

たしざん・かけざんだけでまなぶりょーしりきがく

低音

September 21, 2024

このセミナーで登場しないもの

- 実験事実
- 波動関数
- シュレディンガー方程式
- 微積分
- 三角関数

なぜ「物理」をやらないのか？

1 現象が直観とかけ離れている

- 状態の重ね合わせ？
- 測定したら状態が変わる？
- エンタングルメント？

2 学部1年の線形代数だけで理解できる

- 複素ベクトル
- エルミート行列
- ユニタリ行列

計算できるようになると、なぜか感覚を掴めてくる

1 べくとるときょーれつ

2 こゆーほーてーしき

3 ひょーげんろん

4 ぶんるいもんだい

ベクトル

ベクトルは数がいっぱい並んだもの。4つ数が並ぶと4次元。
量子力学のお約束に従って、ブラ・ケットで書くと、後々直感的にわかりやすい。

$$|1, 2, 4, 3\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{---} \boxed{|1, 2, 4, 3\rangle}$$

$$\langle 1, 2, 4, 3| = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 3] = \boxed{\langle 1, 2, 4, 3|} \text{---}$$

量子力学ではベクトルは状態を表すので、**状態ベクトル**と呼ぶことにする。

状態ベクトルの足し算

同じ次元のブラ同士、ケット同士なら単純に足すだけ。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

次元が違うもの、ブラとケットは足せない。
足し算の延長でスカラー倍もそのまま。

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

状態ベクトルどうしの掛け算 (内積)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ = 1$$

具体的な計算をしないなら、お絵描きしたほうがわかりやすい。

$$\boxed{\langle 1, 2, 4, 3 |} \text{ ————— } \boxed{| 5, 1, -3, 2 \rangle} = 1$$

脚が出てないので状態ベクトルじゃない。

一方その頃量子力学では

量子力学では, すべての情報はベクトルが持っている.
状態ベクトル=状態。

prop. 1: 測定により $|\psi\rangle$ が測定される確率

$$P_{\psi} \propto \langle \psi | \psi \rangle = \boxed{\langle \psi |} \boxed{|\psi \rangle}$$

状態って???

→ 詳しい話はその後

行列の状態ベクトルへの作用

$$\begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{blue}{2} \\ \textcolor{green}{-1} & \textcolor{red}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} \cdot 1 + \textcolor{blue}{2} \cdot (-2) \\ \textcolor{green}{-1} \cdot 1 + \textcolor{red}{4} \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

こういうのを

$$\hat{H}|\psi\rangle = |H\psi\rangle$$

$$\text{---} \boxed{\hat{H}} \text{---} \boxed{|\psi\rangle} = \text{---} \boxed{|H\psi\rangle}$$

みたいを書く。 \hat{H} は状態ベクトルを状態ベクトルにするので脚が2本。

$$\hat{H} = \text{---} \boxed{\hat{H}} \text{---}$$

行列積

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e\alpha + f\beta \\ g\alpha + h\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(e\alpha + f\beta) + b(g\alpha + h\beta) \\ c(e\alpha + f\beta) + d(g\alpha + h\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ae + bg)\alpha + (af + bh)\beta \\ (ce + dg)\alpha + (cf + dh)\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$\text{---} \boxed{\hat{A}} \text{---} \boxed{\hat{B}} \text{---} = \text{---} \boxed{\widehat{AB}} \text{---}$$

行列積

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NN} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + \cdots + A_{1N}B_{N1} & \cdots & A_{11}B_{1N} + \cdots + A_{1N}B_{NN} \\ A_{21}B_{11} + \cdots + A_{2N}B_{N1} & \cdots & A_{21}B_{1N} + \cdots + A_{2N}B_{NN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}B_{11} + \cdots + A_{NN}B_{N1} & \cdots & A_{N1}B_{1N} + \cdots + A_{NN}B_{NN} \end{bmatrix}$$
$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{iN}B_{Nj}$$

むずそうなことやってるけど、結局は足し算と掛け算がいっぱいあるだけ。

一方その頃量子力学では

状態を変換すると別の状態になる

- 回転する
- ズラす
- 交換する

状態ベクトルを状態ベクトルに移すので、行列による作用で表せる

$$\text{---} \boxed{|\psi\rangle} \mapsto \text{---} \boxed{\hat{U}} \text{---} \boxed{|\psi\rangle}$$

1 べくとるときょーれつ

2 こゆーほーてーしき

3 ひょーげんろん

4 ぶんるいもんだい

わかる人には一発でわからせる固有方程式

Definition 1: 固有方程式

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

固有状態ベクトル 固有値 固有状態ベクトル

$$\hat{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle$$

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{|\phi\rangle} = E \text{---} \boxed{|\phi\rangle}$$

固有方程式 定義のポイント

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \boxed{|\phi\rangle} = E \text{---} \boxed{|\phi\rangle}$$

- 両辺の固有状態ベクトル $|\phi\rangle$ は同じ
- 固有値 E はただの実数

H を決めると $(E, |\phi\rangle)$ の組が (一般には複数個) 出現

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (E, |\phi\rangle) = \left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \left(-1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (E, |\phi\rangle) = \left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}\right), \left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}\right)$$

期待値ってなに？

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \boxed{\langle \psi |} \text{---} \boxed{\hat{H}} \text{---} \boxed{|\psi \rangle}$$

期待値に見える？

→ 固有状態ベクトルに直せばわかる！

固有方程式で見る期待値

\hat{H} の固有値 E_1, E_2, \dots の固有ベクトル $|E_1\rangle, |E_2\rangle, \dots$ により

$$|\psi\rangle = c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle + \dots$$

と展開すると、

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle &= c_1 \langle\psi|\hat{H}|E_1\rangle + c_2 \langle\psi|\hat{H}|E_2\rangle + \dots \\ &= E_1 c_1 \langle\psi|E_1\rangle + E_2 c_2 \langle\psi|E_2\rangle + \dots \end{aligned}$$

手を動かせ

e.g. 1: 2×2 でやってみよう!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1 べくとるときょーれつ

2 こゆーほーてーしき

3 ひょーげんろん

4 ぶんるいもんだい

1 べくとるときょーれつ

2 こゆーほーてーしき

3 ひょーげんろん

4 ぶんるいもんだい