1 HOMOTETIJA

Definicija 1.1. Dana je točka O i neki realan broj $k \neq 0$. Homotetija s centrom O i s koeficijentom k zovemo preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe tako da vrijedi $O \to O$ i za svaku točku $T \neq O$ imamo $T \to T_1$, gdje su točke T, T_1, O kolinearne te za orjentirane duljine dužina OT, OT_1 vijedi $\frac{OT_1}{OT} = k$.

- Za $\mid k \mid > 1$ homotetiju zovemo **dilatacija**(rastezanje), a za $\mid k \mid < 1$ zovemo **kontrakcija**(stezanje). Za $k = 1$ imamo identitetu, a za $k = -1$ centralnu simetiju.
- Homotetija je specijalan slučaj sličnosti.
- Homotetija preslikava točke u točke, pravac u njemu paralelan pravac, dužinu u dužinu, kružnicu u kružnicu (ZNATI DOKAZATI)
- Homotetija preslikava trokute u slične trokute jednake orjentacije.

Lema 1.2 (Menelajev teorem)**.** *Neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB, gdje je ABC trokut. Točke D, E, F su kolinearne ako i samo ako za orjentirane duljine vrijedi*

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$$

(DOKAZ)

Teorem 1.3. *Ako je $k_1 k_2 \neq 1$, tada je kompozicija homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i homotetije $h_2(O_2, k_2)$ opet homotetija $h(O, k)$, gdje je $k = k_1 k_2$, a O je točka pravca O_1, O_2 takva da vrijedi*

$$\frac{O_1 O}{O_2 O} = \frac{k_2 - 1}{k_2(1 - k_1)}$$

DOKAŽI

Teorem 1.4. *Kompozicija homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i homotetije $h_2(O_2, \frac{1}{k_2})$ je translacija za vektor $\frac{k_1 - 1}{k_1} \overrightarrow{\mathrm{O_1 O_2}}$.*
DOKAŽI

Definicija 1.5. Neka je G neprezan skup i $* : GxG \to G$ binarna operacija na G. Uređen par $(G, *)$ se zove grupa ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti

1. $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$

2. postoji $e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a, \forall a \in G$

3. za svaki $a \in G$ postoji $a^(-1) \in G$ takav da vrijedi $a * a^(-1) = a^(-1) * a = e$

ako još vrijedi $a * b = b * a, \forall a, b \in G$ kažemo da je $(G, *)$ **komutativna grupa**(Abelova grupa)

Teorem 1.6. *Homotetije s istim centrom O tvore komutatuvnu grupu.*
DOKAŽI

Teorem 1.7. *Sve homotetije i translacije tvore grupu. (dokazali smo i da je kompozicija homotetije i translacije (u oba poretka) opet homotetija)*
DOKAZ

Teorem 1.8. *Središte O opisane kružnice, težište G i ortocentar H trokuta leže na jednom pravcu (Eulerov pravac trokuta) i vrijedi $\frac{GH}{GO} = -2$.*
DOKAZ

Teorem 1.9. *Neka su D, E, F polovišta dužina BC, CA, AB, a $\overline{\mathrm{AA}_1}, \overline{\mathrm{BB}_1}, \overline{\mathrm{CC}_1}$ visine trokuta ABC koje se sijeku u ortocentru H. Neka su D_1, E_1, F_1 polovišta od $\overline{\mathrm{HA}}, \overline{\mathrm{HB}}, \overline{\mathrm{HC}}$. Točke $A_1, B_1, C_1, D, E, F, D_1, E_1, F_1$ leže na jednoj kružnici (Feuerbachovoj/Eulerovoj/ kružnica 9 točaka) kojoj su $\overline{\mathrm{DD}_1}, \overline{\mathrm{EE}_1}, \overline{\mathrm{FF}_1}$ promjeri.*

Teorem 1.10. *Dane su dvije kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Neka je ,$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1}$ bilo koji polumjer kružnice k_1 i $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2\text{''}}$ njemu paralelan promjer kružnice k_2, pri čemu točke $A_1 i A_2$ leže s iste strane pravca O_1O_2. Tada svi pravci A_1A_2 prolaze jednom čvrstom točkom V_{12}, a svi pravci A_1A_2" čvrstom točkom U_{12} su tzv. vanjski i unutrašnji centri sličnosti kružnica k_1 i k_2 te leže na pravcu O_1O_2.*

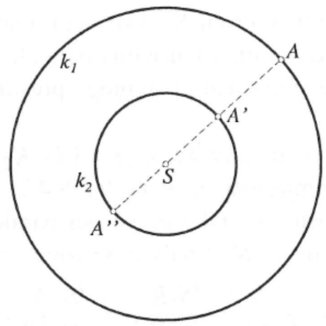
Primjer 1.11. Kada je vanjski centar sličnosti dviju kružnica unutar tih kružnica? Kada je jedna unutar druge.

Teorem 1.12. *Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$. Neka su $V_{23}, U_{23}; V_{31}, U_{31}; V_{12}, U_{12}$ vanjski i unutrašnji centri sličnosti parova kružnica $k_2k_3; k_3k_1; k_1k_2$. Tada točke $V_{23}, V_{31}, V_{12}; V_{23}, U_{31}, U_{12}; U_{23}, U_{31}, V_{12}$ leže na pojednom pravcu. Ta četiri pravca zovu se* ***osi sličnosti kružnica*** *k_1, k_2, k_3.*

1.1 Palman

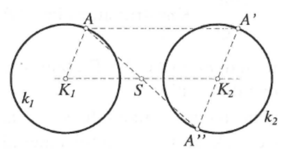
Teorem 1.13. *Dvije kružnice s različitim središtima i različitim polumjerima uvijek su homotetične. Postoje dvije homotetije(vanjska i unutarnja) koje takve kružnice prevode jedna na drugu.*

$$\chi_1 : A \mapsto A' \quad \text{i} \quad \chi_2 : A \mapsto A''.$$



Sl. 8.5. Homotetija koncentričnih kružnica

Slika 1: K
oncentične kružnice



Slika 2: K
ružnice jednakih radijusa

Za dvije koncentrične kružnice postoje dvije homotetije koje s istim centrom S koje preslikavaju kružnicu k_1 i k_2.

U slučaju kada kružnice imaju jednak radius, a različita središta. Takve dvije kružnicice su centralno simetrične s obzirom na točku S. Te se mogu dobiti translacijom za vektor K_1K_2. Ovdje se cetralna simetrija i translacija pojavljuju kao posebni slučajevi homotetije.

Teorem 1.14. *Trokuti kojima su pridružene stranice paralelne, ali ne i jednake su homotetični. Postoji, naime jedna homotetija koja preslikava $\triangle ABC$ u $\triangle A_1B_1C_1$. Spojnice AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku se u centru S te homotetije.*