

高等数学题型总结



2019-11-18

中山大学航空航天学院 易鹏 整理

[**第一章 函数与极限** 1](#_Toc24972165)

[**1.1 利用定义证明极限** 1](#_Toc24972166)

[1.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限 1](#_Toc24972167)

[1.1.2 自变量趋于无穷大时函数的极限 1](#_Toc24972168)

[1.1.3 无穷小与无穷大 1](#_Toc24972169)

[1.1.4 单侧极限 2](#_Toc24972170)

[1.1.5 利用定义求函数的极限的解题方法 2](#_Toc24972171)

[1.1.6 证明函数的极限不存在的方法 4](#_Toc24972172)

[**1.2 利用极限运算法则和两个准则求极限** 5](#_Toc24972173)

[1.2.1 极限运算法则 5](#_Toc24972174)

[1.2.2 极限运算准则 6](#_Toc24972175)

[1.2.3 例题 6](#_Toc24972176)

[**1.3 利用等价无穷小求极限** 7](#_Toc24972177)

[1.3.1 无穷小的分类 7](#_Toc24972178)

[1.3.2 常见等价无穷小 8](#_Toc24972179)

[1.3.3 等价无穷小求极限的本质 9](#_Toc24972180)

[1.3.4 例题 10](#_Toc24972181)

[**1.4 函数连续性** 13](#_Toc24972182)

[1.4.1 函数连续性的定义 13](#_Toc24972183)

[1.4.2 函数的间断点 14](#_Toc24972184)

[1.4.3 连续函数的运算 15](#_Toc24972185)

[1.4.4 连续函数的性质 16](#_Toc24972186)

[**1.5 补充题型** 17](#_Toc24972187)

[1.5.1 求递归数列的极限 17](#_Toc24972188)

[1.5.2 根据极限存在求参数 19](#_Toc24972189)

[1.5.3 分数型 20](#_Toc24972190)

[1.5.4 已知一个极限式求另一极限式 22](#_Toc24972191)

[**第二章 导数与微分** 23](#_Toc24972192)

[**2.1 导数的定义** 23](#_Toc24972193)

[2.1.1 某点导数的基本定义 23](#_Toc24972194)

[2.1.2 导函数与单侧导数 24](#_Toc24972195)

[**2.2 利用基本求导法则与导数公式求函数的导数** 25](#_Toc24972196)

[2.2.1 几个补充的函数 25](#_Toc24972197)

[2.2.2 基本函数的求导公式 25](#_Toc24972198)

[2.2.3 函数的求导法则 25](#_Toc24972199)

[2.2.4 反函数的求导法则 25](#_Toc24972200)

[2.2.5 复合函数的求导法则 26](#_Toc24972201)

[**2.3 函数的微分** 26](#_Toc24972202)

[2.3.1 微分的定义 26](#_Toc24972203)

[2.3.2 微分的几何意义 27](#_Toc24972204)

[2.3.3 基本初等函数的微分公式 27](#_Toc24972205)

[2.3.4 微分运算法则 27](#_Toc24972206)

[**2.4 隐函数的导数** 28](#_Toc24972207)

[2.4.1 隐函数与显函数的概念 28](#_Toc24972208)

[2.4.2 隐函数的导数 28](#_Toc24972209)

[**2.5 由参数方程所确定的函数的导数** 30](#_Toc24972210)

[2.5.1 参数方程所确定的函数的定义 30](#_Toc24972211)

[2.5.2 参数方程所确定的函数的导数 30](#_Toc24972212)

[**2.6 高阶导数与高阶微分** 31](#_Toc24972213)

[2.6.1 高阶导数的定义 31](#_Toc24972214)

[2.6.2 一般高阶导数的求法 31](#_Toc24972215)

[2.6.3 函数基本运算的高阶导数 32](#_Toc24972216)

[**2.7 微分中值定理** 33](#_Toc24972217)

[2.7.1 罗尔定理 33](#_Toc24972218)

[**第三章 不定积分** 34](#_Toc24972219)

[**3.1 不定积分的基本概念** 34](#_Toc24972220)

[**3.2 不定积分的性质** 34](#_Toc24972221)

[**3.3 积分表** 35](#_Toc24972222)

[3.3.1 基本积分表 35](#_Toc24972223)

[3.3.2 扩展积分表 35](#_Toc24972224)

[**3.4 不定积分的运算法则** 37](#_Toc24972225)

[3.4.1 第一类换元法 37](#_Toc24972226)

[3.4.2 第二类换元法 38](#_Toc24972227)

[3.4.3 分部积分法 39](#_Toc24972228)

[**第四章 定积分** 40](#_Toc24972229)

[**4.1 定积分的基本概念** 40](#_Toc24972230)

[4.1.1 曲边梯形的面积 40](#_Toc24972231)

[4.1.2 定积分的定义 40](#_Toc24972232)

[4.1.3 定积分的几何意义 42](#_Toc24972233)

[**4.2 定积分的运算法则** 42](#_Toc24972234)

[4.2.1 定上下限定积分的性质 42](#_Toc24972235)

[4.2.2 变上限定积分函数的性质 45](#_Toc24972236)

[4.2.3 牛顿(Newton)-莱布尼茨(Leibniz)公式 46](#_Toc24972237)

