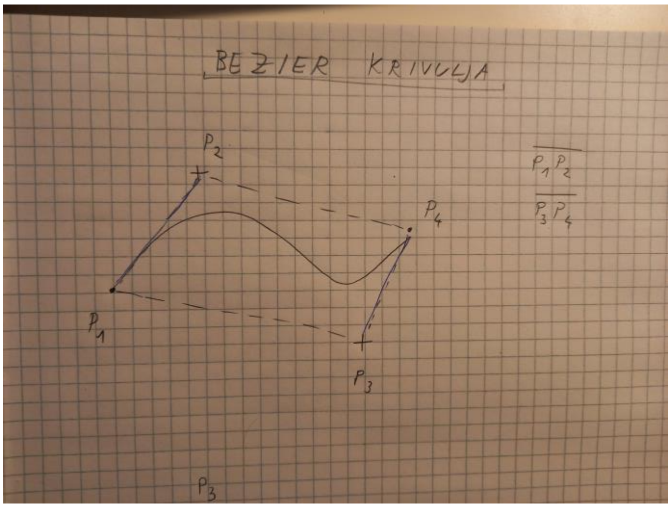
Osvrt na 2. predavanje: Bezierova krivulja

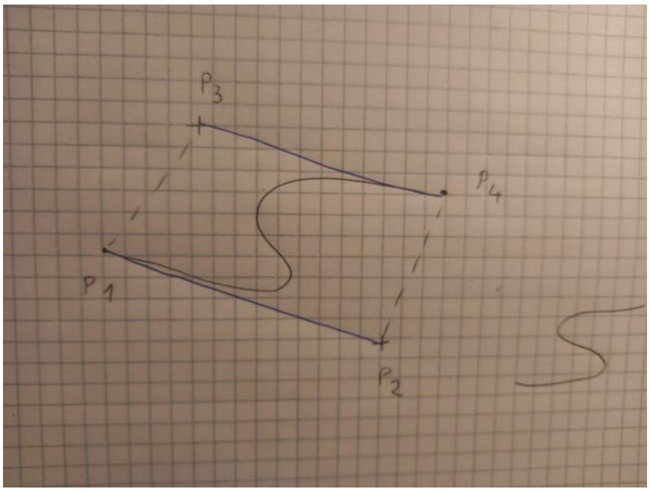
Lovro Vlašić, 20.3.2021.

Bezierova krivulja je glavna krivulja vektorske grafike. U ovom predavanju profesor će napraviti matematički izvod Bezierove krivulje, kao glavne krivulje vektorskih dizajna i grafike, vektorski paketa za dizajn. Objasnit će zašto je ova krivulja pobjedila na tržištu pored svih ostalih krivulja vezanih za vekorsku grafiku i dizajn.

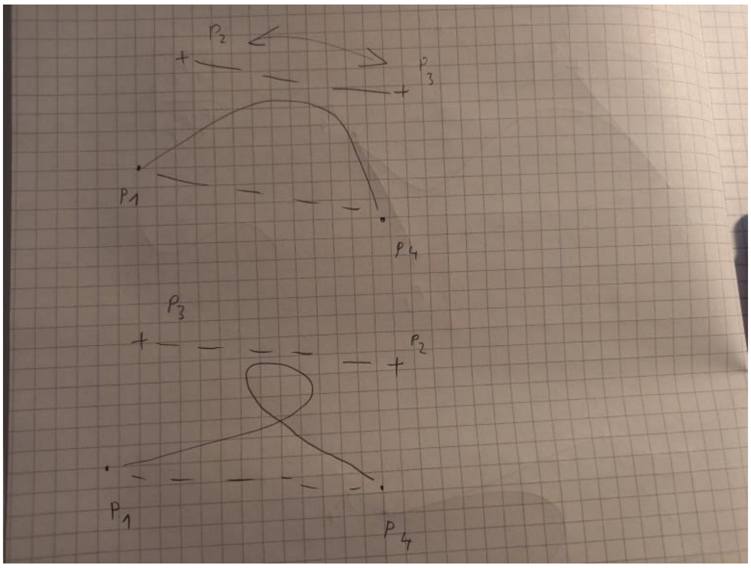
Ova krivulja može predvidjeti prostiranje linije uz pomoć 4 točke koje mi odredimo. Profesor označava ove 4 točke; prvu i zadnju kao kružić, a 2. i 3. kao '+' . Objašnjava prednost ove krivulje: sa ove 4 točke možemo odrediti kako će krivulja izgledati. Profesor je označio crtkanim linijama dužine P1 i P2 te P3 i P4, te spojio P1 i P3 te P2 i P4 i na taj način napravio 'poligon'. Zatim je dodatno označio dužine P1 i P2 te P3 i P4, te nacrtao krivulji između tih točaka. Ove dužine predstavljaju tangente na krivulju:



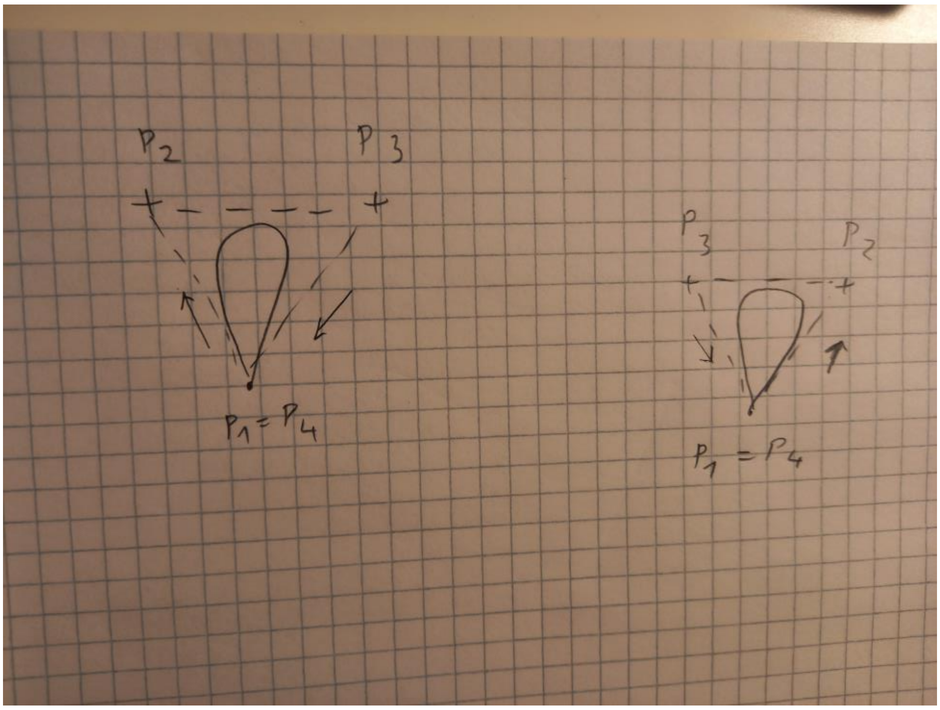
Zatim profesor crta nove (zapravo iste) konstalacije ovih 4 točaka ali mijenja tangente. Sada su P1 i P2 te P3 i P4 dužine tangente (označene plavom kemijskom):



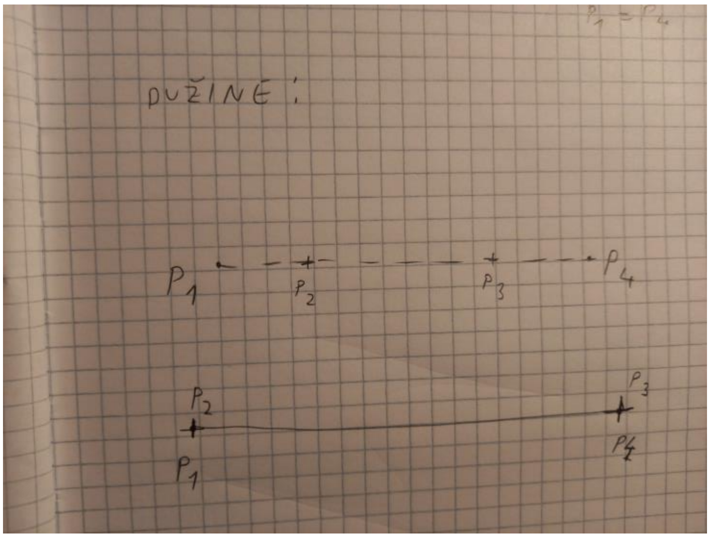
Pomoću ovih tangenata možemo predvidjeti oblike krivulja, i kako će se ona rasprostrjeti, te je to najveća prednost naspram ostalih krivulja. Zatim pokazuje što bi se desilo s krivuljom kad bi zamijenili točke P2 i P3 (tj. Njihov položaj). Ovo je slučaj dosta čest u radu s primjerice Illustratorom:



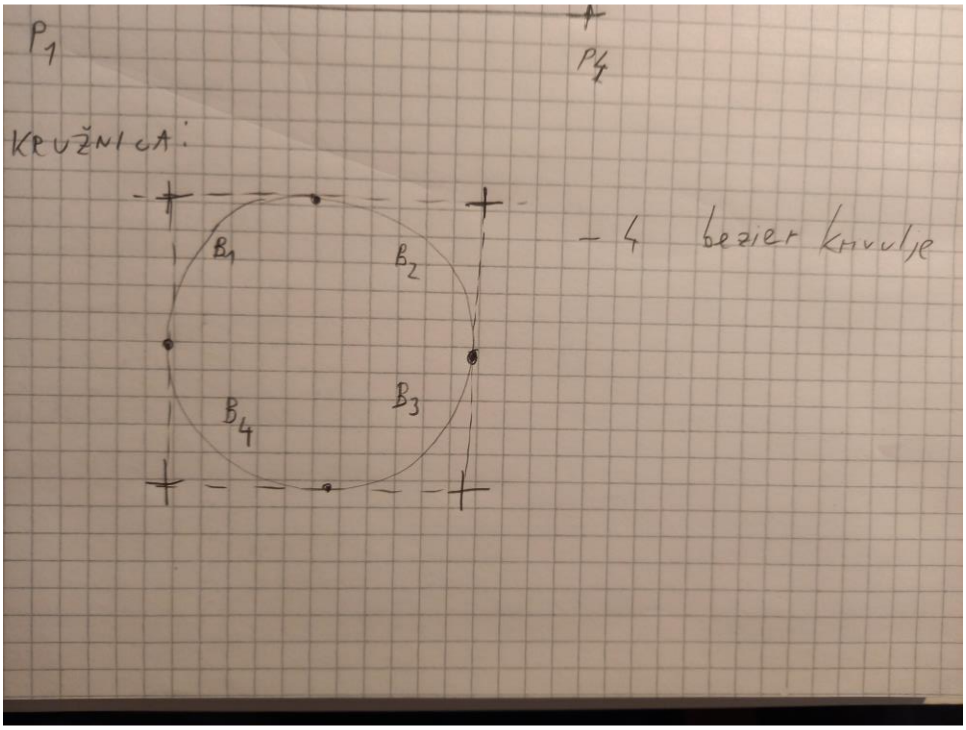
Ovaj problem se riješava tako da jednostavno zamijenimo točke P3 i P2 (iako one nisu prikazane takve, tj. Nisu indeksirane u programima za vektorsku grafiku). Nadalje profesor objašnjava kako će izgledati krivulja ako ona počinje u istoj točki u kojoj završava (P1 = P4). Pokazuje što će se desiti zamjenom točaka P3 i P2. Promjeniti će se tok krivulje (krivulja će izgledati isto):



