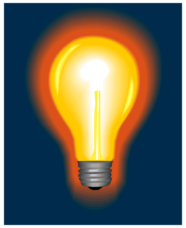
离 散 数 学

--数理逻辑

2025年10月28日星期二

第2章　谓词逻辑



命题逻辑能够解决的问题是有局限性的。只能进行命题间关系的推理，无法解决与命题的结构和成分有关的推理问题。

例如(著名的苏格拉底三段论)

（1）所有的人都是要死的；

（2）苏格拉底是人。

（3）苏格拉底是要死的。

苏格拉底三段论

P：所有的人都是要死的；

Q：苏格拉底是人。

R：所以，苏格拉底是要死的。

可见，P，Q，R为不同的命题，无法体现三者相互之间的联系。

问题在于这类推理中，各命题之间的逻辑关系不是体现在原子命题之间，而是体现在构成原子命题的内部成分之间。对此，命题逻辑将无能为力。

2.1 本章内容

1 谓词逻辑中的基本概念

2 谓词的翻译原理

3 谓词的合式公式

4 谓词的标准型-范式

2.2 谓词逻辑中的基本概念与表示

命题是具有真假意义的陈述句，从语法上分析，一个陈述句由**主语和谓语**两部分组成。

例如，“**计算机**是现代科学技术必不可少的工具”

若Ｐ：是华中科技大学的学生

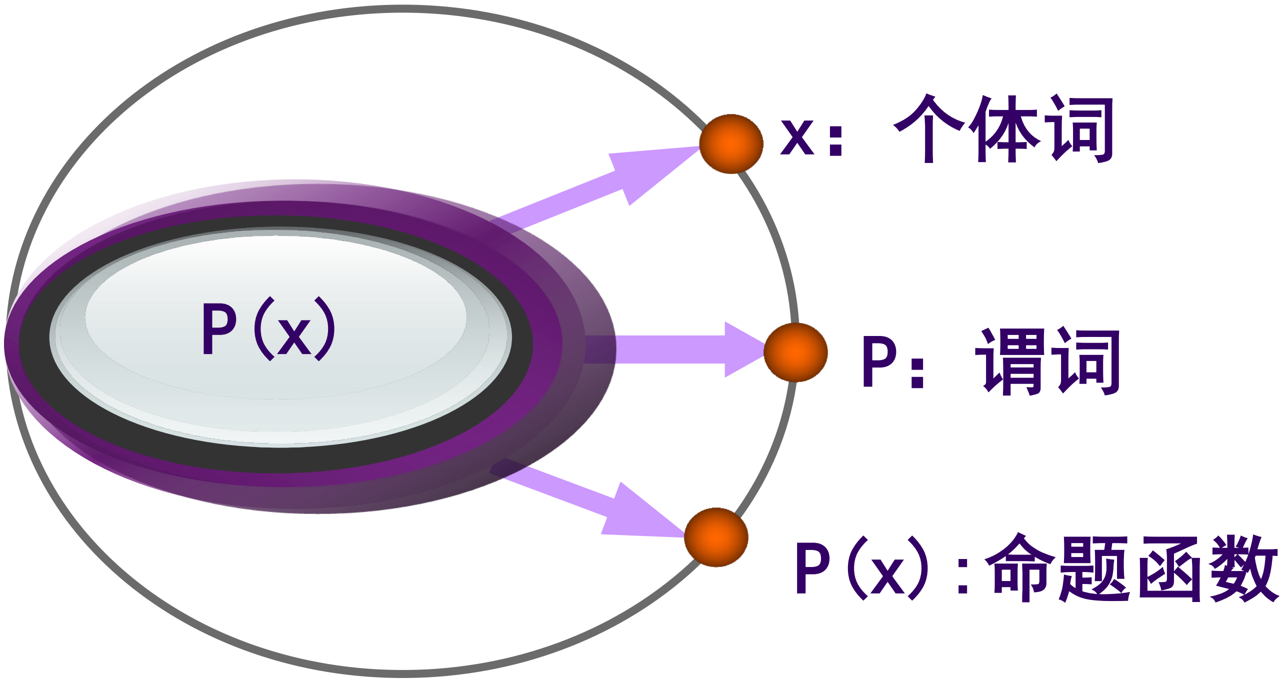
“陈华是华中科技大学的学生--P(陈华)

“张强是华中科技大学的学生--P(张强)

谓词

更一般地，

P(x)：x是华中科技大学的学生。



个体词与谓词

定义2.2.1　　在原子命题中，可以独立存在的客体（句子中的主语、宾语等），称为个体词(Individual)。而用以刻划客体的性质或客体之间的关系即是谓词(Predicate)。

例1　成都、北京、赵明、20060806班、计算机科学等等仅仅是简单的个体常量；“是中国的首都”、“是计算机的基础课程”等仅仅是简单的谓词，它们都不能构成完整的句子。

个体词的分类

（1）表示具体的或特定的个体词称为个体常量(Individual Constant)，一般个体词常量用带或不带下标的小写英文字母a，b，c，…，a_1，b_1，c_1,…等表示；

（2）表示抽象的或泛指的个体词称为个体变量(Individual Variable)，一般用带或不带下标的小写英文字母x，y，z，…，x_1，y_1，z_1，…等表示。

