

多層膜ミラーによる COW 効果の検出

齊藤巧磨

松井一堯

2024 年 3 月 28 日

概要

純粋な量子現象に重力が関わるものとして、COW 効果が知られている。[3] 重力ポテンシャルが波動関数の位相に取り入れられ、2 つの経路のビームを干渉させることで検出される。この現象は Collela, Overhauser と Werner によって単色熱中性子で検証された。[1] 単結晶の Bragg 反射を用いた従来の実験手法ではセットアップが簡単な一方で、使用できる中性子の波長が離散的になる。本実験では多層膜ミラー [2] を用いてこの問題点を解消することを試みた。

1 測定原理

1.1 中性子の干渉で発生する位相差

地上の中性子は重力ポテンシャルを受け、非相対論的には Hamiltonian が

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgy$$

となる。 \mathbf{p} は運動量、 m は中性子質量、 g は重力加速度でそれぞれ定数、 z は基準面からの高さである。中性子が弧長パラメーター s で表される軌道 $\gamma(s)$ を速さ $v(s)$ で通過するとき、Schrödinger 方程式の解は

$$\varphi = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int dt \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgy \right) \right] = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{\gamma} \frac{ds}{v} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgy \right) \right]$$

の形で表される。図 1 のような経路を熱中性子が走る場合、中性子を波長 $\lambda = h/mv$ の単色平面波で近似すれば、面積 A の平行四辺形での干渉によって点 E で位相差

$$i\Delta\Phi_g := i(\Phi_{\text{BCE}} - \Phi_{\text{BDE}}) = \frac{mg}{i\hbar} \oint_{\text{BDEC}} ds \frac{z}{v} = -i \frac{2\pi\lambda m^2 g A}{h^2} \sin \delta \quad (1)$$

が生じる。

四角形 BDCE が平行四辺形から歪むと経路長や面積が変わって新たに位相差が生じる。図 2 のようにギャップ D のエタロン 2 組が平行から相対角 α だけずれているとき、(1) に現れる面積を四角形 BDEC で計算すると、

$$\Delta\Phi_g \simeq -\frac{2\pi m^2 g}{h^2} \left(2DL \cot 2\theta - \frac{D^2}{2\sin^2 \theta} \alpha \right) \lambda \quad (2)$$

と近似される。加えて経路長の変化により

$$\Delta\Phi_\alpha \simeq 4\pi D \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{Nb_c}{2\pi\theta^2} \lambda \right) \alpha \quad (3)$$

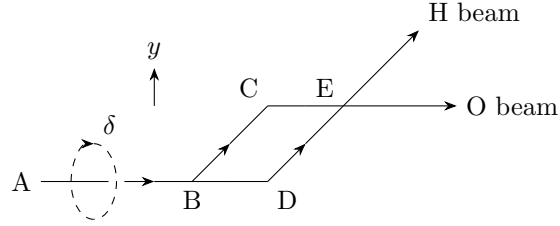


図 1: 中性子の経路。O ビーム、H ビームは共に $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E$, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$ の経路で進んだ中性子の干渉を反映する。AB を軸に全系を回転させると干渉が変化する。回転角度 δ は平行四辺形が水平面となす角で、図のように平行四辺形が鉛直面内にあるとき CE が BD よりも高い位置にあるとき $\delta = \pi/2$ とする。 $\delta = \pm\pi/2$ とき干渉が最大で、0 のときは干渉しない。

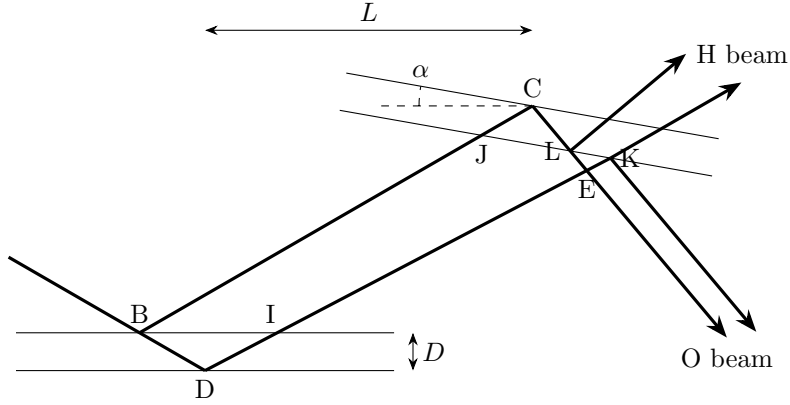


図 2: エタロンの相対角 α によるビーム経路 (太線) の変化。 $\alpha = 0$ のときに点 E, K, L が同一点になる。長さ L は 1 枚目のエタロンと平行に測ったエタロン間距離。