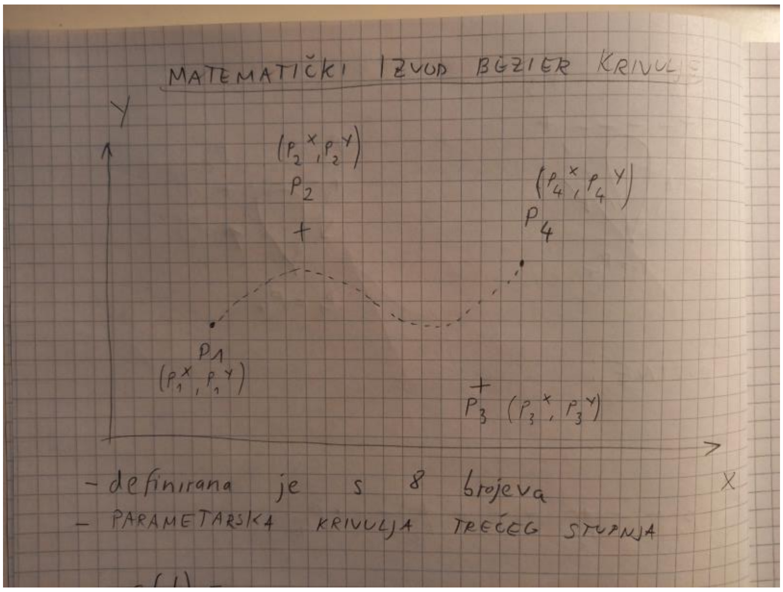
Zatim pokazuje kako se pomoću ove krivulje dobijaju dužine. Između krajnjih točaka stave se bilo gdje na tom pravcu natezne točke ili se prva natezna stavi na prvu krajnju i druga natezna na završnu krajnju:



Kružnica: Radi se pomoću 4 krivulje. Svaka natezna točka nalazi se u kutu kvadrata sačinjenog od 4 stranice koje su zapravo tangente na svaku od 4 krivulje:



<u>Matematički izvod Bezier krivulje:</u> Ova krivulja je nacrtana u koordinatnom sustavu, definirana je s četiri točke (osam brojeva). Ona je parametarska krivulja trećeg stupnja.

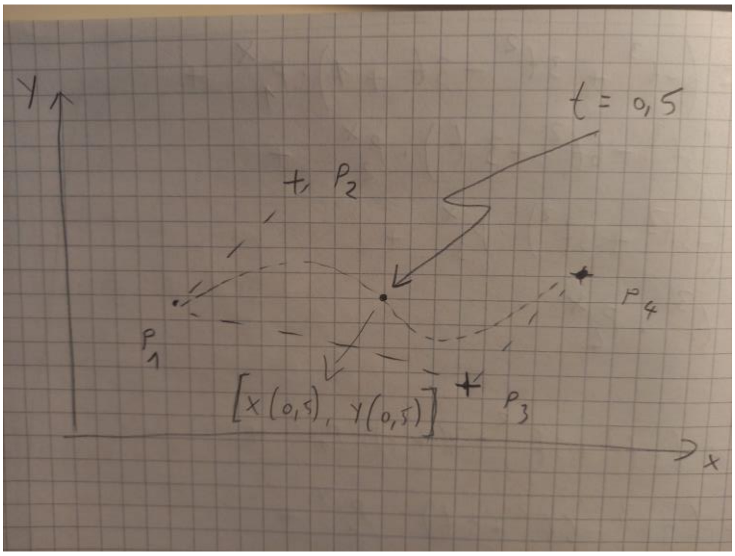


Objašnjava matricu Bezierove krivulje u jednoj i zatim u drugoj dimneziji (x i y). Napisane su sljedeće jednadžbe koje definiraju Bezierovu krivulju:

$$
\begin{aligned}
x(t) = &\left(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1\right) \cdot P_1^x \; + \\
&+ \left(3t^3 - 6t^2 + 3t\right) \cdot P_2^x \; + \\
&+ \left(-3t^3 + 3t^2\right) \cdot P_3^x \; + \\
&+ t^3 \cdot P_4^x
\end{aligned}
$$

