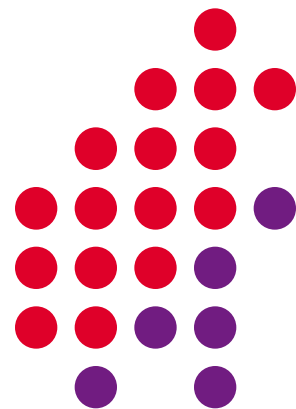


离散数学

--数理逻辑



第三章：推理与证明技术

2025年10月30日星期四

3.1 本章内容

1

命题逻辑的推理理论

2

谓词逻辑的推理理论

3

数学归纳法的使用

4

CP规则相关证明

3.2 命题逻辑的推理理论



认识世界的渐进过程

推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；而产生真实结论的推理过程未必是有效的。**有效的推理**中可能包含为“假”的前提，而**无效的推理**却可能得到为“真”的结论。

所谓**推理有效**，指的是它的结论是它前提的合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

3.2.1 推理的基本概念和推理形式

定义3.2.0 设 G, H 是公式，对任意解释 I ，如果 I 满足 G ，那么 I 满足 H ，则称 H 是 G 的逻辑结果（或称 G 蕴涵 H ），记为 $G \Rightarrow H$ ，此时称 G 为**前提**， H 为**结论**。

判定定理

定理3.2.0 设 G, H 是公式， H 是 G 的逻辑结果当且仅当 $G \rightarrow H$ 为永真公式。

证明：“ \Rightarrow ” 若 $G \Rightarrow H$ ，但 $G \rightarrow H$ 不是永真公式。
于是，必存在一个解释 I ，使得 $G \rightarrow H$ 为假，即在解释 I 下， G 为真，而 H 为假，这与 $G \Rightarrow H$ 矛盾，故 $G \rightarrow H$ 是永真公式。

“ \Leftarrow ” 若 $G \rightarrow H$ 是永真式，但 $G \Rightarrow H$ 不成立，故存在 G, H 的一个解释 I ，使得 G 为真，而 H 为假，从而在解释 I 下， $G \rightarrow H$ 为假，这与 $G \rightarrow H$ 是永真公式矛盾，所以 $G \Rightarrow H$ 。

推广

定义3.2.1 设 G_1, G_2, \dots, G_n, H 是公式，称 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果(G_1, G_2, \dots, G_n 共同蕴涵 H)，当且仅当 H 是 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 的逻辑结果(logic conclusion)。记为 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ ，此时称 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 为有效的(efficacious)，否则称为无效的(inefficacious)。 G_1, G_2, \dots, G_n 称为一组前提(Premise)，有时用集合 Γ 来表示，记 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。 H 称为结论(conclusion)。又称 H 是前提集合 Γ 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

判定定理

定理3.2.1 公式 H 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$ 为永真公式。

证明：略。

“ \Rightarrow ” 与 “ \rightarrow ” 的不同

1. “ \rightarrow ” 仅是一般的蕴涵联结词， $G \rightarrow H$ 的结果仍是一个公式，而 “ \Rightarrow ” 却描述了两个公式 G ， H 之间的一种逻辑蕴涵关系， $G \Rightarrow H$ 的“结果”，是非命题公式；
2. 用计算机来判断 $G \Rightarrow H$ 是办不到的。然而计算机却可“计算”公式 $G \rightarrow H$ 是否为永真公式。

3.2.2 判断有效结论的常用方法

要求

$$\Gamma = \{ G_1, G_2, \dots, G_n \}$$
$$\Gamma \Rightarrow H$$



也就是

$$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$$

为永真公式



因而

真值表技术、演绎法和
间接证明方法

1、真值表技术

设 P_1, P_2, \dots, P_n 是出现在前提 G_1, G_2, \dots, G_n 和结论 H 中的一切命题变元，如果将 P_1, P_2, \dots, P_n 中所有可能的解释及 G_1, G_2, \dots, G_n, H 的对应真值结果都列在一个表中，根据“ \rightarrow ”的定义，则有判断方法如下：