が現れる。これは屈折率

$$n \simeq 1 - \frac{\lambda^2 N b_c}{2\pi}$$

による効果を表し、 N, b_c はそれぞれ原子密度、中性子-原子核の散乱長である。[2] 本実験の装置は α を自由に変更することができ、 $\alpha = 0$ に設定されている保証はない。位相差は (2) と (3) の和

$$\Delta\Phi = \Phi_{BCE} - \Phi_{BDE} = \Delta\Phi_g + \Delta\Phi_\alpha \quad (4)$$

が実測される。

B, C, D, E 各点での反射や透過による位相の変化を考慮しても、上述の位相差を取り出せる。図 3 のような散乱体において入射、反射、透過の波動関数の間に

$$\begin{pmatrix} \psi_o^1 \\ \psi_o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ t' & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i^1 \\ \psi_i^2 \end{pmatrix}$$

の関係があるとする。確率の保存から行列はユニタリでなければならず、

$$|r|^2 = |r'|^2 = 1 - |t|^2 = 1 - |t'|^2, \quad r^*t + r't'^* = r^*t' + r't^* = 0 \quad (5)$$

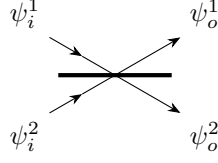


図 3: 入射・反射・透過波の波動関数。上面を表とする。

を満たす。ハーフミラーと全反射ミラーはそれぞれ同一のものであるとして、それぞれに対応する行列を

$$\begin{pmatrix} r & t \\ t' & r' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R & T \\ T' & R' \end{pmatrix}$$

とすれば、点 B にて波動関数 Ψ_0 だったものは点 E にて

$$\begin{cases} \Psi_H = \Psi_0(r_B t'_J R_C r'_L e^{i\Phi_{BCE}} + t'_B R_D t_1 t'_K e^{i\Phi_{BDE}}) \\ \Psi_O = \Psi_0(r_B t'_J R_C t_L e^{i\Phi_{BCE}} + t'_B R_D t_1 r_K e^{i\Phi_{BDE}}) \end{cases}$$

となる。 $|\Psi_0|^2 = 1$ として (5) を利用すると、ビーム強度は

$$\begin{cases} I_H = |R|^2 |t|^2 (|r|^4 + |t|^4 - 2|r|^2 |t|^2 \cos(\Phi_{BCE} - \Phi_{BDE})) \\ I_O = 2|r|^2 |R|^2 |t|^4 (1 + \cos(\Phi_{BCE} - \Phi_{BDE})) \end{cases}$$

である。ビーム強度は λ の関数として表されるので、

$$\mathcal{O}(\lambda) := \frac{I_H - I_O}{I_H + I_O} = (|r|^2 - |t|^2)^2 - 4|r|^2 |t|^2 \cos(\Delta\Phi) \quad (6)$$

となり、 λ と比較すれば、位相差 $\Delta\Phi$ を取得できる。

1.2 多層膜ミラーの反射・透過特性

多層膜ミラーの反射・透過率は 1 次元ポテンシャル問題として計算できる。本研究で使用したミラーは 4 のようにガラスに Ti と Ni を積層しているものであり、それぞれ層の内部では中性子に optical potential がかかる。[4] V_i と k_i を i 番目の層における optical potential および波数の垂直成分、入射粒子の波数を k とすると、エネルギー保存から

$$k^2 = k_j^2 + \frac{2mV_j}{\hbar^2}$$

を得る。 $n_j^2 := k_j^2/k^2$, $\zeta := kx$ とすると、エネルギー E で入射した中性子の Schrödinger 方程式は

$$\frac{d^2 \Psi_j}{d\zeta^2} = \frac{2m(V_j - E)}{\hbar^2 k^2} \Psi_j(\zeta) = -n_j^2 \Psi_j(\zeta)$$

