

# 逻辑与推理

主讲：刘夏雷、郭春乐、王亚星

南开大学计算机学院

<https://mmcheng.net/xliu/>

致谢：本课件主要内容来自浙江大学吴飞教授、  
南开大学程明明教授

# 重要提示

- 我们计划采用浙大的在线平台及算力（<https://mo.zju.edu.cn/>）进行课程实验，我们已经给大家注册了账号。



前四周为大家安排了Python基础学习课程，两周自学，两周实训学习。大家尽可能多学习基础知识，对后续**实训题目**帮助很大。

# 实训题目：知其意，悟其理，守其则，践其行

逻辑推理

■ 斑马问题（5分）

搜索求解

■ 黑白棋（Mini AlphaGo）（5分）

线性回归

■ 垃圾短信识别（5分）

统计建模

■ 特征人脸（5分）

深度学习

■ 口罩佩戴检测（10分）

强化学习

■ 深度Q函数学习（10分）

# 课程信息

## • 教师

- 程明明 [cmm@nankai.edu.cn](mailto:cmm@nankai.edu.cn)
- 刘夏雷 [xialei@nankai.edu.cn](mailto:xialei@nankai.edu.cn)
- 郭春乐 [guochunle@nankai.edu.cn](mailto:guochunle@nankai.edu.cn)
- 王亚星 [yaxing@nankai.edu.cn](mailto:yaxing@nankai.edu.cn)

## • 助教

• 地点：B402，实验楼A315、A303

• 时间：1-17周讲授，3-17周实训

• 教材：《人工智能导论：模型与方法》，高等教育出版社

• 作业：课上随堂测试考核(10%)、研讨内容(10%)、实验内容考核(40%)和期末考试(40%)

高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



# 课程回顾

- 二十世纪初涌现的可计算思想的提出推动了原始递归函数、 $\lambda$ -演算和图灵机等“计算载体”的出现，由于图灵机以机械方式进行“计算”，因此成为了现代计算机理论模型，宣示着自动计算时代的到来，也成为人工智能的“机器载体”。

人工智能概述



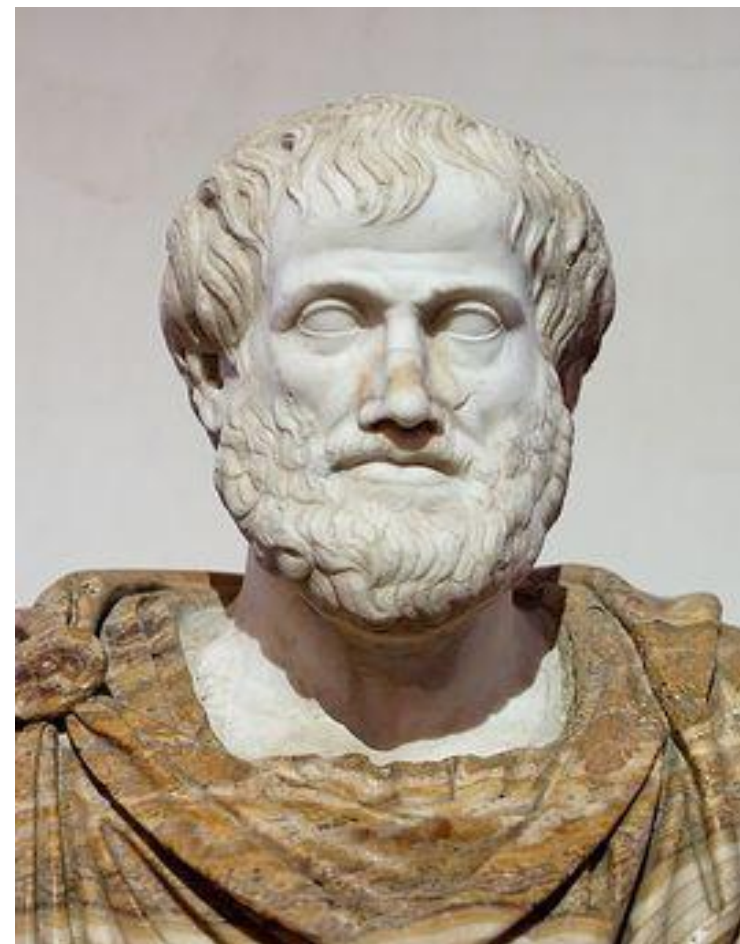
1.1 可计算思想起源与发展  
1.2 人工智能的发展简史  
1.3 人工智能研究的基本内容

# 提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

# 逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 逻辑是探索、阐述和确立有效推理原则的学科，提出了演绎推理中“三段论”方法的古希腊学者亚里士多德被誉为“逻辑学之父”。一般而言，逻辑是用数学方法来研究关于推理和证明等问题的研究。



亚里士多德  
(公元前384-322)



