トポロジカル秩序の分類に制限を与える禁止定理

低音

November 2, 2024

2025 年物性若手夏の学校やります!!!

- 全国の物性物理関連の大学院生が集結
- 4 泊 5 日の集中合宿
- 講義・集中ゼミで最先端研究をキャッチアップ
- 学会形式で自分の研究を発表

若手研究者が研究の道を本格的に歩み始める第一歩になります!!!

参加・斡旋・各種協賛お願いします!!!

↓個人協賛応募フォーム↓(調整中)

自己紹介: 低音

- 京大 基礎物理学研究所 M1
- 専門は凝縮系理論物理
- 登山・自転車が趣味
- note「ペンローズのグラフ記法」
- 第 70 回物性若手夏の学校 副代表

このセミナーで目指すもの

目標

自発的対称性では説明できない相の分類を理解する

理論と基底状態

定義 (固有方程式)

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}}_{\text{固有状態ベクトル}} = \underbrace{E}_{\text{固有値}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}}_{\text{固有状態ベクトル}}$$

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle$$

$$-\boxed{H}-\boxed{|\phi\rangle} = E\ -\boxed{|\phi\rangle}$$

定義 (理論)

エネルギーを固有値にもつ行列 $\hat{H}$

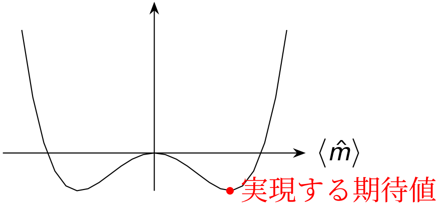
定義 (基底状態)

自発的対称性の破れ

定義 (自発的対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking; SSB))

理論 $\hat{H}$ が対称性を持つが、系の基底状態がその対称性を持たないこと

$$E = \left\langle \hat{H} \right\rangle$$



自発的対称性の破れ

例 (固体液体転移)

- 液体: 平行移動で対称
- 固体: 平行移動の対称性を**自発的に破る**

秩序変数と相の分類

定義 (秩序変数)

自発的対称性の有無に応じて

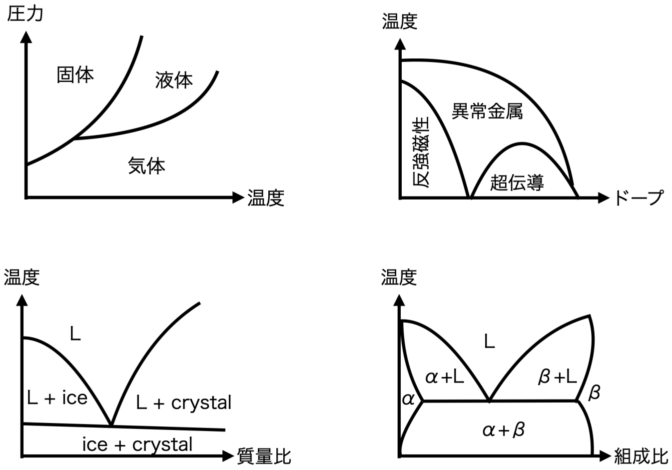
$$\langle \mathrm{GS}|\hat{O}|\mathrm{GS}\rangle \begin{cases} = 0 & (\text{sym. respect}) \\ \neq 0 & (\text{sym. breaking}) \end{cases}$$

となるような $\langle \mathrm{GS}|\hat{O}|\mathrm{GS}\rangle$ を秩序変数という。

Example (固体液体転移)

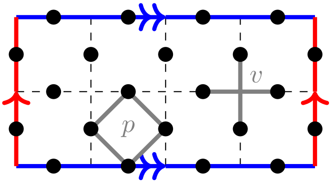
Landau paradigm

相分類は自発的対称性の破れだけで決定できると思っていた。



toric code

トーラスに格子を張ってスピン 1/2 を配置.

