

# 航天器姿态动力学与控制

易鹏

中山大学

内部版本号：V1.12.028 (内测版)

2022 年 3 月 24 日



# 目录

符号说明	I
第 1 章 航天器姿态运动学	1
1.1 航天器常用坐标系	1
1.1.1 基本概念	1
1.1.2 地心赤道惯性坐标系	1
1.1.3 地心赤道旋转坐标系	2
1.1.4 轨道坐标系和星体坐标系	2
1.2 姿态参数	2
1.2.1 向量的描述及向量运算的矩阵表示	2
1.2.2 方向余弦矩阵	3
1.2.3 欧拉角	4
1.2.4 欧拉轴角	6
1.2.5 四元数	9
1.2.6 欧拉参数	16
1.2.7 其他类型的姿态参数	20
1.2.8 无穷小角位移的姿态矩阵	21
1.3 姿态运动学方程	21
1.3.1 向量的时间导数	22
1.3.2 方向余弦矩阵的微分方程	22
1.3.3 欧拉角参数下的角速度和微分方程	24
1.3.4 欧拉轴 / 角参数的微分方程及角速度	25
1.3.5 欧拉参数下的角速度和微分方程	27
1.3.6 无穷小角位移运动的角速度	28
第 2 章 航天器姿态动力学	31
2.1 动力学建模方法简述	31
2.2 刚体的姿态动力学建模原理	31
2.2.1 单质点的动量矩定理	31

2.2.2 多质点系统的动量矩定理	33
<b>第 3 章 参考内容</b>	<b>35</b>
3.1 旋转四元数参数的化简	35
3.2 旋转的欧拉轴 / 角参数表达和四元数表达的等价性	37
3.3 向量运算的矩阵表示	39
3.3.1 向量叉乘的矩阵表示	39
3.3.2 叉乘矩阵的坐标变换	40
3.3.3 向量两边乘同一个向量运算的矩阵表示	40
3.4 向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵的关系	41
3.5 欧拉轴角向量恒等式的证明	42
<b>附录</b>	<b>43</b>
a. 参考文献	43
b. 插图目录	43
c. 表格目录	45
d. 索引	49

# 符号说明

$H^O$	质点关于参考点 $O$ 的角动量, 32	$\varphi$	滚转角, 24
$H^O$	质点的视角动量, 32	$q$	四元数, 9
$p$	质点的线动量, 32	$q^*$	四元数 $q$ 的共轭, 12
$T^O$	关于点 $O$ 的力矩, 32	$q^{-1}$	四元数的逆, 12
$\boldsymbol{u}$	三维向量 $\boldsymbol{u}$ , 2		
$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$	向量 $\boldsymbol{u}$ 相对于惯性向量基的时间变化率, 绝对导数, 22		
$\frac{\delta\boldsymbol{u}}{\delta t}$	向量 $\boldsymbol{u}$ 相对于运动向量基 $\boldsymbol{e}_a$ 的时间变化率, 相对导数, 22		
$\lambda$	地理经度, 2		
$\ q\ $	四元数的模长 (范数)		
$\phi$	地理纬度, 2		
$\psi$	偏航角, 24		
$\text{scal}[q]$	四元数 $q$ 的实部标量, 27		
$\text{vect}[q]$	四元数 $q$ 的虚部向量, 27		
$\theta$	俯仰角, 24		
$\underline{E}_i$	$i \times i$ 的单位矩阵, 7		
$\underline{E}_i$	$i \times i$ 的单位矩阵, 8		
$\underline{R}_{ba}$	同一坐标系下向量 $\boldsymbol{a}$ 旋转到向量 $\boldsymbol{b}$ 的旋转矩阵, 7		
$\underline{C}_{ba}$	坐标系 $S_a$ 变换为坐标系 $S_b$ 的方向余弦矩阵 (坐标旋转矩阵), 3		
$\underline{\boldsymbol{e}}$	三维向量基 $\boldsymbol{e}$ , 2		
$\underline{\boldsymbol{u}}$	三维向量 $\boldsymbol{u}$ 的分量矩阵, 用于向量的矩阵运算, 为了将向量和矩阵区别, 后文中的矩阵均加了下划线, 2		



# 第 1 章 航天器姿态运动学

## 1.1 航天器常用坐标系

### 1.1.1 基本概念

#### 定义 1.1 天体坐标系基本概念

**天球** 指一个以地球质心  $M$  为中心，半径  $r$  为任意长的一个假想的球体。其目的是将天体沿观测者视线投影到球面上，以便于研究天体及其相互关系。

**黄道平面** 由于地球绕太阳公转而产生的，即地球公转轨道在天球上的反映称为黄道。它和赤道面相交于春分点和秋分点。

**春分点** 指太阳从难向北在黄赤道上的交点。

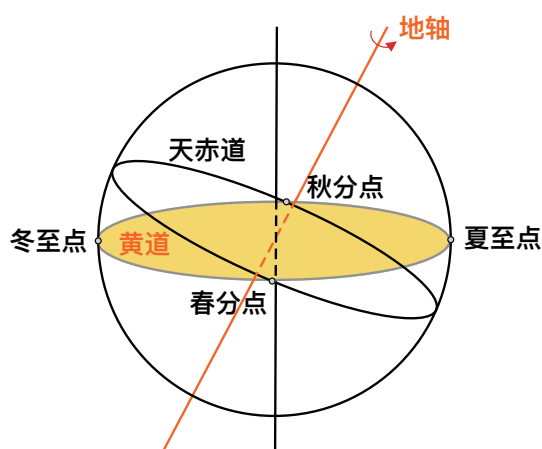


图 1.1: 天球坐标系的基本概念

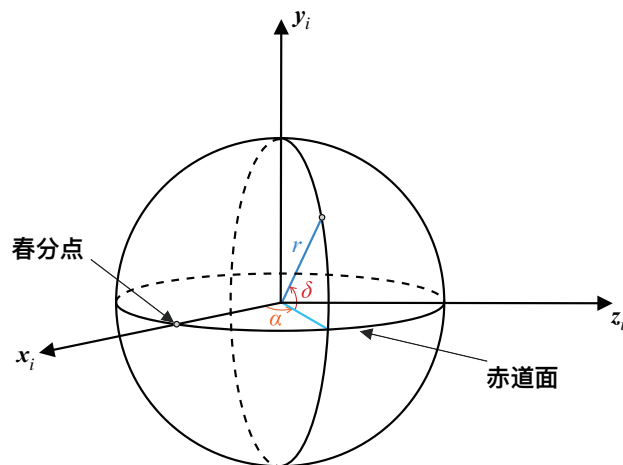


图 1.2: 地心赤道惯性坐标系

### 1.1.2 地心赤道惯性坐标系

#### 定义 1.2 地心赤道惯性坐标系

如图 1.2 所示，**地心第一赤道坐标系**，简称为**惯性坐标系**。 $X$  轴在地球赤道平面内，指向赤道平面与黄道平面的相交线交点（春分点）。 $Z$  轴垂直于赤道平面，与地球自转角速度矢量方向一致。J2000 的地心平赤道、平春分点的地心赤道坐标系。

### 1.1.3 地心赤道旋转坐标系

#### 定义 1.3 地心赤道坐标系

如图 1.3 所示，地心赤道旋转坐标系，也叫地心第四赤道坐标系。 $x$  轴在赤道平面内，指向格林威治子午线， $z$  轴垂直于赤道平面，与地球自转角速度矢量方向一致。 $\lambda$  是地理经度，从格林威治子午线向东度量， $\phi$  是地心纬度。

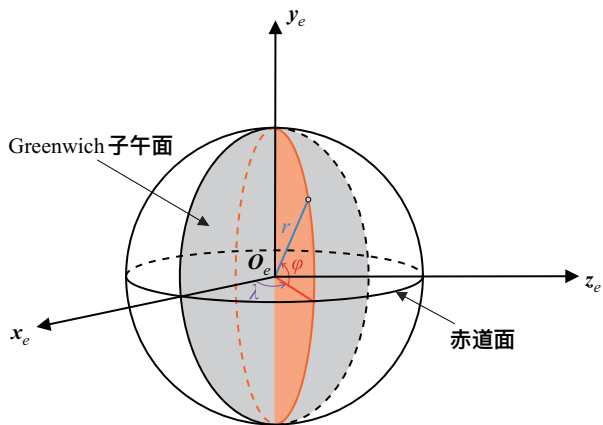


图 1.3: 地心赤道旋转坐标系

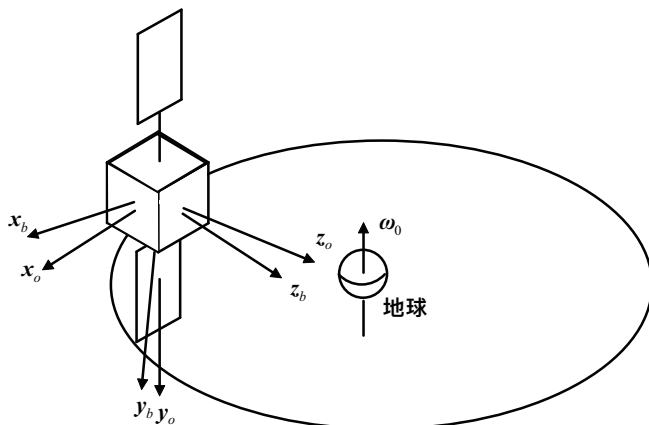


图 1.4: 轨道坐标系和星体坐标系

### 1.1.4 轨道坐标系和星体坐标系

#### 定义 1.4 地心赤道坐标系

**轨道坐标系** 原点在飞行器质心， $z_o$  轴指向地心， $x_o$  轴在轨道面内与  $z_o$  轴垂直，指向速度方向， $y_o$  轴在轨道平面法线方向，与  $x_o$ 、 $z_o$  轴成右手正交坐标系。

**星体坐标系** 原点在质心， $x_b$  轴为滚动轴， $y_b$  轴为俯仰轴， $z_b$  轴为偏航轴。（对地定向航天器）

## 1.2 姿态参数

### 1.2.1 向量的描述及向量运算的矩阵表示

对于任意一个向量  $\underline{u}$ ，都可以表示为某个向量基  $\underline{e} = [i \ j \ k]^T$  的基向量的线性组合，即

$$\underline{u} = u_x \underline{i} + u_y \underline{j} + u_z \underline{k} \quad (1.1)$$

其中， $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  分别称为向量  $\underline{u}$  在基向量上的 3 个分向量，3 个标量系数  $u_x, u_y, u_z$  分别称为向量  $\underline{u}$  在 3 个基向量上的坐标。这 3 个坐标构成一个标量矩阵，称为向量  $\underline{u}$  在基向量  $\underline{e}$  上的坐标阵（或分量矩阵），记为

$$\underline{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T \quad (1.2)$$

那么向量  $\underline{u}$  可以写成矩阵乘积的形式为

$$\underline{u} = \underline{u}^T \underline{e} = \underline{e}^T \underline{u} \quad (1.3)$$



由基向量的正交性, 可以将  $\underline{u}$  的分量矩阵写为

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u} \cdot \underline{i} \\ \underline{u} \cdot \underline{j} \\ \underline{u} \cdot \underline{k} \end{bmatrix} = \underline{u} \cdot \underline{e} = \underline{e} \cdot \underline{u} \quad (1.4)$$

### 1.2.2 方向余弦矩阵

对于坐标系原点重合的两个不同的坐标系  $S_a$  和  $S_b$ , 坐标基分别为  $\underline{e}_a$  和  $\underline{e}_b$ , 对于矢量  $\underline{u}$  在两个坐标系下的分解, 有

$$\underline{u} = \underline{e}_b u_b = \underline{e}_a u_a \quad (1.5)$$

两边同时乘以  $\underline{e}_b$ , 得

$$\underline{e}_b \underline{e}_b u_b = \underline{e}_b \underline{e}_a u_a \Rightarrow u_b = \underline{e}_b \underline{e}_a u_a$$

为此我们定义坐标系  $S_a$  变换为坐标系  $S_b$  的**方向余弦矩阵** (**坐标系旋转矩阵**) 为

$$\underline{C}_{ba} = \underline{e}_b \underline{e}_a = \begin{bmatrix} \underline{i}_b \cdot \underline{e}_a \\ \underline{j}_b \cdot \underline{e}_a \\ \underline{k}_b \cdot \underline{e}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{i}_b \cdot \underline{i}_a & \underline{i}_b \cdot \underline{j}_a & \underline{i}_b \cdot \underline{k}_a \\ \underline{j}_b \cdot \underline{i}_a & \underline{j}_b \cdot \underline{j}_a & \underline{j}_b \cdot \underline{k}_a \\ \underline{k}_b \cdot \underline{i}_a & \underline{k}_b \cdot \underline{j}_a & \underline{k}_b \cdot \underline{k}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

方向余弦矩阵有以下几个特征:

#### 1. 6 个约束方程

##### (1) 模值约束

$$\begin{cases} |\underline{i}_b|^2 = C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 = 1 \\ |\underline{j}_b|^2 = C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 = 1 \\ |\underline{k}_b|^2 = C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 = 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

**证** 由于  $\underline{i}_b, \underline{j}_b, \underline{k}_b$  的模值为 1 (空间绝对), 所以将它们投影到坐标系  $S_a$  后模值仍然为 1, 即

$$\begin{cases} |\underline{i}_b \cdot \underline{e}_a|^2 = |\underline{i}_b|^2 = 1 \\ |\underline{j}_b \cdot \underline{e}_a|^2 = |\underline{j}_b|^2 = 1 \\ |\underline{k}_b \cdot \underline{e}_a|^2 = |\underline{k}_b|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{i}_b|^2 = C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 = 1 \\ |\underline{j}_b|^2 = C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 = 1 \\ |\underline{k}_b|^2 = C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

##### (2) 几何约束

$$\begin{cases} \underline{i}_b \cdot \underline{j}_b = C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23} = 0 \\ \underline{i}_b \cdot \underline{k}_b = C_{11}C_{31} + C_{12}C_{32} + C_{13}C_{33} = 0 \\ \underline{j}_b \cdot \underline{k}_b = C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

**证** 由于  $\underline{i}_b, \underline{j}_b, \underline{k}_b$  两两正交 (空间绝对), 所以将它们投影到坐标系  $S_a$  后仍然满足几何关系, 即

$$\begin{cases} \underline{i}_b \cdot \underline{j}_b = (\underline{i}_b \cdot \underline{e}_a) \cdot (\underline{j}_b \cdot \underline{e}_a) = 0 \\ \underline{i}_b \cdot \underline{k}_b = (\underline{i}_b \cdot \underline{e}_a) \cdot (\underline{k}_b \cdot \underline{e}_a) = 0 \\ \underline{j}_b \cdot \underline{k}_b = (\underline{j}_b \cdot \underline{e}_a) \cdot (\underline{k}_b \cdot \underline{e}_a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{i}_b \cdot \underline{j}_b = C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23} = 0 \\ \underline{i}_b \cdot \underline{k}_b = C_{11}C_{31} + C_{12}C_{32} + C_{13}C_{33} = 0 \\ \underline{j}_b \cdot \underline{k}_b = C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33} = 0 \end{cases}$$

## 2. 坐标变换矩阵是正交矩阵

由于

$$\begin{cases} \underline{e}_b \cdot \underline{e}_b^T = \underline{e}_a \cdot \underline{e}_a^T = \underline{E}_3 \\ \underline{e}_b \cdot \underline{e}_b^T = \underline{C}_{ba} \underline{e}_a \cdot (\underline{C}_{ba} \underline{e}_a)^T = \underline{C}_{ba} \underline{e}_a \underline{e}_a^T \underline{C}_{ba}^T \end{cases} \Rightarrow \underline{E}_3 = \underline{C}_{ba} (\underline{e}_a \underline{e}_a^T) \underline{C}_{ba}^T = \underline{C}_{ba} \underline{C}_{ba}^T$$

所以可以得到

$$\underline{C}_{ba}^{-1} = \underline{C}_{ba}^T \quad (1.9)$$

且有

$$\underline{C}_{ab} = \underline{e}_a \underline{e}_b^T = \underline{e}_a \underline{e}_a^T \underline{C}_{ba}^T = \underline{C}_{ba}^{-1} \quad (1.10)$$

## 3. 坐标变换矩阵的行列式为 1

由于矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积且矩阵的转置的行列式等于矩阵的行列式，所以

$$\det(\underline{C}_{ba}) \det(\underline{C}_{ba}) = [\det(\underline{C}_{ba})]^2 = \det(\underline{C}_{ba} \underline{C}_{ba}) = 1 \Rightarrow \det(\underline{C}_{ba}) = \pm 1 \quad (1.11)$$