# 逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 墨子被认为是东方逻辑学的奠基人。墨子提出了名（概念）、辞（判断）、说（推理）三种基本思维形式和由故（根据）、理（理由）、类（事物之类）三物构成的逻辑推理。
- 墨子也提出了一些几何思想，如“平，同高也（两平行线或两平行平面间距离处处相等）”、“圆，一中同长也”。



墨子

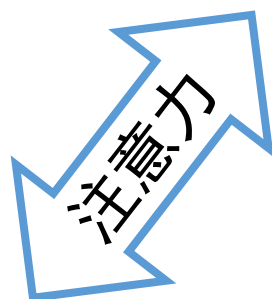
公元前468年？—前376年



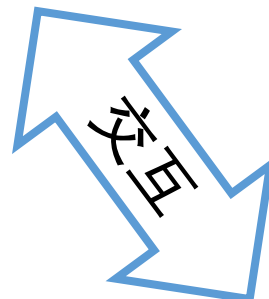
# 逻辑与推理是基于知识的操作

- 人脑对知识的加工与处理与记忆息息相关。
  - 记忆就是对信息的保存和再现能力。

**工作记忆**  
(直觉、顿悟、因果等推理)  
持续时间: < 30 sec

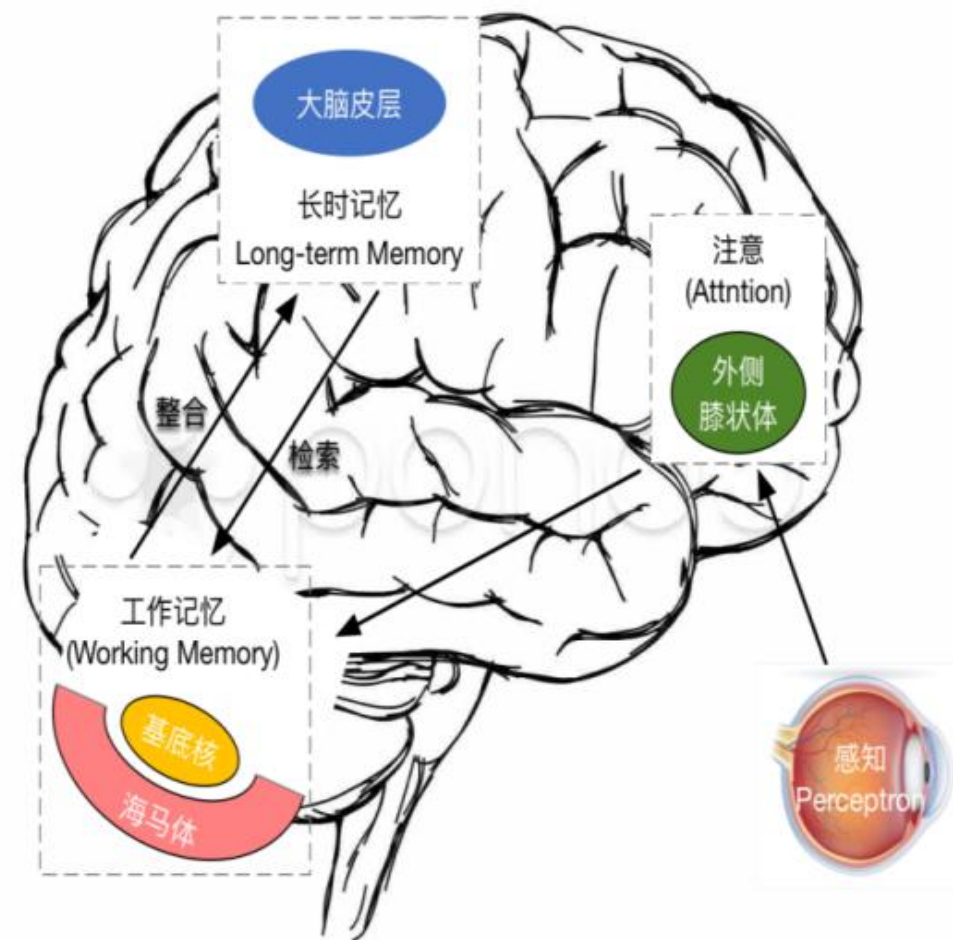


**瞬时记忆**  
(多通道感知)  
持续时间: < 5 sec



**长期记忆**  
(先验、知识等)  
持续时间: 1sec-lifelong

推理→  
画外之意  
弦外之音



# 逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 人类思维活动一个重要功能是逻辑推理，即通过演绎和归纳等手段对现有观测现象进行分析，得出判断。在人工智能发展初期，脱胎于逻辑推理的符号主义人工智能(symbolic AI)是人工智能研究的一种主流学派。
- 符号主义人工智能方法基于如下假设：可通过逻辑方法对符号及其关系进行计算，实现逻辑推理，辨析符号所描述内容是否正确。

