

# Penrose のグラフ記法によるベクトル解析 およびテンソル解析・微分形式の公式の表現

低音

2021 年 5 月 22 日

電磁気学以来、ベクトル解析の公式は決して暗記できるものではないと筆者が考えていたように、ベクトルの公式を覚えられない物理学徒は多いだろう。Levi-Civita 記号の縮約公式がわかれば暗記は不要であると世に言われるが、Levi-Civita 記号をいちいち使って計算しては非効率極まりない。効率が悪いだけならまだしも、本来自然なはずの計算が技巧的に見えてしまい、ベクトル解析を自在に操ることが難しくなってしまう。

しかし、Penrose のグラフ記法 (Penrose graphical notation; tensor diagram notation) という強力なツールを使えば、以下に示す基本的なベクトル解析の公式を暗記することなく、暗算で求められるようになる。また本来 Penrose のグラフ記法はテンソル解析のために考案されたものである。ここでは物理学のテンソル解析に頻繁に現れる完全反対称 Levi-Civita テンソルの公式、およびそれを駆使した微分形式の公式を扱っていく。物理におけるテンソル計算の難易度が格段に下がると同時に、計算を直観的に捉えることができるようになるだろう。

誤植の報告や質問などは [https://note.com/teion\\_burns/n/n5f486f83dd81](https://note.com/teion_burns/n/n5f486f83dd81) のコメント機能もしくは [https://twitter.com/teion\\_burns](https://twitter.com/teion_burns) のダイレクトメッセージに気軽に寄せていただきたい。

## 目次

1	ベクトル解析の公式の表現	4
1.1	前提知識	4
1.2	スカラーとベクトルおよび演算の定義	4
1.2.1	スカラーとベクトルの表示	4
1.2.2	スカラー倍	4
1.2.3	ベクトルの内積	4
1.2.4	3 成分の Levi-Civita 記号	5
1.2.5	ベクトルの外積	5
1.3	ベクトルの内積と外積にまつわる公式	5
1.3.1	Levi-Civita 記号の縮約公式	5
1.3.2	スカラー三重積	5
1.3.3	ベクトル三重積	6
1.3.4	ベクトル四重積	6
1.4	スカラー・ベクトルの微分作用素	6

1.4.1	勾配 $\text{grad}$	6
1.4.2	発散 $\text{div}$	7
1.4.3	回転 $\text{rot}$	7
1.4.4	ラプラシアン $\Delta$	7
1.4.5	積の微分 (Leibnitz rule)	7
1.4.6	微分順序交換	8
1.5	ベクトルの微分作用素にまつわる公式	8
1.5.1	$\text{rot grad} = 0$	8
1.5.2	$\text{div rot} = 0$	8
1.5.3	$\text{div grad} = \Delta$	9
1.5.4	$\text{grad}(fg) = g \text{ grad } f + f \text{ grad } g$	9
1.5.5	$\text{div}(fv) = \text{grad } f \cdot v + f \text{ div } v$	9
1.5.6	$\text{div}(u \times v) = \text{rot } u \cdot v - u \cdot \text{rot } v$	9
1.5.7	$\text{rot}(fv) = \text{grad } f \times v + f \text{rot } v$	10
1.5.8	$\text{rot}(u \times v) = (v \cdot \text{grad})u + u \text{ div } v - v \text{ div } u - (u \cdot \text{grad})v$	10
1.5.9	$\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$	10
1.5.10	$\text{grad}(u \cdot v) = v \times \text{rot } u + (v \cdot \text{grad})u + u \times \text{rot } v + (u \cdot \text{grad})v$	11
1.5.11	$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2 \text{ grad } f \cdot \text{grad } g + f(\Delta g)$	11
1.6	位置ベクトルの微分にまつわる公式	12
1.6.1	$\text{div } r = 3$	12
1.6.2	$\text{rot } r = 0$	12
<b>2</b>	<b>完全反対称 Levi-Civita テンソルの公式の表現</b>	<b>13</b>
2.1	前提知識	13
2.2	Penrose のグラフ記法におけるテンソルの表記	13
2.2.1	Kronecker の $\delta$	13
2.2.2	完全反対称 Levi-Civita テンソル	13
2.2.3	計量テンソル	14
2.3	Levi-Civita テンソルの縮約公式	14
2.3.1	3次元での縮約	14
2.3.2	4次元での縮約	15
<b>3</b>	<b>微分形式の公式の表現</b>	<b>18</b>
3.1	前提知識・表記上の注意	18
3.2	微分形式及び各種演算	18
3.2.1	k-form	18
3.2.2	Lie 微分	19
3.2.3	wedge 積	19
3.2.4	外微分	20
3.2.5	内部積	20

3.3	微分形式の公式 . . . . .	21
3.3.1	Poincaré の補題 $d^2 = 0$ . . . . .	21
3.3.2	内部積の別表現 . . . . .	21
3.3.3	Cartan の公式 $(d\iota_V + \iota_V d)\omega = \mathcal{L}_V\omega$ . . . . .	21

