# 离 散 数 学

--数理逻辑

2025年10月12日 星期日

# 数理逻辑

数理逻辑是用数学方法研究思维形式的逻辑结构及其规律的学科；

主要研究内容是推理，特别着重于推理过程是否正确；

不是研究某个特定的语句是否正确，而是着重于语句之间的关系。

主要研究方法是采用数学的方法来研究数学推理、数学性质和数学基础；

数学方法就是引进一套符号体系的方法，所以数理逻辑又叫符号逻辑（Symbolic Logic）。

# 总结

什么是数理逻辑 ？

用数学的方法来研究推理的规律统称为数理逻辑。

为什么要研究数理逻辑？

程序＝算法＋数据

算法＝逻辑＋控制

# 数理逻辑

主要研究内容

## 命题逻辑

命题的基本概念

命题联结词

命题公式

命题的范式

## 谓词逻辑

谓词的基本概念

谓词公式

公式的标准型

## 推理与证明技术

命题逻辑推理理论

谓词逻辑推理理论

数学归纳法

按定义证明法

# 第1章　命题逻辑

命题逻辑也称命题演算，或语句逻辑。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系，研究什么是命题？如何表示命题？如何由一组前提推导一些结论？

命题逻辑的特征：

在研究逻辑的形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的命题成份为止，不再分析下去。不把一个简单命题再分析为非命题的集合，不把谓词和量词等非命题成份分析出来。

# 1.1 内容提要

1 命题基本概念

2 命题联结词

3 命题公式

4 命题范式

# 1.2 命题与命题联结词

## 1.2.1 命题

真假含义

定义1.2.1　具有确切真值的陈述句称为命题，该命题可以取一个“值”，称为真值。

真值只有“真”和“假”两种，分别用“T”（或“1”）和“F”（或“0”）表示。

# 例1.2.1

| | | |
|---|---|---|
| 1. | 太阳是圆的； | T |
| 2. | 武汉是一个旅游城市； | T |
| 3. | 北京是中国的首都； | T |
| 4. | 1＋1＝10； | T/F |
| 5. | 我喜欢踢足球； | T/F |
| 6. | 3能被2整除； | F |
| 7. | 地球外的星球上也有人； | T/F |
| 8. | 中国是世界上人口最多的国家； | T |
| 9. | 今天是晴天； | F |
| 10. | x +y＞O ； | 非命题 |

# 例1.2.1(续)

12. 把门关上； 非命题

13. 出去！ 非命题

14. 你要出去吗？ 非命题

15. 今天天气真好啊！ 非命题

16. 本语句是假的。 非命题

悖论

1. 说谎者悖论：一个克里特人说：“所有克里特人都是说谎者。”
2. 理发师悖论：某村庄有一位理发师，他立下规定：“我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。”
3. 绞刑悖论：有一位法官告诉囚犯：“你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。”

# 悖论

## 1. 说谎者悖论

- 一个克里特人说："所有克里特人都是说谎者。"

## 2. 理发师悖论

- 某村庄有一位理发师，他立下规定："我只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子。"

## 3. 绞刑悖论

- 有一位法官告诉囚犯："你将在下周的一天中午被绞刑，但具体哪一天要等到那天中午才宣布。并且在你被宣布之前，你不能事先知道是哪一天。"

# 例1.2.2

1. 湖北不是一个国家；
2. 3既是素数又是奇数；
3. 张谦是大学生或是运动员；
4. 如果周末天气晴朗，则我们将到郊外旅游；
5. 2+2=4当且仅当雪是白的。

# 命题的分类

一般来说，命题可分两种类型：

原子命题(简单命题)：不能再分解为更为简单命题的命题。

复合命题：可以分解为更为简单命题的命题。而且这些简单命题之间是通过如“或者”、“并且”、“不”、“如果...则...”、“当且仅当”等这样的关联词和标点符号复合而构成一个复合命题。

# 例1.2.3

1. 今天天气很冷。
2. 今天天气很冷并且刮风。
3. 今天天气很冷并且刮风，但室内暖和。

通常用**大写的带或不带下标的英文字母**A、B、C、...P、Q、R、... $A_i$、$B_i$、$C_i$、...$P_i$、$Q_i$、$R_i$、...等表示命题

# 1.2.2 命题联结词

定义1.2.2　设P是任一命题，复合命题“非P”（或“P的否定”）称为P的否定式(Negation)，记作¬P，“¬”为否定联结词。¬P为真当且仅当P为假。

若　　P：湖北是一个国家。

则　　¬P：湖北不是一个国家。

| P | ¬P |
| --- | --- |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# 合取联结词

定义1.2.3 设P、Q是任两个命题，复合命题“P并且Q”（或“P和Q”）称为P与Q的合取式(Conjunction)，记作$P \wedge Q$，“$\wedge$”为合取联结词。

$P \wedge Q$为真当且仅当P，Q同为真。

若　P：3是素数；　Q：3是奇数。

则　$P \wedge Q$：3既是素数又是奇数。

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# 析取联结词

**定义1.2.4** 设P、Q是任两个命题，复合命题“P或者Q”称为P与Q的**析取式**(Disjunction)，记作$P \vee Q$，“$\vee$”为**析取联结词**。

$P \vee Q$为真当且仅当P，Q中至少一个为真。

若　　P：张谦是大学生；　Q：张谦是运动员。

则　　$P \vee Q$：张谦是大学生或是运动员。

张三是一班或二班的学生。

| P | Q | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# 蕴涵联结词

**定义1.2.5** 设P、Q是任两个命题，复合命题“如果P，则Q”称为P与Q的蕴涵式(Implication)，记作P→Q，“→”称为蕴涵联结词，P称为蕴涵式的前件，Q称为蕴涵式的后件。

若P：周末天气晴朗；Q：我们将到郊外旅游。

则P→Q：如果周末天气晴朗，则我们将郊外旅游。

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# 等价联结词

定义1.2.6　设P、Q是任两个命题，复合命题“P当且仅当Q”称为P与Q的等价式(Equivalence)，记作P↔Q，“↔”称为等价联结词。

P↔Q为真当且仅当P、Q同为真假。

若　P：2+2=4；Q：雪是白的。

则　P↔Q：2+2=4当且仅当雪是白的。

| P | Q | P ↔ Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# 总结

| 联结词 | 记号 | 复合命题 | 记法 | 读法 | 真值结果 |
|---|---|---|---|---|---|
| 否定 | ┐ | A是不对的 | ┐A | 非A | ┐A为真当且仅当A为假 |
| 合取 | ∧ | A并且B | A∧B | A合取B | A∧B为真当且仅当A,B同为真 |
| 析取 | ∨ | A或者B | A∨B | A析取B | A∨B为真当且仅当A,B中至少一个为真 |
| 蕴涵 | → | 若A，则B | A→B | A蕴涵B | A→B为假当且仅当A为真B为假 |
| 等价 | ↔ | A当且仅当B | A↔B | A等价于B | A↔B为真当且仅当A,B同为真假 |

# 说明

1、联结词是句子与句子之间的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等的联结；

2、联结词是两个句子真值之间的联结，而非句子的具体含义的联结，两个句子之间可以无任何的内在联系；

# 说明

3、联结词与自然语言之间的对应并非一一对应；

（1）合取联结词“∧”对应了自然语言的 “既…又…”、 “不仅…而且…”、 “虽然…但是…”、 “并且”、 “和”、 “与”等；

（2）蕴涵联结词“→”，“P→Q”对应了自然语言中的“如P则Q”、 “只要P就Q”、 “P仅当Q”、 “只有Q才P”、 “除非Q否则¬P”等；

（3）等价联结词“↔”对应了自然语言中的“等价”、 “当且仅当”、 “充分必要”等；

（4）析取联结词“∨”对应的是相容（可兼）的或。

设P：四川是人口最多的省份。

设P：王超是一个思想品德好的学生；

设P：教室的灯不亮可能是灯管坏了

设P：周末天气晴朗；

Q：学院将组织我们到石像湖春游。

设P：两个三角形全等；

Q：三角形的三条边全部相等。

则命题（5）可表示为$P \leftrightarrow Q$。

（5）两个三角形全等**当且仅当**三角形的三条边全部相等。

# 约 定

为了不使句子产生混淆，作如下约定，命题联结词之优先级如下：

1. 否定→合取→析取→蕴涵→等价
2. 同级的联结词，按其出现的先后次序（从左到右）
3. 若运算要求与优先次序不一致时，可使用括号；同级符号相邻时，也可使用括号。括号中的运算为最高优先级。

# 例1.2.5

设命题　　P：明天上午七点下雨；

Q：明天上午七点下雪；

R：我将去学校

$((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\wedge R$

$\rightarrow R$

$Q)\rightarrow R$

1. 如果……七点不是雨夹雪，则我将去学校

$(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge \ldots)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg \ldots\wedge\neg Q\wedge R)$