# 逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 在符号主义人工智能中，所有概念均可通过人类可理解的“符号”及符号之间的关系来表示。
  - 例如：如果使用符号A来表示对象概念、IsCar ( ) 来表示某个对象是否为“汽车”，那么IsCar(A)表示“A是一辆轿车”这样的概念。
  - 注意IsCar(A)由对象A和IsCar ( ) 两部分所构成。
  - 如果A是轿车，则IsCar(A)为正确描述、否则为错误描述。

# 命题逻辑 (Propositional Logic)

- 命题逻辑是应用一套形式化规则对以符号表示的描述性陈述进行推理的系统。
- 在命题逻辑中，一个或真或假的描述性陈述被称为原子命题，对原子命题的内部结构不做任何解析。
  - 任何一个命题或为真、或为假
- 若干原子命题可通过逻辑运算符来构成复合命题。

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

下面五个陈述，那个是“假命题”

A 北京是中国的首都

B 13能被6整除

C  $x < 8$

D 存在最大的素数

E  $m^2 \geq 0$  且  $m \in \mathbb{R}$

提交

# 命题逻辑

- 可通过命题联结词对已有命题进行组合，得到新命题。
  - 这些通过命题联结词(connectives)得到的命题被称为复合命题(compound proposition)。



# 命题逻辑

- 可通过命题联结词对已有命题进行组合，得到新命题。
  - 假设存在命题 $p$  和 $q$ ，下面介绍五种主要的命题联结词：

命题连接符号	表示形式	意义
与(and)	$p \wedge q$	命题合取(conjunction), 即 “ $p$ 且 $q$ ”
或(or)	$p \vee q$	命题析取(disjunction), 即 “ $p$ 或 $q$ ”
非 (not)	$\neg p$	命题否定(negation), 即 “非 $p$ ”
条件(conditional)	$p \rightarrow q$	命题蕴含(implication), 即 “如果 $p$ 则 $q$ ”
双向条件 (bi-conditional)	$p \leftrightarrow q$	命题双向蕴含(bi-implication), 即 “ $p$ 当且仅当 $q$ ”

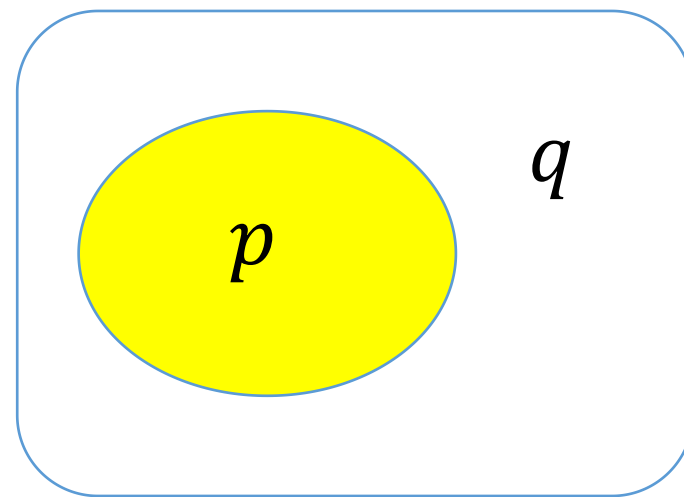
# 命题逻辑

- 通过真值表来计算复合命题的真假。

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
False	False					
False	True					
True	False					
True	True					

# 命题逻辑

- “条件” 命题联结词中前提为假时命题真假取值
  - “如果 $p$  那么 $q$  , ( $p \rightarrow q$ )”定义的是一种蕴涵关系(即充分条件), 也就是命题 $q$  包含着命题 $p$  ( $p$  是 $q$  的子集)
  - $p$  不成立相当于 $p$  是一个空集, 空集可被其他所有集合所包含, 因此当 $p$  不成立时, “如果 $p$  那么 $q$  ” 永远为真。



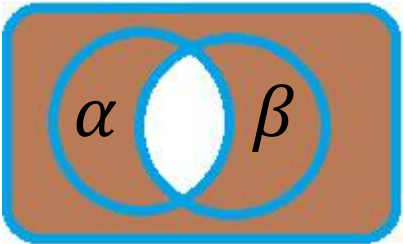
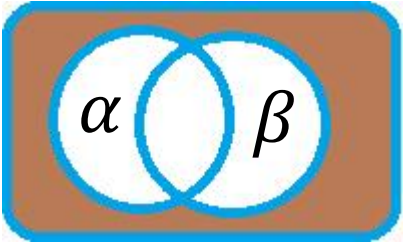
# 命题逻辑

## • 逻辑等价的例子

$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ ( $\wedge$ 的交互律)
$\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ ( $\vee$ 的交互律)
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ ( $\wedge$ 的结合律)
$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ ( $\vee$ 的结合律)
$\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$ (双重否定)
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (逆否命题)

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ ( $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律)
$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ ( $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律)
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (蕴涵消除)
$(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ (双向消除)
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (De Morgan)
$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (De Morgan)

