Hinweis: Es sind u.U. mehrere richtige Antworten möglich. Falsche Antworten geben Punktabzug. Es kann aber insgesamt nicht weniger als 0 Punkte erreicht werden.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ a. $dim(U_1) + dim(U_2) = dim(U_1 + U_2)$
- ☐ b. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- ☐ c. $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$
- ☐ d. $\langle U_1 \cup U_2 \rangle = U_1 \cup U_2$
- ☐ e. $dim(U_1) \leq dim(U_2)$ oder $dim(U_2) \leq dim(U_1)$
- ☐ f. $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

Gegeben sind folgende vier Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$.

(a) $V_1 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}$

(b) $V_2 =_{df} \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}$

(c) $V_3 =_{df} V_1 \cap V_2$

(d) $V_4 =_{df} V_1 + V_2$

Entscheiden Sie per Drag-and-Drop, ob mit den folgenden Mengen eine Basis eines V_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) vorliegt.

- $B_0 = \emptyset$
- $B_1 = \{(1,0,0,0)^t, (0,1,0,0)^t, (0,0,1,0)^t, (0,0,0,1)^t\}$
- $B_2 = \{(-2,1,0,0)^t, (0,0,-2,1)^t\}$
- $B_3 = \{(1,0,1,0)^t, (0,1,-4,3)^t\}$
- $B_4 = \{(1,1,0,0)^t, (1,0,1,0)^t, (1,0,0,1)^t\}$
- $B_5 = \{(-2,1,-2,1)^t\}$
- $B_6 = \{(1,0,0,0)^t, (1,1,0,0)^t, (1,1,1,0)^t, (1,1,1,1)^t\}$
- $B_7 = \{(-2,1,0,0)^t, (1,0,1,0)^t, (2,0,0,1)^t\}$
- $B_8 = \{(1,0,0,1)^t, (0,1,0,-1)^t, (0,0,1,-1)^t\}$
- $B_9 = \{(0,0,0,0)^t\}$

Wichtig: Die Platzierung der Labels wird durch den Kreis in der oberen linken Ecke bestimmt. Achten Sie darauf, dass er sich in dem richtigen Bereich befindet. Sonstige Teile des L

Basis V_1	Basis V_2	Basis V_3	Basis V_4

B_6 B_2 B_3 B_7 B_4 B_5 B_0 B_1 B_8 B_9

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\
 & & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & = & 14 \\
-2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 11x_4 & = & 19 \\
12x_1 & & & - & x_3 & & & = & -1
\end{array}
$$

Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix nach $\mathbb{Z}_5$.

b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.

c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabenteil a)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\
 & & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & = & 14 \\
-2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 11x_4 & = & 19 \\
12x_1 & & & - & x_3 & & & = & -1
\end{array}
$$

Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix nach $\mathbb{Z}_5$.

b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.

c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabenteil b)

Vervollständigen Sie das folgende Schaubild, um die erweiterte Koeeffizientenmatrix durch Zeilenumformungen in Stufenform zu überführen.

Hinweis: Vervollständigen Sie das Schaubild, indem Sie von links nach rechts lesen.

$$\xrightarrow{A_{2,1}(1),A_{4,2}(1)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{A_{2,1}(3),A_{2,3}(3)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{V_{3,1},V_{2,4},V_{2,3}}$$

$$\xrightarrow{M_2(2)} \quad \xrightarrow{A_{2,4}(4),M_1(3)} \quad \xrightarrow{M_4(\frac{1}{2}),A_{4,3}(4)} \quad \xrightarrow{M_4(3),A_{4,3}(4)} \quad \xrightarrow{M_2(\frac{1}{3})}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 9 \\ & & 4x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & = & 14 \\ -2x_1 & & & + & 3x_3 & + & 11x_4 & = & 19 \\ 12x_1 & & & - & x_3 & & & = & -1 \end{array}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_5$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix nach $\mathbb{Z}_5$.

b) Überführen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix schrittweise mittels Zeilenumformungen in Stufenform. Geben Sie jeweils die ausgeführten Operationen an.

c) Bestimmen Sie anhand der Stufenform die Lösungsmenge des Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabenteil c)

Lösungsmenge L = {(___ , ___ , ___ , ___)ᵀ}

Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die die 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2-x & 1 \\ x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ invertierbar ist.

Geben Sie im Folgenden die **Streichungsmatrizen** an, wenn Sie nach der 3. **Spalte** entwickeln.

Geben Sie die Streichungsmatrix der 1. **Zeile** an:

Geben Sie die Streichungsmatrix der **3. Zeile** an:

Die Determinante der Matrix A ist .

Hinweis: Kreuzen Sie im folgenden **alle** richtigen Antworten an. Dabei gibt es für jede richtige Antwort Teilpunkte.

Jede falsche Antwort führt wiederum zum Abzug von Teilpunkten.

Die Matrix ist also invertierbar, wenn

- ☐ x=0
- ☐ x=1
- ☐ x=2
- ☐ x=3
- ☐ x=4
- ☐ x=5

.

Gegeben seien die invertierbaren 3×3–Matrizen A und B.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $det(A^t \cdot B^t \cdot A \cdot A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}B^{-1} \cdot B^{-1})$.

$det(A^t \cdot B^t \cdot A \cdot A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}B^{-1} \cdot B^{-1})$ = $\boxed{}$

Alle Zeilentransformationen, die im Gauss-Verfahren angewendet werden dürfen, lassen die Determinante einer quadratischen Matrix unverändert.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- ○ Wahr
- ○ Falsch