而因为

$$\underline{C}_{ba} = \text{adj}(\underline{C}_{ba}) \Rightarrow \underline{C}_{ba}^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{C}_{ba})}{\det(\underline{C}_{ba})} = \frac{\underline{C}_{ba}}{\det(\underline{C}_{ba})} = \frac{\underline{C}_{ba}^{-1}}{\det(\underline{C}_{ba})}$$

因此

$$\det(\underline{C}_{ba}) = +1 \quad (1.12)$$

## 4. 相继运动的坐标变换矩阵

对于坐标系原点重合的三个不同的坐标系  $S_a$ ,  $S_b$  和  $S_c$ , 有

$$\begin{cases} \underline{e}_b \cdot \underline{e}_a = \underline{C}_{ba} \\ \underline{e}_c \cdot \underline{e}_b = \underline{C}_{cb} \\ \underline{e}_c \cdot \underline{e}_a = \underline{C}_{ca} \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_c = \underline{C}_{ca} \underline{e}_a = \underline{C}_{cb} \underline{e}_b = \underline{C}_{cb} \underline{C}_{ba} \underline{e}_a$$

因此

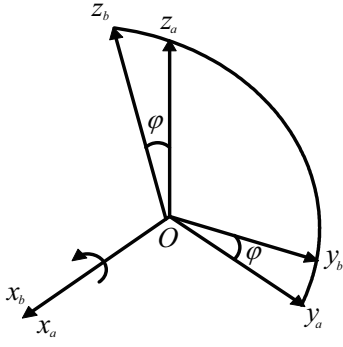
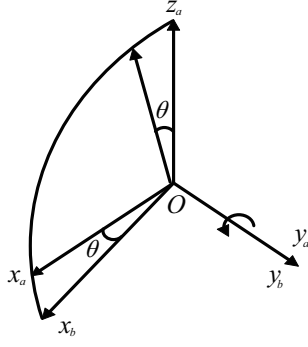
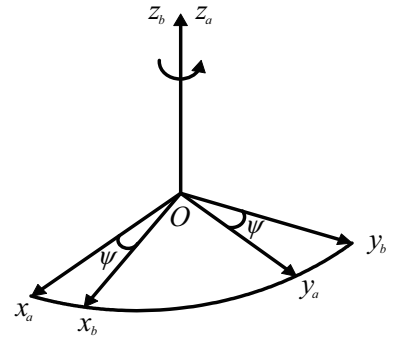
$$\underline{C}_{ca} = \underline{C}_{cb} \underline{C}_{ba} \quad (1.13)$$

### 1.2.3 欧拉角

#### 定义 1.5 基元旋转矩阵

**基元旋转矩阵** 任何一个坐标变换可以看成是绕三个基本轴的旋转，这三个基本轴的坐标变换矩阵为基元旋转矩阵，如图 1.5, 1.6, 1.7 所示，绕各个轴旋转的角度称为**欧拉角**。每个坐标轴对应的基元旋转矩阵为

$$\underline{C}_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \underline{C}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \underline{C}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

图 1.5: 绕  $x$  轴旋转图 1.6: 绕  $y$  轴旋转图 1.7: 绕  $z$  轴旋转

下面给出两种基元旋转矩阵表示的坐标变换。

### 1. ZXZ 旋转顺序

如图 1.8 所示，方向余弦矩阵和 ZXZ 顺序欧拉角的关系为

$$\underline{C}_{ba} = \underline{C}_z(\varphi) \underline{C}_x(\theta) \underline{C}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

通过与方向余弦矩阵的对应项进行对比，可以计算得到

$$\begin{cases} \psi = -\tan^{-1} \left( \frac{C_{31}}{C_{32}} \right) \\ \theta = \cos^{-1} (C_{33}) \\ \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{C_{13}}{C_{23}} \right) \end{cases} \quad (1.16)$$

由公式 (1.16) 可知，若欧拉角  $\theta = 0^\circ$ ，则欧拉转动处于奇异状态，欧拉角  $\psi, \varphi$  不能唯一确定。因此， $\theta$  的取值范围为  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 。

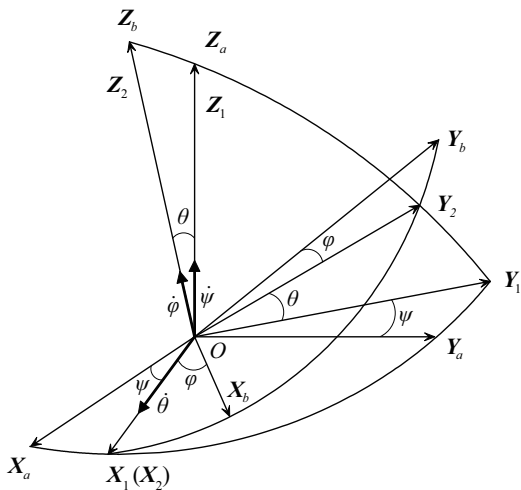


图 1.8: ZXZ 顺序欧拉角旋转

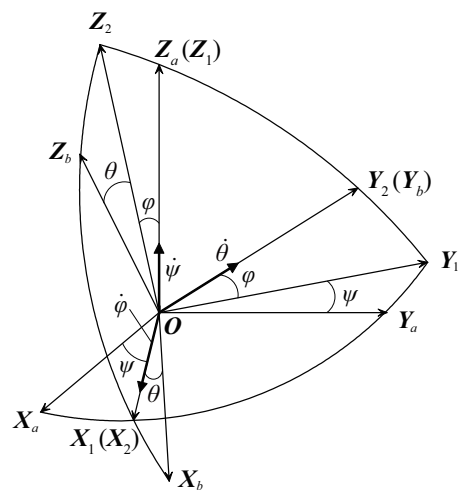


图 1.9: ZXY 顺序欧拉角旋转

## 2. ZXY 旋转顺序

如图 1.9 所示, 方向余弦矩阵和 ZXY 顺序欧拉角的关系

$$\underline{C}_{ba} = \underline{C}_y(\theta)\underline{C}_x(\varphi)\underline{C}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

通过与方向余弦矩阵的对应项进行对比, 可以计算得到

$$\begin{cases} \psi = -\tan^{-1} \left( \frac{C_{21}}{C_{22}} \right) \\ \theta = \sin^{-1} (C_{23}) \\ \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{C_{13}}{C_{33}} \right) \end{cases} \quad (1.18)$$

由公式 (1.18) 可知, 若欧拉角  $\theta = \pm 90^\circ$ , 则欧拉转动处于奇异状态, 欧拉角  $\psi, \varphi$  在同一平面转动, 不能唯一确定。

### 1.2.4 欧拉轴角

#### 定义 1.6 欧拉轴 / 角

坐标系  $S_b$  相对坐标系  $S_a$  的姿态参数可以用单位矢量  $e$  在参考坐标系  $S_a$  的三个分量  $e_x, e_y, e_z$  以及绕此转轴的转角  $\Phi$  这 4 个参数来描述, 称为**欧拉轴 / 角**参数。矢量  $e$  称为**欧拉轴**,  $\Phi$  称为**欧拉转角**。

#### 1. 欧拉轴 / 角求方向余项矩阵

方向余项矩阵  $\underline{C}_{ba}$  可由欧拉轴 / 角参数  $e, \Phi$  得到。

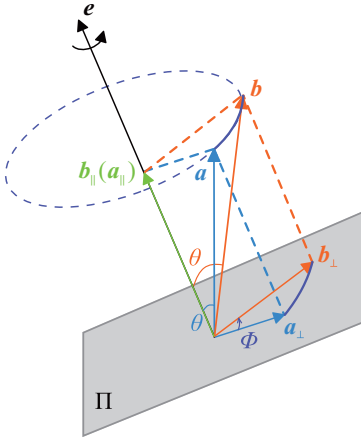


图 1.10: 欧拉轴旋转分解图

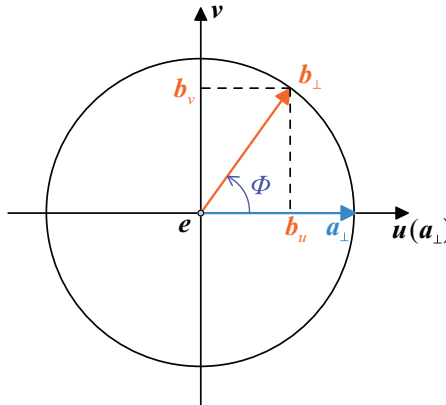


图 1.11: 欧拉轴旋转投影图

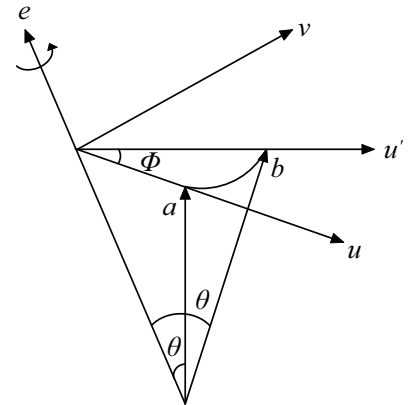


图 1.12: 欧拉轴 / 角的坐标变换图

如图 1.10 所示, 设矢量  $a$  是固定在坐标系  $S_a$  的任意矢量, 矢量  $b$  是固定于坐标系  $S_b$  中的矢量。将矢量  $a$  绕轴  $e$  旋转一个角度  $\Phi$  后得到矢量  $b$ 。首先将矢量  $a$ , 矢量  $b$  沿轴  $e$  方向和垂直于轴  $e$  方向分解, 其平行分量  $a_{||} = b_{||} = e$  相等, 即旋转前后不变, 可以发现旋转仅与垂直分量  $a_{\perp}, b_{\perp}$  有关。

将垂直分量  $a_{\perp}, b_{\perp}$  投影到垂直于轴  $e$  的平面  $\Pi$  上, 如图 1.11 所示。定义单位正交矢量  $u, v$

$$\begin{aligned} u = a_{\perp} &= \frac{e \times a}{|e \times a|} = \frac{1}{a \sin \theta} (e \times a) \\ v = e \times u &= \frac{1}{a \sin \theta} e \times (e \times a) = \frac{1}{a \sin \theta} [a - (e \cdot a)e] \end{aligned}$$

将矢量  $\mathbf{b}_\perp$  分解, 得

$$\mathbf{b}_\perp = \cos \Phi \mathbf{u} + \sin \Phi \mathbf{v} = \cos \Phi \mathbf{a}_\perp + \sin \Phi (\mathbf{a}_\perp \times \mathbf{e})$$

将矢量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  用上面的矢量表示为 (注:  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  模长相等, 即  $a = b$ )

$$\mathbf{a} = a (\cos \theta \mathbf{a}_\parallel + \sin \theta \mathbf{a}_\perp) = a (\cos \theta \mathbf{e} + \sin \theta \mathbf{v}) \quad (1.19)$$

$$\mathbf{b} = b (\cos \theta \mathbf{b}_\parallel + \sin \theta \mathbf{b}_\perp) = a (\cos \theta \mathbf{e} + \sin \theta \mathbf{b}_\perp) \quad (1.20)$$

将  $\mathbf{b}_\perp$  的表达式反代, 可以得到

$$\mathbf{b} = \cos \Phi \mathbf{a} + (1 - \cos \Phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \quad (1.21)$$

为了写成矩阵形式, 我们利用把向量 (在坐标系  $S_a$  的分量) 的计算转换为矩阵的形式<sup>1</sup>, 即

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = [\mathbf{i}_a \quad \mathbf{j}_a \quad \mathbf{k}_a] \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}}, \quad \underline{\mathbf{e}} \times \underline{\mathbf{a}} = [\mathbf{i}_a \quad \mathbf{j}_a \quad \mathbf{k}_a] \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{e}}^\times \underline{\mathbf{a}}$$

将  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  在坐标系  $S_a$  下分解, 得

$$\underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{b}} = \cos \Phi \underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{a}} + (1 - \cos \Phi) \underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}} + \sin \Phi \underline{\mathbf{e}}_a^T \underline{\mathbf{e}}^\times \underline{\mathbf{a}} \quad (1.22)$$

两边同时左乘  $[\underline{\mathbf{e}}_a^T]^{-1}$ , 消去  $\underline{\mathbf{e}}_a^T$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}} &= \cos \Phi \underline{\mathbf{a}} + (1 - \cos \Phi) \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{a}} + \sin \Phi \underline{\mathbf{e}}^\times \underline{\mathbf{a}} \\ &= [\cos \Phi \underline{\mathbf{E}}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T + \sin \Phi \underline{\mathbf{e}}^\times] \underline{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

可以得到

### 定理 1.1 欧拉轴 / 角参数下的向量旋转矩阵

在同一坐标系  $S_a$  下将向量  $\mathbf{a}$  绕轴  $\mathbf{e}$  旋转  $\Phi$  角度得到向量  $\mathbf{b}$ , 它们的关系为

$$\mathbf{b} = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \mathbf{a} \quad (1.24)$$

其中, 向量旋转矩阵定义为

$$\underline{\mathbf{R}}_{ba} = \cos \Phi \underline{\mathbf{E}}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T + \sin \Phi \underline{\mathbf{e}}^\times \quad (1.25)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Phi + e_x^2 (1 - \cos \Phi) & e_x e_y (1 - \cos \Phi) - e_z \sin \Phi & e_x e_z (1 - \cos \Phi) + e_y \sin \Phi \\ e_x e_y (1 - \cos \Phi) + e_z \sin \Phi & \cos \Phi + e_y^2 (1 - \cos \Phi) & e_y e_z (1 - \cos \Phi) - e_x \sin \Phi \\ e_x e_z (1 - \cos \Phi) - e_y \sin \Phi & e_y e_z (1 - \cos \Phi) + e_x \sin \Phi & \cos \Phi + e_z^2 (1 - \cos \Phi) \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

而由向量旋转与坐标系旋转的对应关系, 可以知道向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵 (方向余弦矩阵) 互为转置 (逆), 所以可以得到<sup>2</sup>

<sup>1</sup>关于  $\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T$  和叉乘矩阵  $\underline{\mathbf{e}}^\times$  的说明及向量运算矩阵表示的证明, 详见第 3 章: 3.3 向量运算的矩阵表示, Page 39

<sup>2</sup>证明详见第 3 章: 3.4 向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵的关系, Page 41

### 定理 1.2 欧拉轴 / 角参数下的坐标系旋转矩阵 (方向余弦矩阵)

欧拉轴 / 角参数下的坐标系旋转矩阵 (方向余弦矩阵) 为

$$\begin{aligned}\underline{C}_{ba} &= (\underline{R}_{ba})^T = [\cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T + \sin \Phi \underline{e}^\times]^T \\ &= \cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) (\underline{e} \underline{e}^T)^T + \sin \Phi (\underline{e}^\times)^T \\ &= \cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T - \sin \Phi \underline{e}^\times\end{aligned}\quad (1.27)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Phi + e_x^2 (1 - \cos \Phi) & e_x e_y (1 - \cos \Phi) + e_z \sin \Phi & e_x e_z (1 - \cos \Phi) - e_y \sin \Phi \\ e_x e_y (1 - \cos \Phi) - e_z \sin \Phi & \cos \Phi + e_y^2 (1 - \cos \Phi) & e_y e_z (1 - \cos \Phi) + e_x \sin \Phi \\ e_x e_z (1 - \cos \Phi) + e_y \sin \Phi & e_y e_z (1 - \cos \Phi) - e_x \sin \Phi & \cos \Phi + e_z^2 (1 - \cos \Phi) \end{bmatrix}\quad (1.28)$$

## 2. 由方向余弦矩阵确定欧拉轴 / 角参数

若已知方向余弦矩阵  $\underline{C}_{ba}$ , 可以计算得到欧拉轴 / 角参数, 得

$$\cos \Phi = \frac{\text{tr} \underline{C}_{ba} - 1}{2}\quad (1.29)$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2 \sin \Phi} \begin{bmatrix} C_{32} - C_{23} \\ C_{13} - C_{31} \\ C_{21} - C_{12} \end{bmatrix}\quad (1.30)$$

其中,  $\text{tr} \underline{C}_{ba}$  是方向余弦矩阵的迹,  $\text{tr} \underline{C}_{ba} = C_{11} + C_{22} + C_{33}$ 。绕任意轴转动相同的  $\Phi$  角, 方向余弦矩阵的迹不变。将公式展开, 对应得到以下 3 组解:

- (1) 当  $\text{tr} \underline{C}_{ba} \neq 3, -1$  时, 可以直接计算分量  $e_x, e_y, e_z$ 。
- (2) 当  $\text{tr} \underline{C}_{ba} = 3$  时, 此时对应转角  $\Phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , 方向余弦矩阵  $\underline{C}_{ba}$  为单位矩阵,  $e_x, e_y, e_z$  无法确定。这种情况相当于没有发生转动。
- (3) 当  $\text{tr} \underline{C}_{ba} = -1$  时, 对应转角  $\Phi = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ , 此时  $\underline{C}_{ba} = 2\underline{e} \underline{e}^T - \underline{E}_3$ , 则有

$$\begin{cases} e_x = \pm \sqrt{\frac{1 + C_{11}}{2}}, & e_y = \pm \sqrt{\frac{1 + C_{22}}{2}}, & e_z = \pm \sqrt{\frac{1 + C_{33}}{2}} \\ e_x e_y = \frac{1}{2} C_{12}, & e_y e_z = \frac{1}{2} C_{23}, & e_z e_x = \frac{1}{2} C_{31} \end{cases}\quad (1.31)$$

其中, 使用后三个方程来判断前三个方程的符号。

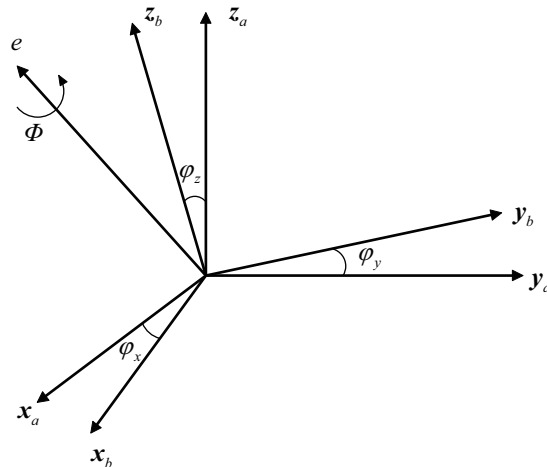


图 1.13: 欧拉转角与两个坐标系之间的几何关系

### 3. 欧拉转角的几何意义

如图 1.13 所示, 令  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  分别为两个坐标系对应轴之间的夹角, 方向余弦矩阵的对焦线上的元素即为这几个角的余弦值, 所以

$$2 \cos \Phi = \text{tr} \underline{C}_{ba} - 1 = \cos \varphi_x + \cos \varphi_y + \cos \varphi_z - 1 \quad (1.32)$$

利用半角公式  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , 则

$$\sin^2 \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{2} \left( \sin^2 \frac{\varphi_x}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_y}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_z}{2} \right) \quad (1.33)$$

当偏角较小时, 有

$$\Phi \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \quad (1.34)$$

这个公式对于评价旋转误差是很有用的。

## 1.2.5 四元数

### 1. 四元数的定义<sup>1</sup>

#### 定义 1.7 四元数

**四元数**的定义和复数类似, 唯一的区别就是四元数一共有三个虚部, 而复数只有一个。所有的四元数  $q \in \mathbb{H}$  ( $\mathbb{H}$  代表四元数的发现者 William Rowan Hamilton) 都可以写成下面这种形式

$$q = a + bi + cj + dk \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \quad (1.35)$$

其中,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (1.36)$$

四元数可以写成向量形式

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

同时, 通常将四元数的实部与虚部分开, 并用一个三维的向量来表示虚部, 将它表示为**标量向量有序对**形式

$$q = [s, \mathbf{v}], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (s, x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (1.38)$$

### 2. 四元数的模长

#### 定义 1.8 四元数的模长

**四元数的模长** (范数) 定义为

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (1.39)$$

用标量向量有序对表示为

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + \|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \quad (1.40)$$

**注:** 由于四元数是四维向量, 其没有明确的物理几何意义。

<sup>1</sup>四元数章节中的部分内容参考 Github 上 Krasjet 的讲义 Quaternion [1]

### 3. 四元数的加减运算

四元数的加减运算和复数一致, 设两个四元数为  $q_1 = a + bi + cj + dk$ ,  $q_2 = e + fi + gj + hk$ , 则

$$\begin{aligned} q_1 \pm q_2 &= a + bi + cj + dk \pm (e + fi + gj + hk) \\ &= (a \pm e) + (b \pm f)i + (c \pm g)j + (d \pm h)k \end{aligned} \quad (1.41)$$

标量向量对形式的加减与标量和向量的加减运算一致, 设两个四元数为  $q_1 = [s, \mathbf{v}]$ ,  $q_2 = [t, \mathbf{u}]$ , 则

$$q_1 \pm q_2 = [s \pm t, \mathbf{v} \pm \mathbf{u}] \quad (1.42)$$

### 4. 四元数的数乘

一个四元数  $q = a + bi + cj + dk$  和标量  $s$  的乘积为

$$\begin{aligned} sq &= s(a + bi + cj + dk) \\ &= sa + sbi + scj + sdk \end{aligned} \quad (1.43)$$

四元数的数乘运算满足交换律, 即  $sq = qs$ .

### 5. 四元数的乘法

四元数的乘法和矩阵乘法类似, 不遵守交换律, 即在一般情况下  $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ 。所以, 四元数乘法和矩阵乘法一样有左乘和右乘的区别。即

(1)  $q_1 q_2$   $q_1$  左乘  $q_2$  或  $q_2$  右乘  $q_1$ .

(2)  $q_2 q_1$   $q_1$  右乘  $q_2$  或  $q_2$  左乘  $q_1$ .

四元数的乘法满足结合律和分配律。

那么, 如果有两个四元数  $q_1 = [s, \mathbf{v}]$ ,  $q_2 = [t, \mathbf{u}]$ , 则

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= ae + afi + agj + ak \\ &\quad + bei + bfi^2 + bgij + bhik \\ &\quad + cej + cfji + cgj^2 + chjk \\ &\quad + dek + dfki + dgkj + dhk^2 \end{aligned} \quad (1.44)$$

利用四元数的性质  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ , 可以得到

$$ijk = -1 \xrightarrow{\text{等式两边同时左乘 } i} iijk = -i \Rightarrow jk = i \quad (1.45)$$

$$ijk = -1 \xrightarrow{\text{等式两边同时右乘 } k} ijkk = -k \Rightarrow ij = k \quad (1.46)$$

$$jk = i \xrightarrow{\text{等式两边同时左乘 } j} jjk = ji \Rightarrow ji = -k \quad (1.47)$$

$$jk = i \xrightarrow{\text{等式两边同时右乘 } k} jkk = ik \Rightarrow ik = -j \quad (1.48)$$

$$ij = k \xrightarrow{\text{等式两边同时左乘 } i} iij = ik \Rightarrow ik = -j \quad (1.49)$$

$$ij = k \xrightarrow{\text{等式两边同时右乘 } j} ijj = kj \Rightarrow kj = -i \quad (1.50)$$

将上面的性质整理为表格如表 1.1 所示。



$\times$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

表 1.1: 四元数基本向量的乘法计算表 (左  $\times$  上)

## 评注

记忆方法：类似于向量的叉乘，将  $i, j, k$  理解为三维右手坐标系，则  $i \times j = k, j \times i = -k$ ，其余类似。

利用表 1.1，可以将四元数乘法的结果化简为

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= ae + afi + agj + ak \\
 &\quad + bei + bfi^2 + bgij + bhik \\
 &\quad + cej + cfji + cgj^2 + chjk \\
 &\quad + dek + dfki + dgkj + dhk^2 \\
 &= (ae - bf - cg - dh) \\
 &\quad + (be - af - dg - ch)i \\
 &\quad + (ce - df - ag - bh)j \\
 &\quad + (de - cf - bg - ah)k
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

写成矩阵为

$$q_1 q_2 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

同理可得，右乘的结果为

$$q_2 q_1 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

## 6. Grassmann 积

为了将四元数的结果写成标量向量有序对，重新整理结果

$$\begin{aligned}
 q_1 q_2 &= (ae - (bf + cg + dh)) \\
 &\quad + (be + af + ch - dg)i \\
 &\quad + (ce + ag + df - bh)j \\
 &\quad + (de + ah + bg - cf)k
 \end{aligned}$$

令  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$ , 那么

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = bf + cg + dh$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & c & d \\ f & g & h \end{vmatrix} = (ch - dg)\mathbf{i} + (df - bh)\mathbf{j} + (bg - cf)\mathbf{k}$$

所以,  $q_1 q_2$  的结果可以用向量点乘和叉乘的形式表示出来<sup>1</sup>

$$q_1 q_2 = [ae - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, a\mathbf{u} + e\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \quad (1.54)$$

这个结果称为 **Grassmann 积**, 一般来说

### 定理 1.3 Grassmann 积

对于任意四元数  $q_1 = [s, \mathbf{v}]$ ,  $q_2 = [t, \mathbf{u}]$ ,  $q_1 q_2$  的结果为

$$q_1 q_2 = [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \quad (1.55)$$

## 7. 四元数的逆

因为四元数不遵守交换律, 所以类似于矩阵除法, 四元数相除等价于乘以它的逆。同样地, 也有左除和右除之分, 即  $pq^{-1}$  或  $q^{-1}p$ , 它们的结果一般不同。

### 定义 1.9 四元数的逆

如果

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \quad (q \neq 0) \quad (1.56)$$

那么, 我们称  $q^{-1}$  为四元数  $q$  的**逆**。

直接求解一个四元数的逆  $q^{-1}$  是非常困难的, 但是我们可以使用四元数共轭的性质来求  $q^{-1}$ 。

## 8. 共轭四元数

### 定义 1.10 共轭四元数

一个四元数  $q = a + bi + cj + dk$  的**共轭**为

$$q^* = a - bi - ci - dk \quad (1.57)$$

如果用标量向量有序对的形式来定义, 则  $q = [s, \mathbf{v}]$  的**共轭**为

$$q^* = [s, -\mathbf{v}] \quad (1.58)$$

<sup>1</sup>其实按照历史的顺序来说, 这里第一次提出叉乘的概念。

共轭四元数的一个非常有用的性质就是

$$\begin{aligned}
 qq^* &= [s, \mathbf{v}] \cdot [s, -\mathbf{v}] \\
 &= [s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, s(-\mathbf{v}) + s\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (-\mathbf{v})] \\
 &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, 0] \\
 &= s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \|q\|^2 \quad (\mathbf{v} = [x, y, z])
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

因为  $(q^*)^* = [s, -(-\mathbf{v})] = [s, \mathbf{v}] = q$ , 则

$$q^*q = (q^*)(q^*)^* = \|q^*\|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \|q\|^2 = qq^* \tag{1.60}$$

这说明,  $q^*q = qq^*$ 。这个特殊的乘法是遵守交换律的。

下面利用四元数的性质求四元数的逆。

$$qq^{-1} = 1 \xrightarrow{\text{等式两边同时左乘 } q^*} q^*qq^{-1} = 1 \Rightarrow (q^*q)q^{-1} = q^* \xrightarrow{q^*q = \|q\|^2} \|q\|^2 \cdot q^{-1} = q^*$$

由此可知

#### 定理 1.4 四元数逆的求解

四元数的逆可以表示为

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2} \tag{1.61}$$

用这种方法寻找一个四元数的逆会非常高效, 我们只需要将一个四元数的共轭除以它的模长的平方就可以得到四元数的逆。特别地对于单位四元数  $\|q\| = 1$  来说, 它的逆为

$$q^{-1} = \frac{q^*}{1^2} = q^* \tag{1.62}$$

## 9. 纯四元数

### 定义 1.11 纯四元数

如果一个四元数实部为 0, 仅有虚部, 即

$$\mathbf{v} = [0, \mathbf{v}] \tag{1.63}$$

那么我们则称这个四元数  $\mathbf{v}$  为一个纯四元数。因为纯四元数仅由虚部的三维向量决定, 我们可以将任意的三维向量转换为纯四元数。

纯四元数有一个很重要的特性: 两个纯四元数  $\mathbf{v} = [0, \mathbf{v}], \mathbf{u} = [0, \mathbf{u}]$  的乘积为

$$\mathbf{vu} = [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] = [-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \tag{1.64}$$

## 10. 四元数与三维旋转

在上个章节 1.2.4 中我们知道: 如果我们需要将一个向量  $\mathbf{a}$  沿着一个用单位向量  $\mathbf{e}$  所定义的旋转轴旋转  $\Phi$  度, 那么我们可以将这个向量  $\mathbf{a}$  可以分解为平行于旋转轴的分量  $a_{\parallel}$  和垂直于旋转轴的分量  $a_{\perp}$ 。旋转后得到的向量  $\mathbf{b}$  可以表示为这两个分量分别旋转后之和, 即  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$ 。

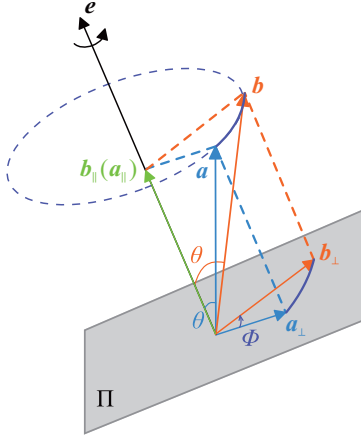


图 1.14: 向量旋转分解图

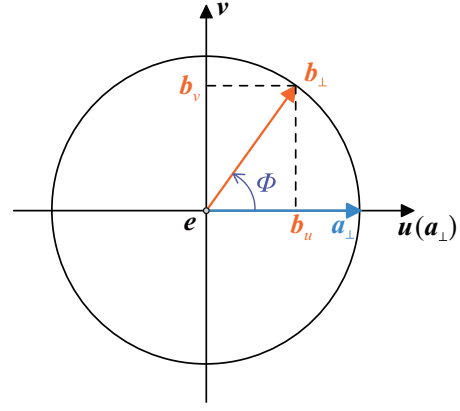


图 1.15: 向量旋转投影图

我们定义这些向量为纯四元数

$$\begin{aligned} a &= [0, \mathbf{a}] & b &= [0, \mathbf{b}] \\ a_{\perp} &= [0, \mathbf{a}_{\perp}] & b_{\perp} &= [0, \mathbf{b}_{\perp}] \\ a_{\parallel} &= [0, \mathbf{a}_{\parallel}] & b_{\parallel} &= [0, \mathbf{b}_{\parallel}] \\ e &= [0, \mathbf{e}] \end{aligned}$$

那么我们可以得到

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp} \quad b = b_{\parallel} + b_{\perp}$$

如图 1.14 所示, 我们知道, 旋转前后平行分量  $a_{\parallel} = b_{\parallel} = e$  相等, 即旋转前后不变, 下面考虑垂直分量  $a_{\perp}$  的旋转。在上个章节 1.2.4 中我们推导过垂直分量  $a_{\perp}$  的旋转公式

$$\mathbf{b}_{\perp} = \cos \Phi \mathbf{a}_{\perp} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp})$$

我们可以很容易将  $a_{\perp}$  和  $a_{\parallel}$  写成四元数的形式, 而对于  $\mathbf{a}_{\perp} \times \mathbf{e}$ , 由纯四元数的重要性质, 由第 13 页的公式 (1.64) 可知, 纯四元数  $a = [0, \mathbf{a}_{\perp}]$ ,  $e = [0, \mathbf{e}]$ , 那么

$$ea_{\perp} = [-\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_{\perp}, \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}]$$

而  $\mathbf{e} \perp \mathbf{a}_{\perp} \Rightarrow \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_{\perp} = 0$ , 所以

$$ea_{\perp} = [0, \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}] = \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}$$

所以  $a_{\perp}$  旋转公式的四元数表达为

$$\mathbf{b}_{\perp} = \cos \Phi \mathbf{a}_{\perp} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}) = (\cos \Phi + \sin \Phi e) \mathbf{a}_{\perp} \quad (1.65)$$

令  $q = \cos \Phi + \sin \Phi e$ , 则可以得到

$$\mathbf{b}_{\perp} = q \mathbf{a}_{\perp} \quad (1.66)$$

所以, 我们只需要构造一个四元数  $q$ , 就可以完成垂直分量的旋转。对  $q$  进一步变形, 得

$$\begin{aligned} q &= \cos \Phi + \sin \Phi e \\ &= [\cos \Phi, \mathbf{0}] + [0, \sin \Phi \mathbf{e}] \\ &= [\cos \Phi, \sin \Phi \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (1.67)$$