と表せ、第 j 層と第 $j+1$ 層の波動関数の間には

$$\begin{pmatrix} \Psi_{j+1} \\ \Psi'_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n_j \delta_j & n_j^{-1} \sin n_j \delta_j \\ -n_j \sin n_j \delta_j & \cos n_j \delta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_j \\ \Psi'_j \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} \Psi_j \\ \Psi'_j \end{pmatrix}$$

の関係が成り立つ。よって全ての層を通して

$$\begin{pmatrix} \Psi_g \\ \Psi'_g \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi'_0 \end{pmatrix} \quad \left[M = M_N \cdots M_2 M_1 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \right]$$

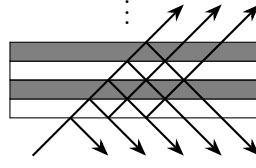


図 4: 多層膜ミラーの構造とビームの反射・透過。

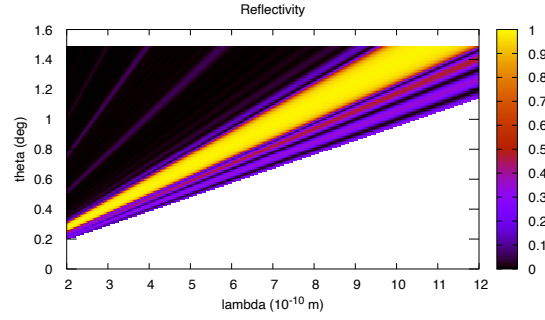


図 5: ミラーの反射率。計算にあたって [4] を参考にした。

と書ける。 $\Psi_0 = e^{ik\zeta_0} + Re^{-ik\zeta_0}$, $\Psi_g = Te^{ik(\zeta+\zeta_0)}$ となる R, T を求めると、

$$R = \frac{(M_{21} + ikM_{22}) - ik(M_{11} + ikM_{12})}{ik(M_{11} - ikM_{12}) - (M_{21} - ikM_{22})} \quad (7)$$

$$T = \frac{2e^{-ik\zeta}ik}{ik(M_{11} - ikM_{12}) - (M_{21} - ikM_{22})}$$

を得る。

これをもとに本研究で用いるミラーの反射率を入射角 θ , 波長 λ ごとに計算すると、図 5 のようになった。実験には反射率が安定している波長帯を与える入射角が望ましい。(2) の角度依存性、使用する中性子ビームの波長帯、先行研究 [2] でのセットアップを合わせて考慮し、事前シミュレーションでは $\theta = 1.05^\circ$ を採用した。

2 数値計算による実験方法の検討

図 5 に示すようにミラーの反射率、透過率は中性子の波長 λ や入射角 θ に大きく依存するため、手計算で実験結果を予測するのは非現実的である。そこで実験に先立ち、

- 波動関数の直接計算による確率分布の計算
- 確率分布に基づくモンテカルロシミュレーション

を行った。

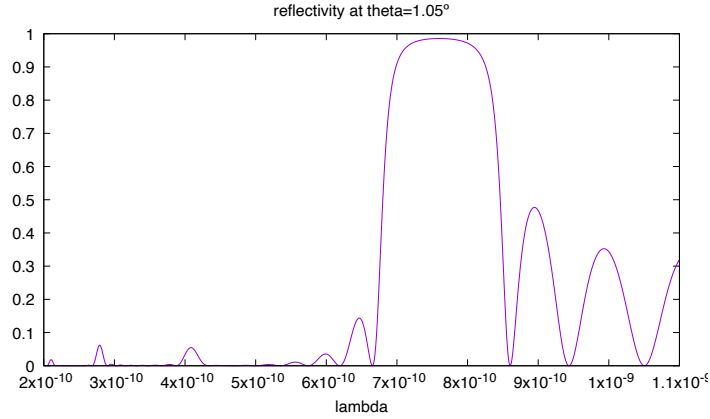


図 6: 入射角 $\theta = 1.05^\circ$ におけるミラーの反射率。

2.1 波動関数の直接計算

はじめに、波動関数を直接計算して (6) の $\mathcal{O}(\lambda)$ の分布を計算した。計算は

1. 波長を決定
2. (7) からミラーの反射率・透過率を計算
3. 図 2 点 E における H ビーム、O ビームの波動関数を計算
4. ビームの検出確率を計算
5. $\mathcal{O}(\lambda)$ を計算
6. $\mathcal{O}(\lambda)$ を高速フーリエ変換

