

空气动力学¹

易鹏

中山大学

内部版本号：V0.07.014 (内测版)

2022 年 4 月 27 日

¹本笔记已经开源，可以免费下载，github 地址：<https://github.com/Lovely-XPP/Notebook>

gitee 分流地址：https://gitee.com/sysu_xpp/Notebook

目录

第 1 章 绪论	1
1.1 物质形态与空气动力学定义	1
1.1.1 物质形态	1
1.1.2 空气动力学的定义	1
1.1.3 空气动力学的分类	1
1.2 相对飞行理论	2
1.3 空气动力学的研究方法	2
1.3.1 理论分析	2
1.3.2 数值模拟	2
1.3.3 实验研究	2
第 2 章 流体物理属性与静力学	3
2.1 流体的属性	3
2.1.1 连续介质假设	3
2.1.2 流体的易流动性	4
2.1.3 流体的压缩性和弹性	4
2.1.4 流体的粘性	5
2.2 作用在流体微团上的力的分类	6
2.2.1 质量力	6
2.2.2 表面力	7
2.3 静止流体内任一点压强的各向同性特征	7
2.3.1 压强的定义	8
2.3.2 压强的各向同性	8
2.3.3 压强属性	8
2.4 流体静平衡微分方程	9
2.4.1 压强在静平衡流体中的分布规律	9
2.4.2 等压面	10

2.5 标准大气	11
2.5.1 地球大气的分层	11
2.5.2 温度变化曲线	12
2.5.3 静态压强变化	12
第3章 流体运动学与动力学基础	15
3.1 流场及其描述	15
3.1.1 拉格朗日法（质点法或质点系法）	15
3.1.2 欧拉法（空间点法、流场法）	16
3.1.3 流线与流普、流面、流管和流量	16
3.1.4 欧拉法下的流体质点加速度表达式	16
3.2 流体微团运动分析	16
3.2.1 流体微团的基本运动形式	16
3.3 理想流体运动微分方程组	18
3.3.1 系统与控制体	18
3.3.2 连续（质量）方程	18
3.3.3 欧拉方程——理想（无粘）流体运动的动量方程	20
3.4 理想流体运动积分方程组	21
3.4.1 概述	21
3.4.2 拉格朗日型积分方程	21
3.4.3 雷诺输运方程	22
3.4.4 欧拉型积分方程	24
3.5 漩涡运动基础	24
3.5.1 漩涡现象	24
3.5.2 基本概念	25
3.5.3 涡的诱导速度	26
3.5.4 理想流中的涡定理	26
第4章 平面不可压缩势流理论	27
4.1 基本方程	27
4.1.1 引言	27
4.1.2 位函数和流函数、叠加原理和边界条件	27
4.1.3 位函数和流函数的性质及其相互联系	29
第5章 粘性流体动力学基础	31
5.1 流体的粘性及其对流动的影响	31
5.1.1 流体的粘性	31
5.1.2 粘性对流动的影响	32

第 1 章 绪论

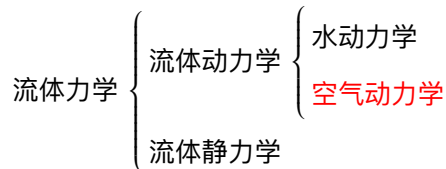
1.1 物质形态与空气动力学定义

1.1.1 物质形态

自然界主要存在 3 种形态：

1. **固体**：具有固定的体积，无固定的形状。在静止状态下，可以承受垂直于表面的压力、水平拉力和剪切力。
2. **液体**：具有固定的体积，无固定的形状。在静止状态下，只能承受垂直于表面的压力，几乎没有水平拉力和剪切力。
3. **气体**：没有固定的体积，也没有固定的形状。在静止状态下，只能承受垂直于表面的压力，几乎没有水平拉力和剪切力。

1.1.2 空气动力学的定义



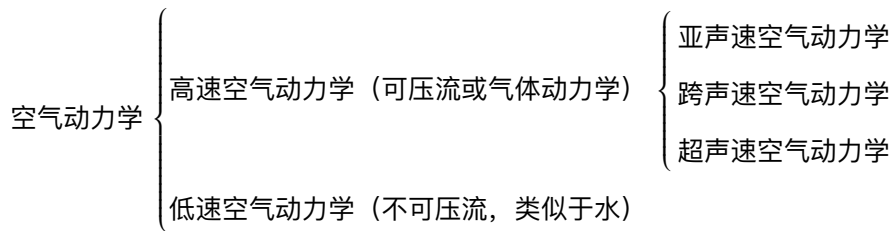
空气动力学是流体力学的一个分支，他是从流体力学发展而来。

流体力学是研究流体（水、空气、石油等）平衡和机械运动的规律及其应用的学科。

定义 1.1 空气动力学

空气动力学是研究物体和空气作**相对运动**时，空气的运动规律以及空气与物体之间的相对运动关系的学科。

1.1.3 空气动力学的分类



1.2 相对飞行理论

1.3 空气动力学的研究方法

1.3.1 理论分析

1. 建立合理的理论模型

1.3.2 数值模拟

- 理论控制方程的近似求解方法—空间和时间的离散
- 常用的求解方法：有限元

1.3.3 实验研究

主要依靠风洞实验设施。

第 2 章 流体物理属性与静力学

2.1 流体的属性

2.1.1 连续介质假设

- 从微观上看
 - 流体分子的运动具有不均匀、离散和随机特性
 - 不论是液体还是气体，分子之间都存在间隙。但是由于分子的平均自由程 l 与研究的对象的尺寸 L 相比可以忽略不计。
- 从宏观上看
 - 分布均匀且运动连续和确定（速度、压强、密度和温度分布场）。

定义 2.1 连续介质

当受到扰动时介质（流体）所表现出的是大量分子运动体现出的宏观特性（如速度、压强、密度、温度等）的均匀性、连续性和确定性变化，这种介质定义为连续介质。

流体质点 一个微观上充分大（分子尺度），宏观上充分小（物体尺度）的分子团（无穷多个分子），是宏观上组成流体的最小单元，流体质点所具有的宏观物理量满足一切物理定律。

定理 2.1 流体的连续介质假设

流体是由连续无间隙地均匀充满所占空间的流体质点组成。

根据连续性假设的条件下，流体介质某点的密度可以表示为

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2.1)$$

而在数学上，应该是 $\Delta \tau \rightarrow 0$ ，但由于在物理微观条件下，当 $\Delta \tau$ 足够小的时候，就体现分子性，从而使得密度不连续，而是离散的，如图2.1所示。但是，从宏观的角度来看， ΔV_0 可以看作 0，即

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2.2)$$

注意

在连续介质观点的假设下，流体的最小体积单元为质点（不是分子，也不是分子微团）。连续性假设的成立条件是：分子的尺寸远大于分子自由程（一般要求分子的尺寸是分子自由程的 100 倍及以上）。