# 命题逻辑：若干逻辑等价命题的解释

$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ (逆否命题)	秋天天气变凉 $\rightarrow$ 大雁南飞越冬 $\equiv$ 大雁没有南飞越冬 $\rightarrow$ 秋天天气没有变凉
$(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (蕴涵消除)	$\alpha$ 为假、则命题恒为真； $\alpha$ 为真、则 $\beta$ 须为真
$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (De Morgan)	
$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (De Morgan)	

# 命题逻辑中的推理规则

假言推理 (Modus Ponens)	$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$
与消解 (And-Elimination)	$\frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}{\alpha_i (1 \leq i \leq n)}$
与导入 (And-Introduction)	$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}$



# 命题逻辑中的推理规则

双重否定 (Double-Negation Elimination)	$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$
单项消解或单项归结 (Unit Resolution)	$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha}$
消解或归结 (Resolution)	$\frac{\frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma} \quad \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_m, \neg\beta}{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_{k-1} \vee \alpha_{k+1} \vee \dots \vee \alpha_m} (\alpha_k = \beta)$

# 应用归结法进行证明 (2)

1	$\alpha \vee \beta$
2	$\neg\alpha \vee \beta$
3	$\alpha \vee \neg\beta$
4	$\neg\alpha \vee \neg\beta$

证明如上命题集  
是不可满足的

5	$\beta$	1和2进行归结
6	$\neg\beta$	3和4进行归结
从该命题集中同时推出命题 $\beta$ 和命题 $\neg\beta$ ，因此原命题集是 不可满足的		

# 应用归结法进行证明 (3)

1	$\alpha \vee \gamma$
2	$\neg\beta \vee \gamma$
3	$\neg\gamma \vee \alpha$
4	$\neg\alpha \vee \beta$
5	$\neg\alpha \vee \neg\gamma$

证明如上命题集是不可满足的

6	$\alpha$	1和3进行归结
7	$\beta$	4和6进行归结
8	$\gamma$	2和7进行归结
9	$\neg\alpha$	5和8进行归结
从该命题集合中可同时推出 $\alpha$ 和 $\neg\alpha$ 两个命题，因此原命题集合是不可满足的		

# 应用归结法进行证明 (1)

①	$\alpha \vee \beta$
②	$\alpha \rightarrow \gamma$
③	$\beta \rightarrow \gamma$

已知如上命题成立，  
请证明命题 $\gamma$ 是成立的

1	$\alpha \vee \beta$	已知
2	$\neg \alpha \vee \gamma$	②进行蕴涵消除
3	$\neg \beta \vee \gamma$	③进行蕴涵消除
4	$\neg \gamma$	假设命题 $\gamma$ 不成立
5	$\beta \vee \gamma$	1和2进行归结
6	$\neg \beta$	3和4进行归结
7	$\gamma$	5和6进行归结
8	假设不成立，命题 $\gamma$ 成立	

# 命题范式

- 有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式
- 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式
- 析取范式与合取范式统称为范式 (normal form)
- ◆假设 $\alpha_i$ 为简单的合取式, 则 $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_k$ 为析取范式
  - 例如:  $(\neg \alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee \alpha_3, \neg \alpha_1 \vee \alpha_3 \vee \alpha_2$  等
- ◆假设 $\alpha_i$ 为简单的析取式, 则 $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k$ 为合取范式
  - 例如:  $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge \neg \alpha_3, \neg \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge (\neg \alpha_2 \vee \alpha_4)$  等

# 命题范式

- 一个析取范式是不成立的，当且仅当它的每个简单合取式都不成立。
- 一个合取范式是成立的，当且仅当它的每个简单析取式都是成立的。
- 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式
  - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的



# 命题范式

- 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式
  - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的
- 问题：求  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg\gamma$  的析取范式与合取范式

$$\begin{aligned}& \neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg\gamma \\ \Leftrightarrow & \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\gamma \\ \Leftrightarrow & (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\gamma \text{ (析取范式)} \\ \Leftrightarrow & (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma) \text{ (合取范式)}\end{aligned}$$

# 提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

# 从命题逻辑到谓词逻辑

- 命题逻辑的局限性：在命题逻辑中，每个陈述句是最基本的单位(即原子命题)，无法对原子命题进行分解。
  - 因此在命题逻辑中，不能表达局部与整体、一般与个别的关系。
- 例如，对于苏格拉底论断，虽知其正确的，但无法通过命题逻辑来进行推理判断：
  - $\alpha$ ：所有的人总是要死的
  - $\beta$ ：苏格拉底是人
  - $\gamma$ ：所以苏格拉底是要死的

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ （不是命题逻辑的有效推理）

无法在命题逻辑基础上完成这样的推导

# 从命题逻辑到谓词逻辑

- $\alpha$  : 大象是哺乳动物

个体的性质（是）、  
个体和个体之间的关系（最大）

- $\beta$  : 大象是一种最大的哺乳动物

- 解决思路:

- 不同原子命题蕴含个体、群体和关系等内在丰富语义，命题逻辑无法表现内在丰富语义。因此，需要分析原子命题，分离其主语（个体或群体）和谓语（关系）

需要引入更加强大的逻辑表示方法，这就是谓词逻辑

# 谓词逻辑

- 在谓词逻辑中，将原子命题进一步细化，分解出个体、谓词和量词，来表达个体与总体的内在联系和数量关系，这就是谓词逻辑研究内容。
- 谓词逻辑中三个核心概念：
  - 个体、谓词（predicate）和量词（quantifier）

# 谓词逻辑：谓词与个体

- $P(x)$  表示：  $x < x^2$
- $P$ 是谓词，  $x$ 是个体词，  $x$ 被称为变量。  $x$ 的具体取值叫个体常项。
  - 比如，  $P(0.1)$  和  $P(0.02)$ 使得谓词为假。 个体的取值范围为个体域。
- 一般用大写字母  $P, Q, R$ 等来表示谓词。
  - 上述  $P(x)$ 描述了是否存在一个数，这个数小于自身平方这种关系。
- 谓词中可以有若干个个体变量，如  $father(x, y)$  表示  $x$ 是  $y$ 父亲。
- $P(x)$ 是一元谓词（包含一个个体），  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  被称为  $n$ 元谓词（包含若干个个体）。



# 谓词逻辑：量词

- 全称量词(universal quantifier,  $\forall$ )

- 全称量词用符号 $\forall$ 表示，表示一切的、凡是、所有的、每一个等。 $\forall x$ 表示定义域中的所有个体， $\forall xP(x)$ 表示定义域中的所有个体具有性质 $P$

- 存在量词(existential quantifier,  $\exists$ )

- 存在量词用符号 $\exists$ 表示，表示存在、有一个、某些等。 $\exists x$ 表示定义域中存在一个或若干个个体， $\exists xP(x)$ 表示定义域中存在一个个体或若干个个体具有性质 $P$

- 全称量词和存在量词统称为量词。

# 谓词逻辑：量词

## • 全称量词

- 谓词 $P(x)$ ： $x$  能够制造工具。 $\forall x P(x)$ 表示定义域中的所有个体能够制造工具。 $P(\text{小王})$ 表示小王能够制造工具。

## • 存在量词

- 谓词 $P(x)$ ： $x$  能够制造工具。 $\exists x P(x)$ 表示定义域中的存在某个/某些个体能够制造工具。 $P(\text{小王})$ 表示小王能够制造工具（该命题或者为真、或者为假）。

# 谓词逻辑：量词

- 全称量词与存在量词之间的组合

- $\forall x \neg P(x) \equiv \neg \exists x P(x)$

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$

- $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

# 谓词逻辑：函数与谓词的区别

- 函词中个体变元用个体常量（来自定义域）代入后结果仍是个体（值域）
  - 如定义函数  $f(x) = x + 10$ ，则  $f(2) = 12$
- 谓词中个体变元用个体常量带入后就变成了命题
  - 如  $car(x)$  这个谓词中  $x$  用吉普车代替，则  $car(\text{吉普车})$  是命题。
- 函数是从定义域到值域的映射；
- 谓词是从定义域到  $\{True, False\}$  的映射

# 谓词逻辑：谓词演算的合式公式

- 命题常项、命题变项、原子谓词（不存在任何量词与联结词）是合式公式。
- 如果 $A$ 和 $B$ 是合式公式，那么 $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \leftrightarrow B$ 都是合式公式
- 如果 $A$ 是合式公式， $x$ 是个体变元，则 $\exists x A(x)$  和  $\forall x A(x)$ 也是合式公式
- 有限次地使用上述规则求得公式是合式公式

# 若干谓词逻辑的推理规则

- 全称量词消去:  $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$ 
  - Universal Instantiation, UI
- 全称量词引入:  $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$ 
  - Universal Generalization, UG
- 存在量词消去:  $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$ 
  - Existential Instantiation, EI
- 存在量词引入:  $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$ 
  - Existential Generalization, EG

# 谓词逻辑的推理例子

已知：

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

试证明：  $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

# 谓词逻辑的推理例子

已知：

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

试证明：  $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

证明过程：

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- $P(x) \rightarrow Q(x)$  (消去全称量词)
- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
- $Q(x) \rightarrow R(x)$  (消去全称量词)
- $P(x) \rightarrow R(x)$  (假言三段论)
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$  (引入 $x$ )



# 谓词逻辑的推理例子

已知：

1.  $(\forall x)(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$

2.  $(\exists x)(F(x) \wedge P(x))$

试证明：  $(\exists x) (P(x) \wedge H(x))$

# 谓词逻辑的推理例子

已知：

1.  $(\forall x)(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$

2.  $(\exists x)(F(x) \wedge P(x))$

试证明：  $(\exists x) (P(x) \wedge H(x))$

证明过程：

3.  $F(a) \wedge P(a)$  (2的EI)

4.  $F(a) \rightarrow (G(a) \wedge H(a))$  (1的UI)