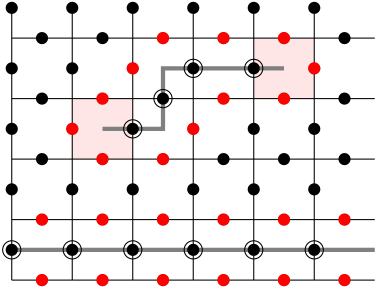


$$\hat{H} = -J_e \sum_{v} \prod_{j:\text{link to } v} \sigma_j^x - J_m \sum_{p} \prod_{j:\partial p} \sigma_j^z$$

内部対称性は各方向 π 回転 $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

toric code の Wilson line

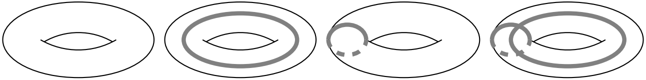
灰色の線の周りを反転させる.



線の端の plaquette が励起. loop にすると励起が消滅する.

toric code の基底状態

トーラス T^2 では連続変形で移り変われない loop の取り方が 4 種類.

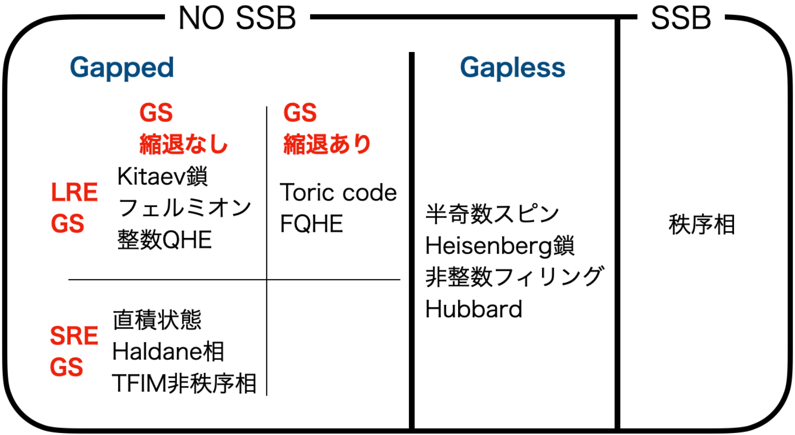


loop l_1, l_2 に沿って $\prod_{j \in l_i} \sigma_j^z$ を取ると、それぞれ固有値が異なる。基底状態が直交して 4 重縮退. しかしいずれも**内部対称性を破っていない**.

$$\hat{U} \left| \mathrm{GS} \right\rangle = \left| \mathrm{GS} \right\rangle \qquad (\forall U \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

自発的対称性の破れだけでは相の分類が足りない?

量子相の分類

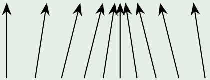

NO SSB
SSB
Gapped
Gapless
GS
縮退なし
GS
縮退あり
LRE
GS
Kitaev鎖
フェルミオン
整数QHE
Toric code
FQHE
SRE
GS
直積状態
Haldane相
TFIM非秩序相
半奇数スピン
Heisenberg鎖
非整数フィリング
Hubbard
秩序相

エネルギーギャップ

Example (スピン 1/2 Heisenberg モデル)

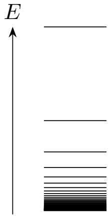
$$H = -\sum_j \hat{\boldsymbol{S}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_{j+1}$$

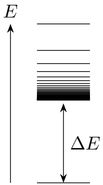
スピンが揃った状態が最安定だが、わずかに揺らせば実質エネルギー 0 で他の状態に移れる。



