湖南省长沙市2023年中考数学试卷

一、单选题

1.（2023·长沙）下列各数中，是无理数的是（　　）

A．$\frac{1}{7}$　　B．π　　C．-1　　D．0

【答案】B

【知识点】无理数的认识

【解析】【解答】解：由题意得π为无理数，

故答案为：B

【分析】根据无理数的定义结合题意即可求解。

2.（2023·长沙）下列图形中，是轴对称图形的是（　　）

A．

B．

C．

D．

【答案】D

【知识点】轴对称图形

【解析】【解答】解：

A、不是轴对称图形，A不符合题意；

B、不是轴对称图形，B不符合题意；

C、不是轴对称图形，C不符合题意；

D、是轴对称图形，D符合题意；

故答案为：D

【分析】根据轴对称图形的定义结合题意即可求解。

3.（2023·长沙）下列计算正确的是（　　）

A．$x^2 \cdot x^3 = x^5$　　B．$(x^3)^3 = x^6$

C．$x(x+1) = x^2 + 1$　　D．$(2a-1)^2 = 4a^2 - 1$

【答案】A

【知识点】同底数幂的乘法；单项式乘多项式；完全平方公式及运用；幂的乘方

【解析】【解答】解：

A、$x^2 \cdot x^3 = x^5$，A 符合题意；

B、$(x^3)^3 = x^9$，B 不符合题意；

C、$x(x+1) = x^2 + x$，C 不符合题意；

D、$(2a-1)^2 = 4a^2 - 4a + 1$，D 不符合题意；

故答案为：A

【分析】根据同底数幂的乘法、幂的乘方、单项式乘多项式、完全平方公式对选项逐一运算即可求解。

4．（2023·长沙）下列长度的三条线段，能组成三角形的是（　　）

A．1，3，4　　B．2，2，7　　C．4，5，7　　D．3，3，6

【答案】C

【知识点】三角形三边关系

【解析】【解答】解：

A、1+3=4，故不能组成三角形，A 不符合题意；

B、2+2＜7，故不能组成三角形，B 不符合题意；

C、4+5＞7，故能组成三角形，C 符合题意；

D、3+3=6，故不能组成三角形，D 不符合题意；

故答案为：C

【分析】根据三角形的三边关系结合题意对选项逐一分析即可求解。

5．（2023·长沙）2022 年，长沙市全年地区生产总值约为 1400000000000 元，比上年增长4.5%．其中数据 1400000000000 用科学记数法表示为（　　）

A．1.4×10^{12}　　B．0.14×10^{13}　　C．1.4×10^{13}　　D．14×10^{11}

【答案】A

【知识点】科学记数法—记绝对值大于 1 的数

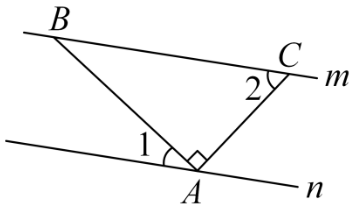
【解析】【解答】解：由题意得数据 1400000000000 用科学记数法表示为1.4×10^{12}，

