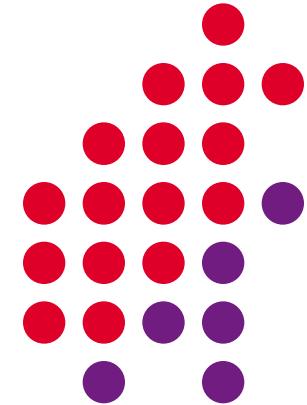


# 离散数学

## --数理逻辑



### 第三章：推理与证明技术

2025年10月30日星期四

## 3. 1 本章内容

1

命题逻辑的推理理论

2

谓词逻辑的推理理论

3

数学归纳法的使用

4

CP规则相关证明

## 3.2 命题逻辑的推理理论



认识世界的渐进过程

# 推理的有效性和结论的真实性

有效的推理不一定产生真实的结论；而产生真实结论的推理过程未必是有效的。有效的推理中可能包含为“假”的前提，而无效的推理却可能得到为“真”的结论。

所谓推理有效，指的是它的结论是它前提的合乎逻辑的结果。也即，如果它的前提都为真，那么所得的结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时，而它的结论为假。

### 3. 2. 1 推理的基本概念和推理形式

---

**定义3. 2. 0** 设 $G, H$ 是公式，对任意解释 $I$ ，如果 $I$ 满足 $G$ ，那么 $I$ 满足 $H$ ，则称 $H$ 是 $G$ 的逻辑结果（或称 $G$ 蕴涵 $H$ ），记为 $G \Rightarrow H$ ，此时称 $G$ 为前提， $H$ 为结论。

# 判定定理

**定理3.2.0** 设 $G, H$ 是公式， $H$ 是 $G$ 的逻辑结果当且仅当 $G \rightarrow H$ 为永真公式。

**证明：** “ $\Rightarrow$ ” 若 $G \Rightarrow H$ ，但 $G \rightarrow H$ 不是永真公式。于是，必存在一个解释 $I$ ，使得 $G \rightarrow H$ 为假，即在解释 $I$ 下， $G$ 为真，而 $H$ 为假，这与 $G \Rightarrow H$ 矛盾，故 $G \rightarrow H$ 是永真公式。

“ $\Leftarrow$ ” 若 $G \rightarrow H$ 是永真式，但 $G \Rightarrow H$ 不成立，故存在 $G, H$ 的一个解释 $I$ ，使得 $G$ 为真，而 $H$ 为假，从而在解释 $I$ 下， $G \rightarrow H$ 为假，这与 $G \rightarrow H$ 是永真公式矛盾，所以 $G \Rightarrow H$ 。

# 推广

---

**定义3.2.1** 设 $G_1, G_2, \dots, G_n, H$ 是公式，称 $H$ 是 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的逻辑结果( $G_1, G_2, \dots, G_n$ 共同蕴涵 $H$ )，当且仅当 $H$ 是 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$ 的逻辑结果(logic conclusion)。记为 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ ，此时称 $G_1, G_2, \dots, G_n \Rightarrow H$ 为**有效的**(efficacious)，否则称为**无效的**(inefficacious)。 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 称为一组前提(Premise)，有时用集合 $\Gamma$ 来表示，记 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 。 $H$ 称为**结论**(conclusion)。又称 $H$ 是**前提集合** $\Gamma$ 的逻辑结果。记为 $\Gamma \Rightarrow H$ 。

# 判定定理

---

**定理3.2.1** 公式 $H$ 是前提集合 $\Gamma = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ 的逻辑结果当且仅当 $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$ 为永真公式。

**证明：**略。

# “ $\Rightarrow$ ”与“ $\rightarrow$ ”的不同

---

1. “ $\rightarrow$ ”仅是一般的蕴涵联结词， $G \rightarrow H$ 的结果仍是一个公式，而“ $\Rightarrow$ ”却描述了两个公式G, H之间的一种逻辑蕴涵关系， $G \Rightarrow H$ 的“结果”，是非命题公式；
2. 用计算机来判断 $G \Rightarrow H$ 是办不到的。然而计算机却可“计算”公式 $G \rightarrow H$ 是否为永真公式。

### 3. 2. 2 判断有效结论的常用方法

要求

$$\Gamma = \{ G_1, G_2, \dots, G_n \}$$
$$\Gamma \Rightarrow H$$



也就是

$$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \rightarrow H$$

为永真公式



因而

真值表技术、演绎法和  
间接证明方法

# 1、真值表技术

---

设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是出现在前提 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 和结论 $H$ 中的一切命题变元，如果将 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中所有可能的解释及 $G_1, G_2, \dots, G_n, H$ 的对应真值结果都列在一个表中，根据“ $\rightarrow$ ”的定义，则有判断方法如下：