→ 外部からの擾乱に弱い

エネルギーギャップ



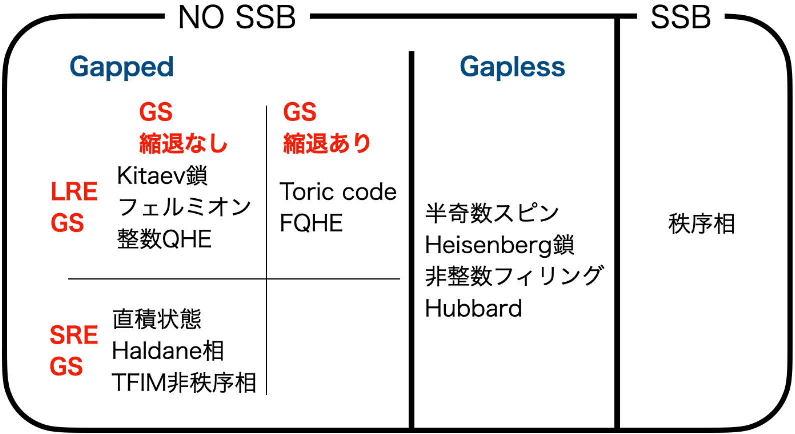


基底状態からのギャップが広ければ広いほど、外部からの擾乱で他の状態に変わりにくい。
e.g. 量子ビットに最適!

エンタングルメント (量子もつれ)

古典的確率で定式化できない相関

量子相の分類・再掲

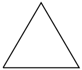

NO SSB
SSB
Gapped
Gapless
GS
縮退なし
GS
縮退あり
LRE
GS
Kitaev鎖
フェルミオン
整数QHE
Toric code
FQHE
SRE
GS
直積状態
Haldane相
TFIM非秩序相
半奇数スピン
Heisenberg鎖
非整数フィリング
Hubbard
秩序相

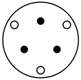
対称性による相の制限

SSB では対称性から相分類が制限できた。量子相も対称性を使って分類できない?
対称性について、ちゃんと勉強しないといけない

対称性再訪

対称性=対称性操作





正三角形の対称性は

- ±120º 回転
- 鏡映
- 何もしない

で不変になるものと、これらの組み合わせ。

$$p31m := \{1, R, R^2, M, MR, MR^2 | R^3 = M^2 = 1, MRM = R^2\}$$

対称性と群

対称性操作を表す数学の道具として群が使える。

定義 (群)

集合 G と演算 $\cdot$ が以下を満たすとき $(G, \cdot)$ を群という。

- $\cdot$ について閉じる $(\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \cdot g_2 \in G)$
- 何もしない操作 (単位元) が存在 $(\exists 1 \in G \text{ s.t. } 1 \cdot g = g \cdot 1 = g \ \forall g \in G)$
- 全ての操作に対し元に戻す操作 (逆元) が存在 $(\forall g \in G \exists g' \in G \text{ s.t. } g \cdot g' = g' \cdot g = 1)$

群の表現

ここまでの量子力学に群の言葉を落とし込みたい。
$\hat{H}, |\psi\rangle$ への対称性操作と群をつなぎたい → **群の表現**
群を (複素数値) 行列の言葉に置き換える。

$$p31m \to e^{2\pi i/3}, \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}, \dots$$

行列への置き換え方 (表現) は何種類かある。

表現による作用

行列 $\hat{U}$ を物理量 $\hat{O}$ にかけると対称操作ができる。

$$\hat{U}_{120^\circ}\hat{O}\hat{U}_{120^\circ}^{-1}:\quad \hat{O}\text{の }120^{\text{º}}\text{ 回転}$$

表現行列 $\hat{U}$ を状態 $|\psi\rangle$ にかけると対称操作ができる。

$$\hat{U}_{120^\circ}|\psi\rangle:\quad |\psi\rangle\text{ の }120^{\text{º}}\text{ 回転}$$

状態の位相不変性

定理 (状態の位相不変性)

量子状態 $|\psi\rangle$ は U(1) 位相の変化

$$|\psi\rangle \mapsto e^{i\theta} |\psi\rangle$$

で物理を変えない

現実には状態ベクトルを測定できず、必ず期待値や固有値の形しか現れない。$\rightarrow$ 脚は潰れている。

$$\boxed{\phi} - \boxed{\hat{H}} - \boxed{\hat{U}} - \boxed{\psi}$$

表現も状態にかけるとき位相 $e^{i\theta}$ の自由度が許される。

射影表現

群演算で生じる位相のズレを許す。

定義 (射影表現)

