离散数学

--数理逻辑

2025年10月12日星期日

数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究思维形式的逻辑结构及其规律的学科；

主要研究内容是推理，特别着重于推理过程是否正确；

不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。

主要研究方法是采用数学的方法来研究数学推理、数学性质和数学基础；

数学方法就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

总结

什么是数理逻辑 ？

用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑？

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

数理逻辑

主要
研究内容

命题逻辑

命题的基本概念

命题联结词

命题公式

命题的范式

谓词逻辑

谓词的基本概念

谓词公式

公式的标准型

推理与证明技术

命题逻辑推理理论

谓词逻辑推理理论

数学归纳法

按定义证明法

第1章　命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系，研究什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？

命题逻辑的特征：

在研究逻辑的形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去。不把一个简单命题再分析为非命题的集合，不把谓词和量词等非命题成份分析出来。

1.1 内容提要

1 命题基本概念

2 命题联结词

3 命题公式

4 命题范式

1.2 命题与命题联结词

1.2.1 命题

真假含义

定义1.2.1　具有确切真值的陈述句称为命题，该命题可以取一个“值”，称为真值。

真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”（或“1”）和“F”（或“0”）表示。

例1.2.1

1.	太阳是圆的；	T
2.	武汉是一个旅游城市；	T
3.	北京是中国的首都；	T
4.	1＋1＝10；	T/F
5.	我喜欢踢足球；	T/F
6.	3能被2整除；	F
7.	地球外的星球上也有人；	T/F
8.	中国是世界上人口最多的国家；	T
9.	今天是晴天；	F
10.	x +y＞O ；	非命题

例1.2.1(续)

12. 把门关上； 非命题
13. 出去！ 非命题
14. 你要出去吗？ 非命题
15. 今天天气真好啊！ 非命题
16. 本语句是假的。 非命题

悖论

1. 说谎者悖论：一个克里特人说："所有克里特人都是说谎者。"
2. 理发师悖论：某村庄有一位理发师，他立下规定："我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。"
3. 绞刑悖论：有一位法官告诉囚犯："你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。"

悖论

1. 说谎者悖论

- 一个克里特人说："所有克里特人都是说谎者。"

2. 理发师悖论

- 某村庄有一位理发师，他立下规定："我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。"

3. 绞刑悖论

- 有一位法官告诉囚犯："你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。"

例1.2.2

1. 湖北不是一个国家；
2. 3既是素数又是奇数；
3. 张谦是大学生或是运动员；
4. 如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游；
5. 2+2=4当且仅当雪是白的。

命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

原子命题(简单命题)：不能再**分解**为更为简单命题的命题。

复合命题：可以**分解**为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“**或者**”、“**并且**”、“**不**”、“**如果...则...**”、“**当且仅当**”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

例1.2.3

1. 今天天气很冷。
2. 今天天气很冷并且刮风。
3. 今天天气很冷并且刮风，但室内暖和。

通常用**大写的带或不带下标的英文字母**A、B、C、...P、Q、R、... A_i、B_i 、C_i、...P_i、Q_i、R_i、...等表示命题

1.2.2 命题联结词

定义1.2.2 设P是任一命题，复合命题“非P”（或“P的否定”）称为P的否定式(Negation)，记作¬P，“¬”为否定联结词。¬P为真当且仅当P为假。

若 P：湖北是一个国家。

则 ¬P：湖北不是一个国家。

P	¬P
0	1
1	0

合取联结词

定义1.2.3 设P、Q是任两个命题，复合命题“P并且Q”（或“P和Q”）称为P与Q的**合取式**(Conjunction)，记作$P \wedge Q$，“$\wedge$”为**合取联结词**。

$P \wedge Q$为真当且仅当P，Q同为真。

若　P：3是素数；　Q：3是奇数。

则　$P \wedge Q$：3既是素数又是奇数。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

析取联结词

定义1.2.4 设P、Q是任两个命题，复合命题“P或者Q”称为P与Q的**析取式**(Disjunction)，记作P∨Q，“∨”为**析取联结词**。

P∨Q为真当且仅当P，Q中至少一个为真。

若　P：张谦是大学生；Q：张谦是运动员。

则　P∨Q：张谦是大学生或是运动员。

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

蕴涵联结词

定义1.2.5 设P、Q是任两个命题，复合命题“如果P，则Q”称为P与Q的**蕴涵式**(Implication)，记作$P\rightarrow Q$，“$\rightarrow$”称为**蕴涵联结词**，P称为蕴涵式的**前件**，Q称为蕴涵式的**后件**。

若P：周末天气晴朗；Q：我们将到郊外旅游。

则$P\rightarrow Q$：如果周末天气晴朗，则我们将郊外旅游。

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

等价联结词

定义1.2.6　设P、Q是任两个命题，复合命题“P当且仅当Q”称为P与Q的等价式(Equivalence)，记作$P \leftrightarrow Q$，“$\leftrightarrow$”称为等价联结词。

$P \leftrightarrow Q$为真当且仅当P、Q同为真假。

若　P：2+2=4；Q：雪是白的。

则　$P \leftrightarrow Q$：2+2=4当且仅当雪是白的。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

总结

联结词	记号	复合命题	记法	读法	真值结果
否定	┐	A是不对的	┐A	非A	┐A为真当且仅当A为假
合取	∧	A并且B	A∧B	A合取B	A∧B为真当且仅当A, B同为真
析取	∨	A或者B	A∨B	A析取B	A∨B为真当且仅当A, B中至少一个为真
蕴涵	→	若A，则B	A→B	A蕴涵B	A→B为假当且仅当A为真B为假
等价	↔	A当且仅当B	A↔B	A等价于B	A↔B为真当且仅当A, B同为真假