の順に行った。図??をもとに、 $\mathcal{O}(\lambda)$ のフーリエ変換は反射率が安定する $7 \times 10^{-10} \text{ m} \leq \lambda \leq 8 \times 10^{-10} \text{ m}$ の範囲で行う。シミュレーション結果は測定時間無限大に相当する。

δ, α を変えて計算したところ、 $\mathcal{O}(\lambda)$ のフーリエ変換は図??のようになった。

δ を変更しても $2 \times 10^{11} \text{ m}^{-1}$ 以下の低周波数領域がバックグラウンドとして残っている。バックグラウンドは主に FFT を行なっている波長領域 $7 \times 10^{-10} \text{ m} \leq \lambda \leq 8 \times 10^{-10} \text{ nm}$ におけるミラーの反射率から由来しているものと考えられる。 $\delta < 30^\circ$ ではピークがバックグラウンドと重なるため重力の効果のみを分離することが難しい。一方で δ を大きくすると特に大きい α でピークが低く広がるため傾斜角度は小さい方が望ましい。加えて今回用いるビームの形状とアラインメントでは $\delta > 30^\circ$ にてミラーの一部がビームからはみ出るため統計量を稼げなくなる。以上を考慮して、本実験では $\delta = 0$ と $\delta = 30^\circ$ を比較することで重力の効果を検証する。

2.2 モンテカルロシミュレーション

統計誤差を見積もるため、2.1 で求めた確率分布に従いモンテカルロシミュレーションを行った。2.1 の確率分布の計算と合わせたアルゴリズムは図 6 の通りである。

