

# トポロジカル秩序の分類に制限を与える禁止定理

低音

November 4, 2024

# 2025 年物性若手夏の学校やります!!!

- 全国の物性物理関連の大学院生が集結
- 4泊5日の集中合宿
- 講義・集中ゼミで最先端研究をキャッチアップ
- 学会形式で自分の研究を発表

若手研究者が研究の道を本格的に歩み始める第一歩になります!!!

**参加・幹旋・各種協賛お願いします!!!**

**↓個人協賛応募フォーム↓(調整中)**



# 自己紹介: 低音

- 京大 基礎物理学研究所 M1
- 専門は凝縮系理論物理
- 登山・自転車が趣味
- note 「ペンローズのグラフ記法」
- 第70回物性若手夏の学校 副代表



# このセミナーで目指すもの

## 目標

自発的対称性では説明できない相の分類を理解する

1 review: 自発的対称性の破れ

2 beyond SSB の例: toric code

3 量子相の分類問題

4 対称性と表現

5 Conclusion

# 理論と基底状態

## 定義 (固有方程式)

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \underset{\text{固有値}}{E} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

固有状態ベクトル                      固有状態ベクトル

$$\hat{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle$$

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{|\phi\rangle} = E \text{---} \boxed{|\phi\rangle}$$

## 定義 (理論)

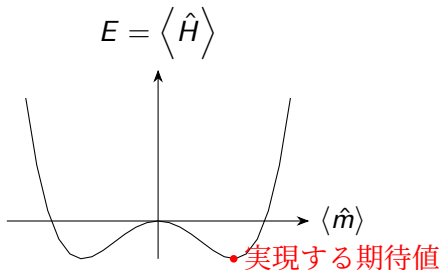
エネルギーを固有値にもつ行列  $\hat{H}$

## 定義 (基底状態)

# 自発的対称性の破れ

定義 (自発的対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking; SSB))

理論  $\hat{H}$  が対称性を持つが、系の基底状態がその対称性を持たないこと



# 自発的対称性の破れ

## 例 (固体液体転移)

- 液体: 平行移動で対称
- 固体: 平行移動の対称性を自発的に破る





# 秩序変数と相の分類

## 定義 (秩序変数)

自発的対称性の有無に応じて

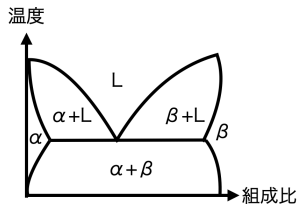
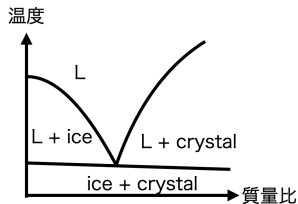
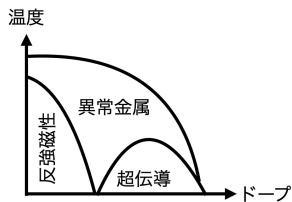
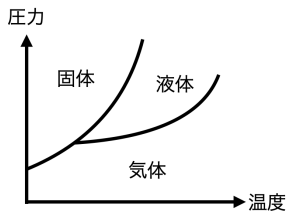
$$\langle \text{GS} | \hat{O} | \text{GS} \rangle \begin{cases} = 0 & (\text{sym. respect}) \\ \neq 0 & (\text{sym. breaking}) \end{cases}$$

となるような  $\langle \text{GS} | \hat{O} | \text{GS} \rangle$  を秩序変数という。

## Example (固体液体転移)

# Landau paradigm

相分類は自発的対称性の破れだけで決定できると思っていた。



1 review: 自発的対称性の破れ

2 beyond SSB の例: toric code

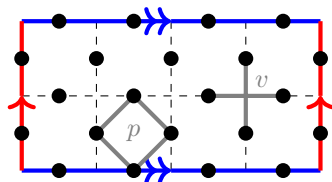
3 量子相の分類問題

4 対称性と表現

5 Conclusion

# toric code

トーラスに格子を張ってスピン 1/2 を配置.