5.  $F(a)$  (由3知)

6.  $G(a) \wedge H(a)$  (4和5的假言推理)

7.  $P(a)$  (由3知)

8.  $H(a)$  (由6知)

9.  $P(a) \wedge H(a)$  (7和8的合取)

10.  $(\exists x) (P(x) \wedge H(x))$  (9的EG)

# 自然语言的形式化

- 每一个奇数均存在一个大于它的奇数
  - $\text{odd}(x)$ :  $x$  是奇数
  - $\text{Great}(x, y)$ :  $x$  大于  $y$
  - $(\forall x) \left( \text{odd}(x) \rightarrow (\exists y) (\text{odd}(y) \wedge \text{Great}(y, x)) \right)$

# 自然语言的形式化

- 前提： 1) 每驾飞机或者停在地面或者飞在天空； 2) 并非每驾飞机都飞在天空
- 结论： 有些飞机停在地面
- 形式化：  $plane(x)$ :  $x$ 是飞机；  $in\_ground(x)$ :  $x$ 停在地面；  
 $on\_fly(x)$ :  $x$ 飞在天空
- 已知：  $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in\_ground(x) \vee on\_fly(x))$ ,  
 $(\neg \forall x)(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$
- 请证明：  $(\exists x)(plane(x) \wedge in\_ground(x))$

# 自然语言的形式化

1.  $(\neg \forall x)(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$

2.  $(\exists x)\neg(plane(x) \rightarrow on\_fly(x))$

3.  $(\exists x)\neg(\neg plane(x) \vee on\_fly(x))$

4.  $(\exists x)(plane(x) \wedge \neg on\_fly(x))$

5.  $plane(a) \wedge \neg on\_fly(a)$

6.  $plane(a)$

7.  $\neg on\_fly(a)$

8.  $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in\_ground(x) \vee on\_fly(x))$

9.  $plane(a) \rightarrow in\_ground(a) \vee on\_fly(a)$

10.  $in\_ground(a) \vee on\_fly(a)$

11.  $in\_ground(a)$  (7, 10消解)

12.  $plane(a) \wedge in\_ground(a)$

13.  $(\exists x)(plane(x) \wedge in\_ground(x))$

# 例题一

用谓词逻辑构造并证明下述推理的有效性：

**每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车，有的人不喜欢骑自行车；因而有的人不喜欢步行。**

解：取人为全总个体域：设 $P(x)$ 表示 $x$ 喜欢步行； $Q(x)$ 表示 $x$ 喜欢坐汽车； $R(x)$ 表示 $x$ 喜欢骑自行车即证，

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$$

# 例题一

用谓词逻辑构造并证明下述推理的有效性：

**每个喜欢步行的人都不喜欢坐汽车；每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车，有的人不喜欢骑自行车；因而有的人不喜欢步行。**

解：取人为全总个体域：设 $P(x)$ 表示 $x$ 喜欢步行； $Q(x)$ 表示 $x$ 喜欢坐汽车； $R(x)$ 表示 $x$ 喜欢骑自行车即证，

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x(Q(x) \vee R(x)), \exists x \neg R(x) \Rightarrow \exists x \neg P(x)$$

①	$\exists x \neg R(x)$	已知项	⑥	$\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	已知项
②	$\neg R(c)$	①ES	⑦	$P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	⑥US
③	$\forall x(Q(x) \vee R(x))$	已知项	⑧	$Q(c) \rightarrow \neg P(c)$	⑦E
④	$(Q(c) \vee R(c))$	③US	⑨	$\neg P(c)$	⑤⑧I
⑤	$Q(c)$	②④I	⑩	$\exists x \neg P(x)$	⑨EG

# 例题二

证明下列推断的正确性：

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物；
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物；
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

设个体域是全总个体域， $P(x)$ :  $x$ 是哺乳动物， $Q(x)$ :  $x$ 是脊椎动物， $R(x)$ :  $x$ 是胎生动物。

已知：

1.  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
2.  $(\neg \forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

试证明： $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$



# 例题二

证明下列推断的正确性：

1. 所有的哺乳动物都是脊椎动物；
2. 并非所有的哺乳动物都是胎生动物；
3. 所以有些脊椎动物不是胎生的。

设个体域是全总个体域， $P(x)$ :  $x$ 是哺乳动物， $Q(x)$ :  $x$ 是脊椎动物， $R(x)$ :  $x$ 是胎生动物。

已知：

1.  $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
2.  $(\neg \forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

试证明： $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$

证明过程：

3.  $(\exists x) \neg(\neg P(x) \vee R(x))$  (2的E)
4.  $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$  (3的EI)
5.  $P(a) \wedge \neg R(a)$  (4的E)
6.  $P(a)$  (由5知)
7.  $\neg R(a)$  (由5知)
8.  $P(a) \rightarrow Q(a)$  (1的UI)
9.  $Q(a)$  (6和8的假言推理)
10.  $Q(a) \wedge \neg R(a)$  (7和9的合取)
11.  $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$  (10的EG)

