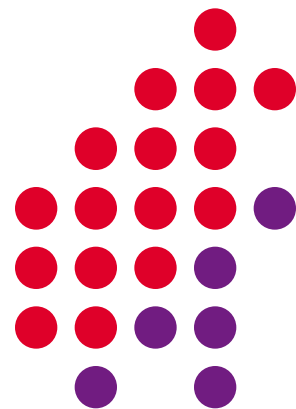


离散数学

--数理逻辑



2025年9月30日 星期二

数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究思维形式的逻辑结构及其规律的学科；

主要研究内容是推理，特别着重于推理过程是否正确；

不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。

主要研究方法是采用数学的方法来研究数学推理、数学性质和数学基础；

数学方法就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

总结

什么是数理逻辑？

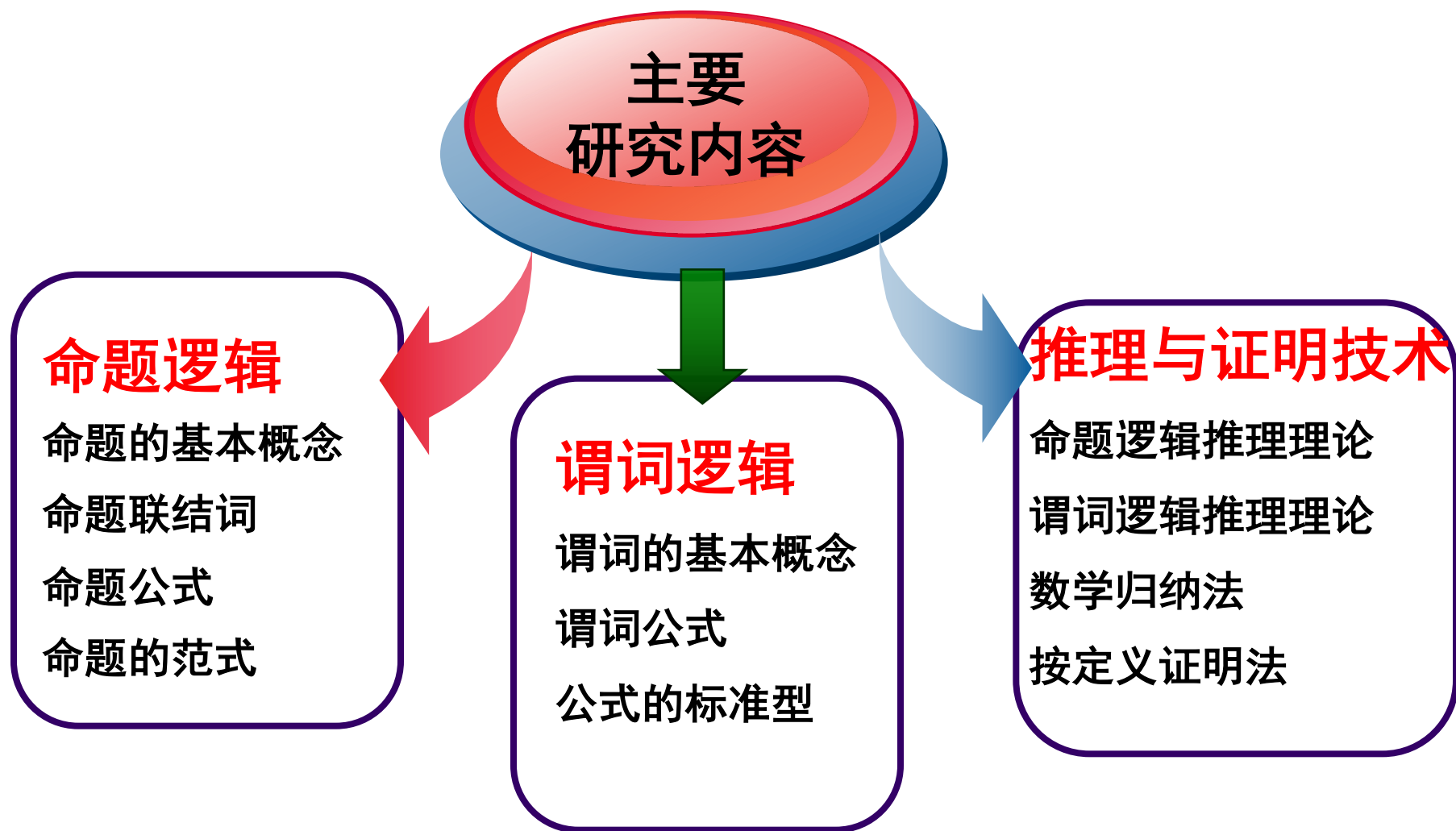
用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑？