群 G の表現 $\hat{U}$ が

$$\hat{U}_g \hat{U}_h = e^{i\theta(g,h)} \hat{U}_{gh}$$

の形をとるとき、これを射影表現という。

例 (スピン 1/2 π 回転)

3 次元空間の回転は SO(3) で表せる。180º 回転を $g \in \mathrm{SO}(3)$ とすると、群の捜査としては 360º 回転 g^2 は何もしないのと同じ: $g^2 = 1$. だが、スピン 1/2 表現では

$$U_g U_g = e^{i\pi} U_{g^2} = -1$$

とすることが許される。

射影表現なら縮退

定理 (射影表現なら縮退)

表現が非自明な射影表現なら、基底状態は縮退する。

対偶「縮退が絶対に起きない 1 次元表現なら表現は射影表現でない」がわかりやすい。群演算で生じる位相のズレ

$$\hat{U}_g \hat{U}_h \hat{U}_{gh}^{-1} = e^{i\theta(g,h)}$$

は

エネルギー固有状態と既約表現

- $\mathcal{H}$: Hilbert 空間
- G: 対称性を与える群
- $\hat{}$: $G \to$ set of operators on $\mathcal{H}$

対称性変換: $g \in G$ で状態が $|\psi\rangle \mapsto \hat{g}\,|\psi\rangle$ と変換. $\hat{g} \in \mathrm{U}(\mathcal{H})$ は $g \in G$ の表現.
系が対称性を満たす ($[\hat{g}, \hat{H}] = 0$) なら,

$$\hat{H}\hat{g}\,|E\rangle = E\hat{g}\,|E\rangle$$

$\hat{g}$ は固有値ごとにブロック対角化されている
$\longrightarrow$ エネルギー固有状態は G の既約表現の基底

射影表現

- $\mathcal{H}$: Hilbert 空間
- G: 対称性を与える群
- $\hat{}$: $G \to$ set of operators on $\mathcal{H}$

量子状態は U(1) 位相自由度を同一視:

$$\hat{g}\hat{h}\,|\psi\rangle = e^{i\theta_{g,h}}\widehat{(gh)}\,|\psi\rangle$$

としても差し支えない. 位相自由度を演算子に付与 → 射影表現
U(1) 位相自由度を射影表現にも与える ⟶ $[\theta_{g,h}]$ の同値類 (**乗数系**) を組める.
cf. 線形表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ は $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$.

例

スピン 1/2 系の π 回転 z 軸周り π 回転は $U_\pi^2 = U_{2\pi} = 1$ を満たすが, スピンに作用すると

$$(\hat{U}_\pi)^2 = (e^{-\pi i \hat{S}^{(3)}})^2 = -1 = e^{i\pi}\hat{U}_{2\pi}$$

射影表現の同値類

$$\hat{g}\hat{h} = e^{i\theta_{g,h}}\widehat{gh}$$

U(1) 位相自由度を $\hat{g}$ などにも与えて $\hat{g} \sim \hat{g}e^{i\alpha_g}$ を同一視.

$$e^{i\theta_{g,h}} \sim \frac{e^{i\alpha_{gh}}}{e^{i\alpha_g}e^{i\alpha_h}}e^{i\theta_{g,h}}$$

特に $\{\hat{g}\}$ が 1 次元表現 (U(1)) の場合は，この同一視により

$$e^{i\theta_{g,h}} \sim e^{i\theta_{g,h}}\frac{\widehat{gh}}{\hat{g}\hat{h}} = 1.$$

定理

1 次元射影表現は自明状態の U(1) 位相自由度により同一視すると, 1 次元射影表現は本質的に全ての $\theta_{g,h}$ を 0 とできる.
双対から, **本質的に非自明な射影表現は**表現次元が 2 以上なので**基底状態が縮退**する.