故答案为：A

【分析】 把一个数写成 a×10 的形式(其中 1＜|a|≤10 ， n 为整数) ，这种记数的方法叫做科学记数法。

6．（2023·长沙）如图，直线$m \parallel$直线 n，点 A 在直线 n 上，点 B 在直线 m 上，连接AB，过点 A 作

$AC \perp AB$，交直线 m 于点 C．若∠1 = 40°，则∠2的度数为（　　）

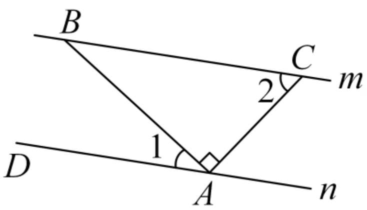


A．30°　　　　B．40°　　　　C．50°　　　　D．60°

【答案】C

【知识点】平行线的性质

【解析】【解答】解：如图所示：



由题意得∠DAC=∠1+∠BAC=130°，

∵m∥n，

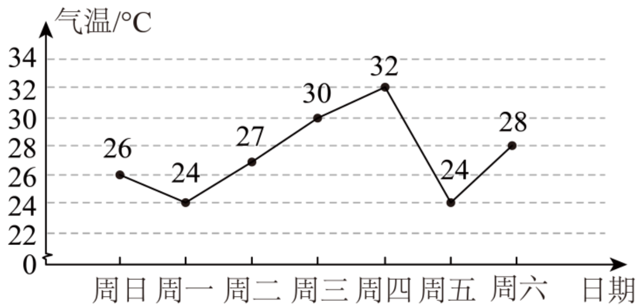
∴∠2+∠DAC=180°，

∴∠2=50°，

故答案为：C

【分析】先根据垂直结合题意得到∠DAC，进而根据平行线的性质即可求解。

7.（2023·长沙）长沙市某一周内每日最高气温的情况如图所示，下列说法中错误的是（　　）



A．这周最高气温是 32℃　　　　B．这组数据的中位数是 30

C．这组数据的众数是 24　　　　D．周四与周五的最高气温相差 8℃

【答案】B

【知识点】通过函数图象获取信息并解决问题；中位数；众数

【解析】【解答】解：

A、这周最高气温是 32℃，A 不符合题意；

B、这组数据的中位数是 27，B 符合题意；

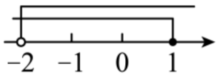
C、这组数据的众数是 24，C 不符合题意；

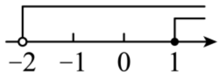
D、周四与周五的最高气温相差 8℃，D 不符合题意；

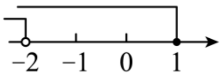
故答案为：B

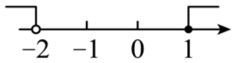
【分析】根据图像结合中位线、众数定义对选项逐一分析即可求解。

8.（2023·长沙）不等式组$\begin{cases}2x+4>0\\ x-1\leq 0\end{cases}$的解集在数轴上表示正确的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

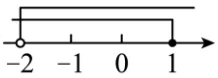
【知识点】在数轴上表示不等式组的解集；解一元一次不等式组

【解析】【解答】解：由题意得$\begin{cases}2x+4>0①\\ x-1\leq 0②\end{cases}$，

解①得 x＞-2，

解②得 x≤1，

∴不等式组的解集为-2＜x≤1，

∴在数轴上表示为，

故答案为：A

【分析】先分别解不等式①和②，进而得到不等式组的解集，再表示在数轴上即可求解。

9.（2023·长沙）下列一次函数中，y 随 x 的增大而减小的函数是（　　）

A. $y=2x+1$　　B. $y=x-4$　　C. $y=2x$　　D. $y=-x+1$

【答案】D

【知识点】一次函数图象、性质与系数的关系

【解析】【解答】解：由题意得 y 随 x 的增大而减小的函数是$y=-x+1$，

故答案为：D

【分析】根据一次函数的性质对选项逐一分析即可求解。

10. “千门万户曈曈日，总把新桃换旧符”．春节是中华民族的传统节日，古人常用写“桃符”的方式来祈福避祸，而现在，人们常用贴“福”字、贴春联、挂灯笼等方式来表达对新年的美好祝愿．某商家在春节期间开展商品促销活动，顾客凡购物金额满 100 元，就可以从“福”字、春联、灯笼这三类礼品中免费领取

一 件．礼品领取规则：顾客每次从装有大小、形状、质地都相同的三张卡片（分别写有“福”字、春联、灯笼）的不透明袋子中，随机摸出一张卡片，然后领取一件与卡片上文字所对应的礼品．现有2 名顾客都只领取了一件礼品，那么他们恰好领取同一类礼品的概率是(　　)

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】C

二、填空题

11．分解因式：$n^2 - 100=$______________________.

【答案】（n-10）（n+10）

【知识点】因式分解 - 公式法

【解析】【解答】解：$n^2-100=n^2-10^2=$（n-10）（n+10）.

故答案为：（n-10）（n+10）.

【分析】利用平方差公式因式分解即可。

12．（2023·长沙）睡眠管理作为“五项管理”中重要的内容之一，也是学校教育重点关注的内容．某老师了解到班上某位学生的 5 天睡眠时间（单位：小时）如下：10，9，10，8，8，则该学生这 5 天的平均睡眠时间是 _________小时．

【答案】9

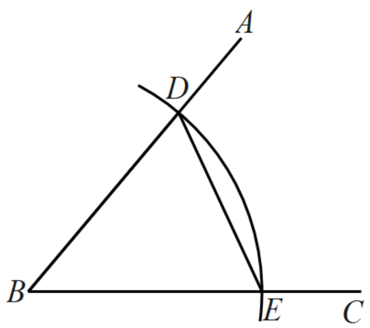
【知识点】平均数及其计算

【解析】【解答】解：由题意得该学生这 5 天的平均睡眠时间是$\frac{10+10+9+8+8}{5}=9$小时，

故答案为：9

【分析】根据平均数的定义结合题意进行运算即可求解。

13．（2023·长沙）如图，已知$\angle ABC=50°$，点 D 在BA上，以点 B 为圆心，BD长为半径画弧，交BC于点 E，连接DE，则$\angle BDE$的度数是 _________度．



【答案】65

【知识点】等腰三角形的性质

【解析】【解答】解：由题意得 BD=BE，

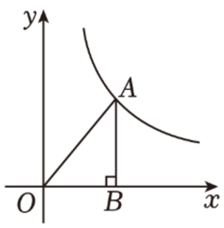
$\because \angle ABC = 50°$，

$\therefore \angle BDE = \frac{180°-50°}{2} = 65°$，

故答案为：65

【分析】先根据题意得到 BD=BE，进而根据等腰三角形的性质结合题意即可求解。

14.（2023·长沙）如图，在平面直角坐标系中，点A在反比例函数$y = \frac{k}{x}$(k为常数，$k > 0$，$x > 0$)的图象上，过点A作x轴的垂线，垂足为B，连接OA．若$\triangle OAB$的面积为$\frac{19}{12}$，则$k =$__________．