1. 对所有 G_1, G_2, \dots, G_n 都具有真值T的行(表示前提为真的行)，如果在每一个这样的行中， H 也具有真值T，则 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果。
2. 对所有 H 具有真值为F的行(表示结论为假的行)，如果在每一个这样的行中， G_1, G_2, \dots, G_n 中至少有一个公式的真值为F(前提也为假)，则 H 是 G_1, G_2, \dots, G_n 的逻辑结果。

例3. 2. 1

判断下列H是否是前提 G_1, G_2 的逻辑结果

- (1) $H: Q;$ $G_1: P; G_2: P \rightarrow Q;$ 是
(2) $H: \neg P;$ $G_1: P \rightarrow Q; G_2: \neg Q;$ 是
(3) $H: Q;$ $G_1: \neg P; G_2: P \rightarrow Q.$ 否

解

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
(1)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0
(2)				

P	Q	G_1	G_2	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
(3)				

2 推理定律

设 G, H, I, J 是任意的命题公式，则有：

1) $I_1: G \wedge H \Rightarrow G$ (简化规则)

$I_2: G \wedge H \Rightarrow H$

2) $I_3: G \Rightarrow G \vee H$ (添加规则)

$I_4: H \Rightarrow G \vee H$

3) $I_5: \neg G \Rightarrow G \rightarrow H$

$I_6: H \Rightarrow G \rightarrow H$

4) $I_7: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow G$

$I_8: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow \neg H$

5) $I_9: G, H \Rightarrow G \wedge H$

2 推理定律(续)

6) I_{10} : $\neg G, G \vee H \Rightarrow H$ (选言三段论)

I_{11} : $\neg G, G \overline{\vee} H \Rightarrow H$

7) I_{12} : $G, G \rightarrow H \Rightarrow H$ (分离规则)

8) I_{13} : $\neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$ (否定后件式)

9) I_{14} : $G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$ (假言三段论)

10) I_{15} : $G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I$ (二难推论)

例子

1)、前提:

1. 如果明天天晴, 我们准备外出旅游。 $P \rightarrow Q$

2. 明天的确天晴。 P

结论: 我们外出旅游。 Q

可描述为: $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ (分离规则)

2)、前提:

1. 如果一个人是单身汉, 则他不幸福。 $P \rightarrow Q$

2. 如果一个人不幸福, 则他死得早。 $Q \rightarrow R$

结论: 单身汉死得早。 $P \rightarrow R$

可描述为: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ (假言三段论)

例子(续1)

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案当晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提：

1. 凶手为王某或陈某

$P \vee Q$

2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出

$P \rightarrow R$

3. 王某案发之晚并未外出。

$\neg R$

结论：陈某是凶手。

Q

则可描述为： $P \rightarrow R, \neg R \Rightarrow \neg P$

(否定后件式)

$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$

(选言三段论)

例子(续2)

4)、前提:

1. 如果某同学为省二级以上运动员, 则他将被大学录取。 $P \rightarrow R$

2. 如果某同学高考总分在560分以上, 则将被大学录取。 $Q \rightarrow R$

3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。 $P \vee Q$

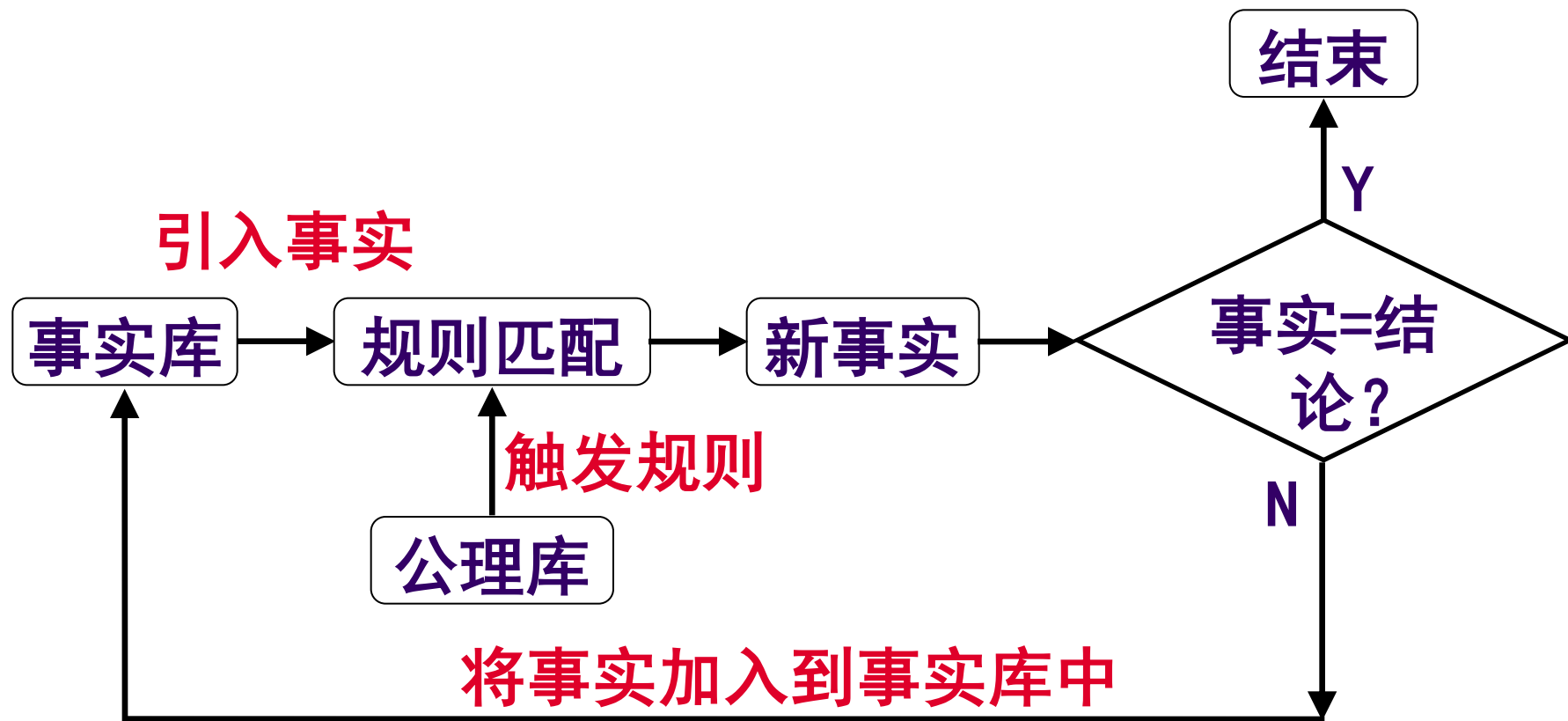
结论: 该同学被大学录取。 R

则上述例子可描述为:

$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$ (二难推论)

3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发, 依据公认的推理规则和推理定律, 推导出一个结论来。



演绎的定义

定义3.2.2

从前提集合 Γ 推出结论 H 的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

其中， H_i 或者是 Γ 中的某个前提，或者是前面的某些 H_j ($j < i$) 的有效结论，并且 H_n 就是 H ，则称公式 H 为该**演绎**的有效结论，或者称从前提 Γ 能够**演绎**出结论 H 来。

推理规则

- ① 规则P（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
- ② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。
- ③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合 Γ 与公式P推导出S，则能从此前提集合 Γ 推导出 $P \rightarrow S$ 。

$(\Gamma \wedge P) \Rightarrow S$ 等价于 $\Gamma \Rightarrow (P \rightarrow S)$,

$(Q \wedge P) \rightarrow S = Q \rightarrow (P \rightarrow S)$

例3. 2. 2

设前提 $\Gamma = \{P \vee Q, P \leftrightarrow R, Q \rightarrow S\}$, $G = S \vee R$ 。证明 $\Gamma \Rightarrow G$ 。