# 1 ベクトル解析の公式の表現

## 1.1 前提知識

本節では

- スカラーとベクトルの区別
- ベクトルの内積と外積の定義
- grad, div, rot,  $\Delta$
- Einstein の縮約記法
- Kronecker の  $\delta$
- Levi-Civita 記号とその縮約公式
- 外積の Levi-Civita 記号による表示

の知識を前提とする。

基本的に添字を使う場合は Einstein の縮約記法に従って表す。また、本節では共変・反変の区別をせず、Einstein の縮約記法の添字は全て下付きとする。

## 1.2 スカラーとベクトルおよび演算の定義

### 1.2.1 スカラーとベクトルの表示

グラフ記法においてスカラーとベクトルは次のように表示できる。枝の有無で区別が可能である。この枝は 2.2.1 に示すように Kronecker の  $\delta$  を表す。

$$\begin{array}{cc} \boxed{f} & \boxed{v} \\ \text{scalar } f & \text{vector } v \end{array}$$

### 1.2.2 スカラー倍

文字式と同様、スカラーとベクトルを並べてスカラー倍を表せる。

$$\begin{array}{c} \boxed{f} \boxed{g} \boxed{v} \\ fg v \end{array}$$

### 1.2.3 ベクトルの内積

ベクトルの枝を繋ぎ合わせると内積を表す。すなわち  $u \cdot v = u_i \delta_{ij} v_j$  である。

$$\begin{array}{c} \boxed{u} \text{---} \boxed{v} \\ u \cdot v \end{array}$$

### 1.2.4 3成分の Levi-Civita 記号

以上ではスカラーやベクトルは四角で囲って表してきたが、ベクトルの添字については四角で囲わずに表すこととする。この約束のもと、3成分の Levi-Civita 記号は次のように表す。太線は反対称性を表し、枝の入れ替えで符号が変わる。

$$\overbrace{i \quad j \quad k} = - \overbrace{i \quad k \quad j} \\ \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

### 1.2.5 ベクトルの外積

ベクトルの外積  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  は次のように表せる。一番左に枝が1本残っていることからベクトルであることが一瞥できる。

$$\overbrace{i \quad \boxed{u} \quad \boxed{v}} \\ \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

## 1.3 ベクトルの内積と外積にまつわる公式

### 1.3.1 Levi-Civita 記号の縮約公式

Levi-Civita 記号の縮約公式は2で詳細を取り扱うが、ここでは公式的に用いることにする。

$$\epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$\overbrace{i \quad j} \quad \underbrace{k \quad l} = \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ k \quad l \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \quad l \end{array}$$

### 1.3.2 スカラー三重積

外積の枝にベクトルの枝をつなげればスカラー三重積を表せる。奇置換で符号が変わり偶置換で値が変わらないことが一目瞭然である。

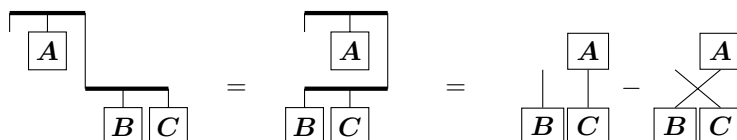
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

$$\overbrace{\boxed{A} \quad \boxed{B} \quad \boxed{C}} = \overbrace{\boxed{B} \quad \boxed{C} \quad \boxed{A}} = \overbrace{\boxed{C} \quad \boxed{A} \quad \boxed{B}} = - \overbrace{\boxed{B} \quad \boxed{A} \quad \boxed{C}}$$

### 1.3.3 ベクトル三重積

外積の枝を外積に繋げばベクトル三重積となる。先の Levi-Civita 記号の縮約公式に合わせて偶置換をする  
とより見やすい。

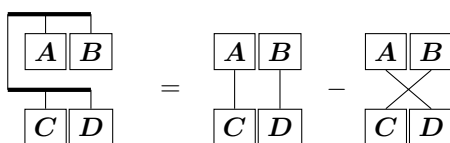
$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$



### 1.3.4 ベクトル四重積

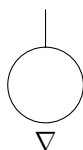
行列式を使って表すことが多い。特別行列式による表式が見やすいわけではないが、Levi-Civita 記号の縮約公式が  $\det$  で表されることを考慮すると自明であろう。

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = \det \begin{pmatrix} A \cdot C & B \cdot C \\ A \cdot D & B \cdot D \end{pmatrix}$$



## 1.4 スカラー・ベクトルの微分作用素

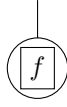
Penrose のグラフ記法で扱う微分演算子は  $\nabla$  (ナブラ) である。微分対象を円で囲い、円から枝を伸ばすことで表現する。これもまた図形的に表すことが可能である。