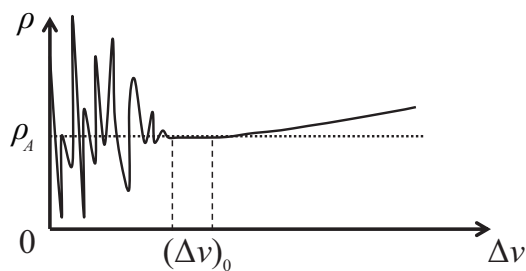


图 2.1: 连续密度示意图

连续介质假设的提出，可以把流体一切宏观物理性质（密度、压强、温度、速度等）表达为空间和时间的连续可微函数，便于用数学分析工具来解决问题。

2.1.2 流体的易流动性

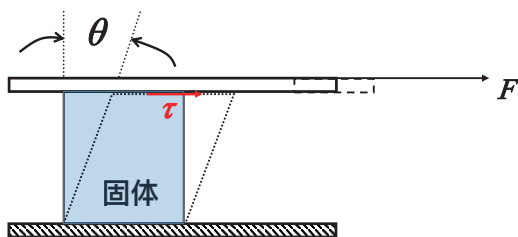


图 2.2: 固体所受剪力

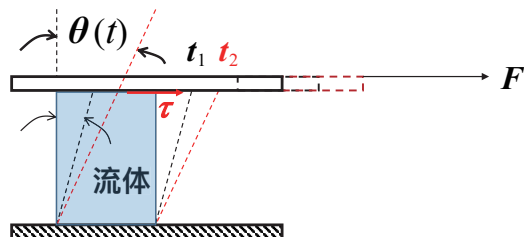


图 2.3: 流体所受剪力

- 如图2.2所示，固体能够靠产生一定的剪切角变形量 θ 来抵抗剪切应力 τ 。
- 如图2.3所示，对流体（例如甘油）作类似实验将发现流体的角变形量不仅与剪切应力 τ 大小有关而且与剪切应力 τ 的持续时间 t 长短有关。

定义 2.2 流体的易流动性

流体的**易流动性**是指不论所加剪切应力 τ 多么小，只要不等于零，流体都将在剪应力作用下持续不断的产生变形运动流动的特性。

流体是**连续且具有易流性的物质**，在静止状态下不能承受剪应力，而固体在静止状态下可以承受一定强度的剪切应力。这是流体和固体在宏观受力的本质区别。

2.1.3 流体的压缩性和弹性

定义 2.3 流体的压缩性和弹性

流体受压时其体积发生改变的性质成为流体的**压缩性**，而抵抗压缩变形的能力或特性称为**弹性**。

定义 2.4 压缩性系数

压缩性系数定义为单位压强差所产生的相对体积改变量

$$\beta_p = -\frac{dv/v}{dp}, \quad \left(\frac{1}{\text{N/m}^2} \right) \quad (2.3)$$

压缩性系数反映的是流体受压的简单程度。

定义 2.5 体积弹性模量

体积弹性模量定义为产生单位相对体积改变量所需的压强增量

$$E = \frac{dp}{dv/v} = \frac{1}{\beta_p}, \quad (\text{N/m}^2) \quad (2.4)$$

体积弹性模量反映的是流体受压的难度。

液体的体积弹性模量一般较大，通常可视为不可压缩流体。而气体的体积弹性模量一般较大且与热力学过程有关，所以通常视为可压缩流体。

定义 2.6 马赫数

马赫数定义为飞行器的飞行速度 u 和声速 a 的比值

$$M_a = \frac{u}{a} \quad (2.5)$$

马赫数的大小可以看成是**气体相对压缩性**的一个指标。在考虑具体流动时，一般按照速度（马赫数）大小将流动划分为不可压缩流动和可压缩流动。当 $M_a < 0.3$ 时，气体流动的可压缩性影响可以忽略不计。

2.1.4 流体的粘性

由于流体粘性影响，均匀流经平板时，贴着平板表面的流体速度降为零，称为流体与板面间“无滑移”边界条件。由于收到内层流体的摩擦力、外层流体的速度有变慢趋势，反过来，由于收到外层流体的摩擦力，内层流体的速度有变快趋势。流层简单“互相牵扯”作用一层层向外传递，在距离板面一定距离后，这种作用逐步消失，速度分布变为均匀。

定义 2.7 流体粘性

流层之间“阻碍”流体相对变形趋势的能力称为**流体粘性**，相对错动（剪切）流层间的一对摩擦力即**粘性剪切力**。

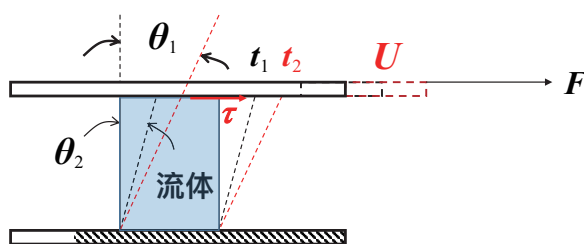


图 2.4: 流体剪切实验

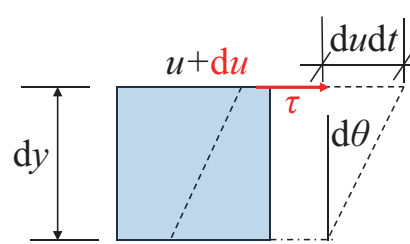


图 2.5: 流体剪切几何关系

如图2.4所示，可以得到剪切力和粘性剪切应力的表达式

$$F = \mu \frac{U}{h} A, \quad \tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \quad (2.6)$$

定理 2.2 牛顿粘性应力公式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.7)$$

其中， μ 是流体的粘性系数， u 是流体的运动速度。**牛顿粘性应力公式**表明粘性剪切应力不仅与速度梯度有关，而且与物性有关。

从牛顿粘性应力公式可以看出：

- 流体的剪应力与压强 p 无关。
- 当 $\tau \neq 0$ 时, $\frac{du}{dy} \neq 0$, 即无论剪应力多小, 只要存在剪应力, 流体就会发生变形运动, 呈现速度梯度。
- $\frac{du}{dy} = 0$ 时, $\tau = 0$, 即只要流体静止或无变形, 就不存在剪应力, 流体不存在静摩擦力。

因此, 牛顿粘性应力公式可看成流体易流性的数学表达。

如图2.5所示, 可以找到几何关系

$$d\theta dy = du dt, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (2.8)$$

即微团垂直线在单位时间内顺时针的转角 = 速度梯度, 速度梯度也表示流体微团的剪切变形速度或角变形率。

一般地, 流体剪切应力与速度梯度的关系表示为:

$$\tau = A + B \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (2.9)$$

但是我们一般只研究牛顿流体 (如水、空气、汽油、酒精等), 即满足牛顿粘性应力公式(2.7)的流体。

注意

液体和气体产生粘性的物理原因不同

液体的粘性主要来自于液体分子间的内聚力, 气体的粘性主要来自于气体分子的热运动。因此液体与气体动力粘性系数随温度变化的趋势相反 (气体粘性系数随温度的升高而升高, 液体粘性系数随温度的升高而降低), 但动力粘性系数与压强基本无关。

定义 2.8 动力学粘性系数和运动学粘性系数

在许多空气动力学问题里, 粘性力和惯性力同时存在, 在式子中 μ 和 ρ 往往以 $\frac{\mu}{\rho}$ 的组合形式出现, 用符号 ν 表示: (注意 μ 和 ν 的物理区别)