如果已经知道旋转轴的坐标  $\underline{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$  和旋转角  $\Phi$ , 那么四元数  $q$  就确定为

$$q = [\cos \Phi, \sin \Phi \underline{e}] = \cos \Phi + \sin \Phi e_x \mathbf{i} + \sin \Phi e_y \mathbf{j} + \sin \Phi e_z \mathbf{k} \quad (1.68)$$

四元数  $q$  还有一个性质 (注:  $\|\underline{u}\| = 1$ )

$$\begin{aligned} \|q\| &= \sqrt{\cos^2 \Phi + (\sin \Phi \underline{u} \cdot \sin \Phi \underline{u})} \\ &= \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi (\underline{u} \cdot \underline{u})} \\ &= \sqrt{\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi} = 1 \end{aligned} \quad (1.69)$$

说明旋转四元数参数  $q$  是单位四元数, 一定意义上表面它所做的变换并不会对原向量进行缩放, 是一个纯旋转。

又因为平行分量旋转前后不改变, 即  $\underline{b}_{\parallel} = \underline{a}_{\parallel} \Rightarrow b_{\parallel} = a_{\parallel}$  所以, 向量  $\underline{a}$  的最终四元数旋转表示为

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \underline{b}_{\parallel} + \underline{b}_{\perp} \\ &= a_{\parallel} + q \underline{a}_{\perp} \quad (\text{其中 } q = [\cos \Phi, \sin \Phi \underline{e}]) \end{aligned} \quad (1.70)$$

通过进一步的化简<sup>1</sup>, 可以得到

#### 定理 1.5 向量旋转的四元数参数

在同一坐标系下, 任意向量  $\underline{a}$  沿着以单位向量定义的旋转轴  $\underline{e}$  旋转  $\Phi$  度之后的向量  $\underline{b}$  可以用四元数表达。令  $\underline{a} = [0, \underline{a}]$ ,  $q = [\cos(\frac{1}{2}\Phi), \sin(\frac{1}{2}\Phi)\underline{e}]$ , 那么

$$\underline{b} = q \underline{a} q^* = q \underline{a} q^{-1} \quad (1.71)$$

为了更好的理解这个公式的意义, 我们可以得到<sup>2</sup>

$$\underline{b} = q \underline{a} q^* = q q^* \underline{a}_{\parallel} + q q \underline{a}_{\perp} = \underline{a}_{\parallel} + q^2 \underline{a}_{\perp} \quad (1.72)$$

也就是说,  $q \underline{a} q^*$  这个变换, 实际上可以等价于, 对  $\underline{a}$  平行于坐标轴的分量  $\underline{a}_{\parallel}$  实施的变换是  $q q^*$ , 这两个变换是互逆的, 完全抵消了, 也就是没有旋转。而对于正交于旋转轴的分量  $\underline{a}_{\perp}$ , 则实施的是两次完全一样的变换  $q^2 = q q$ , 将它旋转  $\frac{\Phi}{2} + \frac{\Phi}{2} = \Phi$  度。

由这个公式的由来, 可以发现其和上一章节的欧拉轴 / 角的证明是类似的。实际上, 旋转四元数参数和欧拉轴 / 角时完全等价的<sup>3</sup>, 即

$$\underline{b} = q \underline{a} q^* = \cos \Phi \underline{a} + (1 - \cos \Phi)(\underline{e} \cdot \underline{a})\underline{e} + \sin \Phi(\underline{e} \times \underline{a}) \quad (1.73)$$

若已经知道旋转四元数参数  $q = [q_0, \underline{q}]$ , 则可以很容易获得其对应的旋转角度和旋转轴向量

$$\frac{\Phi}{2} = \cos^{-1} q_0 \quad (1.74)$$

$$\underline{e} = \frac{\underline{q}}{\sin(\cos^{-1} q_0)} \quad (1.75)$$

<sup>1</sup>由于篇幅所限, 此部分化简内容请参见第 3 章: 3.1 旋转四元数参数的化简, Page 35

<sup>2</sup>公式 (1.72) 是原式公式化简第一步的结果, 详情请见第 36 页的公式 (3.2)。

<sup>3</sup>其证明见第 3 章: 3.2 旋转的欧拉轴 / 角参数表达和四元数表达的等价性, Page 37

## 1.2.6 欧拉参数

### 1. 欧拉参数的定义和表示

为了和方向余弦矩阵具有一致的形式，我们可以将四元数写成矩阵的形式。在四元数的乘法中，我们计算过左乘矩阵和右乘矩阵，若乘数  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ ，那么左乘矩阵和右乘矩阵可以分别表示为

$$L(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}, \quad R(q) = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

同时，对于四元数  $q$  的共轭  $q^*$  的乘数矩阵，有

$$L(q^*) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} = [L(q)], \quad R(q^*) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} = [R(q)] \quad (1.77)$$

取

$$\begin{cases} q = [q_0, \mathbf{q}] = [q_0 & q_1 & q_2 & q_3], \\ q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}, & q_1 = e_x \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_2 = e_y \cos \frac{\Phi}{2}, & q_3 = e_z \sin \frac{\Phi}{2} \end{cases}$$

其中，四元数  $q$  是旋转四元数参数，也称为欧拉参数。那么我们可以得到

$$\begin{aligned} b &= qa q^* = L(q)R(q^*)a \quad [= R(q^*)L(q)a] \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} a \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & q_0q_1 - q_1q_0 - q_2q_3 + q_3q_2 & q_0q_2 + q_1q_3 - q_2q_0 - q_3q_1 & q_0q_3 - q_1q_2 + q_2q_1 - q_3q_0 \\ q_1q_0 - q_0q_1 + q_3q_2 - q_2q_3 & q_1^2 + q_0^2 - q_3^2 - q_2^2 & q_1q_2 - q_0q_3 - q_3q_0 + q_2q_1 & q_1q_3 + q_0q_2 + q_3q_1 + q_2q_0 \\ q_2q_0 - q_1q_3 - q_0q_2 + q_1q_3 & q_2q_1 + q_3q_0 + q_0q_3 + q_1q_2 & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & q_2q_3 + q_3q_2 - q_0q_1 - q_1q_0 \\ q_3q_0 + q_2q_1 - q_1q_2 - q_0q_3 & q_3q_1 - q_2q_0 + q_1q_3 - q_0q_2 & q_3q_2 + q_2q_3 + q_1q_0 + q_0q_1 & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{bmatrix} a \end{aligned}$$

由于  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ （旋转四元数参数  $q$  是一个单位四元数），所以进一步化简为

$$b = qa q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_3q_0) & 2(q_1q_3 + q_2q_0) \\ 0 & 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) \\ 0 & 2(q_3q_1 - q_2q_0) & 2(q_2q_3 + q_1q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

其中， $a = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]$ 。由矩阵乘法可知，矩阵的最外圈不会对  $a$  进行任何变换，而代表  $b$  的方向仅取决于  $[a_1 \ a_2 \ a_3]$ 。因此，我们可以删去矩阵最外圈，得到一个  $3 \times 3$  的矩阵用于三维向量的旋转变换，即

**定理 1.6** 欧拉参数表示的向量旋转矩阵

在同一坐标系下, 任意向量  $\mathbf{a}$  沿着以单位向量定义的旋转轴  $\mathbf{e}$  旋转  $\Phi$  角度之后的向量  $\mathbf{b}$  可以用矩阵乘法来获得

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\Phi}{2} \\ q_1 = e_x \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_2 = e_y \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_3 = e_z \sin \frac{\Phi}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{R}}_{ba}(q)\underline{\mathbf{a}}, \quad \underline{\mathbf{R}}_{ba}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_3q_0) & 2(q_1q_3 + q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) \\ 2(q_3q_1 - q_2q_0) & 2(q_2q_3 + q_1q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

同样地, 由向量旋转与坐标系旋转的对应关系, 可以知道向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵 (方向余弦矩阵) 互为转置 (逆), 所以可以得到<sup>1</sup>

**定理 1.7** 欧拉参数表示的坐标旋转矩阵 (方向余弦矩阵)

欧拉参数表示的坐标旋转矩阵 (方向余弦矩阵) 为

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\Phi}{2} \\ q_1 = e_x \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_2 = e_y \sin \frac{\Phi}{2} \\ q_3 = e_z \sin \frac{\Phi}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbf{e}}_b = \underline{\mathbf{C}}_{ba}(q)\underline{\mathbf{e}}_a, \quad \underline{\mathbf{C}}_{ba}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_3q_0) & 2(q_1q_3 - q_2q_0) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_1q_0) \\ 2(q_3q_1 + q_2q_0) & 2(q_2q_3 - q_1q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

同时对于四元数  $e_a = [0, \mathbf{e}_a]$ ,  $e_b = [0, \mathbf{e}_b]$ , 有

$$e_b = q^* e_a q \quad (1.81)$$

虽然三维旋转的矩阵形式 (欧拉参数) 可能不如四元数的形式简单, 而且占用更多的空间, 但是对于大批量的转换, 使用预先计算好的矩阵是比四元数乘法更有效率的。

我们知道方向余弦矩阵的欧拉轴 / 角参数表述为

$$\underline{\mathbf{C}}_{ba} = \cos \Phi \underline{\mathbf{E}}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{\mathbf{e}}\underline{\mathbf{e}} - \sin \Phi \underline{\mathbf{e}}^\times \quad (1.82)$$

类似的, 我们也可以将欧拉参数写成矩阵运算的形式, 注意到

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\Phi}{2} \\ \underline{\mathbf{q}} &= \underline{\mathbf{e}} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \underline{\mathbf{q}}^\times &= \underline{\mathbf{e}} \sin \frac{\Phi}{2} \\ \underline{\mathbf{q}}^\times &= \begin{bmatrix} 0 & -e_z \sin \frac{\Phi}{2} & e_y \sin \frac{\Phi}{2} \\ e_z \sin \frac{\Phi}{2} & 0 & -e_x \sin \frac{\Phi}{2} \\ -e_y \sin \frac{\Phi}{2} & e_x \sin \frac{\Phi}{2} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{e}}^\times \sin \frac{\Phi}{2} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>证明详见第 3 章: 3.4 向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵的关系, Page 41

$$\underline{q}^T \underline{q} = \begin{bmatrix} e_x \sin \frac{\Phi}{2} & e_y \sin \frac{\Phi}{2} & e_z \sin \frac{\Phi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \sin \frac{\Phi}{2} \\ e_y \sin \frac{\Phi}{2} \\ e_z \sin \frac{\Phi}{2} \end{bmatrix} = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \sin^2 \frac{\Phi}{2} = \sin^2 \frac{\Phi}{2}$$

对欧拉轴 / 角参数型方向余弦矩阵进行变换, 得

$$\begin{aligned} \underline{C}_{ba} &= \cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e} - \sin \Phi \underline{e}^\times \\ &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right) \underline{E}_3 + 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2} \underline{e} \underline{e} - 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \underline{e}^\times \\ &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\Phi}{2}\right) \underline{E}_3 + 2 \left(\underline{e} \sin \frac{\Phi}{2}\right) \left(\underline{e} \sin \frac{\Phi}{2}\right) - 2 \cos \frac{\Phi}{2} \left(\underline{e}^\times \sin \frac{\Phi}{2}\right) \\ &= (1 - 2 \underline{q}^T \underline{q}) \underline{E}_3 + 2 \underline{q} \underline{q}^T - 2 q_0 \underline{q}^\times \end{aligned} \quad (1.83)$$

## 2. 欧拉参数与方向余弦矩阵之间的转换

通过比对欧拉参数矩阵和方向余弦矩阵系数

$$\underline{C}_{ba} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

当方向余弦矩阵系数已知时, 可以求出四元数  $q$

$$\begin{cases} q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \\ q_1 = \frac{1}{4q_0} (C_{23} - C_{32}) \\ q_2 = \frac{1}{4q_0} (C_{31} - C_{13}) \\ q_3 = \frac{1}{4q_0} (C_{12} - C_{21}) \end{cases} \quad (1.85)$$

当  $q_0 = 0$  时, 公式 (1.85) 是奇异的, 无法求解  $q_1, q_2, q_3$ , 通过比对系数还可以获得其余三组解:

$$\begin{cases} q_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}} \\ q_2 = \frac{1}{4q_1} (C_{12} + C_{21}) \\ q_3 = \frac{1}{4q_1} (C_{13} + C_{31}) \\ q_0 = \frac{1}{4q_1} (C_{23} - C_{32}) \end{cases} \quad (1.86)$$

$$\begin{cases} q_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} + C_{22} - C_{33}} \\ q_3 = \frac{1}{4q_2} (C_{23} + C_{32}) \\ q_0 = \frac{1}{4q_2} (C_{31} - C_{13}) \\ q_1 = \frac{1}{4q_2} (C_{12} + C_{21}) \end{cases} \quad (1.87)$$



$$\begin{cases} q_3 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} - C_{22} + C_{33}} \\ q_0 = \frac{1}{4q_3} (C_{12} - C_{21}) \\ q_1 = \frac{1}{4q_3} (C_{13} + C_{31}) \\ q_2 = \frac{1}{4q_3} (C_{23} + C_{32}) \end{cases} \quad (1.88)$$

所以，一共有四种计算方法求解欧拉参数  $q = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$ ，为了降低计算结果的误差，我们选取奇异性最小的一组解，即通过计算

$$\begin{cases} q_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \\ q_1 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}} \\ q_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} + C_{22} - C_{33}} \\ q_3 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} - C_{22} + C_{33}} \end{cases} \xrightarrow{\text{选取最大的一个作为解}} q_j = \max_{i=1,2,3,4} q_i \quad (1.89)$$

这样以后，后面计算用到的  $\frac{1}{4q_j}$  的奇异性最小，计算的精度最高。

上面计算得到的欧拉参数称为从坐标系  $S_a$  到坐标系  $S_b$  的欧拉参数，或者坐标系  $S_b$  相对于坐标系  $S_a$  的欧拉参数。为了更明确的显示坐标系的转换关系，将其记为  $q_{ba}$ 。

### 3. 相继转动的欧拉参数表示

假设有两个表示沿着不同轴，不同角度旋转的非零四元数  $q_{ba}, q_{cb}$ ，我们先对  $a$  进行  $q_{ba}$  变换得到  $b$

$$b = q_{ba} a q_{ba}^*$$

再对  $b$  进行  $q_{cb}$  变换得到  $c$

$$\begin{aligned} c &= q_{cb} b q_{cb}^* \\ &= q_{cb} q_{ba} a q_{ba}^* q_{cb}^* \end{aligned}$$

下面给出一个引理

#### 引理 1.1

对任意四元数  $q_1 = [s, \mathbf{v}]$ ,  $q_2 = [t, \mathbf{u}]$ ，有

$$q_1^* q_2^* = (q_2 q_1)^* \quad (1.90)$$

证

由 Grassmann 积，

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= q_1^* q_2^* \\ &= [s, -\mathbf{v}] \cdot [t, -\mathbf{u}] \\ &= [st - (-\mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{u}), s(-\mathbf{u}) + t(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{u})] \\ &= [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, -s\mathbf{u} - t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= (q_2 q_1)^* = ([t, \mathbf{u}] \cdot [s, \mathbf{v}])^* \\
&= [ts - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, t\mathbf{v} + s\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}]^* \\
&= [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, -s\mathbf{u} - t\mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}] \\
&= [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, -s\mathbf{u} - t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] = \text{LHS}
\end{aligned}$$

□

所以, 根据引理 1.1 可以得到

$$\begin{aligned}
c &= q_{cb} q_{ba} a q_{ba}^* q_{cb}^* \\
&= (q_{cb} q_{ba}) a (q_{cb} q_{ba})^* \\
&= q_{ca} a q_{ca}^*
\end{aligned} \tag{1.91}$$

其中,  $q_{ca} = q_{cb} \cdot q_{ba}$ 。也就是说, 坐标系  $S_a$  通过两次旋转  $q_{ba}, q_{cb}$  后得到坐标系  $S_c$  等价于一次旋转  $q_{ca}$ 。

### 注意

#### 旋转顺序与四元数乘法顺序

我们先进行的是  $q_{ba}$  变换, 再进行  $q_{cb}$  变换, 其对应的四元数乘法为  $q_{ca} = q_{cb} \cdot q_{ba}$ , 即先进行的变换放在后面, 对于多旋转来说也符合这个计算顺序。

我们这个只是两个旋转的复合, 很容易可以推广到多旋转, 即

$$d = q_{dc} (q_{cb} q_{ba}) a (q_{cb} q_{ba})^* q_3^* = (q_{dc} q_{cb} q_{ba}) a (q_{dc} q_{cb} q_{ba})^* = q_{da} a q_{da}^* \tag{1.92}$$