[**4.3 定积分的运用** 46](#_Toc24972238)

[4.3.1 曲线弧长的计算 46](#_Toc24972239)

[4.3.2 弧微分公式 47](#_Toc24972240)

[4.3.3 平面图形面积的计算 48](#_Toc24972241)

[4.3.4 旋转体体积的计算 49](#_Toc24972242)

[**附章 补充公式及基本化简方法** 50](#_Toc24972243)

[**F.1 三角函数公式** 50](#_Toc24972244)

[F.1.1 和差化积 50](#_Toc24972245)

[F.1.2 积化和差 51](#_Toc24972246)

[F.1.3 降幂公式(升幂公式) 51](#_Toc24972247)

[F.1.4 万能公式 51](#_Toc24972248)

[F.1.5 其他公式 51](#_Toc24972249)

[F.1.6 双曲函数公式 52](#_Toc24972250)

[**F.2 基本公式** 52](#_Toc24972251)

[**F.3 有理化** 53](#_Toc24972252)

[**F.4 常见不等式** 53](#_Toc24972253)

**第一章 函数与极限**

**1.1 利用定义证明极限**

1.1.1 自变量趋于有限值时函数的极限

**定义1.1**  设函数在点的某一去心邻域[[1]](#footnote-1)\*内有定义.如果存在常数,对于任意给定的正数(不论它多么小),总存在正数使得当满足不等式时,对应的函数值都满足不等式

那么常数就叫做函数当时的极限,记作



1.1.2 自变量趋于无穷大时函数的极限

**定义1.2**  设函数当大于某一正数时有定义.如果存在常数,对于任意给定的正数(不论它多么小),总存在正数使得当满足不等式时,对应的函数值都满足不等式

那么常数就叫做函数当时的极限,记作

1.1.3 无穷小与无穷大

**定义 1.3** 如果函数当时的极限为,那么称函数为当时的无穷小.

特别地,以为极限的数列称为时的无穷小.记为

**定义1.4** 设函数在的某一去心邻域内有定义(或趋于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数(不论它多么大),总存在正数(或正数),只要适合不等式(或),对应函数值总满足不等式

那么称函数是当时的无穷大.记为

**注意** 无穷小属于极限存在的情况,而无穷大属于极限不存在的情况.

1.1.4 单侧极限

在的定义中,把改为,那么就叫做函数当时的左极限,

记作

在的定义中,把改为,那么就叫做函数当时的右极限,

记作

**定理** 1.1存在的充分必要条件是存在且相等.(判断极限是否存在的方法之一)

1.1.5 利用定义求函数的极限的解题方法

Ⅰ.可以直接求得与的关系

任意一个满足,都能找到一个正数使或,这就说明了与有个对应关系,即

这个关于的函数可以是任意的,所以我们要利用极限的定义来证明极限时,只需找到与的对应关系,这时,我们可以先利用这个条件,然后构造出的形式即可.(对于求数列的极限时换成即可)

**例** 1.1证明下列函数极限.

Ⅱ.不能直接求得与的关系

方法一:放缩法

这个时候我们可以将进行适当的放大,使得与的关系容易求得,一般的放缩方法有:

(1) 将分母恒大于零的部分(可以含)删去;

(2) 将分子恒小于零的部分删去(可以含);

(3) 将幂函数的底数部分进行放缩.

**例** 1.2证明

方法二:先设后求再取值法

放缩不是唯一的方法,我们还可以先设后求再取最小值.

具体步骤如下:

(1) 先化简式子,且含项,这个时候可以用该方法;

(2) 设的值为 (可以含,也可以是常数);

(3) 解出的范围,对非进行放缩,将式子放大,同时使得非转换为常量;

(4) 反解出;

(5) 取.

这就证完了.

当然通常放缩法和先设后求再取值法会结合用,这样就可以解决大部分题目.

但是在后面的证明过程中,一般简单的函数极限可以直接用,所以一般情况下不会用定义证明极限.

**例** 1.3证明

1.1.6 证明函数的极限不存在的方法

**定理** 1.2 设函数在点的一个空心邻域内有定义,并且.假若是一串在该空心邻域内取值的序列,且

则有

这个定理为我们提供了一种**证明函数极限不存在的办法**:对于一个定义在点的某空心邻域内的函数,如果能找到两串序列与它们都在的该空心邻域内取值,且当时都以为极限,而极限与都存在但不相等,则在时不可能有极限.

**例** 1.4 证明:函数在时没有极限.

这时由于且

因此,函数在时没有极限.

**1.2 利用极限运算法则和两个准则求极限**

1.2.1 极限运算法则

**定理** 1.3两个无穷小的和是无穷小 推论1 有限个无穷小的和是无穷小

**定理** 1.5如果,(这些函数都必须存在极限)那么

**推论** 如果存在,而为常数,那么. (求函数极限的时候可以直接将常数提出极限外)

**证**

**推论** 如果存在,为正整数,那么.

**证**

**定理** 1.6 如果,而,则

**证**  令,则

1.2.2 极限运算准则

**准则 1 单调有界数列极限一定存在**

(1) 若(为正整数),且,则存在,且;

(2) 若(为正整数),且,则存在,且.