- 动力学粘性系数: $\mu \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] \quad \mu_a = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/m/s}, \quad \mu_w = 1.139 \times 10^{-3} \text{ kg/m/s}$
- 运动学粘性系数: $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad \nu_a = 1.461 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad \nu_w = 1.139 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

可以看出: 空气动力粘性不大, 初步近似研究时可忽略其粘性作用, 忽略粘性的流体称为理想流体。

2.2 作用在流体微团上的力的分类

2.2.1 质量力

定义 2.9 质量力

质量力: 外力场作用于流体微团质量中心, 大小与微团质量成正比的非接触力。例如重力, 惯性力和磁流体具有的电磁力等都属于质量力。

由于质量力按质量分布, 故一般用单位质量的质量力 (单位质量力) 表示, 并写为分量形式:

$$\mathbf{f}_v = \lim \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\rho \Delta v} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (2.10)$$

其中, Δv 是微团体积, ρ 是密度, ΔF_v 为作用于微团的质量力, i, j, k 分别是三个坐标方向的单位向量, f_x, f_y, f_z 分别是三个方向的单位质量力分量。

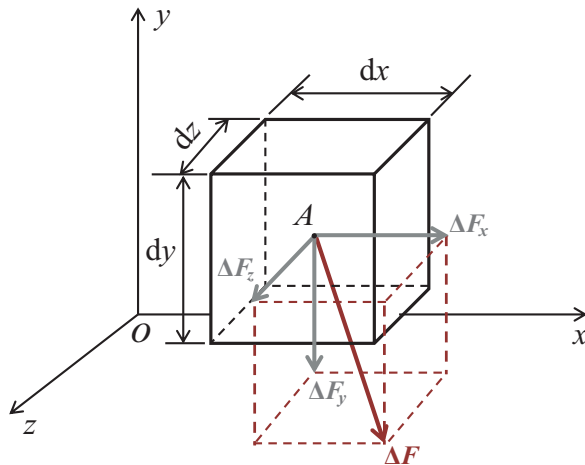


图 2.6: 质量力的分解

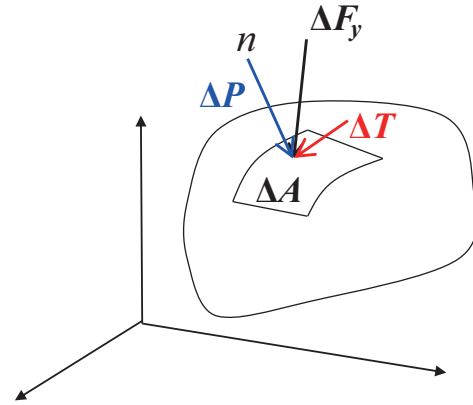


图 2.7: 表面力的分解

2.2.2 表面力

定义 2.10 表面力

表面力: 相邻流体或物体作用于所研究流体团块外表面, 大小与流体团块表面积成正比的接触力。由于按面积分布, 故用接触应力表示, 并可将其分解为法向应力和切向应力。

- 法向应力 (正应力)

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (2.11)$$

- 切向应力 (切应力)

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad (2.12)$$

流体任取一个剖面一般有法向应力和切向应力, 但切向应力完全是由粘性产生的。

- **静止流体**: 内部任意一点的应力只有内法向应力。
- **无粘理想流体**: 内部任意一点只有法向应力, 而没有切向应力。
- **粘性流体**
 - 在静止状态下: 其内部任意一点的应力只有内法向应力;
 - 在运动状态下: 其内部任意一点的应力除法向应力外, 还有切向应力。

2.3 静止流体内任一点压强的各向同性特征

压强的单位¹及其换算如下

$$\begin{aligned}
 1 \text{ ba} &= 10^5 \text{ Pa} = 10^3 \text{ mba} \\
 1 \text{ atm} &= 101300 \text{ Pa} = 101.3 \text{ kPa} = 1.013 \text{ ba} = 1013 \text{ mba} \\
 1 \text{ Torr} &= 133.3 \text{ Pa} \\
 1 \text{ psi} &= 6896.6 \text{ Pa}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.4 流体静平衡微分方程

2.4.1 压强在静平衡流体中的分布规律

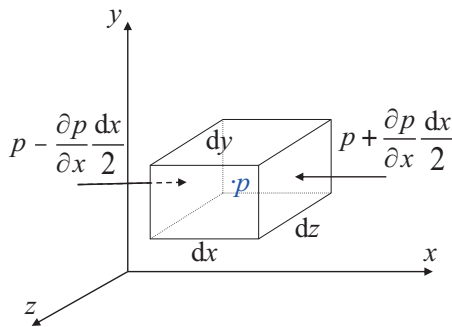


图 2.10: 微元六面体压强分析

以平衡流体内的任意一个六面体微元 $dV = dxdydz$ 为分析对象，中心点的压强为 $p = p(x, y, z)$ ，密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$ ，三个方向的单位质量的质量力 f_x, f_y, f_z 。

由于流体静止、六面体微元表面无剪应力，只受到法相应力（即压力），用中心点处压强 p 的一阶泰勒展开表示，即

$$P(x) = \frac{p}{0!} + \frac{P'(x)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \approx p + \frac{\partial p}{\partial x}(x - x_0) \tag{2.16}$$

$$\bullet \text{ } x \text{ 方向的表面力为: } \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz$$

$$\bullet \text{ } x \text{ 方向的质量力为: } f_x \rho dxdydz$$

• 由静平衡态合力为 0，得

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dxdydz + f_x \rho dxdydz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \tag{2.17}$$

同理可得到 y, z 方向上的静平衡方程，综合可得

定理 2.4 欧拉平衡微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases} \iff \nabla p = \rho \mathbf{f} \tag{2.18}$$

其中， $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ 为矢量微分算子，也称哈密顿算子。

¹1 Torr: 0°C 标准重力下，1 mmHg 柱的压力；1 psi: 磅每平方英寸。

其物理意义为：当流体平衡时，若压强在某个方向存在梯度的话，必然是由质量力在该方向有分量造成的。而且，沿质量力方向压强增加。

将(2.18)分别乘以 dx, dy, dz 并相加得到

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho f_x dx \\ \frac{\partial p}{\partial y} dy = \rho f_y dy \\ \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho f_z dz \end{cases} \implies \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (2.19)$$

式子(2.19)左边为全微分 $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$ ，即

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (2.20)$$

式子(2.19)右边若满足（充要条件）

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \quad (2.21)$$

那么式子(2.19)右边也是某个函数的全微分，这个函数记为 $\Omega = \Omega(x, y, z)$ ，称为**质量力的势函数**，并设

$$f_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \iff f = -\nabla \Omega$$

则静平衡方程也可以写为

$$dp = -\rho d\Omega \quad (2.22)$$

沿空间任意闭曲线 C 进行积分：

$$\text{LHS} \oint_C dp = 0 \implies \text{RHS} \oint_C -\rho d\Omega = 0 \quad (2.23)$$

