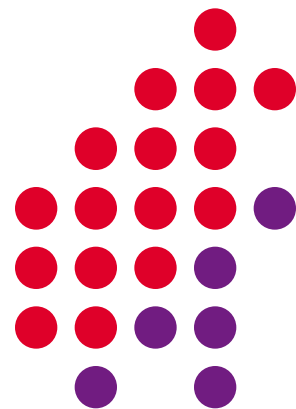


# 离散数学

--数理逻辑



2025年10月21日 星期二

## 第2章 谓词逻辑



命题逻辑能够解决的问题是有**局限性的**。只能进行**命题间关系**的推理，无法解决与**命题的结构和成分**有关的推理问题。

例如（**著名的苏格拉底三段论**）

- （1）所有的人都是要死的；
- （2）苏格拉底是人。
- （3）苏格拉底是要死的。

# 苏格拉底三段论

---

P: 所有的人都是要死的;

Q: 苏格拉底是人。

R: 所以, 苏格拉底是要死的。

可见, P, Q, R为不同的命题, 无法体现三者相互之间的联系。

问题在于这类推理中, 各命题之间的逻辑关系不是体现在原子命题之间, 而是体现在构成原子命题的内部成分之间。对此, 命题逻辑将无能为力。

## 2.1 本章内容

---

- 1 谓词逻辑中的基本概念
- 2 谓词的翻译原理
- 3 谓词的合式公式
- 4 谓词的标准型-范式

## 2.2 谓词逻辑中的基本概念与表示

命题是具有真假意义的陈述句，从语法上分析，一个陈述句由**主语和谓语**两部分组成。

例如，“**计算机**是现代科学技术必不可少的工具”

若P：是华中科技大学的学生

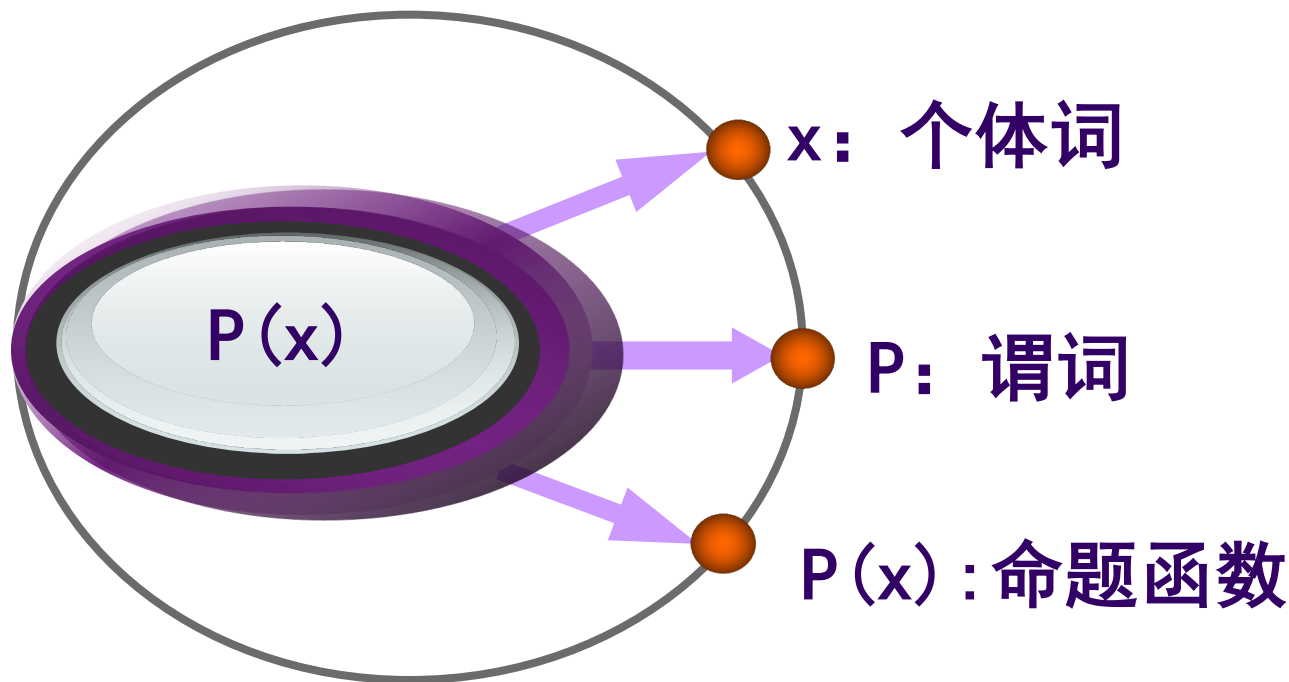
“**陈华**是华中科技大学的学生——P(陈华)