**准则 2 夹逼定理**

设,若则

1.2.3 例题

**例** 1.4证明:

故.

**证** 当时,有

因为由夹逼定理,得

**例** 1.6设常数,任意自然数,证明:

**证** 令,则,则

其中均为非0常数.则

又因为,由夹逼定理,得

**1.3 利用等价无穷小求极限**

1.3.1 无穷小的分类

注意 与的区别

(i) 指的是无穷小,设是某一变化过程中的无穷小,也就是说当趋于某一值时,但趋于另一值时,不一定趋于零,且也不一定为0. 例如:但是

(ii) 当指的是实数,一定为0.即趋于任何值,极限均为零,记作且与取不取极限无关.这种情况一般出现在三角函数中.

1.3.2 常见等价无穷小

以下等价无穷小均为这一变化过程,而且可以用大部分的任意函数替换.

下面先讲讲等价无穷小求极限的本质.

1.3.3 等价无穷小求极限的本质

下面给出两个例题.

**主要错因** 在运用等价无穷小的时候没有考虑极限运算法则成立的条件.

**主要错因** 对极限概念的理解不清晰,不仔细,没有严格判断等价无穷小的定义式是否满足极限的定义就求极限.

**解析** 实际上,该错误解答的完整版本应该为:

但是,极限

这样的话,在点的任何一个去心邻域中都有无穷多个点没有定义,所以不存在一个去心邻域满足该极限式,故极限不存在. 【判断是否能找到满足的去心邻域】

这里再次强调一下与的区别: 分母为的时候并不是指无穷小量,而是真正意义上的

由不等式得

1.3.4 例题

在下面的例题中,为了方便,省略了含有等价无穷小本质的式子.但是建议读者在实际做题的过程中还是要写完整,方便利用定义检查式子的合理性.

**总结** 以上是利用两种等价无穷小的解法,下面对这两种等价无穷小的用法归类.(这两个极限选一个用即可).

若一个极限表达式有下列的形式(或者经过换元、取对数等方法变成这种形式),则很有可能用到这两种极限

其中存在.

解法一 变形为:

而此时是容易求得的.

解法二 变形为:

而此时也是容易求得的.

下面给出一个较难看出错误的例题.

**主要错因** 在运用等价无穷小的时候没有考虑极限运算法则成立的条件.

[注:上面求极限用了两个等价无穷小:]

我们总结一下**利用等价无穷小求极限的方法**:

1. 判断并构造等价无穷小的类型(7种);

2. 利用等价无穷小求极限的本质列出计算式;

3. 判断等价无穷小的极限式中能否找到满足定义域的去心邻域使得极限存在:

(i) 若存在,则利用等价无穷小解题;

(ii) 若不存在,则用其它方法求解(如利用函数定义、夹逼准则等).

4. 检验计算的每一步是否都符合极限运算法则的前提条件.

**注意**  1.以上等价无穷小都只在的情况下才成立,趋于其它值时不成立.

2.只有等价无穷小的定义式存在极限的前提下,即在函数的定义域内能找到一个完整的去心邻域,才可以用任意函数替换.若等价无穷小的定义式都不存在极限,又谈何等价无穷小.

下面给出常见的一些不可以用等价无穷小替换的函数.(均为的变化过程,为了方便理解,我们用代表以下无穷小不等价)

3.在运用等价无穷小计算极限的时候要特别要注意在替换的过程中只有符合极限的运算法则,才可以进行替换(通常极限的运算法则不明显,需要仔细计算), **例**和**例**已经给出了两个详细的例子.

**1.4 函数连续性**

1.4.1 函数连续性的定义

1. 函数在某点的连续

**定义** 1.6 设函数在点的某一邻域内有定义,如果

那么就称函数在点处连续.

**定义** 1.7 设函数在点的某一邻域内有定义,如果

那么就称函数在点处连续.

即在点处连续 当时,有.

2. 左连续与右连续的定义

**定义** 1.8 如果存在且等于即那么就称函数在点左连续.

**定义** 1.9 如果存在且等于即那么就称函数在点右连续.

**函数在某点连续的充要条件是在该点的左极限和右极限都存在且都等于函数该点处的函数值.或者说函数在该点既左连续又右连续.(证明函数在某点处是否连续的方法)**

3. 函数在某个区间的连续

**定义** 1.10 在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.如果区间包括端点,那么函数在右端点是指右端点的左连续,在左端点是指左端点的右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的线(可能是直线,也可能是曲线).

1.4.2 函数的间断点

1. 间断点的定义

设函数在点的某一邻域内有定义.在此前提条件下,如果函数有下列三种情况之一:

(1) 在处没有定义； (2) 虽在处有定义,但不存在；

(3) 虽在处有定义,且存在,但.

那么就称函数在点处不连续,而点称为函数的不连续点或间断点.

2. 间断点的分类

如果是函数的间断点,但左极限和右极限都存在,那么点就称为函数的第一类间断点.

不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点.

如果我们将间断点细分,可以得到下表.

**无穷间断点** 若函数是函数的间断点,且,那么我们称点是函数的无穷间断点.

**振荡间断点** 若函数是函数的间断点,且当时,函数值在多个值之间变动无穷多次,那么我们称点是函数的振荡间断点.

特别要注意的是,若点是函数的振荡间断点,那么在函数在函数处的任意去心邻域都无确定的值.