【答案】$\frac{19}{6}$

【知识点】反比例函数系数 k 的几何意义

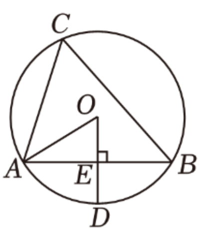
【解析】【解答】解：$\because \triangle OAB$的面积为$\frac{19}{12}$，

$\therefore k = 2 \times \frac{19}{12} = \frac{19}{6}$，

故答案为：$\frac{19}{6}$

【分析】根据反比例函数 k 的几何意义结合题意即可求解。

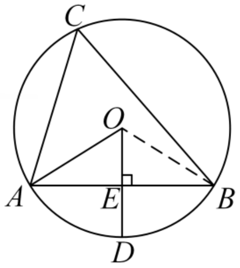
15.（2023·长沙）如图，点 A，B，C 在半径为 2 的$\odot O$上，$\angle ACB = 60°$，$OD \perp AB$，垂足为 E，交$\odot O$于点 D，连接OA，则OE的长度为 __________．



【答案】1

【知识点】含 30°角的直角三角形；垂径定理；圆周角定理

【解析】【解答】解：连接 BO，如图所示：



$\because \angle ACB = 60°$，

∴∠AOB=120°，

$\because OD \perp AB$，

$\therefore \angle AEO = 90°$，$\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DA}$，

∴∠AOE=60°，

∴∠EAO=30°，

∴OE=1，

故答案为：1

【分析】连接 BO，先根据圆周角定理即可得到∠AOB=120°，进而根据垂径定理即可得到$\angle AEO = 90°$，$\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DA}$，从而结合题意得到∠EAO=30°，再运用含 30°角的直角三角形的性质即可求解。

16.（2023·长沙）毛主席在《七律二首•送瘟神》中写道"坐地日行八万里，巡天遥看一千河"，我们把地球赤道看成一个圆，这个圆的周长大约为"八万里"．对宇宙千百年来的探索与追问，是中华民族矢志不渝的航天梦想．从古代诗人屈原发出的《天问》，到如今我国首次火星探测任务被命名为"天问一号"，太空探索无上境，伟大梦想不止步.2021 年 5 月 15 日，我国成功实现火星着陆．科学家已经探明火星的半径大约是地球半径的$\frac{1}{2}$，若把经过火星球心的截面看成是圆形的，则该圆的周长大约为 ＿＿＿＿＿万里．

【答案】4

【知识点】圆的周长

【解析】【解答】解：设地球的半径为 x 万里，由题意得 2πx=8，

解得$x = \frac{4}{\pi}$，

∴火星的半径为$\frac{2}{\pi}$万里，

∴该圆的周长大约为$\frac{2}{\pi} \times 2 \times \pi = 4$万里，

故答案为：4

【分析】先根据题意设地球的半径为 x 万里，进而求出 x 即可得到火星的半径为$\frac{2}{\pi}$万里，再运用圆周长公式即可求解。

三、解答题

17．（2023·长沙）计算：$|-\sqrt{2}|+(-2023)^0-2\sin45°-(\frac{1}{2})^{-1}$．

【答案】解：原式$=\sqrt{2}+1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2$

$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}-2$

$=-1$．

【知识点】零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值；实数的绝对值

【解析】【分析】运用实数的绝对值、零指数幂、负整数指数幂、特殊角的三角函数值进行运算，进而即可求解。

18．（2023·长沙）先化简，再求值：$(2-a)(2+a)-2a(a+3)+3a^2$，其中$a=-\frac{1}{3}$.

【答案】解：$(2-a)(2+a)-2a(a+3)+3a^2$，

$=4-a^2-2a^2-6a+3a^2$，

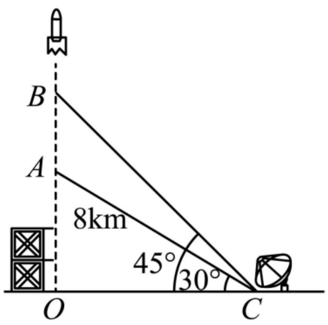
$=4-6a$；

当$a=-\frac{1}{3}$时，原式$=4-6\times(-\frac{1}{3})=4+2=6$．

【知识点】平方差公式及应用；利用整式的混合运算化简求值

【解析】【分析】根据整式的混合运算结合平方差公式进行化简求值即可。

19．（2023·长沙）2023年5月30日9点31分，“神舟十六号”载人飞船在中国酒泉卫星发射中心点火发射，成功把景海鹏、桂海潮、朱杨柱三名航天员送入到中国空间站．如图，在发射的过程中，飞船从地面O处发射，当飞船到达A点时，从位于地面C处的雷达站测得AC的距离是$8km$，仰角为30°；$10s$后飞船到达B处，此时测得仰角为45°．



（1）求点A离地面的高度AO；

（2）求飞船从A处到B处的平均速度．(结果精确到$0.1km/s$，参考数据：$\sqrt{3}\approx1.73$)

【答案】（1）解：在$Rt\triangle AOC$中，$\because \angle AOC=90°$，$\angle ACO=30°$，$AC=8km$，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4(km)$，

（2）解：在$Rt\triangle AOC$中，$\because \angle AOC=90°$，$\angle ACO=30°$，$AC=8km$，

$\therefore OC=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=4\sqrt{3}(km)$，

在$Rt\triangle BOC$中，$\because \angle BOC=90°$，$\angle BCO=45°$，

$\therefore \angle BCO=\angle OBC=45°$，

$\therefore OB=OC=4\sqrt{3}km$，

$\therefore AB=OB-OA=(4\sqrt{3}-4)km$，

$\therefore$飞船从A处到B处的平均速度$=\frac{4\sqrt{3}-4}{10}\approx 0.3(km/s)$.