“**张强**是华中科技大学的学生——P(张强)

# 谓词

更一般地，

$P(x)$ ：x是华中科技大学的学生。



# 个体词与谓词

**定义2.2.1** 在原子命题中，可以独立存在的客体（句子中的主语、宾语等），称为**个体词** (Individual)。而用以刻画客体的性质或客体之间的关系即是**谓词** (Predicate)。

**例1** 成都、北京、赵明、20060806班、计算机科学等等仅仅是简单的个体常量；“**是中国的首都**”、“**是计算机的基础课程**”等仅仅是简单的谓词，它们都不能构成完整的句子。

# 个体词的分类

---

- (1) 表示**具体的或特定的**个体词称为**个体常量** (Individual Constant)，一般个体词常量用带或不带下标的小写英文字母 $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$ 等表示；
- (2) 表示**抽象的或泛指**的个体词称为**个体变量** (Individual Variable)，一般用带或不带下标的小写英文字母 $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots$ 等表示。



# 例子

---

**例2** 考察下列句子：

- (1) **北京**是中国的首都；
- (2) **离散数学**是计算机的基础课程；
- (3) **刘翔**是一个跨栏世界冠军；
- (4) **中国人**是很聪明的。

# 个体域

---

## 定义2.2.2

- (1) 个体词的取值范围称为个体域(或论域)(Individual Field)，常用D表示；
- (2) 而宇宙间的所有个体域聚集在一起所构成的个体域称为全总个体域(Universal Individual Field)。

# n元谓词

---

**定义2.2.3** 设 $D$ 为**非空**的个体域，定义在 $D^n$ （表示 $n$ 个个体都在个体域 $D$ 上取值）上取值于 $\{0, 1\}$ 上的 $n$ 元函数，称为 **$n$ 元命题函数**或 **$n$ 元谓词** (Propositional Function)，记为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。此时，个体变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的**定义域**都为 $D$ ， $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的**值域**为 $\{0, 1\}$ 。

## 例2. 2. 1

---

设有如下命题，并用n元谓词进行表示。

P: 王童是一个三好学生；

Q: 李新华是李兰的父亲；

R: 张强与谢莉是好朋友；

S: 武汉位于北京和广州之间。

## 例2.2.1 (续)

P: 王童是一个三好学生;

Q: 李新华是李兰的父亲;

R: 张强与谢莉是好朋友;

S: 武汉位于北京和广州之间

**解** 定义命题函数:

$S(x)$ :  $x$ 是一个三好学生;

$F(x, y)$ :  $x$ 是 $y$ 的父亲;

$T(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 是好朋友;

$B(x, y, z)$ :  $x$ 位于 $y$ 和 $z$ 之间;

用符号表示个体词:

$a$ : 王童;  $b$ : 李新华;

$c$ : 李兰;  $d$ : 张强;

$e$ : 谢莉;  $f$ : 武汉;

$g$ : 北京;  $h$ : 广州。

则命题可表示为:

P:  $S(a)$ ; Q:  $F(b, c)$ ;

R:  $T(d, e)$ ; S:  $B(f, g, h)$ 。

# 结论

---

- (1) 谓词中**个体词的顺序是十分重要的**，不能随意变更。如命题 $F(b, c)$ 为“真”，但命题 $F(c, b)$ 为“假”；
- (2) **一元谓词**用以描述**某一个个体的某种特性**，而 **$n$ 元谓词**则用以描述 **$n$ 个个体之间的关系**。
- (3) **0元谓词** (不含个体词的) 实际上就是一般的命题；

## 结论（续）

---

(4) 具体命题的谓词表示形式和 $n$ 元命题函数( $n$ 元谓词)是不同的,前者是有真值的,而后者不是命题,它的真值是不确定的。如上例中 $S(a)$ 是有真值的,但 $S(x)$ 却没有真值;

(5) 一个 $n$ 元谓词不是一个命题,但将 $n$ 元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后,就成为一个命题。而且,个体变元在不同的个体域中取不同的值对是否成为命题及命题的真值有很大的影响。

## 2.2.2 量词

---

例2.2.2 符号化下述命题：

- (1) 所有的老虎都要吃人；
- (2) 每一个大学生都会说英语；
- (3) 所有的人都长着黑头发；
- (4) 有一些人登上过月球；
- (5) 有一些自然数是素数。



