

# 数学物理方法<sup>\*</sup>

易鹏

中山大学

指导老师 胡战超

内部版本号：V7.38.070 (公测版)

2022 年 9 月 9 日

<sup>\*</sup>本笔记已经开源，可以免费下载，github 地址：<https://github.com/Lovely-XPP/Notebook>  
gitee 分流地址：[https://gitee.com/sysu\\_xpp/Notebook](https://gitee.com/sysu_xpp/Notebook)



# 目录

第 1 章	绪论	1
第 2 章	基本方程的建立	3
2.1	弦的横振动方程	3
2.2	梯度与散度	4
2.2.1	梯度	4
2.2.2	散度	4
2.2.3	Laplace 算子	5
2.3	热传导方程	5
2.3.1	热传导的 Fourier 定律	5
2.3.2	热传导方程的推导	5
2.4	稳定问题	7
2.5	三类方程总结	7
2.6	方程的定解条件	7
2.6.1	定解条件	7
2.6.2	初始条件	8
2.6.3	边界条件	8
2.6.4	定解问题总结	9
2.7	定解问题的适定性	9
第 3 章	分离变量法	11
3.1	预备知识	11
3.1.1	二阶线性常系数齐次微分方程	11
3.1.2	函数的傅里叶级数展开	11
3.1.3	特征函数的正交性	12
3.2	有界弦的自由振动	12
3.2.1	定解问题	12
3.2.2	方程的处理	12

3.2.3	边界条件与初始条件的处理	13
3.2.4	求解方程	13
3.2.5	代入初始条件	14
3.2.6	求解结果	15
3.2.7	分离变量法总结	15
<b>3.3</b>	<b>有限杆的传热问题</b>	<b>15</b>
3.3.1	定解问题	15
3.3.2	分离变量	16
3.3.3	特征值问题	16
3.3.4	相乘叠加得一般解	18
3.3.5	确定叠加系数	18
<b>3.4</b>	<b>非齐次方程的解法</b>	<b>19</b>
3.4.1	特征函数展开法	19
3.4.2	两端固定弦的受迫振动	19
<b>3.5</b>	<b>非齐次边界条件的处理</b>	<b>21</b>
3.5.1	非齐次边界条件的概念	21
3.5.2	非齐次边界条件的处理方法	22
3.5.3	四类非齐次边界条件的齐次化函数	23
3.5.4	方程和边界条件同时齐次化的情形	24
<b>3.6</b>	<b>圆域内的二维 Laplace 方程的稳定问题</b>	<b>25</b>
3.6.1	预备知识	25
3.6.2	物理问题	26
<b>3.7</b>	<b>分离变量法总结</b>	<b>31</b>
3.7.1	一维非齐次波动方程	31
3.7.2	一维非齐次热传导方程	32
3.7.3	圆域内非齐次 Laplace 方程	33
3.7.4	矩形域内非齐次 Laplace 方程	33
3.7.5	分离变量法解题步骤总结	34
<b>第 4 章</b>	<b>行波法</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>一维波动方程的达朗贝尔公式</b>	<b>39</b>
4.1.1	达朗贝尔公式的推导	39
4.1.2	达朗贝尔公式的物理意义	41
<b>4.2</b>	<b>特征线</b>	<b>42</b>
<b>4.3</b>	<b>二阶线性双变量偏微分方程</b>	<b>43</b>
<b>4.4</b>	<b>三维波动方程的泊松公式</b>	<b>43</b>
4.4.1	三维波动方程的球对称解	43

4.4.2	三维波动方程的泊松公式	44
4.4.3	三维波动方程泊松公式的物理意义	47
4.4.4	二维波动方程泊松公式及其物理意义	47
4.5	泊松公式物理意义总结	48
<b>第 5 章</b>	<b>积分变换法</b>	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>Fourier 变换</b>	<b>49</b>
5.1.1	Fourier 变换的理解	49
5.1.2	Fourier 变换的基本性质	51
5.1.3	$\delta$ 函数及其 Fourier 变换	51
<b>5.2</b>	<b>Laplace 变换</b>	<b>52</b>
5.2.1	Laplace 变换的理解	52
5.2.2	Laplace 变换的性质	53
5.2.3	Laplace 反演的计算	53
5.2.4	Laplace 变换的应用——求解常微分方程 (组)	54
<b>5.3</b>	<b>积分变换法</b>	<b>54</b>
5.3.1	积分变换法简述	54
5.3.2	积分变换法举例	55
<b>第 6 章</b>	<b>Laplace 方程的格林函数法</b>	<b>65</b>
<b>6.1</b>	<b>Laplace 方程边值问题的提出</b>	<b>65</b>
6.1.1	三维 Laplace 方程	65
6.1.2	两类边值问题	65
6.1.3	内问题和外问题	66
<b>6.2</b>	<b>格林公式</b>	<b>66</b>
6.2.1	第一格林公式	66
6.2.2	第二格林公式	66
6.2.3	调和函数的基本性质	67
<b>6.3</b>	<b>格林函数</b>	<b>68</b>
6.3.1	格林函数的引入	68
6.3.2	格林函数的性质	70
6.3.3	格林函数的静电学背景	70
<b>6.4</b>	<b>两种特殊区域的格林函数及 Dirichlet 问题的解</b>	<b>71</b>
6.4.1	电像法	71
6.4.2	半空间的格林函数法	71
6.4.3	球域的格林函数法	72

<b>第 7 章 差分法</b> .....	<b>75</b>
<b>7.1 差分格式</b> .....	<b>75</b>
<b>7.2 Laplace 方程的差分解法</b> .....	<b>76</b>
7.2.1 区域离散化 .....	76
7.2.2 建立离散方程 .....	77
7.2.3 第三类边界条件的处理* .....	78
7.2.4 总结 .....	79
<b>7.3 热传导方程的差分解法</b> .....	<b>80</b>
7.3.1 时间变量的特殊性 .....	80
7.3.2 建立离散方程 .....	80
7.3.3 时间推进 .....	82
7.3.4 总结 .....	83
<b>7.4 波动方程的差分解法</b> .....	<b>84</b>
7.4.1 求解步骤 .....	84
<b>附录</b> .....	<b>87</b>
<b>a. 索引</b> .....	<b>87</b>

# 第 1 章 绪论

数学物理方程课程主要研究以下三个方程。

定义 1.1 泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f \quad (1.1)$$

定义 1.2 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2)$$

定义 1.3 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.3)$$

可以发现，以上方程都是二阶线性偏微分方程。

- 二阶：导数的最高阶数为 2；
- 线性：只存在对于未知函数的线性运算<sup>1</sup>。

---

<sup>1</sup>线性运算：对于运算  $\mathcal{L}(u_1, u_2)$ ，满足：
$$\frac{\partial^n \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}{\partial t^n} = \frac{\alpha_1 \partial^n \mathcal{L}(u_1)}{\partial t^n} + \frac{\alpha_2 \partial^n \mathcal{L}(u_2)}{\partial t^n}$$





## 第 2 章 基本方程的建立

### 2.1 弦的横振动方程

有一个完全柔软的轻质均匀弦，沿水平直线绷紧，而后以某种方法激发，使弦在同一平面上作小振动，列出弦的振动方程。

以弦的平衡位置为  $x$  轴，弦的一端为原点，建立平面直角坐标系  $u-x$ ，如图。

描述弦的物理量：设  $u(x, t)$  是坐标为  $x$  的弦上一点在  $t$  时刻的位移。

#### 1. 假设

- 在弦上隔离出长为  $dx$  的一小段（弧元）。弧元的长度足够小，以至于能看作质点。
- 由于弦是完全柔软且绷紧，它在两个端点  $x$  及  $x+dx$  处受到张力的作用而没有法向应力。
- 略去重力的作用（轻质）。

#### 2. 物理方程

由假设和受力分析，

$x$  方向：

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \quad (2.1)$$

$u$  方向：

$$T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 = \rho dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

其中， $\rho$  是线密度 [kg/m].

#### 3. 简化

小振动  $\rightarrow \theta_1, \theta_2$  是小量，由  $\cos \theta$  的泰勒展开：

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1 \quad (2.3)$$

结合(2.1)，可以得到

$$T_1 \cos \theta_1 \approx T_2 \cos \theta_2 \approx T_1 \approx T_2 \quad (2.4)$$

结合(2.2)，可以得到

$$\frac{T_2 \sin \theta_2}{T} - \frac{T_1 \sin \theta_1}{T} = \frac{\rho dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{T_2 \sin \theta_2}{T_2 \cos \theta_2} - \frac{T_1 \sin \theta_1}{T_1 \cos \theta_1} = \frac{\rho dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \tan \theta_2 - \tan \theta_1 = \frac{\rho dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x = \frac{\rho dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

经变形, 得:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}|_x}{dx} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

根据一阶导数的定义:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.6)$$

定义  $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ , 则方程改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

其中,  $a$  是弦的振动传播速度。

#### 4. 扩展

如果弦在位移  $u$  的方向上还受到外力的作用, 设单位长度所受的外力为  $f$ , 则有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}|_x + f dx = \frac{\rho dx}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

因此,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho} \quad (2.9)$$

与未知函数  $u$  无关的自由项  $\frac{f}{\rho}$ , 称为**非其项**。 $\frac{f}{\rho}$  为单位质量所受的外力。

### 定理 2.1 三维空间中的波动方程

更一般地, 在三维空间中的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2.10)$$

## 2.2 梯度与散度

### 2.2.1 梯度

#### 定义 2.1 梯度

对于标量  $u(x, y, z)$ , 定义**梯度**运算

$$\mathbf{grad} u = \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) u \quad (2.11)$$

即

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.12)$$

### 2.2.2 散度

#### 定义 2.2 散度

对于矢量  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , 定义**散度**运算

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Laplace 算子

对于标量场  $u(x, y, z)$ , 定义运算

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.14)$$

其中, 记号  $\Delta$  称为 Laplace 算子

## 2.3 热传导方程

### 2.3.1 热传导的 Fourier 定律

#### 定理 2.2 一维 Fourier 定律

设有一块连续介质。取一定坐标系, 并用  $u(x, y, z, t)$  表示介质内空间坐标为  $(x, y, z)$  的一点在  $t$  时刻的温度。从宏观上看, 单位时间内通过垂直  $x$  方向的单位面积的热量  $q$  与空间的温度变化率成正比。

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15)$$

其中,  $q$  称为热流密度,  $k$  称为导热率。 $k$  与材料的性质有关。如果温度变化的范围不大, 则可以近似地将  $k$  看成与  $u$  无关。

#### 定理 2.3 三维 Fourier 定律

在介质中三个方向上都存在温度差, 则有:

$$\begin{cases} q_x = -k_x \frac{\partial u}{\partial x} \\ q_y = -k_y \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_z = -k_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (2.16)$$

### 2.3.2 热传导方程的推导

#### 1. 假设

- 材料均匀且统一
- 材料具有各向同性

#### 2. 分析

- 理论基础和推论: 由 Fourier 定律和材料的各向均匀性, 可以得到

$$\begin{cases} q_x = -k \frac{\partial u}{\partial x} \\ q_y = -k \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_z = -k \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \quad (2.17)$$

其中,  $k$  是常数。

- 建立微元体: 在介质内隔离出一个平行六面体, 六个面都和坐标面重合。

- 原理：能量守恒，即六面体内无热量来源或消耗

$$\text{通过六个面的净热量流入} = \text{微元体总能量增加} \quad (2.18)$$

- $x$  方向能量分析： $\Delta t$  时间内沿着  $x$  方向流入六面体的热量

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= \Delta q_x \cdot S \cdot \Delta t \\ &= [(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}] \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \\ &= \left[ k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \\ &= \frac{\left[ k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right]}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned}$$

- 各方向能量：同理可得

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ \Delta Q_y &= k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ \Delta Q_z &= k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\ \Delta Q &= \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z = (k \nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad (2.19)$$

- 微元体总能量增加：

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta m \cdot c \cdot \Delta u \\ &= \rho \Delta V \cdot c \cdot \Delta u \\ &= \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u \end{aligned} \quad (2.20)$$

- 由能量守恒，得

$$\Delta Q = (k \nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u \quad (2.21)$$

- 结论：

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k \nabla^2 u = 0 \quad (2.22)$$

引入扩散率  $D = \frac{k}{\rho c}$ ：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = 0 \quad (2.23)$$

- 扩展

- 有热源的情形

如果在介质内有热量产生，单位时间内单位体积介质中产生的热量为  $F(x, y, z, t)$ ：

$$(k \nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + F(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = \frac{F(x, y, z, t)}{\rho c} = f(x, y, z, t) \quad (2.25)$$

### 一 介质扩散

微观机理的相似性, 就决定了扩散方程和热传导方程有相同的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = f \quad (2.26)$$

其中，

$u$  代表分子浓度

$D$  代表浓度扩散率

$f$  代表单位时间内在单位体积中该种分子的产率

## 2.4 稳定问题

以热传导问题为例

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = f$$

- 在一定条件下，物体的温度达到相对稳定，即不随时间的变化而变化，则温度分布满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{D} \quad (2.27)$$

- 特别地, 当  $f = 0$ , 则有 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{2.28}$$

## 2.5 三类方程总结

方程名称	数学表达式	物理过程
波动方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$	波动过程
热传导方程	$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u$	扩散过程
Poisson 方程	$\nabla^2 u = f$	稳恒状态
Laplace 方程	$\nabla^2 u = 0$	

表 2.1: 建立的方程总结

## 2.6 方程的定解条件

### 2.6.1 定解条件

偏微分方程反映了一般的物理规律 → 共性

定解条件  $\rightarrow$  个性

定解条件可以分为两类

定解条件 { 初始条件: 反映“历史状况”  
边界条件: 反映“通过表面和外界的相互作用”

## 2.6.2 初始条件

### 定义 2.3 初始条件

物理过程的初始状况的数学表达式称为**初始条件**。

**总原则**：初始条件应该完全描写初始时刻  $t = 0$  时介质内部及边界上任意一点的状况。

波动方程的初始条件：由于方程中出现温度对时间  $t$  的二阶偏微分，应该给出初始时刻的位移和速度

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases} \quad (x, y, z) \in \bar{V} \quad (2.29)$$

热传导方程的初始条件：由于方程中只出现温度对时间  $t$  的一阶偏微分，只需给出初始时刻的温度

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \bar{V} \quad (2.30)$$

### 注意

- 必须是整个介质的初始状况。
- 初始条件个数与时间偏导数的阶数相等。

波动方程 → 二阶时间偏导 → 两个初始条件

热传导方程 → 一阶时间偏导 → 一个初始条件

稳定问题（Poisson 方程、Laplace 方程）无初始条件

## 2.6.3 边界条件

物理过程的边界状况的数学表达式称为**边界条件**。

**总原则**：边界条件应该完全描写边界上各点在任意时刻  $t \geq 0$  的状况。

### 定义 2.4 第一类边界条件

定义：给定所研究物理量在边界上的值，也称为**Dirichlet 边界条件**。

数学表达式（边界面  $S$ ）：

$$u|_S = f_1 \quad (2.31)$$

例子：

- 振动中的固定端
- 热传导中已知边界温度

### 定义 2.5 第二类边界条件

定义：给定所研究物理量在边界的外法向导数的值，也称为**Neumann 边界条件**。

数学表达式（边界面  $S$ ）：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f_2 \quad (2.32)$$

例子：

- 热传导中已知热流密度

### 定义 2.6 第三类边界条件

定义：给定所研究物理量及其外法向导数的线性组合在边界上的值，也称为Robin 边界条件或Mixed 边界条件。

数学表达式（边界面  $S$ ）：

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \right) \Big|_S = f_3 \quad (2.33)$$

例子：

- 热传导中热流密度服从牛顿冷却定律

边界条件等号右侧的函数如果为 0，则称为齐次边界条件。

### 2.6.4 定解问题总结

定解问题总结框架如图2.1.

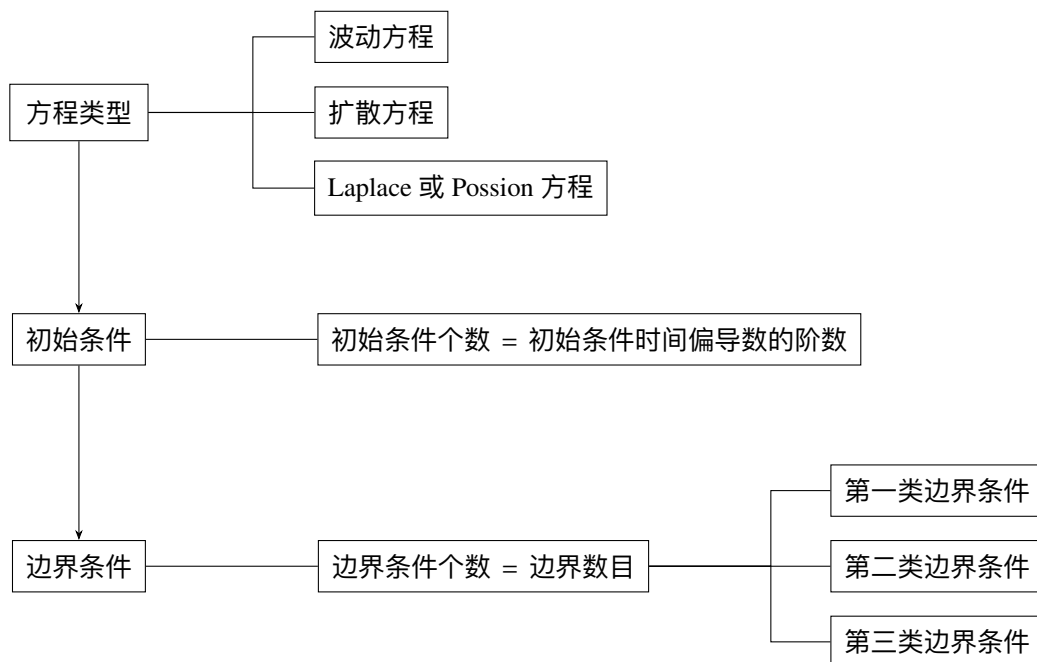


图 2.1: 定解问题总结框架图

## 2.7 定解问题的适定性

如果一个定解问题存在唯一且稳定的解，则这个问题是适定的。

### 1. 解的存在性——定解问题有解

如果定解条件过多，或相互矛盾，则定解问题无解。

### 2. 解的唯一性——定解问题的解是唯一的

如果定解条件不足，则解就不是唯一的。

### 3. 解的稳定性

(a) 如果定解条件中的已知条件（例如方程和定解条件中的已知参数和函数）有微小改变时，解也只有微小改变；

(b) 对于线性偏微分方程，解都是稳定的。





## 第3章 分离变量法

### 3.1 预备知识

#### 3.1.1 二阶线性常系数齐次微分方程

##### 定义 3.1 特征根与特征方程

考虑方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3.1)$$

其中,  $p, q$  是常数. 考虑这个方程解的形式为

$$y = e^{\lambda x}$$

代入原方程, 消去  $e^{\lambda x}$  则得到特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (3.2)$$

特征方程的根

$$\lambda = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) \quad (3.3)$$

称为特征根.

##### 定理 3.1 二阶线性常系数齐次微分方程的通解

特征根	通解形式
两相异实根 $\lambda_1, \lambda_2$	$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
二重根 $\lambda_1$	$(C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

表 3.1: 二阶线性常系数齐次微分方程的通解

#### 3.1.2 函数的傅里叶级数展开

##### 定理 3.2 函数的正弦级数展开

在  $[0, l]$  上定义的函数  $f(x)$  有正弦级数展开

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.4)$$

其中,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (3.5)$$

### 3.1.3 特征函数的正交性

#### 定理 3.3 特征函数的正交性

设有一般形式的特征值问题

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) &= 0 \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) &= 0 \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ .

设  $X_n$  是对应特征值  $\lambda_n$  的特征函数,  $X_m$  是对应特征值  $\lambda_m$  的特征函数, 且  $m \neq n$ , 则特征函数的正交性的数学表达式为

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (3.6)$$

## 3.2 有界弦的自由振动

### 3.2.1 定解问题

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

边界条件

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad t > 0 \quad (3.8)$$

初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.9)$$

我们希望所求的解具有分离变量的形式:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.10)$$

将方程(3.7)代入, 可得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \quad (3.11)$$

### 3.2.2 方程的处理

由于我们求的是非零解, 可以得到

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (3.12)$$

方程左端与  $t$  无关, 右端与  $x$  无关, 所以整个方程与  $t, x$  均无关, 即为常数

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad (3.13)$$

整理后得到

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

### 3.2.3 边界条件与初始条件的处理

对于边界条件，可以得到

$$u|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u|_{x=l} = 0 \Rightarrow X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

而对于初始条件，由于方程非齐次，不可以分离变量得到进一步的表达式。

### 3.2.4 求解方程

对于  $X(x)$ ，我们得到二阶常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

其特征方程为

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (3.16)$$

其特征根为

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad (3.17)$$

根据二阶线性常系数齐次微分方程对  $\lambda$  进行分类讨论求解：

1.  $\lambda = 0$

- 特征根为

$$r_1 = r_2 = 0$$

- 微分方程的通解为

$$X = Ax + B \quad (3.18)$$

- 由定解条件（边界条件），得到  $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

- 特解： $X = 0$

2.  $\lambda < 0$

- 特征根为两个实根

$$r_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

- 微分方程的通解为

$$X = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (3.19)$$

- 由定解条件（边界条件），得到  $\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$

- 特解： $X = 0$

3.  $\lambda > 0$

- 特征根为一对共轭复数

$$r_1 = \sqrt{\lambda}i, r_2 = -\sqrt{\lambda}i$$

- 微分方程的通解为

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x \quad (3.20)$$

- 由定解条件 (边界条件), 得到  $\begin{cases} A = 0 \\ B \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$ . 由于  $B \neq 0$ , 所以  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , 即

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (3.21)$$

所以, 我们得到对应的解

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.22)$$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.23)$$

其中  $\lambda$  只能取特定的值  $\lambda_n$  称为**特征值**, 相应的非零解称为**特征函数**, 求解  $X(x)$  的常微分问题称为**特征值问题**。

对于函数  $T(t)$  的常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

由

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

得

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t) = 0$$

由二阶线性常微分方程的解的形式可得

$$T_n = C_n \cos \frac{n\pi}{l}at + D_n \sin \frac{n\pi}{l}at \quad (3.24)$$

因此, 得到无穷多个线性无关且满足偏微分方程和边界条件的特解:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n \cos \frac{n\pi}{l}at + D_n \sin \frac{n\pi}{l}at\right) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (3.25)$$

为满足初始条件, 一般解为所有特解之和, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{n\pi}{l}at + D_n \sin \frac{n\pi}{l}at\right) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (3.26)$$

要求级数收敛, 且能够对  $x, t$  逐项微分两次。

### 3.2.5 代入初始条件

由初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l$$

代入一般解, 得到

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}$$

由  $\varphi(x), \psi(x)$  的傅立叶级数, 有

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.27)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.28)$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

比对系数可以得到

$$\begin{aligned} C_n &= b_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right] dx \\ D_n &= \frac{l}{n\pi a} b_{2n} = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \left[ \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right] dx \end{aligned}$$

### 3.2.6 求解结果

所以我们可以得到最终的方程解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{n\pi}{l} at + D_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.29)$$

其中

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right] dx \quad (3.30)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \left[ \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \right] dx \quad (3.31)$$

### 3.2.7 分离变量法总结

分离变量法的大致过程如图3.1.

## 3.3 有限杆的传热问题

问题: 设有一根长为  $l$  的均匀细杆, 两端点为  $x = 0$  和  $x = l$ ; 在端点  $x = 0$  处温度为零摄氏度, 而在另一端  $x = l$  处杆的热量自由散发到周围温度是零的介质中去, 传热系数与杆导热系数之比为  $h$ 。已知初始温度为  $\varphi(x)$ 。求杆上的温度变化规律。

### 3.3.1 定解问题

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.32)$$

边界条件

由牛顿冷却定律

$$x = l : -k \frac{\partial u}{\partial x} = h(u|_{x=l} - u_{\text{air}}) = h u|_{x=l}$$

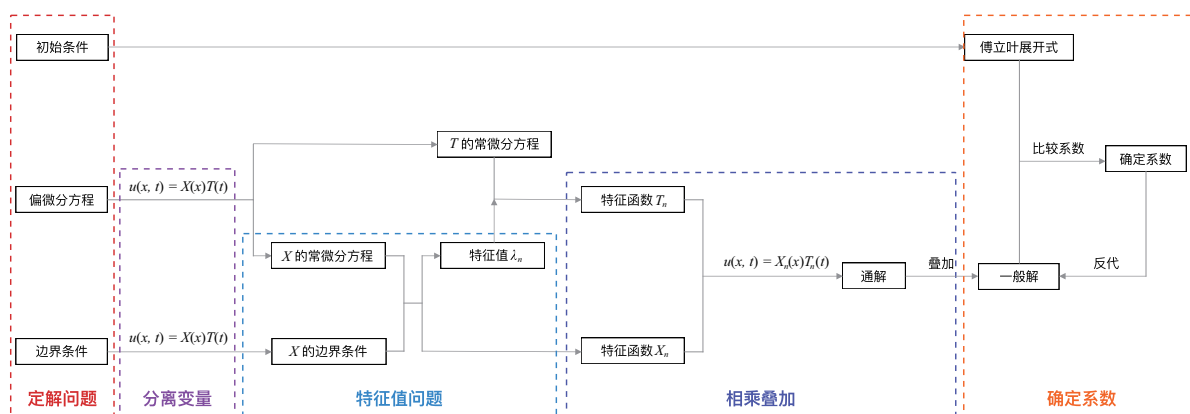


图 3.1: 分离变量法总结

即

$$u|_{x=0} = 0 \quad (3.33)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \bigg|_{x=l} = 0 \quad (3.34)$$

初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.35)$$

### 3.3.2 分离变量

设  $u(x, t) = X(x)T(t)$ ，分离方程，得

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

由于  $\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$  与  $x$  无关， $\frac{X''(x)}{X(x)}$  与  $t$  无关，所以

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (3.36)$$

即

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.37)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (3.38)$$

### 3.3.3 特征值问题

考虑边界条件

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = 0 &\Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \bigg|_{x=l} = 0 &\Rightarrow X'(l)T(t) + hX(l)T(t) = 0 \Rightarrow X'(l) + hX(l) = 0 \end{aligned}$$

那么得到常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

其特征方程为

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (3.40)$$

其特征根为

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad (3.41)$$

对  $\lambda$  进行分类讨论

1.  $\lambda = 0$

• 特征根为

$$r_1 = r_2 = 0$$

• 微分方程的通解为

$$X = Ax + B \quad (3.42)$$

• 由定解条件（边界条件），得到 
$$\begin{cases} B = 0 \\ A(1 + hl) + Bh = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

• 总方程：  $X = 0$

2.  $\lambda < 0$

• 特征根为两个实根

$$r_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

• 微分方程的通解为

$$X = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (3.43)$$

• 由定解条件（边界条件），得到 
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} + B(h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} = A(h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l}$$

– 若  $A \neq 0$

两边同时除以  $A$ ，得

$$\begin{aligned} (h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} &= (h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l} \\ \Rightarrow \frac{h - \sqrt{-\lambda}}{h + \sqrt{-\lambda}} &= e^{2\sqrt{-\lambda}l} \end{aligned}$$

由于  $e^{2\sqrt{-\lambda}l} > 1$ ，而  $\frac{h - \sqrt{-\lambda}}{h + \sqrt{-\lambda}} < 1$  因此矛盾，故  $A = 0$ 。

所以  $A = B = 0$

• 总方程：  $X = 0$

3.  $\lambda > 0$

- 特征根为一对共轭复数

$$r_1 = \sqrt{\lambda}i, r_2 = -\sqrt{\lambda}i$$

- 微分方程的通解为

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x \quad (3.44)$$

- 由定解条件(边界条件), 得到  $\begin{cases} A \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \rightarrow A = 0 \\ B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l + B h \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$ . 由于  $B \neq 0$ , 所以  $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l + h \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , 即

$$\sqrt{\lambda} + h \tan \sqrt{\lambda}l = 0 \implies \sqrt{\lambda} = h \tan \sqrt{\lambda}l \quad (3.45)$$

所以, 我们得到

特征值为

$$\sqrt{\lambda_n} = h \tan \sqrt{\lambda_n}l \quad (3.46)$$

的解, 特征函数为

$$X_n(x) = B_n \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (3.47)$$

### 3.3.4 相乘叠加得一般解

将  $\lambda_n$  代入  $T$  的方程

$$T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$$

解得

$$T_n = C'_n e^{-\lambda_n a^2 t} \quad (3.48)$$

因此, 得到无穷多个线性无关且满足偏微分方程和边界条件的特解:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (3.49)$$

为满足初始条件, 令一般解为所有特解之和, 即

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin \sqrt{\lambda_n}x \quad (3.50)$$

要求级数收敛, 且能够对  $x, t$  逐项微分两次。

### 3.3.5 确定叠加系数

由初始条件

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \sqrt{\lambda_n}x = \varphi(x)$$



由特征函数的正交性可得

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (3.51)$$

$$\int_0^l \sin \sqrt{\lambda_m} x \sin \sqrt{\lambda_n} x dx = 0, \quad n \neq m \quad (3.52)$$

为了利用特征函数的正交性, 两边同时乘以  $\sin \sqrt{\lambda_m} x$  再做积分, 即

$$\int_0^l \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_m} x \right) dx = \int_0^l \left[ \varphi(x) \sin \sqrt{\lambda_m} x \right] dx \quad (3.53)$$

逐项积分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \int_0^l \left( \sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_m} x \right) dx \right] = \int_0^l \left[ \varphi(x) \sin \sqrt{\lambda_m} x \right] dx \quad (3.54)$$

由正交性质, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \int_0^l \left( \sin \sqrt{\lambda_n} x \sin \sqrt{\lambda_m} x \right) dx \right] = C_m \int_0^l \left( \sin \sqrt{\lambda_m} x \right)^2 dx$$

即

$$C_n = \frac{\int_0^l \left[ \varphi(x) \sin \sqrt{\lambda_n} x \right] dx}{\int_0^l \left( \sin \sqrt{\lambda_n} x \right)^2 dx} \quad (3.55)$$

## 3.4 非齐次方程的解法

### 3.4.1 特征函数展开法

将分离变量法进行改进, 得到

$$1. \text{ 求解特征值问题 } X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

边界条件

获得特征函数族  $X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x)$

2. 直接将解写成特征函数族的展开式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

3. 代入方程, 求解  $T_n(t)$ .

### 3.4.2 两端固定弦的受迫振动

步骤 1 一分为二

将弦的振动看作初始条件引起的振动和强迫力引起振动的叠加

$$\text{弦的振动 } U(x, t) \begin{cases} \text{初始条件引起的振动 } W(x, t) \\ \text{强迫力引起的振动 } V(x, t) \end{cases}$$

于是将解作如下展开  $U(x, t) = W(x, t) + V(x, t)$

步骤2 求解初始条件引起的振动  $W(x, t)$ 

- 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ W|_{x=0} = W|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ W|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial W}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.56)$$

- 可以直接由前两节的分离变量法求得，这里不再赘述。

步骤3 求解强迫力引起的振动  $V(x, t)$ 

- 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ V|_{t=0} = 0, \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.57)$$

- 求解相应齐次方程的特征函数  $X_n(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.58)$$

由前面几节的结果，可以得到

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.59)$$

- 特征函数展开

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.60)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.61)$$

- 用特征函数正交性质求解  $f_n(t)$

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \Rightarrow \int_0^l f(x, t) X_m(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = f_m(t) \int_0^l X_m^2(x) dx \\ \Rightarrow f_m(t) &= \frac{\int_0^l f(x, t) X_m(x) dx}{\int_0^l X_m^2(x) dx} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{m\pi}{l} x dx \end{aligned} \quad (3.62)$$

- 将  $V(x, t)$ ,  $f(x, t)$  的展开式代入微分方程，得到关于  $v_n(t)$  的微分方程

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \xrightarrow{\text{代入}} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t)$$

得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ v_n''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} v_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} \equiv 0 \quad (3.63)$$

即

$$v_n''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} v_n(t) = f_n(t)$$

- 将  $V(x, t)$  的展开式代入初始条件, 得  $v_n(t)$  的初始条件

$$\begin{aligned} V|_{t=0} = 0 &\Rightarrow v_n(0)X_n(x) = 0 \Rightarrow v_n(0) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 &\Rightarrow v_n'(0)X_n(x) = 0 \Rightarrow v_n'(0) = 0 \end{aligned}$$

- 求解  $v_n(t)$  的常微分方程

$$\begin{cases} v_n''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} v_n(t) = f_n(t) \\ v_n(0) = 0, v_n'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

由常数变易法或 Laplace 变换, 得到

$$v_n(t) = \frac{l}{n\pi a} \int_0^l f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \quad (3.65)$$

- 相乘叠加

将计算结果代入特征函数的展开式, 得到最终的结果

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{l}{n\pi a} \int_0^l f_n(\tau) \sin \frac{n\pi a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.66)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

#### 步骤 4 合二为一

两部分的结果叠加, 得

$$U(x, t) = W(x, t) + V(x, t) \quad (3.67)$$

总结如图3.2.

## 3.5 非齐次边界条件的处理

### 3.5.1 非齐次边界条件的概念

前面所讨论的定解问题的解法, 不论方程是齐次的还是非齐次的, 边界条件都是齐次的, 由于非齐次边界条件不能分离变量, 所以我们要将非齐次边界条件转换为齐次边界条件。

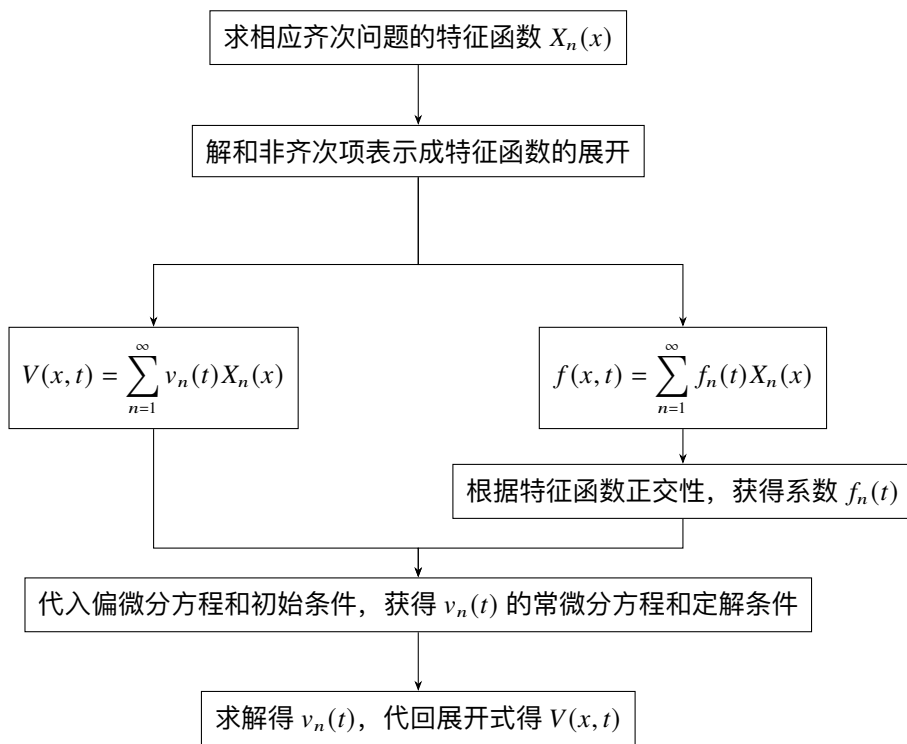


图 3.2: 非齐次方程求解总结图

### 3.5.2 非齐次边界条件的处理方法

- 总原则：设法将边界条件化成齐次的情况。
- 总思路：取一个适当的未知函数之间的代换，使对于新的未知函数，边界条件是齐次的。

以定解问题为例

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=l} = u_2(t), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.68)$$

为使边界条件齐次化，作如下分解

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t) \quad (3.69)$$

其中，令函数  $W(x, t)$  满足  $u(x, t)$  的边界条件

$$W|_{x=0} = u_1(t), \quad W|_{x=l} = u_2(t) \quad (3.70)$$

则函数  $V(x, t)$  的边界条件是齐次的

$$V|_{x=0}, \quad V|_{x=l} = 0$$

由于  $W(x, t)$  是满足条件(3.70)的表达式，简单起见，设

$$W(x, t) = A(t)X + B(t) \quad (3.71)$$

即得到

$$\begin{cases} W(0, t) = B(t) = u_1(t) \\ W(l, t) = A(t)l + B(t) = u_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l} \\ B(t) = u_1(t) \end{cases}$$

所以

$$W(x, t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \quad (3.72)$$

于是我们作以下变换

$$u(x, t) = V(x, t) + \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \quad (3.73)$$

得到转换后的定解问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ V|_{x=0} &= 0, V|_{x=l} = 0, t > 0 \\ V|_{t=0} &= \Phi(x), \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi(x), 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (3.74)$$

其中

$$\begin{aligned} F(x, t) &= f(x, t) - \left[ \frac{u_2''(t) - u_1''(t)}{l}x + u_1''(t) \right] \\ \Phi(x) &= \varphi(x) - \left[ \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \right] \\ \Psi(x) &= \psi(x) - \left[ \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \right] \end{aligned}$$

### 3.5.3 四类非齐次边界条件的齐次化函数

边界条件	齐次化函数 $W(x)$
$u _{x=0} = u_1(t), u _{x=l} = u_2(t)$	$W(x, t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t)$
$u _{x=0} = u_1(t), \frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x=l} = u_2(t)$	$W(x, t) = u_1(t)x + u_2(t)$
$\frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x=0} = u_1(t), u _{x=l} = u_2(t)$	$W(x, t) = u_2(t)x + u_2(t) - lu_1(t)$
$\frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x=0} = u_1(t), \frac{\partial u}{\partial x} \Big _{x=l} = u_2(t)$	$W(x, t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{2l}x^2 + u_1(t)x$

表 3.2: 四类非齐次边界条件的齐次化函数

## 注意

- 选取不同的齐次化函数  $W(x, t)$ , 导出的  $V(x, t)$  的定解问题也就不同, 求出的  $V(x, t)$  也就不同
- 但定解问题的解的存在唯一性, 保证了最后解得的  $u(x, t)$  一定是相同的, 尽管表达式的形式可能有所不同
- $W(x, t)$  的选取原则是使自己的表达式尽可能简单的同时, 也尽量使  $V(x, t)$  的定解问题尽可能简单

## 3.5.4 方程和边界条件同时齐次化的情形

最理想的情况是, 不论原来的方程  $u(x, t)$  是不是齐次的, 最终  $V(x, t)$  的方程是齐次的, 即方程和边界条件同时齐次化。

所需要的条件: 当  $u(x, t)$  定解问题中的非齐次项、边界条件都与时间  $t$  无关。

## 例 3.1 齐次化下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = A, u|_{x=l} = B, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

解

设  $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ ,  $w(x)$  满足边界条件, 即

$$w(0) = A \quad (3.75)$$

$$w(l) = B \quad (3.76)$$

将  $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$  代入偏微分方程, 得

$$v_t = a^2(v_{xx} + w''(x)) + x^2 \Rightarrow v_t = a^2 v_{xx} + a^2 w''(x) + x^2$$

为了使该偏微分方程是齐次的, 则满足

$$w''(x) = -\frac{x^2}{a^2} \quad (3.77)$$

则得到  $w(x)$  的常微分方程

$$\begin{cases} w''(x) = -\frac{x^2}{a^2} \\ w(0) = A \\ w(l) = B \end{cases} \quad (3.78)$$

首先求得通解为

$$w(x) = -\frac{1}{12a^2}x^4 + C_1x + C_2 \quad (3.79)$$

代入定解条件, 得

$$\begin{cases} C_2 = A \\ -\frac{1}{12a^2}l^4 + C_1l + C_2 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = A \\ C_1 = \frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2} \end{cases}$$

所以

$$w(x) = \frac{1}{12a^2}x^4 + \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2}\right)x + A \quad (3.80)$$

初始条件变为

$$u|_{t=0} = v(x, 0) + w(x) = g(x) \Rightarrow v(x, 0) = g(x) - w(x) = g(x) - \frac{1}{12a^2}x^4 - \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2}\right)x - A$$

所以齐次化后的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, t > 0, \\ v|_{t=0} = g(x) - \frac{1}{12a^2}x^4 - \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2}\right)x - A, 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.81)$$

## 3.6 圆域内的二维 Laplace 方程的稳定问题

### 3.6.1 预备知识

#### 1. 极坐标系下的 Laplace 方程

直角坐标下的 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.82)$$

极坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.83)$$

由链式求导法则, 得到极坐标下的 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.85)$$

特点:

- 由于  $r = 0$  处导数不存在, 不满足方程, 所以需要在  $r = 0$  处补充边界条件;
- 周期性:  $u|_{\theta} = u|_{\theta+2\pi}$

#### 2. 以 $2\pi$ 为周期的函数傅立叶级数展开

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.86)$$

其中

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

### 3.6.2 物理问题

一个半径为  $r_0$  的薄圆盘, 上下两面绝热, 圆周边缘温度已知, 求达到温恒状态时圆盘内的温度分布。

#### 步骤1 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & x^2 + y^2 \leq r_0^2 \\ u|_{x^2+y^2=r_0^2} = f(x, y) \end{cases} \quad (3.87)$$

#### 步骤2 换成极坐标形式

换成极坐标的过程中, 由于  $r = 0$  处导数不存在。因此, 为了满足方程的适定性, 需要补充  $r = 0$  处的边界条件。

由于  $r = 0$  处没有热源且绝热, 所以  $r = 0$  处的温度不可能趋于无穷大, 即

$$|u|_{r=0} < +\infty$$

所以, 最终形式的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < r_0, -\infty < \theta < +\infty \\ u|_{r=r_0} = f(\theta), \\ |u|_{r=0} < +\infty, \\ u|_{\theta} = u|_{\theta+2\pi} \end{cases} \quad (3.88)$$

#### 步骤3 分离变量

设  $u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ , 代入偏微分方程, 得

$$\begin{aligned} r^2 R''(r)\Phi(\theta) + rR'(r)\Phi(\theta) + R(r)\Phi''(\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(\theta) [r^2 R''(r) + rR'(r)] &= R(r)\Phi(\theta) \\ \Rightarrow -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} &= \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \end{aligned}$$