进一步说,如果函数的导函数是,点是导函数的振荡间端点,那么在的任意去心邻域中函数的导数都不存在.

**可去间断点** 若函数是函数的间断点,且在点处没有定义,而,那么我们称点是函数的可去间断点.

**跳跃间断点** 若函数是函数的间断点,且在点处有定义,而,那么我们称点是函数的跳跃间断点.

**注意** 可去间断点的定义是左右极限相等即可,与函数在该点处是否有定义无关.关于这个很容易犯错,下面给出一个例子详细说明.

如图,

所以,即是函数的可去间断点.

**总结 判断间断点的类型**

1.4.3 连续函数的运算

1. 连续函数的加减乘除

2. 反函数与复合函数的连续性

**定理** 1.8 如果函数在一个区间上连续且单调,那么它的反函数也在对应的区间连续且单调与原函数相同.

**定理** 1.9 设函数且函数在处连续,则

注:可以不在点处有连续,但是必须有极限.

**定理** 1.10 设函数在处连续,且,函数在处连续,则复合函数也在处连续.

3. 初等函数的连续性

**定理** 1.11 一切初等函数在其定义域内都是连续函数.

1.4.4 连续函数的性质

1. 有界性与最大值最小值定理

**定义** 1.11 对于在区间上有定义的函数,如果有,使得任意一个都有

那么我们称是函数在区间上的最大值(最小值).

**定理** 1.12 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界且一定能取到它的最大值和最小值.

**注意** 如果函数在开区间内连续,或者在闭区间上有间断点,那么函数不一定有界且不一定能取到它的最大值或最小值.特别地,如果函数单调,且在开区间内连续,那么这个函数一定无界且无最大值和最小值.

2. 零点定理

**定理** 1.13 设函数在闭区间上连续,且与异号(即),则在开区间内至少有一点,使

3. 介值定理

**定理** 1.14 设函数在闭区间上连续,且在这区间的取不同的函数值及,则对于与之间的任意一个数,在开区间内至少有一点,使得

*y*

*x*

*C*

*A*

*B*

**证** 设,则在闭区间上连续,且与异号.

根据零点定理,开区间内至少有一点使得

又,因此由上式即得

该定理的几何意义是:连续曲线弧与水平直线至少相交于一点(如上图).

**推论** 在闭区间上连续的函数的值域为闭区间,其中与依次为在上的最小值与最大值.**证** 设而在闭区间(或)上应用介值定理,知可取区间内的一切值,结合,便得上述推论.

**1.5 补充题型**

1.5.1 求递归数列的极限

所以数列是单调递减数列,所以即,即是有界数列.

综上,数列是单调有界数列,由极限存在法则知一定存在.设则时,有

故

**解** 下面用数学归纳法证明

(i) 当时,,成立. (ii) 设时,成立.

(iii) 当时,,也成立.

所以故数列是有界数列.又

所以数列是单调递增数列,又数列有界,故数列是单调有界数列,由极限存在法则知一定存在.

设则时,有

故

**题型总结**

题目模板 已知,

**第一步 找答案**

做这类题,首先要做的就是先把答案猜出来,具体方法如下:

假设存在,且得到式子,求出的值.(类似)

(i) 若无解,则不存在;

(ii) 若有解,注意判断解的合理性,通常只有一个解,则该解即为的值.

**第二步 证有界**

由上面的极限可以知道,

若数列单调递增,则证;

若数列单调递减,则证

注 可以先不证明数列的单调性,但是要用赋值法先确定数列的单调性,就可以找到证明的方向,就可以容易用数学归纳法证明.

**第三步 证单调**

证单调直接用定义: 【注:在有变号的数列中第二种方法不适用】

(i) 是单调递增数列; (i) 是单调递增数列;

(ii) 是单调递减数列. (ii) 是单调递减数列.

**第四步 求极限**

由于单调有界, 由极限存在法则知一定存在.,求出的值.

判断解的合理性,通常只有一个解,即

注意 能用的前提条件是单调有界,或者说收敛才能用.

1.5.2 根据极限存在求参数

**例** 1.14 求实数使得

存在,并求出该极限.

**解** 由于即分母为无穷小量.要使极限存在,则分子也为无穷小量,即

代入原极限式,令,,,得

所以,当时,

**例** 1.15 求实数使得

存在,并求该极限.

要使极限存在,则要消掉分母,比对系数得:

此时,

1.5.3 分数型

下面直接给出一个定理:

**定理** 1.15

(i) 时,即

(ii) 时,即

(iii) 时,即

通常这种类型还有几种变形,下面给出一个例子.

**评注** 其实看起来解题过程比较复杂,但是其实本质比较简单,弄清楚这种题型的做题方法如下:

1. 观察式子,判断题型是否为分数型;

2. 确定为分数型题型后,判断分数的分母和分子最高的次数的大小;

3. 运用定理运算极限即可.

特别注意的是,有些时候不是很好判断是否为分数型,像上面的例题.这个时候可以观察分子分母是否是高次多项式.如果分子和分母都是高次多项式,那么就可以尝试用分数型的解题方法来尝试解题.