程序 = 算法 + 数据

算法 = 逻辑 + 控制

数理逻辑



第1章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系，研究什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？

命题逻辑的**特征：**

在研究逻辑的形式时，我们**把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去。**不把**一个简单命题再分析为非命题的集合，不把谓词和量词等非命题成份分析出来。**

1.1 内容提要

1

命题基本概念

2

命题联结词

3

命题公式

4

命题范式

1.2 命题与命题联结词

真假含义

1.2.1 命题

定义1.2.1 具有确切真值的**陈述句**称为**命题**, 该命题可以取一个“值”, 称为**真值**。

真值只有“**真**”和“**假**”两种, 分别用“**T**”(或“**1**”)和“**F**”(或“**0**”)表示。

例1. 2. 1

- | | |
|-------------------|-----|
| 1. 太阳是圆的； | T |
| 2. 武汉是一个旅游城市； | T |
| 3. 北京是中国的首都； | T |
| 4. $1+1=10$ ； | T/F |
| 5. 我喜欢踢足球； | T/F |
| 6. 3能被2整除； | F |
| 7. 地球外的星球上也有人； | T/F |
| 8. 中国是世界上人口最多的国家； | T |
| 9. 今天是晴天； | F |
| 10. $x+y>0$ ； | 非命题 |

例1. 2. 1 (续)

12. 把门关上;

非命题

13. 出去!

非命题

14. 你要出去吗?

非命题

15. 今天天气真好啊!

非命题

16. 本语句是假的。

非命题

悖论

1. 说谎者悖论：一个克里特人说：“所有克里特人都是说谎者。”
2. 理发师悖论：某村庄有一位理发师，他立下规定：“我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。”
3. 绞刑悖论：有一位法官告诉囚犯：“你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。”

悖论

1. 说谎者悖论

- 一个克里特人说：“所有克里特人都是说谎者。”

2. 理发师悖论

- 某村庄有一位理发师，他立下规定：“我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。”

3. 绞刑悖论

- 有一位法官告诉囚犯：“你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。”

例1. 2. 2

1. 湖北**不**是一个国家；
2. 3**既**是素数**又**是奇数；
3. 张谦是大学生**或**是运动员；
4. **如果**周末天气晴朗，**则**我们将到郊外旅游；
5. $2+2=4$ **当且仅当**雪是白的。

命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

原子命题（简单命题）：不能再**分解**为更为简单命题的命题。

复合命题：可以**分解**为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“**或者**”、“**并且**”、“**不**”、“**如果...则...**”、“**当且仅当**”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

例1. 2. 3

1. 今天天气很冷。
2. 今天天气很冷并且刮风。
3. 今天天气很冷并且刮风，但室内暖和。

通常用大写的带或不带下标的英文字母

A 、 B 、 C 、... P 、 Q 、 R 、... A_i 、 B_i 、
 C_i 、... P_i 、 Q_i 、 R_i 、... 等表示命题

1.2.2 命题联结词

定义1.2.2 设 P 是任一命题，复合命题“**非 P** ”（或“ P 的否定”）称为 P 的**否定式** (Negation)，记作 $\neg P$ ，“ \neg ”为**否定联结词**。 $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

若 P : 湖北是一个国家。

则 $\neg P$: 湖北不是一个国家。



| P | $\neg P$ |
|-----|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

合取联结词

定义1.2.3 设P、Q是任两个命题，复合命题“**P并且Q**”（或“**P和Q**”）称为P与Q的**合取式** (Conjunction)，记作 **$P \wedge Q$** ，“ **\wedge** ”为**合取联结词**。

$P \wedge Q$ 为真当且仅当P，Q同为真。

若 P: 3是素数; Q: 3是奇数。

则 $P \wedge Q$: 3既是素数又是奇数。



| P | Q | $P \wedge Q$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

析取联结词

定义1.2.4 设P、Q是任两个命题，复合命题“**P或者Q**”称为P与Q的**析取式** (Disjunction)，记作 **$P \vee Q$** ，“ **\vee** ”为**析取联结词**。