1. 对所有 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 都具有真值T的行(表示前提为真的行)，如果在每一个这样的行中， $H$ 也具有真值T，则 $H$ 是 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的逻辑结果。
2. 对所有 $H$ 具有真值为F的行(表示结论为假的行)，如果在每一个这样的行中， $G_1, G_2, \dots, G_n$ 中至少有一个公式的真值为F(前提也为假)，则 $H$ 是 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的逻辑结果。

## 例3.2.1

判断下列H是否是前提 $G_1, G_2$ 的逻辑结果

(1)  $H: Q;$

$G_1: P; G_2: P \rightarrow Q;$

是

(2)  $H: \neg P;$

$G_1: P \rightarrow Q; G_2: \neg Q;$

是

(3)  $H: Q;$

$G_1: \neg P; G_2: P \rightarrow Q.$

否

解

P	Q	$G_1$	$G_2$	H
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

(1)

P	Q	$G_1$	$G_2$	H
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

(2)

P	Q	$G_1$	$G_2$	H
0	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

(3)

## 2 推理定律

---

设 $G, H, I, J$ 是任意的命题公式，则有：

1)  $I_1: G \wedge H \Rightarrow G$

(简化规则)

$I_2: G \wedge H \Rightarrow H$

2)  $I_3: G \Rightarrow G \vee H$

(添加规则)

$I_4: H \Rightarrow G \vee H$

3)  $I_5: \neg G \Rightarrow G \rightarrow H$

$I_6: H \Rightarrow G \rightarrow H$

4)  $I_7: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow G$

$I_8: \neg (G \rightarrow H) \Rightarrow \neg H$

5)  $I_9: G, H \Rightarrow G \wedge H$

## 2 推理定律(续)

6)  $I_{10}$ :  $\neg G, G \vee H \Rightarrow H$

(选言三段论)

$I_{11}$ :  $\neg G, G \overline{\vee} H \Rightarrow H$

7)  $I_{12}$ :  $G, G \rightarrow H \Rightarrow H$

(分离规则)

8)  $I_{13}$ :  $\neg H, G \rightarrow H \Rightarrow \neg G$

(否定后件式)

9)  $I_{14}$ :  $G \rightarrow H, H \rightarrow I \Rightarrow G \rightarrow I$

(假言三段论)

10)  $I_{15}$ :  $G \vee H, G \rightarrow I, H \rightarrow I \Rightarrow I$

(二难推论)

# 例子

---

1)、前提：

1. 如果明天天晴， 我们准备外出旅游。  $P \rightarrow Q$
2. 明天的确天晴。  $P$

结论：我们外出旅游。  $Q$

可描述为：  $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$  (分离规则)

2)、前提：

1. 如果一个人是单身汉，则他不幸福。  $P \rightarrow Q$
2. 如果一个人不幸福，则他死得早。  $Q \rightarrow R$

结论：单身汉死得早。  $P \rightarrow R$

可描述为：  $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$  (假言三段论)

## 例子(续1)

3)、某女子在某日晚归家途中被杀害，据多方调查确证，凶手必为王某或陈某，但后又查证，作案之晚王某在工厂值夜班，没有外出，根据上述案情可得前提：

1. 凶手为王某或陈某

$P \vee Q$

2. 如果王某是凶手，则他在作案当晚必外出  $P \rightarrow R$

3. 王某案发之晚并未外出。

$\neg R$

结论：陈某是凶手。

$Q$

则可描述为： $P \rightarrow R, \neg R \Rightarrow \neg P$

(否定后件式)

$P \vee Q, \neg P \Rightarrow Q$

(选言三段论)

## 例子(续2)

4)、前提：

1. 如果某同学为省二级以上运动员，则他将被大学录取。  $P \rightarrow R$
2. 如果某同学高考总分在560分以上，则将被大学录取。  $Q \rightarrow R$
3. 某同学高考总分在560分以上或者是省二级运动员。  $P \vee Q$