1.5.4 已知一个极限式求另一极限式

由极限四则运算法则,得

**评注** 这是一类知道含的多项式的极限,求的一类题,很巧妙地运用了换元法.

**第二章 导数与微分**

**2.1 导数的定义**

2.1.1 某点导数的基本定义

**定义** 2.1 设函数在点的某一邻域内有定义,当自变量在处取得增量(点仍在该邻域内)时,相应地,因变量取得增量；如果与之比当时的极限存在,那么称函数在点处可导,并称这个极限为函数在点处的导数,记为,即

也可记作

由于在以后的证明中很少用到函数极限定义证明,以下仅给出几道较典型的例题.

在这些例题中有很多运用到了三角公式(可以在附章查阅)和等价无穷小的知识.

**例** 2.1用函数极限定义证明以下函数的导数.

1.

2.

3.

即

4.

即

5.

即

2.1.2 导函数与单侧导数

**定义**2.2 如果函数在开区间内的每点处都可导,那么就称函数在开区间内可导.这时,对于任一,都对应着的一个确定的导数值.这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数的导函数,简称导数.记作

则在处的导数也可表示为

**注意** 是导函数,也就是说是函数,而是在点处的导数或者说是导函数在处的值

**定义**2.3 函数在点处的左导数,右导数分别为

左导数和右导数统称为单侧导数.

函数在点可导的充分必要条件为**左导数和右导数存在且相等**.

如果函数在开区间内可导,且都存在,那么就说在闭区间内可导.

**2.2 利用基本求导法则与导数公式求函数的导数**

2.2.1 几个补充的函数

1. 双曲函数与反双曲函数

2. 三角函数的补充函数

2.2.2 基本函数的求导公式

2.2.3 函数的求导法则

设可导,则

2.2.4 反函数的求导法则

设在区间内单调、可导且,则它的反函数在内也可导,则

2.2.5 复合函数的求导法则

设,且都可导,则复合函数的导数为

**2.3 函数的微分**

2.3.1 微分的定义

**定义** 2.4 设函数在某区间内有定义,及在这区间内,如果函数的增量

可表示为

其中是不依赖于的常数,那么称函数在点是可微的,而叫做函数在点相应于自变量增量的微分,记作,即

函数在点是可微的充分必要条件是函数在点可导,且当在点可微时,其微分一定是

当时,有

从而,当时,与是等价无穷小,于是这是有

即是的主部[[2]](#footnote-2)\*,又由于是的线性函数,所以在的条件下,我们说是的线性主部(当时).于是我们得到以下结论:

在的条件下,以微分近似替代增量时,其误差.

2.3.2 微分的几何意义

如右图,在直角坐标系中,函数的图形是一条曲线对于某一固定的值,曲线上有一个确定点,当自变量有微小增量时,就得到曲线上另点.从图可知

*x*

*y*

*y*

=

*f*

(

*x*

)

*T*

*dy*

*Q*

*P*

*M*

*N*

过点作曲线的切线,它的倾角为,则

即

**微分的几何意义的运用** 对于可微函数而言,当是曲线上的点的纵坐标的增量时,就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量.当很小时,比小得多.因此在点的邻近,我们可以用切线段来近似代替曲线段.在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数,在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段,这在数学上称为非线性函数的局部线性化,这是微分学的基本思想方法之一.这种思想方法在自然科学和工程问题的研究

中是经常采用的.

2.3.3 基本初等函数的微分公式

从函数的微分表达式

可以看出,要计算函数的微分只需要计算函数的导数,再乘以自变量的微分,例如:,其它基本初等函数的微分也类似,故在此不做赘述.(参见基本函数求导公式)

2.3.4 微分运算法则

由函数和差商积的求导法则,可推得相应的微分法则.

与复合函数的求导法则相应的微分法则推导如下:

设及都可导,则复合函数的微分为

由于,所以,复合函数的微分公式也可以写成

由此可见,无论是自变量还是中间变量,微分形式保持不变.这一性质称为微分形式不变性.这性质表示,当变换自变量时,微分形式并不改变.

**注意** 微分形式不变性仅适用于一阶微分,对于二阶及以上的微分并不成立,这个在高阶导数和高阶微分会详细说明.

**2.4 隐函数的导数**

2.4.1 隐函数与显函数的概念

**定义** 2.5 等号左端是因变量的符号,而右端是含有自变量的式子,当自变量取定义域内任一值时,由这式子能确定对应的函数值.用这种方式表达的函数叫做显函数.例:

**定义** 2.6 一般地,如果变量和满足一个方程,在一定条件下,当取某间内的任一值时,相应地总有满足这方程的唯一的值存在,那么就说方程在该区间内确定了一个隐函数.把一个隐函数化成显函数,叫做隐函数的显化. 例:

2.4.2 隐函数的导数

对于任意一个隐函数,对其求导,只需两边同时对求导,即

其中需要注意的是,由于是的因变量,所以在求导的过程中要看成来求导,即

**例** 2.2 求由方程所确定的隐函数的导数.

**解** 我们把方程两边分别对求导数,方程左边求导得:

方程左边求导得:

所以

即

有些时候对于某些复杂的显函数也可以用隐函数求导的方法进行求导,常见的方法就是对数求导法,下面给出两个典型例题.