说明

1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；

2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何的内在联系；

说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

（1）合取联结词“∧”对应了自然语言的 “既…又…”、 “不仅…而且…”、 “虽然…但是…”、 “并且”、 “和”、 “与”等；

（2）蕴涵联结词“→”，“P→Q”对应了自然语言中的“如P则Q”、 “只要P就Q”、 “P仅当Q”、 “只有Q才P”、 “除非Q否则¬P”等；

（3）等价联结词“↔”对应了自然语言中的“等价”、 “当且仅当”、 “充分必要”等；

（4）析取联结词“∨”对应的是相容（可兼）的或。

设P：四川是人口最多的省份。

设P：王超是一个思想品德好的学生；

设P：教室的灯不亮可能是灯管坏了

设P：周末天气晴朗；

　Q：学院将组织我们到石像湖春游。

设P：两个三角形全等；

　Q：三角形的三条边全部相等。

则命题（5）可表示为P$\leftrightarrow$Q。

（5）两个三角形全等**当且仅当**三角形的三条边全部相等。

约　定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，**命题联结词之优先级**如下：

1. **否定→合取→析取→蕴涵→等价**
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序(**从左到右**)
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用**括号**；同级符号相邻时，也可使用括号。**括号中的运算为最高优先级**。

例1.2.5

设命题 P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校

$$((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge R$$

$$\ldots\rightarrow R$$

$$\ldots Q)\rightarrow R$$

$$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge \ldots)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg \ldots\wedge\neg Q\wedge R)$$

R

1. 如果……七点不是雨夹雪，则我将去学校
2. 如……学……
3. 如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校
4. 明天上午七点我将雨雪无阻一定去学校

例1.2.6

设命题 P：你陪伴我；

Q：你代我叫车子；

R：我将出去。

符号化下述语句：

(1). 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去

(2). 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去

(3). 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去

$R\rightarrow(P\vee Q)$

或 $\neg(P\vee Q)\rightarrow\neg R$

$(P\wedge Q)\rightarrow R$

$(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow\neg R$

1.2.3 联结词理解难点

（1）联结词“¬ ”是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象；

（2）联结词“∧”是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”等的逻辑抽象；

（3）联结词“∨”是自然语言中的“或”、“或者”等逻辑抽象；但“或”有“可兼或”、“不可兼或”二种，如：

张明明天早上9点乘飞机到北京或者到上海(不可兼或)

我喜欢学习或喜欢音乐(可兼或)。

联结词理解难点

（4）联结词“→”是自然语言中的“如果…，则…”，“若…，才能…”、“除非…，否则…”等的逻辑抽象。主要描述方法有：

（1）因为P 所以Q；　　（2）只要P 就 Q；

（3）P 仅当 Q；　　（4）只有Q，才P；

（5）除非Q，才P；　　（6）除非Q，否则非P；

（7）没有Q，就没有P。

联结词理解难点(续1)

如：设 P：雪是白色的；　　Q：2+2=4。

将下列命题符号化：

① 因为雪是白色的，所以2+2=4；　$P \to Q$

② 如果2+2=4，则雪是白色的；　$Q \to P$

③ 只有雪是白色的，才有2+2=4；　$Q \to P$

④ 只有2+2=4，雪才是白色的；　$P \to Q$

⑤ 只要雪不是白色的，就有2+2=4；$\neg P \to Q$

⑥ 除非雪是白色的，否则2+2≠4；$\neg P \to \neg Q$或$Q \to P$

⑦ 雪是白色的当且仅当2+2=4；　$P \leftrightarrow Q$

联结词理解难点(续2)

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件P为假时，不管Q的真假如何，则P→Q都为真。此时称为**“善意推定”**；这里要特别提醒一下“→”的含义，在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许**两者无必然因果关系**，也就是说**并不要求前件和后件有什么联系**；

联结词理解难点(续3)

（5）双条件联结词“↔”是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象；

（6）联结词连接的是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结次所连接的两原子命题之间是否有关系无关；

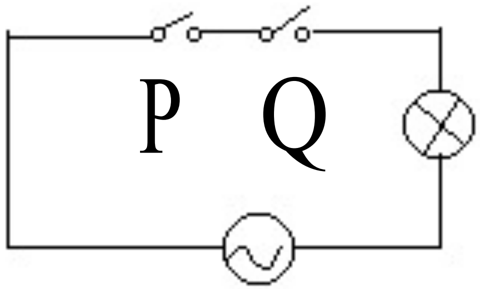
联结词理解难点(续4)

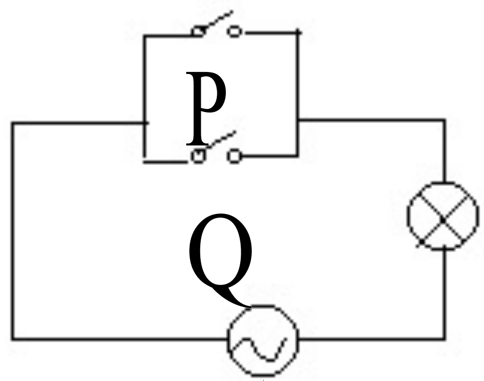
（7）联结词"$\wedge$"、"$\vee$"、"$\leftrightarrow$"具有对称性，而联结词"$\neg$"、"$\rightarrow$"没有；