# 逻辑推理与大模型CoT (Chain-of-Thought, 思维链)

- 而随着参数量的飞升，以 Transformer 为基础架构的大规模语言模型以 “Chat” 的方式逐渐向人们展现出了它的概念理解与概念推理的能力。
- 推理，一般指根据几个已知的前提推导得出新的结论的过程。区别于理解，推理一般是一个“多步骤”的过程，推理的过程可以形成非常必要的“中间概念”，这些中间概念将辅助复杂问题的求解。
- 2022 年 Google 论文《Chain-of-Thought Prompting Elicits Reasoning in Large Language Models》中首次提出，通过让大模型逐步参与将一个复杂问题分解为一步一步的子问题并依次进行求解的过程可以显著提升大模型的性能。而这些推理的中间步骤就被称为思维链（Chain of Thought）。

# 逻辑推理与大模型CoT (Chain-of-Thought, 思维链)

## 标准 Prompting

### 模型输入

问：罗杰有 5 个网球。他又买了两盒网球，每盒有 3 个网球。  
他现在有多少网球？

答：答案是11

问：食堂有 23 个苹果，如果他们用掉 20 个后又买了6个。  
他们现在有多少个苹果？

### 模型输出

答：答案是27



知乎 @绝密伏击

图片来源：<https://zhuanlan.zhihu.com/p/670907685>

# 逻辑推理与大模型CoT (Chain-of-Thought, 思维链)

## CoT Prompting

### 模型输入

问：罗杰有 5 个网球。他又买了两盒网球，每盒有 3 个网球。他现在有多少网球？

答：罗杰一开始有 5 个网球，2 盒 3 个网球，一共就是  $2 * 3 = 6$  个网球。 $5 + 6 = 11$ 。答案是 11。

问：食堂有 23 个苹果，如果他们吃掉 20 个后又买了6个。他们现在有多少个苹果？

### 模型输出

答：食堂原来有 23 个苹果，他们用掉 20 个，所以还有  $23 - 20 = 3$  个。他们又买了6个，所以现在有  $6 + 3 = 9$  个。  
答案是9



知乎 @绝密伏击

图片来源: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/670907685>

# 逻辑推理（符号AI）思维链（CoT）

## 符号AI与思维链的对比分析

逻辑与推理（符号AI）与思维链（Chain of Thoughts, CoT）是人工智能领域中两种不同的推理范式，既有区别又有联系。以下是二者的详细对比分析：

### 一、核心区别

维度	符号AI（逻辑与推理）	思维链（Chain of Thoughts）
方法论	基于显式规则和形式逻辑（如命题逻辑、谓词逻辑）进行推理，依赖人工预定义的符号系统。	通过生成自然语言的分步推理过程模拟人类思考，依赖数据驱动的语言模型。
技术实现	确定性推理（如专家系统、知识图谱、推理引擎）。	概率性生成（基于大规模预训练语言模型的序列生成）。
可解释性	高度可解释，推理过程透明（“白盒”）。	部分可解释，但依赖模型的内部参数（“灰盒”）。
灵活性	严格依赖规则，难以处理模糊性和不确定性。	适应性强，可处理开放域问题和模糊表达。
知识来源	人工编码的知识库（如规则库、本体库）。	从训练数据中隐式学习知识（如互联网文本）。
典型应用	专家系统（如医疗诊断）、数学定理证明。	复杂问答、数学解题、多步骤推理任务（如GPT-4）。

# 逻辑推理（符号AI）思维链（CoT）

## 二、核心联系

### 1. 目标一致

两者都旨在通过分步骤的推理过程解决问题，追求逻辑连贯性和结果的合理性。

### 2. 结构相似性

思维链的“分步推导”形式借鉴了符号AI的推理结构（如分解问题→应用规则→得出结论）。

### 3. 互补性

- **符号AI的短板**：依赖人工规则，难以处理开放域问题（如自然语言歧义）。
- **思维链的优势**：利用语言模型的泛化能力，弥补符号AI的局限性。
- **结合案例**：Neuro-Symbolic AI（神经符号系统）将符号推理与神经网络结合，例如用符号规则约束生成过程。

### 4. 可解释性追求

思维链试图通过显式的中间步骤（如“Let me think step by step”）提升模型输出的可解释性，这与符号AI的透明性目标一致。

# 逻辑推理（符号AI）思维链（CoT）

## 三、典型场景对比

### 案例1：数学解题

- **符号AI**：通过预定义的数学规则（如代数运算）逐步推导答案。

```
prolog
```

[Copy](#)

```
solve(X + 5 = 12) :- X is 12 - 5. % 直接应用减法规则
```

- **思维链**：生成自然语言描述的中间步骤：  
“首先，将方程两边减去5，得到 $X = 12 - 5$ ，因此 $X = 7$ 。”