ビームの波長分布に応じた個数の試験粒子を用意し、2.1 で計算した検出確率に応じてランダムに分配した。

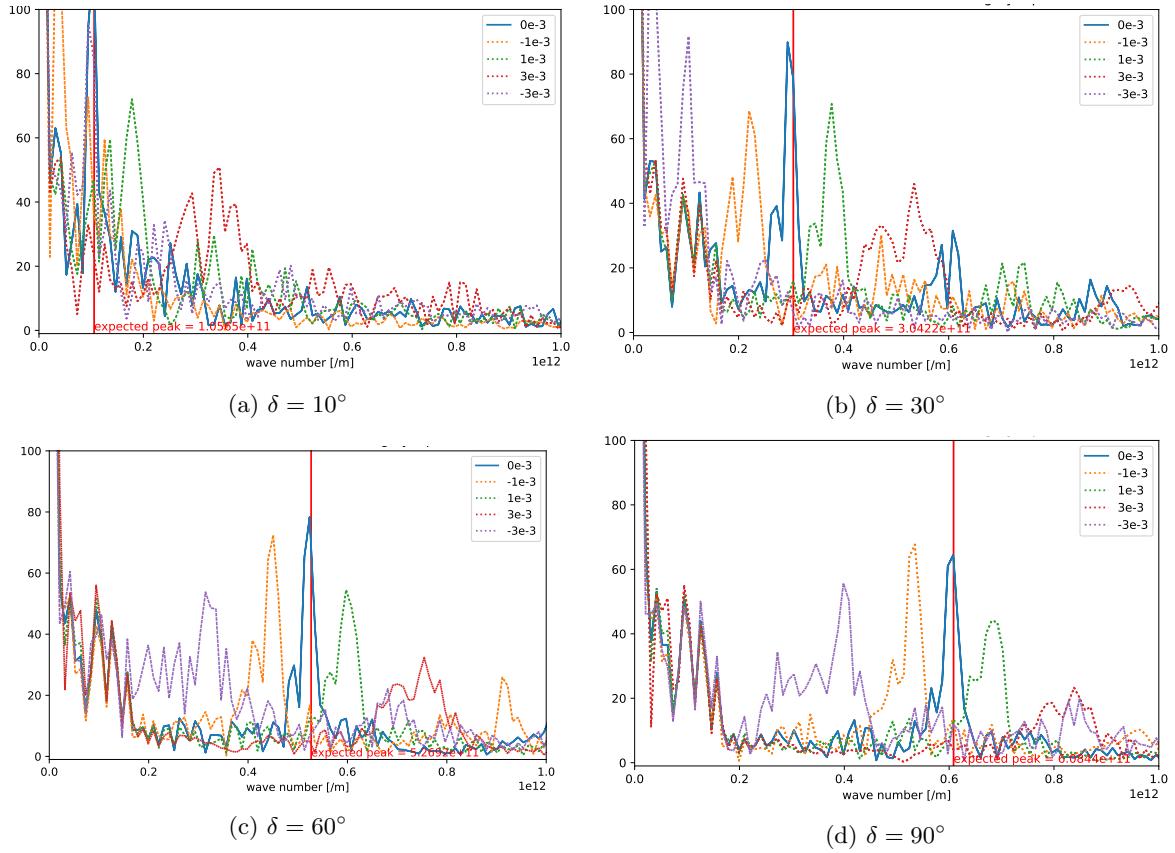


図 7: $\mathcal{O}(\lambda)$ のフーリエ変換。赤の縦線は (1) から予想されるピーク位置を表す。青の実線が $\alpha = 0$ の場合であり、紫、黄、緑、茶の点線がそれぞれ $\alpha = -3 \text{ m deg}$, -1 m deg , 1 m deg , 3 m deg に対応する。

10 分に相当する粒子数で計算した結果、 $\mathcal{O}(\lambda)$ は図??のようになった。

以上を踏まえて、本実験では $\delta = 0$ と $\delta = 30^\circ$ で 10 min 以上計測し、フーリエ成分を比較、重力加速度を逆算して $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ と照合する。

謝辞

実験の構想、計画段階では、2021 年度 P2 で COW 効果の実験 [5] をされた高エネルギー物理学研究室の竹内広樹さんに貴重なご意見をいただきました。それまでは論文の計算を追うのみで、具体的な実験計画の方針を立てられずにいましたが、アドバイスをいただいたおかげで、実験の計画を練り始め軌道に乗せられるまでになりました。

実験の計画から実現に渡り、高エネルギー加速器研究機構物質構造科学研究所の三島賢二さん、名古屋大学理学研究科の北口雅暁さんに多くをご指導いただきました。ビームタイムの 4 ヶ月前から事前シミュレーションの検討、実験手法への助言をいただきました。5 日もの長期間にわたってビームタイムを確保していただき、またエタロンのセットアップは完成品 [2] をほぼそのまま使わせていただきました。

ビームタイム当日は、名古屋大学理学研究科の南部太郎さん、藤家拓大さんのご協力がなければ、この実験は成立しませんでした。装置の操作、実験結果の解析だけでなく、実験の方針、考察までお手伝いいただきま