## 例2.2.2(续)

- (1) 所有的老虎都要吃人；
- (2) 每一个大学生都会说英语；
- (3) 所有的人都长着黑头发；
- (4) 有一些人登上过月球；
- (5) 有一些自然数是素数。

**解** 设立如下谓词：

$P(x)$ ： $x$ 会吃人；  $Q(x)$ ： $x$ 会说英语；

$R(x)$ ： $x$ 长着黑头发；  $S(x)$ ： $x$ 登上过月球；

$T(x)$ ： $x$ 是素数。

- 则有：
- |                      |        |                         |
|----------------------|--------|-------------------------|
| (1) <u>所有的</u> $x$ ， | $P(x)$ | $x \in \{\text{老虎}\}；$  |
| (2) <u>每一个</u> $x$ ， | $Q(x)$ | $x \in \{\text{大学生}\}；$ |
| (3) <u>所有的</u> $x$ ， | $R(x)$ | $x \in \{\text{人}\}；$   |
| (4) <u>有一些</u> $x$ ， | $S(x)$ | $x \in \{\text{人}\}；$   |
| (5) <u>有一些</u> $x$ ， | $T(x)$ | $x \in \{\text{自然数}\}。$ |

# 量词含义

---

$(\forall x)$  所有的x;  
任意的x;  
一切的x;  
每一个x; 等等。

$(\exists x)$  有些x;  
至少有一个x;  
某一些x;  
存在x; 等等。

# 全称量词与存在量词

---

**定义 2.2.4** 称  $(\forall x)$  为 **全称量词** (Universal Quantifier)， $(\exists x)$  为 **存在量词** (Existential Quantifier)，其中的  $x$  称为 **作用变量** (Function Variable)。一般将其量词加在其谓词之前，记为  $(\forall x)F(x)$ ， $(\exists x)F(x)$ 。此时， $F(x)$  称为全称量词和存在量词的**辖域** (Scope)。

## 例2. 2. 2 (续)

---

(1)  $(\forall x) P(x)$

$x \in \{\text{老虎}\} ;$

(2)  $(\forall x) Q(x)$

$x \in \{\text{大学生}\} ;$

(3)  $(\forall x) R(x)$

$x \in \{\text{人}\} ;$

(4)  $(\exists x) S(x)$

$x \in \{\text{人}\} ;$

(5)  $(\exists x) T(x)$

$x \in \{\text{自然数}\} .$

## 不便之处

---

- (1) 从书写上十分不便，总要特别注明个体域；
- (2) 在同一个比较复杂的句子中，对于不同命题函数中的个体可能属于不同的个体域，此时无法清晰表达；

如例 (1) 和 (4) 的合取

$$\frac{(\forall x) P(x) \quad (\exists x) R(x)}{x \in \{\text{老虎}\} \quad x \in \{\text{人}\}}$$

## 不便之处(续)

(3) 若个体域的注明不清楚，将造成无法确定其真值。即对于同一个 $n$ 元谓词，不同的个体域有可能带来不同的真值。

例如 对于语句 “ $(\exists x)(x+6 = 5)$ ” 可表示为：“有一些 $x$ ，使得 $x+6 = 5$ ”。该语句在下面两种个体域下有不同的真值：

(a) 在实数范围内时，确有 $x=-1$ 使得 $x+6 = 5$ ，因此， $(\exists x)(x+6 = 5)$ 为“真”；

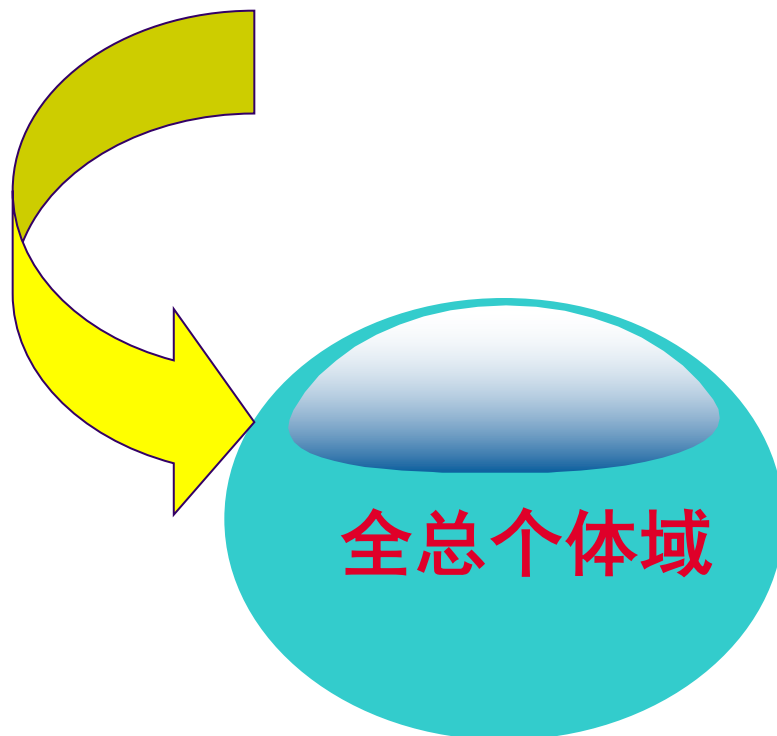
(b) 在正整数范围内时，则找不到任何 $x$ ，使得 $x+6=5$ 为“真”，所以， $(\exists x)(x+6=5)$ 为“假”。