例子

例2　考察下列句子：

（1）北京是中国的首都；

（2）离散数学是计算机的基础课程；

（3）刘翔是一个跨栏世界冠军；

（4）中国人是很聪明的。

个体域

定义2.2.2

（1）个体词的取值范围称为个体域(或论域)(Individual Field)，常用D表示；

（2）而宇宙间的所有个体域聚集在一起所构成的个体域称为全总个体域(Universal Individual Field)。

n元谓词

定义2.2.3 设D为**非空的**个体域，定义在D^n(表示n个个体都在个体域D上取值)上取值于{0,1}上的n元函数，称为**n元命题函数**或**n元谓词**(Propositional Function)，记为$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。此时，个体变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的**定义域**都为D，$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的**值域**为{0, 1}。

例2.2.1

设有如下命题，并用n元谓词进行表示。

P：王童是一个三好学生；

Q：李新华是李兰的父亲；

R：张强与谢莉是好朋友；

S：武汉位于北京和广州之间。

例2.2.1（续）

P：王童是一个三好学生；　Q：李新华是李兰的父亲；

R：张强与谢莉是好朋友；　S：武汉位于北京和广州之间

解 定义命题函数：

S(x)：　x是一个三好学生；

F(x，y)：　x是y的父亲；

T(x，y)：　x与y是好朋友；

B(x,y,z)：x位于y和z之间；

用符号表示个体词：

a：王童；b：李新华；

c：李兰；d：张强；

e：谢莉；f：武汉；

g：北京；h：广州。

则命题可表示为：

P：S(a)；Q：F(b，c)；

R：T(d，e)；S：B(f，g，h)。

结论

（1）谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。如命题F(b, c)为"真"，但命题F(c, b)为"假"；

（2）一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系。

（3）0元谓词(不含个体词的)实际上就是一般的命题；

结论（续）

（4）具体命题的谓词表示形式和n元命题函数(n元谓词)是不同的，前者是有真值的，而后者不是命题，它的真值是不确定的。如上例中S(a)是有真值的，但S(x)却没有真值；

（5）一个n元谓词不是一个命题，但将n元谓词中的个体变元都用个体域中具体的个体取代后，就成为一个命题。而且，个体变元在不同的个体域中取不同的值对是否成为命题及命题的真值有很大的影响。

2.2.2 量词

例2.2.2 符号化下述命题：

（1）所有的老虎都要吃人；

（2）每一个大学生都会说英语；

（3）所有的人都长着黑头发；

（4）有一些人登上过月球；

（5）有一些自然数是素数。

例2.2.2(续)

(1) 所有的老虎都要吃人；
(2) 每一个大学生都会说英语；
(3) 所有的人都长着黑头发；
(4) 有一些人登上过月球；
(5) 有一些自然数是素数。

解 设立如下谓词：

$P(x)$：x会吃人；$Q(x)$：x会说英语；

$R(x)$：x长着黑头发；$S(x)$：x登上过月球；

$T(x)$：x是素数。

则有：(1) 所有的x，$P(x)$ $x\in$ {老虎}；

(2) 每一个x，$Q(x)$ $x\in$ {大学生}；

(3) 所有的x，$R(x)$ $x\in$ {人}；

(4) 有一些x，$S(x)$ $x\in$ {人}；

(5) 有一些x，$T(x)$ $x\in$ {自然数}。

量词含义

$(\forall x)$ 所有的x；
任意的x；
一切的x；
每一个x；等等。

$(\exists x)$ 有些x；
至少有一个x；
某一些x；
存在x；等等。

全称量词与存在量词

定义2.2.4　称$(\forall x)$为**全称量词**（Universal Quantifier），$(\exists x)$为**存在量词**（Existential Quantifier），其中的x称为**作用变量**（Function Variable）。一般将其量词加在其谓词之前，记为$(\forall x)F(x)$，$(\exists x)F(x)$。此时，$F(x)$称为全称量词和存在量词的**辖域**(Scope)。

例2.2.2(续)

（1） $(\forall x)P(x)$ $x \in$ {老虎}；

（2） $(\forall x)Q(x)$ $x \in$ {大学生}；

（3） $(\forall x)R(x)$ $x \in$ {人}；

（4） $(\exists x)S(x)$ $x \in$ {人}；

（5） $(\exists x)T(x)$ $x \in$ {自然数}。

不便之处

（1）从书写上十分不便，总要特别注明个体域；

（2）在同一个比较复杂的句子中，对于不同命题函数中的个体可能属于不同的个体域，此时无法清晰表达；

如例（1）和(4)的合取

$$\underbrace{(\forall x)P(x)}_{x\in\{\text{老虎}\}} \land \underbrace{(\exists x)R(x)}_{x\in\{\text{人}\}}$$

不便之处(续)