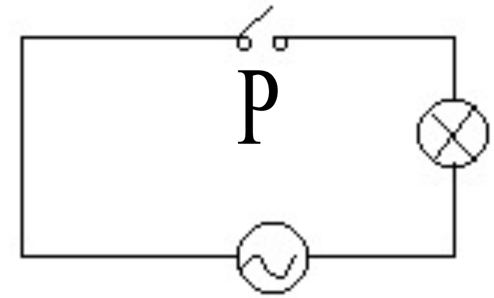
（8）联结词"$\wedge$"、"$\vee$"、"$\neg$"同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

1.2.4 命题联结词的应用

例 1.2.7 用复合命题表示如下图所示的开关电路：







设： A：开关P闭合； B：开关Q闭合。

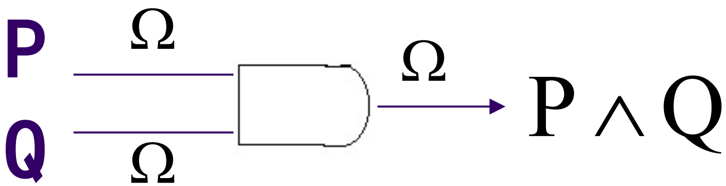
$A \wedge B$

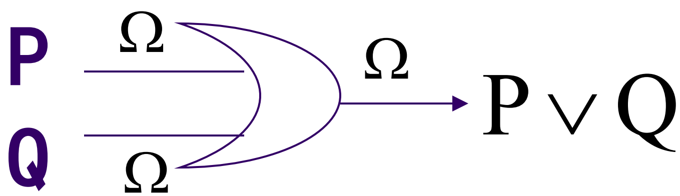
$A \vee B$

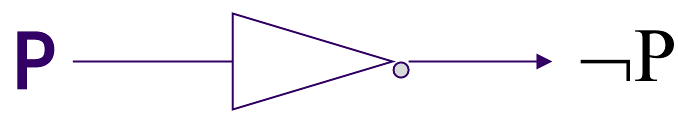
A

例 1.2.8

用复合命题表示如下图所示的逻辑电路：







解：设P：输入端P为高电位，Q：输入端Q为高电位，

则 “与门” 对应于 $P\wedge Q$

“或门” 对应于 $P\vee Q$

“非门” 对应于 P

1.3 命题公式、解释与真值表

定义1.3.1 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**(或**命题变元**)，该命题变量无具体的真值，它的变域是集合{T，F}(或{0，1})

当原子命题是命题变元时，此复合命题也即为命题变元的“函数”，且该“函数”的值仍为“真”或“假”值，这样的函数可形象地称为“**真值函数**”，或称为**命题公式**，此命题公式没有确切真值。

1.3.1　命题公式

（P∧Q∧），（P→Q）→

等是非命题公式。

基础

归纳

等价式
双条件式

合取式

析取式

蕴含式
条件式

定义1.3.2（命题公式）

1. 命题变元本身是一个公式；
2. 如G是公式，则(¬G)也是公式；
3. 如G，H是公式，则(G∧H)、(G∨H)、(G→H)、(G↔H)也是公式；

命题公式是仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。该公式常用符号G、H、…等表示。

约定

1. 对于公式中最外层的括号，常可省略。如(¬G)可写成¬G，(G→H)可写成G→H。但必须指出这仅仅是一种约定，把程序输入计算机时，括号是不可随意省略的；
2. 否定联结词“¬”只作用于邻接后的原子命题变元，如可把(¬G)∨H写成是¬G∨H。
3. 相同联结词按其出现的先后次序，括号可以省略；
4. 五种逻辑联结词的优先级按如下次序递减：

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

例

例1.3.1 符号串：

$$((P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge((\neg S)\vee R)));$$

$$((\neg P)\wedge Q); \qquad (P\rightarrow(\neg(P\wedge Q)));$$

$$(((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q))\leftrightarrow(P\rightarrow R))。$$

等都是命题公式。

例1.3.2 符号串：

$$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q); \qquad (P\rightarrow Q;$$

$$(\neg P\vee Q\vee(R; \qquad P\vee Q\vee。$$

等都不是合法的命题公式。

例1.3.3

P：今天天气晴朗，Q：老陈不来，

P：你陪伴我； Q：你代我叫车子；R：我出去。

则有：(R ...)∧(¬Q))→(¬R))

P：a是偶数，

Q：b是偶数，

R：a+b是偶数，

则有：((P∧Q)→R)

P

Q

R：我

S：我们要为祖国四化建设而奋斗

则有：(((P∧Q)∧R)∧S)