## 1.2.7 其他类型的姿态参数

### 1. 罗德里格 (Rodrigues) 参数

**罗德里格参数**是三个标量, 也是从欧拉轴/角参数演化过来的, 其定义是

$$\underline{\rho} \triangleq \underline{e} \tan \frac{\Phi}{2} = \frac{1}{q_0} \underline{q} \tag{1.93}$$

罗德里格参数与欧拉参数相比, 其优点是参数少; 缺点是在某些时候 (如  $\Phi$  接近  $\pm\pi$  时), 参数会接近无限大, 而欧拉参数的绝对值不会超过 1。

罗德里格参数的方向余弦矩阵表示为

$$\underline{C}_{ba} = \frac{(1 - \underline{\rho}\underline{\rho})\underline{E}_3 + 2\underline{\rho}\underline{\rho} - 2\underline{\rho}^\times}{1 + \underline{\rho}\underline{\rho}} \tag{1.94}$$

$$= \frac{1}{1 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2} \begin{bmatrix} 1 + \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2 & 2(\rho_1\rho_3 - \rho_2) & 2(\rho_1\rho_2 + \rho_3) \\ 2(\rho_2\rho_1 - \rho_3) & 1 - \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 & 2(\rho_2\rho_3 + \rho_1) \\ 2(\rho_3\rho_1 + \rho_2) & 2(\rho_3\rho_2 - \rho_1) & 1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 \end{bmatrix} \tag{1.95}$$

### 2. 修正的罗德里格参数

基于罗德里格参数在  $\Phi$  接近  $\pm\pi$  时, 参数会接近  $\infty$  的缺点, 又提出了一种**修正的罗德里格参数**, 其定义为

$$\underline{\rho}^* \triangleq \underline{e} \tan \frac{\Phi}{4} = \frac{\sin(\Phi/2)}{1 + \cos(\Phi/2)} \underline{e} = \frac{1}{1 + q_0} \underline{q} \tag{1.96}$$

根据定义可知, 修正的罗德里格参数只有在欧拉转角为  $\pm 2\pi$  时才会变为奇点, 而实际应用中航天器相对参考坐标系的欧拉转角不需要表示到  $\pm 2\pi$ , 这经常在工程中使用。

### 1.2.8 无穷小角位移的姿态矩阵

当坐标系  $S_a$  相对于坐标系  $S_b$  仅限小角度位移时, 其对应的姿态矩阵  $\underline{C}_{ba}$  将是单位阵与无穷小量反对称矩阵的代数和。这个是线性化的重要应用。

#### 1. 用欧拉轴 / 角表示的姿态矩阵

旋转轴  $\underline{e}$  本身代表的是方向, 仍然是单位向量, 因此小量假设仅考虑转角  $\Phi$  为小角度的情况, 则

$$\underline{C}_{ba} = \cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T - \sin \Phi \underline{e}^\times \xrightarrow{\substack{\sin \Phi \approx \Phi \\ \cos \Phi \approx 1}} \underline{C}_{ba} = \underline{E}_3 - \Phi \underline{e}^\times \quad (1.97)$$

在无穷小角位移情况下, 姿态矩阵的乘法是可以交换的, 即当  $\underline{C}_{ba} = \underline{C}_{ba}(\underline{e}_1, \Phi_1)$  以及  $\underline{C}_{cb} = \underline{C}_{cb}(\underline{e}_2, \Phi_2)$  时, 有

$$\underline{C}_{ca} = \underline{C}_{ba} \underline{C}_{cb} = \underline{C}_{cb} \underline{C}_{ba} = \underline{E}_3 - \Phi_1 \underline{e}_1^\times - \Phi_2 \underline{e}_2^\times \quad (1.98)$$

#### 2. 用欧拉参数表示的姿态矩阵

对于欧拉参数来说, 姿态运动为无穷小角度位移时,  $q_0 \approx 1, q_1, q_2, q_3$  均为一阶小量, 对

$$\underline{C}_{ba}(q) = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_0) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_0) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_0) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_0) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_0) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}$$

忽略二阶小量, 并取  $q_0 = 1$ , 可以得到

$$\underline{C}_{ba}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 2q_3 & -2q_2 \\ -2q_3 & 1 & 2q_1 \\ 2q_2 & -2q_1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{E}_3 - 2\underline{q}^\times \quad (1.99)$$

#### 3. 用欧拉角表示的姿态矩阵

在用欧拉角描述小量角运动时, 有  $\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1$  (注: 这里的  $\alpha$  指代任何一个欧拉角均成立), 并忽略二阶小量, 那么对于  $zxz$  顺序的转动, 有

$$\underline{C}_{ba} = \begin{bmatrix} 1 & \psi + \varphi & 0 \\ -\psi - \varphi & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{bmatrix} = \underline{E}_3 = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ \psi + \theta \end{bmatrix}^\times \quad (1.100)$$

可以看出, 在采用  $zxz$  顺序旋转时, 在小角度下会丢失一个自由度。(因为叉乘向量中  $j$  分量为 0)。

对于  $zxy$  顺序转动, 对应的方向余弦矩阵可以简化为

$$\underline{C}_{ba} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} = \underline{E}_3 - \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}^\times \quad (1.101)$$

## 1.3 姿态运动学方程

研究姿态参数的变化与角速度矢量  $\omega_{ba}$  的关系的学科称为**姿态运动学**。实际上,  $\omega_{ba}$  的方向就是欧拉轴 / 角姿态参数中的瞬时旋转轴  $\underline{e}$  的方向,  $\omega_{ba}$  的数值大小即为  $d\Phi/dt$ 。角速度  $\omega_{ba}$  的表示方法有两种:

- (1)  $\omega_{ba}$  在参考坐标系  $S_a$  中的分量矩阵  $\omega_{ba}^a$ 。
- (2)  $\omega_{ba}$  在参考坐标系  $S_b$  中的分量矩阵  $\omega_{ba}^b$ 。

### 1.3.1 向量的时间导数

设坐标系  $S_a$  以角速度

$$\boldsymbol{\omega}_a = \omega_{xa}\mathbf{i}_a + \omega_{ya}\mathbf{j}_a + \omega_{za}\mathbf{k}_a \quad (1.102)$$

相对惯性空间旋转,  $\mathbf{u}$  为一个变化的向量

$$\mathbf{u} = u_{xa}\mathbf{i}_a + u_{ya}\mathbf{j}_a + u_{za}\mathbf{k}_a$$

则矢量  $\mathbf{u}$  在惯性空间对时间  $t$  的导数为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left( \frac{du_{xa}}{dt}\mathbf{i}_a + \frac{du_{ya}}{dt}\mathbf{j}_a + \frac{du_{za}}{dt}\mathbf{k}_a \right) + \left( u_{xa}\frac{d\mathbf{i}_a}{dt} + u_{ya}\frac{d\mathbf{j}_a}{dt} + u_{za}\frac{d\mathbf{k}_a}{dt} \right) \quad (1.103)$$

其中, 等号右侧前 3 项表示在坐标系  $S_a$  下每一分量对时间的导数, 再求向量和, 它表示向量  $\mathbf{u}$  相对于向量基  $\mathbf{e}_a$  的时间变化率, 可以写为  $\frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t}$ , 表示**相对导数**, 以便与**绝对导数**  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  区分。等号右侧后三项都是单位基向量对时间的导数, 如图 1.16 所示。

设  $\mathbf{e}$  是固定在坐标系  $S_a$  中的单位基向量,  $\boldsymbol{\omega}$  是基向量转动的角速度。在  $t = t_0$  时刻,  $\mathbf{e}$  的末端位于  $a$  点, 经过  $\Delta t$  时间后,  $\mathbf{e}$  转动到  $\mathbf{e}'$ , 其末端相应的转动到  $a'$  点。记  $aa'$  的圆心为点  $O$ ,  $\mathbf{e}$  与  $\boldsymbol{\omega}$  之间的夹角为  $\theta$ , 则由图 1.16 可知  $\angle aOa' = \omega\Delta t$ ,  $aa' = \omega\Delta t|\mathbf{e}|\sin\theta$ 。当  $\Delta t$  趋近于 0 时, 弧  $\widehat{aa'}$  逼近弦长  $aa'$ , 其方向趋近于圆在  $a$  点的切线  $\boldsymbol{\tau}$ 。所以,  $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow \widehat{aa'} = aa' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\Delta t$ 。由向量导数定义, 有

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\widehat{aa'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}\Delta t}{\Delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \quad (1.104)$$

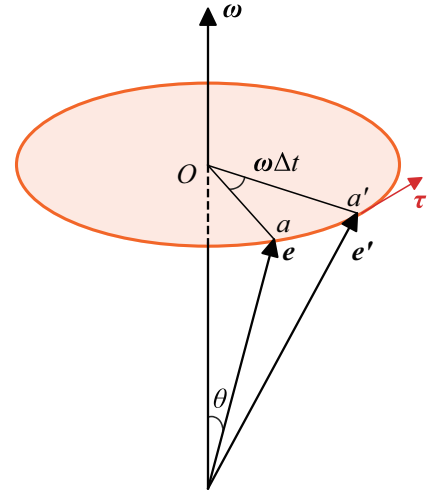


图 1.16: 基向量的转动

展开可得

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left( \frac{du_{xa}}{dt}\mathbf{i}_a + \frac{du_{ya}}{dt}\mathbf{j}_a + \frac{du_{za}}{dt}\mathbf{k}_a \right) + \boldsymbol{\omega}_a \times (u_{xa}\mathbf{i}_a + u_{ya}\mathbf{j}_a + u_{za}\mathbf{k}_a) \quad (1.105)$$

即

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{u}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{u} \quad (1.106)$$

### 1.3.2 方向余弦矩阵的微分方程

#### 1. 方向余弦矩阵的微分方程

由

$$\underline{\mathbf{e}}_a = \underline{\mathbf{C}}_{ab}\underline{\mathbf{e}}_b \xrightarrow{\text{两边取转置}} \underline{\mathbf{e}}_a^T = (\underline{\mathbf{C}}_{ab}\underline{\mathbf{e}}_b)^T \Rightarrow \underline{\mathbf{e}}_a^T = \underline{\mathbf{e}}_b^T \underline{\mathbf{C}}_{ab}^T = \underline{\mathbf{e}}_b^T \underline{\mathbf{C}}_{ba}$$

用  $\dot{\cdot}$  表示向量在坐标系  $S_a$  中的时间导数, 则有  $\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \dot{\underline{\mathbf{e}}}_a = 0$ , 且根据向量的时间导数, 可以得到

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_b^T = \boldsymbol{\omega}_{ba} \times \underline{\mathbf{e}}_b^T \quad (1.107)$$

对角速度  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  在  $S_b$  坐标系下的分解, 并由广义向量叉乘运算<sup>1</sup>, 可得

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_b^T = \boldsymbol{\omega}_{ba}^T \underline{\mathbf{e}}_b \times \underline{\mathbf{e}}_b^T = \underline{\mathbf{e}}_b^T \boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \quad (1.108)$$

<sup>1</sup>关于广义向量叉乘运算的定义, 详见第 3 章: 定义 3.2 广义向量叉乘运算, Page 40

在坐标系  $S_a$  中对两边求导,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{0}}^T &= \dot{\mathbf{e}}_b^T \mathbf{C}_{ba} + \mathbf{e}_b^T \dot{\mathbf{C}}_{ba} \\ &= \mathbf{e}_b^T \boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \mathbf{C}_{ba} + \mathbf{e}_b^T \dot{\mathbf{C}}_{ba} \\ &= \mathbf{e}_b^T (\boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \mathbf{C}_{ba} + \dot{\mathbf{C}}_{ba})\end{aligned}$$

于是可以得到

### 定理 1.8 方向余弦矩阵的微分方程

方向余弦矩阵  $\mathbf{C}_{ba}$  的微分方程为

$$\dot{\mathbf{C}}_{ba} = -\mathbf{C}_{ba} \boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \quad (1.109)$$

**注意:**  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  是  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  在坐标系  $S_b$  下的分量。

也就是说, 如果已知  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , 可以通过积分法求得方向余弦矩阵  $\mathbf{C}_{ba}(t)$  的时间表达式。可以利用

$$\mathbf{C}_{ba} \mathbf{C}_{ba}^T = \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{ab}^T = \mathbf{E}_3$$

求得  $\boldsymbol{\omega}_{ba}(t)$  关于  $\mathbf{C}_{ba}(t)$  的表达式

$$\boldsymbol{\omega}_{ba}^\times(t) = -\dot{\mathbf{C}}_{ba} \mathbf{C}_{ba}^T = -\dot{\mathbf{C}}_{ba} \mathbf{C}_{ab} = \mathbf{C}_{ba} \dot{\mathbf{C}}_{ab} \quad (1.110)$$

## 2. 相继运动的角速度关系

设  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  为坐标系  $S_b$  相对坐标系  $S_a$  的角速度,  $\boldsymbol{\omega}_{cb}$  为坐标系  $S_c$  相对坐标系  $S_b$  的角速度,  $\boldsymbol{\omega}_{ca}$  为坐标系  $S_c$  相对坐标系  $S_a$  的角速度, 则

$$\boldsymbol{\omega}_{ba}^\times = -\dot{\mathbf{C}}_{ba} \mathbf{C}_{ba}^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{cb}^\times = -\dot{\mathbf{C}}_{cb} \mathbf{C}_{cb}^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{ca}^\times = -\dot{\mathbf{C}}_{ca} \mathbf{C}_{ca}^T \quad (1.111)$$

所以,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{ca}^\times &= -\left(\dot{\mathbf{C}}_{cb} \mathbf{C}_{ba}^T + \mathbf{C}_{cb} \dot{\mathbf{C}}_{ba}^T\right) \mathbf{C}_{ac} = -\dot{\mathbf{C}}_{ca} \mathbf{C}_{bc} - \mathbf{C}_{cb} \dot{\mathbf{C}}_{ba} \mathbf{C}_{ab} \mathbf{C}_{bc} \\ &= \boldsymbol{\omega}_{cb}^\times + \mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \mathbf{C}_{bc}\end{aligned}$$

由叉乘矩阵恒等式<sup>1</sup>  $(\mathbf{C}\mathbf{u})^\times = \mathbf{C}\mathbf{u}^\times \mathbf{C}^T$ , 可得

$$\boldsymbol{\omega}_{ca}^\times = \boldsymbol{\omega}_{cb}^\times + \mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba}^\times \mathbf{C}_{bc} = \boldsymbol{\omega}_{cb}^\times + (\mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba})^\times$$

可以得到

$$\boldsymbol{\omega}_{ca} = \boldsymbol{\omega}_{cb} + \mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba} \quad (1.112)$$

其中,  $\boldsymbol{\omega}_{ca}, \boldsymbol{\omega}_{cb}$  都是在坐标系  $S_c$  下的分量, 而  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  是在坐标系  $S_b$  下的分量, 因此  $\mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba}$  代表的是  $\boldsymbol{\omega}_{ba}$  是在坐标系  $S_c$  下的分量。所以, 对上面的式子左乘  $\mathbf{e}_c^T$ , 得

$$\mathbf{e}_c^T \boldsymbol{\omega}_{ca} = \mathbf{e}_c^T \boldsymbol{\omega}_{cb} + \mathbf{e}_c^T \mathbf{C}_{cb} \boldsymbol{\omega}_{ba}$$

即

$$\boldsymbol{\omega}_{ca} = \boldsymbol{\omega}_{cb} + \boldsymbol{\omega}_{ba} \quad (1.113)$$

所以角速度具有可叠加性。

<sup>1</sup>关于叉乘矩阵恒等式的证明, 详见第 3 章: 3.3.2 叉乘矩阵的坐标变换, Page 40

### 1.3.3 欧拉角参数下的角速度和微分方程

#### 1. ZYZ 的旋转顺序

对于 ZYZ 的旋转顺序,  $S_b$  和  $S_a$  之间的方向余弦矩阵可表示为

$$\underline{C}_{ba} = \underline{C}_z(\varphi)\underline{C}_x(\theta)\underline{C}_z(\psi) = \underline{C}_3\underline{C}_2\underline{C}_1$$

三次旋转的顺序为  $\underline{e}_a \rightarrow \underline{e}_1 \rightarrow \underline{e}_2 \rightarrow \underline{e}_b$ , 其对应的角速度向量叠加为  $\omega_{ba} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , 其中

$$\omega_1 = \underline{e}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \underline{e}_2^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_3 = \underline{e}_b^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (1.114)$$