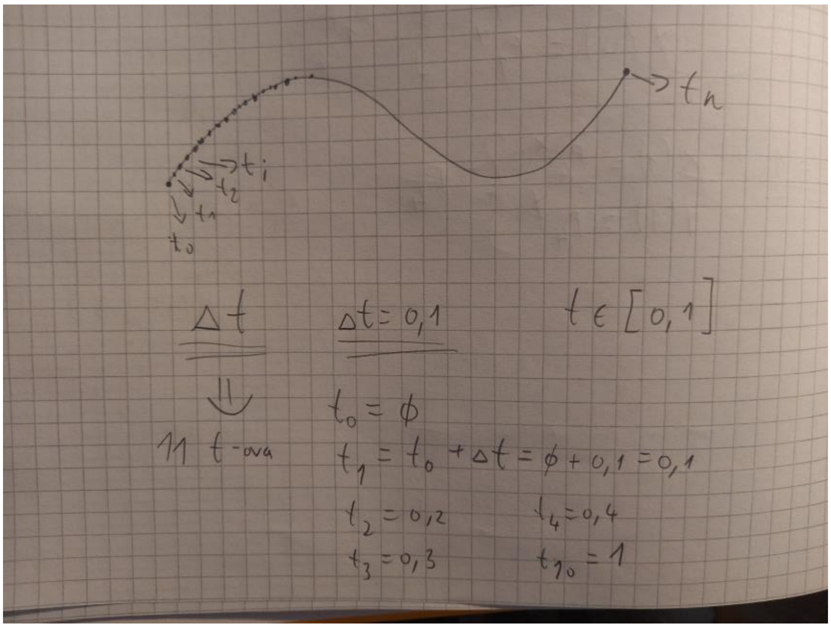
$$
\begin{aligned}
y(t) = &\left(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1\right) \cdot P_1^y \; + \\
&+ \left(3t^3 - 6t^2 + 3t\right) \cdot P_2^y \; + \\
&+ \left(-3t^3 + 3t^2\right) \cdot P_3^y \; + \\
&+ \left(t^3\right) \cdot P_4^x
\end{aligned}
$$

Kada umjesto parametra t uvrstimo 0 (nulu) od prve i druge jednadžbe x(t) i y(t) dobivamo točku P1. Kada umjesto t uvrstimo 1 dobivamo točku P4. Zato možemo zaključiti da sve točke koje leže na krivulji između točaka P1 i P4 moraju imati vrijednost između 0 i 1. Zaključujemo da krivulja mora biti element zatvorenog intervala [0, 1]. Ako bismo npr. Umjesto t uvrstili 0.5, točka bi se nalazila u sredini krivulje (na pola puta između točke P1 i P4 na ovoj slici):



Onda se postavlja pitanje kako da znamo koliko t-ova nam treba ako bismo htjeli stvoriti krivulju? Pomoću delta t. Ako je krivulja, tj. Parametar t element između intervala 0,1, a delta t je jedan 0.1, to znači da t0=0 t1=0.1 t2=0.2

t3=0.3, … , t10=1. U ovom primjeru koristi se 11 t-ova. (Ako je delta t=0.01 broj t-ova je 101 itd.)

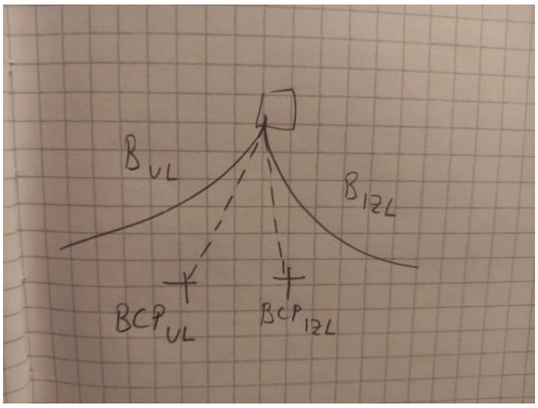


Formula za izračunavanje broja točaka potrebnih za stvaranje krivulje je:

$$\text{BROJ TOČAKA} = \frac{1}{\Delta t} + 1$$

<u>Spojne Bezier točke:</u> Postoje 3 vrste ovakvih točaka:

1) Kutni spoj - ovdje se natezne točke Bcp ulazni i Bcp izlazni (BCP = Bezier control point). Radi se o nezavisnosti Bcp ulazni o Bcp izlaznoj točki (ove dvije točke kada se pomaknu neće mijenjati jednu drugu)



2) Krivuljni spoj – Bcp izlazni je funkcija pravca. Ako mičemo Bcp ulazni za neki kut, mijenjat će se Bcp izlazni za isti taj kut.

3) Tangentni spoj - Najčešće se označava trokutićem. Pomaže nam dokučiti kako najbolje napraviti zavoj u nekom smjeru, pomoću dvije tangente koje dolaze iz drugih smjerova (tangenta na željenu krivulju). Na ovaj način krivulja nikad ne može preći liniju tih tangenata (skica lijevo).