（3）若个体域的注明不清楚，将造成无法确定其真值。即对于同一个n元谓词，不同的个体域有可能带来不同的真值。

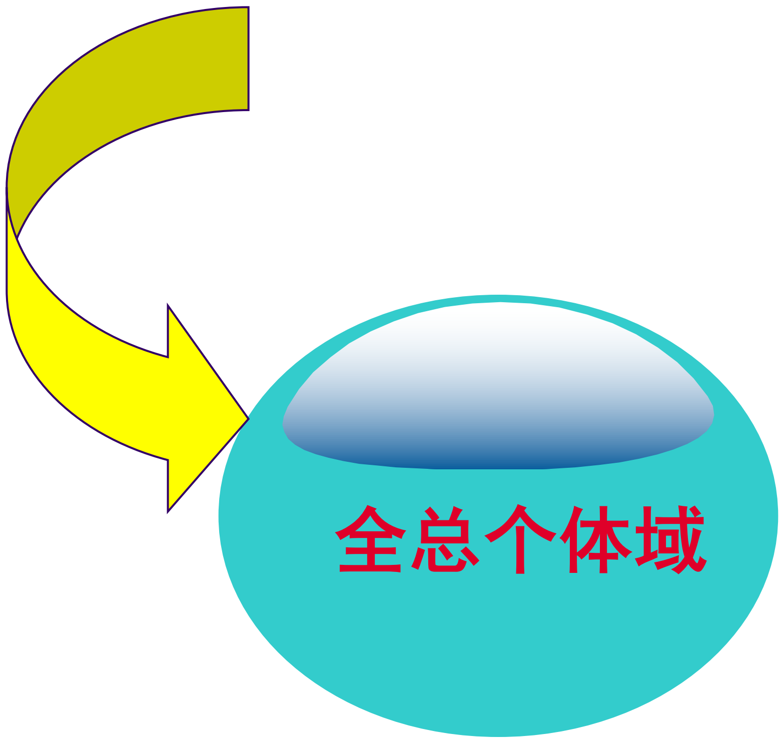
例如　对于语句“$(\exists x)(x+6=5)$”可表示为：“有一些x，使得x+6 = 5”。该语句在下面两种个体域下有不同的真值：

（a）在实数范围内时，确有x=-1使得x+6 = 5，因此，$(\exists x)(x+6=5)$为“真”；

（b）在正整数范围内时，则找不到任何x，使得x+6=5为“真”，所以，$(\exists x)(x+6=5)$为“假”。

不便之处的根源

对了，都是因为需要特别标注每个谓词的个体域所致！



特性谓词

U(x)：x是老虎 ⟷ x∈｛老虎｝

新的问题出现了，U(x)如何与(∀x)P(x)结合才符合逻辑呢？

谓词逻辑符号化的两条规则

统一个体域为全总个体域，而对每一个句子中个体变量的变化范围用一元特性谓词刻划之。这种特性谓词在加入到命题函数中时必定遵循如下原则：

（1）对于全称量词($\forall x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴涵式之前件加入。

（2）对于存在量词($\exists x$)，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取式之合取项加入。

特性谓词的例子

想想，为什么要这样规定特性谓词加入的原则呢？若不遵循会出现什么样的问题？

例如，符号化“所有的老虎都要吃人”这个命题

若P(x)：x会吃人 U(x)：x是老虎

若符号化为 $(\forall x)(U(x) \land P(x))$

它的含义是：“对于任意的x, x是老虎，并且x会吃人”，与原命题“所有的老虎都要吃人”的逻辑含义不符。

例2.2.3

用谓词逻辑符号化下述语句：

（1）天下乌鸦一般黑；

（2）没有人登上过木星；

（3）在美国留学的学生未必都是亚洲人；

（4）每个实数都存在比它大的另外的实数；

（5）尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明；

（6）对于任意给定的$\varepsilon>0$，必存在着$\delta>0$，使得对任意的x，只要$|x-a|<\delta$，就有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$成立。

例2.2.3(续)

（1）天下乌鸦一般黑

设 F(x)：x是乌鸦；G(x, y)：x与y一般黑，则：

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \land F(y) \rightarrow G(x, y))$$

或者 $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \land F(y) \land \neg G(x, y))$；

（2）没有人登上过木星

设H(x)：x是人；M(x)：x登上过木星，则：

$$\neg(\exists x)(H(x) \land M(x))$$

或者 $(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg M(x))$；

例2.2.3(续)

（3）在美国留学的学生未必都是亚洲人

设A(x)：x是亚洲人；

H(x)：x是在美国留学的学生，则：

$$\neg(\forall x)(H(x)\rightarrow A(x))$$

或者 $(\exists x)(H(x)\wedge\neg A(x))$；

（4）每个实数都存在比它大的另外的实数

设R(x)：x是实数；L(x, y)：x小于y，则：

$(\forall x)(R(x)\rightarrow(\exists y)(R(y)\wedge L(x,\ y)))$；

例2.2.3(续)

（5）尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明

设M(x)：x是人；C(x)：x很聪明，则：

$$(\exists x)(M(x) \land C(x)) \land \neg(\forall x)(M(x) \rightarrow C(x));$$

（6）对于任意给定的ε>0，必存在着δ>0，使得对任意的x，只要|x-a|<δ，就有|f(x)-f(a)|<ε成立。

设个体域为实数集合，则原命题可符号化为：

$$(\forall \varepsilon)((\varepsilon>0) \rightarrow (\exists \delta)((\delta>0) \land (\forall x)((|x-a|<\delta) \rightarrow (|f(x)-f(a)|<\varepsilon))))。$$

2.2.3 谓词的语言翻译

$$(\forall x)G(x)=\begin{cases}\mathbf{1}, & \forall x\in D, G(x)=\mathbf{1}\\ \mathbf{0}, & \exists x_{\mathbf{0}}\in D, G(x_{\mathbf{0}})=\mathbf{0}\end{cases}$$

$$(\exists x)G(x)=\begin{cases}\mathbf{1}, & \exists x_{\mathbf{0}}\in D, G(x_{\mathbf{0}})=\mathbf{1}\\ \mathbf{0}, & \forall x\in D, G(x)=\mathbf{0}\end{cases}$$