$R$

2. 如……学……

3. 如果明天上午七点下雨或下雪，则我将不去学校

4. 明天上午七点我将雨雪无阻一定去学校

# 例1.2.6

设命题 P：你陪伴我；

Q：你代我叫车子；

R：我将出去。

$R \rightarrow (P \vee Q)$

或 $\neg(P \vee Q) \rightarrow \neg R$

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

$(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$

符号化下述语句：

(1). 除非你陪伴我或代我叫车子，否则我将不出去

(2). 如果你陪伴我并且代我叫辆车子，则我将出去

(3). 如果你不陪伴我或不代我叫辆车子，我将不出去

## 1.2.3　联结词理解难点

（1）联结词“¬ ”是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象；

（2）联结词“∧”是自然语言中的“并且”、“既…又…”、“但”、“和”等的逻辑抽象；

（3）联结词“∨”是自然语言中的“或”、“或者”等逻辑抽象；但“或”有“可兼或”、“不可兼或”二种，如：

张明明天早上9点乘飞机到北京或者到上海(不可兼或)

我喜欢学习或喜欢音乐(可兼或)。

# 联结词理解难点

（4）联结词“→”是自然语言中的“如果…，则…”，“若…，才能…”、“除非…，否则…”等的逻辑抽象。主要描述方法有：

（1）因为P 所以Q；

（2）只要P 就 Q；

（3）P 仅当 Q；

（4）只有Q，才P；

（5）除非Q，才P；

（6）除非Q，否则非P；

（7）没有Q，就没有P。

# 联结词理解难点(续1)

如：设 P：雪是白色的；　　Q：2+2=4。

将下列命题符号化：

① 因为雪是白色的，所以2+2=4；　$P \rightarrow Q$

② 如果2+2=4，则雪是白色的；　$Q \rightarrow P$

③ 只有雪是白色的，才有2+2=4；　$Q \rightarrow P$

④ 只有2+2=4，雪才是白色的；　$P \rightarrow Q$

⑤ 只要雪不是白色的，就有2+2=4；$\neg P \rightarrow Q$

⑥ 除非雪是白色的，否则2+2≠4；　$\neg P \rightarrow \neg Q$或$Q \rightarrow P$

⑦ 雪是白色的当且仅当2+2=4；　$P \leftrightarrow Q$

# 联结词理解难点(续2)

在自然语言中，前件为假，不管结论真假，整个语句的意义，往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件P为假时，不管Q的真假如何，则P→Q都为真。此时称为“**善意推定**”；这里要特别提醒一下“→”的含义，在自然语言中，条件式中前提和结论间必含有某种因果关系，但在数理逻辑中可以允许**两者无必然因果关系**，也就是说**并不要求前件和后件有什么么联系**；

# 联结词理解难点(续3)

（5）双条件联结词“$\leftrightarrow$”是自然语言中的“充分必要条件”、“当且仅当”等的逻辑抽象；

（6）联结词连接的是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各原子命题的真值，而与它们的内容、含义无关，与联结次所连接的两原子命题之间是否有关系无关；

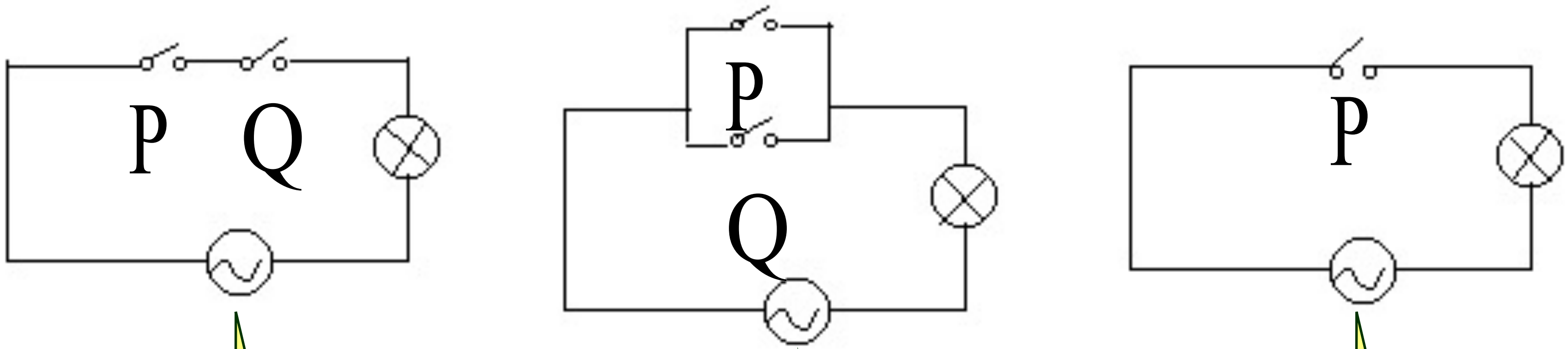
# 联结词理解难点(续4)

（7）联结词“∧”、“∨”、“↔”具有对称性，而联结词“¬”、“→”没有；

（8）联结词“∧”、“∨”、“¬”同构成计算机的与门、或门和非门电路是相对应的，从而命题逻辑是计算机硬件电路的表示、分析和设计的重要工具。

# 1.2.4 命题联结词的应用

**例 1.2.7** 用复合命题表示如下图所示的开关电路：




设： A：开关P闭合； B：开关Q闭合。

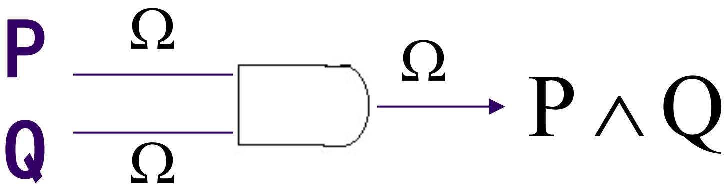
A∧B

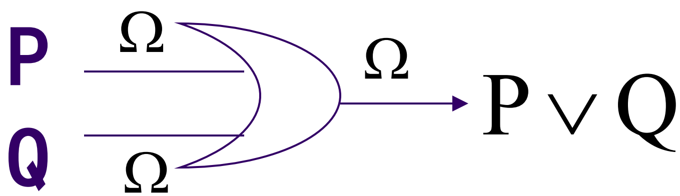
A∨B

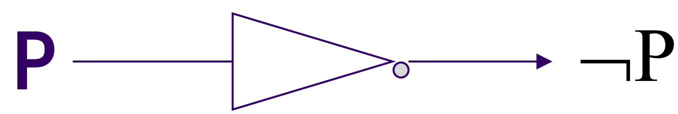
A

# 例 1.2.8

用复合命题表示如下图所示的逻辑电路：




**解**：设P：输入端P为高电位，Q：输入端Q为高电位，

则　　“与门”　对应于　$P \wedge Q$

　　　“或门”　对应于　$P \vee Q$

　　　“非门”　对应于　P

# 1.3 命题公式、解释与真值表

**定义1.3.1** 一个特定的命题是一个**常值命题**，它不是具有值“T”（“1”），就是具有值“F”（“0”）。

一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为**命题变量**(或**命题变元**)，该命题变量无具体的真值，它的变域是集合{T，F}(或{0，1})

当原子命题是命题变元时，此复合命题也即为命题变元的“函数”，且该“函数”的值仍为“真”或“假”值，这样的函数可形象地称为“**真值函数**”，或称为**命题公式**，此命题公式没有确切真值。

## 1.3.1 命题公式

（P∧Q∧），（P→Q）→

等是非命题公式。

**定义1.3.2（命题公式）**

1. 命题变元本身是一个公式；
2. 如G是公式，则(¬G)也是公式；
3. 如G，H是公式，则(G∧H)、(G∨H)、(G→H)、(G↔H)也是公式；

命题公式是仅由有限步使用规则1-3后产生的结果。

该公式常用符号G、H、…等表示。

基础

归纳

等价式
双条件式

合取式

析取式

蕴含式
条件式

# 约定

1. 对于公式中最外层的括号，常可省略。如$(\neg G)$可写成$\neg G$，$(G \rightarrow H)$可写成$G \rightarrow H$。但必须指出这仅仅是一种约定，把程序输入计算机时，括号是不可随意省略的；
2. 否定联结词“¬”只作用于邻接后的原子命题变元，如可把$(\neg G) \vee H$写成是$\neg G \vee H$。
3. 相同联结词按其出现的先后次序，括号可以省略；
4. 五种逻辑联结词的优先级按如下次序递减：