**例** 2.3 求函数的导数.

**解** 等式两边取对数,得

我们把方程两边分别对求导数,得

**例** 2.4 求函数的导数.

**解** 等式两边取对数,得

我们把方程两边分别对求导数,得

即

**2.5 由参数方程所确定的函数的导数**

2.5.1 参数方程所确定的函数的定义

**定义** 2.7 一般地,若参数方程

确定与的关系,则称此函数关系所表达的函数为由上述参数方程所确定的函数.

2.5.2 参数方程所确定的函数的导数

1. 参数方程的一阶导数

对于一个由下列参数方程所确定的函数

其导数的计算式为

**例** 2.5 已知椭圆的参数方程为

*y*

*x*

*b*

*a*

*O*

曲线在点的切线斜率为

代入点斜式方程,即得椭圆在点处得切线方程

化简得

2. 参数方程的二阶导数

对于一个由下列参数方程所确定的函数

其二阶导数的计算式为

**2.6 高阶导数与高阶微分**

2.6.1 高阶导数的定义

**定义** 2.8 一般地,函数的导数叫做函数的一阶导数.类似地,一阶导数的导数叫做二阶导数,二阶导数的导数是三阶导数……一般地,阶导数的导数叫做阶导数,分别记作

函数具有阶导数,也可以说函数为阶可导.如果函数在点处具有阶导数,那么在点的某一领域内必定有一切低于阶的导数.二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

2.6.2 一般高阶导数的求法

1. 多次连续求导;

2. 找到相邻阶导数的关系(递推关系);

3. 利用递推数列的相关解法推出通式,进而写出高阶导数的通式.

下面给出一个具体例子.

**例** 2.6 求函数的阶导数.

我们就可以观察出一定的规律:每求一次导数,三角函数就相当于加了角度,即

**评注** 对于一般的函数求其阶导数,都是先求其阶导函数,找到其中的规律从而写出通式.常见函数的阶导函数有:

2.6.3 函数基本运算的高阶导数

1. 加减运算函数的阶导数

设函数在点处具有阶导数,那么在点处也具有阶导数,且

2. 乘法运算函数的阶导数

设函数在点处具有阶导数,

以此类推,由数学归纳法可得:

即

上式称为莱布尼茨(Leibniz)公式.我们可以用二项式定理来辅助记忆:

把二项式定理中的次幂换成阶导数(零阶导数为原函数),换成即可.

**2.7 微分中值定理**

微分中值定理是导数应用的理论基础.

2.7.1 罗尔定理

**定理** 2.1 [费马(Fermat)引理] 设函数在点的某邻域内有定义,并且在处可导,如果对任意的,有

**第三章 不定积分**

**3.1 不定积分的基本概念**

**定义** 3.1 如果在区间上,可导函数的导函数为,即对任一都有

或

那么函数就称为(或)在区间上的一个原函数.

例如,,故是的一个原函数.

**原函数存在定理** 如果函数在区间上连续,那么在区间上存在可导函数,使对任一都有

简单地说就是:**连续函数一定有原函数**.(证明详见**定理**4.8的证明)

**注意** 由于常数的导数,故一个函数的原函数有多个,可表示为.

**定义**3.2 在区间上, 函数的带有任意常数项的原函数称为(或)在区间上的不定积分,记作

由此可知,如果是函数在区间上的一个原函数,那么就是的不定积分,即

函数的原函数的图形称为的积分曲线.

**3.2 不定积分的性质**

**定理** 3.1 设函数及的原函数存在,则

**证** 设的原函数为,的原函数为的原函数为即

由于常数相加仍然是常数,即可令则上式成立.

**定理** 3.2 设函数的原函数存在,则

**3.3 积分表**

3.3.1 基本积分表

3.3.2 扩展积分表

注：下列常数部分内容涉及三角函数的变换(参阅附章三角函数公式)以及不定积分的运算法则(参阅3.4).

**证** 证明与18相似,证略.

**证** 由于正负号证法相似,故下面只证正号的情况.

****

证 由于正负号证法相似,故下面只证正号的情况.

**3.4 不定积分的运算法则**

3.4.1 第一类换元法

**定理** 3.3 设的原函数为可导,则有换元公式

定理的应用 本质上是运用公式,进行换元,使得变为后更易求得积分.有些时候为了方便求出积分,在利用这个公式前需要进行对进行构造变换成的形式.下面给出几个例题具体说明.

解析 观察式子,可以发现令,而易知

注意 在普通的积分式中通常有一个隐含条件:,有时候这是构造的关键,就像本题写完整应为:

但因为书写的简洁性与方便性,可以省略的步骤,的更多应用见第二类换元法.

解析 观察式子,注意到根式内含有二次项,根号外含有一次项,故联想

注意 在对变量换元的方法熟悉后,可以不写出换元的过程.

3.4.2 第二类换元法

**定理** 3.4 设的原函数为是单调可导的函数,且存在原函数,则有换元公式

定理的应用 本质上是将原变量换成另外一个变量使得原来不易求的积分式转换成另一个易求的积分式,即先找到这两个变量之间的函数关系,再利用公式进行微分变量的转换,这里要强调的是最后的结果仍然需要用原来的变量来表示,即将变量再转化为原变量,只需将代入即可. 下面给出几个例题具体说明.