特殊的，当个体域$D=\{x_0, x_1, \cdots\}$是可数集合时，上述$(\forall x)G(x)$、$(\exists x)G(x)$的真值可表示为：

$(\forall x)G(x)=G(x_0)\wedge G(x_1)\wedge...$

$(\exists x)G(x)=G(x_0)\vee G(x_1)\vee...$

个体域可数或有限

更特别的，当个体域$D=\{x_0, x_1, \cdots x_n\}$是有限集合时，上述$(\forall x)G(x)$、$(\exists x)G(x)$的真值可以用与之等价的命题公式来进行表示。

$$(\forall x)G(x)=G(x_0)\wedge G(x_1)\wedge ...\wedge G(x_n)$$

$$(\exists x)G(x)=G(x_0)\vee G(x_1)\vee ...\vee G(x_n)$$

例2.2.5

设P(x)：x是素数；I(x)：x是整数；Q(x, y)：x+y=0。用语句描述下述句子，并判断其真假值。

(1) $(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$；

(2) $(\exists x)(I(x) \land P(x))$；

(3) $(\forall x)(\forall y)(I(x) \land I(y) \rightarrow Q(x, y))$；

(4) $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \land Q(x, y)))$；

(5) $(\exists x)(\forall y)(I(x) \land (I(y) \rightarrow Q(x, y)))$。

P(x)：x是素数；I(x)：x是整数；Q(x, y)：x+y=0

例2.2.5 解

（1）$(\forall x)(I(x)\rightarrow P(x))$；

句子(1)可描述为："对任意的整数x，x一定是素数"，真值为"假"；

（2）$(\exists x)(I(x)\wedge P(x))$；

句子(2)可描述为："存在一些整数x，x是素数"，真值为"真"；

P(x)：x是素数；I(x)：x是整数；Q(x,y)：x+y=0

例2.2.5 解

(3) $(\forall x)(\forall y)(I(x) \wedge I(y) \rightarrow Q(x, y))$；

句子(3)可描述为："对任意的整数x，y，都有x+y=0"，真值为"假"；

(4) $(\forall x)(I(x) \rightarrow (\exists y)(I(y) \wedge Q(x, y)))$；

句子(4)可描述为："对任意的整数x，都存在着整数y，使得x+y=0"，真值为"真"；

P(x)：x是素数；I(x)：x是整数；Q(x, y)：x+y=0

例2.2.5 解

（5）$(\exists x)(\forall y)(I(x)\wedge(I(y)\rightarrow Q(x, y)))$。

句子(5)可描述为："存在着整数x，使得对任意的整数y，都有x+y=0"，真值为"假"。

2.2.4　谓词翻译难点

1、一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而n元谓词则用以描述n个个体之间的关系；

2、如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序；另外，量词对变元的约束，往往与量词的次序有关，不同的量词次序，可以产生不同的真值，此时对多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原有的含义。

谓词翻译难点（续）

3、根据命题的实际意义，选用全称量词或存在量词。全称量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以蕴涵的前件加入，存在量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以合取项加入；

4、有些命题在进行符号化时，由于语言叙述不同，可能翻译不同，但它们表示的意思是相同的，即句子符号化形式可不止一种。

2.2.5　谓词翻译的应用

例2.2.4　将下列命题符号化

（1）兔子比乌龟跑得快；

（2）有的兔子比所有乌龟跑得快；

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快；

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

谓词设定：

P(x)：x是兔子；Q(x)：x是乌龟；

R(x，y)：x比y跑得快；

T(x，y)：x与y跑得同样快。

例2.2.4 解

谓词设定：

P(x)：x是兔子；Q(x)：x是乌龟；

R(x，y)：x比y跑得快；

T(x，y)：x与y跑得同样快。

（1）兔子比乌龟跑得快；

（1） $(\forall x)(\forall y)(P(x)\land Q(y)\rightarrow R(x, y))$；

（2）有的兔子比所有乌龟跑得快；

（2） $(\exists x)(P(x)\land(\forall y)(Q(y)\rightarrow R(x, y)))$；

例2.2.4 解

谓词设定：

P(x)：x是兔子；Q(x)：x是乌龟；

R(x，y)：x比y跑得快；

T(x，y)：x与y跑得同样快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快；

（3） $\neg(\forall x)(\forall y)(P(x) \land Q(y) \rightarrow R(x, y))$

或者 $(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y) \land \neg R(x, y))$；