试

①

② 除非 ... 去；

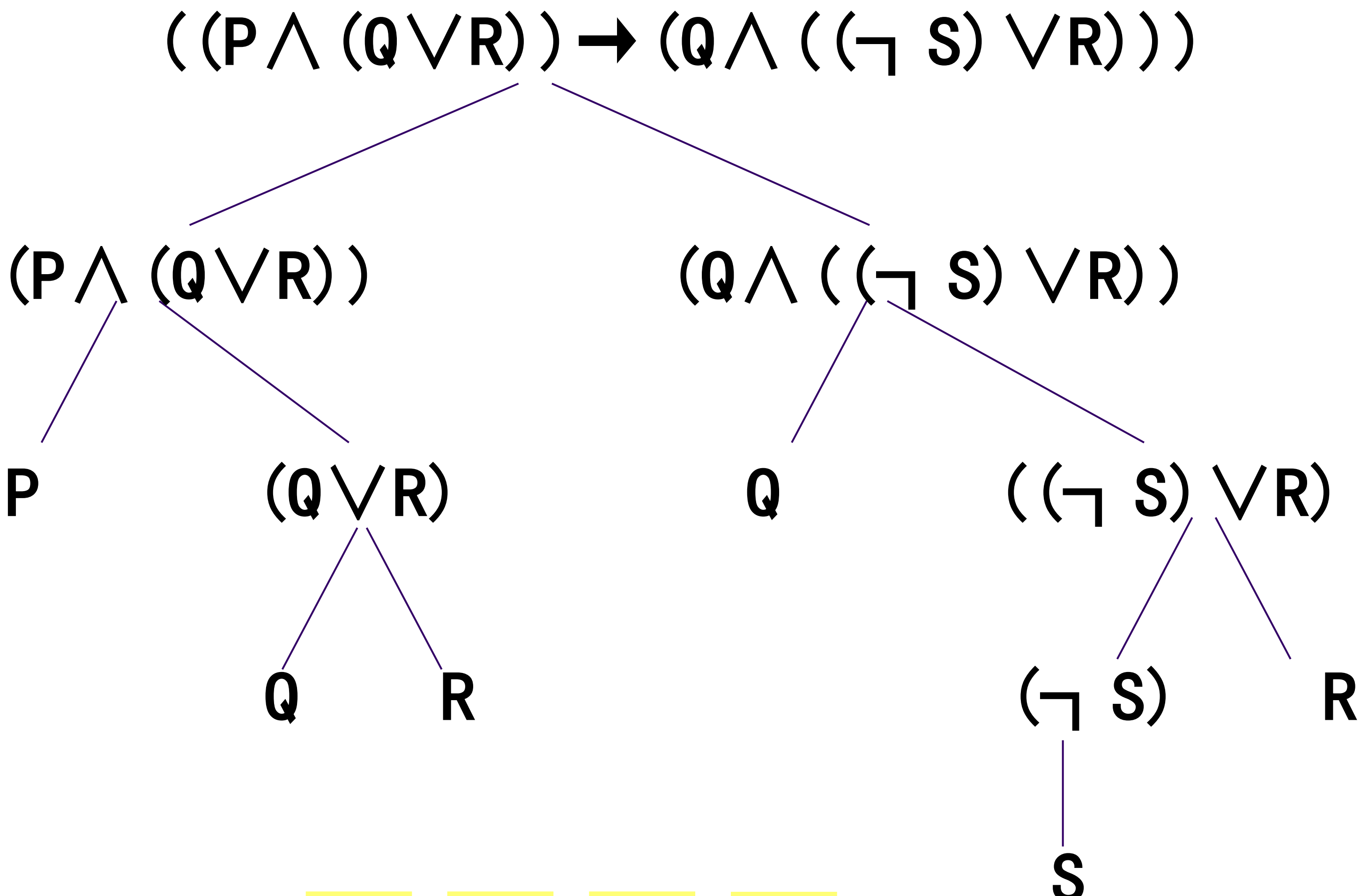
③ 停机

④ 若a

⑤ 我们要做到身体好、学习好、工作好，为祖国四化建设而奋斗。

例1.3.4

公式((P∧(Q∨R))→(Q∧((¬S)∨R)))可表示如下：



1.3.2 公式的解释与真值表

定义1.3.3 设P_1、P_2、…、P_n是出现在公式G中的所有命题变元，指定P_1、P_2、…、P_n一组真值，则这组真值称为G的一个解释,常记为 I 。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有2^n个不同的解释。

如果公式G在解释 I 下是真的，则称 I 满足G；如果G在解释 I 下是假的，则称 I 弄假G。

定义1.3.4 将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的真值表。

例1.3.5

求下面公式的真值表：

$$G=(P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$$

其中，P、Q、R是G的所有命题变元。

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P\leftrightarrow Q$	$(\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R$	$P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R)$	G
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

例1.3.5（续）

进一步化简为：

P	Q	R	$(P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)) \vee Q$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

例1.3.6

求下面这组公式的真值表：

$$G_1 = \neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P;$$

$$G_2 = (P \rightarrow Q) \wedge P;$$

$$G_3 = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)。$$

P Q	$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
0 0	1	0	0
0 1	1	0	0
1 0	1	0	0
1 1	1	1	0

结论

从这三个真值表可以看到一个非常有趣的事实：

- 公式G_1对所有可能的解释具有“真”值
- 公式G_3对所有可能的解释均具有“假”值
- 公式G_2则具有“真”和“假”值

定义1.3.5

- 公式G称为永真公式(重言式)，如果在它的所有解释之下都为“真”。
- 公式G称为永假公式(矛盾式),如果在它的所有解释之下都为“假”。
- 公式G称为可满足的，如果它不是永假的。

结论

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

① 永真式G的否定¬G是矛盾式；矛盾式G的否定¬G是永真式。

② 永真式一定是可满足式，可满足式不一定是永真式

③ 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)

④ 如果公式G在解释I下是真的，则称I满足G；如果G在解释I下是假的，则称I弄假于G。

例1.3.7

写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1 = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$；

（2）$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg (P \rightarrow Q) \vee \neg (Q \rightarrow P))$；

（3）$G_3 = (P \rightarrow \neg Q) \vee \neg Q$。

解：

三个公式的真值表如下：

P Q	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P))$	$(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$
0 0	1	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	0	0