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

# 例

**例1.3.1 符号串：**

$$((P\wedge(Q\vee R))\rightarrow(Q\wedge((\neg S)\vee R)));$$

$$((\neg P)\wedge Q);\quad (P\rightarrow(\neg(P\wedge Q)));$$

$$(((P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q))\leftrightarrow(P\rightarrow R))。$$

等都是命题公式。

**例1.3.2 符号串：**

$$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q);\quad (P\rightarrow Q;$$

$$(\neg P\vee Q\vee(R;\quad P\vee Q\vee。$$

等都不是合法的命题公式。

# 例1.3.3

P：今天天气晴朗，Q：老陈不来，

试

P：你陪伴我； Q：你代我叫车子；R：我出去。

则有：(R …… ∧(¬Q))→(¬R))

P：a是偶数，

Q：b是偶数，

R：a+b是偶数，

则有：((P∧Q)→R)

P

Q

R：我

S：我们要为祖国四化建设而奋斗

则有：(((P∧Q)∧R)∧S)

①

② 除非 …… 去；

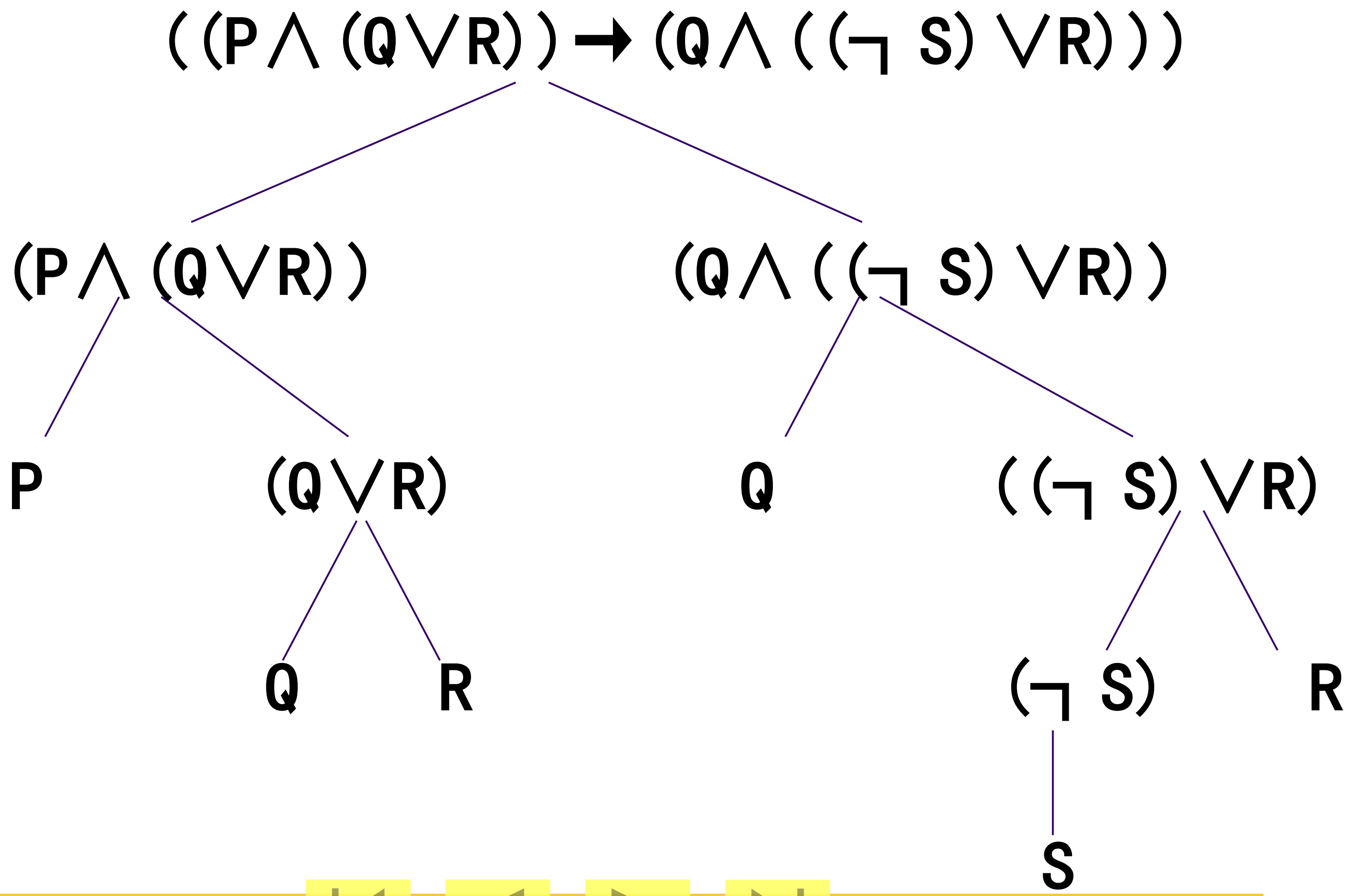
③ 停机

④ 若a

⑤ 我们要做到身体好、学习好、工作好，为祖国四化建设而奋斗。

# 例1.3.4

公式$((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R)))$可表示如下：



# 1.3.2 公式的解释与真值表

定义1.3.3 设$P_1$、$P_2$、…、$P_n$是出现在公式G中的所有命题变元，指定$P_1$、$P_2$、…、$P_n$一组真值，则这组真值称为G的一个解释,常记为 I 。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有$2^n$个不同的解释。

如果公式G在解释 I 下是真的，则称 I 满足G；如果G在解释 I 下是假的，则称 I 弄假G。

定义1.3.4 将公式G在其所有可能解释下的真值情况列成的表，称为G的真值表。

# 例1.3.5

求下面公式的真值表：

$$G = (P \rightarrow ((\neg P \leftrightarrow Q) \wedge R)) \vee Q$$

其中，P、Q、R是G的所有命题变元。

| P Q R | ¬P | ¬P↔Q | (¬P↔Q)∧R | P→((¬P↔Q)∧R) | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# 例1.3.5（续）

进一步化简为：

| P | Q | R | $(P\rightarrow((\neg P\leftrightarrow Q)\wedge R))\vee Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 例1.3.6

求下面这组公式的真值表：

$G_1 = \neg(P \to Q) \to P$；

$G_2 = (P \to Q) \wedge P$；

$G_3 = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$。

| P Q | $\neg(P \to Q) \to P$ | $(P \to Q) \wedge P$ | $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 | 0 |

# 结论

从这三个真值表可以看到一个非常有趣的事实：

- 公式$G_1$对所有可能的解释具有“真”值
- 公式$G_3$对所有可能的解释均具有“假”值
- 公式$G_2$则具有“真”和“假”值

# 定义1.3.5

- 公式G称为**永真公式**(**重言式**)，如果在它的**所有解释**之下都为“**真**”。
- 公式G称为**永假公式**(**矛盾式**)，如果在它的**所有解释**之下都为“**假**”。
- 公式G称为**可满足的**，如果它**不是永假**的。

# 结论

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

① 永真式G的否定¬G是矛盾式；矛盾式G的否定¬G是永真式。

② 永真式一定是可满足式，可满足式不一定是永真式

③ 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)

④ 如果公式G在解释I下是真的，则称I满足G；如果G在解释I下是假的，则称I弄假于G。

# 例1.3.7

写出下列公式的真值表，并验证其公式是重言式、矛盾式、可满足公式。

（1）$G_1 = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$；

（2）$G_2 = (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg (P \to Q) \lor \neg (Q \to P))$；

（3）$G_3 = (P \to \neg Q) \lor \neg Q$。

## 解：

三个公式的真值表如下：

| P Q | $(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$ | $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P))$ | $(P\rightarrow\neg Q)\vee\neg Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 | 1 | 0 | 0 |

永真公式
可满足公式

永假公式

可满足公式

# 分析公式（1）

若将（$P \rightarrow Q$）$\leftrightarrow$（$\neg P \vee Q$）看成两个公式，分别令：

$G = P \rightarrow Q$，　　$H = \neg P \vee Q$。

则 $G \leftrightarrow H$ 是一个永真公式，即这两个公式对任何解释都必同为真假，此时，说 G 和 H 相等，记为 $G = H$。

**定义1.3.6** 设G、H是公式，如果在任意解释 I 下，G与H的真值相同，则称公式G、H是**等价的**，记作 $G = H$。

# 定理1.3.1

公式G、H等价的充分必要条件是公式$G\leftrightarrow H$是永真公式

证明: "$\Rightarrow$"假定G，H等价，则G，H在其任意解释I下或同为真或同为假，于是由"$\leftrightarrow$"的意义知，$G\leftrightarrow H$在其任何的解释I下，其真值为"真"，即$G\leftrightarrow H$为永真公式。