这说明作用在流体质点上的质量力积分与路径无关。即**质量力是有势力**。由此得到，在静止状态下，流体所受的质量力必须是有势力。

当密度 ρ 为常数（如不可压流体）时，对流体静平衡微分方程(2.22)进行积分，得

$$p = -\rho\Omega + C \quad (2.24)$$

如果知道流体中某一点 a 的压强值 p_a 和质量力势函数 Ω_a 的值，则任何其它点的压强和势函数的关系为

$$p = p_a - \rho(\Omega - \Omega_a) \quad (2.25)$$

2.4.2 等压面

定义 2.12 等压面

等压面：流场中压强相等的空间点组成的几何曲面或平面。

由等压面的定义，可以得到

定理 2.5 等压面微分方程

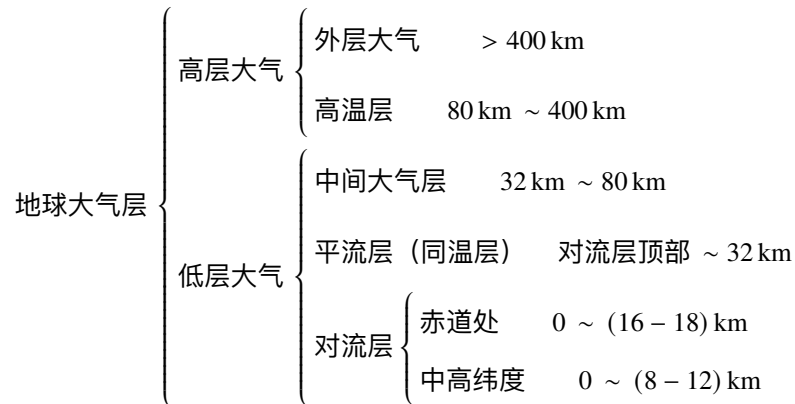
$$\begin{cases} p = \text{constant} \\ dp = 0 \\ f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \quad (d\Omega = 0) \end{cases} \quad (2.26)$$

对(2.26)进行积分可以得到一个满足 $dp = 0$ 对几何曲面，所以公式(2.26)称为**等压面微分方程**。

等压面上质量力不作功（ $d\Omega = 0$ ），质量力在等压面上的投影为 0（等压面满足 $f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$ ）。

2.5 标准大气

2.5.1 地球大气的分层



1. 对流层 (Troposphere)

- 高度 $8 \sim 18 \text{ km}$ 随纬度变化
- 密度大占总质量的 $\frac{3}{4}$
- 空气有上下流动, 存在气象活动 (雷雨风暴)
- 温度随高度增加而线性降低
- 与平流层之间存在 **对流层顶** (Tropopause)

2. 平流层 (Stratosphere)

- 高度 $12 \sim 32 \text{ km}$
- 占总质量的 $\frac{1}{4}$
- 大气仅做水平运动
- 从对流层顶部至 20 km , 温度为常数; $20 \text{ km} \sim 32 \text{ km}$, 温度随高度有所上升
- 顶部压强约为海平面值的千分之一

3. 中间大气层 (Mesosphere)

- 高度 $32 \sim 80 \text{ km}$
- 占总质量的 $\frac{1}{3000}$
- 温度随高度增加先升后降
- **临近空间**
 - $20 \text{ km} \sim 100 \text{ km}$, 包括平流层绝大部分区域、中间层的全部和高温层的底部。
 - 低雷诺数问题

4. 高温层 (Thermosphere)

- 高度 $80 \sim 400 \text{ km}$
- 由于太阳短波辐射的缘故, 温度随高度而上升
- 空气分子发生电离

- 100 km 以上高空的空气为良导体
- 高度 > 150 km, 空气过于稀薄, 声波无法产生与传播

5. 外层大气 (Exosphere)

- 高度 > 400km
- 空气十分稀薄, 没有常规温度定义
- 空气分子可逸入太空而不与其他分子发生碰撞
- 分子平均自由程 l 可以达到数百公里
- 占大气总质量的 10^{-11}
- 包含大部分卫星运行轨道

2.5.2 温度变化曲线

- 对流层 0 ~ 11 km

$$T = 288.15 - 0.0065H \quad (2.27)$$

6

- 平流层 11 ~ 32 km

– $H = 11 \sim 20$ km

$$T = 216.65 \quad (2.28)$$

– $H = 20 \sim 32$ km

$$T = 216.65 + 0.001(H - 20000) \quad (2.29)$$

2.5.3 静态压强变化

如图2.11所示, 取厚度为 dy 的空气柱片进行分析

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho \quad \xrightarrow{\rho = \frac{p}{RT}} \quad \frac{dp}{dy} = -\frac{g\rho}{RT} \quad (2.30)$$

其中, 如果已知 g, T 随着高度 y 的变化关系, 就可以积分得到压强 p 随着高度 y 的变化关系。

g 随高度的变化规律为

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{r}{r + y_g} \right)^2, \quad r \approx 6400 \text{ km}$$

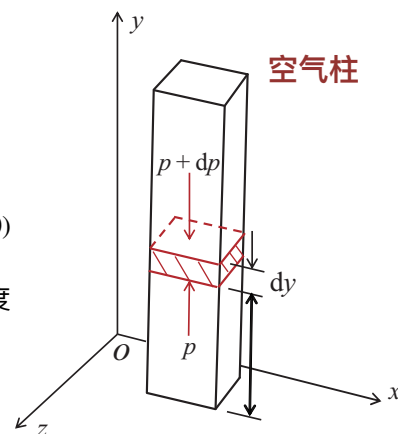


图 2.11: 空气柱薄片

由此可知, g 在近地面处可视为常数。

- 对流层 0 ~ 11 km

$$\begin{cases} T = 288.15 - 0.0065y \\ \frac{dp}{dy} = -\frac{g\rho}{RT} \end{cases} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \frac{dy}{288.15 - 0.0065y}$$

即

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{288.15 - 0.0065y}{288.15} \right) = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5.25588}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{4.25588} \quad (2.31)$$

- 平流层 11 ~ 32 km

- $H = 11 \sim 20$ km

$$\begin{cases} T = 216.65 \\ \frac{dp}{dy} = -\frac{gp}{RT} \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{p_{11}} = \frac{\rho}{\rho_{11}} = e^{\frac{y-11000}{6341.62}} \quad (2.32)$$

- $H = 20 \sim 32$ km

$$\frac{p}{p_{20}} = \left(\frac{T}{216.65} \right)^{-34.1632} \quad \frac{\rho}{\rho_{20}} = \left(\frac{T}{216.65} \right)^{-35.1632} \quad (2.33)$$

第 3 章 流体运动学与动力学基础

3.1 流场及其描述

由连续介质假设，空间中存在无穷多个流体质点。对于无数多的流体质点，当其发生运动时，如何正确描述整个流场的运动行为？主要解决两个问题：

- 怎样跟踪和区分每一个流体质点
- 如何描述每一个流体质点的运动特征及其变化

3.1.1 拉格朗日法（质点法或质点系法）

拉格朗日法的核心思想：着眼于单个流体质点运动，跟踪并观察其运动状态（运动历程、空间轨迹、速度和加速度等），从而获得整个流场的运动规律。

定义 3.1 流体质点的标识

对于某一流体质点 (a, b, c) 的空间位置表示为

$$x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t) \quad (3.1)$$

其中， t 表示时间， (a, b, c) 是流体质点的标识符，用来区分和表示各个流体质点，可用流体质点的初始位置坐标表示， a, b, c, t 称为拉格朗日变数。