### 案例2：医疗诊断

- **符号AI**：基于症状与疾病的规则库进行推理（如“发烧+咳嗽→可能为流感”）。
- **思维链**：生成假设并验证（如“患者发烧，可能由感染引起，需检查白细胞计数.....”）。



# 逻辑推理（符号AI）思维链（CoT）

## 四、未来趋势

### 1. 融合方向

神经符号系统（Neuro-Symbolic AI）将符号规则嵌入语言模型，提升推理的准确性和可控性。  
（例如：用符号逻辑约束生成的思维链步骤）

### 2. 思维链的进化

- **自洽性优化**：通过验证中间步骤减少错误（如Self-Consistency、Tree of Thoughts）。
- **领域适配**：针对特定领域（如法律、编程）设计结构化思维链模板。

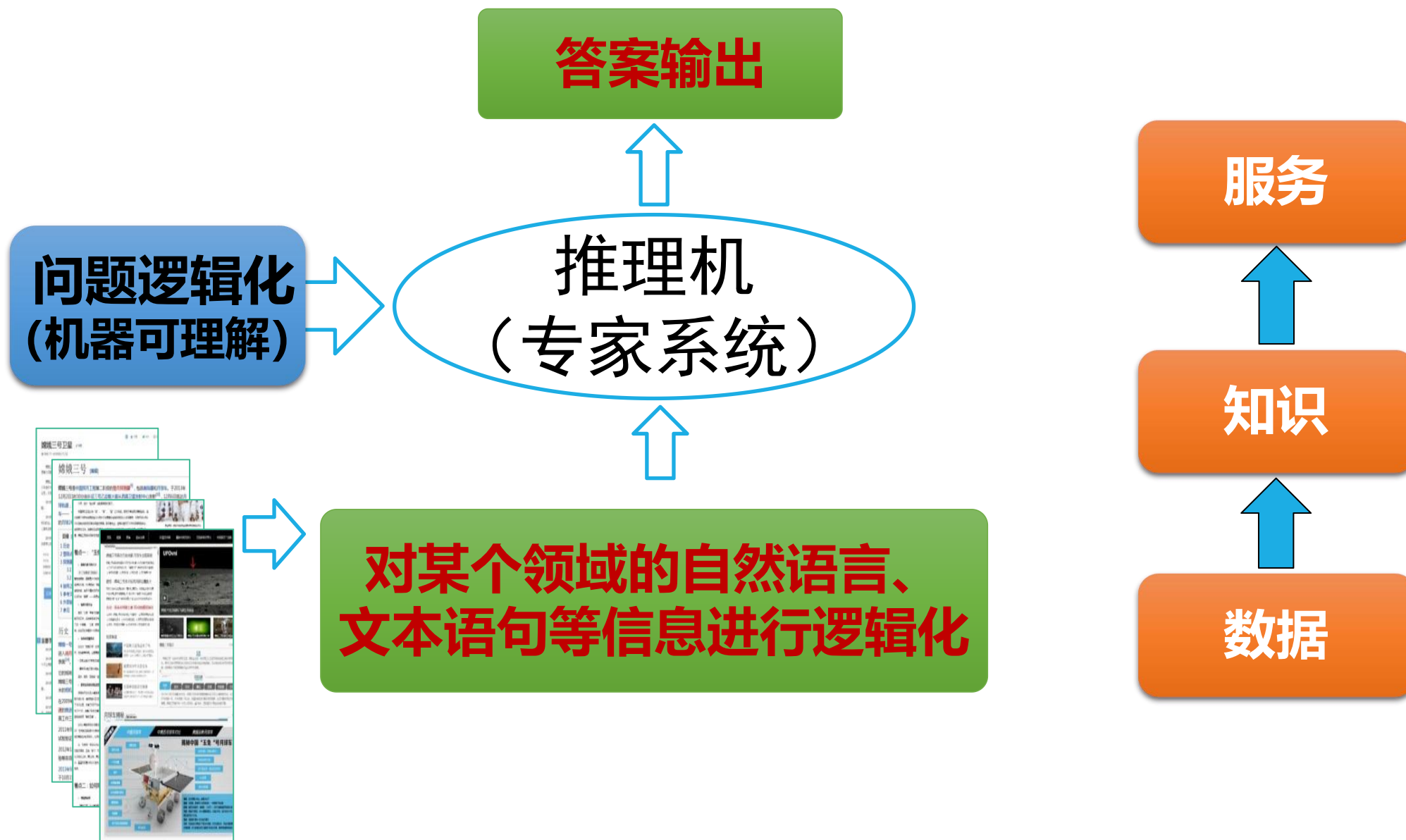
---

## 总结

- **符号AI**是传统规则驱动的“硬编码”推理，**思维链**是数据驱动的“软生成”推理。
- 二者在可解释性和灵活性上形成互补，结合后可能突破当前AI的推理瓶颈。
- 思维链可视为符号AI在深度学习时代的“自然语言实现”，但其可靠性仍依赖模型训练质量和领域适配。



# 专家系统的构成



# 谢谢!