解析 观察式子,由基本公式的补充公式(见附章)联想到来化去根式.

注意 对于求含有根号且根号内某两个数具备平方差(和)的关系时的积分,我们通常会进行三角换元从而去根号,然后再运用三角函数的公式进行化简和变形,这就要求我们要熟记并能灵活运用附章中关于三角函数的所有公式.

下面给出一个利用新颖的三角函数公式进行换元的例子.

解析 观察式子,由基本公式的补充公式(见附章)联想到来进行降幂.

3.4.3 分部积分法

设函数及具有连续导数,则两个函数乘积的导数公式为

移项,得

对这个等式两边求不定积分,得

方便起见,我们可以利用进行转换,写成下列形式

这个公式称为分部积分公式.

**第四章 定积分**

**4.1 定积分的基本概念**

4.1.1 曲边梯形的面积

设在区间上非负,连续.由直线及曲线所围成的图形称为曲边梯形,其中曲线弧称为曲边.

下面用元素法[[3]](#footnote-3)\*详细地说明曲边梯形面积的求法.

(1) 分割.用任意一组分点把区间分成长度为的个小区间,相应地把曲边梯形分成个窄曲边梯形,第个窄曲边梯形的面积设为,则

(2) 计算的近似值(利用窄曲边梯形的面积窄边矩形的面积高宽,在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄矩形的变高)

(3) 求和,得的近似值

(4) 求极限,记(的几何意义是所有分得的小区间中长度最大的区间.当时,所有的小区间长度都趋于,这个时候分得的每个区间足够小,上式便不是估计式,而是等式)得

4.1.2 定积分的定义

通过计算曲边梯形的面积,我们可以类比得到定积分的定义.

**定义**4.1 设函数在上有界,在区间中任意插入若干个分点

把区间分成个小区间:

各个小区间的长度依次为:

在每个小区间上任取一点,作函数值与小区间长度的乘积,并求和

记[[4]](#footnote-4)\*,如果时,上式的极限总存在,且与闭区间的分法及点的取法无关,那么称这个极限为函数在区间上的定积分(简称积分),记作

其中函数叫做被积函数,叫做被积表达式,叫做积分变量,叫做积分下限,叫做积分上限,叫做被积区间.

由于积分的定义与极限有关,故我们也可以用语言来表述定积分的定义.

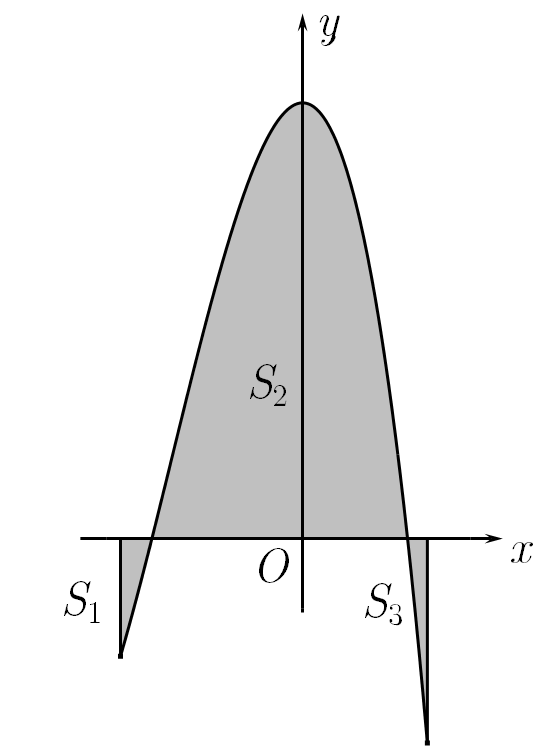
设有常数,如果对于任意给定的正数,总存在一个正数,使得对于区间的任何分法,不论在中怎样选取,只要,总有

**注意** 定积分的值只与被积函数和被积区间有关,而与积分变量的激记法无关.例如:

**补充 积分存在的条件**

**定理**4.1 设函数在上连续,则在上可积.

**定理**4.2 设函数在上有界,且只有有限个间断点,则在上可积.

下面只给出一个不可积的函数:狄利克雷(Dirichlet)函数

这个函数有无穷个间断点,故它是不可积的函数.

4.1.3 定积分的几何意义

**4.2 定积分的运算法则**

4.2.1 定上下限定积分的性质

首先,我们对定积分的定义再补充两个规定:

由上式可知,交换定积分的上下限时,定积分的绝对值不变而符号相反.

**定理**4.3 设与均为常数,则

**定理**4.4 设,则

**证** 因为函数在区间上可积.所以不论把区间怎样分,积分和的极限都是不会变的,因此,在分区时,可以使点永远是个分点.那么,上的积分和等于上的积分和加上上的积分和,即

令,上式两端同时取极限,即得

实际上,由于有了定积分的补充定义,无论的位置如何,上式都成立.

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

**定理**4.5 如果在区间上,那么

**证** 因为,所以,又由于所以

**定理**4.6 如果在区间上那么

**证** 因为由**定理**4.5,得

证毕.