### 1.4.1 勾配 grad

スカラーを円で囲って枝を伸ばす。

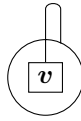
$$\text{grad } f = \nabla f$$



#### 1.4.2 発散 div

ベクトルの枝と微分演算子の枝をつなげる。枝は Kronecker の  $\delta$  を表すので  $\partial_i \delta_{ij} v_j$  を意味する。

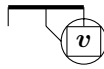
$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$



#### 1.4.3 回転 rot

単純な外積と表示は大きく変わらない。ただし微分対象は演算子のすぐ右の枝に配置する。<sup>\*1</sup>

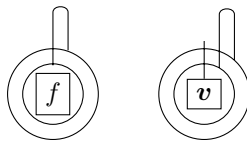
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$$



#### 1.4.4 ラプラシアン $\Delta$

2つの微分演算子の枝をつなぎ合わせる。すなわち  $\partial_i \delta_{ij} \partial_j A$  を表す。微分対象  $A$  はスカラー・ベクトルを問わない。

$$\Delta A = \nabla^2 A$$



特に  $A$  がスカラーの場合、直ちに  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$  が得られる。

#### 1.4.5 積の微分 (Leibnitz rule)

微分作用素は Leibnitz rule に従って展開可能である。

$$\nabla(AB) = \nabla(A)B + A\nabla(B)$$

---

<sup>\*1</sup> この追加ルールについては 1.5.6 を参照。

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array}$$

#### 1.4.6 微分順序交換

$C^2$  級関数 (2 階導関数が連続な関数) では微分順序の交換が可能である。グラフ記法では円の内外を入れ替えることにほかならない。

$$\begin{array}{|c|} \hline i & j \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline j & i \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array}$$

以降、特に断りのない限り全ての量は  $C^2$  級であるとする。

### 1.5 ベクトルの微分作用素にまつわる公式

本節の公式は以下に示す 5 つの変形のみを用いて導出が可能である。

- Levi-Civita 記号の反対称性 (奇置換)
- Levi-Civita 記号での偶置換
- Levi-Civita 記号の縮約公式
- Leibnitz rule
- 微分順序交換

全ての導出は Einstein の縮約記法を用いた方法と全く同じ手順である。

#### 1.5.1 $\text{rot grad} = 0$

微分順序の交換と反対称性を用いる。

$$\text{rot grad } f = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline \end{array}$$

第 1 に微分順序交換、第 2 に反対称。左辺と右辺で  $A = -A$  の形になっているので値は 0 である。

#### 1.5.2 $\text{div rot} = 0$

1.5.1 と同様に示せる。

$$\text{div rot } \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

第 1 に微分順序交換、第 2 に反対称。やはり左辺と右辺で  $A = -A$  の形になっているので値は 0 となる。

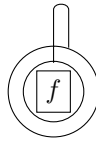


$$\text{div } \mathbf{v} = - \text{div } \mathbf{v}$$

### 1.5.3 $\text{div grad} = \Delta$

1.4.4 で紹介したが、公式として再掲する。

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f$$



### 1.5.4 $\text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g$

Leibnitz rule で展開する。

$$\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f(\text{grad } g)$$

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$$

$$\text{grad}(fg) = g \text{grad } f + f \text{grad } g$$

物理学においては、数式でも然りだが、誤解を生む形でなければベクトルのスカラー倍を表すのに必ずしもスカラー・ベクトルの順で配する必要はない。Penrose のグラフ記法でも同様である。

### 1.5.5 $\text{div}(fv) = \text{grad } f \cdot v + f \text{div } v$

これもまた Leibnitz rule で展開する。

$$\text{div}(fv) = \text{grad } f \cdot v + f \text{div } v$$

$$\nabla(fv) = \nabla f \cdot v + f \nabla \cdot v$$

$$\text{div}(fv) = \text{grad } f \cdot v + f \text{div } v$$

### 1.5.6 $\text{div}(u \times v) = \text{rot } u \cdot v - u \cdot \text{rot } v$

Leibnitz rule に加えて反対称性を用いる。

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

1.4.3 で示した「rot において微分対象は微分作用素のすぐ右の枝につなげる」ルールに従うようにする。

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\
&= \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5}
\end{aligned}$$

$$1.5.7 \quad \text{rot}(fv) = \text{grad } f \times v + f \text{rot } v$$

Leibnitz rule による展開。

$$\begin{aligned}
\text{rot}(fv) &= \text{grad } f \times v + f \text{rot } v \\
\nabla \times (fv) &= \nabla f \times v + f \nabla \times v
\end{aligned}$$

微分の内外を遵守する限り  $f$  の位置は問わない。

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$$1.5.8 \quad \text{rot}(u \times v) = (v \cdot \text{grad})u + u \text{div } v - v \text{div } u - (u \cdot \text{grad})v$$