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

（4） $\neg(\exists x)(\exists y)(P(x) \land Q(y) \land T(x, y))$

或者 $(\forall x)(\forall y)(P(x) \land Q(y) \rightarrow \neg T(x, y))$。

例2.2.5

符号化下述一组语句：

只要是需要室外活动的课，郝亮都喜欢；所有的公共体育课都是需要室外活动的课；篮球是一门公共体育课；郝亮喜欢篮球这门课。

解 设 O(x)：表示x是需要室外活动的课；

L（x，y）：表示x喜欢y；

S（x）：表示x是一门公共体育课；

Hao：表示郝亮；Ball：表示篮球。

上述句子可符号化为：

$(\forall x)(O(x) \rightarrow L(Hao, x))$；

$(\forall x)(S(x) \rightarrow O(x))$；

S(ball)；L(Hao，Ball)。

例2.2.6

符号化下述一组语句：

海关人员检查每一个进入本国的不重要人物；某些走私者进入该国时仅仅被走私者所检查；没有一个走私者是重要人物；海关人员中的某些人是走私者。

解 设 E(x):表示x进入国境；V(x):表示x是重要人物；C(x)：表示x是海关人员； P(x)：表示x是走私者；B(x, y)：表示y检查x。

上述句子可符号化为：

$(\forall x)((E(x)\wedge\neg V(x))\rightarrow(\exists y)(C(y)\wedge B(x, y)))$；

$(\exists x)(P(x)\wedge E(x)\wedge(\forall y)(B(x,y)\rightarrow P(y)))$；

$(\forall x)((P(x)\rightarrow\neg V(x))$；

$(\exists x)(P(x)\wedge C(x))$。

2.3 谓词合式公式与解释

谓词公式涉及如下四种符号：

（1）常量符号：用带或不带下标的小写英文字母a，b，c，…，a_1，b_1，c_1，…来表示。当个体域名称集合D给出时，它可以是D中的某个元素；

（2）变量符号：用带或不带下标的小写英文字母x，y，z，. . . ，x_1，y_1，z_1，. . . 来表示。当个体域名称集合D给出时，它可以是D中的任意元素；

符号定义

（3）函数符号：用带或不带下标的小写英文字母f，g，h，...，f_1，g_1，h_1，...来表示。当个体域名称集合D给出时，n元函数符号$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可以是$D^n \rightarrow D$的任意一个函数；

（4）谓词符号：用带或不带下标的大写英文字母P，Q，R，...，P_1，Q_1，R_1...来表示。当个体域名称集合D给出时，n元谓词符号$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可以是$D^n \rightarrow \{0, 1\}$的任意一个谓词。

为何需要函数符号？

例如　符号化“周红的父亲是教授”：

设$f(x)$：x的父亲；$P(x)$：x是教授；c：周红

此时$P(f(c))$表示“周红的父亲是教授”这一命题。

函数的使用给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便

项

定义2.3.1　谓词逻辑中的项（Term），被递归地定义为：

（1）任意的常量符号或任意的变量符号是项；

（2）若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是n 元函数符号，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项，则$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是项；

（3）仅由有限次使用(1)，(2)产生的符号串才是项。

原子公式

定义2.3.2　若$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是n 元谓词，t_1，t_2，…，t_n是项，则称$P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$为原子谓词公式(Atomic Propositional Formulae)，简称原子公式(Atomic Formulae)。

定义2.3.3

满足下列条件的表达式，称为合式公式(Well-Formed Formulae/Wff)，简称公式(Formulae)。

（1）原子公式是合式公式；

（2）若G，H是合式公式，则$(\neg G)$、$(\neg H)$、$(G\vee H)$，$(G\wedge H)$、$(G\rightarrow H)$、$(G\leftrightarrow H)$也是合式公式；

（3）若G是合式公式，x是个体变量，则

$(\forall x)G$、$(\exists x)G$ 也是合式公式；

（4）仅仅由(1)-(3)产生的表达式才是合式公式。

例子

$(\forall x)(\exists y)(P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \vee R(x, a, f(z))))$,

$(\forall x)(P(x) \vee (\exists y)R(x, y))$,

$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$。

等都是公式。

而

$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)$,

$(\exists y)(\forall x)(\vee P(x, y))$。

等则不是公式。

2.3.2 自由变元和约束变元

定义2.3.4 给定一个合式公式G，若变元x出现在使用变元的量词的辖域之内，则称变元x的出现为**约束出现**(**Bound Occurrence**)，此时的变元x称为**约束变元**(**Bound Variable**)。若x的出现不是约束出现，

量词辖域的确定方法：

（1）若量词后**有括号**，则**括号内的子公式**就是该量词的辖域；

（2）若量词后**无括号**，则**与量词邻接的子公式**为该量词的辖域。

例2.3.1

确定以下公式各量词的辖域以及各个体变量为自由变元还是约束变元。

（1）$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x,\ y))$；

解答：P(x)中的x，R(x,y)的x，y都为约束变元。

（2）$(\exists x)P(x)\wedge Q(x,\ y)$；

解答：P(x)中的x为约束变元，Q(x,y)中的x，y是自由变元。

例2.3.1

确定以下公式各量词的辖域以及各个体变量为自由变元还是约束变元。

（3）$(\forall x)\underline{(\exists y)\underline{(P(y,z)\vee Q(x,y))}}\wedge(\exists x)\underline{R(x,y)}$；

解答：P(y,z)、Q(x,y)中的x,y都为约束变元，z为自由变元；R(x,y)中的x为约束变元，y为自由变元。

（4）$(\forall x)(\underline{P(x)\rightarrow R(x)})\wedge(\exists y)\underline{Q(x,y)}$。

解答：P(x)，R(x)中的x为约束变元，Q(x，y)中的x为自由变元、y为约束变元。

变元混淆

(4) $(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))\wedge(\exists y)Q(x,\ y)$

约束变元

自由变元

在一个公式中，某一个变元的出现既可以是自由的，又可以是约束的，如(4)中的x。为了使得我们的研究更方便，而不致引起混淆，同时为了使其式子给大家以一目了然的结果，对于表示不同意思的个体变元，我们总是以不同的变量符号来表示之。