则

$$\begin{aligned} \underline{e}_b \cdot \omega_{ba} &= \underline{e}_b \cdot \underline{e}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underline{e}_b \cdot \underline{e}_2^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{e}_b \cdot \underline{e}_b^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \underline{C}_3\underline{C}_2\underline{e}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underline{C}_3\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2^T \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{e}_b \cdot \underline{e}_b^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta \cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (1.115) \end{aligned}$$

进一步可以求出欧拉角参数的微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \underline{\omega}_{ba} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \sin \theta & 0 \\ -\sin \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \underline{\omega}_{ba} \quad (1.116)$$

其中,  $\varphi$  为滚转角,  $\theta$  为俯仰角,  $\psi$  为偏航角。容易发现, 俯仰角  $\theta \rightarrow 0$ , 角速率  $\rightarrow \infty$ , 方程奇异。

#### 2. ZXY 旋转

对于 ZXY 的旋转顺序,  $S_b$  和  $S_a$  之间的方向余弦矩阵可表示为

$$\underline{C}_{ba} = \underline{C}_y(\theta)\underline{C}_x(\varphi)\underline{C}_z(\psi) = \underline{C}_3\underline{C}_2\underline{C}_1$$

三次旋转的顺序为  $\underline{e}_a \rightarrow \underline{e}_1 \rightarrow \underline{e}_2 \rightarrow \underline{e}_b$ , 其对应的角速度向量叠加为  $\omega_{ba} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ , 同样可以计算得到

$$\underline{\omega}_{ba} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & 1 & \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.117)$$

从而可以进一步得到欧拉角参数的微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & 1 & \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} \underline{\omega}_{ba} = \frac{1}{\cos \varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \underline{\omega}_{ba} \quad (1.118)$$

容易发现，滚转角  $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ ，角速率  $\rightarrow \infty$ ，方程奇异。

### 1.3.4 欧拉轴 / 角参数的微分方程及角速度

#### 1. 欧拉轴 / 角参数表示的角速度

由角速度的微分方程及欧拉轴 / 角参数下的方向余弦矩阵表示

$$\begin{cases} \underline{\omega}_{ba}^{\times} = -\dot{\underline{C}}_{ba} \underline{C}_{ba}^T \\ \underline{C}_{ba} = \cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T - \sin \Phi \underline{e}^{\times} \end{cases}$$

代入可得

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{ba}^{\times} &= -\dot{\underline{C}}_{ba} \underline{C}_{ba}^T \\ &= -\frac{d}{dt} [\cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T - \sin \Phi \underline{e}^{\times}] \cdot [\cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T - \sin \Phi \underline{e}^{\times}]^T \\ &= [-\sin \Phi \dot{\Phi} \underline{E}_3 + \sin \Phi \dot{\Phi} \underline{e} \underline{e}^T + (1 - \cos \Phi)(\dot{\underline{e}} \underline{e}^T + \underline{e} \dot{\underline{e}}^T) - \cos \Phi \dot{\Phi} \underline{e}^{\times} - \sin \Phi \dot{\Phi} \underline{e}^{\times}] \cdot [\cos \Phi \underline{E}_3 + (1 - \cos \Phi) \underline{e} \underline{e}^T + \sin \Phi \underline{e}^{\times}] \\ &= \dot{\Phi} \underline{e}^{\times} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^{\times} \dot{\underline{e}} + \sin \Phi \dot{\underline{e}}^{\times} \end{aligned}$$

注：这里的证明后补，实在是阴间化简。。。其中用到了恒等式如下<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \underline{e}^T \underline{e} &= 1 & \underline{e}^{\times} \underline{e} &= \underline{e}^T \underline{e}^{\times} = 0 \\ \dot{\underline{e}}^{\times} \underline{e} &= -\underline{e}^{\times} \dot{\underline{e}} & \dot{\underline{e}}^{\times} \underline{e}^{\times} &= \underline{e} \underline{e}^T \\ \underline{e} \dot{\underline{e}}^T \underline{e}^{\times} + \underline{e}^{\times} \underline{e} \dot{\underline{e}}^T &= -\dot{\underline{e}}^{\times} & \dot{\underline{e}} \underline{e}^T - \underline{e} \underline{e}^T &= (\underline{e}^{\times} \underline{e})^{\times} \end{aligned}$$

所以，我们得到

#### 定理 1.9 欧拉轴 / 角参数的角速度

欧拉轴 / 角参数的角速度为

$$\underline{\omega}_{ba} = \dot{\Phi} \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^{\times} \dot{\underline{e}} + \sin \Phi \dot{\underline{e}} \quad (1.119)$$

当绕固定轴旋转时，即  $\dot{\underline{e}} = 0$  时，则化简为

$$\underline{\omega}_{ba} = \dot{\Phi} \underline{e} \quad (1.120)$$

<sup>1</sup>关于恒等式的证明，详见第 3 章：3.5 欧拉轴角向量恒等式的证明，Page 42

## 2. 欧拉轴 / 角参数的微分方程

为了求得微分方程, 将公式 (1.119) 两边左乘  $\underline{e}^T$ , 即

$$\begin{aligned}
 \underline{e}^T \underline{\omega}_{ba} &= \underline{e}^T (\dot{\Phi} \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{\dot{e}}) \\
 &= \dot{\Phi} \underline{e}^T \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^T \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^T \underline{\dot{e}} & (\underline{e}^T \underline{e} = 1) \\
 &= \dot{\Phi} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^T \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^T \underline{\dot{e}} & (\text{向量叉乘为 } 0, \underline{e}^T \underline{e}^\times = 0) \\
 &= \dot{\Phi} + \sin \Phi \underline{e}^T \underline{\dot{e}} & (\text{向量与向量的导数点乘为 } 0, \underline{e} \cdot \underline{\dot{e}} = \underline{e}^T \underline{\dot{e}} = 0) \\
 &= \dot{\Phi}
 \end{aligned}$$

所以

$$\dot{\Phi} = \underline{e}^T \underline{\omega}_{ba} \quad (1.121)$$

为了进一步简化, 我们先化简  $\underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}}$ , 利用恒等式

$$\begin{aligned}
 \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} &= \underline{e}^\times (\underline{e}^\times \underline{\dot{e}}) & (\underline{\dot{e}}^\times \underline{e} = -\underline{e}^\times \underline{\dot{e}}) \\
 &= \underline{e}^\times (-\underline{\dot{e}}^\times \underline{e}) = -(\underline{e}^\times \underline{\dot{e}}^\times) \underline{e} = -[(\underline{e}^\times \underline{\dot{e}}^\times)^T]^T \underline{e} = -[(\underline{\dot{e}}^\times)^T (\underline{e}^\times)^T]^T \underline{e} & (\text{反对称矩阵的转置等于本身的相反数}) \\
 &= -[(-\underline{\dot{e}}^\times)(-\underline{e}^\times)]^T \underline{e} = -(\underline{\dot{e}}^\times \underline{e}^\times)^T \underline{e} & (\underline{\dot{e}}^\times \underline{e}^\times = \underline{e} \underline{\dot{e}}^T) \\
 &= -(\underline{e} \underline{\dot{e}}^T)^T \underline{e} = -\underline{\dot{e}} \underline{e}^T & (\underline{e}^T \underline{e} = 1) \\
 &= -\underline{\dot{e}}
 \end{aligned}$$

利用上面得到的化简式, 将公式 (1.119) 两边左乘  $\underline{e}^\times$ , 即

$$\begin{aligned}
 \underline{e}^\times \underline{\omega}_{ba} &= \underline{e}^\times (\dot{\Phi} \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{\dot{e}}) \\
 &= \dot{\Phi} \underline{e}^\times \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} & (\text{向量叉乘为 } 0, \underline{e}^T \underline{e}^\times = 0) \\
 &= -(1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} & (\underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} = -\underline{\dot{e}}) \\
 &= (1 - \cos \Phi) \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{\dot{e}}
 \end{aligned}$$

所以

$$\underline{e}^\times \underline{\omega}_{ba} = (1 - \cos \Phi) \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} \quad (1.122)$$

将公式 (1.122) 两边再左乘  $\underline{e}^\times$ , 即

$$\begin{aligned}
 \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\omega}_{ba} &= \underline{e}^\times [(1 - \cos \Phi) \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{\dot{e}}] \\
 &= (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} & (\underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} = -\underline{\dot{e}}) \\
 &= (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} - \sin \Phi \underline{\dot{e}}
 \end{aligned}$$

综合以上公式

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \underline{e}^T \underline{\omega}_{ba} \\ \underline{e}^\times \underline{e}^\times \underline{\omega}_{ba} = (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} - \sin \Phi \underline{\dot{e}} \end{cases} \quad (1.123)$$

以  $\underline{\dot{e}}$  和  $\underline{e}^\times \underline{\dot{e}}$  为未知数, 解方程 (1.123) 得



**定理 1.10 欧拉轴 / 角参数的微分方程**

欧拉轴 / 角参数的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \underline{e}^T \underline{\omega}_{ba} \\ \dot{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left( \underline{e}^\times - \cot \frac{\Phi}{2} \underline{e}^\times \underline{e}^\times \right) \underline{\omega}_{ba} \end{cases} \quad (1.124)$$

**1.3.5 欧拉参数下的角速度和微分方程**

设  $q$  为  $S_b$  相对于  $S_a$  的姿态四元数, 则有

$$\mathbf{r}_b = q \mathbf{r}_a q^*$$

$$\mathbf{r}_a = q^* \mathbf{r}_b q$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} &= \frac{dq}{dt} \mathbf{r}_a q^* + q \mathbf{r}_a \frac{dq^*}{dt} \\ &= \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b q q^* + q q^* \mathbf{r}_b q \frac{dq^*}{dt} \\ &= \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b q \frac{dq^*}{dt} \end{aligned}$$

由于

$$\frac{d(qq^*)}{dt} = \frac{dq}{dt} q^* + q \frac{dq^*}{dt}$$

而  $\frac{d(qq^*)}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0 \Rightarrow q \frac{dq^*}{dt} = -\frac{dq}{dt} q^*$ , 所以

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} &= \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_b q \frac{dq^*}{dt} \\ &= \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_b \frac{dq}{dt} q^* \\ &= \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b - \left( -\frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b \right) \\ &= 2 \frac{dq}{dt} q^* \mathbf{r}_b \\ &= 2 \text{vect} \left[ \frac{dq}{dt} q^* \right] \times \mathbf{r}_b \end{aligned}$$

其中,  $\text{vect}[q]$  代表四元数  $q$  的虚部向量, 所以我们知道

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} = 2 \text{vect} \left[ \frac{dq}{dt} q^* \right] \times \mathbf{r}_b \\ \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} = \underline{\omega}_{ba} \times \mathbf{r}_b \end{cases} \quad (1.125)$$

比对可得

$$\begin{cases} \underline{\omega}_{ba} = 2 \text{vect} \left[ \frac{dq}{dt} q^* \right] \\ \text{scal} \left[ \frac{dq}{dt} q^* \right] = \dot{q}_0 q_0 + \dot{q}_1 q_1 + \dot{q}_2 q_2 + \dot{q}_3 q_3 = 0 \end{cases} \quad (1.126)$$

其中,  $\text{scal}[q]$  代表四元数  $q$  的实部标量。

定义纯四元数  $\Omega_{ba}^a = [0, \underline{\omega}_{ba}]$ , 那么

$$\Omega_{ba}^a = 2 \frac{dq}{dt} q^*, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} \Omega_{ba}^a q$$

又由于

$$\Omega_{ba}^b = q^* \Omega_{ba}^a q \Rightarrow \Omega_{ba}^a = q \Omega_{ba}^b q^*$$

进而得到

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2} q \Omega_{ba}^b \quad (1.127)$$

记欧拉参数  $q = [q_0, \mathbf{q}]$ , 则由 Grassmann 积【第 12 页的公式 (1.55)】得

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} [q_0, \mathbf{q}] \cdot [0, \omega_{ba}] \\ &= \frac{1}{2} [q_0 * 0 - \mathbf{q} \cdot \omega_{ba}, q_0 \omega_{ba} + 0 * \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \omega] \\ &= \frac{1}{2} [-\mathbf{q} \cdot \omega_{ba}, q_0 \omega_{ba} + \mathbf{q} \times \omega] \end{aligned}$$

将四元数  $\dot{q}$  分开写为标量  $\dot{q}_0$  和向量  $\dot{\mathbf{q}}$  的形式, 并将向量写成矩阵的形式, 则有

#### 定理 1.11 欧拉参数下的角速度和微分方程

欧拉参数下的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{q} \underline{\mathbf{E}}_3 + \mathbf{q}^\times) \underline{\omega}_{ba} \\ \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \cdot \underline{\omega}_{ba} \end{cases} \quad (1.128)$$

对应的, 可以反解出欧拉参数下的角速度为

$$\underline{\omega}_{ba} = 2 (\mathbf{q}^\times + q_0 \underline{\mathbf{E}}_3)^{-1} \dot{\mathbf{q}} = 2 \left( \frac{q_0^2 \underline{\mathbf{E}}_3 - q_0 \mathbf{q}^\times + \mathbf{q} \mathbf{q}^T}{q_0} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.129)$$

### 1.3.6 无穷小角位移运动的角速度

核心假设: 在无穷小角位移运动的条件下, 角速度矢量  $\omega_{ba}$  在坐标系  $S_b$  下的分量矩阵  $\underline{\omega}_{ba}$  的各个元素看做一阶小量, 一阶更高阶的小量均忽略。

#### 1. 方向余弦矩阵

在无穷小角位移假设下, 有  $C_{ii} \approx 1, i = 1, 2, 3$ ,  $C_{ij} (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$  为一阶小量, 则

$$\dot{\underline{C}}_{ba} = -\underline{C}_{ba} \underline{\omega}_{ba}^\times \Rightarrow \begin{cases} \dot{C}_{11} = \omega_z C_{21} - \omega_y C_{31} \approx 0 \\ \dot{C}_{22} = \omega_x C_{32} - \omega_z C_{12} \approx 0 \\ \dot{C}_{33} = \omega_y C_{13} - \omega_x C_{23} \approx 0 \end{cases} \quad (1.130)$$

以及

$$\begin{cases} \dot{C}_{21} = \omega_x C_{31} - \omega_z C_{11} \approx -\omega_z \\ \dot{C}_{12} = \omega_z C_{22} - \omega_y C_{32} \approx \omega_z \end{cases} \Rightarrow \omega_z \approx -\dot{C}_{21} = \dot{C}_{12} \\ \begin{cases} \dot{C}_{31} = \omega_y C_{11} - \omega_x C_{21} \approx \omega_y \\ \dot{C}_{13} = \omega_x C_{23} - \omega_y C_{33} \approx -\omega_y \end{cases} \Rightarrow \omega_y \approx -\dot{C}_{13} = \dot{C}_{31} \\ \begin{cases} \dot{C}_{32} = \omega_y C_{12} - \omega_x C_{22} \approx -\omega_x \\ \dot{C}_{23} = \omega_x C_{33} - \omega_y C_{13} \approx \omega_x \end{cases} \Rightarrow \omega_x \approx -\dot{C}_{32} = \dot{C}_{23} \end{cases} \quad (1.131)$$

## 2. 欧拉轴 / 角

无穷小角位移假设下有  $\cos \Phi \approx 1$ ,  $\sin \Phi \approx \Phi$ , 则

$$\underline{\omega}_{ba} = \dot{\Phi} \underline{e} - (1 - \cos \Phi) \underline{e}^\times \underline{\dot{e}} + \sin \Phi \underline{\dot{e}} \xrightarrow[\cos \Phi \approx 1]{\sin \Phi \approx \Phi} \underline{\omega}_{ba} \approx \dot{\Phi} \underline{e} + \Phi \underline{\dot{e}} \underline{\Phi} \quad (1.132)$$

其中,  $\underline{\dot{\Phi}} = \Phi \underline{e}$

## 3. 欧拉参数

无穷小角位移假设下有  $q_0 \approx 1$ ,  $q_1, q_2, q_3$  均为一阶小量, 则

$$\dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \left( \underline{q} \underline{E}_3 + \underline{q}^\times \right) \underline{\omega}_{ba} \approx \frac{1}{2} \underline{\omega}_{ba} \quad (1.133)$$

## 4. 欧拉角

对于  $zxy$  顺序旋转, 无穷角位移假设下有  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\alpha = \varphi, \theta, \psi$ , 则

$$\underline{\omega}_{ba} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & 1 & \sin \varphi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (1.134)$$