- t 给定，则公式(3.1)表示的是 t 时刻不同质点的空间位置
- a, b, c 给定，则公式(3.1)表示的是指定质点 a, b, c 的轨迹

因为质点的坐标是时间 t 的函数，所以对于给定的流体质点 (a, b, c) ，其速度和加速度为

$$\begin{cases} u = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ v = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ w = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ v = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ w = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

注意

流体质点标识符 (a, b, c) 是空间位置 (x, y, z) 的函数，求导是针对同一个流体质点 (a, b, c) 进行。除此之外，流体质点的其他物理量也都是 a, b, c, t 的函数，例如流体质点的温度可以表示为 $T(a, b, c, t)$ 。

定义 3.2 迹线

对于某一个流体质点 (a, b, c) 随着时间 t 的运动轨迹称为**迹线**。

由拉格朗日法的速度、加速度的表达式，可以得到迹线的微分方程

定理 3.1 迹线的微分方程

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt \quad (3.3)$$

3.1.2 欧拉法（空间点法、流场法）**3.1.3 流线与流普、流面、流管和流量****3.1.4 欧拉法下的流体质点加速度表达式****3.2 流体微团运动分析****3.2.1 流体微团的基本运动形式**

在理论力学中，研究对象是质点和刚体（无变形体），其基本的运动形式为

1. 质点（无体积大小的物质点）只有平移运动
2. 刚体（具有一定体积大小但无变形但物体）运动包括平移运动和旋转运动

定义 3.3 流体微团的基本运动形式

流体力学研究的对象是质点和流体微团（具有体积和形状的质点团），其运动包括平移、转动、线变形和角变形，如图所示。即

刚体运动：平动 + 转动

流体运动：平动 + 转动 + 线变形 + 角变形

流场中任取一平面流体微团，设微团 A 的速度为 $u(x, y), v(x, y)$ ，根据泰勒级数在 A 点的一节展开，

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_n(x_0)$$

可以得到

点	x 分量	y 分量
B	$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$	$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$
C	$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$	$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$
D	$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$	$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

1. 平动

2. 线变形

3. 角变形和转动

角变形速率 (切变速率): 单位时间内角变形量, 用 γ_z 表示

转动角速度: 单位时间内角平分线的转动量, 用 ω_z 表示

由图分析可得

$$\begin{cases} \angle BAB' = \beta + \alpha \\ \angle CAC' = -\beta + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\angle BAB' + \angle CAC'}{2} \\ \beta = \frac{\angle BAB' - \angle CAC'}{2} \end{cases}$$

又

$$\angle BAB' \approx \tan \angle BAB' = \frac{BB'}{dx} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v\right) dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$\angle CAC' \approx \tan \angle CAC' = -\frac{CC'}{dy} = -\frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u\right) dt}{dy} = -\frac{\partial u}{\partial y} dt$$

则

$$\begin{aligned} \gamma_z &= \frac{\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \omega_z &= \frac{\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

同样的, 对于三维的微元体, 有

定理 3.2 流体微团的运动形式

- 平动: 平移速度 $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)$

- 线变形: 线变形速率 (正应变率)

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \theta_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \theta_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (3.5)$$

- 角变形: 角变形速率 (切变速率)

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \gamma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

- 转动: 转动角速度

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3.7)$$

3.3 理想流体运动微分方程组

3.3.1 系统与控制体

定义 3.4 系统

系统：包含着确定不变物质的任何集合体。对流体力学（或空气动力学）而言，**系统是指由任何确定流体质点组成的集合体**。

系统的基本特点：

- 系统质量保持恒定、边界上没有质量交换；
- 边界随流体一起运动
- 边界上受到外界的表面力作用
- 边界上存在能量交换

定义 3.5 控制体

控制体：有物质（如流体）穿过，相对于某个坐标系固定不变的任何体积。其边界称为**控制面**。

控制体的基本特点

- 形状形状可根据需要而定，边界相对于坐标系而言是固定的；
- 控制体本身不变，但是穿过的物质（流体质点）随时间是变化的；
- 控制面可发生质量交换；
- 控制面上受到外界作用力；
- 控制面可存在能量交换

3.3.2 连续（质量）方程

1. 考虑流场中的一个六面体微团（控制体）

- 体积： $dx dy dz$ ；
- 中心： $O(x, y, z)$ 的速度 $\mathbf{v}_o = (u, v, w)$ ；
- 密度： $\rho(x, y, z, t)$ 是时间和空间的函数；
- t 时刻的质量流量（密流或通量）： x, y, z 方向分别为 $\rho u, \rho v, \rho w$

2. 考虑净流量

- dt 时刻内从流体微团左侧面进入控制体的质量为

$$m_1 = \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt$$

- dt 时刻内从流体微团右侧面进入控制体的质量为

$$m_2 = \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz dt$$

- dt 时间内 x 方向上的净流量为

$$dm_x = m_1 - m_2 = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

同样的, 各个方向上的净流量为

$$dm_x = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt, \quad dm_y = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz dt, \quad dm_z = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt \quad (3.8)$$

即整个流体微团的净流量为

$$dm = dm_x + dm_y + dm_z = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz dt \quad (3.9)$$

3. 考虑质量增量

由 dt 时间内密度的变化, 可以得到质量的变化为

$$dm_t = \left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right] dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (3.10)$$

4. 考虑质量守恒

根据**质量守恒定律**, 净流量的总质量应该等于质量增量, 即

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (3.11)$$

化简得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

利用微分运算法则, 得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.13)$$

即得到连续 (质量方程)¹

定理 3.3 连续 (质量) 方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.14)$$

5. 连续 (质量) 方程的物理意义

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}$: 流体微团 (控制体) 密度的**局部增长率**

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) ds}{V} : \text{流体微团 (控制体) 单位体积流出的质量流量}$$

6. 连续 (质量) 方程的特殊情况

(1) 流体质点密度是常数 (不随时间和空间变化), 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \nabla \rho &= 0 \end{aligned}$$

说明此时单位体积流出的体积流量 (相对体积膨胀率, 速度散度) 为 0.

¹在方程中 $\frac{D\rho}{Dt}$ 中微分算子 D 代表的是欧拉方法中的随体导数, 下同。

(2) 流体质点密度在流动中保持不变（随体导数为零；不可压缩流动），则

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \rho(\nabla V) = 0 \implies \nabla V = 0$$

说明不可压缩流动中，流体微团的相对体积膨胀率保持为零，或从流体微团（控制体）流出的单位体积流量为零。

注意

不可压缩流动的密度并不一定处处为常数。

7. 连续（质量）方程的应用

连续方程是流动首先应该满足的基本关系。根据某方向的速度分布和连续方程，确定出其他方向的速度分布。

例 3.1 设不可压缩流体在 xoy 平面内流动，速度沿 x 轴方向的分量 $u = Ax$ (A 为常数)，求速度在 y 轴方向的分量 v 。

解 对于不可压缩流动，有 $\frac{D\rho}{Dt}$

3.3.3 欧拉方程——理想（无粘）流体运动的动量方程

1. 动量定理与牛顿第二定律

- **动量定理**：物体动量的改变量等于物体合外力的冲量

$$I = Fdt = mdV \quad (3.15)$$

- **牛顿第二定理**：针对流体来说，加速度采用随体导数给出，即

$$F = m \frac{DV}{Dt} \quad (3.16)$$

2. 考虑流场中的一个六面体微团（控制体）

- 体积： $dx dy dz$ ；
- 中心： $O(x, y, z)$ 的速度 $\mathbf{v}_o = (u, v, w)$ ；
- 密度： $\rho(x, y, z, t)$ 是时间和空间的函数；
- 压强： $p(x, y, z, t)$ 是时间和空间的函数；
- t 时刻的质量流量（密流或通量）： x, y, z 方向分别为 $\rho u, \rho v, \rho w$

