1　完全反対称 Levi-Civita 記号の公式の表現

1.1　前提知識

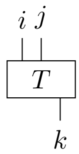
本節では,

- 添字の上下
- 完全反対称 Levi-Civita 記号
- Einstein の縮約記法
- Kronecker の δ

についての知識を前提とする.

1.2　Penrose のグラフ記法におけるテンソルの表記

Penrose のグラフ記法にてテンソルは階数のぶんだけ脚が出ているものとして表現される. 共変と反変の区別も可能で, 添字の上下に合わせて脚の向きが対応する.

$T^{ij}_k =$ 

上向きの脚が反変成分, 下向きが共変を表す.

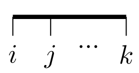
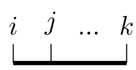
1.2.1　Kronecker の δ

Kronecker の δ は両端が開いた脚で表す.

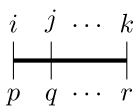
$\delta^i_j =$ 

1.2.2　完全反対称 Levi-Civita テンソル

横向き太線は反対称性を表し, これによって完全反対称 Levi-Civita テンソルを表現できる.

$\epsilon_{ij\cdots k} =$  ,　　$\epsilon^{ij\cdots k} =$ 

Penrose の論文 [?] に合わせて階数が等しい Levi-Civita テンソルの積は以下のように表すこともできる. [*1]

$\epsilon^{ij\cdots k}_{pq\cdots r} =$ 

[*1] Levi-Civita テンソルの積というよりも「反対称化」の方が言葉は適しているだろう. $M^iB^j - B^iM^j$ のような反対称テンソルを形成するときにはこの記法が有用である.

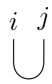
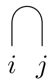
この正当性は

$$\epsilon^{i_1\dots i_n}\epsilon_{j_1\dots j_n} = \epsilon^{i_1\dots i_n}_{1\dots n}\epsilon^{1\dots n}_{j_1\dots j_n} = \epsilon^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n} \tag{1}$$

により保証される.

1.2.3　計量テンソル

計量テンソルは反変・共変に合わせて Kronecker の δ を曲げたような格好になる.

$g^{ij} =$  ,　　$g_{ij} =$ 

1.3　Levi-Civita テンソルの縮約公式

(1) を背景に, Euclid 計量における Levi-Civita テンソルの縮約は Kronecker の δ の行列式を使って表されることが多い.

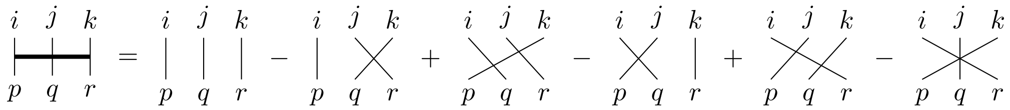
$$\epsilon^{ij\cdots k}\epsilon_{pq\cdots r} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \cdots & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \cdots & \delta^j_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \cdots & \delta^k_r \end{vmatrix}$$

一般次元, 一般計量での展開を Penrose のグラフ記法で表すと混乱を生じるので, はじめに 3 次元, 4 次元の Euclid 計量における縮約公式を取り上げる.

1.3.1　3 次元での縮約

Kronecker の δ を使って縮約を愚直に書き出すと以下のようになる.

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \end{vmatrix} \\ &= \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_r - \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_q + \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_p - \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_r + \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_q - \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_p\end{aligned}$$



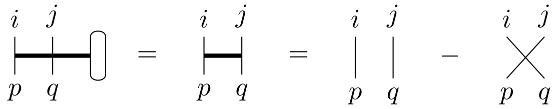
上 3 本と下 3 本の端をつなぐ方法を全て列挙し, 置換に応じた符号を与えれば良い.

Levi-Civita テンソルのグラフ記法が真価を発揮するのは一部の脚がつながっている場合だろう.

上下 1 組がつながっているときは??で紹介した通りである. 縮約によって Levi-Civita テンソルの次数が減ると捉えられる. i, j, k 及び p, q, r 各組 3 つの中で互いに異なるものだけが値を持つことに注意しなければならない.

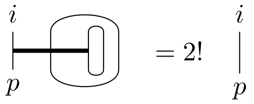
$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^j_p & \delta^j_q \end{vmatrix} \\ &= \delta^i_p\delta^j_q - \delta^i_q\delta^j_p\end{aligned}$$

グラフ記法では縮約をとった部分を消去すれば良い.



2 成分が縮約したときは, 縮約した 2 成分の並び方を考慮して 2! をかけなければならない.

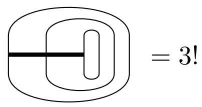
$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{pjk} = 2!\begin{vmatrix}\delta^i_p & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\delta^i_p$$



2! をかける理由はグラフ記法において直観的に理解できるだろう. 例として i, j, k 及び p, q, r の 3 成分のうち, 上図のように j, q と k, r が縮約しているとする. 図の縮約を表す 2 本の線に対して, 内側に j, q を, 外側に k, r を当てる場合と, 内側に k, r 外側に j, q を当てる場合の両方を足さなければならない. この場合の数のために 2! を要する.