所以, 在无穷小角位移假设下, 采用  $zxy$  和  $zyx$  两种转动顺序欧拉角描述姿态运动, 则  $\underline{\omega}_{ba}$  近似等于姿态角速率向量。同时, 对比欧拉参数和欧拉角下的无穷小角位移运动的角速度表达, 也可以得到

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 2\dot{q}_1 \\ \dot{\theta} = 2\dot{q}_2 \\ \dot{\psi} = 2\dot{q}_3 \end{cases} \quad (1.135)$$



## 第 2 章 航天器姿态动力学

### 2.1 动力学建模方法简述

研究角速度  $\omega_{ba}$  的变化与作用力矩之间的关系学科称为姿态动力学。一般有以下几个建模方法。

#### 1. 矢量力学法（牛顿—欧拉法）

采用动力学基本定理（即牛顿运动方程的直接推论），给出系统动力学量与作用于该系统的力之间的关系。即动量定理、动量矩定理。

#### 2. 分析力学法

从系统能量观点出发，运用现代力学的拉格朗日法或哈密顿法导出系统的动力学方程。能自动消除物体间的约束力和约束反力，缺点是对于复杂结构，推导工作量大。

#### 3. 矢量力学与分析力学的各种变形方法

凯恩 (Kane) 方法、R/W 方法、旋量方法、高斯最小约束原理方法等。

### 2.2 刚体的姿态动力学建模原理

#### 2.2.1 单质点的动量矩定理

##### 1. 质点的角动量及其导数

如图 2.1 所示，坐标系  $O'XYZ$  是一个惯性坐标系， $O$  是其中的一个动参考点，以  $O$  为原点建立一个动坐标系  $Oxyz$ 。

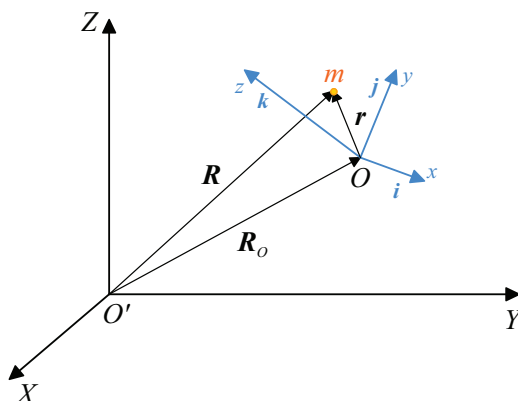


图 2.1: 质点  $m$  关于任意参考点  $O$  的角动量

在动坐标系中存在一个质量为  $m$  的质点，其线动量为

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{R}} \quad (2.1)$$

其中， $\mathbf{R}$  为质点相对于惯性坐标系的位置向量（绝对位置向量）。

质点  $m$  的动量  $\mathbf{p}$  关于参考点  $O$  的角动量（或动量矩）定义为

$$\mathbf{H}^O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}} \quad (2.2)$$

其中， $\mathbf{r}$  为质点  $m$  相对于参考点  $O$  的位置向量（相对位置向量）。由于  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}$ ，则有  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_O + \dot{\mathbf{r}}$ ，那么

$$\mathbf{H}^O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{R}}_O \quad (2.3)$$

其中，公式 (2.3) 右侧第一项  $\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$  称为动坐标系  $Oxyz$  中的视角动量，用  $\mathbf{H}^\omega$  表示；而另一项是因为点  $O$  运动引起的修正项。

质点  $P$  关于参考点的角动量  $\mathbf{H}^O$  的时间导数（相对惯性系）为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_O &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) + m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{R}}_O + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{R}}_O \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}})}_{\text{视角动量的变化率}} - \underbrace{\ddot{\mathbf{R}}_O \times m\mathbf{r}}_{\text{点 } O \text{ 加速度的影响项}} - \underbrace{\dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}}}_{\text{点 } O \text{ 速度的影响项}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2. 单质点的动量矩定理

角动量  $\mathbf{H}^O$  的变化率可以与关于  $O$  点的外力矩联系起来。作用在  $m$  上的力关于点  $O$  的力矩定义为

$$\mathbf{T}^O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.5)$$

由牛顿第二定律，有

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{R}} \quad (2.6)$$

所以

$$\mathbf{T}^O = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{r} \times m(\ddot{\mathbf{R}}_O + \ddot{\mathbf{r}}) \quad (2.7)$$

由于  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ ，所以

$$\mathbf{T}^O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{R}}_O \times m\mathbf{r} \quad (2.8)$$

而  $\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) - \ddot{\mathbf{R}}_O \times m\mathbf{r} - \dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}}$ ，对比可得

### 定理 2.1 单质点的动量矩定理

对于单质点  $m$  相对于任意参考点  $O$  的角动量  $\mathbf{H}^O$  与作用在  $m$  上的力关于点  $O$  的力矩  $\mathbf{T}^O$  的关系为

$$\dot{\mathbf{H}}^O = \mathbf{T}^O - \dot{\mathbf{R}}_O \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (2.9)$$

特别地，如果参考点  $O$  是固定在惯性坐标系的一个点，那么  $\dot{\mathbf{R}}_O = 0$ ，即

$$\dot{\mathbf{H}}^O = \mathbf{T}^O \quad (2.10)$$

这就表明，如果外加力矩为 0，那么  $\mathbf{H}^O$  就是常量，即在外力矩为 0 的条件下，质点的角动量守恒。

### 2.2.2 多质点系统的动量矩定理

如图 2.2 所示, 假设坐标系  $O'XYZ$  是一个惯性坐标系,  $O$  是其中的一个动参考点, 以  $O$  为原点建立一个动坐标系  $Oxyz$ 。

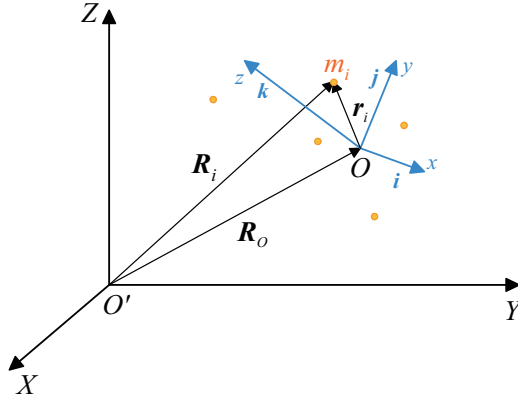


图 2.2: 某个质点  $m_i$  关于任意参考点  $O$  的角动量

在动坐标系中存在一个包含  $N$  个质点的多质点系统  $A$ , 记第  $i$  个质点的质量为  $m$ , 惯性系原点  $O'$  到这个质点的位置向量为  $\mathbf{R}_i$ , 质点运动的绝对速度为  $\mathbf{V}_i$ 。质点相对于动参考点的相对位置向量为  $\mathbf{r}_i$ , 则有  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_O + \mathbf{r}_i$ 。

对于单个质点  $m_i$  其所受合外力为  $\mathbf{F}_i$ , 那么其关于点  $O$  的力矩为  $\mathbf{T}_i^O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ , 那么整个质点系的外力关于  $O$  点的力矩为

$$\mathbf{T}^O = \sum \mathbf{T}_i^O = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.11)$$

设多质点系统的总质量为  $m = \sum m_i$ , 系统的总动量为  $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{V}_i$ , 系统的质心为  $C$ , 其绝对位置向量为  $\mathbf{R}_C$ , 质心速度为  $\mathbf{V}_C$ , 那么由单质点动量矩, 单个质点  $m_i$  关于点  $O$  的动量矩为

$$\mathbf{H}_i^O = \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}_O \times m_i \mathbf{r}_i$$

那么系统的动量矩为

$$\mathbf{H}^O = \sum \mathbf{H}_i^O = \sum \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{V}_O \times \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (2.12)$$

#### 定理 2.2 多质点系统的动量矩定理

与单质点关于动参考点的动量矩定理类似, 多质点系统关于动参考点  $O$  的动量矩定理为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}^O &= \sum \mathbf{T}_i^O - \mathbf{V}_O \times \sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \mathbf{T}^O - \mathbf{V}_O \times \sum m_i (\mathbf{V}_O + \dot{\mathbf{r}}_i) \\ &= \mathbf{T}^O - \mathbf{V}_O \times \sum m_i \mathbf{V}_i \\ &= \mathbf{T}^O - \mathbf{V}^O \times \mathbf{p} \end{aligned} \quad (2.13)$$

可以看出, 多质点系统关于动参考系的动量矩的时间导数不仅和外力矩有关, 还与动参考点的平移运动以及系统的线动量有关, 即多质点系统的姿态运动和线动量耦合。

特别地, 当参考点  $O$  取质心  $C$  时, 由牛顿第二定律及冲量定理, 有

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum \mathbf{F}_i = m \dot{\mathbf{V}}_C \quad (2.14)$$

积分后得系统动量的表达式:  $\mathbf{p} = m \mathbf{V}_C$ 。而由于动参考点  $O$  取  $C$ , 有  $\mathbf{V}_O \times \mathbf{p} = \mathbf{V}_C \times \mathbf{p} = \mathbf{V}_C \times (m \mathbf{V}_C) = 0$ , 那么

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{T}^C \quad (2.15)$$

## 评注

由多质点动量矩公式 (2.15) 可以看出, 当系统质心  $C$  为参考点时, 其动量矩定理具有和参考点取为固定点一样的简单形式, 即**姿态运动和平移运动解耦**。这就是研究物体转动运动时常常取质心坐标系的原因。



## 第 3 章 参考内容

### 3.1 旋转四元数参数的化简

旋转四元数原始表达式为

$$\begin{aligned} b &= b_{\parallel} + b_{\perp} \\ &= a_{\parallel} + qa_{\perp} \quad (\text{其中 } q = [\cos \Phi, \sin \Phi e]) \end{aligned} \quad (3.1)$$

在进一步化简前，我们需要证明几个引理：

#### 引理 3.1

如果  $q = [\cos \Phi, \sin \Phi e]$ ，而且  $e$  为单位向量，那么  $q^2 = qq = [\cos(2\Phi), \sin(2\Phi)e]$ 。

证

这个引理证明只需要用到 Grassmann 积的定义和三角函数的公式。

$$\begin{aligned} q^2 &= [\cos \Phi, \sin \Phi e] \cdot [\cos \Phi, \sin \Phi e] \\ &= [\cos^2 \Phi - (\sin \Phi e \cdot \sin \Phi e), (\cos \Phi \sin \Phi + \sin \Phi \cos \Phi)e + (\sin \Phi e \times \sin \Phi e)] \\ &= [\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi \|e\|^2, 2 \sin \Phi \cos \Phi e + 0] \\ &= [\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi, 2 \sin \Phi \cos \Phi e] \\ &= [\cos(2\Phi), \sin(2\Phi)e] \end{aligned}$$

□

这个引理的几何意义就是，如果绕着同一个轴  $e$  连续旋转  $\Phi$  度 2 次，那么所做出的变换等同于直接绕着  $a$  旋转  $2\Phi$  度。

#### 引理 3.2

假设  $a_{\parallel} = [0, a_{\parallel}]$  是一个纯四元数，而  $q = [\alpha, \beta e]$ ，其中  $e$  是一个单位向量且  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 。在这种条件下，如果  $a_{\parallel}$  平行于  $e$ ，那么  $qa_{\parallel} = a_{\parallel}q$ 。

证

这个引理的证明同样用到了 Grassmann 积，分别计算等式的左右两边。等式左边：

$$\text{LHS} = qa_{\parallel}$$

$$= [\alpha, \beta e] \cdot [0, a_{\parallel}]$$

$$= [0 - \beta e \cdot a_{\parallel}, \alpha a_{\parallel} + 0 + \beta e \times a_{\parallel}]$$

$$= [-\beta e \cdot a_{\parallel}, \alpha a_{\parallel}]$$

$$(a_{\parallel} \text{ 平行于 } e, \text{ 所以 } \beta e \times a_{\parallel} = 0)$$

等式右边:

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= a_{\parallel} q \\
 &= [0, \mathbf{a}_{\parallel}] \cdot [\alpha, \beta \mathbf{e}] \\
 &= [0 - \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \beta \mathbf{e}, \mathbf{0} + \alpha + \alpha \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\parallel} \times \beta \mathbf{e}] \\
 &= [-\mathbf{a}_{\parallel} \cdot \beta \mathbf{e}, \alpha \mathbf{a}_{\parallel}] && (\mathbf{a}_{\parallel} \text{ 平行于 } \mathbf{e}, \text{ 所以 } \beta \mathbf{a}_{\parallel} \times \beta \mathbf{e} = \mathbf{0}) \\
 &= [-\beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_{\parallel}, \alpha \mathbf{a}_{\parallel}] && (\text{点乘遵守交换律}) \\
 &= \text{LHS}
 \end{aligned}$$

□

### 引理 3.3

假设  $a_{\perp} = [0, \mathbf{a}_{\perp}]$  是一个纯四元数, 而  $q = [\alpha, \beta \mathbf{e}]$ , 其中  $\mathbf{e}$  是一个单位向量且  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . 在这种条件下, 如果  $\mathbf{a}_{\parallel}$  正交于  $\mathbf{e}$ , 那么  $qa_{\parallel} = a_{\parallel}q^*$ .

**证** 这个引理的证明和引理 3.2 类似。

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= ea_{\perp} \\
 &= [\alpha, \beta \mathbf{e}] \cdot [0, \mathbf{a}_{\perp}] \\
 &= [0 - \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_{\perp}, \alpha \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{0} + \beta \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}] \\
 &= [0, \alpha \mathbf{a}_{\perp} + \beta \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}] && (\mathbf{a}_{\perp} \text{ 正交于 } \mathbf{e}, \text{ 所以 } \beta \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{0})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{RHS} &= a_{\perp}q^* \\
 &= [0, \mathbf{a}_{\perp}] \cdot [\alpha, -\beta \mathbf{e}] \\
 &= [0 + \mathbf{a}_{\perp} \cdot \beta \mathbf{e}, \mathbf{0} + \alpha \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\perp} \times (-\beta \mathbf{e})] \\
 &= [0, \alpha \mathbf{a}_{\perp} + \mathbf{a}_{\perp} \times (-\beta \mathbf{e})] && (\mathbf{a}_{\perp} \text{ 正交于 } \mathbf{e}, \text{ 所以 } \beta \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{0}) \\
 &= [0, \alpha \mathbf{a}_{\perp} - (-\beta \mathbf{e}) \times \mathbf{a}_{\perp}] && (\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\
 &= [0, \alpha \mathbf{a}_{\perp} + \beta \mathbf{e} \times \mathbf{a}_{\perp}] \\
 &= \text{LHS}
 \end{aligned}$$

□

现在, 我们利用引理对公式进行变形。首先, 利用四元数逆的定义  $qq^{-1} = 1$ , 可得

$$\begin{aligned}
 b &= a_{\parallel} + qa_{\perp} \\
 &= 1 \cdot a_{\parallel} + qa_{\perp} \\
 &= pp^{-1}a_{\parallel} + ppa_{\perp}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中, 引入了新的四元数  $p$  且

$$\begin{aligned}
 q &= p^2 = [\cos \Phi, \sin \Phi \mathbf{e}] \\
 p &= \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right]
 \end{aligned}$$

根据 引理 3.1 可以验证其正确性:

$$\begin{aligned} pp &= p^2 \\ &= \left[ \cos \left( 2 \cdot \frac{\Phi}{2} \right), \sin \left( 2 \cdot \frac{\Phi}{2} \right) \mathbf{e} \right] \\ &= [\cos \Phi, \sin \Phi \mathbf{e}] = q \end{aligned}$$

同样的, 容易得到  $p$  也是一个单位四元数, 即

$$p^{-1} = p^*$$

那么

$$\begin{aligned} b &= pp^{-1}a_{\parallel} + ppa_{\perp} \\ &= pp^*a_{\parallel} + ppa_{\perp} \end{aligned}$$

结合 引理 3.2 和 引理 3.3, 对公式再次变形

$$\begin{aligned} b &= pp^*a_{\parallel} + ppa_{\perp} \\ &= pa_{\parallel}p^* + pa_{\perp}p^* \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$= p(a_{\parallel} + a_{\perp})p^* \quad (3.4)$$

由因为  $a_{\parallel}, a_{\perp}$  是  $a$  的分量, 所以  $a_{\parallel} + a_{\perp} = a$ , 即

$$b = pap^* \quad (3.5)$$

其中,

$$p = \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \quad (3.6)$$

## 3.2 旋转的欧拉轴 / 角参数表达和四元数表达的等价性

若定义这些旋转参数和向量为四元数

$$\begin{aligned} a &= [0, \mathbf{a}] & b &= [0, \mathbf{b}] \\ e &= [0, \mathbf{e}] & q &= \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{e}$  是旋转轴单位向量,  $\Phi$  是旋转的角度。则

$$b = qaq^* = \mathbf{b} = \cos \Phi \mathbf{a} + (1 - \cos \Phi)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})\mathbf{e} + \sin \Phi(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \quad (3.7)$$