3. 计算合外力

- x 方向上表面力：

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

- x 方向上质量力： $f_x \rho dx dy dz$

- x 方向上的合外力

$$F_x = f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (3.17)$$

4. 利用牛顿第二定律得到方程

由 x 方向上的加速度 $\frac{Du}{Dx}$ 及牛顿第二定律, 可以得到

$$f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = (\rho dx dy dz) \frac{Du}{Dx} \quad (3.18)$$

化简得到

$$f_x \rho - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{Du}{Dx} \iff f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.19)$$

同样地, 其他方向上也有类似的方程, 可以得到欧拉方程。

定理 3.4 欧拉方程

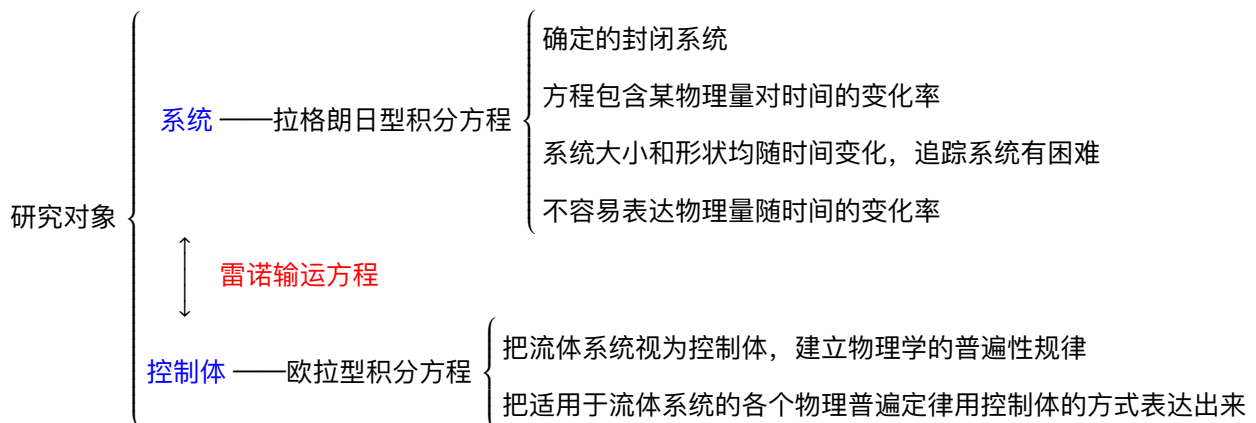
$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (3.20)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \quad (3.21)$$

3.4 理想流体运动积分方程组

3.4.1 概述



3.4.2 拉格朗日型积分方程

1. 质量 (连续) 方程

对于封闭系统, 质量恒定, 不随时间变化, 则¹

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (3.22)$$

¹注: V 代表微元体的体积, \mathbf{V} 代表微元体的速度

2. 动量方程

对于封闭系统，系统所受合外力等于系统动量对时间的变化率，则

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \mathbf{V} dV \quad (3.23)$$

3. 能量方程

对于封闭系统，单位时间内由外界传入系统的热量与外界对系统所做对功之和，等于该系统对总能量对时间的变化率。即

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{dE}{dt} \iiint_V \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dV \quad (3.24)$$

其中， E 为系统的总能量， e 为微元体单位体积的内能， $\frac{V^2}{2}$ 为单位微元体体积的动能。

3.4.3 雷诺输运方程

对于系统的物理量 N ，假设单位质量流体中含有的物理量为 σ ，则

$$\sigma = \frac{dN}{dm} = \frac{dN}{\rho dV} \quad (3.25)$$

系统的物理量 N 可以通过积分得到

$$N = \iiint_V \sigma \rho dV \quad (3.26)$$

- 如果 $\sigma = 1$ ，则 $N = m$ 代表质量
- 如果 $\sigma = V$ ，则 $N = V$ 代表系统的速度
- 如果 $\sigma = e + V^2/2$ ，则 $N = e + V^2/2$ 代表系统的总能量

设 t 时刻时，控制体和系统重合。而在 $t + \Delta t$ 时刻，控制体和系统仍重合的部分记为 V_{sys}^1 ，系统超出控制体的部分记为 V_{sys}^2 ，控制体剩下与系统不重合的部分记为 V_{sys}^3 。

则

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= \iiint_{V_{\text{sys}}^1 + V_{\text{sys}}^2} \rho \sigma dV - \iiint_{V_{\text{sys}}^1 + V_{\text{sys}}^3} \rho \sigma dV \\ &= \underbrace{\iiint_{V_{\text{sys}}^1} \rho [\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)] dV}_{\text{体积不变的部分物理量随时间变化}} + \underbrace{\iiint_{V_{\text{sys}}^2} \rho \sigma(t + \Delta t) dV - \iiint_{V_{\text{sys}}^3} \rho \sigma(t) dV}_{\text{体积变化的部分所引起的物理量变化}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{物理量的随体变化}} \end{aligned}$$

则

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad (3.27)$$

分别考虑每一项的极限：

- 由于 $\Delta t \rightarrow 0$, 则 V_{sys}^1 体积几乎不变, “似动非动”, 即 $V_{\text{sys}}^1 \rightarrow V_{\text{con}}$, 则

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_{V_{\text{sys}}^1} \rho [\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)] dV = \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \frac{\partial \sigma}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \sigma dV$$

- 对于 V_{sys}^2 来说, 其体积的变化量 dV 等于流体流出交界面 S_{12} 的流量, 记交界面 S_{12} 的法向量为 \mathbf{n} , 则有 $dV = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$, 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_{V_{\text{sys}}^2} \rho \sigma(t + \Delta t) dV = \iint_{S_{12}} \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$$

- 对于 V_{sys}^3 来说, 其体积的变化量 dV 等于流体流入交界面 S_{13} 的流量, 记交界面 S_{13} 的法向量为 \mathbf{n} , 则有 $dV = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ (流入的方向与法向相反), 即

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_{V_{\text{sys}}^3} \rho \sigma(t) dV = - \iint_{S_{13}} \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$$

将每一项的结果代回 ΔN 的表达式, 得

$$\begin{aligned} \Delta N &= \iiint_{V_{\text{sys}}^1} \rho [\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)] dV + \iiint_{V_{\text{sys}}^2} \rho \sigma(t + \Delta t) dV - \iiint_{V_{\text{sys}}^3} \rho \sigma(t) dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \sigma dV + \iint_{S_{12}} \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \left(- \iint_{S_{13}} \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \sigma dV + \oint_S \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