由于方程左边是关于  $r$  的函数, 方程右边是关于  $\theta$  的函数, 所以

$$-\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = -\lambda$$

从而得到两个常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \end{cases}$$

对于初始条件, 由于  $u|_{r=r_0} = f(\theta)$  是非齐次的, 而  $|u|_{r=0} < +\infty$  是有界条件, 都不能分离变量。所以, 我们尝试对周期性条件进行分离变量

$$R(r)\Phi(\theta) = R(r)\Phi(\theta + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi)$$

#### 步骤4 求解特征值问题

我们得到关于  $\Phi(\theta)$  的定解常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \end{cases} \quad (3.89)$$

对  $\lambda$  进行分类讨论



•  $\lambda = 0$

– 通解  $\Phi''(\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = A\theta + B$

– 特解  $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \Rightarrow \Phi(\theta) = B$

所以  $\lambda = 0$  是特征值,  $\Phi(\theta) = B$

•  $\lambda < 0$

– 通解  $\Phi(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$

– 特解 由于实数域内指数函数不是周期函数, 所以  $A = B = 0$ , 舍去

•  $\lambda > 0$

– 通解  $\Phi(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$

– 特解  $\Phi(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$  的周期为  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ , 由于  $\Phi(\theta)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 则

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

即

$$\lambda_n = n^2 \quad (3.90)$$

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.91)$$

所以, 特征值为

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, \Phi_0(\theta) = B_0 \\ \lambda_n = n^2, \Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

#### 步骤 5 解另一方程

对关于  $R(r)$  的微分方程进行变形

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0$$

$$\Rightarrow r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) - \lambda R = 0$$

$$\bullet \lambda = 0 \Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) = 0 \Rightarrow R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r$$

$$\bullet \lambda = n^2 \Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) - n^2 R = 0 \Rightarrow R_n(r) = C_n e^{n \ln r} + D_n e^{-n \ln r} = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

#### 步骤 6 相乘得特解

$$\begin{cases} R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \\ \Phi(\theta) = B_0 \end{cases} \Rightarrow u(r, \theta) = B_0 (C_0 + D_0 \ln r)$$

$$\begin{cases} R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \\ \Phi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \end{cases} \Rightarrow u(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

## 步骤7 叠加得一般解

$$u(r, \theta) = B_0(C_0 + D_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (3.92)$$

## 步骤8 确定叠加系数

仍有两个非齐次边界条件未使用，用它们来确定叠加系数。即叠加系数的确定，是要满足非齐次边界条件，这与求解波动方程和热传导方程不同。

- 根据  $r = 0$  处  $u$  的有界性  $|u|_{r=0} < +\infty$ ，结合一般解，发现两个发散量

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln r = -\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} r^{-n} = +\infty$$

所以它们所对应的系数为 0，即  $D_0, D_n = 0$ ，一般解化简为

$$u(r, \theta) = B_0 C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

- 将一般解写成如下形式

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (3.93)$$

利用  $r = r_0$  处的边界条件  $u|_{r=r_0} = f(\theta)$  进行傅立叶展开（详见本节预备知识），得

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.94)$$

$r = r_0$  代入一般式，比对(3.93)和(3.94)可得

$$a_n = \frac{A_n}{r_0^n} = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.95)$$

$$b_n = \frac{B_n}{r_0^n} = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.96)$$

所以最终解为

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (3.97)$$

$$a_n = \frac{A_n}{r_0^n} = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{B_n}{r_0^n} = \frac{1}{r_0^n \pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## 注意

1. 极坐标下的 Laplace 方程需要记忆
2. 坐标变换带来的附加周期条件是分离变量法成功的关键
3. 特征值问题由齐次边界条件构造，这与求解波动方程和热传导方程一样
4. 不同的是在本例中，通过非齐次边界条件确定叠加系数，而不是通过初始条件来确定。这与求解波动方程和热传导方程不同

**例 3.2**

一圆环形平板, 内半径为  $r_1$ , 外半径为  $r_2$ , 侧面绝缘, 如内圆温度保持为 0, 外圆温度保持 1 摄氏度, 试求稳恒状态下的温度分布规律  $u(r, \theta)$ .

**解****步骤 1 列出定解问题**

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & r_1 < r < r_2, -\infty < \theta < +\infty \\ u|_{r=r_1} = 0, \\ u|_{r=r_2} = 1, \\ u|_{\theta} = u|_{\theta+2\pi} \end{cases} \quad (3.98)$$

**步骤 2 分离变量**

设  $u(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$ , 代入偏微分方程, 得

$$\begin{aligned} & r^2 R''(r)\Phi(\theta) + rR'(r)\Phi(\theta) + R(r)\Phi''(\theta) = 0 \\ \Rightarrow & \Phi(\theta) [r^2 R''(r) + rR'(r)] = R(r)\Phi(\theta) \\ \Rightarrow & -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \end{aligned}$$

由于方程左边是关于  $r$  的函数, 方程右边是关于  $\theta$  的函数, 所以

$$-\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = -\lambda$$

从而得到两个常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \end{cases}$$

对于边界条件,

$$\begin{aligned} R(r)\Phi(\theta) &= R(r)\Phi(\theta + 2\pi) \Rightarrow \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \\ u(r_1, \theta) &= R(r_1)\Phi(\theta) = 0 \Rightarrow R(r_1) = 0 \end{aligned}$$

**步骤 3 求解特征值问题**

我们得到关于  $\Phi(\theta)$  的定解常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \\ \Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \end{cases} \quad (3.99)$$

对  $\lambda$  进行分类讨论

•  $\lambda = 0$

– 通解  $\Phi''(\theta) = 0 \Rightarrow \Phi(\theta) = A\theta + B$

– 特解  $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \Rightarrow \Phi(\theta) = B$

所以  $\lambda = 0$  是特征值,  $\Phi(\theta) = B$

•  $\lambda < 0$

- 通解  $\Phi(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$
- 特解 由于实数域内指数函数不是周期函数, 所以  $A = B = 0$ , 舍去
- $\lambda > 0$ 
  - 通解  $\Phi(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$
  - 特解  $\Phi(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$  的周期为  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ , 由于  $\Phi(\theta)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 则

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

即

$$\lambda_n = n^2 \quad (3.100)$$

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.101)$$

所以, 特征值为

$$\begin{cases} \lambda_0 = \Phi(\theta)_0 = B_0, \quad \Phi_0(\theta) = B_0 \\ \lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

#### 步骤4 解另一方程

对关于  $R(r)$  的微分方程进行变形

$$\begin{aligned} r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) &= 0 \\ \Rightarrow r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) - \lambda R &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda = 0 &\Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) = 0 \Rightarrow R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \\ \bullet \lambda = n^2 &\Rightarrow \frac{d}{d \ln r} \left( \frac{dR}{d \ln r} \right) - n^2 R = 0 \Rightarrow R_n(r) = C_n e^{n \ln r} + D_n e^{-n \ln r} = C_n r^n + D_n r^{-n} \end{aligned}$$

#### 步骤5 相乘得特解

$$\begin{aligned} \begin{cases} R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \\ \Phi(\theta) = B_0 \end{cases} &\Rightarrow u(r, \theta) = B_0(C_0 + D_0 \ln r) \\ \begin{cases} R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \\ \Phi_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \end{cases} &\Rightarrow u(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

#### 步骤6 叠加得一般解

$$u(r, \theta) = B_0(C_0 + D_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad (3.102)$$

#### 步骤7 确定叠加系数

- 将一般式写成如下形式

$$u(r, \theta) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta \quad (3.103)$$

- 利用  $r = r_1$  处的边界条件  $u|_{r=r_1} = 0$  进行傅立叶展开, 得

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.104)$$

其参数全为 0, 比对系数可得

$$\begin{cases} c_0 + d_0 \ln r_1 = \frac{A_0}{2} = 0 \\ a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = A_n = 0 \\ c_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = B_n = 0 \end{cases} \quad (3.105)$$

- 利用  $r = r_2$  处的边界条件  $u|_{r=r_2} = 1$  进行傅立叶展开, 得

$$1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad (3.106)$$

其令  $A_0 = 2$ , 其他参数全为 0, 比对系数可得

$$\begin{cases} c_0 + d_0 \ln r_1 = \frac{A_0}{2} = 1 \\ a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = A_n = 0 \\ c_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = B_n = 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

联立(3.105)和(3.107)解得

$$\begin{cases} c_0 = -\frac{\ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \\ d_0 = \frac{1}{\ln r_2 - \ln r_1} \\ a_n = 0 \\ b_n = 0 \\ c_n = 0 \\ d_n = 0 \end{cases} \quad (3.108)$$

所以最终解为

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= -\frac{\ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} + \frac{1}{\ln r_2 - \ln r_1} \ln r \\ &= \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \end{aligned} \quad (3.109)$$

## 3.7 分离变量法总结

对于分离变量法, 通过四个方程的解决思路和分离变量两个情况的方法来总结。

### 3.7.1 一维非齐次波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < a, t > 0 \\ u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=a} = u_2(t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (3.110)$$

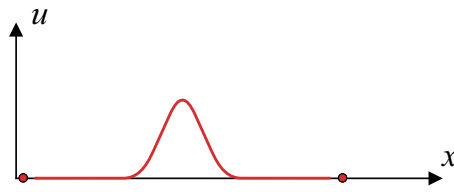


图 3.3: 一维非齐次波动方程

步骤 1 将边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二} \begin{cases} \text{非齐次项（强迫力）引起的波动过程} \\ \text{初始条件引起的波动过程} \end{cases}$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法} \begin{cases} \text{齐次方程（非零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} & \text{常规分离变量法步骤求解} \\ \text{非齐次方程（零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} & \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解} \end{cases}$$

步骤 4 合二为一

叠加即得到原问题的解。

### 3.7.2 一维非齐次热传导方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < a, t > 0 \\ u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=l} = u_2(t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (3.111)$$



图 3.4: 一维非齐次传热方程

步骤 1 将边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二} \begin{cases} \text{非齐次项（热源）引起的传热过程} \\ \text{初始条件引起的传热过程} \end{cases}$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法} \begin{cases} \text{齐次方程（非零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} & \text{常规分离变量法步骤求解} \\ \text{非齐次方程（零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} & \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解} \end{cases}$$

步骤 4 合二为一

叠加即得到原问题的解。

### 3.7.3 圆域内非齐次 Laplace 方程

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f_1(r, \theta), & 0 < r < a, -\infty < \theta < +\infty \\ u|_{r=a} = f_2(\theta) \quad |u|_{r=0}| < +\infty, & -\infty < \theta < +\infty \\ u|_{\theta} = u|_{\theta+2\pi}, & 0 < r < a \end{cases} \quad (3.112)$$

#### 步骤 1 坐标变换

周期性边界条件是齐次的，因此不用边界条件齐次化

#### 步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二} \begin{cases} \text{非齐次项引起的稳态分布} \\ \text{非齐次边界条件引起的稳态分布} \end{cases}$$

#### 步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法} \begin{cases} \text{齐次方程（一组非齐次边界条件）的定解问题} \xrightarrow{\text{方法}} \text{常规分离变量法步骤求解} \\ \text{非齐次方程（齐次边界条件）的定解问题} \xrightarrow{\text{方法}} \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解} \end{cases}$$

#### 步骤 4 合二为一 叠加即得到原问题的解。

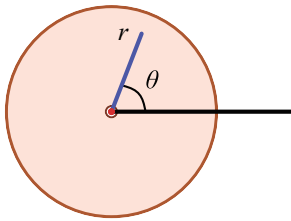


图 3.5: 圆域内非齐次 Laplace 方程

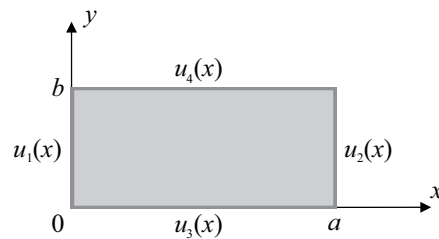


图 3.6: 矩形域内非齐次 Laplace 方程

### 3.7.4 矩形域内非齐次 Laplace 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \\ u|_{x=0} = u_1(y), u|_{x=a} = u_2(y), & 0 \leq y \leq b \\ u|_{y=0} = u_3(x), u|_{y=b} = u_4(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (3.113)$$

#### 步骤 1 将边界条件齐次化

#### 步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二} \begin{cases} \text{非齐次项引起的稳态分布} \\ \text{非齐次边界条件引起的稳态分布} \end{cases}$$

#### 步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法} \begin{cases} \text{齐次方程（一组非齐次边界条件）的定解问题} \xrightarrow{\text{方法}} \text{常规分离变量法步骤求解} \\ \text{非齐次方程（齐次边界条件）的定解问题} \xrightarrow{\text{方法}} \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解} \end{cases}$$

#### 步骤 4 合二为一 叠加即得到原问题的解。

## 3.7.5 分离变量法解题步骤总结

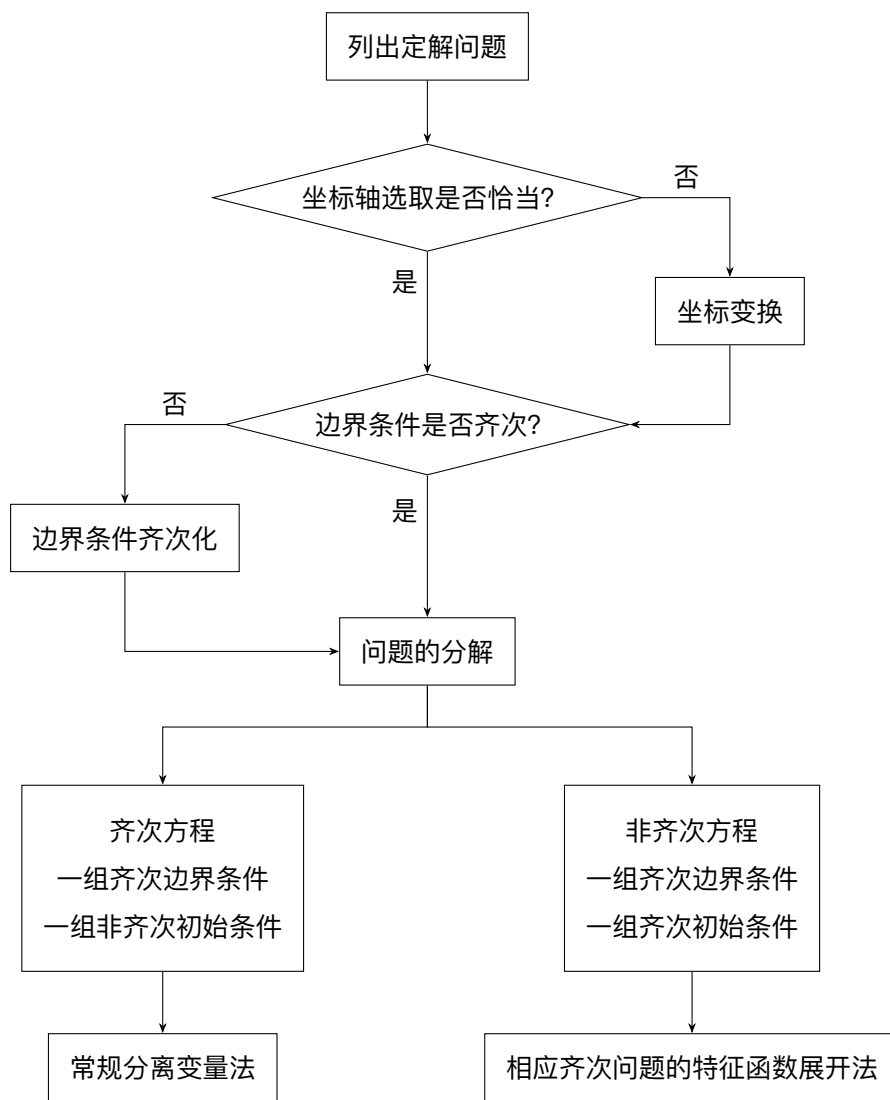


图 3.7: 一般分离变量法解题步骤

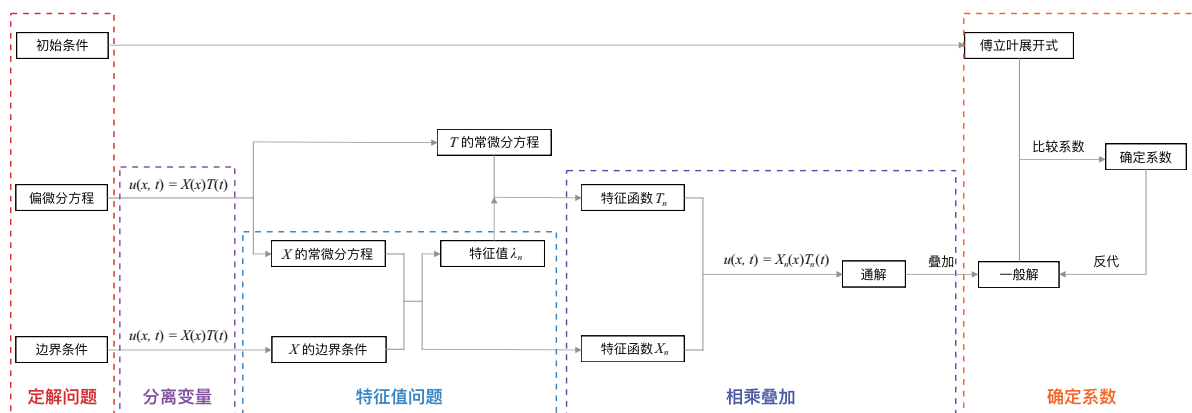


图 3.8: 常规分离变量法步骤



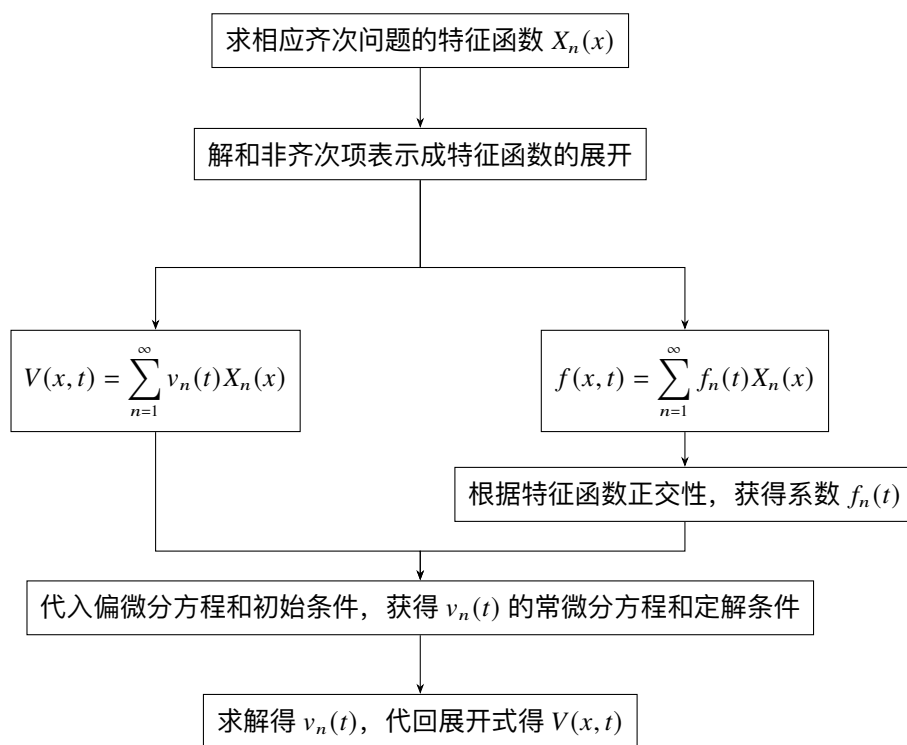


图 3.9: 相应齐次问题的特征函数展开法

**例 3.3**

研究均匀细杆的导热问题, 其中均匀细杆中有一个与温度  $u$  成正比的负热源, 求下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u, & 0 < x < l, t > 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2, & 0 < x < l \end{cases} \quad (3.114)$$

思路

- 边界形状简单, 无需坐标变换
- 边界条件非齐次, 需要齐次化边界条件

解

**步骤 1 边界条件齐次化**

将边界条件齐次化, 令

$$u(x, t) = V(x, t) + u_1 \quad (3.115)$$

代入原定解问题, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2 V - b^2 u_1, & 0 < x < l, t > 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, V|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ V|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.116)$$

## 步骤2 一分为二

由于方程是非齐次的且边界条件也是非齐次的, 所以需要将方程进一步分解为两个方程, 引入变量拆分:

$$V(x, t) = v(x, t) + g(x, t) \quad (3.117)$$

- 边界条件不为 0 的自由传热方程 (初始非 0 温度分布的贡献)

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 v, & 0 < x < l, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = u_1, & t > 0 \\ v|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.118)$$

## 第1步 分离变量

设  $v(x, t) = X(x)T(t)$ , 代入齐次方程, 得到

$$\begin{aligned} X'' + \beta X &= 0 & T' + (b^2 + a^2 \beta^2)T &= 0 \\ X'(0) = X(l) &= 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

## 第2步 解特征值问题

对  $\beta$  进行分类讨论, 最后得到

$$\beta^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.120)$$

$$X_n(x) = B_n \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] \quad (3.121)$$

## 第3步 解另一方程

将特征值代入关于  $T(t)$  的微分方程, 可以解得

$$T_n(t) = C_n \exp \left\{ \left[ -b^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \right] t \right\} \quad (3.122)$$