Levi-Civita 記号の縮約公式と Leibnitz rule によって導出。

$$\begin{aligned}
\text{rot}(u \times v) &= (v \cdot \text{grad})u + u \text{div } v - v \text{div } u - (u \cdot \text{grad})v \\
\nabla \times (u \times v) &= (v \cdot \nabla)u + u(\nabla \cdot v) - v(\nabla \cdot u) - (u \cdot \nabla)v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Diagram 1} &= \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
&= \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} - \text{Diagram 6} - \text{Diagram 7}
\end{aligned}$$

$$1.5.9 \quad \text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$$

Levi-Civita 記号の縮約公式と微分順序交換から。

$$\begin{aligned}
\text{rot rot } v &= \text{grad div } v - \Delta v \\
\nabla \times (\nabla \times v) &= \nabla(\nabla \cdot v) - (\nabla \cdot \nabla)v
\end{aligned}$$

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5}$$

1.5.10  $\text{grad}(u \cdot v) = v \times \text{rot } u + (v \cdot \text{grad})u + u \times \text{rot } v + (u \cdot \text{grad})v$

初手は順当に Leibnitz rule で展開する。

$$\begin{aligned}\text{grad}(u \cdot v) &= v \times \text{rot } u + (v \cdot \text{grad})u + u \times \text{rot } v + (u \cdot \text{grad})v \\ \nabla(u \cdot v) &= v \times (\nabla \times u) + (v \cdot \nabla)u + u \times (\nabla \times v) + (u \cdot \nabla)v\end{aligned}$$

展開した形に相当する演算がないので、各項 Levi-Civita 記号の縮約公式から得られたものとみて計算する。右辺第 1 項は次の Levi-Civita 記号の縮約公式から現れる。

右辺第 2 項を移項したものが第 1 式第 1 項に一致する。第 1 式第 2 項は  $u, v$  を入れ替えたものに他ならない。結局以下の図式を得る。

1.5.11  $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2 \text{grad } f \cdot \text{grad } g + f(\Delta g)$

2 回にわたって Leibnitz rule を使う。

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= (\Delta f)g + 2 \text{grad } f \cdot \text{grad } g + f(\Delta g) \\ \nabla \cdot \nabla(fg) &= (\nabla \cdot \nabla f)g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f(\nabla \cdot \nabla g)\end{aligned}$$

## 1.6 位置ベクトルの微分にまつわる公式

位置ベクトルを  $\nabla$  で微分する際は次の縮約が可能である。

$$\frac{\partial}{\partial r_i} r_j e_j = \delta_{ij} e_j$$

これを Penrose のグラフ記法で表すと、 $\mathbf{r}$  とそれを囲う円が消えて両端がつながったように表される。

$$\text{---} \bigcirc \boxed{\mathbf{r}} \text{---} = \text{---}$$

以下では「公式」とするにふさわしいものを拾っていくことにする。

### 1.6.1 $\text{div } \mathbf{r} = 3$

右辺の 3 は次元の数で、4 次元なら 4,  $n$  次元なら  $n$  となる。

$$\text{div } \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \delta_{ii} = 3$$

$$\text{---} \bigcirc \boxed{\mathbf{r}} \text{---} = \text{---}$$

右辺の環は Kronecker の  $\delta$  の両端がつながったものであり  $\delta_{ii}$  となる。縮約のルールに則って 3 次元なら  $i = 1, 2, 3$  で足し合わせる。

### 1.6.2 $\text{rot } \mathbf{r} = 0$

位置ベクトルの微分の縮約をとる。

$$\text{rot } \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$\text{---} \bigcirc \boxed{\mathbf{r}} \text{---} = \text{---}$$

右辺は  $\epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \epsilon_{ijj}$  を表すので 0 である。

## 2 完全反対称 Levi-Civita テンソルの公式の表現

### 2.1 前提知識

本節では、

- 添字の上下
- 完全反対称 Levi-Civita テンソル
- Einstein の縮約記法
- Kronecker の  $\delta$

についての知識を前提とする。

### 2.2 Penrose のグラフ記法におけるテンソルの表記

Penrose のグラフ記法にてテンソルは階数のぶんだけ枝が出ているものとして表現される。共変と反変の区別も可能で、添字の上下に合わせて枝の向きが対応する。上向きの枝が反変成分、下向きの枝が共変を表す。

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \boxed{T} \\ | \\ k \end{array} \quad T^{ij}_k$$

#### 2.2.1 Kronecker の $\delta$

Kronecker の  $\delta$  は両端が開いた枝で表す。

$$\begin{array}{c} i \\ | \\ \text{---} \\ | \\ j \end{array} \quad \delta^i_j$$

#### 2.2.2 完全反対称 Levi-Civita テンソル

横向き太線は反対称性を表し、これによって完全反対称 Levi-Civita テンソルを表現できる。

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \quad \dots \quad | \\ i \quad j \quad \dots \quad k \end{array} \quad \epsilon_{ij\dots k} \qquad \begin{array}{c} i \quad j \quad \dots \quad k \\ \text{---} \\ | \quad | \quad \dots \quad | \end{array} \quad \epsilon^{ij\dots k}$$