两个规则

规则1（约束变元的改名规则）：

（1）将量词中出现的变元以及该量词辖域中此变量的所有约束出现都用新的个体变元替换；

（2）新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变量。

两个规则

规则2(自由变元的代入规则)：

（1）将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；

（2）新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。

例2.3.2

（1）将公式$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x, y))\wedge R(x, y)$中的约束变元x进行改名；

（2）将公式$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x, y))\wedge R(x, y)$中的自由变元y进行代入。

解　　利用规则1对x进行改名，则：

利用规则2对y进行代入，则：

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x, z))\wedge R(x, z)$———对

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x, z))\wedge R(x, y)$———错

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x, x))\wedge R(x, x)$———错

改名规则和代入规则的关系

改名规则和代入规则之间的共同点都是不能改变原有的约束关系，而不同点是：

（1）施行的对象不同：改名规则是对约束变元施行，代入规则是对自由变元施行；

（2）施行的范围不同：改名规则可以只对公式中的一个量词及其辖域内施行，即只对公式的一个子公式施行；而代入规则必须对整个公式同一个自由变元的所有自由出现同时施行，即必须对整个公式施行；

改名规则和代入规则的关系（续）

（3）**施行后的结果不同**：改名后，公式含义不变，因为**约束变元只改名为另一个个体变元**，约束关系不改变，约束变元不能改名为个体常量；代入后，不仅可用另一个个体变元进行代入，并且也可用**个体常量**去代入，从而使公式由具有普遍意义变为仅对该个体常量有意义，即公式的含义改变了。

闭式的定义

定义2.3.5　设G是任意一个公式，若G中无自由出现的个体变元，则称G为封闭的合式公式，简称闭式。

例如　例2.3.1中的(1)，则是一个闭式。

$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x, y))$

2.3.3 谓词合式公式的解释

定义2.3.6 谓词逻辑中公式G 的每一个解释I(Expl-anation)由如下四部分组成：

（1）非空的个体域集合D ；

（2）G中的每个常量符号，指定D中的某个特定的元素；

（3）G中的每个n元函数符号，指定D^n到D中的某个特定的函数；

（4）G中的每个n元谓词符号，指定D^n到｛0,1｝中的某个特定的谓词。

公式的解释

谓词逻辑中的一个公式G可以像命题逻辑中的公式那样列出真值表来研究它的真值情况么？

例2.3.3 设有公式：

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)),$$

在个体域D={a，b}上，构造两个使公式分别为真和假的解释。

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\leftrightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))\\
=&(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow(\neg(\exists x)P(x)\vee(\forall x)Q(x))\\
=&(\neg P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b)\vee Q(b))\leftrightarrow\neg(P(a)\vee P(b))\vee(Q(a)\wedge Q(b))\\
=&(\neg P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b)\vee Q(b))\leftrightarrow(\neg P(a)\wedge\neg P(b))\vee(Q(a)\wedge Q(b)).
\end{aligned}$$

例2.3.3 解

（1）构造解释I_1为

$P(a) = 0, P(b) = 0, Q(a) = 1, Q(b) = 1$,

则$(\neg P(a) \vee Q(a)) \wedge (\neg P(b) \vee Q(b))$在此解释$I_1$下真值为1，$(\neg P(a) \wedge \neg P(b)) \vee (Q(a) \wedge Q(b))$在此解释$I_1$下真值为1，即

I_1使得等价式前面的$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$为真，

且使得等价式后面的$((\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$为真，

因此，**这样的解释使得原公式的真值为真。**

例2.3.3 解（续）

（2）构造解释I_2为

$P(a)=0, P(b)=1, Q(a)=0, Q(b)=1$，

则$(\neg P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg P(b)\vee Q(b))$在此解释$I_2$下真值为1，$(\neg P(a)\wedge\neg P(b))\vee(Q(a)\wedge Q(b))$在此解释$I_2$下真值为0，即

I_2使得等价式前面的$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$为真，

而使得等价式后面的$((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$为假，

因此，这样的解释使得原公式的真值为假。

例2.3.4

设有公式$(\exists x)(P(f(x))\land Q(x, f(a)))$。在如下给定的解释下，判断该公式的真值。

①. 个体域为D＝{α， β}；

②. a指定为： α；

③. f(α)指定为： β, f(β)指定为： α；

④. P(α)指定为：1, P(β)指定为：0,

Q(α, α)指定为：0, Q(α, β)指定为：1,

Q(β, α)指定为：1, Q(β, β)指定为：1。

例2.3.4 解 （续）

因当$x=\beta$时，有：

$f(\beta)=\alpha$，$P(f(x))=P(f(\beta))=P(\alpha)=1$,

$f(a)=f(\alpha)=\beta$,

$Q(x, f(a))=Q(\beta, f(\alpha))=Q(\beta, \beta)=1$。

所以：$P(f(\beta))\wedge Q(\beta,f(a))=1\wedge 1=1$,

即存在$x=\beta$,使得$P(f(\beta))\wedge Q(\beta, f(a))=1$,

即：$(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x, f(a)))=1$。

2.3.4 谓词合式公式的分类

例2.3.5 给出公式：$P(a)\rightarrow(\exists x)P(x)$ 和 $(\forall x)P(x)\rightarrow P(a)$，判断公式在给定的解释下的真值。