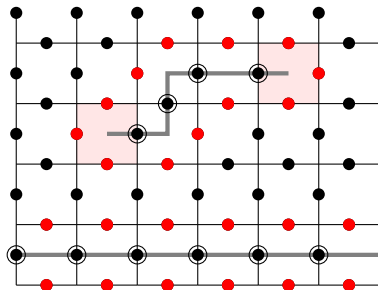


$$\hat{H} = -J_e \sum_v \prod_{j:\text{link to } v} \sigma_j^x - J_m \sum_p \prod_{j:\partial p} \sigma_j^z$$

内部対称性は各方向  $\pi$  回転 ( $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ).

# toric code の Wilson line

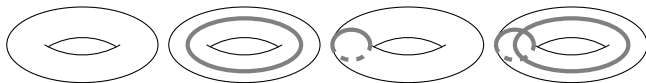
灰色の線の周りを反転させる.



線の端の plaquette が励起. loop にすると励起が消滅する.

# toric code の基底状態

トーラス  $T^2$  では連続変形で移り変わらない loop の取り方が 4 種類.



loop  $l_1, l_2$  に沿って  $\prod_{j \in l_i} \sigma_j^z$  を取ると、それぞれ固有値が異なる。基底状態が直交して 4 重縮退。しかしいずれも内部対称性を破っていない。

$$\hat{U} |\text{GS}\rangle = |\text{GS}\rangle \quad (\forall U \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

自発的対称性の破れだけでは相の分類が足りない？

1 review: 自発的対称性の破れ

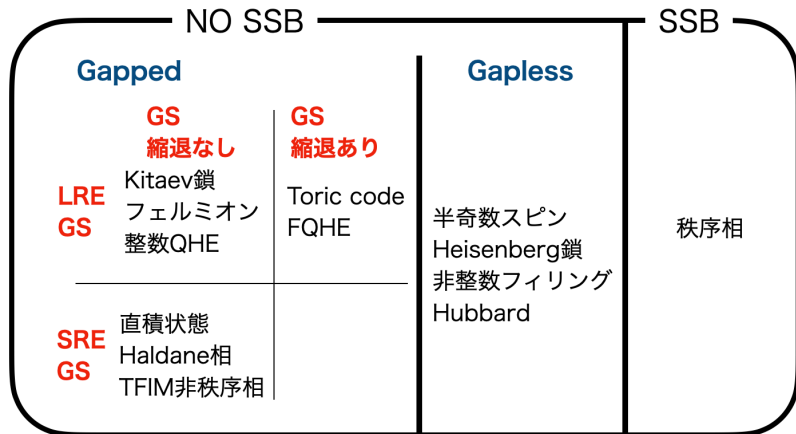
2 beyond SSB の例: toric code

3 量子相の分類問題

4 対称性と表現

5 Conclusion

# 量子相の分類





# エネルギーギャップ

## Example (スピン 1/2 Heisenberg モデル)

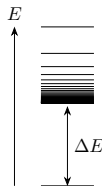
$$H = - \sum_j \hat{\mathbf{S}}_j \cdot \hat{\mathbf{S}}_{j+1}$$

スピンが揃った状態が最安定だが、わずかに揺らせば実質エネルギー 0 で他の状態に移れる。



→ 外部からの擾乱に弱い

# エネルギーギャップ



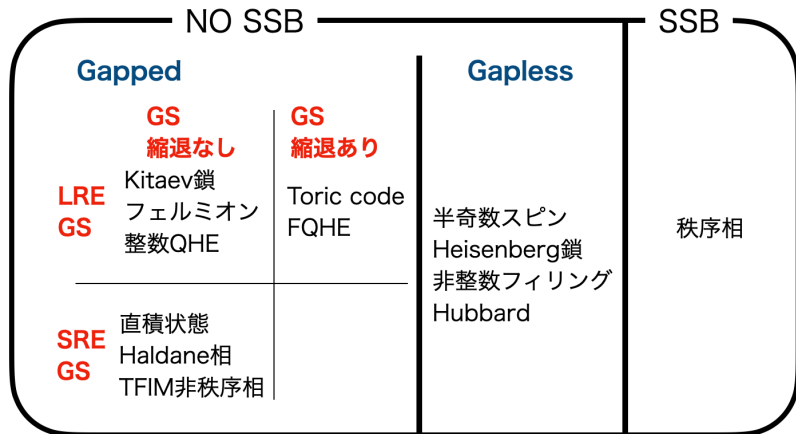
基底状態からのギャップが広ければ広いほど、外部からの擾乱で他の状態に変わりにくい。

e.g. 量子ビットに最適!