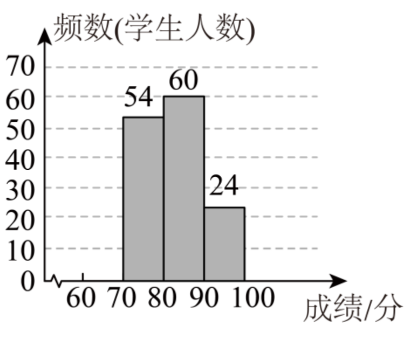
【知识点】含 30°角的直角三角形；解直角三角形的应用－仰角俯角问题；等腰直角三角形

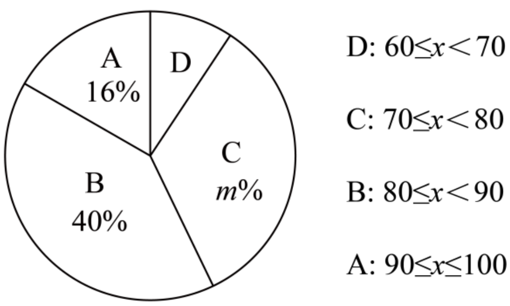
【解析】【分析】（1）根据题意运用含 30°角的直角三角形的性质即可求解；

（2）根据解直角三角形即可得到$OC=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=4\sqrt{3}(km)$，进而根据等腰直角三角形的性质得到$OB=OC=4\sqrt{3}km$，进而得到 AB，再结合题意即可求解。

20.（2023·长沙）为增强学生安全意识，某校举行了一次全校 3000 名学生参加的安全知识竞赛．从中随机抽取 n 名学生的竞赛成绩进行了分析，把成绩分成四个等级（D：$60\le x<70$；C：$70\le x<80$；B：$80\le x<90$；A：$90\le x\le 100$），并根据分析结果绘制了不完整的频数分布直方图和扇形统计图．

安全指示竞赛成绩频数分布直方图　　　安全指示竞赛成绩扇形统计图





请根据以上信息，解答下列问题：

（1）填空：n=_________，m=_________；

（2）请补全频数分布直方图；

（3）扇形统计图中 B 等级所在扇形的圆心角度数为 __________度；

（4）若把 A 等级定为“优秀”等级，请你估计该校参加竞赛的 3000 名学生中达到“优秀”等级的学

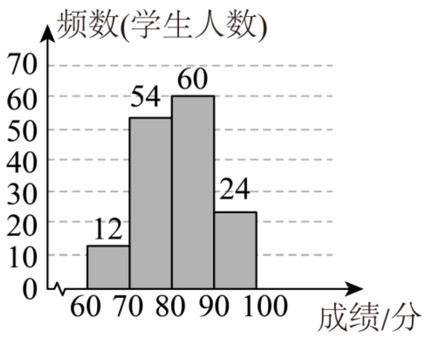
生人数．

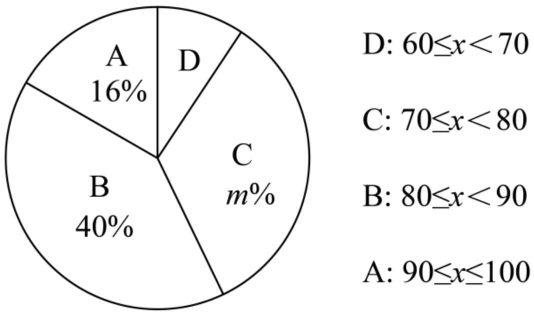
【答案】（1）150；36

（2）解：D 等级学生有：$150-54-60-24=12$（人），

补全的频数分布直方图，如图所示：

安全指示竞赛成绩频数分布直方图　　　安全指示竞赛成绩扇形统计图





（3）144

（4）解：$3000\times16\%=480$（人），

答：估计该校参加竞赛的 3000 名学生中达到“优秀”等级的学生人数有 480 人．

【知识点】用样本估计总体；频数（率）分布直方图；扇形统计图

【解析】【解答】解：由题意得$n=\dfrac{60}{40\%}=150$，

$\therefore m=\dfrac{54}{150}=36$，

故答案为：150；36；

（3）扇形统计图中 B 等级所在扇形的圆心角度数为 360°×40%=144°，

故答案为：144

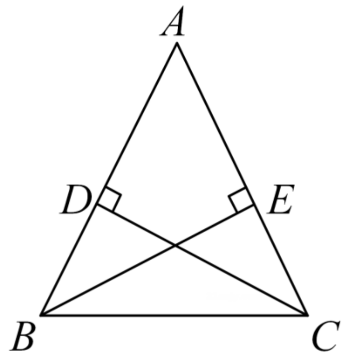
【分析】（1）根据扇形统计图和频数分布直方图的信息结合题意即可求解；

（2）先运用总人数减去其余人数即可得到 D 等级的学生人数，进而补全频数分布直方图即可求解；

（3）根据圆心角的计算公式即可求解；

（4）根据样本估计总体的知识结合题意即可求解。

21．（2023·长沙）如图，$AB=AC$，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为D，E．