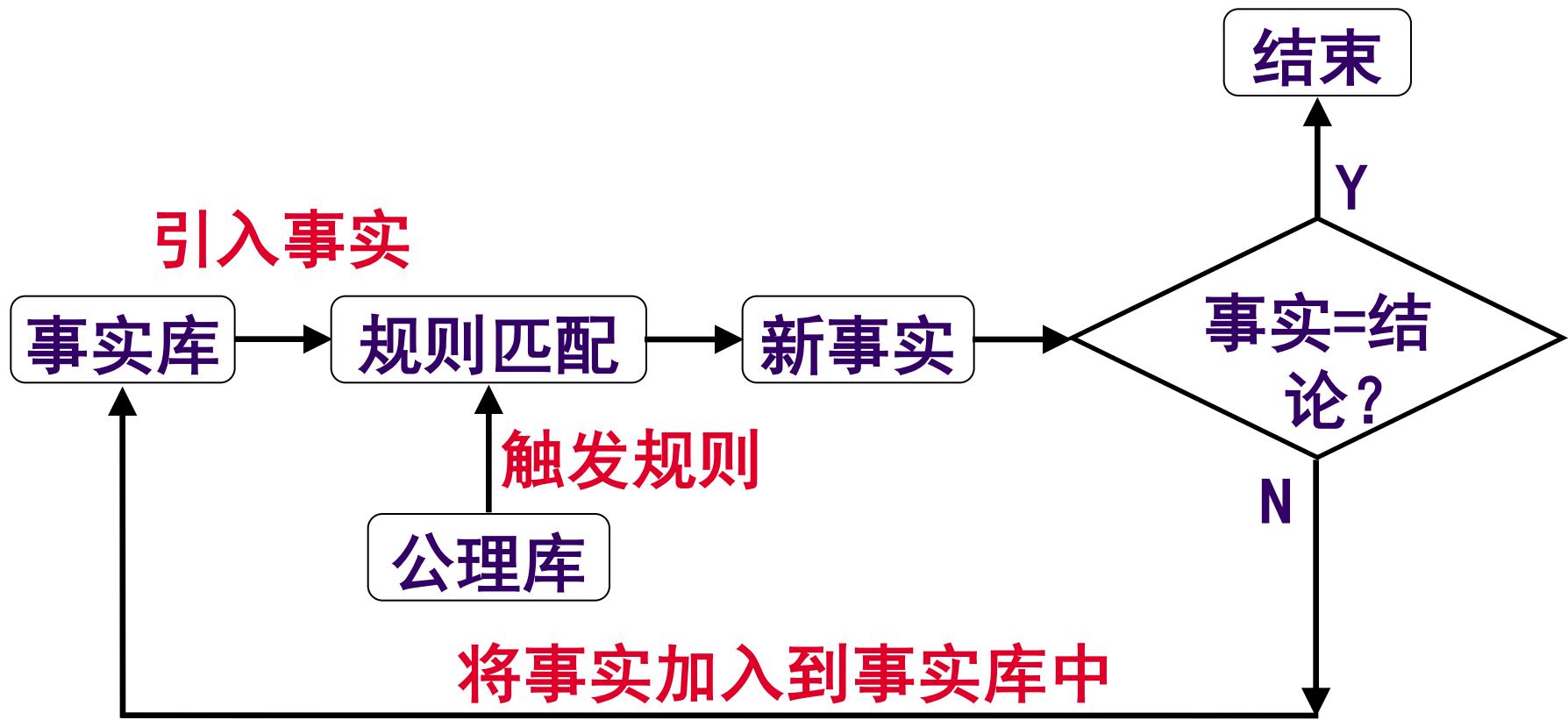
结论：该同学被大学录取。  $R$

则上述例子可描述为：

$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$  (二难推论)

### 3 演绎法

演绎法是从前提(假设)出发，依据公认的推理规则和推理定律，推导出一个结论来。



# 演绎的定义

---

## 定义3.2.2

从前提集合 $\Gamma$ 推出结论 $H$ 的一个演绎是构造命题公式的一个有限序列：

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

其中， $H_i$ 或者是 $\Gamma$ 中的某个前提，或者是前面的某些 $H_j$  ( $j < i$ ) 的有效结论，并且 $H_n$ 就是 $H$ ，则称公式 $H$ 为该**演绎的有效结论**，或者称从前提 $\Gamma$ 能够**演绎出结论 $H$** 来。

# 推理规则

- ① 规则P（称为前提引用规则）：在推导的过程中，可随时引入前提集合中的任意一个前提；
- ② 规则T（逻辑结果引用规则）：在推导的过程中，可以随时引入公式S，该公式S是由其前的一个或多个公式推导出来的逻辑结果。
- ③ 规则CP（附加前提规则）：如果能从给定的前提集合 $\Gamma$ 与公式P推导出S，则能从此前提集合 $\Gamma$ 推导出 $P \rightarrow S$ 。

$(\Gamma \wedge P) \Rightarrow S$  等价于  $\Gamma \Rightarrow (P \rightarrow S)$  ,

$(Q \wedge P) \rightarrow S = Q \rightarrow (P \rightarrow S)$

## 例3.2.2

设前提  $\Gamma = \{P \vee Q, P \leftrightarrow R, Q \rightarrow S\}$ ,  $G = S \vee R$ 。证明  $\Gamma \Rightarrow G$ 。