Penrose の論文 [1] に合わせて階数が等しい Levi-Civita テンソルの積は以下のように表すこともできる。<sup>\*2</sup>

<sup>\*2</sup> Levi-Civita テンソルの積というよりも「反対称化」の方が言葉は適しているだろう。 $A^i B^j - B^i A^j$  のような反対称テンソルを形成するときにはこの記法が有用である。

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad \cdots \quad k \\ | \quad | \quad \cdots \quad | \\ \hline p \quad q \quad \cdots \quad r \end{array} \quad \epsilon^{ij\cdots k} \epsilon_{pq\cdots r}$$

### 2.2.3 計量テンソル

計量テンソルは添字の向きに Kronecker の  $\delta$  を曲げたような格好になる。

$$\bigcup_i^j g^{ij} \quad \bigcap_i^j g_{ij}$$

## 2.3 Levi-Civita テンソルの縮約公式

Levi-Civita テンソルの縮約は Kronecker の  $\delta$  の行列式を使って表されることが多い。

$$\epsilon^{ij\cdots k} \epsilon_{pq\cdots r} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \cdots & \delta_r^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j & \cdots & \delta_r^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \cdots & \delta_r^k \end{vmatrix}$$

一般次元での展開を Penrose のグラフ記法で表すと煩雑になるので、ここでは相対論で多用する 3 次元、4 次元での縮約公式を取り上げる。当然 3, 4 以外の次元でも同様である。

### 2.3.1 3 次元での縮約

Kronecker の  $\delta$  を使って縮約を愚直に書き出すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \delta_r^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j & \delta_r^j \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \delta_r^k \end{vmatrix} \\ &= \delta_p^i \delta_q^j \delta_r^k - \delta_p^i \delta_r^j \delta_q^k + \delta_q^i \delta_r^j \delta_p^k - \delta_q^i \delta_p^j \delta_r^k + \delta_r^i \delta_p^j \delta_q^k - \delta_r^i \delta_q^j \delta_p^k \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ | \quad | \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ | \quad | \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \diagup \quad \diagdown \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \hline p \quad q \quad r \end{array}$$

上 3 本と下 3 本の枝をつなぐ方法を全て列挙し、置換に応じた符号を与えれば良い。

Levi-Civita テンソルのグラフ記法が真価を発揮するのは一部の枝がつながっている場合であろう。

上下 1 組がつながっているときは 1.3.1 で紹介した通りである。縮約によって Levi-Civita テンソルの次数が減ると捉えられる。行列式では  $i, j, k$  及び  $p, q, r$  が各組の中で互いに異なることに注意しなければなら

ない。

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & 0 \\ \delta_p^j & \delta_q^j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j \end{vmatrix} \\ &= \delta_p^i \delta_q^j - \delta_q^i \delta_p^j\end{aligned}$$

グラフ記法では縮約をとった部分を消去すれば良い。

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \hline p \quad q \end{array} \quad \text{with a loop on the right} = \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \hline p \quad q \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \hline p \quad q \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \end{array}$$

2成分が縮約したときは、縮約した2成分の並び方を考慮して2!をかけなければならない。

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{pj k} = 2! \begin{vmatrix} \delta_p^i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\delta_p^i$$

これはグラフ記法においても同様である。

$$\begin{array}{c} i \\ | \\ \hline p \end{array} \quad \text{with a loop} = 2! \begin{array}{c} i \\ | \\ \hline p \end{array}$$

2!をかける理由はグラフ記法において直観的に理解できるだろう。例として*i, j, k*及び*p, q, r*の3成分のうち、上図のように*j, q*と*k, r*が縮約しているとする。図の縮約を表す2本の線に対して、内側に*j, q*を、外側に*k, r*を当てる場合と、内側に*k, r*外側に*j, q*を当てる場合の両方を足さなければならない。この場合の数のために2!を要する。

同様にして3成分全てが縮約したときは3!をかけなければならない。

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 3! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

やはり*i, p, j, q, k, r*の組をそれぞれの線に当てるかで3!通りあることから、係数も直観的に理解できる。

$$\begin{array}{c} \text{Diagram with 3 nested loops} \end{array} = 3!$$

### 2.3.2 4次元での縮約

以下ではEuclid計量で記述する。Minkovski計量ではEuclidの4つの共変成分全てに計量テンソル

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 0 \\ -1 & i = j \neq 0 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