"$\Leftarrow$"假定公式$G\leftrightarrow H$是永真公式，I是它的任意解释，在I下，$G\leftrightarrow H$为真，因此，G、H或同为真，或同为假，由于I的任意性，故有$G=H$。

# “＝” 与“↔”的区别

首先，双条件词“↔”是一种逻辑联结词，公式G↔H是命题公式，其中“↔”是一种逻辑运算，G↔H的结果仍是一个命题公式。而逻辑等价“＝”则是描述了两个公式G与H之间的一种逻辑等价关系，G＝H表示“命题公式G等价于命题公式H”，G＝H 的结果不是命题公式。

其次，如果要求用计算机来判断命题公式G、H是否逻辑等价，即G＝H那是办不到的，然而计算机却可“计算”公式G↔H是否是永真公式。

## “=”的性质

由于“=”不是一个联结词，而是一种关系，为此，这种关系具有如下三个性质：

（1）自反性　　G=G；

（2）对称性　　若G=H，则H=G；

（3）传递性　　若G=H，H=S，则G=S。

这三条性质体现了“=”的实质含义。

# 1.3.4 命题公式的基本等价关系

**例1.3.5** 证明公式$G_1=(P\leftrightarrow Q)$与公式$G_2=(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$之间是逻辑等价的。

**解：** 根据定理1.3.1，只需判定公式$G_3=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$为永真公式。

| P Q | $G_3=(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$ |
|---|---|
| 0 0 | 1 1 1 1 1 |
| 0 1 | 0 1 1 0 0 |
| 1 0 | 0 1 0 0 1 |
| 1 1 | 1 1 1 1 1 |

# 基本等价公式

设G，H，S是任何的公式，则：

1） $E_1$: $G\vee(H\vee S)=(G\vee H)\vee S$ （结合律）

$E_2$: $G\wedge(H\wedge S)=(G\wedge H)\wedge S$

2） $E_3$: $G\vee H=H\vee G$ （交换律）

$E_4$: $G\wedge H=H\wedge G$

3） $E_5$: $G\vee G=G$ （幂等律）

$E_6$: $G\wedge G=G$

4） $E_7$: $G\vee(G\wedge H)=G$ （吸收律）

$E_8$: $G\wedge(G\vee H)=G$

# 基本等价公式（续）

5） $E_9$: $G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ （分配律）

$E_{10}$: $G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)$

6） $E_{11}$: $G \vee 0 = G$ （同一律）

$E_{12}$: $G \wedge 1 = G$

7） $E_{13}$: $G \vee 1 = 1$ （零律）

$E_{14}$: $G \wedge 0 = 0$

8） $E_{15}$: $G \vee \neg G = 1$ （排中律）

9） $E_{16}$: $G \wedge \neg G = 0$ （矛盾律）

# 基本等价公式（续）

10) $E_{17}$：$\neg(\neg G) = G$　　（双重否定律）

11) $E_{18}$：$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$　　（De MoRGan定律）

$E_{19}$：$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H$

12) $E_{20}$：$(G \leftrightarrow H) = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$　　（等价式）

13) $E_{21}$：$(G \rightarrow H) = (\neg G \vee H)$　　（蕴涵式）

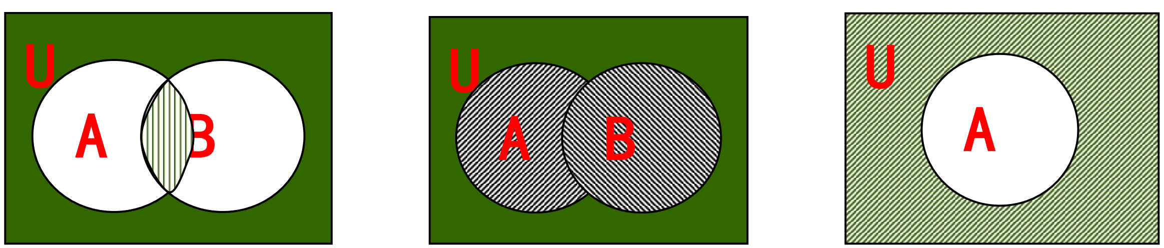
14) $E_{22}$：$G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$　　（假言易位）

15) $E_{23}$：$G \leftrightarrow H = \neg G \leftrightarrow \neg H$　　（等价否定等式）

16) $E_{24}$：$(G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$　　（归谬论）

# 命题与集合之间的关系

韦恩图是将G，H理解为某总体论域上的子集合，而规定$G \wedge H$为两集合的公共部分（交集合），$G \vee H$为两集合的全部（并集合），$\neg G$为总体论域（如矩形域）中G的补集，将命题中的真值“1”理解为集合中的总体论域（全集），将命题中的真值“0”理解为集合中的空集，则有：




$G \wedge H$　　$G \vee H$　　$\neg G$

# 定理1.3.2(代入定理)

设$G(P_1,P_2,\cdots,P_n)$是一个命题公式，其中：$P_1$、$P_2$、…、$P_n$是命题变元，$G_1(P_1,P_2,\cdots,P_n)$、$G_2(P_1,P_2,\cdots,P_n)$、. . . . 、$G_n(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为任意的命题公式，分别用$G_1$、$G_2$…、$G_n$取代G中的$P_1$、$P_2$、…、$P_n$后得到新的命题公式：$G(G_1,G_2,\cdots,G_n) = G'(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

若G是永真公式（或永假公式），则G'也是一个永真公式（或永假公式）。

# 例1.3.6

设G(P，Q)＝(P∧(P→Q))→Q，证明公式G是一个永真公式。另有两个任意公式：

$$H(P, Q) = (P \vee \neg Q);$$

$$S(P, Q) = (P \leftrightarrow Q)。$$

进一步验证代入定理的正确性。

**解** 建立公式G的真值表如右所示。可见为永真公式。

| P Q | $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ |
|---|---|
| 0 0 | 1 |
| 0 1 | 1 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 1 |

# 例1.3.6（续）

将H，S代入到G中分别取代G中的命题变元P、Q，所得到的公式G'为：

$$G'(P, Q) = G(H, S) = (H \wedge (H \rightarrow S)) \rightarrow S$$

$$= ((P \vee \neg Q) \wedge ((P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

建立新公式G'(P, Q)的真值表，代入定理符合。

| P | Q | $((P \vee \neg Q) \wedge ((P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 1 1 1 1 1 1 1 0 |
| 0 | 1 | 0 0 0 0 0 1 0 1 0 |
| 1 | 0 | 1 1 0 1 1 0 0 1 0 |
| 1 | 1 | 1 0 1 1 0 1 1 1 1 |

# 定理1.3.3(替换定理)

设$G_1$是G的子公式(即 $G_1$是公式G的一部分)，$H_1$是任意的命题公式，在G中凡出现$G_1$处都以$H_1$替换后得到新的命题公式H，若$G_1$＝$H_1$，则G＝H。

利用24个基本等价公式及代入定理和替换定理，可完成公式的转化和等价判定。

# 例1.3.7

利用基本的等价关系，完成如下工作：

（1）判断公式的类型：

证明 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是一个永真公式。

（2）证明公式之间的等价关系：

证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$

（3）化简公式：

证明 $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee ((Q \wedge R) \vee (P \wedge R)) = R$

## 证明

(1) $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))$

$\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))$

$\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge((P\vee Q)\wedge(P\vee R)))$

$\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

$=T$

即: $((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee$

$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$为永真公式;

# 证明(续)

（2） $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R=(P\wedge Q)\rightarrow R$

即有：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$；

（3） $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$

$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R$

$=T\wedge R=R$

即有：$(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\wedge R)\vee(P\wedge R))=R$。

# 1.3.5 命题公式的难点

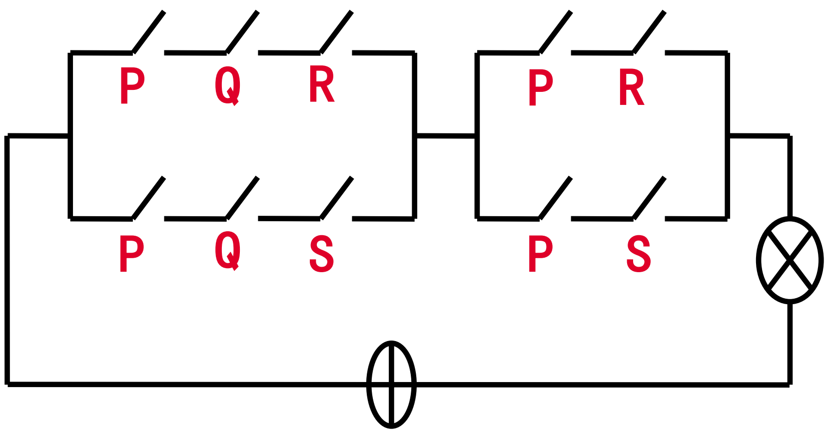
1. 命题公式和命题不同，它是一个公式，无具体的真值可言，只有当给予公式中的每个命题变元以具体的真值指派，公式才有具体的真值；
2. 命题公式之间的等价联结词“$\leftrightarrow$”和等价关系“＝”之间是两个完全不同的概念，前者是一种运算，后者是一种关系，两个公式之间，通过联结词“$\leftrightarrow$”的运算以后，仍然是一个命题公式，但等价关系“＝”只能将一个命题公式转化成与之等价的另一个命题公式，“＝”是不可计算的；