永真公式
可满足公式

永假公式

可满足公式

分析公式（1）

若将(P→Q)↔(¬P∨Q)看成两个公式，分别令：

$G = P \rightarrow Q$，　　$H = \neg P \vee Q$。

则 $G \leftrightarrow H$ 是一个永真公式，即这两个公式对任何解释都必同为真假，此时，说 G 和 H 相等，记为 $G = H$。

定义1.3.6 设G、H是公式，如果在任意解释 I 下，G与H的真值相同，则称公式G、H是等价的，记作G＝H。

定理1.3.1

公式G、H等价的充分必要条件是公式G↔H是永真公式

证明："⇒"假定G，H等价，则G，H在其任意解释I下或同为真或同为假，于是由"↔"的意义知，G↔H在其任何的解释I下，其真值为"真"，即G↔H为永真公式。

"⇐"假定公式G↔H是永真公式，I是它的任意解释，在I下，G↔H为真，因此，G、H或同为真，或同为假，由于I的任意性，故有G＝H。

“＝” 与“↔”的区别

首先，双条件词“↔”是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算，G↔H的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价“＝”则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G＝H表示“命题公式G等价于命题公式H”，G＝H 的结果不是命题公式。

其次，如果要求用计算机来判断命题公式G、H是否逻辑等价，即G＝H那是办不到的，然而计算机却可“计算”公式G↔H是否是永真公式。

“=”的性质

由于“=”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

（1）自反性　G=G；

（2）对称性　若G=H，则H=G；

（3）传递性　若G=H，H=S，则G=S。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

1.3.4 命题公式的基本等价关系

例1.3.5 证明公式$G_1=(P\leftrightarrow Q)$与公式$G_2=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$之间是逻辑等价的。

解： 根据定理1.3.1，只需判定公式$G_3=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$为永真公式。

P Q	$G_3=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$
0 0	1 1 1 1 1
0 1	0 1 1 0 0
1 0	0 1 0 0 1
1 1	1 1 1 1 1

基本等价公式

设G，H，S是任何的公式，则：

1） E_1：$G\vee(H\vee S)=(G\vee H)\vee S$ （结合律）

E_2：$G\wedge(H\wedge S)=(G\wedge H)\wedge S$

2） E_3：$G\vee H=H\vee G$ （交换律）

E_4：$G\wedge H=H\wedge G$

3） E_5：$G\vee G=G$ （幂等律）

E_6：$G\wedge G=G$

4） E_7：$G\vee(G\wedge H)= G$ （吸收律）

E_8：$G\wedge(G\vee H)= G$

基本等价公式（续）

5） E_9：$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ （分配律）

E_{10}：$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$

6） E_{11}：$G \vee 0 = G$ （同一律）

E_{12}：$G \wedge 1 = G$

7） E_{13}：$G \vee 1 = 1$ （零律）

E_{14}：$G \wedge 0 = 0$

8） E_{15}：$G \vee \neg G = 1$ （排中律）

9） E_{16}：$G \wedge \neg G = 0$ （矛盾律）

基本等价公式（续）

10) E_{17}: $\neg(\neg G) = G$ （双重否定律）

11) E_{18}: $\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$ （De MoRGan定律）

E_{19}: $\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$

12) E_{20}: $(G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ （等价式）

13) E_{21}: $(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$ （蕴涵式）

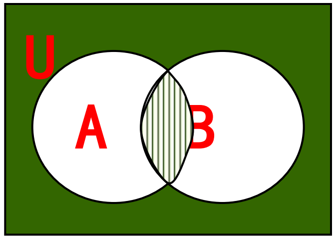
14) E_{22}: $G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$ （假言易位）

15) E_{23}: $G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H$ （等价否定等式）

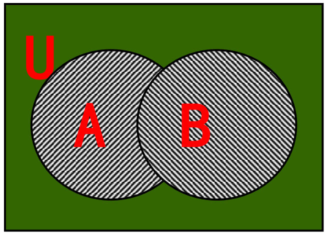
16) E_{24}: $(G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$ （归谬论）

命题与集合之间的关系

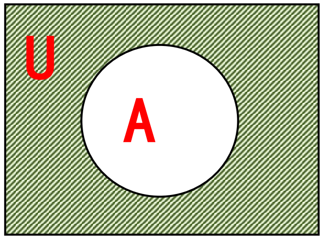
韦恩图是将G，H理解为某总体论域上的子集合，而规定G∧H为两集合的公共部分（交集合），G∨H为两集合的全部（并集合），┐G为总体论域（如矩形域）中G的补集，将命题中的真值“1”理解为集合中的总体论域（全集），将命题中的真值“0”理解为集合中的空集，则有：



G∧H



G∨H



┐G

定理1.3.2(代入定理)

设$G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是一个命题公式，其中 ： P_1、P_2、…、P_n是命题变元，$G_1(P_1, P_2, \cdots, P_n)$、$G_2(P_1, P_2, \cdots, P_n)$、. . . .、$G_n(P_1, P_2, \cdots, P_n)$为任意的命题公式， 分别用$G_1$、$G_2$…、$G_n$取代G中的$P_1$、$P_2$、…、$P_n$后得到新的命题公式：$G(G_1, G_2, \cdots, G_n) = G'(P_1, P_2, \cdots, P_n)$

若G是永真公式（ 或永假公式），则G’也是一个永真公式（或永假公式）。

例1.3.6

设 $G(P, Q)=(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$，证明公式G是一个永真公式。另有两个任意公式：

$$H(P, Q)=(P\vee\neg Q);$$

$$S(P, Q)=(P\leftrightarrow Q)。$$

进一步验证代入定理的正确性。

解 建立公式G的真值表如右所示。可见为永真公式。

P Q	$(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	1

例1.3.6（续）

将H，S代入到G中分别取代G中的命题变元P、Q，所得到的公式G'为：

$$G'(P,Q)=G(H,S)=(H\wedge(H\rightarrow S))\rightarrow S$$

$$=((P\vee\neg Q)\wedge((P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow Q)))\rightarrow(P\leftrightarrow Q)$$