がかかり、本節全ての結果に負号がつく。

Kronecker の  $\delta$  を使って愚直に計算すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijkl} \epsilon_{pqrs} &= \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^j & \delta_r^k & \delta_s^l \\ \delta_p^j & \delta_q^k & \delta_r^l & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_q^l & \delta_r^i & \delta_s^j \\ \delta_p^l & \delta_q^i & \delta_r^j & \delta_s^k \end{vmatrix} \\ &= \delta_p^i \delta_q^j \delta_r^k \delta_s^l - \delta_p^i \delta_q^j \delta_s^k \delta_r^l - \delta_p^i \delta_r^j \delta_q^k \delta_s^l + \delta_p^i \delta_r^j \delta_s^k \delta_q^l + \delta_p^i \delta_s^j \delta_q^k \delta_r^l - \delta_p^i \delta_s^j \delta_r^k \delta_q^l \\ &\quad - \delta_q^i \delta_p^j \delta_r^k \delta_s^l + \delta_q^i \delta_p^j \delta_s^k \delta_r^l + \delta_q^i \delta_r^j \delta_p^k \delta_s^l - \delta_q^i \delta_r^j \delta_s^k \delta_p^l - \delta_q^i \delta_s^j \delta_p^k \delta_r^l + \delta_q^i \delta_s^j \delta_r^k \delta_p^l \\ &\quad + \delta_r^i \delta_p^j \delta_q^k \delta_s^l - \delta_r^i \delta_p^j \delta_s^k \delta_q^l - \delta_r^i \delta_q^j \delta_p^k \delta_s^l + \delta_r^i \delta_q^j \delta_s^k \delta_p^l + \delta_r^i \delta_s^j \delta_p^k \delta_q^l - \delta_r^i \delta_s^j \delta_q^k \delta_p^l \\ &\quad - \delta_s^i \delta_p^j \delta_q^k \delta_r^l + \delta_s^i \delta_p^j \delta_r^k \delta_q^l + \delta_s^i \delta_q^j \delta_p^k \delta_r^l - \delta_s^i \delta_q^j \delta_r^k \delta_p^l - \delta_s^i \delta_r^j \delta_p^k \delta_q^l + \delta_s^i \delta_r^j \delta_q^k \delta_p^l \end{aligned}$$

これを図示してもやはり長大になることに変わらない。

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \hline p \quad q \quad r \quad s \end{array} &= \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad | \quad | \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad | \quad \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &- \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad | \quad | \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad | \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &- \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad | \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &+ \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &- \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \\ &- \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} - \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} + \begin{array}{c} i \quad j \quad k \quad l \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ p \quad q \quad r \quad s \end{array} \end{aligned}$$



縮約を受けると次元が下がるのも同じである。3次元の場合と同様、縮約をとった部分は消去する。

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqrl} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \delta_r^i & 0 \\ \delta_p^j & \delta_q^j & \delta_r^j & 0 \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \delta_r^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \delta_r^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j & \delta_r^j \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \delta_r^k \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ | \quad | \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array} \bigcirc = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ | \quad | \quad | \\ \hline p \quad q \quad r \end{array}$$

複数の成分が縮約されれば  $2!, 3!, 4!$  をかける。

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqkl} = 2! \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & 0 & 0 \\ \delta_p^j & \delta_q^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2! \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i \\ \delta_p^j & \delta_q^j \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \hline p \quad q \end{array} \bigcirc \bigcirc = 2! \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \hline p \quad q \end{array}$$

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pjkl} = 3! \begin{vmatrix} \delta_p^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3! \delta_p^i$$

$$\begin{array}{c} i \\ | \\ \hline p \end{array} \bigcirc \bigcirc \bigcirc = 3! \begin{array}{c} i \\ | \\ \hline p \end{array}$$

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{ijkl} = 4!$$

$$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc = 4!$$

### 3 微分形式の公式の表現

#### 3.1 前提知識・表記上の注意

本節では

- 微分形式の定義
- 完全反対称 Levi-Civita テンソル
- wedge 積
- 外微分
- 内部積

の知識を前提とする。

基本的に添字を使う場合は Einstein の縮約記法に従って表す。また、微分記号  $\partial_i$  は括弧を使わない限り常に直後の量のみを微分する。すなわち、 $\partial_i A^j B^k = \partial_i(A^j) B^k$ 。

$n$  次対称群を  $\mathfrak{S}_n$  で表し、 $P \in \mathfrak{S}_n$  の符号を  $\text{sgn}(P)$  とする。 $k$  階の完全反対称 Levi-Civita テンソルは以下で定義する。

$$\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} \equiv \det \begin{pmatrix} \delta_{\nu_1}^{\mu_1} & \dots & \delta_{\nu_k}^{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\nu_1}^{\mu_k} & \dots & \delta_{\nu_k}^{\mu_k} \end{pmatrix} = \sum_{P \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(P) \delta_{\nu_1}^{P(\mu_1)} \dots \delta_{\nu_k}^{P(\mu_k)}$$

#### 3.2 微分形式及び各種演算

##### 3.2.1 k-form

k-form の基底は座標基底の双対基底で

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} = \sum_{P \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_{P(k)}} = \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu'_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_k}$$