## 第4步 相乘叠加得一般解

相乘叠加, 得

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp \left\{ \left[ -b^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \right] t \right\} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] \quad (3.123)$$

## 第5步 确定叠加系数

由特征值卷积为 0 的性质, 可得

$$v|_{t=0} = v(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1 \quad (3.124)$$

$$C_n = \frac{\int_0^l \left( \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1 \right) \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] dx}{\int_0^l \cos^2 \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] dx} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{l} \int_0^l \left( \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1 \right) \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \right] dx \\ &= \frac{2}{l} \cdot \left[ -\frac{16u_1 l}{(2n+1)^3 \pi^3} \sin \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right] \\ &= (-1)^{n+1} \frac{32u_1}{(2n+1)^3 \pi^3} \end{aligned} \quad (3.126)$$

所以, 得到最终结果为

$$v(x, t) = \frac{32u_1}{\pi^3} \exp(-b^2 t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right] \quad (3.127)$$

- 含有热源初始条件为 0 的受干扰的传热方程 (恒定热源  $-b^2 u_1$  的贡献)

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - b^2 g - b^2 u_1, & 0 < x < l, t > 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, g|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ g|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.128)$$

步骤 1 按相应齐次问题的特征函数展开

将  $g(x, t)$  及其方程中的非齐次项均按相应齐次问题的特征函数展开

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right] \quad (3.129)$$

$$-b^2 u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right] \quad (3.130)$$

步骤 2 由特征函数正交性确定非齐次项叠加系数

$$g_n = \frac{\int_0^l -b^2 u_1 \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] dx}{\int_0^l \cos^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] dx} = (-1)^{n+1} \frac{4b^2 u_1}{(2n+1)\pi} \quad (3.131)$$

步骤 3 将展开式代入方程和初始条件得常微分方程

$$\begin{cases} g'_n(t) + \left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} + b^2\right] g_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{4b^2 u_1}{(2n+1)\pi} \\ g_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.132)$$

步骤 4 Laplace 变换求解常微分方程

令常数  $A = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} + b^2$ ,  $B = (-1)^{n+1} \frac{4b^2 u_1}{(2n+1)\pi}$ , 并记  $\mathcal{L}[g_n(t)] = G_n(s)$ 。

对常微分方程取 Laplace 变换, 得

$$sG_n(s) + AG_n(s) = \frac{B}{s} \Rightarrow G_n(s) = \frac{B}{s(s+A)} = \frac{B}{A-1} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+A} \right) \quad (3.133)$$

取逆变换, 得

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G_n(s)] = \frac{B}{A-1} (1 - e^{-At}) \\ &= \frac{(-1)^n 16b^2 u_1 l^2}{(2n+1)\pi [4b^2 l^2 + (2n+1)^2 \pi^2 a^2]} \left\{ \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 + 4l^2 b^2}{4l^2} t\right] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.134)$$

步骤 5 代入特征函数叠加得一般解

$$g(x, t) = \frac{16b^2 u_1 l^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)[4b^2 l^2 + (2n+1)^2 \pi^2 a^2]} \left\{ \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 + 4l^2 b^2}{4l^2} t\right] - 1 \right\} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right] \quad (3.135)$$

## 步骤3 合二为一

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= V(x, t) + u_1 = v(x, t) + g(x, t) + u_1 \\
 &= \frac{16b^2 u_1 l^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)[4b^2 l^2 + (2n+1)^2 \pi^2 a^2]} \left\{ \exp \left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 + 4l^2 b^2}{4l^2} t \right] - 1 \right\} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} x \right] \\
 &\quad + \frac{32u_1}{\pi^3} \exp(-b^2 t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} \exp \left[ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t \right] \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi}{2} x \right] + u_1
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

## 注意

分离变量法的适用条件

1. 方程和定解条件都是线性的
2. 边界形状规则<sup>1</sup>
3. 有限域内的定解问题

<sup>1</sup>边界在某种坐标系中能用若干个仅含有一个坐标变量的方程表示，即边界与坐标轴垂直

## 第 4 章 行波法

**行波** 一往无前向前传播的波

- 一维行波 抖动的绳子
- 二维行波 投石入海
- 三维行波 灯塔上发出的光

**行波法** 无界域内波动方程定解问题的求解方法

### 4.1 一维波动方程的达朗贝尔公式

#### 4.1.1 达朗贝尔公式的推导

考虑无界域内波动方程的通解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (4.1)$$

**思路**

- 仿照求解常微分方程的方法：先求通解，再求特解
- 一般来说对偏微分这种方法不可行，但是对于一阶波动方程来说是一个特例

**步骤 1** 求通解

引入

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \quad (4.2)$$

利用复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} - a \frac{\partial u}{\partial \eta} = A$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial A}{\partial t} = a \frac{\partial A}{\partial \xi} - a \frac{\partial A}{\partial \eta} \\
&= a \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - a \left( a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\
&= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = B \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \\
&= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \tag{4.3}
\end{aligned}$$

将以上求偏微分结果代入原方程, 可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{4.4}$$

对  $\eta$  积分得到

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$$

再对  $\xi$  积分得到

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int f(\xi) d\xi + f_2(\eta) \\
&= f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

## 步骤2 用初始条件定特解

将通解  $u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$  代入初始条件

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

对导数项积分, 可得

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \Rightarrow af_1(x) - af_2(x) = \int_0^x \psi(\tau) d\tau + C \Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + C$$

即

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + \frac{C}{2} \\ f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau - \frac{C}{2} \end{cases} \tag{4.6}$$

由此可以得到最终解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau \tag{4.7}$$

公式(4.7)被称为无限长弦自由振动的达朗贝尔公式。

### 4.1.2 达朗贝尔公式的物理意义

#### 1. $f_1(x+at), f_2(x-at)$ 的意义

- $u_2 = f_2(x-at)$  的物理意义

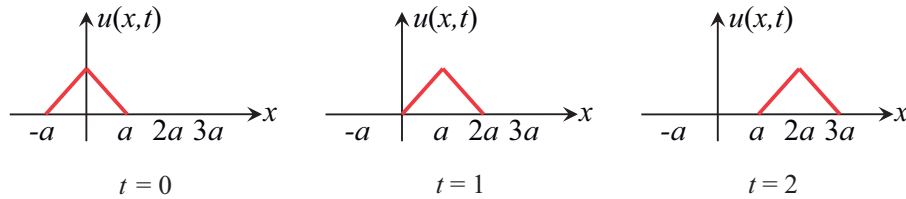


图 4.1:  $u_2 = f_2$  的物理意义

- 如图4.1. 随着时间  $t$  的推移,  $u_2$  的图形以速度  $a$  向  $x$  轴正向移动;
- 它表示一个以速度  $a$  向  $x$  轴正方向行进的波, 称为**右行波**。

- $u_1 = f_1(x+at)$  的物理意义

同理,  $u_1$  表示一个以速度  $a$  向  $x$  轴负方向行进的波, 称为**左行波**。

#### 2. 达朗贝尔公式的分析

令  $\Phi(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\tau) d\tau$ , 则达朗贝尔公式可以写成

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2} [\Phi(x+at) - \Phi(x-at)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

- 第一项表示初位移激发的行波;  
 $t > 0$  以后分成波形相同的两部分, 等速向左、向右传播。
- 第二项表示初速度激发的行波;  
 $t > 0$  以后分成波形相反的两部分, 等速向左、向右传播。

#### 3. 达朗贝尔公式的物理意义

- 弦上的任意扰动 (初位移和初速度) 总是以行波的形式分别向两个方向传播出去;
- 其传播速度恰恰是波动方程中出现的常数  $a$ ;
- 基于这种原因, 达朗贝尔解法又称为行波法;
- 初位移激发的左右行波是大小相等的, 初速度激发的行波与其发生干涉。

#### 注意

##### 行波法小总结

1. 其要领是引入坐标变换简化方程, 求得通解后再求特解;
2. 一维无界域波动方程的解可以利用达朗贝尔公式直接得到解;
3. 仅适用于无界域波动方程的初值问题。

## 4.2 特征线

### 1. 影响区域

- 0 时刻施加在区间  $[X_1, X_2]$  的扰动在  $t$  时刻波及  $[X_1 - at, X_2 + at]$ 。
- 梯形区域以外，波动不受区间  $[X_1, X_2]$  上初始扰动的影响。
- 这个不断膨胀的梯形区域称为区间  $[X_1, X_2]$  的**影响区域**。

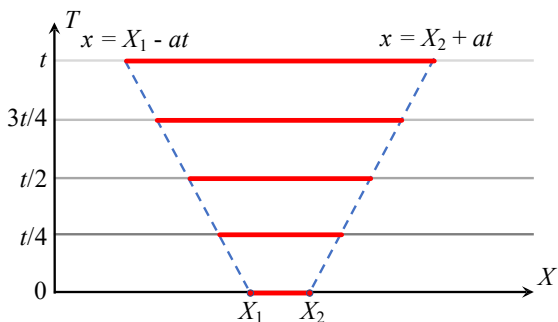


图 4.2: 影响区域

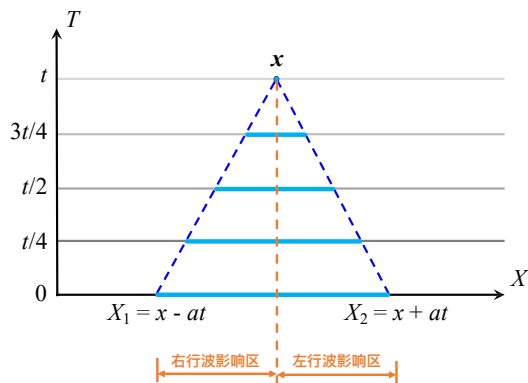


图 4.3: 决定区域

### 2. 依赖区间与决定区域

- $t$  时刻  $x$  点的状况，由区间  $[X_1, X_2] = [x - at, x + at]$  内的初始条件决定。
- 区间  $[x - at, x + at]$  称为  $(x, t)$  的**依赖区间**。
- 对于三角形区域内的任何一点，其依赖区间均位于  $[x - at, x + at]$  内部。
- 已知  $[X_1, X_2]$  区间的初始条件，则可以完全确定三角形区域内初值问题的解，这个三角形区域称为区间  $[X_1, X_2]$  的**决定区域**。

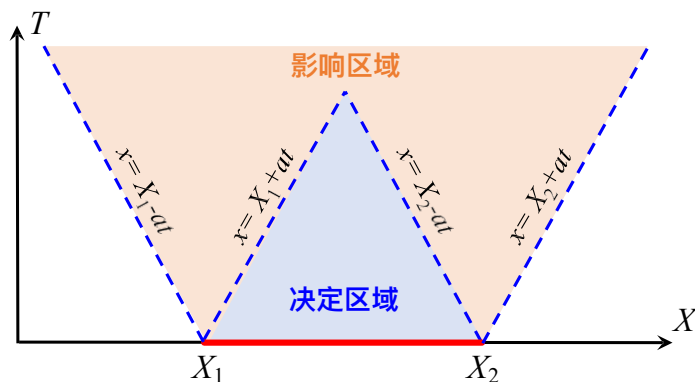


图 4.4: 决定区域和影响区域的边界

### 3. 决定区域和影响区域的边界

决定区域和影响区域的边界是由左倾直线  $x + at = c_1$  和右倾直线  $x - at = c_2$  规定，这两条直线在  $x - t$  平面上斜率为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线称为一维波动方程的**特征线**。

- 在左倾直线  $x + at = c_1$  上，左行波  $f_1(x + at)$  的位移为常数。
- 在右倾直线  $x - at = c_2$  上，右行波  $f_2(x - at)$  的位移为常数。
- 所以，左右行波是沿着各自的特征线传播的。



## 4.3 二阶线性双变量偏微分方程

### 1. 特征线的一般化

对于一般的二阶线性双变量偏微分方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (4.9)$$

我们将常微分方程

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0 \quad (4.10)$$

称为相应偏微分方程的**特征方程**，其解为偏微分方程的**特征线**。特征线的特点：

- 特征线仅与方程中的二阶导数项的系数有关
- 利用特征线构造坐标变换，可以实现方程的简化

### 2. 二阶线性双变量微分方程的分类

对于一般的二阶线性双变量偏微分方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

其判别式与分类如表4.1.

判别式 $\Delta = B^2 - AC$	
$\Delta > 0$	双曲线型的二阶线性双变量微分方程
$\Delta = 0$	抛物线型的二阶线性双变量微分方程
$\Delta < 0$	椭圆型的二阶线性双变量微分方程

表 4.1: 二阶线性双变量微分方程的分类

## 4.4 三维波动方程的泊松公式

三维波动的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), & -\infty < x, y, z < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty \end{cases} \quad (4.11)$$

### 4.4.1 三维波动方程的球对称解

#### 1. 球坐标系

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin \theta \cos \varphi \\ y = y_0 + r \sin \theta \sin \varphi \\ z = z_0 + r \cos \theta \end{cases} \quad (4.12)$$

## 2. 球对称解

引入球坐标系后的三维波动方程转换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] \quad (4.13)$$

**球对称**指的是  $u$  与  $\theta, \rho$  无关, 只是  $r$  的函数。此时, 波动方程化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.14)$$

经过等价变形, 得到

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \quad (4.15)$$

其为关于  $ru$  的一维波动方程, 其通解为

$$ru = f_1(r + at) + f_2(r - at) \quad (4.16)$$

等价于

$$u(r, t) = \frac{f_1(r + at) + f_2(r - at)}{r} \quad (4.17)$$

其中,  $u$  可以分为两个部分的叠加

- $\frac{f_1(r + at)}{r}$  以速度  $a$  沿  $r$  减小的方向传播的行波
- $\frac{f_2(r - at)}{r}$  以速度  $a$  沿  $r$  增加的方向传播的行波

### 4.4.2 三维波动方程的泊松公式

三维波动方程在球对称情形下是很容易求解的, 泊松提出了**泊松球面平均法**

1. 考虑空间中以点  $M(x, y, z)$  为球心, 以  $r$  为半径的球, 建立球坐标
2. 记其球面  $M'$  上  $u$  的平均值为  $\bar{u}(r, t)$
3. 对于每一个局部的球心  $M$ , 平均值  $\bar{u}(r, t)$  满足球对称解
4. 再求极限  $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) = u(M, t)$  即得到了想要的结果

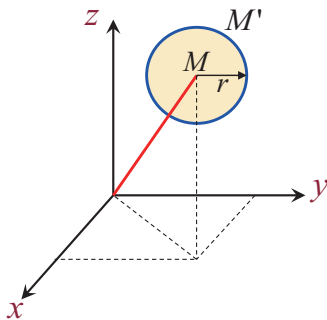


图 4.5: 泊松球面平均法

#### 1. 求 $\bar{u}(r, t)$ 的通解

- (1) 选定球心  $M(x, y, z)$ , 建立球坐标系

(2) 其半径为  $r$  的球面上的点记作  $M(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\xi, \eta, \zeta)$  是在直角坐标系上的坐标

(3) 对于每一个球心  $M$ , 引入球面平均值函数  $\bar{u}(r, t)$

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_M^r} u(\xi, \eta, \zeta, t) dS \quad (4.18)$$

注意: 积分是基于以  $M$  为原点的球坐标系

(4) 能够证明其满足球对称解, 即其通解为

$$r\bar{u}(r, t) = f_1(r + at) + f_2(r - at) \quad (4.19)$$

## 2. 求 $\bar{u}(r, t)$ 的特解

(1) 由通解得到

$$\begin{cases} r\bar{u}|_{t=0} = f_1(r) + f_2(r) \\ r \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = af_1'(r) - af_2'(r) \end{cases} \quad (4.20)$$

(2) 由定解条件可得

$$\begin{cases} \bar{u}|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z) \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z) \end{cases} \implies \begin{cases} r\bar{u}|_{t=0} = r\bar{\varphi}_0(r) \\ r \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = r\bar{\varphi}_1(r) \end{cases} \quad (4.21)$$

(3) 对比(4.20)和(4.21)可得

$$\begin{cases} f_1(r) + f_2(r) = r\bar{\varphi}_0(r) \\ f_1'(r) - f_2'(r) = \frac{r}{a}\bar{\varphi}_1(r) \end{cases} \implies \begin{cases} f_1(r) = \frac{1}{2} \left[ r\bar{\varphi}_0(r) + \frac{1}{a} \int_0^r \rho \bar{\varphi}_1(\rho) d\rho + C \right] \\ f_2(r) = \frac{1}{2} \left[ r\bar{\varphi}_0(r) - \frac{1}{a} \int_0^r \rho \bar{\varphi}_1(\rho) d\rho - C \right] \end{cases} \quad (4.22)$$

(4) 反代, 得到最终表达式

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2r} [(r + at)\bar{\varphi}_0(r + at) + (r - at)\bar{\varphi}_0(r - at)] + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\varphi}_1(\rho) d\rho \quad (4.23)$$

## 3. 求极限

(1)  $r \rightarrow 0 \Rightarrow M'(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow M(x, y, z)$

(2) 根据洛必达法则, 对(4.23)分子分母同时求导, 并将  $r = 0$  代入

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{[(r + at)\bar{\varphi}_0(r + at)]' + [(r - at)\bar{\varphi}_0(r - at)]'}{2} + \frac{(r + at)\bar{\varphi}_1(r + at) - (r - at)\bar{\varphi}_1(r - at)}{2a} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\bar{\varphi}_0(r + at) + (r + at)\bar{\varphi}_0'(r + at) + \bar{\varphi}_0(r - at) + (r - at)\bar{\varphi}_0'(r - at)}{2} + \frac{at\bar{\varphi}_1(at) + at\bar{\varphi}_1(-at)}{2a} \\ &= \frac{\bar{\varphi}_0(at) + at\bar{\varphi}_0'(at) + \bar{\varphi}_0(-at) - at\bar{\varphi}_0'(-at)}{2} + \frac{at\bar{\varphi}_1(at) + at\bar{\varphi}_1(-at)}{2a} \\ &= \frac{\bar{\varphi}_0(at) + \bar{\varphi}_0(-at) + at\bar{\varphi}_0'(at) - at\bar{\varphi}_0'(-at) + t\bar{\varphi}_1(at) + t\bar{\varphi}_1(-at)}{2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

(3) 可以证明  $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1$  是偶函数, 则  $\bar{\varphi}'_0, \bar{\varphi}'_1$  是奇函数, 进一步化简得到

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_0(at) = \bar{\varphi}_0(-at) \\ \bar{\varphi}_1(at) = \bar{\varphi}_1(-at) \\ \bar{\varphi}'_0(at) = -\bar{\varphi}'_0(-at) \end{cases} \implies \bar{u}(M, t) = \varphi_0(at) + at\bar{\varphi}'_0(at) + t\bar{\varphi}_1(at) \quad (4.25)$$

即

$$\begin{aligned} \bar{u}(M, t) &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} [(at)\bar{\varphi}_0(at)] + t\bar{\varphi}_1(at) \\ &= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi_1}{at} dS + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi_0}{at} dS \end{aligned} \quad (4.26)$$

公式(4.26)称为**三维波动方程的泊松公式**。

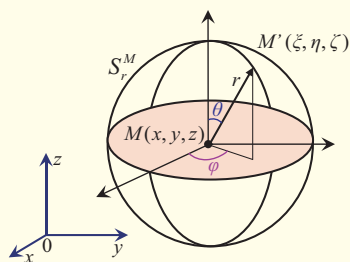
### 注意

#### 使用三维波动方程的泊松公式的注意事项

1. 积分是基于以  $M$  为原点的球坐标系, 所以

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = (at)^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.27)$$

2. 计算时, 要将球面  $S_{at}^M$  上的点变换为以  $M$  为原点的球坐标系上的点, 即



其中,

$$\begin{cases} \xi = x + at \sin \theta \cos \varphi, \\ \eta = y + at \sin \theta \sin \varphi, \\ \zeta = z + at \cos \theta. \end{cases} \quad (4.28)$$

图 4.6: 以  $M$  为原点的球坐标系

#### 例 4.1

设已知  $\varphi_0(x, y, z) = x + y + z$ ,  $\varphi_1(x, y, z) = 0$ , 代入泊松方程求解。

解

由于  $\varphi_1 = 0$ , 代入泊松公式, 求以  $M$  为原点的球面积分

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi_1}{at} dS + \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi_0}{at} dS = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}^M} \frac{\varphi_1}{at} dS$$

其中, 球面上的函数值为

$$\varphi_0(\xi, \eta, \zeta) = x + at \sin \theta \cos \varphi + y + at \sin \theta \sin \varphi + z + at \cos \theta$$

因此,

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{x + at \sin \theta \cos \varphi + y + at \sin \theta \sin \varphi + z + at \cos \theta}{at} (at)^2 \sin \theta d\varphi d\theta = x + y + z$$

### 4.4.3 三维波动方程泊松公式的物理意义

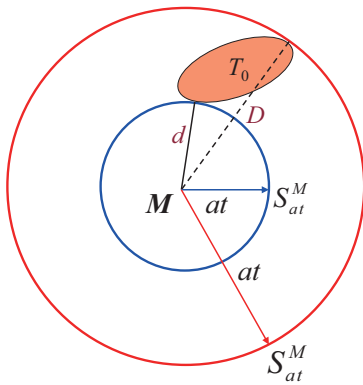


图 4.7: 三维波动方程泊松公式的物理意义

如图4.7, 假定初始条件限于立体区域  $T_0$

- $at < d \rightarrow u(M, t) = 0$  扰动前锋未到
- $at > d \rightarrow u(M, t) = 0$  扰动阵尾已过
- $d \leq at \leq D \rightarrow u(M, t) \neq 0$  扰动发生作用
- 从而可以看出扰动作用有清晰的“前锋”及“阵尾”, 它称为**惠更斯原理** (无后效现象)。