$P \vee Q$ 为真当且仅当P，Q中至少一个为真。

若 P：张谦是大学生； Q：张谦是运动员。

则 $P \vee Q$ ：张谦是大学生或是运动员。



| P | Q | $P \vee Q$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

蕴涵联结词

定义1.2.5 设P、Q是任两个命题，复合命题“**如果P，则Q**”称为P与Q的**蕴涵式** (Implication)，记作 **$P \rightarrow Q$** ，“ **\rightarrow** ”称为**蕴涵联结词**，P称为蕴涵式的**前件**，Q称为蕴涵式的**后件**。

若P：周末天气晴朗；Q：我们将到郊外旅游。

则 $P \rightarrow Q$ ：如果周末天气晴朗，则我们将郊外旅游。



| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

等价联结词

定义1.2.6 设P、Q是任两个命题，复合命题“**P当且仅当Q**”称为P与Q的**等价式** (Equivalence)，记作 $P \leftrightarrow Q$ ，“ \leftrightarrow ”称为**等价联结词**。

$P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当P、Q同为真假。

若 P: $2+2=4$; Q: 雪是白的。

则 $P \leftrightarrow Q$: $2+2=4$ 当且仅当雪是白的。



| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

总结

| 联结词 | 记号 | 复合命题 | 记法 | 读法 | 真值结果 |
|-----|-------------------|--------|-----------------------|-------|--------------------------------------|
| 否定 | \neg | A是不对的 | $\neg A$ | 非A | $\neg A$ 为真当且仅当A为假 |
| 合取 | \wedge | A并且B | $A \wedge B$ | A合取B | $A \wedge B$ 为真当且仅当A, B同为真 |
| 析取 | \vee | A或者B | $A \vee B$ | A析取B | $A \vee B$ 为真当且仅当A, B中至少一个为真 |
| 蕴涵 | \rightarrow | 若A, 则B | $A \rightarrow B$ | A蕴涵B | $A \rightarrow B$ 为假当且仅当A为真B为假 |
| 等价 | \leftrightarrow | A当且仅当B | $A \leftrightarrow B$ | A等价于B | $A \leftrightarrow B$ 为真当且仅当A, B同为真假 |

说明

- 1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；
- 2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何的内在联系；

说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

(1) 合取联结词 “ \wedge ” 对应了自然语言的 “既…又…”、“不仅…而且…”、“虽然…但是…”、“并且”、“和”、“与”等；

(2) 蕴涵联结词 “ \rightarrow ”，“ $P \rightarrow Q$ ”对应了自然语言中的 “如P则Q”、“只要P就Q”、“P仅当Q”、“只有Q才P”、“除非Q否则 $\neg P$ ”等；

(3) 等价联结词 “ \leftrightarrow ” 对应了自然语言中的 “等价”、“当且仅当”、“充分必要”等；

(4) 析取联结词 “ \vee ” 对应的是相容（可兼）的或。

例1

设 P ：四川是人口最多的省份。

设 P ：王超是一个思想品德好的学生；

符 设 P ：教室的灯不亮可能是灯管坏了

教室的灯不亮可能是停电了

(设 P ：周末天气晴朗；

(Q ：学院将组织我们到石像湖春游。

命题 (4) 可表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。

(设 P ：两个三角形全等；

(Q ：三角形的三条边全部相等。

则命题 (5) 可表示为 $P \leftrightarrow Q$ 。

(5) 两个三角形全等当且仅当三角形的三条边全部相等。

约 定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，命题联结词之优先级如下：

1. 否定→合取→析取→蕴涵→等价
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最高优先级。

例1. 2. 5

设命题 P: 明天上午七点下雨;

Q: 明天上午七点下雪;

R: 我将去学校

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge R \rightarrow R$$

$\rightarrow R$

$$\vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge R$$

$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

1. 如果明天上午七点不是雨夹雪，则我将去学校

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

R

3. 如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校

4. 明天上午七点我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.6

设命题 P: 你陪伴我;

Q: 你代我叫车子;

R: 我将出去。

符号化下述语句:

- (1). 除非你陪伴我或代我叫车子, 否则我将不出去
- (2). 如果你陪伴我并且代我叫车子, 则我将出去
- (3). 如果你不陪伴我或不代我叫车子, 我将不出去

$$R \rightarrow (P \vee Q)$$

$$\text{或 } \neg (P \vee Q) \rightarrow \neg R$$

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$$

1.2.3 联结词理解难点

(1) 联结词 “ \neg ” 是自然语言中的 “非”、“不” 和 “没有” 等的逻辑抽象；

(2) 联结词 “ \wedge ” 是自然语言中的 “并且”、“既…又…”、“但”、“和” 等的逻辑抽象；

(3) 联结词 “ \vee ” 是自然语言中的 “或”、“或者” 等逻辑抽象；但 “或” 有 “可兼或”、“不可兼或” 二种，如：

张明明天早上9点乘飞机到北京或者到上海(不可兼或)
我喜欢学习或喜欢音乐(可兼或)。

联结词理解难点

(4) 联结词 “ \rightarrow ” 是自然语言中的 “如果…，则…” ， “若…，才能…” 、 “除非…，否则…” 等的逻辑抽象。主要描述方法有：

- | | |
|----------------|----------------|
| (1) 因为P 所以Q; | (2) 只要P 就 Q; |
| (3) P 仅当 Q; | (4) 只有Q, 才P; |
| (5) 除非Q, 才P; | (6) 除非Q, 否则非P; |
| (7) 没有Q, 就没有P。 | |

联结词理解难点(续1)

如：设 P ：雪是白色的； Q ： $2+2=4$ 。

将下列命题符号化：

- ① 因为雪是白色的，所以 $2+2=4$ ； $P \rightarrow Q$
- ② 如果 $2+2=4$ ，则雪是白色的； $Q \rightarrow P$
- ③ 只有雪是白色的，才有 $2+2=4$ ； $Q \rightarrow P$
- ④ 只有 $2+2=4$ ，雪才是白色的； $P \rightarrow Q$
- ⑤ 只要雪不是白色的，就有 $2+2=4$ ； $\neg P \rightarrow Q$
- ⑥ 除非雪是白色的，否则 $2+2 \neq 4$ ； $\neg P \rightarrow \neg Q$ 或 $Q \rightarrow P$
- ⑦ 雪是白色的当且仅当 $2+2=4$ ； $P \leftrightarrow Q$

联结词理解难点(续2)

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件P为假时，不管Q的真假如何，则 $P \rightarrow Q$ 都为真。此时称为“善意推定”；这里要特别提醒一下“ \rightarrow ”的含义，在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然因果关系，也就是说并不要求前件和后件有什么联系；

联结词理解难点 (续3)

(5) 双条件联结词 “ \leftrightarrow ” 是自然语言中的 “充分必要条件”、“当且仅当” 等的逻辑抽象；

(6) 联结词连接的是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结次所连接的两原子命题之间是否有关系无关；

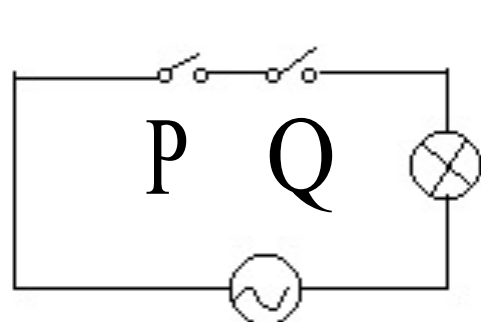
联结词理解难点(续4)

(7) 联结词 “ \wedge ”、“ \vee ”、“ \leftrightarrow ” 具有对称性，而联结词 “ \neg ”、“ \rightarrow ” 没有；

(8) 联结词 “ \wedge ”、“ \vee ”、“ \neg ” 同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

