Klausurprotokoll Mafi 1 Ersttermin 06.02.2020

1. **Aussagenlogik**
   a) Zeigen einer Aussage mittels Wahrheitstabelle $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$
   b) Beweisen derselben Aussage mittels Umformungen.
   c) Ergebnismenge explizit angeben: $\{(1,b) | b \in \{1,2\}\} \cap (\{1,2\} \times P(\{\emptyset, 1\}))$
   d) Seien A, B, C Mengen. Zeigen oder widerlegen: $A \neq B \Rightarrow A \cup C \neq A \cup C$

2. **Relationen, Funktionen**
   a) Zeigen, ob $a\ R\ b \Leftrightarrow_{def} a^n - b^n = n \cdot a - n \cdot b$ Äquivalenzrelation ist.
   b) Zeigen, ob $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = max(y,\ z) \vee y = max(x,z)\}$ Äquivalenzrelation ist.
   c) Hasse Diagramm aller partieller Ord. die a als inf und b als sup haben $M = \{a,b,c\}$
   d) Beispiel einer injektiven, nicht surjektiven Funktion angeben und beweisen.
   e) Beispiel einer surjektiven, nicht injektiven Funktion angeben und beweisen.

3. **Induktion**
   a) Vollständige induktion $\sum_{i=0}^{n}(i^2 - i) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
   b) Verallgemeinerte Induktion $fib(n) \leq (\frac{7}{4})^n$ (Fibonacci Sequenz)

4. **Verbände**
   a, b) Beweisen, dass ein Verband (nicht) distributiv ist
   c) ?
   d) Ist $U = (\mathbb{N}, |);\ V = (\mathbb{N}, \leq);\ f : U \to V;\ f(n) = n$ $\sqcap$- und/oder $\sqcup$-Homomorphismus?

5. **Algebraische Strukturen**
   Gegeben Monoid $M = \langle\{a,b\}, \oplus\rangle$, $\oplus \Leftrightarrow_{def} Konkatenation$ (Zeichenketten)
   a) Zeigen ob $M_1 = \{w \in M | \, |w|\ ist\ gerade\}$ ein Untermonoid ist.
   b) Zeigen ob $M_2 = \{w \in M |\ w\ enthält\ nicht\ die\ Zeichenkette\ "abba"\}$ ein Untermonoid ist.
   c) Verknüpfungstafel einer Gruppe explizit angeben
   d) Sind $f : \mathbb{Z}^6 \to \mathbb{Z}^7$, $f(n) = n$; $g : \mathbb{Z}^7 \to \mathbb{Z}^2$, $g(n) = n\ mod\ 2$ Gruppenhomomorphismen?

6. **Basen, Untervektorräume**
   a) Basis und Dimension angeben (Beweis 3&4): V_1, V_2, $V_3 = V_1 \cup V_2$, $V_4 = V_1 + V_2$
   b) Zeigen ob angegebene Räume Unterräume sind

7. **Lineare Gleichungssysteme**
   a) Darstellende Matrix einer linearen Gleichung $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)^t) = ...$ angeben
   b) Berechne $Kern(\varphi)$
   c) Berechne $Bild(\varphi)$

8. **Determinante einer Matrix**
   a) Berechne $det(A \cdot A^t),\ A \in \mathbb{R}^{3x3}$
   b) Angeben für welche $x \in \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}^{4x4}$ Matrix invertierbar ist. Entwicklung nach Spalte.

9. **Darstellende Matrix, Basiswechsel**
   a) Gegeben $U = \mathbb{R}^3$, $\varphi : U \to U$ Basen $B, B' \in \mathbb{R}^3$. Berechne ${}_{B'}[\varphi \circ \varphi]_B$

10. **Wissensfragen**
    a) Term (X) ist eine Tautologie.
    b) $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$ und $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sind gleichmächtig.
    c) Eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathbb{R}^{3x4}$ ist nie injektiv.
    d) Es gibt unendlich viele Paare endlicher Isomorphismen.
    e) Die Menge der $\mathbb{R}^{nxn},\ n \geq 2$ Matrizen bildet zusammen mit der Matrix-Addition und -Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement.

Cheers 🍻
-Frotty