证明1：	(1)	$P \vee Q$	P
	(2)	$\neg P \rightarrow Q$	T, (1), E
	(3)	$Q \rightarrow S$	P
	(4)	$\neg P \rightarrow S$	T, (2), (3), I
	(5)	$\neg S \rightarrow P$	T, (4), E
	(6)	$P \leftrightarrow R$	P
	(7)	$(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T, (6), E
	(8)	$P \rightarrow R$	T, (7), I
	(9)	$\neg S \rightarrow R$	T, (5), (8), I
	(10)	$S \vee R$	T, (9), E

## 例3. 31 (续)

证明2:	(1) $\neg S$	P (附加)
	(2) $Q \rightarrow S$	P
	(3) $\neg Q$	T, (1), (2), I
	(4) $P \vee Q$	P
	(5) $P$	T, (3), (4), I
	(6) $P \leftrightarrow R$	P
	(7) $(P \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P)$	T, (6), E
	(8) $P \rightarrow R$	T, (7), I
	(9) $R$	T, (5), (8), I
	(10) $\neg S \rightarrow R$	CP, (1), (9)
	(11) $S \vee R$	T, (10), E

## 例3.2.3

设  $\Gamma = \{P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q\}$ ,  $G = R \rightarrow S$ 。

证明:  $\Gamma \Rightarrow G$ 。

- |    |                                       |                |
|----|---------------------------------------|----------------|
| 证: | (1) $R$                               | P (附加)         |
|    | (2) $\neg R \vee P$                   | P              |
|    | (3) $P$                               | T, (1), (2), I |
|    | (4) $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ | P              |
|    | (5) $Q \rightarrow S$                 | T, (3), (4), I |
|    | (6) $Q$                               | P              |
|    | (7) $S$                               | T, (5), (6), I |
|    | (8) $R \rightarrow S$                 | CP, (1), (7)   |

## 4 间接证明法（反证法）

前面使用过的一些证明方法都是**正向推理**。但在数学领域中，经常会遇到一些问题，当采用正向推理时很难从前提为真推出结论为真。

$P \Rightarrow Q$  等价于  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ，因此，为了间接地证明  $P \Rightarrow Q$ ，可以假设  $Q$  为假 ( $\neg Q$ )，然后证明  $P$  为假 ( $\neg P$ )。

## 例3.2.4

---

设 $n$ 是一个整数，证明：如果 $n^2$ 是奇数，那么 $n$ 是奇数。

**证明** 设 $n$ 是偶数，则 $n=2k$ ，这里 $k$ 是一个整数。于是有：

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

所以 $n^2$ 是偶数。

因而证明了若 $n$ 是偶数，则 $n^2$ 是偶数，它是已知命题的逆否式。因此，证明了所给的命题。

## 定义3.2.3

假设  $G_1, G_2, \dots, G_n$  是一组命题公式， $P_1, P_2, \dots, P_n$  是出现在其中的一切命题变元，若有解释  $\Gamma$  使  $G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$  取值为“真”，则称公式  $G_1, G_2, \dots, G_n$

是可满足的。如果不存在这样的解释，则称公式是不可满足的。

$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n$  是矛盾式当且仅当

$G_1 \wedge G_2 \wedge \dots \wedge G_n \Rightarrow R \wedge \neg R,$

其中， $R$  可为任意公式， $R \wedge \neg R$  为一矛盾式。

# 间接证明方法

将结论的否定加入到前提集合中构成一组新的前提，然后证明这组新的前提集合是不相容的，即蕴涵一个矛盾式。

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H \Rightarrow R \wedge \neg R$$

**定理3.2.2** 设命题公式集合  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  是一致的，于是从前提集合  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  出发可以逻辑地推出公式  $H$  的充要条件是从前提集合  $\{G_1, G_2, \dots, G_n, \neg H\}$  出发，可以逻辑地推出一个**矛盾（永假）** 式来。

## 例3. 2. 5

---

证明不存在有理数 $P/q$ 其平方为2，即证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

**证明** 对某两个整数P和q，假设 $(P/q)^2=2$ 成立，并且P和q没有公因子。如果原来选择的P、q具有公因子，则可以用与它相等的无公因子的P、q来取代它。

于是 $P^2=2q^2$ ，所以 $P^2$ 是偶数，这就推出P是偶数，因为一个奇数的平方是奇数。

因此存在某个整数n使得 $P=2n$ 成立。

## 例3. 2. 5(续)

因此

$$2q^2 = P^2 = (2n)^2 = 4n^2,$$

即有 $q^2=2n^2$ , 所以 $q^2$ 是偶数, 从而 $q$ 是偶数, 于是得到 $P$ 和 $q$ 都是偶数, 故它们有一个公因子2, 这与假设相矛盾。

因此结论成立。