解（1）对于公式 $P(a)\rightarrow(\exists x)P(x)$，对任何解释I：

（a）当 $P(a)$ 取值为真时，$(\exists x)P(x)$ 也必为真，此时，$P(a)\rightarrow(\exists x)P(x)$ 的真值为真；

（b）当 $P(a)$ 取值为假时，$(\exists x)P(x)$ 可为真，也可为假，此时，$P(a)\rightarrow(\exists x)P(x)$ 的真值为真；所以，$P(a)\rightarrow(\exists x)P(x)$ 在任何情况下的真值恒为真

例2.3.5 解（续）

（2）对于公式$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$，对任何的解释I：

（a）当$(\forall x)P(x)$取值为真时，$P(a)$也必为真，此时，$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$的真值为真；

（b）当$(\forall x)P(x)$取值为假时，$P(a)$可为真，也可为假，此时，$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$的真值为真。

所以，$(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$在任何情况下的真值恒为真

例2.3.6

判断下列公式的真假。

（1）$P(x, y) \wedge Q(x,y) \rightarrow P(x, y)$；

（2）$P(x, y) \vee \neg P(x, y)$；

（3）$P(x, y) \wedge \neg P(x, y)$。

解 无论在何种结构中，无论对变元作何种赋值，公式(1)，(2)均取真值T，而公式(3)均取真值F。

从而(1)，(2)就是关于一切结构与一切赋值下恒取“T”值的谓词公式，(3)就是关于一切结构与一切赋值下恒取“F”值的谓词公式。

谓词合式公式的分类

定义2.3.7

（1）公式G称为有效公式，

如果G在它所有的解释I下都取值为“真”。

（2）公式G称为矛盾公式，

如果G在它所有的解释I下都取值为“假”。

（3）公式G称为可满足公式，

如果至少有一种解释I使得G取值为“真”。

公式之间的关系

从上述定义可知三种特殊公式之间的关系：

（1）有效公式的否定为矛盾公式；

矛盾公式的否定为有效公式；

（2）有效公式一定为可满足公式。

谓词逻辑的判定问题

若说谓词逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一公式都能判断是否是有效的。所谓能行的方法，乃是一个机械方法，可一步一步做下去，并在有穷步内实现判断。

谓词公式的可判定性

（1）谓词逻辑是不可判定的；

（2）只含有一元谓词变项的公式是可判定的；

（3）个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

谓词公式的可判定性

定理：谓词逻辑的判定问题是不可解的。

即不存在一个统一的算法，对谓词逻辑中的任何谓词公式G，算法能够在有限步内判定公式G的类型。

但是，谓词逻辑是半可判定的：即如果谓词公式G是永真的，那么，还是存在算法在有限步内能检验出G的永真性。（即如果一个公式确实是永真式，则有算法在有限步结束并输出“是”，否则，可能输出“否”，也可能永不终止。）

2.3.5 谓词合式公式的基本等价关系

定义2.3.8 公式G，H称为**等价**的(Equivalent)，记为$G = H$，如果公式$G \leftrightarrow H$是有效公式。

定义2.3.9 设$G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$是命题演算中的命题公式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是G中的命题变元，当用任意的谓词公式$G_i(1 \leqslant i \leqslant n)$分别代入$P_i$后，得到的新谓词公式$G(G_1, G_2, \cdots, G_n)$称为原公式的**代入实例**。

2.3.5 谓词合式公式的基本等价关系

定理2.3.1 永真公式的任意一个代入实例必为有效公式。

命题演算中的24个基本的等价公式在谓词演算中仍成立。

谓词演算中的有效公式

（1）E_{25}： $(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y)$；

E_{26}： $(\forall x)G(x) = (\forall y)G(y)$；

---(改名规则)

（2）E_{27}： $\neg(\exists x)G(x) = (\forall x)\neg G(x)$；

E_{28}： $\neg(\forall x)G(x) = (\exists x)\neg G(x)$；

--- (量词转换律/量词否定等值式)

谓词演算中的有效公式（续）

（3）E_{29}： $(\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S$；

E_{30}： $(\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S$；

E_{31}： $(\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S$；

E_{32}： $(\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S$；

---（量词辖域的扩张与收律）

谓词演算中的有效公式

（4） E_{33}： $(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$

$=(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$；

E_{34}： $(\exists x)(G(x) \vee H(x))$

$=(\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$；　　（量词分配律）

（5） E_{35}： $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x)$

$=(\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$；

E_{36}： $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x)$

$=(\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$；

例1

设P(x)：x今天来上课，个体域为计算机学院2024级全体同学的集合。则：

1. $(\forall x)P(x)$表示所有同学今天都来上课了；

   $\neg(\forall x)P(x)$表示不是所有的同学今天来上课了；

   $(\exists x)\neg P(x)$表示今天有同学没来上课。

   所以 $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

2. 类似地 $\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$

例2

1.设$G(x)$：x勤奋学习；$H(x)$：x喜欢体育活动。

其中：个体域是大学里的学生。

则$(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$表示：

大学里的所有学生既勤奋学习又喜欢体育活动；

$(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$表示：

“大学里的所有学生都勤奋学习且大学里所有的学生都喜欢体育活动”。

两者意义是相同的。

即有 $(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$。

例2（续）

2. 设G(x)：x勤奋学习；H(x)：x喜欢体育活动。其中：个体域是大学里的学生。

则$(\exists x)(G(x) \vee H(x))$表示：

“大学里有些学生勤奋学习或喜欢体育活动”；

$(\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$表示：

“大学里有些学生勤奋学习或大学里有些学生喜欢体育活动”。

两者意义是相同的。

所以，$(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$

例2（续）

3. 设 $G(x)$：x勤奋学习；$H(x)$：x喜欢体育活动。

其中：个体域是大学里的学生。

则 $(\forall x)(G(x) \vee H(x))$ 表示：

大学里的所有学生要么勤奋学习要么喜欢体育活动；

$(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x)$ 表示：

“要么大学里的所有学生都勤奋学习，要么大学里所有的学生都喜欢体育活动”。

两者意义是不同的。

即有 $(\forall x)(G(x) \vee H(x)) \neq (\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x)$。