# 不便之处的根源

---



对了，都是因为需要特别标注每个谓词的个体域所致！



# 特性谓词

---

$U(x) : x \text{ 是老虎}$



$x \in \{ \text{老虎} \}$



新的问题出现了， $U(x)$  如何与  $(\forall x) P(x)$  结合才符合逻辑呢？



# 谓词逻辑符号化的两条规则

统一一个体域为**全总个体域**，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元**特性谓词**刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

(1) 对于**全称量词** ( $\forall x$ )，刻划其对应个体域的特性谓词作为**蕴涵式之前件**加入。

(2) 对于**存在量词** ( $\exists x$ )，刻划其对应个体域的特性谓词作为**合取式之合取项**加入。

# 特性谓词的例子



想想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

例如，符号化“所有的老虎都要吃人”这个命题

若  $P(x)$  :  $x$  会吃人  $U(x)$  :  $x$  是老虎

若符号化为  $(\forall x) (U(x) \wedge P(x))$

它的含义是：“对于任意的  $x$ ,  $x$  是老虎，并且  $x$  会吃人”，与原命题“所有的老虎都要吃人”的逻辑含义不符。

## 例2. 2. 3

---

用谓词逻辑符号化下述语句：

- (1) 天下乌鸦一般黑；
- (2) 没有人登上过木星；
- (3) 在美国留学的学生未必都是亚洲人；
- (4) 每个实数都存在比它大的另外的实数；
- (5) 尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明；
- (6) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在着 $\delta > 0$ ，使得对任意的 $x$ ，只要 $|x - a| < \delta$ ，就有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 成立。

## 例2.2.3(续)

---

### (1) 天下乌鸦一般黑

设  $F(x)$ :  $x$ 是乌鸦;  $G(x, y)$ :  $x$ 与 $y$ 一般黑, 则:

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

或者  $\neg (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$ ;

### (2) 没有人登上过木星

设  $H(x)$ :  $x$ 是人;  $M(x)$ :  $x$ 登上过木星, 则:

$$\neg (\exists x)(H(x) \wedge M(x))$$

或者  $(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg M(x))$ ;

## 例2. 2. 3 (续)

---

(3) 在美国留学的学生未必都是亚洲人

设 $A(x)$ ： $x$ 是亚洲人；

$H(x)$ ： $x$ 是在美国留学的学生，则：

$$\neg (\forall x) (H(x) \rightarrow A(x))$$

或者  $(\exists x) (H(x) \wedge \neg A(x))$ ；

(4) 每个实数都存在比它大的另外的实数

设 $R(x)$ ： $x$ 是实数； $L(x, y)$ ： $x$ 小于 $y$ ，则：

$$(\forall x) (R(x) \rightarrow (\exists y) (R(y) \wedge L(x, y)))$$

## 例2. 2. 3 (续)

(5) 尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明

设 $M(x)$ ： $x$ 是人； $C(x)$ ： $x$ 很聪明，则：

$$(\exists x) (M(x) \wedge C(x)) \wedge$$

$$\neg (\forall x) (M(x) \rightarrow C(x)) ;$$

(6) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，必存在着 $\delta > 0$ ，使得对任意的 $x$ ，只要 $|x-a| < \delta$ ，就有 $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ 成立。

设个体域为实数集合，则原命题可符号化为：

$$(\forall \varepsilon) ((\varepsilon > 0) \rightarrow (\exists \delta) ((\delta > 0) \wedge (\forall x) ((|x-a| < \delta) \rightarrow (|f(x)-f(a)| < \varepsilon))))。$$