同様にして 3 成分全てが縮約したときは 3! をかけなければならない.

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 3!\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 6$$



やはり (i, p), (j, q), (k, r) の組をそれぞれどの線に当てるかで 3! 通りあることから, 係数も直観的に理解できる.

1.3.2 4 次元での縮約

以下引き続き Euclid 計量で記述する. Minkowski 計量では Euclid の 4 つの共変成分全てに計量テンソル

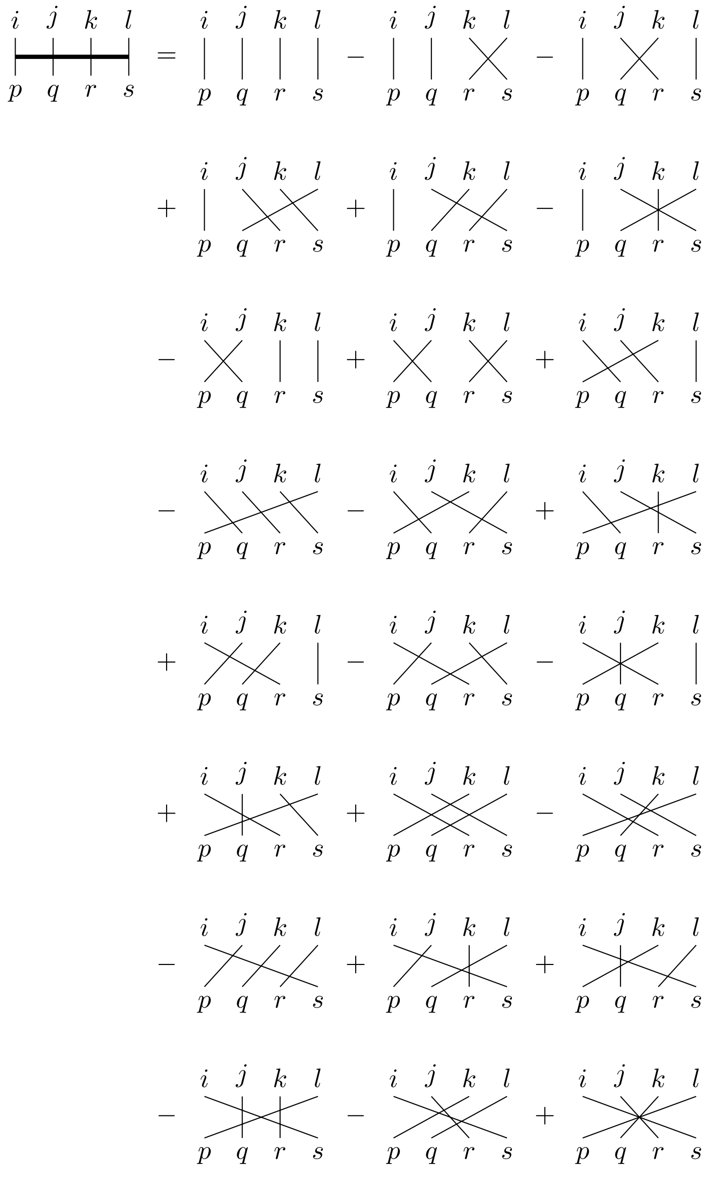
$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 0\\ -1 & i = j \neq 0\\ 0 & i \neq j\end{cases}$$

がかかり, 以下全ての結果に負号がつく.

Kronecker の δ を使って愚直に計算すると以下のようになる.

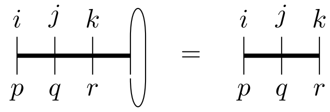
$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqrs} =& \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r & \delta^j_s \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_q & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix} \\
=& \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_r\delta^l_s - \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_s\delta^l_r - \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_q\delta^l_s + \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_s\delta^l_q + \delta^i_p\delta^j_s\delta^k_q\delta^l_r - \delta^i_p\delta^j_s\delta^k_r\delta^l_q \\
& - \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_r\delta^l_s + \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_s\delta^l_r + \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_p\delta^l_s - \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_s\delta^l_p - \delta^i_q\delta^j_s\delta^k_p\delta^l_r + \delta^i_q\delta^j_s\delta^k_r\delta^l_p \\
& + \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_q\delta^l_s - \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_s\delta^l_q - \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_p\delta^l_s + \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_s\delta^l_p + \delta^i_r\delta^j_s\delta^k_p\delta^l_q - \delta^i_r\delta^j_s\delta^k_q\delta^l_p \\
& - \delta^i_s\delta^j_p\delta^k_q\delta^l_r + \delta^i_s\delta^j_p\delta^k_r\delta^l_q + \delta^i_s\delta^j_q\delta^k_p\delta^l_r - \delta^i_s\delta^j_q\delta^k_r\delta^l_p - \delta^i_s\delta^j_r\delta^k_p\delta^l_q + \delta^i_s\delta^j_r\delta^k_q\delta^l_p
\end{aligned}
$$

これを図示してもやはり長大になることに変わりない.