建立新公式G'(P，Q)的真值表，代入定理符合。

P	Q	$((P\vee\neg Q)\wedge((P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow Q)))\rightarrow(P\leftrightarrow Q)$
0	0	1 1 1 1 1 1 1 1 0
0	1	0 0 0 0 0 1 0 1 0
1	0	1 1 0 1 1 0 0 1 0
1	1	1 0 1 1 0 1 1 1 1

定理1.3.3（替换定理）

设G_1是G的子公式（即 G_1是公式G的一部分），H_1是任意的命题公式，在G中凡出现G_1处都以H_1替换后得到新的命题公式H，若$G_1=H_1$，则$G=H$。

利用24个基本等价公式及代入定理和替换定理，可完成公式的转化和等价判定。

例1.3.7

利用基本的等价关系，完成如下工作：

（1）判断公式的类型：

证明 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是一个永真公式。

（2）证明公式之间的等价关系：

证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$

（3）化简公式：

证明 $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee ((Q \wedge R) \vee (P \wedge R)) = R$

证明

(1) $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)))$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

$= ((P \vee Q) \wedge (P \vee (Q \wedge R)))$

$\vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$= ((P \vee Q) \wedge ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)))$

$\vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$= ((P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$\vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$= ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

$= T$

即:$((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 为永真公式;

证明(续)

（2） $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\rightarrow R$

即有：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$；

（3） $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R$

$=T\wedge R=R$

即有：$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))=R$。

1.3.5　命题公式的难点

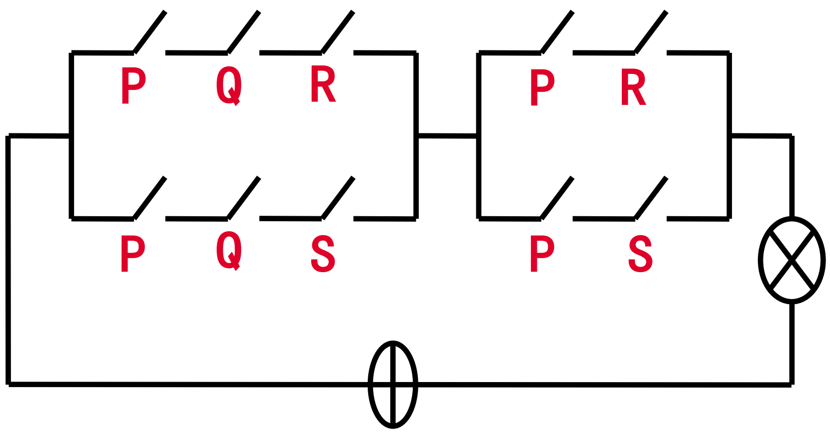
1. 命题公式和命题不同，它是一个公式，无具体的真值可言，只有当给予公式中的每个命题变元以具体的真值指派，公式才有具体的真值；
2. 命题公式之间的等价联结词“↔”和等价关系“＝”之间是两个完全不同的概念，前者是一种运算，后者是一种关系，两个公式之间，通过联结词“↔”的运算以后，仍然是一个命题公式，但等价关系“＝”只能将一个命题公式转化成与之等价的另一个命题公式，“＝”是不可计算的；

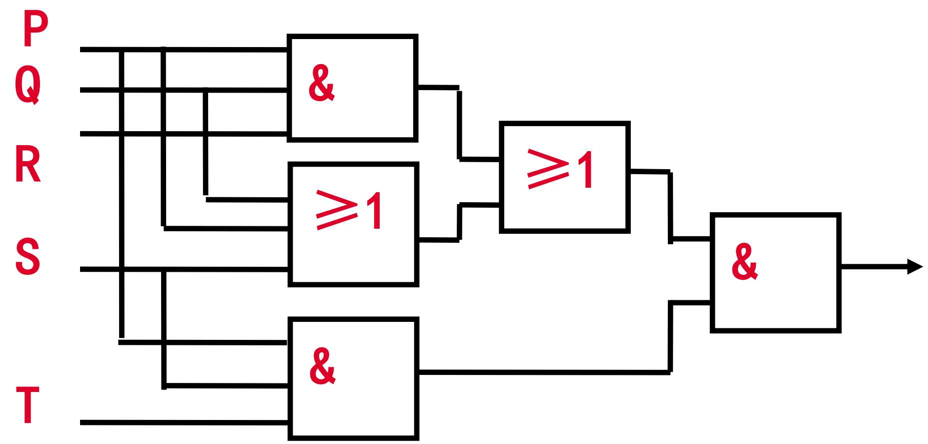
命题公式的难点

3. 对于24个基本的等价公式，如果将运算“¬”、“∧”、“∨”分别对应于集合中的运算“¯”、“∩”、“∪”，真值“1”、“0”分别对应于集合中的全集“U”和空集“Φ”，则集合中的19个基本的等价公式对应于命题的公式E_1到E_{19}，E_{20}到E_{24}是命题逻辑中所特有的公式，重点要求记住E_{20}和E_{21}。
4. 只有熟练地掌握这24个基本的等价公式，并且对联结词“∧”、“∨”注意用括号来标识其优先级别，才能正确地加以应用。