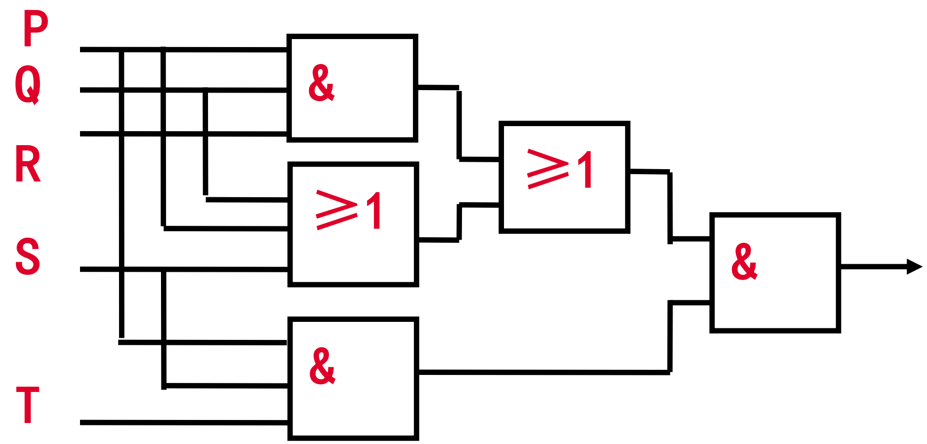
# 命题公式的难点

3. 对于24个基本的等价公式，如果将运算“¬”、“∧”、“∨”分别对应于集合中的运算“‾”、“∩”、“∪”，真值“1”、“0”分别对应于集合中的全集“U”和空集“Φ”，则集合中的19个基本的等价公式对应于命题的公式$E_1$到$E_{19}$，$E_{20}$到$E_{24}$是命题逻辑中所特有的公式，重点要求记住$E_{20}$和$E_{21}$。
4. 只有熟练地掌握这24个基本的等价公式，并且对联结词“∧”、“∨”注意用括号来标识其优先级别，才能正确地加以应用。

## 1.3.6 命题公式的应用

**例1.3.8** 利用基本的等价关系，化简下列电路图




**解：上述电路图可描述为：**

（1）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

（2）$((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

# 例1.3.8

利用21个基本等价关系，化简公式(1)、(2)可得：

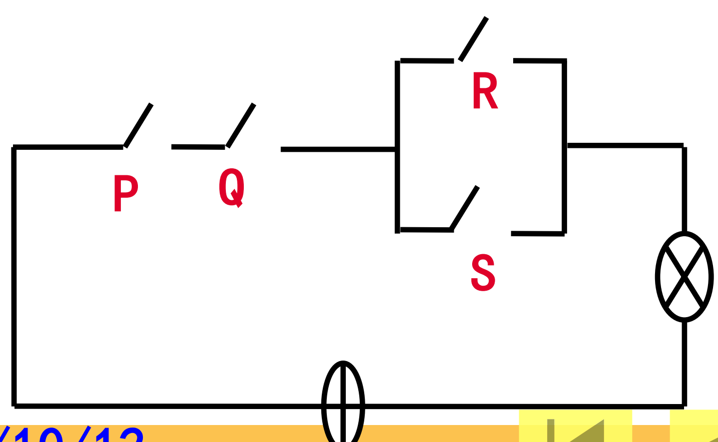
(1) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge S))\wedge((P\wedge R)\vee(P\wedge S))$

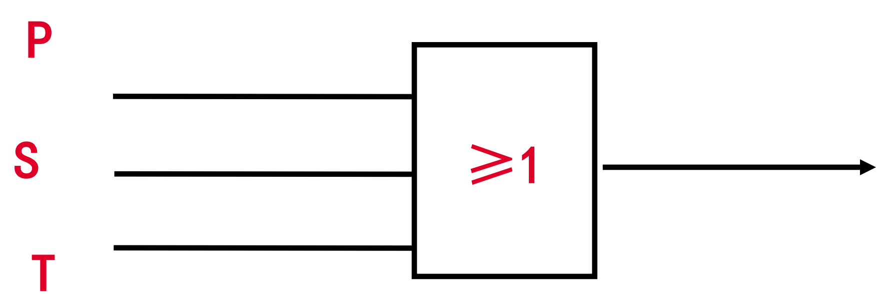
$= ((P\wedge Q\wedge(R\vee S))\wedge(P\wedge(R\vee S))$

$= P\wedge Q\wedge(R\vee S)$；

(2) $((P\wedge Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee S))\wedge(P\wedge S\wedge T)$

$= (P\vee Q\vee S)\wedge(P\wedge S\wedge T) = P\wedge S\wedge T$。

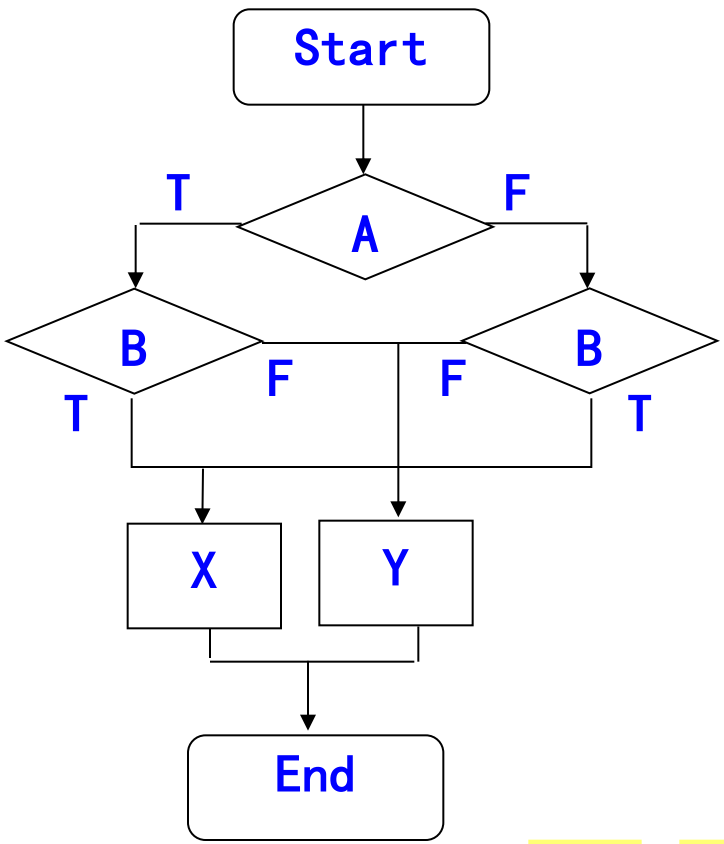


# 例1.3.9

将下面程序语言进行化简。

If A then if B then X else Y else if B then X else Y




**解：执行X的条件为：**

$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge B)$

**执行Y的条件为：**

$(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

# 例1.3.9(续)

执行X的条件可化简为：

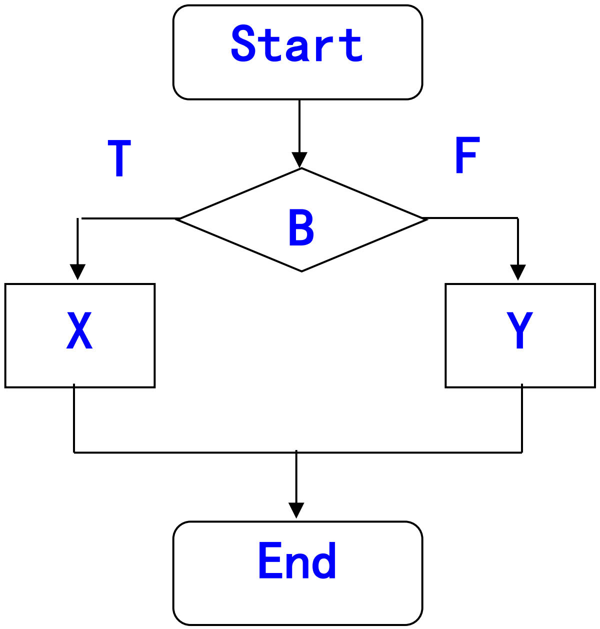
$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

$= B \wedge (A \vee \neg A) = B$

执行Y的条件可化简为：

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$= \neg B \wedge (A \vee \neg A) = \neg B$




程序可简化为：If B then X else Y

# 例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题1：

逻辑学家遇到岛中三人A, B 和 C。

问A: “你是骑士还是无赖?” A 虽作答，但是听不清说了什么。又问B: “A说了什么？” B回答: “他说他是无赖。” 这时C说: “B在撒谎。”

请问C是骑士还是无赖?