（1）求证：$\triangle ABE \cong \triangle ACD$；

（2）若$AE = 6$，$CD = 8$，求BD的长．

【答案】（1）证明：$\because CD \perp AB$，$BE \perp AC$，

$\therefore \angle AEB = \angle ADC = 90°$，

在$\triangle ABE$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle ADC \\ \angle BAE = \angle CAD, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD(AAS)$；

（2）解：$\because \triangle ABE \cong \triangle ACD$，

$\therefore AD = AE = 6$，

在$Rt\triangle ACD$中，$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 = 10}$，

$\because AB = AC = 10$，

$\therefore BD = AB - AD = 10 - 6 = 4$.

【知识点】三角形全等及其性质；勾股定理；三角形全等的判定（AAS）

【解析】【分析】（1）先根据垂直得到$\angle AEB = \angle ADC = 90°$，进而根据三角形全等的判定（AAS）即可求解；

（2）先根据三角形全等的性质得到$AD = AE = 6$，进而根据勾股定理求出 AC，再结合题意运用$BD = AB - AD$即可求解。

22.（2023·长沙）为提升学生身体素质，落实教育部门“在校学生每天锻炼时间不少于 1 小时”的文件精神．某校利用课后服务时间，在八年级开展“体育赋能，助力成长”班级篮球赛，共16个班级参加．

（1）比赛积分规定：每场比赛都要分出胜负，胜一场积3分，负一场积1分．某班级在15场比赛中获得总积分为41分，问该班级胜负场数分别是多少？

（2）投篮得分规则：在3分线外投篮，投中一球可得3分，在3分线内(含3分线)投篮，投中一球

可得2分，某班级在其中一场比赛中，共投中26个球(只有2分球和3分球)，所得总分不少于56分，问该班级这场比赛中至少投中了多少个3分球？

【答案】（1）解：设胜了x场，负了y场，

根据题意得：$\begin{cases} x+y=15 \\ 3x+y=41 \end{cases}$,

解得$\begin{cases} x=13 \\ y=2 \end{cases}$,

答：该班级胜负场数分别是13场和2场；

（2）解：设班级这场比赛中投中了m个3分球，则投中了$(26-m)$个2分球，

根据题意得：$3m+2(26-m)\geq 56$，

解得$m\geq 4$，

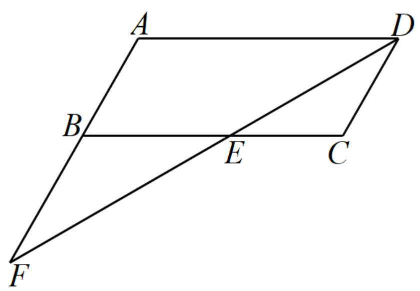
答：该班级这场比赛中至少投中了4个3分球.

【知识点】二元一次方程组的其他应用；一元一次不等式的应用

【解析】【分析】（1）设胜了x场，负了y场，根据"每场比赛都要分出胜负，胜一场积3分，负一场积1分．某班级在15场比赛中获得总积分为41分"即可列出二元一次方程组，进而即可求解；

（2）设班级这场比赛中投中了m个3分球，则投中了$(26-m)$个2分球，根据题意即可列出不等式，进而解不等式即可得到 m 的取值范围，从而结合题意即可求解。

23.（2023·长沙）如图，在▱$ABCD$中，DF平分$\angle ADC$，交BC于点 E，交AB的延长线于点 F.



（1）求证：$AD=AF$；

（2）若$AD=6$，$AB=3$，$\angle A=120°$，求BF的长和$\triangle ADF$的面积.

【答案】（1）证明：在▱$ABCD$中，$AB\parallel CD$，

$\therefore \angle CDE=\angle F$，

$\because DF$平分$\angle ADC$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDE$，

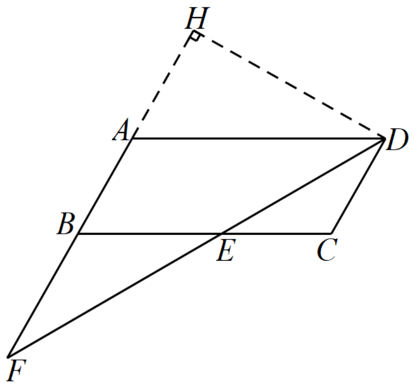
$\therefore \angle F=\angle ADF$，

$\therefore AD=AF$.