1.3.6　命题公式的应用

例1.3.8　利用基本的等价关系，化简下列电路图





解：上述电路图可描述为：

（1）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

（2）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

例1.3.8

利用21个基本等价关系，化简公式(1)、(2)可得：

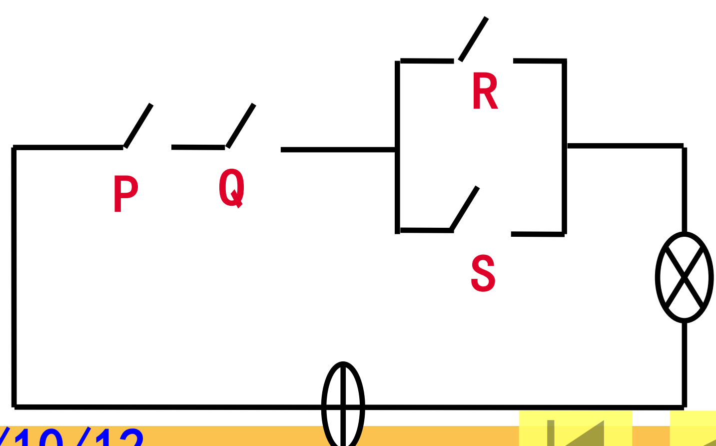
(1) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

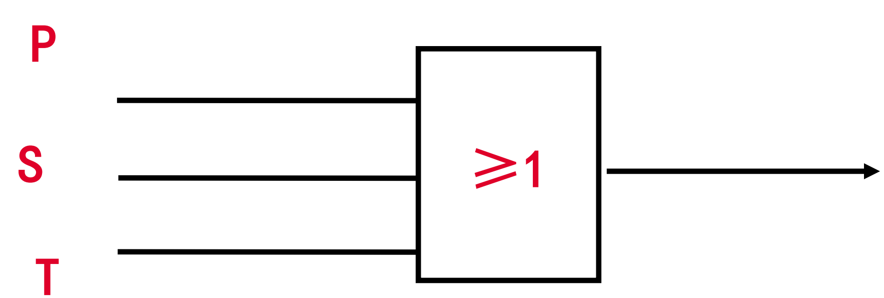
$= ((P\wedge Q\wedge(R\vee S))\wedge(P\wedge(R\vee S))$

$= P\wedge Q\wedge(R\vee S)$；

(2) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

$= (P\vee Q\vee S)\wedge(P\wedge S\wedge T) = P\wedge S\wedge T$。

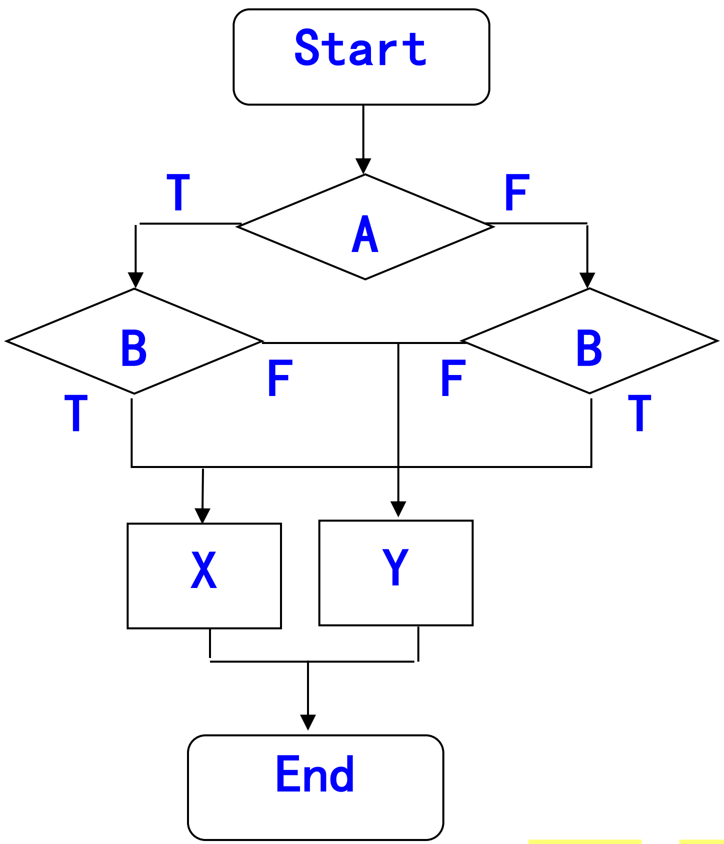




例1.3.9

将下面程序语言进行化简。

If A then if B then X else Y else if B then X else Y



解：执行X的条件为：

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

执行Y的条件为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

例1.3.9(续)

执行X的条件可化简为：

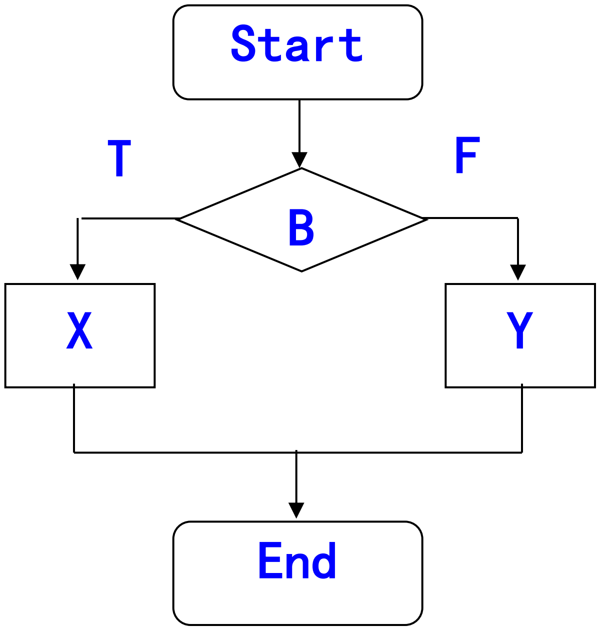
$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