# 一个很可能的思考过程

假设 1. A或者是骑士(只说真话)，或者是无赖(只说假话)，二者必居其一。

穷举
2. 假如A是骑士，他不可能说自己是无赖，因为那不是事实。
3. 假如A是无赖，也同样不可能说自己是无赖，因为那是真话。

反证 4. 所以，A说的话不可能是“我是无赖”。
5. 因此，B说的不是事实，他必然是无赖。
6. 因此，C说的是事实。
7. 结论：C是骑士。

A可以是任何人，所以实际上到这里我们就知道这个岛上不会有任何人说自己是无赖。

这个问题太简单，C没说话就可以判定B是无赖。

# 例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题2：

逻辑学家遇到岛中两人A 和 B。

A声称：“我们两个都是无赖。”

请问A 和 B各是哪种人?

A是无赖，B是骑士

# 例 1.3.10 一个奇怪岛上的逻辑问题

有一逻辑学家误入某岛，该岛上只有骑士和无赖两种人，骑士总是说真话，无赖总是说假话。

推理问题3：
逻辑学家遇到岛中三人A, B 和 C。

问A：“你们三人中有几个是无赖?” A 虽作答，但是听不清说了什么。又问B：“A说了什么？” B回答：“他说有两个人是无赖。”
这时C说：“B在撒谎。”

请问C是骑士还是无赖?

# B和C有一个是无赖

1. B和C说的话恰好相反，因此它们的身份必定相反。
2. A说的数字不可能是2。因为：
   2.1 如果A是骑士，那只能有一个无赖，2就不是事实；
   2.2 如果A是无赖，那恰好有两个无赖，2就是事实。
3. 所以B在说谎。
4. 结论：C是骑士。

这个问题已经得到解答。但是，假如我们还想知道究竟A说的是什么，有可能确定吗？

结论：无法确定

# 利用大模型求解逻辑问题

**Prompt:** 背景＋“请问A是骑士还是无赖?” → **回答:** 骑士 → **Prompt:** “可以确定A的身份吗?” → **回答:** 无法确定

**Prompt:** 背景＋“可以确定A的身份吗?” → **回答:** 无法确定

Gemini

**Prompt:** 背景＋“请问A是骑士还是无赖?” → **回答:** 骑士 → **Prompt:** “可以确定A的身份吗?” → **回答:** 骑士

Gemini

**Prompt:** 背景＋“可以确定A的身份吗?” → **回答:** 无法确定

**Prompt:** 背景＋“请问A是骑士还是无赖?” → **回答:** 无法确定

**Prompt:** 背景＋“可以确定A的身份吗?” → **回答:** 无法确定

# 逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

若直接询问：岛上是否有金矿？

| 金矿 | 岛民身份 | 岛上是否有金矿？ |
|---|---|---|
| 有 | 骑士 | Yes |
| 有 | 无赖 | No |
| 无 | 骑士 | No |
| 无 | 无赖 | Yes |

结论：通过简单询问，无法得知答案

# 逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问1：你是骑士并且岛上有金矿，或者你是无赖且岛上没有金矿，是吗？

| 金矿 | 岛民身份 | ……，是吗？ |
|---|---|---|
| 有 | 骑士 | Yes |
| 有 | 无赖 | Yes |
| 无 | 骑士 | No |
| 无 | 无赖 | No |

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

# 逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问1：你是骑士并且岛上有金矿，或者你是无赖且岛上没有金矿，是吗？

定义：

- K：你是骑士（True = 骑士，False = 无赖）
- G：岛上有金矿（True = 有，False = 无）
- P：$P = (K \wedge G) \vee (\neg K \wedge \neg G)$

| K | G | K ∧ G | ¬K ∧ ¬G | P | 真实答案 | 实际回答 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | Yes | Yes（骑士说真） |
| T | F | F | F | F | No | No（骑士说真） |
| F | T | F | F | F | No | Yes（无赖说谎） |
| F | F | F | T | T | Yes | No（无赖说谎） |

# 逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问2：你是骑士当且仅当岛上有金矿，是吗？

| 金矿 | 岛民身份 | ……，是吗？ |
| --- | --- | --- |
| 有 | 骑士 | Yes |
| 有 | 无赖 | Yes |
| 无 | 骑士 | No |
| 无 | 无赖 | No |

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

# 逻辑不仅关乎结果，也能帮你提问

逻辑学家听说岛上有金矿，他打算问一个偶遇的岛民，但却无法判断该岛民是骑士还是无赖。他该如何提问才有意义呢？问题的答案只能是“yes”或“no”。

询问3：你是属于会说岛上有金矿的那类人，是吗？

| 金矿 | 岛民身份 | ……，是吗？ |
|---|---|---|
| 有 | 骑士 | Yes |
| 有 | 无赖 | Yes |
| 无 | 骑士 | No |
| 无 | 无赖 | No |

结论：通过以上询问，可以基于Yes确定有金矿，根据回答的No确定没有金矿

# 例1.3.11

有一逻辑学家误入某部落，被拘于劳狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：

“今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名战士负责解答你所提的任何问题。唯可虑者，此两战士中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。”

逻辑学家沉思片刻，即向一战士发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

# 解：

**逻辑能够从容离去吗？**

逻辑学家手指一门问身旁的一名战士说：“这扇门是自由门，他(指另一名战士)将回答‘对’，对吗？”

当被问战士回答“对”，则逻辑学家开启另一扇门从容离去。

当被问的战士回答“错”，则逻辑……

……容离去

P：被问战士是诚实人；

S：这扇门是自由门。

R：另一名战士的回答是“对”

Q：被问战士的回答是“对”

| P | S | R | Q |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

# 例1.3.12

一家航空公司，为了保证安全，用计算机复核飞行计划。每台计算机能给出飞行计划正确或有误的回答。由于计算机也有可能发生故障，因此采用三台计算机同时复核。由所给答案，再根据“少数服从多数”的原则作出判断，试将结果用命题公式表示，并加以简化，画出电路图。

# 解：

设$C_1$，$C_2$，$C_3$分别表示三台计算机的答案。

S表示判断结果。

则根据真值表，利用联结词的定义，S可用$C_1$，$C_2$，$C_3$所对应的命题公式表示出来，同时可画出该命题公式所对应的电路图。

**真值表**

| $C_1$ $C_2$ $C_3$ | S |
|---|---|
| 0 0 0 | 0 |
| 0 0 1 | 0 |
| 0 1 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | 1 |

# 解：（续）

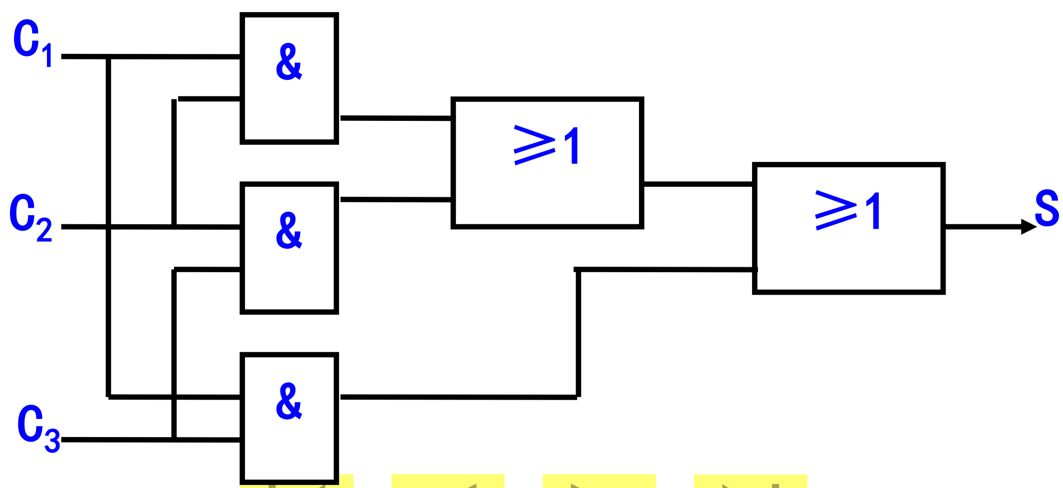
$$S = (\neg C_1 \wedge C_2 \wedge C_3) \vee (C_1 \wedge \neg C_2 \wedge C_3)$$