证

首先, 引入一个引理, 即[向量二重叉乘公式](#)。

### 引理 3.4 向量二重叉乘公式

向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  满足

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (3.9)$$

这个引理的证明略。

下面我们开始推导旋转的欧拉轴 / 角参数表达和四元数表达的等价性, 由 Grassmann 积,

$$\begin{aligned}
 b &= qaq^* \\
 &= \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \cdot [0, \mathbf{a}] \cdot \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ 0 - \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}, \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \mathbf{0} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} \right] \cdot \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}, \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} \right] \cdot \left[ \cos \frac{\Phi}{2}, -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} - \left( -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \left( \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} \right) \right), \right. \\
 &\quad \left. -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} \cdot \left( -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right) + \cos \frac{\Phi}{2} \left( \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} \right) + \left( \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} \right) \times \left( -\sin \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \right) \right] \\
 &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \right. \\
 &\quad \left. \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{e} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \right. \\
 &\quad \left. \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right]
 \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$  正交于  $\mathbf{e}$ , 即

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) = 0$$

进一步化简得

$$\begin{aligned}
 b &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \sin^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{a}), \right. \\
 &\quad \left. \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ -\sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} + \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}, \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ 0, \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right]
 \end{aligned}$$

利用倍角公式化简和 引理 3.4 进一步化简得

$$\begin{aligned}
 b &= \left[ 0, \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos^2 \frac{\Phi}{2} \mathbf{a} + 2 \sin \frac{\Phi}{2} \cos \frac{\Phi}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{a} - \sin^2 \frac{\Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ 0, \frac{1 - \cos \Phi}{2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \frac{1 + \cos \Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \frac{1 - \cos \Phi}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} \right] \\
 &= \left[ 0, \frac{1 - \cos \Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \frac{1 + \cos \Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \frac{1 - \cos \Phi}{2} ((\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{a} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}) \right] \\
 &= \left[ 0, \frac{1 - \cos \Phi}{2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \frac{1 + \cos \Phi}{2} \mathbf{a} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) - \frac{1 - \cos \Phi}{2} (\mathbf{a} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}) \right] \\
 &= \left[ 0, (1 - \cos \Phi) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e} + \cos \Phi \mathbf{a} + \sin \Phi (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \right] = \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 向量运算的矩阵表示

#### 3.3.1 向量叉乘的矩阵表示

已知向量在三维坐标系下的表达为  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ , 其中,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  是单位标准正交基, 且其运算满足表 3.1, 即满足右手系。

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	0	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	0	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	0

表 3.1: 单位标准正交向量的叉乘计算表 (左  $\times$  上)

那么, 由向量叉乘的分配律及单位标准正交基的运算法则,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\
 &= u_1v_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + u_1v_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + u_1v_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + u_2v_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + u_2v_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + u_2v_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
 &\quad + u_3v_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + u_3v_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + u_3v_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\
 &= u_1v_2\mathbf{k} + u_1v_3(-\mathbf{j}) + u_2v_1(-\mathbf{k}) + u_2v_3\mathbf{i} + u_3v_1\mathbf{j} + u_3v_2(-\mathbf{i}) \\
 &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

将向量用矩阵表达, 即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\
 &= [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以, 我们可以得到向量叉乘矩阵的定义

#### 定义 3.1 向量叉乘矩阵

已知向量  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ , 其在同一个坐标系下的叉乘运算可以用矩阵表达

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}^T \underline{\mathbf{u}}^\times \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}^T (\underline{\mathbf{u}}^\times)^T \mathbf{e} \quad (3.10)$$

同时, 叉乘矩阵有一个很重要的性质, 从其定义很容易可以发现

$$(\underline{\mathbf{u}}^\times)^T = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = -\underline{\mathbf{u}}^\times \quad (3.11)$$

进一步, 我们将叉乘运算进一步写为分量形式后可以定义广义向量叉乘运算如下。

### 定义 3.2 广义向量叉乘运算

已知向量  $\underline{u}, \underline{v}$  在坐标系  $S$  下的分量形式为  $\underline{u}^T \underline{e}, \underline{e}^T \underline{v}$ , 则

$$\underline{u}^T \underline{e} \times \underline{e}^T \underline{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underline{e}^T \underline{u}^\times \underline{v} \quad (3.12)$$

定义广义向量叉乘运算为

$$\underline{u}^T \underline{e} \times \underline{e}^T = \underline{e}^T \underline{u}^\times \quad (3.13)$$

### 3.3.2 叉乘矩阵的坐标变换

对于向量叉乘运算  $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$ , 在坐标系  $S_a, S_b$  下的矩阵形式分别为

$$\underline{w}_a = \underline{u}_a^\times \underline{v}_a, \quad \underline{w}_b = \underline{u}_b^\times \underline{v}_b$$

由  $\underline{w}_a = \underline{C}_{ab} \underline{w}_b$ ,

$$\underline{C}_{ab} \underline{w}_b = \underline{u}_a^\times \underline{C}_{ab} \underline{v}_b \Rightarrow \underline{w}_b = \underline{C}_{ba} \underline{u}_a^\times \underline{C}_{ab} \underline{v}_b$$

通过对比前后两个式子可得

### 定理 3.1 叉乘矩阵的坐标变换

$\underline{u}$  在坐标系  $S_a, S_b$  下的叉乘矩阵的坐标变换关系为

$$\underline{u}_b^\times = (\underline{C}_{ba} \underline{u}_a) = \underline{C}_{ba} \underline{u}_a^\times \underline{C}_{ab} = \underline{C}_{ba} \underline{u}_a^\times \underline{C}_{ba}^T \quad (3.14)$$

进一步, 可以扩展得到叉乘矩阵恒等式

$$(\underline{C} \underline{u})^\times = \underline{C} \underline{u}^\times \underline{C}^T \quad (3.15)$$

### 3.3.3 向量两边乘同一个向量运算的矩阵表示

已知向量在三维坐标系下的表达为  $\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}$ ,  $\underline{v} = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}$ , 则

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u} &= (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}) \cdot (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) \underline{u} \\ &= (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \underline{u} \\ &= (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}) \\ &= (u_1^2 v_1 + u_1 u_2 v_2 + u_1 u_3 v_3) \underline{i} + (u_1 u_2 v_1 + u_2^2 v_2 + u_2 u_3 v_3) \underline{j} + (u_1 u_3 v_1 + u_2 u_3 v_2 + u_3^2 v_3) \underline{k} \end{aligned}$$

用矩阵表达为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= (u_1^2 v_1 + u_1 u_2 v_2 + u_1 u_3 v_3) \mathbf{i} + (u_1 u_2 v_1 + u_2^2 v_2 + u_2 u_3 v_3) \mathbf{j} + (u_1 u_3 v_1 + u_2 u_3 v_2 + u_3^2 v_3) \mathbf{k} \\
 &= [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u_1^2 v_1 + u_1 u_2 v_2 + u_1 u_3 v_3 \\ u_1 u_2 v_1 + u_2^2 v_2 + u_2 u_3 v_3 \\ u_1 u_3 v_1 + u_2 u_3 v_2 + u_3^2 v_3 \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

所以, 我们可以得到

### 定理 3.2 向量两边乘同一个向量运算的矩阵表示

已知向量  $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ , 则

$$\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = [\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{e}}^T \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{e}} \quad (3.16)$$

## 3.4 向量旋转矩阵和坐标系旋转矩阵的关系

假设向量  $\mathbf{a}$  在坐标系  $S_a, S_b$  下的分量为

$$\mathbf{a} = \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_a = \underline{\mathbf{v}} \underline{\mathbf{e}}_b$$

为了方便计算, 这里向量均表示为分量阵列, 即  $\underline{\mathbf{u}}$  和  $\underline{\mathbf{v}}$  都是  $3 \times 3$  的对角矩阵

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u_x & 0 & 0 \\ 0 & u_y & 0 \\ 0 & 0 & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{j}_a \\ \mathbf{k}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & 0 & 0 \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \\ \mathbf{j}_b \\ \mathbf{k}_b \end{bmatrix}$$

考虑向量  $\mathbf{a}$  在绕轴  $\mathbf{e}$  旋转  $\Phi$  后得到的向量  $\mathbf{b}$  在坐标系  $S_b$  的分量为  $\underline{\mathbf{u}}$ , 即

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} u_x & 0 & 0 \\ 0 & u_y & 0 \\ 0 & 0 & u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{j}_a \\ \mathbf{k}_a \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_b$$

且其中的向量旋转矩阵记为  $\underline{\mathbf{R}}_{ba}$ , 坐标系旋转矩阵记为  $\underline{\mathbf{C}}_{ba}$ , 那么

$$\begin{cases} \mathbf{b} = \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_b \\ \mathbf{b} = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \mathbf{a} = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_a \end{cases} \xrightarrow{\text{消去 } \mathbf{b}} \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_b = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_a \xrightarrow{\underline{\mathbf{e}}_b = \underline{\mathbf{C}}_{ba} \underline{\mathbf{e}}_a} \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{C}}_{ba} \underline{\mathbf{e}}_a = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{e}}_a \quad (3.17)$$

等式两边右乘  $(\underline{\mathbf{e}}_a)^{-1}$ , 消去  $\underline{\mathbf{e}}_a$ , 可得

$$\underline{\mathbf{u}} \underline{\mathbf{C}}_{ba} = \underline{\mathbf{R}}_{ba} \underline{\mathbf{u}} \quad (3.18)$$

### 3.5 欧拉轴角向量恒等式的证明

1.  $\underline{e}^T \underline{e} = 1$

**证** 由于欧拉轴向量  $\underline{e}$  是单位向量, 所以

$$\underline{e} \cdot \underline{e} = \underline{e}^T \underline{e} = 1 \quad (3.19)$$

□

2.  $\underline{e}^\times \underline{e} = 0$

**证** 由于平行向量叉乘为 0, 所以

$$\underline{e} \times \underline{e} = \underline{e}^\times \underline{e} = 0 \quad (3.20)$$

□

3.  $\underline{e}^\times \underline{e} = 0$

**证** 对公式 (3.20) 两边同时求导, 有

$$(\underline{e}^\times \underline{e})' = 0 \Rightarrow \dot{\underline{e}}^\times \underline{e} + \underline{e}^\times \dot{\underline{e}} = 0 \Rightarrow \underline{e}^\times \underline{e} = -\underline{e}^\times \dot{\underline{e}} \quad (3.21)$$

□

4.  $\underline{e}^\times \underline{e}^\times = \underline{e} \dot{\underline{e}}^T$

**证** 设  $\underline{e} = [e_x \ e_y \ e_z]^T$ , 则

$$\dot{\underline{e}} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix}, \quad \underline{e}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{e}_x & \dot{e}_y \\ \dot{e}_z & 0 & -\dot{e}_x \\ -\dot{e}_y & \dot{e}_x & 0 \end{bmatrix}$$

注意:  $\underline{e}^\times$  同样是反对称矩阵, 即  $(\underline{e}^\times)^T = -\underline{e}^\times$ , 所以有

$$\underline{e}^\times \underline{e}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{e}_z & \dot{e}_y \\ \dot{e}_z & 0 & -\dot{e}_x \\ -\dot{e}_y & \dot{e}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{e}_z & \dot{e}_y \\ \dot{e}_z & 0 & -\dot{e}_x \\ \dot{e}_y & \dot{e}_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{e}_y \dot{e}_y - \dot{e}_z \dot{e}_z & \dot{e}_y \dot{e}_x & \dot{e}_z \dot{e}_x \\ \dot{e}_x \dot{e}_y & -\dot{e}_x \dot{e}_x - \dot{e}_z \dot{e}_z & \dot{e}_z \dot{e}_y \\ \dot{e}_x \dot{e}_z & \dot{e}_y \dot{e}_z & -\dot{e}_x \dot{e}_x - \dot{e}_y \dot{e}_y \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

由于向量的导数与向量正交 ( $\underline{u} = \omega \times \underline{u}$ ), 所以

$$\dot{\underline{e}} \cdot \underline{e} = \dot{\underline{e}}^T \underline{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x & \dot{e}_y & \dot{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \dot{e}_x e_x + \dot{e}_y e_y + \dot{e}_z e_z = 0 \quad (3.23)$$

替换掉公式 (3.22) 中的对角线元素, 可以得到

$$\underline{e}^\times \underline{e}^\times = \begin{bmatrix} -\dot{e}_y \dot{e}_y - \dot{e}_z \dot{e}_z & \dot{e}_y \dot{e}_x & \dot{e}_z \dot{e}_x \\ \dot{e}_x \dot{e}_y & -\dot{e}_x \dot{e}_x - \dot{e}_z \dot{e}_z & \dot{e}_z \dot{e}_y \\ \dot{e}_x \dot{e}_z & \dot{e}_y \dot{e}_z & -\dot{e}_x \dot{e}_x - \dot{e}_y \dot{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \dot{e}_x & \dot{e}_y \dot{e}_x & \dot{e}_z \dot{e}_x \\ \dot{e}_x \dot{e}_y & \dot{e}_y \dot{e}_y & \dot{e}_z \dot{e}_y \\ \dot{e}_x \dot{e}_z & \dot{e}_y \dot{e}_z & \dot{e}_z \dot{e}_z \end{bmatrix} = \underline{\dot{e}} \underline{e}^T \quad (3.24)$$

□



## 参考文献

- [1] Krasjet, “Quaternion,” <https://github.com/Krasjet/quaternion>, 2020.



# 插图目录

1.1	天球坐标系的基本概念	1
1.2	地心赤道惯性坐标系	1
1.3	地心赤道旋转坐标系	2
1.4	轨道坐标系和星体坐标系	2
1.5	绕 $x$ 轴旋转	5
1.6	绕 $y$ 轴旋转	5
1.7	绕 $z$ 轴旋转	5
1.8	$ZXZ$ 顺序欧拉角旋转	5
1.9	$ZXY$ 顺序欧拉角旋转	5
1.10	欧拉轴旋转分解图	6
1.11	欧拉轴旋转投影图	6
1.12	欧拉轴 / 角的坐标变换图	6
1.13	欧拉转角与两个坐标系之间的几何关系	8
1.14	向量旋转分解图	14
1.15	向量旋转投影图	14
1.16	基向量的转动	22
2.1	质点 $m$ 关于任意参考点 $O$ 的角动量	31
2.2	某个质点 $m_i$ 关于任意参考点 $O$ 的角动量	33



# 表格目录

1.1	四元数基本向量的乘法计算表（左 $\times$ 上）	11
3.1	单位标准正交向量的叉乘计算表（左 $\times$ 上）	39



# 索引

## B

标量向量有序对, 9

## C

叉乘矩阵恒等式, 40

春分点, 1

纯四元数, 13

## D

动量定理, 31

动量矩, 32

动量矩定理, 31, 32

单位四元数, 13

地心赤道旋转坐标系, 2

地心第四赤道坐标系, 2

地心第一赤道坐标系, 1

轨道坐标系, 2

单质点的动量矩定理, 32

## F

分量矩阵, 2

分析力学法, 31

方向余弦矩阵, 3

俯仰角, 24

俯仰轴, 2

## G

滚动轴, 2

共轭, 12

格林威治子午线, 2

Grassmann 积, 12

惯性坐标系, 1

广义向量叉乘运算, 40

滚转角, 24

## H

黄道平面, 1

哈密顿法, 31

## J

绝对导数, 22

角动量, 32

角动量守恒, 32

基向量, 2

基元旋转矩阵, 4

## L

罗德里格参数, 20

拉格朗日法, 31

## N

逆, 12

牛顿欧拉法, 31

## O

欧拉参数, 16

欧拉角, 4

欧拉轴, 6

欧拉轴 / 角, 6

## P

偏航角, 24

偏航轴, 2

## S

视角动量, 32

矢量力学法, 31

四元数, 9

四元数的模长, 9

## T

天球, 1

**X**

虚部向量, 27

相对导数, 22

线动量, 32

向量, 2

向量叉乘矩阵, 39

向量二重叉乘公式, 37

向量基, 2

向量旋转矩阵, 7

星体坐标系, 2

修正的罗德里格参数, 20

**Y**

右乘, 10

**Z**

坐标系旋转矩阵, 3

坐标阵, 2

左乘, 10

姿态动力学, 31

姿态运动学, 21