### 4.4.4 二维波动方程泊松公式及其物理意义

#### 1. 二维波动方程的泊松公式

二维波动方程的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), & -\infty < x, y < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \end{cases} \quad (4.29)$$

二维波动方程的泊松公式为

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{\Sigma_{at}^M} dS \right) + \frac{1}{4\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} dS \quad (4.30)$$

其中,

- $u(M, t)$  是由以  $M$  为中心、 $at$  为半径的圆域  $\Sigma_{at}^M$  内的初始条件决定的 ( $u$  依赖于整个圆域内的初始条件)
- **注意: 决定区域是圆域内而不是圆环上**

#### 2. 二维波动方程泊松公式的物理意义

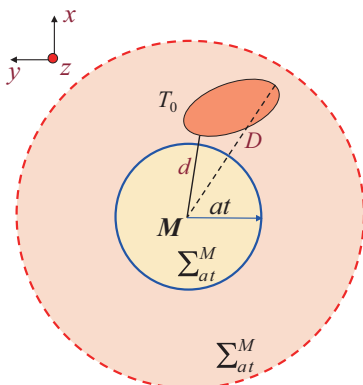


图 4.8: 二维波动方程泊松公式的物理意义

如图4.8, 假定初始条件限于平面区域  $T_0$

- $at < d \rightarrow u(M, t) = 0$  扰动前锋未到
- $at \geq d \rightarrow u(M, t) \neq 0$  扰动发生作用
- 从而可以看出扰动作用有清晰的“前锋”而无“振尾”, 称为**波的弥漫** (有后效现象)。

## 4.5 泊松公式物理意义总结

### 1. 三维泊松公式的物理意义

- (1) 空间任意一点  $M$ ，在任意时刻  $t > 0$  的状态，完全由以该点为球心、 $at$  为半径的球面上初态决定。
- (2) 当初始扰动限制在空间某局部范围时，扰动有清晰的“前锋”与“阵尾”，即惠更斯原理成立（无后效）。

### 2. 二维泊松公式的物理意义

- (1) 平面任意一点  $M$ ，在任意时刻  $t > 0$  的状态，完全由以该点为圆心、 $at$  为半径的圆盘域上初态决定。
- (2) 局部初始扰动对二维空间任意一点的扰动有持续后效，波的传播有清晰的“前锋”而无“阵尾”，此现象称为波的弥漫，即惠更斯原理不再成立（有后效）。

## 第 5 章 积分变换法

### 定义 5.1 积分变换

把函数  $f(t)$  经过积分运算变换为另一类函数

$$F(\beta) = \int_a^b f(t)K(\beta, t) dt \quad (5.1)$$

其中,

- $\beta$  为参变量,  $K(\beta, t)$  为一个确定的二元函数, 称为积分变换的核
- 不同的核与不同的积分区域, 构成不同的积分变换
- 主要包括 Fourier 变换和 Laplace 变换

### 5.1 Fourier 变换

#### 定理 5.1 Fourier 变换

Fourier 变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad (5.2)$$

反演

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega \quad (5.3)$$

#### 注意

Fourier 变换的重要条件: 分段光滑<sup>1</sup>、绝对可积  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

推论 1  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \text{有限值}$

推论 2  $x \rightarrow \pm\infty, f(x) \rightarrow 0$

<sup>1</sup>分段光滑: 一阶导数存在, 且导函数只有第一类间断点。

#### 5.1.1 Fourier 变换的理解

Fourier 变换从几何上看是将函数分解成无数个绕原点做圆周运动的向量, 得到相位/半径与频率的函数关系; 本质上是分解成无数个不同频率、幅值和相位正弦函数。

物理上认为,  $f(x)$  为信号 (原函数),  $F(\omega)$  为频谱 (像函数), 对  $f(x)$  进行 Fourier 变换, 实际上是由信号得到频谱的过程 (从时域到频域), 称为 **Fourier 分析**。

对于 Fourier 变换的进一步理解, 如图 5.1。

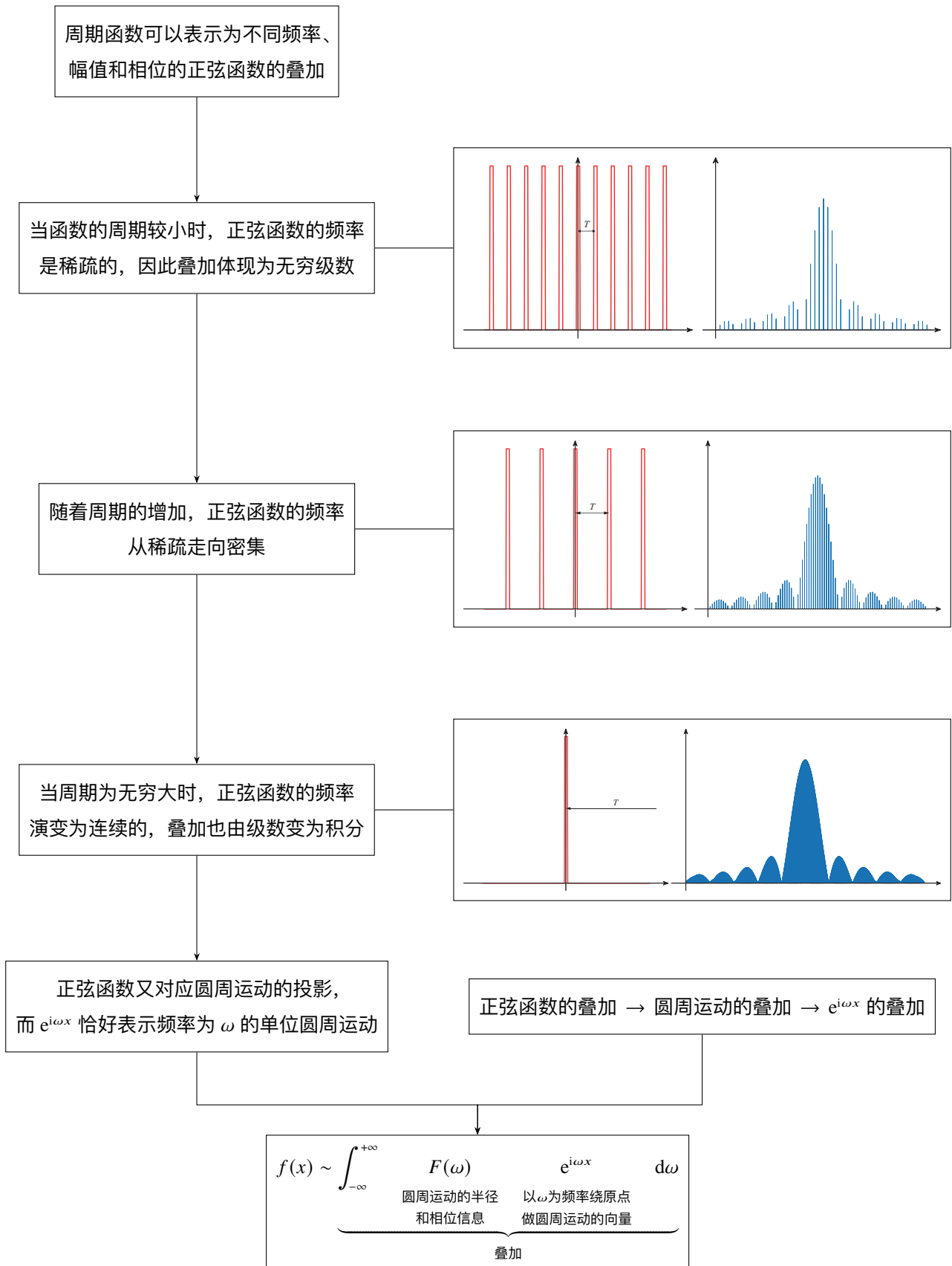


图 5.1: Fourier 变换的理解图



### 5.1.2 Fourier 变换的基本性质

#### 性质 1 线性性质

$$\mathcal{F}[C_1 f_1 + C_2 f_2] = C_1 \mathcal{F}[f_1] + C_2 \mathcal{F}[f_2] \quad (5.4)$$

#### 性质 2 微分性质

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.5)$$

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)] = (i\omega)^m \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.6)$$

#### 性质 3 象函数微分性质

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.7)$$

$$\mathcal{F}[x^m f(x)] = i^m \frac{d^m}{d\omega^m} \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.8)$$

#### 性质 4 卷积性质

- 卷积定义

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt \quad (5.9)$$

- 卷积性质

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = \mathcal{F}[f_1(x)] \cdot \mathcal{F}[f_2(x)] \quad (5.10)$$

$$f_1(x) * f_2(x) = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] \quad (5.11)$$

### 5.1.3 $\delta$ 函数及其 Fourier 变换

#### 1. $\delta$ 函数的定义

##### 特征 1 无穷高且窄

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

##### 特征 2 具有单位面积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

#### 2. $\delta$ 函数的性质

##### 性质 1 筛选性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

##### 性质 2 偶函数

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

##### 性质 3 卷积表平移

$$\delta(x - a) * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - a) f(x - \xi) d\xi = f(x - a)$$

#### 3. $\delta$ 函数的 Fourier 变换

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = 1 \quad (5.13)$$

## 5.2 Laplace 变换

### 定理 5.2 Laplace 变换

Laplace 变换

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-pt} dx \quad (5.14)$$

反演

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (5.15)$$

### 5.2.1 Laplace 变换的理解

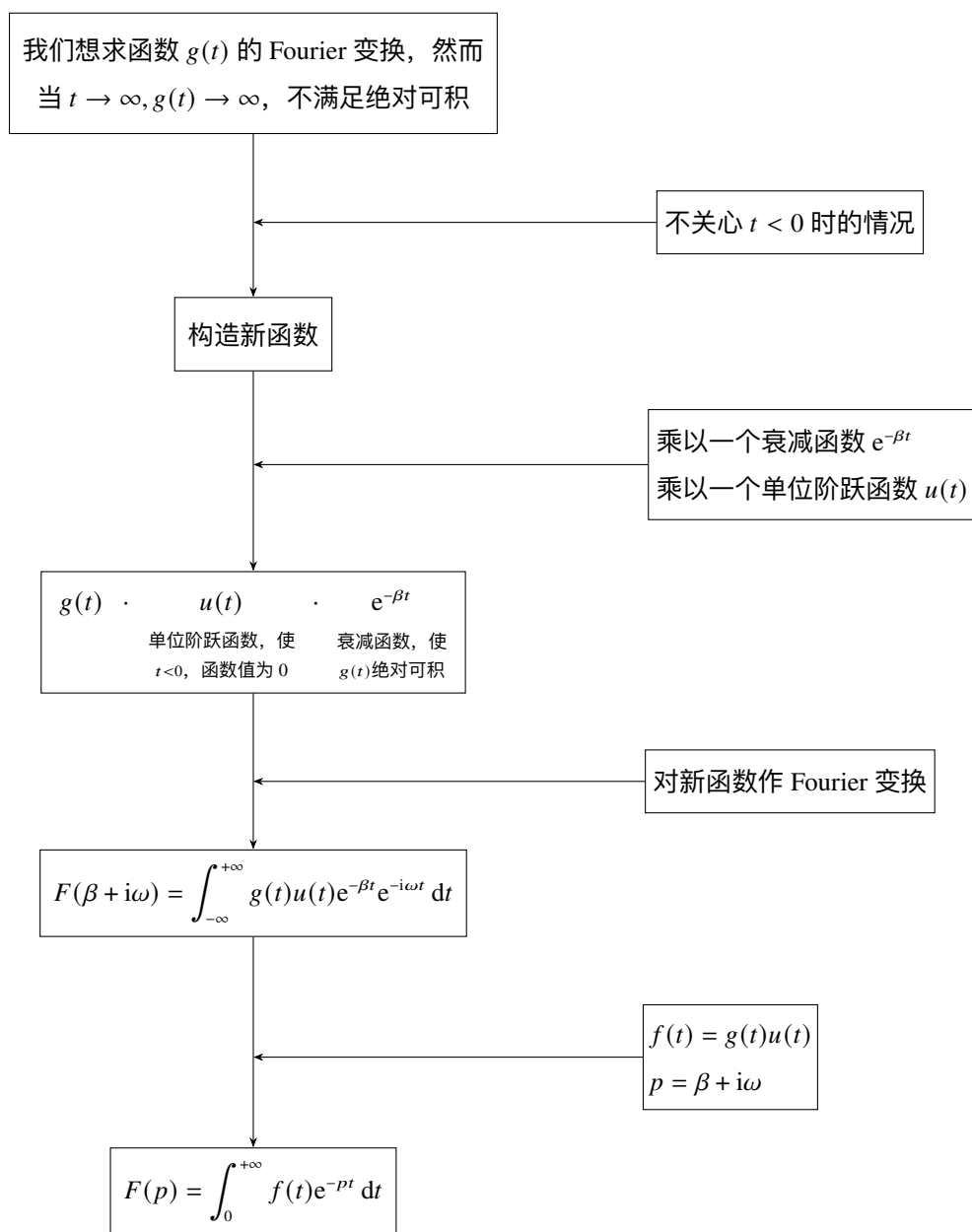


图 5.2: Laplace 变换的理解图

### 5.2.2 Laplace 变换的性质

#### 性质 1 线性性质

若  $\alpha, \beta$  是任意常实数, 且  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , 则有

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) \pm \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) \pm \beta F_2(s) \quad (5.16)$$

#### 性质 2 微分性质

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则有

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (5.17)$$

#### 性质 3 积分性质

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则有

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int \cdots \int}_n f(t) dt^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^n} f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-2)}(0) + \cdots + \frac{1}{s} f^{(-n)}(0) \quad (5.18)$$

其中,  $f^{(-1)}(0), f^{(-2)}(0), f^{(-n)}(0)$  分别为  $f(t)$  的各重积分在  $t=0$  处的值。

#### 性质 4 卷积定理

若  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , 则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (5.19)$$

#### 注意

Laplace 变换的重要条件:

1.  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ ;  $t > 0$  时,  $f(t)$  是分段光滑的。
2.  $f(t)$  有有限的增长指数。即存在正数  $M$  及  $c \geq 0$ , 使得对于任何  $t$  值,  $|f(t)| \leq Me^{ct}$ , 则 Laplace 变换在  $\text{Re}(p) = \beta > c$  时存在。

### 5.2.3 Laplace 反演的计算

#### 1. 留数定理

(1) 极点的判断方法:  $\frac{1}{f(p)}$  的  $m$  重零点就是  $f(p)$  的  $m$  级极点。

(2)  $n$  级极点的留数: 设  $p_0$  是函数  $f(p)$  的  $n$  级极点, 则

$$\text{Res}[f(p), p_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{d^{n-1}[(p-p_0)^n f(p)]}{dp^{n-1}} \quad (5.20)$$

#### 2. 反演公式转换为求极点留数

设  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  是函数  $F(p)$  的所有奇点, 适当选取  $\Re(p) = \beta$  使这些奇点落在复平面上直线  $\Re(p) = \beta$  的左侧, 且  $p \rightarrow \infty, F(p) \rightarrow 0$ , 则

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}, p_k] \quad (5.21)$$

### 5.2.4 Laplace 变换的应用——求解常微分方程 (组)

#### 题型 5.1 Laplace 变换求解常微分方程 (组)

##### 解题步骤

1. 对方程两边同时做拉普拉斯变换。
2. 利用拉普拉斯变换的线性性质、微分性质代替各阶的的导数，解出  $Y(s)$ 。
3. 做  $Y(s)$  的拉普拉斯逆变换，得到  $y(t)$ 。

##### 注意

##### Fourier 变换和 Laplace 变换的对比

1. 都属于积分变换，实函数变换为复函数，但积分范围不同。
2. 存在条件
  - Fourier 分段光滑，绝对可积
  - Laplace 分段光滑， $f(t)$  增长小于指数级
3. 积分变量不同
  - Fourier  $\omega \in (-\infty, +\infty)$
  - Laplace  $p$  的实部满足一定条件 (可自行调节)

## 5.3 积分变换法

### 5.3.1 积分变换法简述

#### 1. 积分变换的性质

##### 性质 1 积分变换的微分性质

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.22)$$

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\omega^2 \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.23)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad (5.24)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \mathcal{L}[f(t)] - pf(0) - f'(0) \quad (5.25)$$

##### 性质 2 积分变换的卷积性质

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)] \quad (5.26)$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}[F_1(p) \cdot F_2(p)] \quad (5.27)$$

## 2. 积分变换法的基本步骤

**步骤 1 变换** 选适当的积分变换, 对方程的两边做变换将偏微分方程变为含参量的常微分方程; 对变换中未利用到的定解条件也做变换. 关于积分变量的选取, 与两个变换方法的积分域有关:

- Fourier 变换 积分域为  $(-\infty, +\infty) \Rightarrow$  无界空间变量
- Laplace 变换 积分域为  $(0, +\infty) \Rightarrow$  时间变量
- 如果同时存在无界空间变量和时间变量, 这时可以联用两种变换, 即联合变换

**步骤 2 求解** 解常微分方程, 得到像函数的解

- 一阶齐次方程 分离变量法
- 二阶齐次方程 特征根法
- 非齐次方程 常数变易法

**步骤 3 反演** 对像函数反演, 得到原定解问题的解, 通常有以下两个解法

- 查表 + 卷积性质
- 留数定理

### 注意

- 在用积分变换求解定解问题时, 假定所求的解及定解条件中的已知函数的变换都是存在的;
- 一个未知函数在未求出前是很难判断变换是否存在的, 因此, 在未做验证前, 得到的只是形式解。

### 5.3.2 积分变换法举例

$$\text{积分变换法} \left\{ \begin{array}{l} \text{热传导方程} \left\{ \begin{array}{l} \text{无界杆的热传导问题} \\ \text{半无界杆的热传导问题} \end{array} \right. \\ \text{波动方程} \left\{ \begin{array}{l} \text{无界弦的自由振动} \\ \text{无界弦的受迫振动} \\ \text{有界杆的受迫振动} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

#### 题型 5.2 无界杆上的热传导问题

设有一个根无限长的杆, 杆上具有强度为  $F(x, t)$  的热源, 杆的初始温度为  $\varphi(x)$ , 试求  $t > 0$  时杆上温度的分布规律。

**解**

方法一: Fourier 变换

**第 1 步 列出定解问题**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (5.28)$$

其中,  $a^2 \frac{\lambda}{\rho c}$  表示热扩散系数,  $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho c}$ . 可以分析得到:

- 具有无界空间变量  $x$ , 可进行 Fourier 变换;
- 具有时间变量  $t$ , 可进行 Laplace 变换;
- 可以单独采用一种变换, 也可以两种联用;

## 第2步 变换

- 取  $x$  为变换变量, 对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases} \frac{\partial \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx}{\partial t} = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx \\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \end{cases} \quad (5.29)$$

- 记  $U = \mathcal{F}[u], G = \mathcal{F}[f], \Phi = \mathcal{F}[\varphi]$ , 则

$$\begin{cases} \frac{dU(\omega, t)}{dt} = -a^2 \omega^2 U(\omega, t) + G(\omega, t) \\ U(\omega, t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \end{cases} \quad (5.30)$$

## 第3步 求解

方程(5.30)是以  $\omega$  为参变量的一阶线性非齐次常微分方程, 利用常数变易法解得

$$U(\omega, t) = \Phi(\omega) \exp(-a^2 \omega^2 t) + \int_0^t G(\omega, \tau) \exp[-a^2 \omega^2 (t - \tau)] d\tau \quad (5.31)$$

## 第4步 反演

- 查表可得

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}[\exp(-a^2 \omega^2 t)] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp[-a^2 \omega^2 (t - \tau)]\right\} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 (t - \tau)}\right) \end{cases}$$

- 卷积性质

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x) * \left[ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \right] \\ &\quad + \int_0^t \left\{ f(x, \tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 (t - \tau)}\right] \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 (t - \tau)}\right] d\xi d\tau \end{aligned} \quad (5.32)$$

另解

方法二: 联合变换求解

## 第1步 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (5.33)$$

## 第2步 变换

- 取  $x$  为变换变量, 对方程和定解条件进行 Fourier 变换, 记  $U = \mathcal{F}[u], G = \mathcal{F}[f], \Phi = \mathcal{F}[\varphi]$ , 则

$$\begin{cases} \frac{dU(\omega, t)}{dt} = -a^2 \omega^2 U(\omega, t) + G(\omega, t) \\ U(\omega, t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \end{cases} \quad (5.34)$$

- 再对变量  $t$  作 Laplace 变换:

$$\int_0^\infty \frac{dU(\omega, t)}{dt} e^{-pt} dt = -a^2 \omega^2 \int_0^\infty U(\omega, t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty G(\omega, t) e^{-pt} dt \quad (5.35)$$

引入  $\sim$  符号表示像函数, 得到代数方程

$$p\tilde{U}(\omega, p) - \Phi(\omega) = -a^2 \omega^2 \tilde{U}(\omega, p) + \tilde{G}(\omega, p) \quad (5.36)$$

## 第3步 求解

方程(5.36)是线性方程, 直接解得

$$\tilde{U}(\omega, p) = \frac{1}{p + a^2 \omega^2} \Phi(\omega) + \frac{1}{p + a^2 \omega^2} \tilde{G}(\omega, p) \quad (5.37)$$

## 第4步 反演

(1) 先对变量  $p$  进行反演

- 查表可得

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p + a^2 \omega^2} \right] = \exp(-a^2 \omega^2 t)$$

- 卷积性质

$$\begin{aligned} U(\omega, p) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p + a^2 \omega^2} \Phi(\omega) + \frac{1}{p + a^2 \omega^2} \tilde{G}(\omega, p) \right] \\ &= \Phi(\omega) \exp(-a^2 \omega^2 t) + G(\omega, t) * \exp(-a^2 \omega^2 t) \\ &= \Phi(\omega) \exp(-a^2 \omega^2 t) + \int_0^t G(\omega, \tau) * \exp[-a^2 \omega^2 (t - \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (5.38)$$

(2) 再对变量  $\omega$  进行反演, 此步骤与方法一完全相同, 略。

### 题型 5.3 半无界杆上的热传导问题

设有一根半无限长的杆, 端点温度变化为已知, 杆的初始温度为  $0^\circ\text{C}$ , 求杆上的温度分布规律。

**解**

利用 Laplace 变换求解

## 第1步 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, t > 0 \\ u|_{x=0} = f(t), & t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, & x > 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

可以分析得到:

- 没有无界空间变量  $x$ , 不可以进行 Fourier 变换;
- 具有时间变量  $t$ , 可进行 Laplace 变换。

## 第2步 变换

- 取  $t$  为变换变量, 对方程和定解条件进行 Laplace 变换

$$\begin{cases} \frac{\partial \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt}{\partial t} = a^2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt \\ \int_0^{+\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \end{cases} \quad (5.40)$$

- 记  $U = \mathcal{L}[u], F = \mathcal{L}[f]$ , 则

$$\begin{cases} \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0 \\ U(x, p)|_{x=0} = F(p) \end{cases} \quad (5.41)$$

## 第3步 求解

方程(5.41)是以  $p$  为参变量的一阶线性齐次常微分方程, 利用特征根法得其通解为

$$U(x, p) = C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a} x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right) \quad (5.42)$$

由于  $x \rightarrow \infty, U \rightarrow C$  (常数), 所以为了保证  $U(x, p)$  的有界性, 无穷发散量  $\exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a} x\right)$  的系数  $C_1 = 0$ .