$$\vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \neg C_3) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge C_3)$$

$$= ((C_1 \vee \neg C_1) \wedge C_2 \wedge C_3) \vee (C_1 \wedge (C_2 \vee \neg C_2) \wedge C_3)$$

$$\vee (C_1 \wedge C_2 \wedge (C_3 \vee \neg C_3))$$

$$= (C_2 \wedge C_3) \vee (C_1 \wedge C_3) \vee (C_1 \wedge C_2)$$



# 1.4　公式的标准型——范式

## 1.4.1　析取范式和合取范式

**定义1.4.1**

（1）命题变元或命题变元的否定称为文字

（2）有限个文字的析取称为析取范式(也称为子句）

（3）有限个文字的合取称为合取范式(也称为短语）

（4）P与$\neg$ P称为互补对。

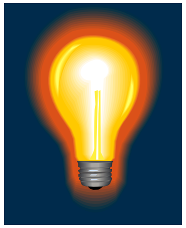
# 例子

（1） P、¬P 是文字；

（2） P∨Q∨R 是子句；

（3） P∧Q∧R 是短语。

¬ P是一个子句，这种说法正确么？



一个命题变元或者其否定既可以是简单的子句，也可以是简单的短语。

因此，P，¬P 不但是文字，也是子句、短语

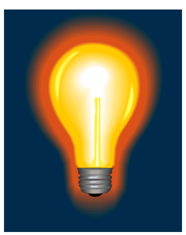
# 定义1.4.2

（1）有限个短语的析取式称为**析取范式**

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

（2）有限个子句的合取式称为**合取范式**

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$



一个不含最外层括号的短语（子句）也可以是析取范式（合取范式）。

# 例子

1. P、¬P是子句、短语、析取范式、合取范式；
2. P∨Q∨¬R是子句、析取范式、合取范式，
   (P∨Q∨ ¬R)仅是子句、合取范式；
3. ¬P∧Q∧R是短语、析取范式、合取范式，
   (P∧Q∧R)仅是短语、析取范式；
4. (P∧Q)∨(¬P∧Q)是析取范式；
5. (P∨Q)∧(¬P∨Q)是合取范式；
6. 句子P∨(Q∨¬R)、¬(Q∨R)既不是析取范式也不是合取范式

# 总结

1. 单个的文字是子句、短语、析取范式，合取范式
2. 单个的子句是合取范式；
3. 单个的短语是析取范式；
4. 若单个的子句（短语）无最外层括号，则是合取范式（析取范式）；
5. 析取范式、合取范式仅含联结词集{¬，∧，∨}；
6. “¬”联结词仅出现在命题变元前。

# 范式的求解方法

**定理1.4.1** 对于任意命题公式，都存在与其等价的析取范式和合取范式。

**转换方法：**

（1）利用等价公式中的等价式和蕴涵式将公式中的→、↔用联结词¬ 、∧、∨来取代，这可利用如下等价关系：

$$(G \to H) = (\neg G \vee H);$$

$$(G \leftrightarrow H) = (G \to H) \wedge (H \to G)$$

$$= (\neg G \vee H) \wedge (\neg H \vee G)。$$

# 范式的求解方法(续)

（2）重复使用德•摩根定律将否定号移到各个命题变元的前端，并消去多余的否定号，这可利用如下等价关系：$\neg(\neg G) = G$；

$$\neg(G \vee H) = \neg G \wedge \neg H;$$

$$\neg(G \wedge H) = \neg G \vee \neg H。$$

（3）重复利用分配定律，可将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取，这可利用如下等价关系：$G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$；

$$G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S)。$$

# 例1.4.1

求公式：$(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$ 的析取范式和合取范式

**解** $(P\rightarrow\neg Q)\vee(P\leftrightarrow R)$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee((\neg P\vee R)\wedge(\neg R\vee P))$

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg P\vee R)$

$\wedge((\neg P\vee\neg Q)\vee(\neg R\vee P))$

合取范式

$=(\neg P\vee\neg Q\vee\neg P\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee P)$

$=(\neg P\vee\neg Q\vee R)$ ——合取范式

$=\neg P\vee\neg Q\vee R$ ——析取范式

# 范式的不唯一性

考虑公式：

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R),$$

其与之等价的析取范式：

$$P \vee (Q \wedge R);$$

$$(P \wedge P) \vee (Q \wedge R);$$

$$P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R);$$

$$P \vee (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)。$$

这种不唯一的表达形式给研究问题带来了不便。

## 1.4.2 主析取范式和主合取范式

### 1. 极小项和极大项

定义 1.4.3　在含有n个命题变元$P_1$、$P_2$、$P_3$、…、$P_n$的短语或子句中，若每个命题变元与其否定不同时存在，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称此短语或子句为关于$P_1$、$P_2$、$P_3$、…、$P_n$的一个极小项或极大项。

对于n个命题变元，可构成$2^n$个极小项和$2^n$个极大项

# 例子

（1）一个命题变元P，对应的

极小项有两项：P、¬ P；

极大项有两项：P、¬ P。

（2）两个命题变元P、Q，对应的

极小项有四项：

$P \wedge Q$、$\neg P \wedge Q$、$P \wedge \neg Q$、$\neg P \wedge \neg Q$；

极大项有四项：

$P \vee Q$、$\neg P \vee Q$、$P \vee \neg Q$、$\neg P \vee \neg Q$。

# 例子（续）

（3）三个命题变元P、Q、R，对应的

极小项有八项：

$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$

$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$、$\neg P\wedge Q\wedge R$、$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$

$P\wedge\neg Q\wedge R$、$P\wedge Q\wedge\neg R$、$P\wedge Q\wedge R$；

极大项有八项：

$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$、$\neg P\vee\neg Q\vee R$

$\neg P\vee Q\vee\neg R$、$\neg P\vee Q\vee R$、$P\vee\neg Q\vee\neg R$

$P\vee\neg Q\vee R$、$P\vee Q\vee\neg R$、$P\vee Q\vee R$。

# 两个命题变元的所对应极小项真值表

| P Q | ┐P∧┐Q | ┐P∧Q | P∧┐Q | P∧Q |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ¬P ∧¬Q | → | {0、0}为真 | → | {0 0} | → | $m_{00}$ ($m_0$) |
| ¬P ∧ Q | → | {0、1}为真 | → | {0 1} | → | $m_{01}$ ($m_1$) |
| P ∧ ¬Q | → | {1、0}为真 | → | {1 0} | → | $m_{10}$ ($m_2$) |
| P ∧ Q | → | {1、1}为真 | → | {1 1} | → | $m_{11}$ ($m_3$) |

# 两个命题变元的所对应极大项真值表

| P Q | $\neg P \vee \neg Q$ | $\neg P \vee Q$ | $P \vee \neg Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P \vee Q$ | → | {0、0}为假 | → | {0 0} | → | $M_{00}$ ($M_0$) |
| $P \vee \neg Q$ | → | {0、1}为假 | → | {0 1} | → | $M_{01}$ ($M_1$) |
| $\neg P \vee Q$ | → | {1、0}为假 | → | {1 0} | → | $M_{10}$ ($M_2$) |
| $\neg P \vee \neg Q$ | → | {1、1}为假 | → | {1 1} | → | $M_{11}$ ($M_3$) |

# 三个命题变元的极小项和极大项

| P | Q | R | 极小项 | 极大项 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $m_0=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ | $M_0=P\vee Q\vee R$ |
| 0 | 0 | 1 | $m_1=\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ | $M_1=P\vee Q\vee\neg R$ |
| 0 | 1 | 0 | $m_2=\neg P\wedge Q\wedge\neg R$ | $M_2=P\vee\neg Q\vee R$ |
| 0 | 1 | 1 | $m_3=\neg P\wedge Q\wedge R$ | $M_3=P\vee\neg Q\vee\neg R$ |
| 1 | 0 | 0 | $m_4=P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ | $M_4=\neg P\vee Q\vee R$ |
| 1 | 0 | 1 | $m_5=P\wedge\neg Q\wedge R$ | $M_5=\neg P\vee Q\vee\neg R$ |
| 1 | 1 | 0 | $m_6=P\wedge Q\wedge\neg R$ | $M_6=\neg P\vee\neg Q\vee R$ |
| 1 | 1 | 1 | $m_7=P\wedge Q\wedge R$ | $M_7=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$ |