（2）解：∵$AD = AF = 6$，$AB = 3$，

∴$BF = AF - AB$ =3；

过 D 作$DH \perp AF$交FA的延长线于 H，



∵$\angle BAD = 120°$，

∴$\angle DAH = 60°$，

∴$\angle ADH = 30°$，

∴$AH = \frac{1}{2}AD = 3$，

∴$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 3\sqrt{3}$，

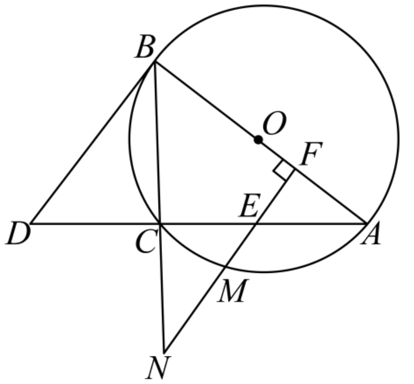
∴$\triangle ADF$的面积=$\frac{1}{2}AF \cdot DH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

【知识点】平行线的性质；角平分线的性质；含 30°角的直角三角形；勾股定理；平行四边形的性质

【解析】【分析】（1）先根据平行四边形的性质结合平行线的性质即可得到$\angle CDE = \angle F$，进而根据角平分线的性质得到$\angle ADE = \angle CDE$，再结合题意运用等腰三角形的性质即可求解；

（2）先根据题意得到$BF = AF - AB$ =3；过 D 作$DH \perp AF$交FA的延长线于 H，根据含 30°角的直角三角形的性质结合题意即可得到 AH 的长，进而根据勾股定理即可求出 DH，再根据三角形的面积即可求解。

24.（2023·长沙）如图，点 A，B，C 在$\odot O$上运动，满足$AB^2 = BC^2 + AC^2$，延长AC至点 D，使得$\angle DBC = \angle CAB$，点 E 是弦AC上一动点（不与点 A，C 重合），过点 E 作弦AB的垂线，交AB于点 F，交BC的延长线于点 N，交$\odot O$于点 M（点 M 在劣弧$\overset{\frown}{AC}$上）.



（1）BD是$\odot O$的切线吗？请作出你的判断并给出证明；

（2）记$\triangle BDC$，$\triangle ABC$，$\triangle ADB$的面积分别为S_1，S_2，S，若$S_1 \cdot S = (S_2)^2$，求$(tanD)^2$的值；

（3）若$\odot O$的半径为 1，设$FM = x$，$FE \cdot FN \cdot \sqrt{\frac{1}{BC \cdot BN} + \frac{1}{AE \cdot AC}} = y$，试求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围．

【答案】（1）解：BD是$\odot O$的切线．

证明：如图，在$\triangle ABC$中，$AB^2 = BC^2 + AC^2$，

∴$\angle ACB = 90°$．

又点 A，B，C 在$\odot O$上，

∴AB是$\odot O$的直径．

∵$\angle ACB = 90°$，

∴$\angle CAB + \angle ABC = 90°$．

又$\angle DBC = \angle CAB$，

∴$\angle DBC + \angle ABC = 90°$．

∴$\angle ABD = 90°$．

∴BD是$\odot O$的切线．

（2）解：由题意得，$S_1 = \frac{1}{2}BC \cdot CD$，$S_2 = \frac{1}{2}BC \cdot AC$，$S = \frac{1}{2}AD \cdot BC$．

∵$S_1 \cdot S = (S_2)^2$，

∴$\frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \frac{1}{2}AD \cdot BC = (\frac{1}{2}BC \cdot AC)^2$．

∴$CD \bullet AD = AC^2$．

∴$CD(CD + AC) = AC^2$．

又∵$\angle D + \angle DBC = 90°$，$\angle ABC + \angle A = 90°$，$\angle DBC = \angle A$，

∴$\angle D = \angle ABC$．

$\therefore tan\angle D = \frac{BC}{CD} = \tan\angle ABC = \frac{AC}{BC}$.

$\therefore CD = \frac{BC^2}{AC}$.

又$CD(CD + AC) = AC^2$，

$\therefore \frac{BC^4}{AC^2} + BC^2 = AC^2$.

$\therefore BC^4 + AC^2 \cdot BC^2 = AC^4$.

$\therefore 1 + (\frac{AC}{BC})^2 = (\frac{AC}{BC})^4$.

由题意，设$(tanD)^2 = m$，

$\therefore (\frac{AC}{BC})^2 = m$.

$\therefore 1 + m = m^2$.

$\therefore m = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because m > 0$，

$\therefore m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

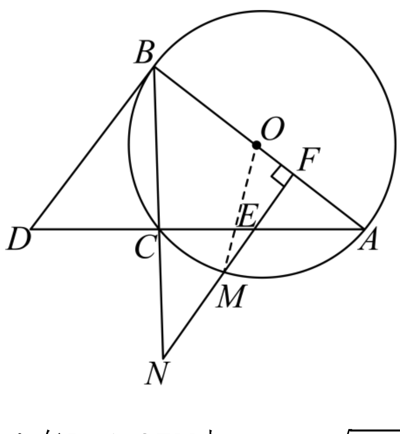
$\therefore (tanD)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（3）解：设$\angle A = \alpha$，

$\because \angle A + \angle ABC = \angle ABC + \angle DBC = \angle ABC + \angle N = 90°$，

$\therefore \angle A = \angle DBC = \angle N = \alpha$.