と表せ、成分と合わせると

$$\omega \equiv \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu'_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_k} \quad (1)$$

である。

Levi-Civita テンソルの表現をもとに k-form は以下のように表される。

太線は Levi-Civita テンソルを表し、 $\omega$  とラベリングされている長方形は係数  $\omega_{\mu'_1 \dots \mu'_k}$  である。すなわちこの記号全体で  $\omega_{\mu'_1 \dots \mu'_k} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_k}^{\mu'_1 \dots \mu'_k}$  となり、(1) と一致することがわかる。

グラフ記法では基底を表すのが難しいので、原則として  $dx$  などの記号は書かない。上に開いている枝は座標基底  $\partial_\mu$  に、下に開いている枝は双対基底  $dx^\mu$  に繋がっていると解釈する。

### 3.2.2 Lie 微分

テンソルに対する Lie 微分は一般に

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_V(t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k}) \\
&= V^\lambda \partial_\lambda t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} \\
&\quad - t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} V^\lambda \partial_\lambda \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} \\
&\quad - \dots \\
&\quad - t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} V^\lambda \partial_\lambda \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} \\
&\quad + t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} \otimes \partial_\lambda V^{\nu_1} dx^\lambda \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_l} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \partial_\lambda V^{\nu_k} dx^\lambda
\end{aligned} \tag{2}$$

で表される。

これを Penrose のグラフ記法で表すと以下の通り。

(2) の表示でも使える直観的な作用素の付き方の判別法を紹介しよう。微分作用素  $V = V^\mu \partial_\mu$  は Leibnitz rule に従って各々の要素を微分していく。成分  $t_{\nu_1 \dots \nu_k}^{\mu_1 \dots \mu_l}$  を微分する際は特に何も考えず丸で囲って枝を  $V$  に繋げれば良い。座標基底  $\partial_\mu$  に作用する際は、成分の四角と基底から伸びる枝の間に  $V^\mu$  と  $\partial_\nu$  が差し込まれる。

$V^\mu$  を反変で、 $\partial_\nu$  を共変で差し込める形状は左図の形のみである。同様にして双対基底  $dx^\mu$  に作用する場合を考えると、右の場合だけが許される。

### 3.2.3 wedge 積

外積 (wedge 積) は  $\xi \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$  に対して

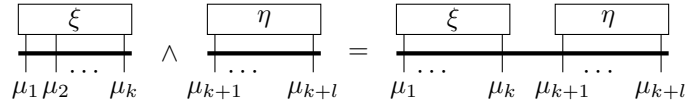
$$(\xi \wedge \eta)(V_1, \dots, V_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn}(P) \xi(V_{P(1)}, \dots, V_{P(k)}) \eta(V_{P(k+1)}, \dots, V_{P(k+l)})$$

で定義されるが、成分表示してベクトルを除くと

$$\begin{aligned}
& (\xi_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \wedge (\eta_{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+l}} dx^{\mu_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{k+l}}) \\
&= \xi_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta_{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+l}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{k+l}} \\
&= \xi_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta_{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+l}} \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_k \mu'_{k+1} \dots \mu'_{k+l}}^{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{k+l}} dx^{\mu'_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_{k+l}}
\end{aligned} \tag{3}$$

となる。

グラフ記法では、2つの微分形式それぞれを貫く Levi-Civita 記号の太線をつなげることで wedge 積を表す。これで (3) の成分に一致する。



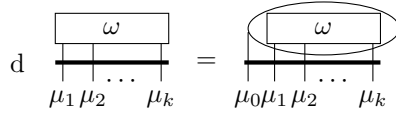
### 3.2.4 外微分

外微分は

$$\begin{aligned}
d(\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) &= \partial_{\mu_0} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k} \\
&= \partial_{\mu_0} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu'_0 \mu'_1 \dots \mu'_k}^{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu'_0} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_k}
\end{aligned} \tag{4}$$

で表される。

グラフ記法では係数を表す四角を微分記号の丸で囲い、出した枝を太線の先頭に差し込む。これで (4) に一致する。



### 3.2.5 内部積

内部積は

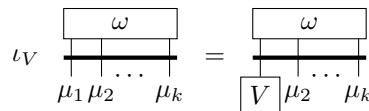
$$\iota_V \omega(V_1 \dots V_{k-1}) = \omega(V, V_1 \dots V_{k-1})$$

で定義されるが、これも成分表示によって

$$\iota_V (\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_k}^{\mu_1 \dots \mu_k} V^{\mu'_1} dx^{\mu'_2} \otimes \dots \otimes dx^{\mu'_k} \tag{5}$$