得到雷诺输运方程如下

定理 3.5 雷诺输运方程

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{V_{\text{sys}}} \rho \sigma dV}_{\substack{\text{系统} \\ \text{拉氏观点}}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \sigma dV + \oint_S \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\substack{\text{控制体} \\ \text{欧拉观点}}} \quad (3.28)$$

其中,

- $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \sigma dV$ 代表控制体内物理量随时间的变化率 (表征流场的**非定常**特性)。
- $\oint_S \rho \sigma (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS$ 代表单位时间内, 通过控制面流出的物理量净增量 (流场的**不均匀性**引起的), 可以看成是由于流动对物理量的输运引起控制体内物理量的净变化。

雷诺输运方程的总体思想:

1. 在 t 时刻, 系统恰好和控制体重合;
2. 在 t 时刻, 系统随流体运动到某一具体的位置, 将此时刻的系统固化为控制体;
3. 系统在此时刻的所含物理量的变化率, 可以用**控制体内所含物理量的时间变化率** + **流场欧拉速度对控制体内物理量的输运**来表述。

3.4.4 欧拉型积分方程

1. 质量方程

令 $\sigma = 1$ ，代入雷诺输运方程(3.28)，可以得到

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho dV + \oint_S \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.29)$$

由质量守恒，可得 $\frac{dm}{dt} = 0$ ，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho dV = - \oint_S \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.30)$$

其物理意义为**控制体内的质量增加率 = 净流入控制面的质量流量**。

2. 动量方程

令 $\sigma = \mathbf{V}$ ，代入雷诺输运方程(3.28)，可以得到

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \mathbf{V} dV + \oint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.31)$$

由动量定理，可得 $\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{K}}{dt}$ ，即

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \mathbf{V} dV + \oint_S \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \mathbf{V} dV + \oint_S \mathbf{p}_n dS \quad (3.32)$$

其物理意义为**控制体所受合外力 = 控制体内动量的增加率 + 净流出控制面的动量流量**。

3. 能量方程

令 $\sigma = e + \frac{V^2}{2}$ ，代入雷诺输运方程(3.28)，可以得到

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \left(\rho + \frac{V^2}{2} \right) dV + \oint_S \rho \left(\rho + \frac{V^2}{2} \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.33)$$

由能量守恒，可得 $\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}$ ，即

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_{\text{con}}} \rho \left(\rho + \frac{V^2}{2} \right) dV + \oint_S \rho \left(\rho + \frac{V^2}{2} \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.34)$$

其物理意义为**外界对控制体的传热率和净输入功率 = 控制体内能量的增加率 + 净流出控制面的能量流量**。

3.5 漩涡运动基础

3.5.1 漩涡现象

1. 自然界

龙卷风（旋风）、台风：空气强烈对流而产生的一种高速旋转的自然现象。

2. 工程应用

机翼的翼尖漩涡、机翼边条翼分离漩涡、卡门涡街

3.5.2 基本概念

1. 涡量

定义 3.6 涡量

涡量：流场中任何一个流体微团绕其中心作刚性旋转的角速度的两倍。【注：涡量是一个纯运动学的概念】

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \quad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (3.35)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

涡量是表征流体微团旋转快慢的特征量，是刻画漩涡局部运动的物理量。

- $\boldsymbol{\Omega} = 0$ 无旋流场，存在势函数
- $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ 有旋流场

定义 3.7 涡线及其微分方程

涡线：和流线一样，在某一瞬时涡量场中存在一条光滑的曲线，在曲线上的每一点的涡量与该曲线相切。其微分方程为

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (3.37)$$

定义 3.8 涡面与涡管

涡面：任意取非涡线的曲线，过这个曲线上的每一点都做一条涡线，形成的一个由涡线组成的曲面。

涡管：任意取非涡线的封闭曲线，过这个曲线上的每一点都做一条涡线，形成的一个由涡线组成的封闭曲面。

2. 涡通量

定义 3.9 涡通量

涡通量：通过某个面积的涡量总和。

- 平面（二维）问题

$$I = \iint_A 2\omega_z dA \quad (3.38)$$

- 曲面（三维）问题

$$I = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.39)$$

3. 环量

定义 3.10 环量

环量：速度矢量沿着流场中的任意一条封闭曲线的积分。

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L V \cos \alpha \, ds = \oint_L (u \, dx + v \, dy + w \, dz) \quad (3.40)$$

环量被用来表征漩涡的强度。

4. 环量和涡通量的关系

对于二维流动，有

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \int_{ABCD A} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dx - \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dy \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dx dy \end{aligned}$$

对所有网格区域的速度环量求和，可以得到绕整个封闭曲线的速度环量值。

定理 3.6 格林公式

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L (u \, dx + v \, dy) = \iint_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dS = \iint_A 2\omega_z \, dS \quad (3.41)$$

3.5.3 涡的诱导速度

3.5.4 理想流中的涡定理

定理 3.7 涡强保持定理

沿涡线或涡管的涡强度保持不变。其推论为：涡管不能在流体中中断，可以延伸到无限远去，可以自相连接成一个涡环（不一定是圆环），也可以止于边界，固体的边界或自由边界。

定理 3.8 涡线或涡面保持定理

在某时刻构成涡线或涡管的流体质点，在以后运动过程中仍将构成涡线或涡管。

定理 3.9 涡强守恒定理

涡的强度不随时间变化，既不会增强，也不会削弱或消失。

第 4 章 平面不可压缩势流理论

4.1 基本方程

4.1.1 引言

理想流动的连续（质量）方程和欧拉（动量）方程：

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla V) = 0 \quad f - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{DV}{Dt}$$

在不可压缩的条件下，可以简化为

$$\begin{cases} \nabla V = 0 \\ \frac{DV}{Dt} = f - \frac{1}{\rho}\nabla p \end{cases} \quad (4.1)$$

给定初始条件

$$\begin{cases} V(x, y, z, t_0) \\ p(x, y, z, t_0) \end{cases}$$

边界条件

- 物体表面： $V_n = 0$
- 无穷远处： $V = V_\infty, p = p_\infty$

求解困难：

- 存在非线性项
- 速度和压强耦合
- 物体（如飞行器）边界复杂

求解思路：

- 基本流动的速度位或流函数
- 对于简单边界条件，基本流动叠加即可。
- 对于复杂边界条件，基本流动叠加并利用数值方法求解。

求解途径：

- 利用无旋条件简化方程（线性化）
- 解耦速度和压强（即分别求解速度和压强）

4.1.2 位函数和流函数、叠加原理和边界条件

1. 位函数

位函数存在的条件是流场无旋：

$$\text{rot}V = 0 \quad \omega_z = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

即存在位函数 $d\phi = udx + vdy$ ，其中

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (4.2)$$

又由连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.3)$$

得到速度位，即可求解速度分量；一系列的速度位等值线称为等位线。

2. 流函数

由连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x}$$

即存在流函数 $d\psi = -vdx + udy$ ，其中

$$\begin{cases} v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases} \quad (4.4)$$

若流场无旋，则

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \quad (4.5)$$

得到流函数，即可求解速度分量；一系列的流函数等值线称为流线。

3. 叠加原理

拉普拉斯方程是线性方程，可以用叠加原理求复合解。

如果多个位函数分别满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla^2 \phi_i = 0 \quad (4.6)$$