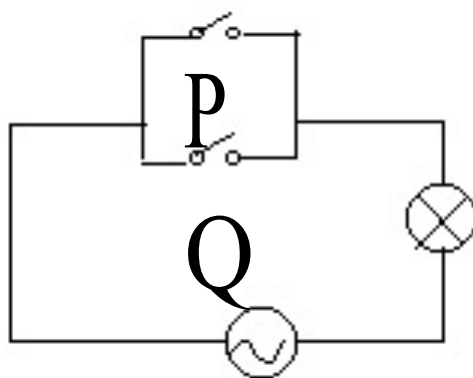
1.2.4 命题联结词的应用

例 1.2.7 用复合命题表示如下图所示的开关电路：

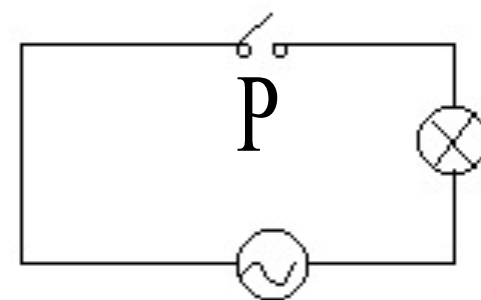


设： A：开关P闭合； B：开关Q闭合。

$A \wedge B$



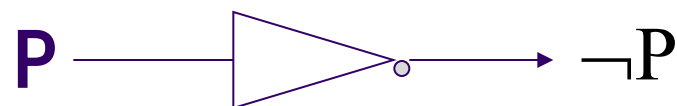
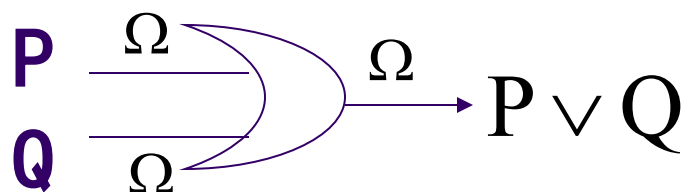
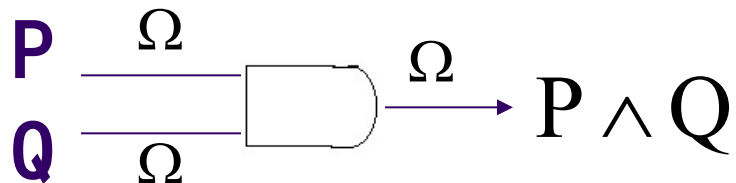
$A \vee B$



A

例 1.2.8

用复合命题表示如下图所示的逻辑电路：



解：设 P ：输入端 P 为高电位， Q ：输入端 Q 为高电位，

则 “与门” 对应于 $P \wedge Q$

“或门” 对应于 $P \vee Q$

“非门” 对应于 P

1.3 命题公式、解释与真值表

定义1.3.1 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**（或**命题变元**），该命题变量无具体的真值，它的变域是集合{ T, F }（或{ 0, 1 }）

当原子命题是命题变元时，此复合命题也即为命题变元的“函数”，且该“函数”的值仍为“真”或“假”值，这样的函数可形象地称为“**真值函数**”，或称为**命题公式**，此命题公式没有确切真值。

1.3.1 命题公式

$(P \wedge Q \wedge)$, $(P \rightarrow Q) \rightarrow$
等是非命题公式。

等价式
双条件式

基础

归纳

合取式

析取式

蕴含式
条件式

定义1.3.2 (命题公式)

1. 命题变元本身是一个公式;
2. 如G是公式, 则 $(\neg G)$ 也是公式;
3. 如G, H是公式, 则 $(G \wedge H)$ 、 $(G \vee H)$ 、 $(G \rightarrow H)$ 、 $(G \leftrightarrow H)$ 也是公式;

命题公式是仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。
该公式常用符号G、H、...等表示。

约定

1. 对于公式中最外层的括号，常可省略。如 $(\neg G)$ 可写成 $\neg G$ ， $(G \rightarrow H)$ 可写成 $G \rightarrow H$ 。但必须指出这仅仅是一种约定，把程序输入计算机时，括号是不可随意省略的；
2. 否定联结词 “ \neg ” 只作用于邻接后的原子命题变元，如可把 $(\neg G) \vee H$ 写成是 $\neg G \vee H$ 。
3. 相同联结词按其出现的先后次序，括号可以省略；
4. 五种逻辑联结词的优先级按如下次序递减：

\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

例

例1.3.1 符号串：

$((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R)))$;

$((\neg P) \wedge Q)$; $(P \rightarrow (\neg (P \wedge Q)))$;

$(((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q)) \leftrightarrow (P \rightarrow R))$ 。

等都是命题公式。

例1.3.2 符号串：

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$; $(P \rightarrow Q$;

$(\neg P \vee Q \vee (R$; $P \vee Q \vee$ 。

等都不是合法的命题公式。

例1.3.3

P: 今天天气晴朗, Q: 老陈不来,

试

P: 你陪伴我; Q: 你代我叫车子; R: 我出去。

则有: $((R \wedge (P \wedge Q)) \rightarrow (P \wedge Q)) \wedge ((\neg Q) \rightarrow (\neg R))$

①

P: a是偶数,

Q: b是偶数,

R: a+b是偶数,

②

除非

Q

则有: $((P \wedge Q) \rightarrow R)$

③

停树

R: 我

S: 我们要为祖国四化建设而奋斗

④

若a

则有: $((P \wedge Q) \wedge R) \wedge S$

⑤

我们要做到身体好、学习好、工作好, 为祖国四化建设而奋斗。

例1.3.4

公式 $((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R)))$ 可表示如下：