如图，连接OM.



$\therefore$在$Rt\triangle OFM$中，$OF = \sqrt{OM^2 - FM^2} = \sqrt{1 - x^2}$.

$\therefore BF = BO + OF = 1 + \sqrt{1 - x^2}$，$AF = OA - OF = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

$\therefore$在$Rt\triangle AFE$中，$EF = AF \cdot tan\alpha = (1 - \sqrt{1 - x^2}) \cdot \tan\alpha$，$AE = \frac{AF}{\cos\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}$.

在$Rt\triangle ABC$中，$BC = AB \cdot sin\alpha = 2sin\alpha$.（$\because r = 1$，$\therefore AB = 2$）

$AC = AB \cdot cos\alpha = 2cos\alpha$.

在$Rt\triangle BFN$中，$BN = \frac{BF}{\sin\alpha} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sin\alpha}$，$FN = \frac{BF}{\tan\alpha} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\tan\alpha}$.

$\therefore y = FE \cdot FN \cdot \sqrt{\frac{1}{BC \cdot BN} + \frac{1}{AE \cdot AC}}$

$$= x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2-2\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= x^2 \cdot \sqrt{\frac{2-2\sqrt{1-x^2}+2+2\sqrt{1-x^2}}{4-4(1-x^2)}}$$

$$= x^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}}$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$= x$.

即$y = x$.

$\because FM \perp AB$，

$\therefore FM$最大值为 F 与 O 重合时，即为 1.

$\therefore 0 < x \leq 1$.

综上，$y = x(0 < x \leq 1)$.

【知识点】勾股定理的逆定理；圆周角定理；切线的判定；锐角三角函数的定义；直角三角形的性质

【解析】【分析】（1）BD是$\odot O$的切线．证明：先根据勾股定理的逆定理得到$\angle ACB = 90°$，进而根据圆周角定理结合题意得到$\angle CAB + \angle ABC = 90°$，从而结合题意得到$\angle ABD = 90°$，再根据切线的判定即可求解；

（2）先根据三角形的面积结合题意即可得到$CD(CD + AC) = AC^2$，进而证明$\angle D = \angle ABC$，再根据锐角三角函数的定义即可得到$tan\angle D = \frac{BC}{CD} = \tan\angle ABC = \frac{AC}{BC}$，进而得到$CD = \frac{BC^2}{AC}$，从而结合题意得到$1 + (\frac{AC}{BC})^2 = (\frac{AC}{BC})^4$，设$(tanD)^2 = m$，进而即可得到$(\frac{AC}{BC})^2 = m$，从而得到 m 的值，然后即可求解；

（3）设$\angle A = \alpha$，先根据题意转化即可得到$\angle A = \angle DBC = \angle N = \alpha$，连接$OM$，根据勾股定理求出 OF，进而得到 FB、AF，再运用解直角三角形的知识结合题意即可得到$EF = AF \cdot tan\alpha = (1 - \sqrt{1-x^2}) \cdot \tan\alpha$，$AE = \frac{AF}{\cos\alpha} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos\alpha}$，$BC = AB \cdot sin\alpha = 2sin\alpha$，$AC = AB \cdot cos\alpha = 2cos\alpha$，

$BN=\frac{BF}{\sin\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sin\alpha}$，$FN=\frac{BF}{\tan\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\tan\alpha}$，进而得到$y=x$，再根据题意得到 x 的取值范围即可求解。

25．（2023·长沙）我们约定：若关于 x 的二次函数$y_1=a_1x^2+b_1x+c_1$与$y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$同时满足$\sqrt{a_2-c_1}+$ （b_2+b_1）^{2} $+|c_2-a_1|=0$，$b_1-b_2{}^{2023}\neq0$，则称函数y_1与函数y_2互为“美美与共”函数．根据该约定，解答下列问题：

（1）若关于 x 的二次函数$y_1=2x^2+kx+3$与$y_2=mx^2+x+n$互为“美美与共”函数，求 k，m，n 的值；

（2）对于任意非零实数 r，s，点$P(r，t)$与点$Q(s，t)(r\neq s)$始终在关于 x 的函数$y_1=x^2+2rx+s$的图像上运动，函数y_1与y_2互为“美美与共”函数．

①求函数y_2的图像的对称轴；

②函数y_2的图像是否经过某两个定点？若经过某两个定点，求出这两个定点的坐标；否则，请说明理由；

（3）在同一平面直角坐标系中，若关于 x 的二次函数$y_1=ax^2+bx+c$与它的“美美与共”函数y_2的图像顶点分别为点 A，点 B，函数y_1的图像与 x 轴交于不同两点 C，D，函数y_2的图像与 x 轴交于不同两点 E，F．当$CD=EF$时，以 A，B，C，D 为顶点的四边形能否为正方形？若能，求出该正方形面积的取值范围；若不请说明理由．