再根据边界条件得到方程的特解

$$U(x, p) = F(p) \exp\left(-\frac{p}{a^2} x\right) \quad (5.43)$$

## 第4步 反演

- 查表可得

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right)$$

- 微分性质

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] = p \mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] - \operatorname{erfc}(\infty) = p \cdot \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right) - 0 = \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right)$$

所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a} x\right)\right] = \frac{d}{dt} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{3/2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \quad (5.44)$$

- 卷积性质

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x, p)] = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] d\tau \quad (5.45)$$



### 题型 5.4 无界弦的自由振动

试分析无界弦的自由振动。

**解** 利用 Fourier 变换求解

#### 第 1 步 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (5.46)$$

可以分析得到:

- 具有无界空间变量  $x$ , 可进行 Fourier 变换;
- 具有时间变量  $t$ , 可进行 Laplace 变换;
- 可以单独采用一种变换, 也可以两种联用;

#### 第 2 步 变换

- 取  $x$  为变换变量, 对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx \\ \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \\ \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx \right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\omega x} dx \end{cases} \quad (5.47)$$

- 记  $U = \mathcal{F}[u], \Phi = \mathcal{F}[\varphi], \Psi = \mathcal{F}[\psi]$ , 则

$$\begin{cases} \frac{d^2 U(\omega, t)}{dt^2} = -a^2 \omega^2 U(\omega, t) \\ U(\omega, t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \\ \left. \frac{dU(\omega, t)}{dt} \right|_{t=0} = \Psi(\omega) \end{cases} \quad (5.48)$$

#### 第 3 步 求解

方程(5.48)是以  $\omega$  为参变量的二阶线性齐次常微分方程, 利用特征根法解得

- 通解

$$U(\omega, t) = A \cos a\omega t + B \sin a\omega t \quad (5.49)$$

- 特解

$$U(\omega, t) = \Phi(\omega) \cos a\omega t + \Psi(\omega) \frac{\sin a\omega t}{a\omega} \quad (5.50)$$

#### 第 4 步 反演

- 利用欧拉公式变形

$$\begin{aligned} U(\omega, t) &= \Phi(\omega) \cos a\omega t + \Psi(\omega) \frac{\sin a\omega t}{a\omega} \\ &= \frac{1}{2} [\Phi(\omega) e^{ia\omega t} + \Phi(\omega) e^{-ia\omega t}] + \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{i\omega} \Psi(\omega) e^{ia\omega t} - \frac{1}{i\omega} \Psi(\omega) e^{-ia\omega t} \right] \end{aligned}$$

- 位移性质

$$f(x+x_0) = \mathcal{F}^{-1} [e^{i\omega x_0} F(\omega)] \quad (5.51)$$

- 积分性质

$$\int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{i\omega} F(\omega) \right] \quad (5.52)$$

- 将位移性质作用于积分性质

$$\int_{-\infty}^{x+x_0} f(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{i\omega} F(\omega) e^{i\omega x_0} \right] \quad (5.53)$$

所以

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \left[ \int_{-\infty}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.54)$$

### 题型 5.5 无界弦的受迫振动

试分析无界弦的受迫振动。

**解**

利用 Fourier 变换求解

#### 第 1 步 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, & t = 0, -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (5.55)$$

可以分析得到：

- 具有无界空间变量  $x$ ，可进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量  $t$ ，可进行 Laplace 变换；
- 可以单独采用一种变换，也可以两种联用；

#### 第 2 步 变换

- 取  $x$  为变换变量，对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \right]_{t=0} = 0 \\ \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\omega x} dx \right]_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

- 记  $U = \mathcal{F}[u]$ ,  $F = \mathcal{F}[f]$ ，则

$$\begin{cases} \frac{d^2 U(\omega, t)}{dt^2} = -a^2 \omega^2 U(\omega, t) + F(\omega, t) \\ U(\omega, t)|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{dU(\omega, t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5.57)$$

## 第3步 求解

方程(5.57)是以  $\omega$  为参变量的二阶线性非齐次常微分方程, 利用常数变易法解得

$$U(\omega, t) = \frac{1}{a} \int_0^t F(\omega, \tau) \frac{\sin a\omega(t-\tau)}{\omega} d\tau \quad (5.58)$$

## 第4步 反演

- 查表, 得

$$\mathcal{F} \left[ f(x) = \begin{cases} h, & -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{others} \end{cases} \right] = 2h \frac{\sin \omega \tau}{\omega}$$

经过变量替换, 得到

$$\frac{\sin a\omega(t-\tau)}{\omega} = \mathcal{F} \left[ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -a(t-\tau) < x < a(t-\tau) \\ 0, & \text{others} \end{cases} \right]$$

- 由卷积性质

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t f(x, \tau) * g(x) d\tau = \frac{1}{a} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) g(x-\xi) d\xi d\tau \quad (5.59)$$

$$= \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad (5.60)$$

## 题型 5.6 有界杆的受迫振动

设有一根长为  $l$  的均匀杆, 其一端固定, 另一端由静止状态开始受力  $F = A \sin \omega t$  的作用, 力  $F$  的方向与杆的轴线一致, 求杆在零初值条件下作纵振动的规律。

解

利用 Laplace 变换求解

## 第1步 列出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \\ u|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t, & t > 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

可以分析得到:

- 不具有无界空间变量  $x$ , 不可进行 Fourier 变换;
- 具有时间变量  $t$ , 可进行 Laplace 变换;

## 第2步 变换

- 取  $t$  为变换变量, 对方程和定解条件进行 Laplace 变换

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} e^{-pt} dt = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \\ \int_0^{+\infty} u(0, t) e^{-pt} dt = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} u(l, t) e^{-pt} dt = \frac{A}{E} \sin \omega t \end{cases} \quad (5.62)$$

• 记  $U = \mathcal{L}[u]$  则

$$\begin{cases} p^2 U(x, p) = a^2 \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} \\ U(x, p)|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{dU(x, p)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{cases} \quad (5.63)$$

### 第3步 求解

方程(5.63)是以  $\omega$  为参变量的二阶线性齐次常微分方程, 利用特征根法解得

• 通解

$$U(x, p) = C_1 \exp\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{p}{a}x\right) \quad (5.64)$$

• 特解

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{Ep(p^2 + \omega^2)} \frac{\exp\left(\frac{p}{a}x\right) - \exp\left(-\frac{p}{a}x\right)}{\exp\left(\frac{p}{a}l\right) + \exp\left(-\frac{p}{a}l\right)} = \frac{Aa\omega \sinh\left(\frac{p}{a}x\right)}{Ep(p^2 + \omega^2) \cosh\left(\frac{p}{a}l\right)} \quad (5.65)$$

### 第4步 反演

用求极点留数的方法求反演

#### 1. 求极点

$$Ep(p^2 + \omega^2) \cosh\left(\frac{p}{a}l\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p^2 + \omega^2 = 0 \\ \cosh\left(\frac{p}{a}l\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = \pm i\omega \\ p = \pm i\frac{a}{2l}(2k-1), k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

#### 2. 求极点留数

#### 定理 5.3 一阶极点留数计算定理

当函数  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P(x), Q(x)$  均在  $z_0$  处解析, 如果  $P(z_0) \neq 0$ ,  $Q(z_0) = 0$ ,  $Q'(z_0) \neq 0$ , 则

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{P(z)}{Q'(z_0)} \quad (5.66)$$

所以

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_j \text{Res} \left[ \frac{Aa\omega \sinh\left(\frac{p}{a}x\right)}{Ep(p^2 + \omega^2) \cosh\left(\frac{p}{a}l\right)} e^{pt}, p_j \right] = \frac{Aa\omega}{E} \sum_j \frac{\sinh\left(\frac{p}{a}x\right) e^{pt}}{\frac{d}{dp} \left[ p(p^2 + \omega^2) \cosh\left(\frac{p}{a}l\right) \right]} \Bigg|_{p=p_j} \\ &= \frac{Aa\omega}{E} \sum_j \frac{\sinh\left(\frac{p_j}{a}x\right) e^{p_j t}}{(3p_j^2 + \omega^2) \cosh\left(\frac{p_j}{a}l\right) + \frac{p_j(p_j^2 + \omega^2)l}{a} \sinh\left(\frac{p_j}{a}l\right)} \end{aligned} \quad (5.67)$$

代入极点计算，可得最终解

$$u(x, t) = \frac{Aa}{\omega E} \frac{1}{\cos \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t \sin \frac{\omega}{a} x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{16a\omega A l^2}{E\pi} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} + \sin \frac{(2k-1)a\pi t}{2l}}{(2k-1)[4l^2\omega^2 - a^2(2k-1)^2\pi^2]} \quad (5.68)$$



## 第 6 章 Laplace 方程的格林函数法

### 6.1 Laplace 方程边值问题的提出

#### 6.1.1 三维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.1)$$

三维 Laplace 方程的特点：

- 描述稳定问题，即不随时间变化的过程，如热传导、扩散、静电场等
- 只存在边界条件，无初始条件
- 一般有两种边值条件，构成两类边值问题

#### 6.1.2 两类边值问题

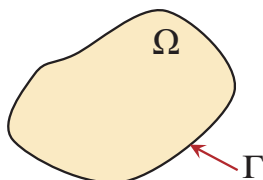


图 6.1: 空间区域

##### 1. 第一边值问题 (Dirichlet 问题)

如图6.1，在空间  $(x, y, z)$  中某一区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上给定连续函数  $f$ 。

求一个函数  $u(x, y, z)$ ，它在闭区域  $\Omega + \Gamma$  上等于已知函数  $f$ ，即

$$u|_{\Gamma} = f \quad (6.2)$$

具有二阶连续偏导数并且满足 Laplace 方程的连续函数称为调和函数。所以，Dirichlet 问题也可以描述为：

求一个函数  $u(x, y, z)$ ，在  $\Omega + \Gamma$  上连续，在  $\Omega$  中是调和函数，它在边界  $\Gamma$  上的值为给定连续函数

##### 2. 第二边值问题 (Neumann 问题)

如图6.1，在空间  $(x, y, z)$  中某一区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上给定连续函数  $f$ 。

求一个函数  $u(x, y, z)$ ，在  $\Omega + \Gamma$  上连续，在  $\Omega$  中是调和函数，它在边界  $\Gamma$  上任一点处法向导数存在且等于已知函数  $f$ ，即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f \quad (6.3)$$

其中,  $\boldsymbol{n}$  是  $\Gamma$  的外法向量。

### 6.1.3 内问题和外问题

#### 1. 内问题

在边界  $\Gamma$  上给定边界条件, 在区域内部求 Laplace 方程的解, 这样的问题称为**内问题**。

#### 2. 外问题

在边界  $\Gamma$  上给定边界条件, 在区域外部求 Laplace 方程的解, 这样的问题称为**外问题**。

由于外问题是在无穷区域上给出的, 在求解中常常要求附加条件:  $\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = u_0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

## 6.2 格林公式

### 6.2.1 第一格林公式

格林公式是曲面积分中高斯公式的直接推论。

#### 定理 6.1 高斯公式

如图6.2, 设  $\Omega$  是一个足够光滑的、以曲面  $\Gamma$  为边界的有界区域,  $\vec{U}$  是在  $\Omega + \Gamma$  上连续的、在  $\Omega$  内有一阶连续的任意矢量函数, 则有**高斯公式**

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{U} \, dV = \iint_{\Gamma} \vec{U} \cdot d\vec{S} \quad (6.4)$$

其中,  $dV$  为体积元素,  $d\vec{S}$  是  $\Gamma$  上的矢量面积微元, 且  $d\vec{S}$  的面元外法向为  $\boldsymbol{n}$ 。

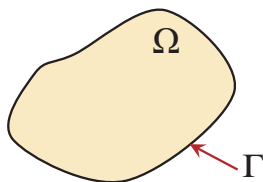


图 6.2: 空间区域

#### 定理 6.2 第一格林公式

如图6.2, 设函数  $u(x, y, z)$  和  $v(x, y, z)$  在  $\Omega + \Gamma$  上具有一阶连续偏导数, 在  $\Omega$  内具有连续的所有二阶偏导数, 取  $\vec{U} = u \nabla v$ , 代入高斯公式可得**第一格林公式**

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 v) \, dV = \iint_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} \, dS - \iiint_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v) \, dV \quad (6.5)$$

其中,  $dV$  为体积元素,  $dS$  是  $\Gamma$  上的标量面积微元。

### 6.2.2 第二格林公式

由第一格林公式(6.5), 并交换  $u$  和  $v$  的位置, 则有

$$\iiint_{\Omega} (v \nabla^2 u) \, dV = \iint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS - \iiint_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u) \, dV \quad (6.6)$$



将(6.5)–(6.6)，即得第二格林公式

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (6.7)$$

### 6.2.3 调和函数的基本性质

#### 1. 边界平衡性质

设  $u(x, y, z)$  是以  $\Gamma$  为边界的区域  $\Omega$  内的调和函数，它在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (6.8)$$

证明：在第二格林公式中取  $v = 1$  即可。推论：Neumann 内问题有解的充要条件为  $\iint_{\Gamma} f dS = 0$ .

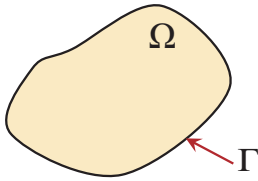


图 6.3: 空间区域

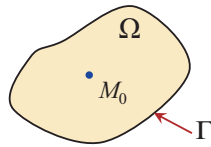


图 6.4: 空间区域内一点  $M_0$

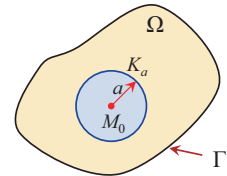


图 6.5: 调和函数的平均值

#### 2. 调和函数的积分表达式

##### 定理 6.3 三维 Laplace 方程的基本解

球坐标形式的三维 Laplace 方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.9)$$

此方程的三维球对称解  $u = V(r)$  满足  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$ ，其通解为

$$V(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 \quad (6.10)$$

令  $c_1 = 1, c_2 = 0$  得到三维 Laplace 方程的基本解

$$V_0(r) = \frac{1}{r} \quad (6.11)$$

将基本解代入三维 Laplace 方程，则可以得到调和函数的积分表达式：

若函数  $u$  在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数，且在  $\Omega$  内调和，则

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS \quad (6.12)$$

其中， $r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ .

式子的含义：用  $u$  在  $\Gamma$  上的值和  $u$  在  $\Gamma$  上法向导数的值，来表达其在  $\Omega$  内任一点  $M_0$  的值，被称为调和函数的积分表达式。

#### 3. 平均值公式

设函数  $u(M)$  在区域内调和,  $M_0$  是  $\Omega$  内任何一点,  $K_a$  表示以  $M_0$  为球心, 以  $a$  为半径且完全落在区域  $\Omega$  内部的球面, 则有**平均值公式** (球心值和球面平均值的关系)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{K_a} u \, dS \quad (6.13)$$

证明: 将积分表达式应用于球面  $K_a$ , 注意到此时  $r$  的方向就是表面法向, 再利用边界平衡性质即可。

#### 4. 极值原理

设函数  $u(x, y, z)$  在区域内调和, 在  $\Omega + \Gamma$  上连续且不为常数, 则它的最大值和最小值只能在边界处达到。

推论:

- Dirichlet 问题  $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases}$  的解是唯一的。
- Neumann 问题  $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = f \end{cases}$  的解除了相差一个常数外也是唯一的。

## 6.3 格林函数

### 6.3.1 格林函数的引入

格林函数是为了解决 Laplace 方程的 Dirichlet 问题提出的

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = f \end{cases} \quad (6.14)$$

而调和函数的积分表达式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[ u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] dS$$

并不能直接提供解, 因为其边界上的值虽然已知, 而法向导数的值却不知道, 需要想办法消去。为此, 提出格林函数。

设在  $\Omega$  内有  $\nabla^2 u = 0, \nabla^2 v = 0$ ;  $u, v$  在  $\Omega + \Gamma$  上有一阶连续偏导数, 则由格林第二公式有

$$\iiint_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dV = \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad \xrightarrow[\nabla^2 v = 0]{\nabla^2 u = 0} \iint_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (6.15)$$

再将这个式子与积分表达式相加得

$$u(M_0) = \iint_{\Gamma} \left\{ u \left[ \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right] + \left( \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - v \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dS \quad (6.16)$$

为了消除  $u$  的法向导数, 不妨选择调和函数  $v$  满足

$$v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma} \quad (6.17)$$

所以

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - v \right] dS \quad (6.18)$$

## 引入格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - v \quad (6.19)$$

则最终解可以表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} u \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (6.20)$$

整个格林函数的获得思路如图6.6.