# エンタングルメント (量子もつれ)

古典的確率で定式化できない相関

# 量子相の分類・再掲



1 review: 自発的対称性の破れ

2 beyond SSB の例: toric code

3 量子相の分類問題

4 対称性と表現

5 Conclusion

# 対称性による相の制限

SSB では対称性から相分類が制限できた。量子相も対称性を使って分類できない？

対称性について、ちゃんと勉強しないといけない

# 対称性再訪

対称性=対称性操作



正三角形の対称性は

- $\pm 120^\circ$  回転
- 鏡映
- 何もしない

で不変になるものと、これらの組み合わせ。

$$p31m := \{1, R, R^2, M, MR, MR^2 \mid R^3 = M^2 = 1, MRM = R^2\}$$

# 対称性と群

対称性操作を表す数学の道具として群が使える。

## 定義 (群)

集合  $G$  と演算  $\cdot$  が以下を満たすとき  $(G, \cdot)$  を群という。

- $\cdot$  について閉じる ( $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 \in G$ )
- 何もしない操作 (単位元) が存在 ( $\exists 1 \in G$  s.t.  $1 \cdot g = g \cdot 1 = g \ \forall g \in G$ )
- 全ての操作に対し元に戻す操作 (逆元) が存在 ( $\forall g \in G \exists g' \in G$  s.t.  $g \cdot g' = g' \cdot g = 1$ )

あくまで**対称性**対称性操作しか扱ってない。



# 群の表現

対称性操作と量子力学 (線形代数) をつなげたい → **群の表現**  
群元を (複素数値) 行列の言葉に置き換える。

$$R \rightarrow \hat{R} = e^{2\pi i/3}, \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}, \dots$$

群元  $R$  に  $\hat{\phantom{x}}$  をつけることで  $R$  に対応する行列  $\hat{R}$  に移す。

# 表現による作用

行列  $\hat{R}$  を物理量  $\hat{O}$  にかけて回転ができる。

$$\hat{R}\hat{O}\hat{R}^{-1} : \quad \hat{O} \text{ の } 120^\circ \text{ 回転}$$

表現行列  $\hat{R}$  を状態  $|\psi\rangle$  にかけて対称操作ができる。

$$\hat{R}|\psi\rangle : \quad |\psi\rangle \text{ の } 120^\circ \text{ 回転}$$

# 状態の位相不変性

## 定理 (状態の位相不変性)

量子状態  $|\psi\rangle$  は  $U(1)$  位相の変化

$$|\psi\rangle \mapsto e^{i\theta} |\psi\rangle$$

で物理を変えない

現実には状態ベクトルを測定できず、必ず期待値や固有値の形しか現れない。→ 脚は潰れている。



表現も状態にかけるとき位相  $e^{i\theta}$  の自由度が許される。

# エネルギー固有状態と既約表現

- $\mathcal{H}$ : Hilbert 空間
- $G$ : 対称性を与える群
- $\hat{\cdot}: G \rightarrow \text{set of operators on } \mathcal{H}$

対称性変換:  $g \in G$  で状態が  $|\psi\rangle \mapsto \hat{g}|\psi\rangle$  と変換.  $\hat{g} \in U(\mathcal{H})$  は  $g \in G$  の表現.