【答案】（1）解：由题意可知：$a_2=c_2$，$a_1=c_2$，$b_1=-b_2\neq0$，

∴$m=3$，$n=2$，$k=-1$．

答：k 的值为-1，m 的值为 3，n 的值为 2．

（2）解：①∵点$P(r，t)$与点$Q(s，t)(r\neq s)$始终在关于 x 的函数$y_1=x^2+2rx+s$的图像上运动，

∴对称轴为$x=\frac{r+s}{2}=-\frac{2r}{2}$，

∴$s=-3r$，

∴$y_2=sx^2-2xx+1$，

∴对称轴为$x=-\frac{-2r}{2s}=\frac{r}{s}=-\frac{1}{3}$．

答：函数y_2的图像的对称轴为$x=-\frac{1}{3}$．

②$y_2=-3rx^2-2rx+1=-(3x^2+2x)r+1$，令$3x^2+2x=0$，解得$x_1=0$，$x_2=-\frac{2}{3}$，

∴过定点$(0，1)$，$(-\frac{2}{3}，1)$．

答：函数 y_2 的图像过定点(0，1)，$(-\frac{2}{3}$，1)．

（3）解：由题意可知$y_1=ax^2+bx+c$，$y_2=cx^2-bx+a$，

∴$A(-\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a})$，$B(\frac{b}{2c}$，$\frac{4ac-b^2}{4c})$，

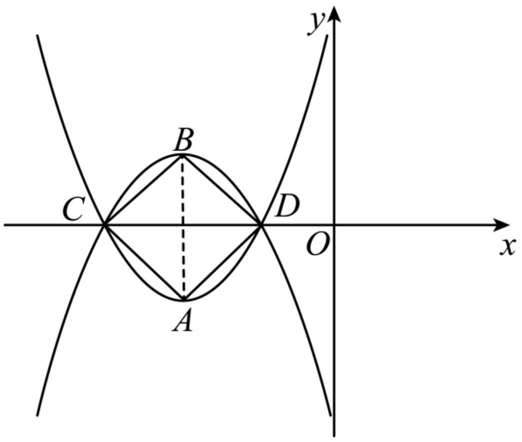
∴$CD=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$，　$EF=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{1-1}$，

∵$CD=EF$且$b^2-4ac>0$，

∴$|a|=|c|$；

①若$a=-c$，则$y_1=ax^2+bx-a$，$y_2=-ax^2-bx+a$，

要使以 A，B，C，D 为顶点的四边形能构成正方形，



则△CAD，△CBD为等腰直角三角形，

∴$CD=2|y_A|$，

∴$\frac{\sqrt{b^2+4a^2}}{|a|}=2\cdot|\frac{-4a^2-b^2}{4a}|$，

∴$2\sqrt{b^2+4a^2}=b^2+4a^2$，

∴$b^2+4a^2=4$，

∴$S_{正}=\frac{1}{2}CD^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2+4a^2}{a^2}=\frac{2}{a^2}$，

∵$b^2=4-4a^2>0$，

∴$0<a^2<1$，

∴$S_{正}>2$；

②若$a=c$，则 A、B 关于 y 轴对称，以 A，B，C，D 为顶点的四边形不能构成正方形，

综上，以 A，B，C，D 为顶点的四边形能构成正方形，此时$S>2$．

【知识点】二次函数图象与坐标轴的交点问题；正方形的性质；偶次幂的非负性；算数平方根的非负性；绝对值的非负性；二次函数 y=ax^2+bx+c 的图象；二次函数 y=ax^2+bx+c 的性质

【解析】【分析】（1）先根据非负性即可得到$a_2 = c_2$，$a_1 = c_2$，$b_1 = -b_2 \neq 0$，进而结合题意即可求解；

（2）①先根据点$P(r，t)$与点$Q(s，t)(r \neq s)$始终在关于 x 的函数$y_1 = x^2 + 2rx + s$的图像上运动结合题意即可得到对称轴为$x = \frac{r+s}{2} = -\frac{2r}{2}$，进而结合题意进行化简即可求解；

②先根据题意得到$y_2 = -(3x^2 + 2x)r + 1$，进而令$3x^2 + 2x = 0$即可求解；

（3）先根据题意得到$A(-\frac{b}{2a}，\frac{4ac-b^2}{4a})$，$B(\frac{b}{2c}，\frac{4ac-b^2}{4c})$，进而得到$CD = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$，$EF = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{1-1}$，再二次函数与坐标轴的交点即可得到$|a| = |c|$；然后分类讨论：①若$a = -c$，则$y_1 = ax^2 + bx - a$，$y_2 = -ax^2 - bx + a$，要使以 A，B，C，D 为顶点的四边形能构成正方形，则$\triangle CAD$，$\triangle CBD$为等腰直角三角形，在根据正方形的性质和等腰直角三角形的性质结合题意即可得到$S_{正} > 2$；②若$a = c$，则 A、B 关于 y 轴对称，以 A，B，C，D 为顶点的四边形不能构成正方形，最后总结即可求解。