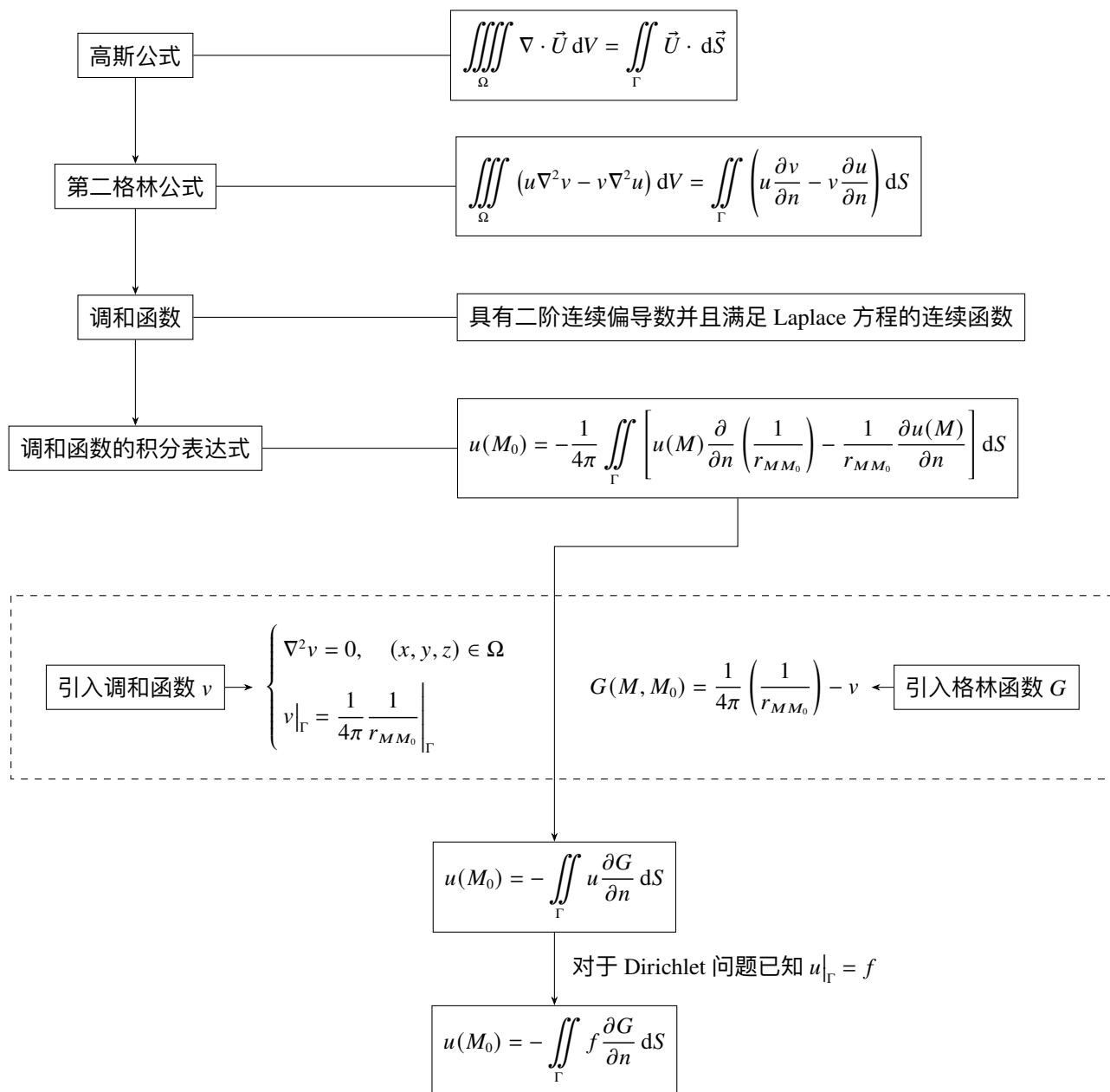


图 6.6: 格林函数获得的思路图

## 注意

## 引入格林函数的意义

1. 将 Laplace 方程或泊松方程 Dirichlet 问题的求解, 转化为求此区域内的格林函数。

2. 求格林函数需要解定解问题 
$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma} \end{cases}$$
 进而  $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - v$ 。

3. 此问题只与区域有关, 因此格林函数也只与区域有关。所以, 只要求得了某个区域的格林函数, 就能一劳永逸解决此区域上的一切边界条件的 Dirichlet 问题。

4. 对于某些特殊的区域, 如半空间、球等, 格林函数可以用初等方法得到。

## 6.3.2 格林函数的性质

格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) - v \quad (6.21)$$

其中, 函数  $v$  满足

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ v|_{\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} \Big|_{\Gamma} \end{cases} \quad (6.22)$$

性质 1 格林函数  $G(M, M_0)$  在去除  $M = M_0$  一点外处处满足 Laplace 方程, 当  $M \rightarrow M_0$  时,  $G(M, M_0)$  趋于无穷大。

性质 2 在边界  $\Gamma$  上格林函数恒等于 0, 即  $G(M, M_0)|_{\Gamma} = 0$ 。

性质 3 在区域  $\Omega$  内, 下面不等式成立

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \quad (6.23)$$

性质 4 格林函数  $G(M, M_0)$  关于自变量  $M$  及参变量  $M_0$  之间具有对称性, 即  $G(M, M_0) = G(M_0, M)$ 。

## 6.3.3 格林函数的静电学背景

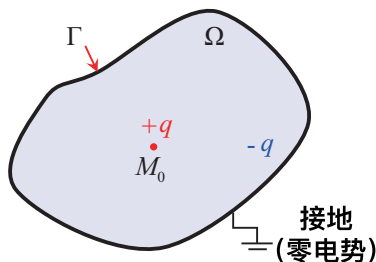


图 6.7: 格林函数的静电学背景

如图6.7, 考虑空腔  $\Omega$ , 容器壁  $\Gamma$  为导体, 其内部一点  $M_0$  存在单位正电荷  $+q$ 。

根据静电学知识, 此时内壁因静电感应出现等值异号电荷  $-q$ , 外壁由电荷守恒产生感应电荷  $+q$ , 整个壁面为等势面。

再进一步, 令容器壁接地, 此时外侧正电荷消失, 壁面为零电势。且容器内任何一点电势, 就是点电荷的电势和内表面感生电荷电势的叠加。所以, 壁面为零电势是感生电荷电势抵消点电荷电势的结果。

#### 格林函数各项的静电学意义

1.  $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$   $M_0$  点处的单位正电荷在无界空间中产生的电势
2.  $-v$  感生负电荷引起的电势
3.  $G(M, M_0)$  接地容器内的实际电势: 单位正电荷电势 + 内壁感生负电荷电势

所以, 格林函数  $G(M, M_0)$  是在接地电容器内  $M_0$  点放置单位正点电荷后的电势分布。因此, 格林函数又被称为 **点源函数**。

## 6.4 两种特殊区域的格林函数及 Dirichlet 问题的解

### 6.4.1 电像法

边界零电势, 除了可以由真实情况下的内部感生电荷实现外, 还可以通过引入外部虚拟点电荷的方式来满足, 这是电像法的物理基础。利用真实内部感生电荷和外部虚拟点电荷的等效性, 转化为虚拟点电荷问题, 实现求解的方法称为 **电像法**。

#### 电像法的基本操作步骤

1. 在区域外找出区域内点  $M_0$  关于边界的像点。
2. 放置适量负点电荷, 和原内壁感生电荷起到的效果完全相同, 即边界零电势。
3. 叠加后在区域中形成的电势场就是所要求的格林函数。

### 6.4.2 半空间的格林函数法

用格林函数法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & z > 0 \\ u|_{z=0} = f(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \end{cases} \quad (6.24)$$

**解**

运用电像法求解。

#### 步骤 1 求解格林函数

**物理含义** 上半空间  $z > 0$  一点  $M_0$  放置单位正电荷, 再将导电平面  $z = 0$  接地后, 上半平面的电势分布。

**电像法** 在下半平面镜像位置放置单位负电荷后撤去平板。

如图6.8, 在上半平面一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  放置单位正电荷, 在其关于平面  $z = 0$  的镜像点  $M_1(x_0, y_0, -z_0)$  放置单位负电荷, 同时撤去  $z = 0$  处的导体平面。

由于  $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$  表示点  $M_0$  处的单位正电荷在无界空间中产生的电势,

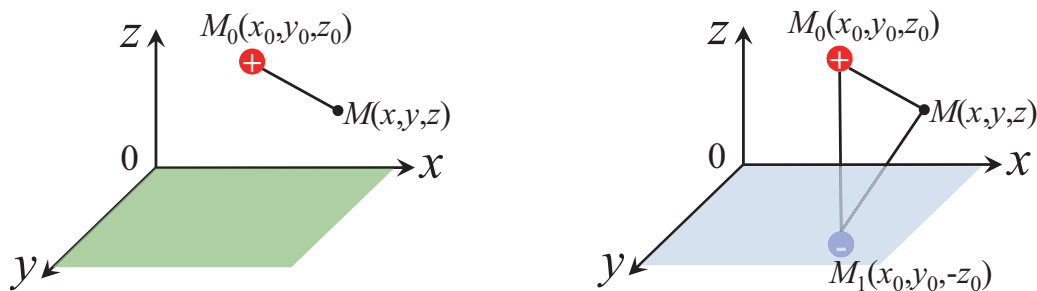


图 6.8: 半空间的格林函数及其电像法

那么  $-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}}$  就表示点  $M_1$  处的单位负电荷在无界空间中产生的电势, 则半空间  $z > 0$  的格林函数就是:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r_{MM_1}} \quad (6.25)$$

### 步骤 2 得到定解问题的解

已知格林函数, 定解问题的解可表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (6.26)$$

其中,  $\Gamma$  为平面  $z = 0$ , 外法线方向为  $-z$  方向, 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{z=0} &= - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4\pi} \frac{z + z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= - \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

所以最终解为

$$\begin{aligned} u(M_0) &= - \iint_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_0 f(x, y)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy \end{aligned} \quad (6.27)$$

### 6.4.3 球域的格林函数法

用格林函数法解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \\ u|_{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} = f(x, y, z), & x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \quad (6.28)$$

**解**

运用电像法求解。

#### 步骤 1 求解格林函数

**物理含义** 在球内一点  $M_0$  放置单位正电荷, 再将导电平面  $z = 0$  接地后, 球内的电势分布。

**电像法** 在球面外部位置放置适量的负电荷后撤去球面。

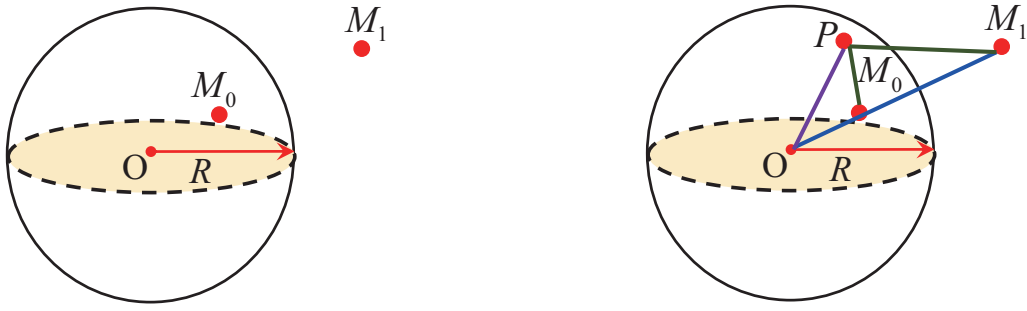


图 6.9: 球域的格林函数及其电像法

如图6.9, 由于球面的复杂性, 负电荷的放置位置以及电荷量  $q$  不能直接观测得到。由物理学的知识可知,  $M_1$  应满足在线段  $OM_0$  的延长线上, 且满足  $r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2$ .

而负电荷量的大小  $q$  需使得球面处叠加电势为 0, 即  $\frac{1}{4\pi r_{PM_0}} = \frac{q}{4\pi r_{PM_1}}$ ,  $P$  为球面上的点, 即  $q = \frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}$ .

$$\begin{cases} \frac{r_{OM_0}}{R} = \frac{R}{r_{OM_1}} \\ \angle POM_1 = \angle POM_0 \end{cases} \Rightarrow \triangle OPM_1 \sim \triangle OM_0P \Rightarrow q = \frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}} = \frac{R}{r_{OM_0}} \quad (6.29)$$

由电势叠加, 得到格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{OM_0}} \frac{1}{r_{MM_1}} \right) \quad (6.30)$$

## 步骤 2 得到定解问题的解

已知格林函数, 定解问题的解可表示为

$$u(M_0) = - \iint_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (6.31)$$

其中,  $\Gamma$  为半径为  $R$  的球面, 外法线方向为球心指向外的射线方向, 记为变量  $r_{OM}$ , 则

$$\begin{cases} r_{MM_0} = \sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_0}^2 - 2r_{OM}r_{OM_0} \cos \gamma} \\ r_{MM_1} = \sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_1}^2 - 2r_{OM}r_{OM_1} \cos \gamma} \end{cases} \quad \gamma = \langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} \rangle \quad (6.32)$$

进一步得到格林函数

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_0}^2 - 2r_{OM}r_{OM_0} \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_1}^2 - 2r_{OM}r_{OM_1} \cos \gamma}} \right) \quad (6.33)$$

所以,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial G}{\partial r_{OM}} \right|_{r_{OM}=R} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r_{OM}} \left( \frac{1}{\sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_0}^2 - 2r_{OM}r_{OM_0} \cos \gamma}} - \frac{R}{\sqrt{r_{OM}^2 + r_{OM_1}^2 - 2r_{OM}r_{OM_1} \cos \gamma}} \right)_{r_{OM}=R} \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_{OM_0}^2}{(R^2 + r_{OM_0}^2 - 2Rr_{OM_0} \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

得到最终解为

$$\begin{aligned}
 u(M_0) &= - \iint_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} dS \\
 &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Gamma} \frac{(R^2 - r_{OM_0}^2) f(x, y, z)}{(R^2 + r_{OM_0}^2 - 2Rr_{OM_0} \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} dS \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R, \theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.35)$$

其中,  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  是点  $M_0$  的球坐标,  $(R, \theta, \varphi)$  是球面  $\gamma$  上任意一点  $P$  的坐标,  $\gamma$  是  $OP, OM_0$  的夹角, 也可以表示为

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (6.36)$$



## 第 7 章 差分法

### 7.1 差分格式

设函数  $u(x)$  定义在一维有界空间上。差分求解需要先将区域离散化（类似于采样），得到由节点构成的网格系统，再利用差分格式建立离散方程。

真实的区域由无限个节点构成，因此这里是用有限个节点来近似无限的系统。

由  $u(x)$  在点  $x$  处的泰勒展开

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \quad (7.1)$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \quad (7.2)$$

则

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + u''(x)\frac{h}{2} + u'''(x)\frac{h^2}{6} = u'(x) + O(h) \Rightarrow u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \quad (7.3)$$

其中， $o(h)$  为  $h$  的同阶无穷小量<sup>1</sup>，称为截断误差。

同理可得

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \quad (7.4)$$

忽略无穷小量  $o(h)$  可得

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (7.5)$$

$$\approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (7.6)$$

$$\approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (7.7)$$

公式(7.5)称为前向差分，公式(7.6)称为后向差分，公式(7.7)称为中心差分。二阶导数的中心差分为

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad (7.8)$$

由于前向和后向差分中截断误差为  $O(h)$ ，则前向和后向差分具有一阶精度，中心差分的阶段误差为  $O(h^2)$ ，具有二阶精度。精度越高，误差以越快的速度趋于零，但所需要的信息也越多。

定义截断误差的阶数为随着网格尺寸趋于零时，截断误差趋于零的速度，则  $n$  阶精度格式 = 该格式的截断误差为  $n$  阶。精度和节点数量是差分法近似程度的两个重要保障，在相同的近似程度下，高精度格式所需的节点数量更少。

---

<sup>1</sup>即  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = C$  (常数) 余项， $O(h^2)$  类似

差分的形式可以总结表示为

连续区域  $\xrightarrow{\text{离散化}}$  由节点构成的网络  $\xrightarrow{\text{四种形式}}$  离散方程

具体的四种形式如表7.1.

导数	差分格式	阶段误差	差分形式
$u'(x)$	$\frac{u(x) - u(x-h)}{h}$	$o(h)$	后向差分
	$\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$	$o(h)$	前向差分
	$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$	$o(h^2)$	中心差分
$u''(x)$	$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$	$o(h^2)$	中心差分

表 7.1: 差分的四种表示形式

## 7.2 Laplace 方程的差分解法

二维 Laplace 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = f(x, y), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (7.9)$$

其中,  $\Gamma$  是平面上不规则有界区域  $\Omega$  的边界。

### 7.2.1 区域离散化

如图7.1, 离散化的目标: 用一系列节点  $(i, j)$  代替原物理域区域, 基本步骤为

步骤 1 不规则区域变为规则区域

步骤 2 将规则区域进一步划分为正方形网格

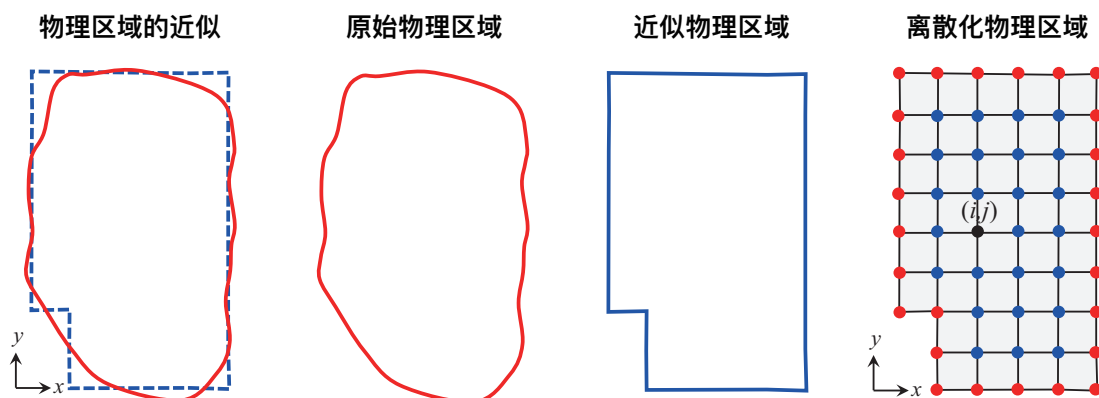


图 7.1: 区域离散化

离散化以后的区域, 网格线的交点、以及网格线与边界的交点称为**节点**, 用  $(i, j)$  标记其行和列的位置。红色为边界节点, 蓝色为内部节点。正方形网格尺寸  $h$  称为**节点间距**。

### 7.2.2 建立离散方程

- **内部节点** (蓝色) 需要建立离散方程
- **边界节点** (红色) 需赋予相应的边界条件

#### 1. 边界条件的指定

- 在原定解问题中, 红色不规则边界上取值已知为  $f(x, y)$
- 利用  $f(x, y)$  给定红色边界点上的值
- 利用**最近点策略**, 即

任一红色边界节点的取值 = 原红色不规则区域上距离最近的点的取值

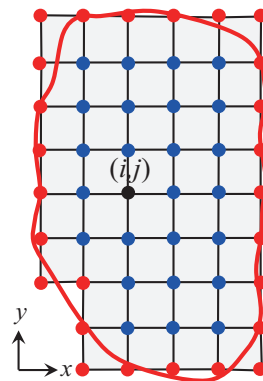


图 7.2: 边界条件的指定

#### 2. 内部节点离散方程的建立

对于任一内部节点  $(i, j)$ , 由二维 Laplace 方程可以得到离散方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0 \quad (7.10)$$

化简得到

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (7.11)$$

即“**四周相加, 再减四倍**”。公式(7.11)对内部所有节点都成立。

将所有离散方程联立得到一个线性方程组

$$A\mathbf{u} = \mathbf{B} \quad (7.12)$$

其中,  $A$  为系数矩阵,  $\mathbf{u}$  为内部节点未知量组成的列向量, 非齐次项  $\mathbf{B}$  反映边界条件。

#### 3. 解线性方程组

求解线性方程组有逆矩阵法和高斯消元法等成熟的算法, 在 Matlab 里, 求解  $\mathbf{u}$  的方法为

$$\mathbf{u} = A \setminus \mathbf{B}$$

#### 例 7.1

如图7.3所示, 给定矩形离散物理空间和边界条件, 采用正方形网格, 节点间距为  $h = 1$ , 求满足 Laplace 方程的内部节点。

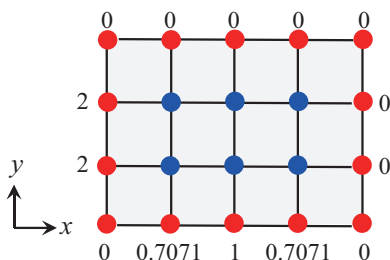


图 7.3: 例 7.1 题图

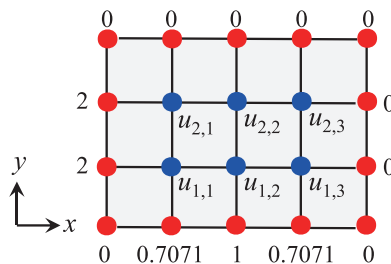


图 7.4: 例 7.1 编号图

解

如图7.4所示, 将内部的节点编号, 各个点的二阶中心差分离散方程为

$$(1, 1) \quad u_{2,1} + 2 + 0.7071 + u_{1,2} - 4u_{1,1} = 0$$

$$(1, 2) \quad u_{2,2} + u_{1,1} + 1 + u_{1,2} - 4u_{1,2} = 0$$

$$(1, 3) \quad u_{2,3} + u_{1,2} + 0.7071 + 0 - 4u_{1,3} = 0$$

$$(2, 1) \quad 0 + 2 + u_{1,1} + u_{2,2} - 4u_{2,1} = 0$$

$$(2, 2) \quad 0 + u_{2,1} + u_{1,2} + u_{2,3} - 4u_{2,2} = 0$$

$$(2, 3) \quad 0 + u_{2,2} + u_{1,3} + 0 - 4u_{2,3} = 0$$

得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7071 \\ -1 \\ -0.7071 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

利用 Matlab 解得

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0835 \\ 0.7405 \\ 0.4186 \\ 0.8863 \\ 0.4616 \\ 0.2196 \end{bmatrix}$$

### 7.2.3 第三类边界条件的处理\*

上一节仅考虑了第一类边界条件, 对于更一般的第三类边界条件的处理如下。

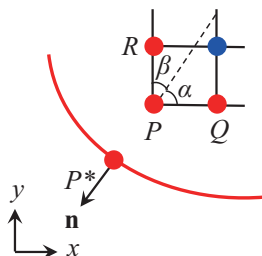


图 7.5: 第三边界条件下的边界差分方程

如图7.5, 考虑边界上一点  $P$ , 其邻近点记作  $Q$  和  $R$ , 正方形网格尺寸为  $h$ ,  $P$  点在真实物理区域上的最近点记作  $P^*$ .