证明1:	(1)	$P \vee Q$	P
	(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T, (1), E
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$\neg P \rightarrow S$	T, (2), (3), I
	(5)	$\neg S \rightarrow P$	T, (4), E
	(6)	$P \leftrightarrow R$	P
	(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T, (6), E
	(8)	$P \rightarrow R$	T, (7), I
	(9)	$\neg S \rightarrow R$	T, (5), (8), I
	(10)	$S \vee R$	T, (9), E

例3. 31 (续)

证明2:	(1)	$\neg S$	P (附加)
	(2)	$Q \rightarrow S$	P
	(3)	$\neg Q$	T, (1), (2), I
	(4)	$P \vee Q$	P
	(5)	P	T, (3), (4), I
	(6)	$P \leftrightarrow R$	P
	(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T, (6), E
	(8)	$P \rightarrow R$	T, (7), I
	(9)	R	T, (5), (8), I
	(10)	$\neg S \rightarrow R$	CP, (1), (9)
	(11)	$S \vee R$	T, (10), E

例3. 2. 3

设 $\Gamma = \{P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q\}$, $G = R \rightarrow S$ 。

证明: $\Gamma \Rightarrow G$ 。

证:	(1)	R	P (附加)
	(2)	$\neg R \vee P$	P
	(3)	P	$T, (1), (2), I$
	(4)	$P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	P
	(5)	$Q \rightarrow S$	$T, (3), (4), I$
	(6)	Q	P
	(7)	S	$T, (5), (6), I$
	(8)	$R \rightarrow S$	$CP, (1), (7)$

4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是**正向推理**。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

$P \Rightarrow Q$ 等价于 $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ，因此，为了间接地证明 $P \Rightarrow Q$ ，可以假设 Q 为假（ $\neg Q$ ），然后证明 P 为假（ $\neg P$ ）。

例3. 2. 4

设 n 是一个整数，证明：如果 n^2 是奇数，那么 n 是奇数。

证明 设 n 是偶数，则 $n=2k$ ，这里 k 是一个整数。
于是有：

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

所以 n^2 是偶数。

因而证明了若 n 是偶数，则 n^2 是偶数，它是已知命题的逆否式。因此，证明了所给的命题。

定义3.2.3

假设 G_1, G_2, \dots, G_n 是一组命题公式， P_1, P_2, \dots, P_n 是出现在其中的一切命题变元，若有解释 I 使 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 取值为“真”，则称公式 G_1, G_2, \dots, G_n

是相容的。若不存在这样的解释，则称该组公式为不相容的。

$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 是矛盾式当且仅当

$$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R,$$

其中， R 可为任意公式， $R \wedge \neg R$ 为一矛盾式。

间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$$

定理3.2.2 设命题公式集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 是一致的，于是从前提集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 出发可以逻辑地推出公式H的充要条件是从前提集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H\}$ 出发，可以逻辑地推出一个**矛盾（永假）**式来。

例3. 2. 5

证明不存在有理数 P/q 其平方为2，即证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证明 对某两个整数 P 和 q ，假设 $(P/q)^2=2$ 成立，并且 P 和 q 没有公因子。如果原来选择的 P 、 q 具有公因子，则可以用与它相等的无公因子的 P 、 q 来取代它。

于是 $P^2=2q^2$ ，所以 P^2 是偶数，这就推出 P 是偶数，因为一个奇数的平方是奇数。

因此存在某个整数 n 使得 $P=2n$ 成立。

例3. 2. 5 (续)

因此

$$2q^2 = P^2 = (2n)^2 = 4n^2,$$

即有 $q^2 = 2n^2$ ，所以 q^2 是偶数，从而 q 是偶数，于是得到 P 和 q 都是偶数，故它们有一个公因子2，这与假设相矛盾。

因此结论成立。