**定理**4.7 设及分别是函数在区间上的最大值及最小值,则

**证** 因为由**定理**4.6得

证毕.

这个定理为我们估计定积分的值提供了一种简单的方法.例如:

**定理**4.7 (积分中值定理) 如果函数在积分区间上连续,那么在区间上至少存在一个点,使得

**证** 设及分别是函数在区间上的最大值及最小值,则由**定理**4.7得

又,由介值定理可知在区间上至少存在一个点,使得

在区间上至少存在一个点,使得

积分中值公式也有其几何解释如下:



在区间上至少存在一个点,使得以区间为底边的,以曲线为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为的一个矩形的面积.

按积分中值公式可得:

称为函数在区间上的平均值.

4.2.2 变上限定积分函数的性质

1. 变上限定积分函数的定义

设函数在区间上连续,并且设为上的一点,那么我们称函数

为变上限定积分函数.由于定积分的值与标记变量无关,为了避免混淆,我们通常记作

2. 变上限定积分函数的重要性质

**定理**4.8 设函数在区间上连续,那么变上限定积分函数

在区间上可导,且导函数为

**证** 由积分中值定理,对于任意都至少存在一点,使得

即

由于任意上式都成立,那么我们不妨取取,即

而

又由于,故

那么在区间上有,考虑左端点和右端点的导数的情形,只需把上述推导过程中的变成即可.

故在区间上都满足.

这个定理说明了:**连续函数的变上限的积分就是该连续函数的一个原函数**,即如果函数在上连续,那么函数

就是函数在上的一个原函数.

4.2.3 牛顿(Newton)-莱布尼茨(Leibniz)公式

**定理**4.9 [微积分基本定理] 如果函数是连续函数在区间上的一个原函数,那么

故.又在区间上连续,所以在区间上恒成立.

不妨取,由定积分的补充定义上下限相同时积分为,那么

这个定理给了我们求定积分一种重要且简单的方法:找到被积函数的原函数,再计算两个端点函数值之差即可.

**4.3 定积分的运用**

4.3.1 曲线弧长的计算

设平面上给定的一条曲线弧.其参数方程为:

当时对应端点,时对应端点.如果函数有连续的导函数.那么这个曲线称为光滑曲线,光滑曲线总是可以计算弧长的.

我们将区间分成份:

那么在曲线弧上也即有相应的点: .记

当区间无限小时,由导数定义：

即

故

其中.令,那么结合定积分的定义,此时每个区间长度都为无穷小,那么

所以, 我们有下列曲线弧长的计算公式:

1. 参数方程所确定的函数

2. 一般函数(即令)

3. 极坐标确定的函数,则,

4.3.2 弧微分公式

在前面我们已经知道弧长的计算公式,设弧长为,则

对上式两边同时对求导,得

我们便得到了弧微分公式:

4.3.3 平面图形面积的计算

1. 直角坐标情形

由定积分定义可知,由曲线及直线与轴所围成的曲边梯形的面积是

当求两个函数所围成部分的面积时,一般有如下做法:

1. 找到函数的交点,并判断交点的区间内哪个函数大.

2. 求积分

对于参数方程所确定的函数,我们直接换元即可,即

2. 极坐标情形

设由曲线及射线围成一个图形(曲面扇形),且在上连续,

同样地,运用先分割求和再取极限的思想,将该区间分成等份,对每个长度为无穷小的小区间,这个时候就可以用扇形面积的计算公式.因此,我们都可以计算出每个小区间的面积:

然后进行求和:

这样我们便得到了极坐标面积公式:

4.3.4 旋转体体积的计算

**附章 补充公式及基本化简方法**

**F.1 三角函数公式**

F.1.1 和差化积

F.1.2 积化和差

F.1.3 降幂公式(升幂公式)

由二倍角公式,得

从而推出以下公式

F.1.4 万能公式

**证** 由二倍角公式,得

F.1.5 其他公式

F.1.6 双曲函数公式

双曲函数有着特别的性质(与三角函数类似).具体如下: [注:以下性质用双曲函数定义可以直接证明,故证略]

**F.2 基本公式**

**注意** 在我们化简运用公式的时候,我们通常会正用而不会或者不记得要逆用.以下给出几个典型的例子:

**补充** 平方差(和)为1的重要公式

对于求含有根号且根号内某两个数具备平方差(和)的关系时的积分,这几个公式通常可以对积分式进行换元,从而达到去根号(化繁为简)的效果.

**F.3 有理化**

有理化分为分子有理化、分母有理化和分子分母同时有理化.

有理化在求极限中是十分常见的化简方法,因为它能将趋于0的减法根式变为不趋于0加法的根式并且能进行约分.以下给出几个例子:

**例** 求下列极限:

**F.4 常见不等式**

综上所述

证略

由二次函数根的分布可知,即

即

1. \* 去心邻域指的是以为中心的连续区间去掉中心后的新区间,记为.特别注意的是,去心邻域仅在中心处没有定义,其它点都有定义. [↑](#footnote-ref-1)
2. \* 设都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,如果,则称是的主部. [↑](#footnote-ref-2)
3. \* 元素法在定积分的应用会详细讲解. [↑](#footnote-ref-3)
4. \* 无特殊说明,在本章节中都表示. [↑](#footnote-ref-4)