由第三类边界条件, 在  $P^*$  点满足

$$u(P^*) + \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{P^*} = f(P^*) \quad (7.13)$$

由最近点方案, 可得

$$u(P) + \sigma \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_P = f(P) = f(P^*) \quad (7.14)$$

根据几何关系

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_P = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P \sin \alpha \right) \quad (7.15)$$

综合可得

$$u(P) - \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P \cos \alpha - \sigma \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P \sin \alpha = f(P^*) \quad (7.16)$$

由前向差分的定义

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{u(Q) - u(P)}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P = \frac{u(R) - u(P)}{h} \quad (7.17)$$

最终整理得到

$$[h + \sigma \cos \alpha + \sigma \sin \alpha]u(P) - (\sigma \cos \alpha)u(Q) - (\sigma \sin \alpha)u(R) = f(P^*)h \quad (7.18)$$

公式(7.18)仅为边界节点值的代数方程, 仍需和内部节点公式(7.11)联合组成线性方程组, 一并求解。

## 7.2.4 总结

Laplace 方程的差分解法总结如下

1. 用一系列离散节点  $(i, j)$  代替原物理域
2. 处理边界方程, 得到离散方程
  - 第一类边界条件 对每一内部节点, 选取适当的差分格式, 得到其离散方程, 组成线性方程组
  - 第二、第三类边界条件 边界条件满足的离散方程将额外给出, 和内部节点的方程联立得到线性方程组, 其方程数量更多
3. 求解线性方程组, 得到未知节点处的解, 即为原定解问题的近似解。

### 注意

#### 1. 网格的形状可以是任意的

网格不一定是正方形, 可以是矩形、平行四边形、三角形、正六边形等等

#### 2. 差分格式是多样的

对于一阶导数, 本节介绍了前向、后向、中心差分, 对于二阶导数, 只介绍了中心差分, 然而实际上还有更多更复杂的、精度更高的差分格式

#### 3. 线性方程组的求解方法也多种多样

#### 4. 方程还可以含有非齐次项, 差分法中称为源项。所以, 这里仅讨论了最简单、最基本的情况。

## 7.3 热传导方程的差分解法

考虑一维热传导方程的简单情况：分析长度为 1 的杆在  $0 \sim T$  之间的温度变化，其初始温度为  $f(x)$ ，两端温度固定为 0，即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u|_{t=0} = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (7.19)$$

### 7.3.1 时间变量的特殊性

1. 热传导方程与 Laplace 方程的不同之处在于，热传导方程是一个**非稳态过程**，即结果随时间变化的过程。
2. 非稳态过程的特点是**后一时刻的状态依赖于前一状态**，即不能同时知道所有时刻的状态。时间变量必须从  $0 \sim T$ ，每一步时间的增量称为**时间步长**，记作  $\Delta t$ 。
3. 求解的过程可以理解为“**基于过去，预测未来**”（随时间向前迭代），其精度与  $\Delta t$  的长度（步长）相关。

### 7.3.2 建立离散方程

设空间离散点在某一时刻的状态为  $u_i^n$ ，其中下标  $i$  表示空间信息，上标  $n$  表示时间信息。在这里离散成 6 个等间距节点，其中 4 个内部节点，2 个边界节点，记节点间距为  $h$ 。如图 7.6 所示。



图 7.6: 一维传热计算域离散化

#### 1. 考虑时间导数项

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 时间导数的差分格式必须要用到下一步的时间信息，才能实现时间推进。由第 76 页的表 7.1 可知只有前向差分 and 中心差分满足要求。
- 这里采用较为简单的前向差分。对目前处于第  $n$  个时刻的第  $i$  个内部节点，时间导数项差分后

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_i \quad (7.20)$$

#### 2. 考虑空间导数项

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \bigg|_i}$$

##### (1) 显式格式

当空间导数项采用  $n$  时刻的空间数据（已知的数据）时，此时可以得到显式方程

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \quad (7.21)$$

从而得到各点的离散方程

$$\begin{aligned}(n, 1) \quad & \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_2^n - 2u_1^n}{h^2} \\(n, 2) \quad & \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{h^2} \\(n, 3) \quad & \frac{u_3^{n+1} - u_3^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_4^n - 2u_3^n + u_2^n}{h^2} \\(n, 4) \quad & \frac{u_4^{n+1} - u_4^n}{\Delta t} = a^2 \frac{-2u_4^n + u_3^n}{h^2}\end{aligned}$$

整理得

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}^n \mathbf{u}^n \quad (7.22)$$

其中,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} 1 + a^2 \frac{u_2^n - 2u_1^n}{h^2} \Delta t & & & \\ a^2 \frac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{h^2} \Delta t & & & \\ a^2 \frac{u_4^n - 2u_3^n + u_2^n}{h^2} \Delta t & & & \\ a^2 \frac{-2u_4^n + u_3^n}{h^2} \Delta t & & & \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

## (2) 隐式格式

当空间导数项采用  $n+1$  时刻的空间数据 (未知的数据) 时, 此时可以得到隐式方程

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \quad (7.24)$$

从而得到各点的离散方程

$$\begin{aligned}(n+1, 1) \quad & \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1}}{h^2} \\(n+1, 2) \quad & \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_3^{n+1} - 2u_2^{n+1} + u_1^{n+1}}{h^2} \\(n+1, 3) \quad & \frac{u_3^{n+1} - u_3^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_4^{n+1} - 2u_3^{n+1} + u_2^{n+1}}{h^2} \\(n+1, 4) \quad & \frac{u_4^{n+1} - u_4^n}{\Delta t} = a^2 \frac{-2u_4^{n+1} + u_3^{n+1}}{h^2}\end{aligned}$$

整理得

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}^n \mathbf{u}^n \quad (7.25)$$

其中,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2a^2}{h^2} \Delta t & -\frac{a^2}{h^2} \Delta t & 0 & 0 \\ -\frac{a^2}{h^2} \Delta t & 1 + \frac{2a^2}{h^2} \Delta t & -\frac{a^2}{h^2} \Delta t & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{h^2} \Delta t & 1 + \frac{2a^2}{h^2} \Delta t & -\frac{a^2}{h^2} \Delta t \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{h^2} \Delta t & 1 + \frac{2a^2}{h^2} \Delta t \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

### 7.3.3 时间推进

#### 1. 显式格式的时间推进

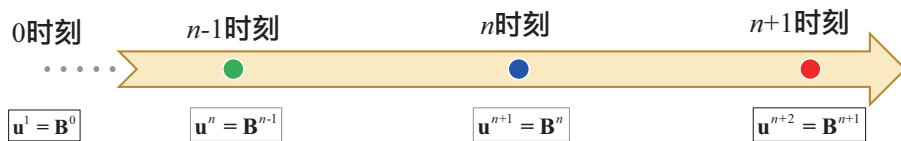


图 7.7: 显式格式的时间推进

- $n$  从 0 开始递增, 直到  $t = T$  为止。
- 在每一时刻, 只需进行代数运算获得  $B^n$  便得  $u^{n+1}$ , 计算量小。
- 然而, **显式格式的时间步长要很小**, 否则很容易出现解振荡发散的现象。

#### 2. 隐式格式的时间推进

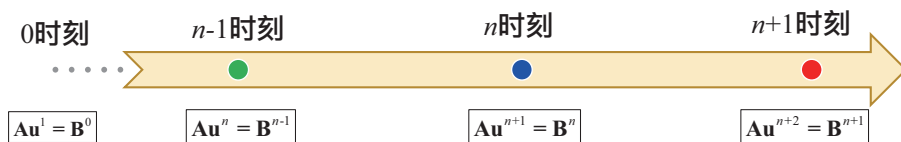


图 7.8: 隐式格式的时间推进

- $n$  从 0 开始递增, 直到  $t = T$  为止。
- 在每一时刻, 需求解线性方程组, 计算量较大。
- 与此同时, **允许时间更大的时间步长**。

#### 例 7.2

考虑长为 4 的一维杆的热传导问题。已将杆离散为 5 个节点构成的网格, 节点间距  $h = 1$ , 内节点标记为  $u_1, u_2, u_3$ , 杆的初始温度和边界温度固定为 0, 如图 7.9 所示。已知热扩散系数  $a_2 = 1$ , 取时间步长  $\Delta t = 0.1$ , 用显式差分法求  $t = 0.2$  时的温度场近似解。

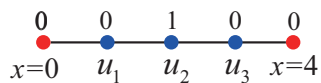


图 7.9: 例 7.2 题图

解

根据显式有限差分, 将方程离散为

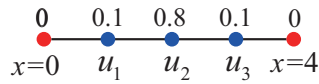
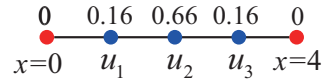
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a_2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + 0.1(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

然后进行时间推进, 即将  $n = 0, i = 1, 2, 3$  代入, 得到  $t = 0.1$  时刻的节点值满足

$$\begin{array}{lcl} u_1^1 = u_1^0 + 0.1(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0) & \xrightarrow[\text{边界条件}]{\text{代入初始条件}} & u_1^1 = 0 + 0.1(1 - 0 + 0) = 0.1 \\ u_2^1 = u_2^0 + 0.1(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0) & & u_2^1 = 1 + 0.1(0 - 2 + 0) = 0.8 \\ u_3^1 = u_3^0 + 0.1(u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0) & & u_3^1 = 0 + 0.1(0 - 0 + 1) = 0.1 \end{array}$$

得到  $t = 0.1$  时刻的节点值如图 7.10。



图 7.10:  $t = 0.1$  时刻的节点值图 7.11:  $t = 0.2$  时刻的节点值

继续将  $n = 1, i = 1, 2, 3$  代入, 得到  $t = 0.2$  时刻的节点值满足

$$\begin{array}{lcl}
 u_1^2 = u_1^1 + 0.1(u_2^1 - 2u_1^1 + u_0^1) & & u_1^2 = 0.1 + 0.1(0.8 - 2 \times 0.1 + 0) = 0.16 \\
 u_2^2 = u_2^1 + 0.1(u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1) & \xrightarrow[\text{边界条件}]{\text{代入新的初始条件}} & u_2^2 = 0.8 + 0.1(0 - 2 \times 0.8 + 0.1) = 0.66 \\
 u_3^2 = u_3^1 + 0.1(u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1) & & u_3^2 = 0.1 + 0.1(0 - 2 \times 0.1 + 0.8) = 0.16
 \end{array}$$

得到  $t = 0.2$  时刻的节点值如图 7.11.

### 7.3.4 总结

总结如图 7.12 所示。

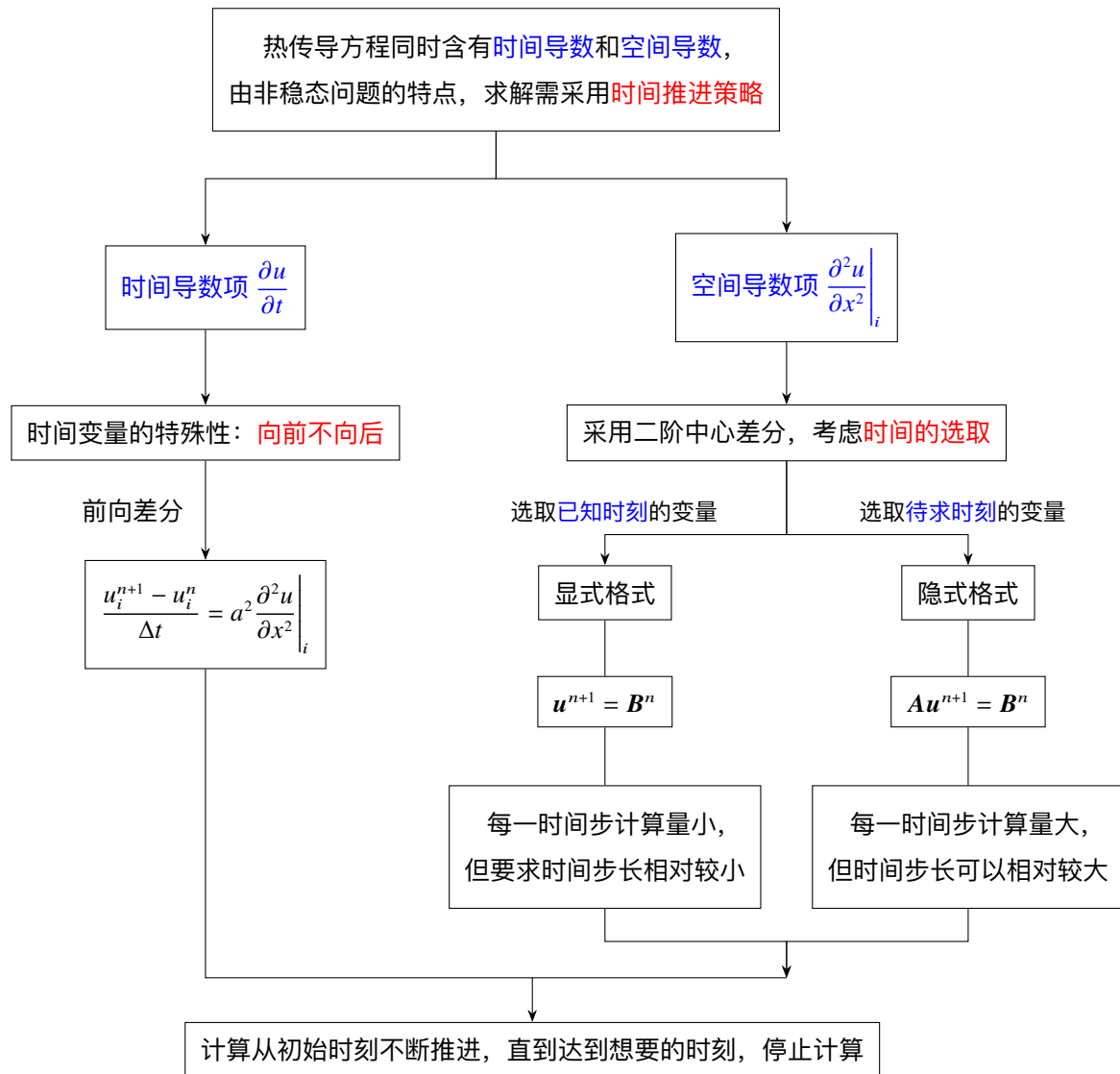


图 7.12: 非稳态热传导差分解法总结

## 注意

1. 时间步长和网格尺寸越小, 计算越精确, 但计算量也越大
2. 对于热传导方程, 当时间推进到足够大时, 过程不再随时间变化, 此时得到的是对应的 Laplace 方程的解。

## 7.4 波动方程的差分解法

考虑一维波动方程的简单情况: 分析长度为 1 的两端固定弦在  $0 \sim T$  时刻之间的振动过程, 初位移为  $\varphi(x)$ , 初速度为  $\psi(x)$ . 即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, & 0 < t \leq T \end{cases} \quad (7.27)$$

不难发现, 波动方程与热传导方程相比, 时间导数变为二阶导数, 因此差分求解的思路很相似。

### 7.4.1 求解步骤

#### 步骤 1 区域离散化

设空间离散点在某一时刻的状态为  $u_i^n$ , 其中下标  $i$  表示空间信息, 上标  $n$  表示时间信息。在这里离散成 6 个等间距节点, 其中 4 个内部节点, 2 个边界节点, 记节点间距为  $h$ . 如图 7.13 所示。

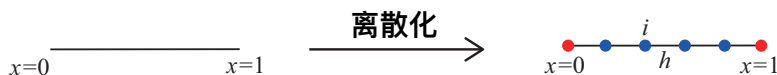


图 7.13: 一维波动计算域离散化

#### 步骤 2 建立离散方程

##### (1) 时间导数项

对目前处于第  $n$  个时刻的第  $i$  个内部节点, 时间导数项二阶中心差分

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \quad (7.28)$$

显然, 当  $n = 0$  时不存在第  $-1$  时刻的值, 所以公式(7.28)需要满足  $n \geq 1$ 。所以, 对于第一步的时间推进  $n = 0$  需要考虑初始条件所引入的差分, 即二阶中心差分的另一种表示方式:

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^0}{\Delta t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \Rightarrow \frac{\frac{u_1^1 - u_1^0}{\Delta t} - \psi(x_i)}{\Delta t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \quad (7.29)$$

可以得到第一步时间推进最终的解

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i \quad (7.30)$$

## (2) 空间导数项

## i. 显式格式

选取已知的  $n$  时刻

$$\begin{cases} u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1}))}{h^2}, & n = 0 \\ \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (7.31)$$

整理得

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{B}^n \quad (7.32)$$

其中,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) + \psi(x_1)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\varphi(x_2) - 2\varphi(x_1)}{h^2} \\ \varphi(x_2) + \psi(x_2)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\varphi(x_3) - 2\varphi(x_2) + \varphi(x_1)}{h^2} \\ \varphi(x_3) + \psi(x_3)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\varphi(x_4) - 2\varphi(x_3) + \varphi(x_2)}{h^2} \\ \varphi(x_4) + \psi(x_4)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{-2\varphi(x_4) + \varphi(x_3)}{h^2} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

$$\mathbf{B}^n (n \geq 1) = \begin{bmatrix} 2u_1^n - u_1^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \frac{u_2^n - 2u_1^n}{h^2} \\ 2u_2^n - u_2^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \frac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{h^2} \\ 2u_3^n - u_3^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \frac{u_4^n - 2u_3^n + u_2^n}{h^2} \\ 2u_4^n - u_4^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \frac{-2u_4^n + u_3^n}{h^2} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

## ii. 隐式格式

选取待求的  $n+1$  时刻

$$\begin{cases} u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{u_{i+1}^1 - 2u_i^1 + u_{i-1}^1}{h^2}, & n = 0 \\ \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}, & n \geq 1 \end{cases} \quad (7.35)$$

其中,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 0 & 0 \\ -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \frac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \frac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \frac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) + \psi(x_1)\Delta t \\ \varphi(x_2) + \psi(x_2)\Delta t \\ \varphi(x_3) + \psi(x_3)\Delta t \\ \varphi(x_4) + \psi(x_4)\Delta t \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^n (n \geq 1) = \begin{bmatrix} 2u_1^n - u_1^{n-1} \\ 2u_2^n - u_2^{n-1} \\ 2u_3^n - u_3^{n-1} \\ 2u_4^n - u_4^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

## 步骤3 时间推进

## (1) 显式格式

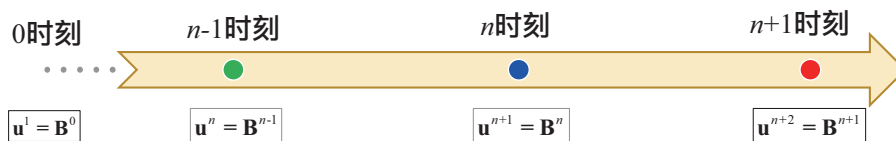


图 7.14: 显式格式的时间推进

- $n$  从 0 开始递增, 直到  $t = T$  为止。
- 在每一时刻, 只需进行代数运算获得  $B^n$  便得  $u^{n+1}$ , 计算量小。
- 然而, **显式格式的时间步长要很小**, 否则很容易出现解振荡发散的现象。

## (2) 隐式格式

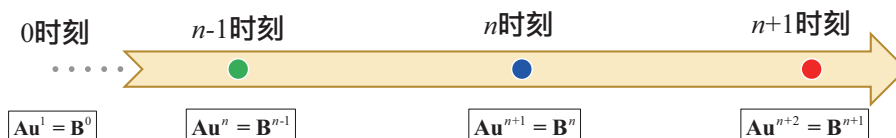


图 7.15: 隐式格式的时间推进

- $n$  从 0 开始递增, 直到  $t = T$  为止。
- 在每一时刻, 需求解线性方程组, 计算量较大。
- 与此同时, **允许时间更大的时间步长**。

## 注意

1. 整体看来, 与热传导方程的差分求解方法很像。
2. 由于时间导数项变成二阶了, 因此在采用二阶时间导数的中心差分, **需要单独处理第一步时间迭代  $n = 0$** 。
3. 在热传导方程的求解中需要注意的事项, 在这里同样需要注意。

# 索引

## B

波动方程, 1  
波的弥漫, 47  
边界条件, 8

## C

初始条件, 8  
存在性, 9

## D

第二格林公式, 67  
第二类边界条件, 8  
Dirichlet 边界条件, 8  
达朗贝尔公式, 40  
第三类边界条件, 9  
电像法, 71  
第一格林公式, 66  
点源函数, 71  
第一类边界条件, 8

## E

二阶线性偏微分方程, 1  
二阶线性双变量偏微分方程, 43  
二维波动方程的泊松公式, 47

## F

分离变量, 12  
Fourier 变换, 49  
Fourier 分析, 50  
非其次项, 4  
反演, 49, 52

## G

格林函数, 69  
高斯公式, 66

## H

惠更斯原理, 47  
后向差分, 75  
后效现象, 47

## J

节点, 76  
节点间距, 76  
决定区域, 42  
截断误差, 75  
截断误差的阶数, 75  
积分变换的核, 49

## L

Laplace 变换, 52  
Laplace 算子, 5  
联合变换, 55

## M

Mixed 边界条件, 9

## N

Neumann 边界条件, 8  
内问题, 66

## P

平均值公式, 68  
泊松方程, 1  
泊松球面平均法, 44  
抛物线型, 43

## Q

齐次边界条件, 9  
球对称, 44  
前向差分, 75  
区域离散化, 75

**R**

热传导方程, 1

Robin 边界条件, 9

**S**

散度, 4

适定, 9

时间步长, 80

双曲线型, 43

三维波动方程的泊松公式, 46

三维 Laplace 方程的基本解, 67

**T**

梯度, 4

调和函数, 65

调和函数的积分表达式, 67

椭圆型, 43

特征函数, 14

特征线, 42

特征值, 14

特征值问题, 14

**W**

稳定性, 9

外问题, 66

唯一性, 9

**X**

行波, 39

行波法, 39

线性运算, 1

**Y**

依赖区间, 42

源项, 79

右行波, 41

影响区域, 42

**Z**

左行波, 41

中心差分, 75

最近点策略, 77