# 极小项和极大项的性质

| | |
|---|---|
| 任意两个不同极小项的合取必为假； | $m_i \wedge m_j = F, \quad i \neq j$ |
| 任意两个不同极大项的析取必为真； | $M_i \vee M_j = T, \quad i \neq j$ |
| 极大项的否定是极小项； | $\neg M_i = m_i$ |
| 极小项的否定是极大项； | $M_i = \neg m_i$ |
| 所有极小项的析取为永真公式； | $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$ |
| 所有极大项的合取是永假公式。 | $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$ |

## 2　主析取范式和主合取范式

**定义1.4.4**

① 在给定的析取范式中，每一个短语都是极小项，则称该范式为主析取范式　$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

② 在给定的合取范式中，每一个子句都是极大项，则称该范式为主合取范式　$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

③ 如果一个主析取范式不包含任何极小项，则称该主析取范式为“空”；如果一个主合取范式不包含任何极大项，则称主合取范式为“空”。

## 定理1.4.2

任何一个公式都有与之等价的主析取范式和主合取范式。

证明：（1）利用定理1.4.1先求出该公式所对应的析取范式和合取范式；

（2）在析取范式的短语和合取范式的子句中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次；

（3）去掉析取范式中所有永假式的短语和合取范式中所有永真式的子句，即去掉含有形如$P \wedge \neg P$子公式的短语和含有形如$P \vee \neg P$子公式的子句；

# 证明（续1）

（4）若析取范式的某一个短语中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式：

$$(P \vee \neg P) \wedge Q = Q$$

将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的短语，此时得到的短语将是标准的极小项；

若合取范式的某一个子句中缺少该命题公式中所规定的命题变元，则可用公式：

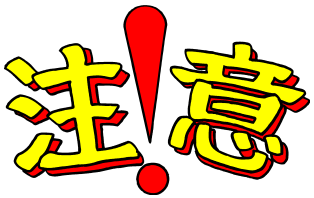
$$(P \wedge \neg P) \vee Q = Q$$

将命题变元P补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的子句，此时得到的子句将是标准的极大项；

# 证明（续2）

（5）利用等幂律将相同的极小项和极大项合并，同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

# 需要说明




求任何一个公式的主析取范式和主合取范式不仅要取决于该公式，而且取决于该公式所包含的命题变元。

如公式：

$G_1(P, Q) = (P \rightarrow Q) \wedge Q$,

$G_2(P, Q, R) = (P \rightarrow Q) \wedge Q$。

前者是依赖于两个命题变元的，后者应依赖于三个命题变元。

# 3　求主析取范式和主合取范式的方法

主范式

公式转换法

利用基本等价公式进行变换（证明见定理1.4.2）

真值表技术

对公式的真值结果进行分解，分解成等价的极小项的析取或者极大项的合取

# 例1.4.2

利用等价公式转换法求公式$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)$的主析取范式和主合取范式 。

**解** （1）求主析取范式

$$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\wedge R)=\neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge R)$$

$$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge R) \qquad \text{——析取范式}$$

$$=(P\wedge\neg Q\wedge(R\vee\neg R))\vee((P\vee\neg P)\wedge Q\wedge R)$$

$$=(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$$

$$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R) \qquad \text{——主析取范式}$$

# 例1.4.2（续）

（2）求主合取范式

$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \wedge R) = (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$

$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$

$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ ——合取范式

$= (P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \wedge$

$((P \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee R)$

$= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

我们已经学会使用公式转换法，那么，用真值表技术又如何求解主范式呢？

# 如何用极小项来构成主析取范式？

| P | Q | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | P→Q | 备 注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $m_0$必须包含在主析取范式中 |
| 0 | 1 | | | | | | 必须包含在析取范式中 |
| 1 | 0 | | | | | | 定不能包含主析取范式中 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $m_3$必须包含在主析取范式中 |

主析取范式中必须且只能包含使得公式真值为真的那些解释对应的极小项。

# 如何用极大项来构成主合取范式?

| P | Q | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $P\leftrightarrow Q$ | 备　　注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $M_0$一定不能包含在主合取范式中 |
| 0 | 1 | | | | | | 必须包含在 合取范式中 |
| 1 | 0 | | | | | | 必须包含在 合取范式中 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $M_3$一定不能包含在主合取范式中 |

主合取范式中必须且只能包含使得公式真值为假的那些解释对应的极大项。

# 真值表技术

① 列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为真的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极小项，将这些极小项进行析取即可得到相应的主析取范式。

② 列出公式对应的真值表，选出公式的真值结果为假的所有的行，在这样的每一行中，找到其每一个解释所对应的极大项，将这些极大项进行合取即可得到相应的主合取范式。

# 例1.4.4

利用真值表技术求公式$G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R$的主析取范式和主合取范式。

| P Q R | $P \rightarrow Q$ | $\neg(P \rightarrow Q)$ | $\neg(P \rightarrow Q) \vee R$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 0 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 1 1 | 1 | 0 | 1 |

# 例1.4.4(续1)

（1）求主析取范式

找出真值表中其真值为真的行：

2. 0 0 1； 4. 0 1 1；

5. 1 0 0； 6. 1 0 1；

8. 1 1 1。

这些行所对应的极小项分别为：

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$， $\neg P \wedge Q \wedge R$， $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$，

$P \wedge \neg Q \wedge R$， $P \wedge Q \wedge R$。

# 例1.4.4(续2)

将这些极小项进行析取即为该公式G的主析取范式。

$$G = \neg(P \rightarrow Q) \vee R$$

$$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee$$

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

# 例1.4.4(续3)

（2）求主合取范式

找出真值表中其真值为假的行：

1．0 0 0；3．0 1 0；7．1 1 0。

这些行所对应的极大项分别为：

$P\vee Q\vee R$、$P\vee \neg Q\vee R$、$\neg P\vee \neg Q\vee R$

将这些极大项进行合取即为该公式G的主合取范式：

$G=(P\rightarrow Q)\vee R$

$=(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

# 4 主析取范式和主合取范式之间的转换

（1）已知公式G的主析取范式，求公式G的主合取范式

（a）求¬G的主析取范式，即G的主析取范式中没有出现过的极小项的析取，若

$$G=\bigvee_{i=1}^{k} m_{l_i}$$

为G的主析取范式，则

$$\neg G=\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}$$

为¬G的主析取范式。

其中，$m_{j_i}$($i$=1，2，…，$2^n-k$)是 $m_i$($i$=0,1,2,…,$2^n-1$)中去掉 $m_{l_i}$($i=1,2,\ldots,k$)后剩下的极小项。

# 主析取范式⇒主合取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主合取范式。

即

$$G = \neg\neg G = \neg\left(\bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}\right) = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} \neg m_{j_i} = \bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i}$$

为G的主合取范式。

# 主合取范式⇒主析取范式

（2）已知公式G的主合取范式，求公式G的主析取范式

（a）求¬G的主合取范式，即G的主合取范式中没有出现过的极大项的合取，若

$$\mathrm{G}=\bigwedge_{i=1}^{k} M_{l_i}$$

为G的主合取范式，则

$$\neg\mathrm{G}=\bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i}$$

为¬G的主合取范式。

其中，$m_{j_i}$（i=1,2,…,$2^n$−k）是$M_i$(i=0，1，2,…,$2^n$−1)中去掉$m_{l_i}$（i=1，2,…,k)后剩下的极大项。

# 主合取范式⇒主析取范式

（b）G=¬(¬G)即是G的主析取范式。

即，

$$G = \neg\neg G = \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{2^n-k} M_{j_i}\right) = \bigvee_{i=1}^{2^n-k} \neg M_{j_i} = \bigvee_{i=1}^{2^n-k} m_{j_i}$$

为G 的主析取范式。

# 例1.4.5

设 $G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$，求其对应的主析取范式和主合取范式。

解　$G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$

$=(P\wedge Q\wedge(R\vee\neg R))\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q)\wedge R)$

$\vee(P\vee\neg P)\wedge\neg Q\wedge\neg R)$,

$=(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$=m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6\vee m_7$ ———主析取范式

# 例1.4.5（续）

$\neg G = m_2 \vee m_5$

$G = \neg\neg G = \neg(m_2 \vee m_5) = \neg m_2 \wedge \neg m_5 = M_2 \wedge M_5$

$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

——主合取范式

## 1.4.3 范式中的难点

1. 如何正确的理解范式定义中的“有限个文字”、“有限个短语”、“有限个子句”的概念是很关键的，“有限个”∈N={0，1，2，…，n，…}；
2. 使用真值表技术求主范式时注意正确地建立真值表，正确地掌握真值解释还原成子句和短语的方法；
3. 使用公式转换法求主范式时，需要增加某一个命题变元，此时注意关于该变元的永真公式和永假公式的正确加入，同时注意公式的正确化简；
4. 利用主析取求主合取或者利用主合取求主析取时，注意是“G”的主析取范式的否定或“G”的主合取范式的否定，而非直接是G的否定。