2.3.6 谓词合式公式难点

1

掌握并能够灵活运用谓词，个体词和量词；

2

注意量词的作用域。通过紧跟量词后面的是否为括号进行判定；

3

命题逻辑与谓词逻辑中的公式及其解释的不同

2.3.7 谓词合式公式的应用

例2.3.7 利用谓词之间的等价关系证明下列公式之间的关系：$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)=(\exists y)(P(y)\rightarrow Q(x))$

证明 $(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$

$= \neg(\forall x)P(x)\lor Q(x)$

$= (\exists x)\neg P(x)\lor Q(x)$

$= (\exists y)\neg P(y)\lor Q(x)$

$= (\exists y)(\neg P(y)\lor Q(x))$

$= (\exists y)(P(y)\rightarrow Q(x))$

2.3.7 谓词合式公式的应用

例2.3.8 利用谓词之间的等价关系证明下列公式之间的关系：$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(y)) = (\exists x)P(x)\rightarrow Q(y)$

证明 $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(y))$

$= (\forall x)(\neg P(x)\vee Q(y))$

$= (\forall x)(\neg P(x))\vee Q(y)$

$= \neg(\exists x)P(x)\vee Q(y)$

$= (\exists x)P(x)\rightarrow Q(y)$

例2.3.9

判断$((\forall x)P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$是否为一个有效公式。

解 设个体域D={2, 4, 6, 8},

$P(x)$ ：x能被2整除；$Q(x)$：x能被4整除。

可知$(\forall x)P(x)$ 真值为真，$(\forall x)Q(x)$ 真值为假。

1）自由变元x=4

原式真值=$(1\rightarrow Q(4))\rightarrow(1\rightarrow 0)=0$

故 $((\forall x)P(x)\rightarrow Q(4))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$的真值为假。所以原式不是有效公式。

例2.3.9（续）

2）自由变元x=6

原式真值= （1→ Q(6)）→ （1→0）= 1

故((∀x)P(x)→Q(6))→((∀x)P(x)→(∀x)Q(x))的真值为真。

综上所述，个体域中有些个体使原式的真值为真，有些个体使原式的真值为假，因此，该公式只能是一个可满足公式。

2.4 公式的标准型——范式

在命题逻辑里，每一公式都有与之等值的范式，范式是一种统一的表达形式，当研究一个公式的特点(如永真、永假)时，范式起着重要作用。

对谓词逻辑的公式来说，也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其它范式与原公式只有较弱的关系。

2.4.1 前束范式

定义2.4.1 称公式G是一个前束范式，如果G中的一切量词都位于该公式的最前端(不含否定词)且这些量词的辖域都延伸到公式的末端。其标准形式如下：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

其中Q_1为量词$\forall$或$\exists$($i=1$，…，n)，M称作公式G的母式(基式)，M中不在有量词。

前束范式的转换方法

定理2.4.1　谓词逻辑中的任一公式都可化为与之等价的前束范式，但其前束范式并不唯一。

证明　设G是任一公式，通过下述步骤可将其转化为与之等价的前束范式：

（1）消去公式中包含的联结词“→”、“↔”；

（2）反复运用德•摩根定律，直接将“¬”内移到原子谓词公式的前端；

（3）使用谓词的等价公式将所有量词提到公式的最前端。

例2.4.1

求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b)\rightarrow R(x)))$ 的前束范式。

解 （1）消去联结词“→”、“↔”，得：

$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,\ x,\ y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

（2）¬内移，得：

$(\forall x)(\exists y)P(a,\ x,\ y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a,\ x,\ y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y,\ b)\wedge\neg R(x))$

例2.4.1 解 （续）

（3）量词左移，得：

$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y)\wedge(\exists z)\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y)\wedge\neg Q(z, b)\wedge\neg R(x))$

$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$

即：$(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$为原式的前束范式，这里$S(a, b, x, y, z)$是原公式的母式。

例2.4.2

求$\neg((\exists x)P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \wedge (\exists z)S(y,z)))$的前束范式。

解 （1）消去联结词“→”，得：

$\neg(\neg(\exists x)P(x) \vee (\forall y)(Q(y) \wedge (\exists z)S(y,z)))$

（2）¬内移，得：

$(\exists x)P(x) \wedge \neg(\forall y)(Q(y) \wedge (\exists z)S(y,z))$

$=(\exists x)P(x) \wedge (\exists y)\neg(Q(y) \wedge (\exists z)S(y,z))$

$=(\exists x)P(x) \wedge (\exists y)(\neg Q(y) \vee (\forall z)\neg S(y,z))$

$=(\exists x)(\exists y)(\forall z)(P(x) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg S(y,z)))$