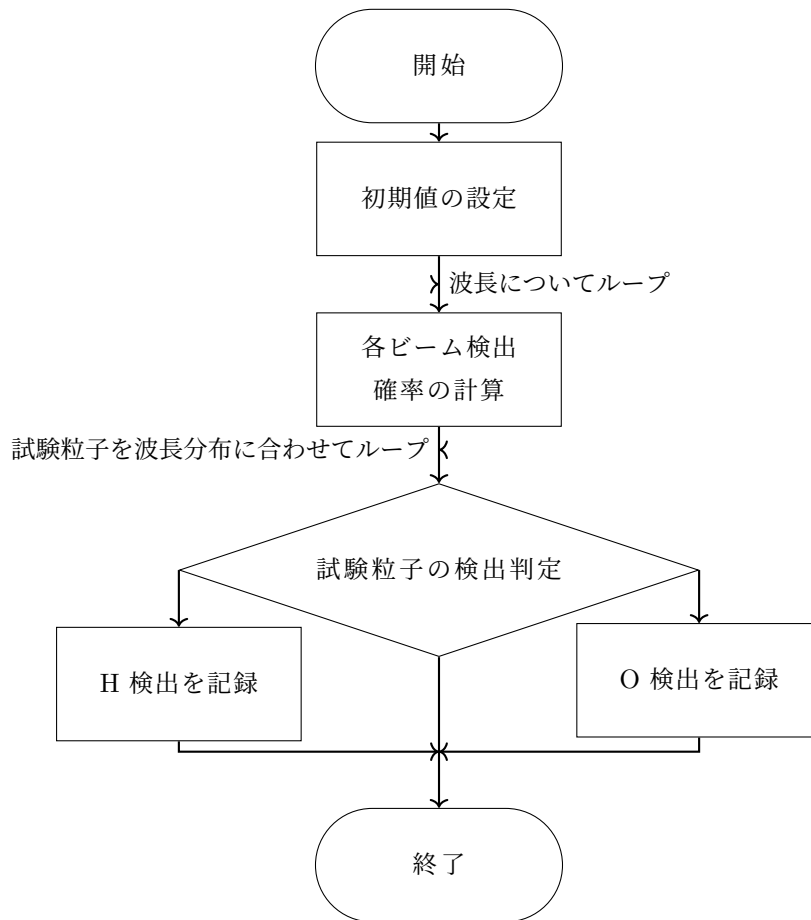


図 8: モンテカルロシミュレーションのアルゴリズム。波動関数を直接計算することでビームの検出確率 (3 段階目) を導出し、2.1 の計算に用いる。ビームの波長分布に合わせて試験粒子をランダムに生成し、直前で求めた各ビームの検出確率に従って検出を判定、記録する (5 段階目)。検出記録は 2.2 に使用する。

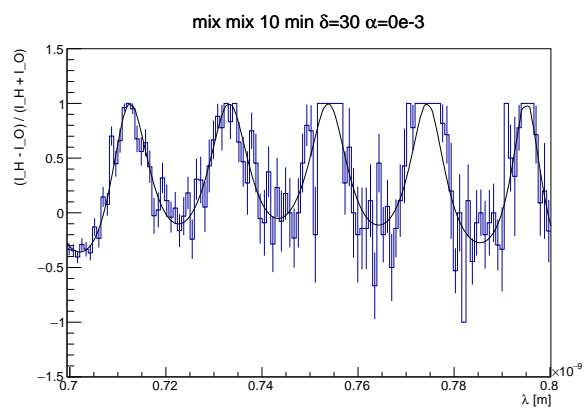


図 9: モンテカルロシミュレーションから求めた $\mathcal{O}(\lambda)$ 分布と理論曲線。

した。装置のセットアップは過去の研究から多くを参考にいたしました。

1 年に渡りご指導いただいた指導教員の中家剛さん、木河達也さんに心より感謝申し上げます。TA の星野大輝さん、有元隼太さんにも、長きにわたって大変お世話になりました。

参考文献

- [1] R. Colella, A. W. Overhauser, and S. A. Werner. Observation of gravitationally induced quantum interference. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 34, pp. 1472–1474, Jun 1975.
- [2] Takuhiro Fujiie, Masahiro Hino, Takuya Hosobata, Go Ichikawa, Masaaki Kitaguchi, Kenji Mishima, Yoshichika Seki, Hirohiko M. Shimizu, and Yutaka Yamagata. Development of neutron interferometer using multilayer mirrors and measurements of neutron-nuclear scattering length with pulsed neutron source. *Physical Review Letters*, Vol. 132, No. 2, January 2024. 多層膜ミラー.
- [3] A. W. Overhauser and R. Colella. Experimental test of gravitationally induced quantum interference. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 33, pp. 1237–1239, Nov 1974.
- [4] Yoshichika Seki. *Multilayer Neutron Interferometer with Complete Path Separation*. PhD thesis, 京都大学, 3 2011. 中性子干渉実験周辺、特に屈折率計算.
- [5] 広樹竹内, 拓実對馬, 優真武藤. 多層膜ミラーを用いた中性子干渉計の作成と重力加速度の測定. 卒論, 京都大学 (Kyoto University), 10 2022.