系が対称性を満たす ( $[\hat{g}, \hat{H}] = 0$ ) なら,

$$\hat{H}\hat{g}|E\rangle = E\hat{g}|E\rangle$$

$\hat{g}$  は固有値ごとにブロック対角化されている

→ エネルギー固有状態は  $G$  の既約表現の基底

# 射影表現

- $\mathcal{H}$ : Hilbert 空間
- $G$ : 対称性を与える群
- $\hat{\cdot}: G \rightarrow \text{set of operators on } \mathcal{H}$

量子状態は  $U(1)$  位相自由度を同一視:

$$\hat{g}\hat{h}|\psi\rangle = e^{i\theta_{g,h}}(\widehat{gh})|\psi\rangle$$

としても差し支えない. 位相自由度を演算子に付与  $\rightarrow$  射影表現  
 $U(1)$  位相自由度を射影表現にも与える  $\rightarrow [\theta_{g,h}]$  の同値類 (乗数系) を組める.

例 (スピン  $1/2$  系の  $\pi$  回転)

群元のレベルでは  $U_\pi^2 = U_{2\pi} = 1$  だが, 演算子としてスピンの作用すると

$$(\hat{U}_\pi)^2 = (e^{-i\pi\hat{S}^{(3)}})^2 = -1 = e^{i\pi}\hat{U}_{2\pi}$$

# 射影表現の同値類

$$\hat{g}\hat{h} = e^{i\theta_{g,h}}\widehat{gh}$$

U(1) 位相自由度を  $\hat{g}$  などにも与えて  $\hat{g} \sim \hat{g}e^{i\alpha_g}$  を同一視.

$$e^{i\theta_{g,h}} \sim \frac{e^{i\alpha_{gh}}}{e^{i\alpha_g} e^{i\alpha_h}} e^{i\theta_{g,h}}$$

特に  $\{\hat{g}\}$  が 1 次元表現 (U(1)) の場合は, この同一視により

$$e^{i\theta_{g,h}} \sim e^{i\theta_{g,h}} \frac{\widehat{gh}}{\widehat{\hat{g}\hat{h}}} = 1.$$

## 定理

1 次元射影表現は自明状態の U(1) 位相自由度により同一視すると, 1 次元射影表現は本質的に全ての  $\theta_{g,h}$  を 0 とできる.

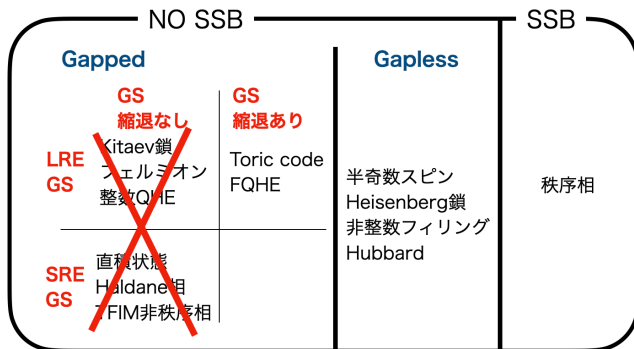
対偶から, **本質的に非自明な射影表現は**表現次元が 2 以上なので**基底状態が縮退**する.

# 射影表現による相分類の制限

定理 (射影表現なら縮退)

系が非自明な射影表現に従うとき基底状態は縮退する。

相図を制限できる。



# 何が嬉しいのか?

理論屋にとっては

- 理論にある性質を計算しなくても求められる
- 欲しい性質がある理論を作る指針になる

実験屋にとっては

- 実現したい現象の候補物質を絞れる
- 自分が持っている物質に期待される現象がわかる

いずれにしても、**エキゾチックな現象の発見**に役立つ



1 review: 自発的対称性の破れ

2 beyond SSB の例: toric code

3 量子相の分類問題

4 対称性と表現

5 Conclusion

# Conclusion

## Take home message

- 量子相は**自発的対称性の破れよりも細かい分類**が必要になる.
- 拡張 Lieb-Schultz-Mattis 定理はある種の条件下で**基底状態が unique gapped であることを禁止**する.
- **モデルがどの相に属するか**の判断材料になる.

# 2025 年物性若手夏の学校やります!!!

- 全国の物性物理関連の大学院生が集結
- 4泊5日の集中合宿
- 講義・集中ゼミで最先端研究をキャッチアップ
- 学会形式で自分の研究を発表

若手研究者が研究の道を本格的に歩み始める第一歩になります!!!

**参加・幹旋・各種協賛お願いします!!!**

**↓個人協賛応募フォーム↓(調整中)**