となる。

グラフ記法で表すと、先頭の枝を  $V$  で潰す形になる。(5) と比較のこと。

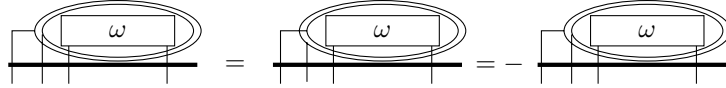


### 3.3 微分形式の公式

上記の表記を応用して微分形式の公式を直観的に導出していこう。なお以下の導出は Einstein の縮約記法を使っても、グラフ記法の流れをそのまま追うことで証明できる。

#### 3.3.1 Poincaré の補題 $d^2 = 0$

微分順序の交換と反対称性を用いる。左辺と右辺は符号だけが違うので、0 のみが許される。



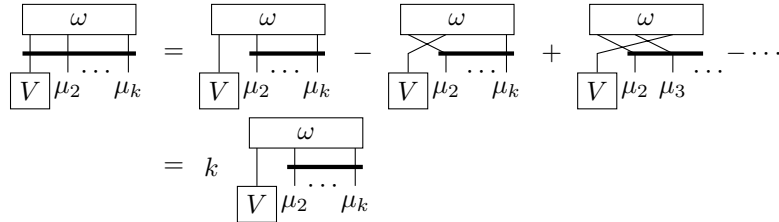
#### 3.3.2 内部積の別表現

内部積  $\iota_V \omega$  を表す方法として、ベクトル  $V$  で潰した  $\omega$  の先頭の枝を Levi-Civita テンソルから外す表し方がある。

$$\iota_V \omega = k \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \epsilon_{\mu_2' \dots \mu_k'}^{\mu_2 \dots \mu_k} V^{\mu_1'} dx^{\mu_2'} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k'}$$

Levi-Civita テンソルの添字が  $\mu_2, \mu_2'$  から始まることに注意。

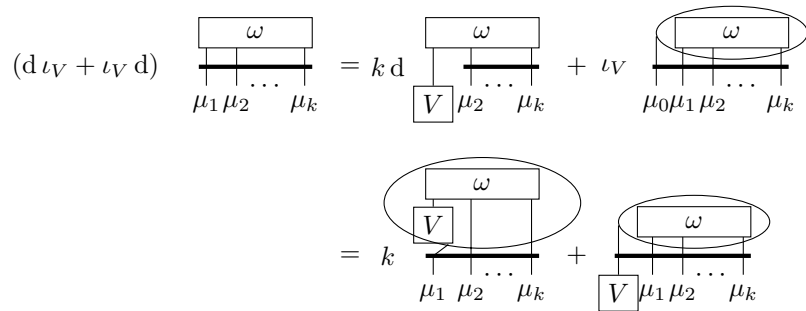
これを証明するにはまず  $V$  がつながった枝を反対称テンソルから外す。



$\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}$  が添字に対して反対称であることに注意すると、上図 1 段目右辺にて正号がつくものは偶置換で、負号がつくものは奇置換で第 1 項に戻るので、各項全て同じ値となる。全部で  $k$  項あるので 2 段目を得る。

#### 3.3.3 Cartan の公式 $(d\iota_V + \iota_V d)\omega = \mathcal{L}_V \omega$

まずは左辺を書き出してみよう。第 1 項の内部積は 3.3.2 を使うのが良い。下図 1 段目にそれぞれ外微分・内部積を作用させると 2 段目が得られる。



第 1 項は微分を Leibnitz rule によって分解する。

$$k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} = k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array}$$

第 2 項は  $V$  を反対称テンソルから外す。

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} &= \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} - \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} - \dots \\ &= \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} - k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} \end{aligned}$$

1 段目右辺第 2 項以降で、符号が正の項は偶置換で、負の項は奇置換で全て第 2 項になるので、 $V$  が微分に繋がっている初項を除き右辺は全て同じ項である。第 2 項以降は  $V$  が  $\omega$  に繋がる位置を考慮すると全部で  $k$  項あるので、2 段目を得る。

従って元の式は以下の形に等しい。

$$(d\iota_V + \iota_V d) \begin{array}{c} \omega \\ \hline \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \end{array} = k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array}$$

さらにこの右辺第 1 項は  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}$  の添字に対する反対称性から以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} k \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} &= \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} - \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + \dots \\ &= \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + \begin{array}{c} \omega \\ \hline \boxed{V} \end{array} + \dots \end{aligned}$$

元の式に戻すと、これは  $k$ -form の Lie 微分に等しい。よって Cartan の公式を得る。

$$(d\iota_V + \iota_V dx)\omega = \mathcal{L}_V \omega$$

## 参考文献

- [1] Roger Penrose, *Applications of Negative Dimensional Tensors*, Academic Press, 1971.
- [2] E. ランダウ, E. M. リフシツ, 恒藤敏彦訳「場の古典論 (原書第 6 版)」東京図書, 1978.
- [3] 中原幹夫「理論物理学のための幾何学とトポロジー 第 2 版」日本評論社, 2021.