则这些位函数的线性组合也必定满足拉普拉斯方程，即

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \Rightarrow \nabla^2 \phi = \sum_{i=1}^n a_i \nabla^2 \phi_i \quad (4.7)$$

由于速度分量和位函数也是线性关系，则速度分量也满足叠加原理，即

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^n a_i u_i \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^n a_i v_i \end{cases} \quad (4.8)$$

4. 边界条件

$$\text{边界条件} \begin{cases} \text{外边界条件 (足够远处)} \\ \text{内边界条件 (物体表面)} \end{cases}$$

对于空气动力学问题，已知速度位 ϕ ，则

- 外边界条件（无穷远处）：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_\infty \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

- 内边界条件：（物体表面法向速度分量为零）

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (4.10)$$

在边界条件下，拉普拉斯方程的解唯一。

4.1.3 位函数和流函数的性质及其相互联系

1. 位函数的性质

- (1) 有无旋流动定义得到；位函数值可以相差任意常数；
- (2) 对于理想不可压无旋流动，位函数满足拉普拉斯方程和叠加原理；
- (3) 位函数沿某一方向的偏导数等于该方向的速度分量；（ s 为速度切向）

$$\begin{aligned}
 v_s &= u \cos(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + v \cos(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \quad \Rightarrow \quad v_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
 &= \frac{\partial \phi}{\partial s}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

- (4) 速度位函数沿着流线方向增加

$$\begin{aligned}
 d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \\
 &= u dx + v dy \quad \Rightarrow \quad d\phi = \mathbf{V} \cdot \mathbf{s} \\
 &= \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

- (5) 速度位函数值相等的点连成的线称为等位(势)线，与速度方向垂直；

$$\begin{cases} d\phi = 0 \\ d\phi = \mathbf{V} \cdot \mathbf{s} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} d\mathbf{s} \tag{4.13}$$

- (6) 任意两点的速度线积分等于这两点的速度位函数之差；速度线积分与路径无关，仅决定于两点的位置；对封闭曲线，速度环量为零。

$$\begin{aligned}
 \int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} &= \int_A^B (u dx + v dy + w dz) \\
 &= \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

2. 流函数的性质

- (1)

第 5 章 粘性流体动力学基础

5.1 流体的粘性及其对流动的影响

5.1.1 流体的粘性

由于流体粘性影响，均匀流经平板时，贴着平板表面的流体速度降为零，称为流体与板面间“无滑移”边界条件。由于收到内层流体的摩擦力、外层流体的速度有变慢趋势，反过来，由于收到外层流体的摩擦力，内层流体的速度有变快趋势。流层简单“互相牵扯”作用一层层向外传递，在距离板面一定距离后，这种作用逐步消失，速度分布变为均匀。

定义 5.1 流体粘性

流层之间“阻碍”流体相对变形趋势的能力称为**流体粘性**，相对错动（剪切）流层间的一对摩擦力即**粘性剪切力**。

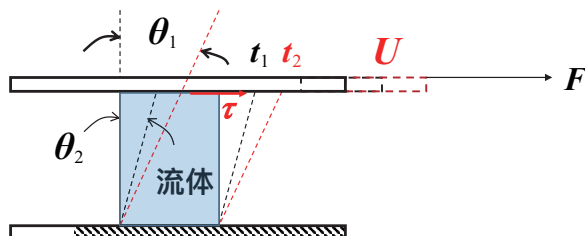


图 5.1: 流体剪切实验

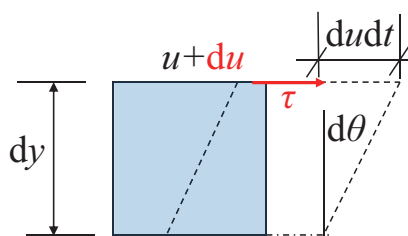


图 5.2: 流体剪切几何关系

如图5.1所示，可以得到剪切力和粘性剪切应力的表达式

$$F = \mu \frac{U}{h} A, \quad \tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{U}{h} \quad (5.1)$$

定理 5.1 牛顿粘性应力公式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5.2)$$

其中， μ 是流体的粘性系数， u 是流体的运动速度。**牛顿粘性应力公式**表明粘性剪切应力不仅与速度梯度有关，而且与物性有关。

从牛顿粘性应力公式可以看出：

- 流体的剪应力与压强 p 无关。
- 当 $\tau \neq 0$ 时， $\frac{du}{dy} \neq 0$ ，即无论剪应力多小，只要存在剪应力，流体就会发生变形运动，呈现速度梯度。

- $\frac{du}{dy} = 0$ 时, $\tau = 0$, 即只要流体静止或无变形, 就不存在剪应力, 流体不存在静摩擦力。

因此, 牛顿粘性应力公式可看成流体易流性的数学表达。

如图5.2所示, 可以找到几何关系

$$d\theta dy = du dt, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (5.3)$$

即微团垂直线在单位时间内顺时针的转角 = 速度梯度, 速度梯度也表示流体微团的剪切变形速度或角变形率。

一般地, 流体剪切应力与速度梯度的关系表示为:

$$\tau = A + B \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (5.4)$$

但是我们一般只研究牛顿流体 (如水、空气、汽油、酒精等), 即满足牛顿粘性应力公式(5.2)的流体。

注意

液体和气体产生粘性的物理原因不同

液体的粘性主要来自于液体分子间的内聚力, 气体的粘性主要来自于气体分子的热运动。因此液体与气体动力粘性系数随温度变化的趋势相反 (气体粘性系数随温度的升高而升高, 液体粘性系数随温度的升高而降低), 但动力粘性系数与压强基本无关。

定义 5.2 动力学粘性系数和运动学粘性系数

在许多空气动力学问题里, 粘性力和惯性力同时存在, 在式子中 μ 和 ρ 往往以 $\frac{\mu}{\rho}$ 的组合形式出现, 用符号 ν 表示: (注意 μ 和 ν 的物理区别)

- 动力学粘性系数: $\mu \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] \quad \mu_a = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ kg/m/s}, \quad \mu_w = 1.139 \times 10^{-3} \text{ kg/m/s}$
- 运动学粘性系数: $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad \nu_a = 1.461 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad \nu_w = 1.139 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

可以看出: 空气动力粘性不大, 初步近似研究时可忽略其粘性作用, 忽略粘性的流体称为理想流体。

流体粘性的特点总结如下:

- 流体的剪切变形是指流体质点之间出现相对运动例如流体层间的相对运动、产生速度梯度;
- 流体的粘性是指流体抵抗剪切变形或质点之间的相对运动的能力, 是流体的物理属性;
- 流体的粘性力是抵抗流体质点之间相对运动, 例如流体层间的相对运动的剪应力或内摩擦力;
- 在静止状态下流体不能承受剪切力; 但是在运动状态下流体可以承受剪力, 剪切力大小与流体速度梯度有关而且与流体种类有关;
- 粘性流体在流动过程中必然要克服内摩擦力做功, 因此流体粘性是流体发生机械能损失的根源。

5.1.2 粘性对流动的影响

1. 绕平板的直匀流