$= B \wedge (A \vee \neg A) = B$

执行Y的条件可化简为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$= \neg B \wedge (A \vee \neg A) = \neg B$



程序可简化为：If B then X else Y

例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题1：
逻辑学家遇到岛中三人A, B 和 C。

问A: “你是骑士还是无赖?” A 虽作答，但是听不清说了什么。又问B: “A说了什么？” B回答: “他说他是无赖。” 这时C说: “B在撒谎。”

请问C是骑士还是无赖?

一个很可能的思考过程

假设 1. A或者是骑士(只说真话)，或者是无赖(只说假话)，二者必居其一。

穷举
2. 假如A是骑士，他不可能说自己是无赖，因为那不是事实。
3. 假如A是无赖，也同样不可能说自己是无赖，因为那是真话。

反证 4. 所以，A说的话不可能是“我是无赖”。
5. 因此，B说的不是事实，他必然是无赖。
6. 因此，C说的是事实。
7. 结论：C是骑士。

A可以是任何人，所以实际上到这里我们就知道这个岛上不会有任何人说自己是无赖。

这个问题太简单，C没说话就可以判定B是无赖。

例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题2：
逻辑学家遇到岛中两人A 和 B。

A声称：“我们两个都是无赖。”

请问A 和 B各是哪种人?

A是无赖，B是骑士

例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题3：

逻辑学家遇到岛中三人A, B 和 C。

问A：“你们三人中有几个是无赖?” A 虽作答，但是听不清说了什么。又问B：“A说了什么？” B回答：“他说有两个人是无赖。”这时C说：“B在撒谎。”

请问C是骑士还是无赖?

B和C有一个是无赖

1. B和C说的话恰好相反，因此它们的身份必定相反。
2. A说的数字不可能是2。因为：
   2.1 如果A是骑士，那只能有一个无赖，2就不是事实；
   2.2 如果A是无赖，那恰好有两个无赖，2就是事实。
3. 所以B在说谎。
4. 结论：C是骑士。

这个问题已经得到解答。但是，假如我们还想知道究竟A说的是什么，有可能确定吗？

结论：无法确定

利用大模型求解逻辑问题

Prompt: 背景 + "请问A是骑士还是无赖?" → **回答:** 骑士 → **Prompt:** "可以确定A的身份吗?" → **回答:** 无法确定

Prompt: 背景 + "可以确定A的身份吗?" → **回答:** 无法确定

Gemini

Prompt: 背景 + "请问A是骑士还是无赖?" → **回答:** 骑士 → **Prompt:** "可以确定A的身份吗?" → **回答:** 骑士

Gemini

Prompt: 背景 + "可以确定A的身份吗?" → **回答:** 无法确定

Prompt: 背景 + "请问A是骑士还是无赖?" → **回答:** 无法确定

Prompt: 背景 + "可以确定A的身份吗?" → **回答:** 无法确定

逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

若直接询问：岛上是否有金矿？

金矿	岛民身份	岛上是否有金矿？
有	骑士	Yes
有	无赖	No
无	骑士	No
无	无赖	Yes

结论：通过简单询问，无法得知答案

逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问1：你是骑士并且岛上有金矿，或者你是无赖且岛上没有金矿，是吗？

金矿	岛民身份	……，是吗？
有	骑士	Yes
有	无赖	Yes
无	骑士	No
无	无赖	No

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问1：你是骑士并且岛上有金矿，或者你是无赖且岛上没有金矿，是吗？

定义：
- K：你是骑士（True = 骑士，False = 无赖）
- G：岛上有金矿（True = 有，False = 无）
- P：$P = (K \land G) \lor (\neg K \land \neg G)$

K	G	K ∧ G	¬K ∧ ¬G	P	真实答案	实际回答
T	T	T	F	T	Yes	Yes（骑士说真）
T	F	F	F	F	No	No（骑士说真）
F	T	F	F	F	No	Yes（无赖说谎）
F	F	F	T	T	Yes	No（无赖说谎）

逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问2：你是骑士当且仅当岛上有金矿，是吗？

金矿	岛民身份	……，是吗？
有	骑士	Yes
有	无赖	Yes
无	骑士	No
无	无赖	No

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问3：你是属于会说岛上有金矿的那类人，是吗？

金矿	岛民身份	……，是吗？
有	骑士	Yes
有	无赖	Yes
无	骑士	No
无	无赖	No

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

例1.3.11

有一逻辑学家误入某部落，被拘于劳狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

“今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名战士负责解答你所提的任何问题。唯可虑者，此两战士中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。”

逻辑学家沉思片刻，即向一战士发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

解：

逻辑能够从容离去吗？

逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说：“这扇门是自由门，他(指另一名战士)将回答‘对’，对吗？”

当被问战士回答“对”，则逻辑学家开启另一扇门从容离去。

当被问的战士回答“错”，则逻辑

容离去

P：被问战士是诚实人；

S：这扇门是自由门。

R：另一名战士的回答是“对”

Q：被问战士的回答是“对”

P	S	R	Q
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1