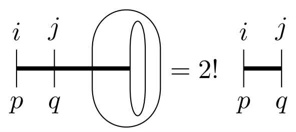
縮約を受けると次元が下がるのも同じである．3 次元の場合と同様, 縮約をとった部分は消去する．

$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqrl} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r & 0 \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \end{vmatrix};$$

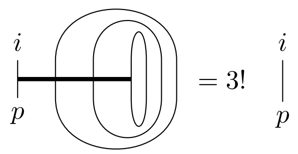


複数の成分が縮約されれば 2!, 3!, 4! をかける．

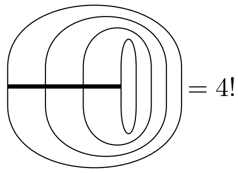
$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqkl} = 2!\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & 0 & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2!\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^j_p & \delta^j_q \end{vmatrix};$$



$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pjkl} = 3!\begin{vmatrix} \delta^i_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3!\delta^i_p;$$



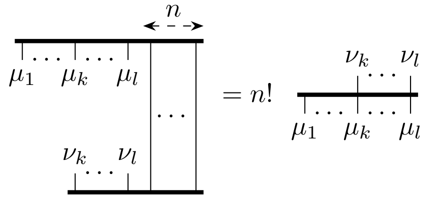
$$\epsilon^{ijkl}\epsilon_{ijkl} = 4!;$$



1.3.3　一般次元・計量での縮約

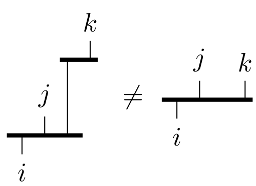
ここまでの議論を踏まえて一般次元の, 計量が入った多様体における縮約公式を確認する．Minkovski 計量に代表されるように, 計量は必ずしも正定値とは限らない．

脚が $k+n$ 本の Levi-Civita テンソルと $l+n$ 本のものとで, n 本の脚を縮約している場合は,



(2)

となる．合計 n 本の縮約があるとき, 縮約されている脚の順列 $n!$ の数だけ全く同じ値を返すことから理解される．残った脚の数は同じでなくても構わない．ただし, 残った脚がどの添字を取りうるかに注意しなければならない．例えば,



である．実際には $i \neq j = k$ の場合と $i = k \neq j$ の場合が残る．また, 反変と共変を明確に区別するため, これまでのように安易に太線 1 本にまとめることはできない．

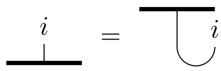
このような問題を背景に, Levi-Civita テンソルを再定義したい．まず共変 Levi-Civita テンソルを

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} = \det \begin{pmatrix} \delta^1_{\mu_1} & \cdots & \delta^k_{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^1_{\mu_k} & \cdots & \delta^k_{\mu_k} \end{pmatrix}$$

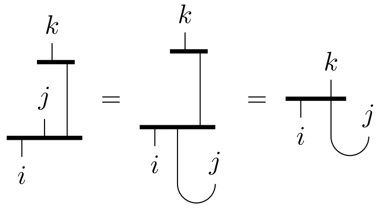
で与える．[*2] 反変テンソルは計量テンソルによって

$$\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k} = g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_k \nu_k} \varepsilon_{\nu_1 \cdots \nu_k}$$

とする．これを踏まえて



とできるので, 先ほどの例は

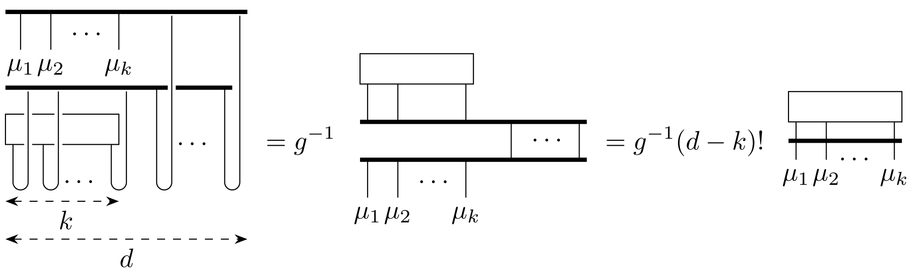


と変形できる．

特に, 空間 (多様体) の次元が d のとき,

$$\varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} = g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_d \nu_d} \varepsilon_{\nu_1 \cdots \nu_d} = g^{-1} \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_d} \tag{3}$$

である．例えば



とできる．

[*2] この定義はいささか恣意的であることを認めなければならない．特に Euclid 計量, Minkovski 計量など Levi-Civita テンソルの具体形がわかる計量からの一般座標変換 $x \to x'$ が与えられるときは, 既知の Levi-Civita テンソル $\varepsilon^{(0)}_{\mu_1 \cdots \mu_k}$ の座標変換

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x'^{\mu_k}} \varepsilon^{(0)}_{\nu_1 \cdots \nu_k}$$

を計算するべきである．k が空間 (多様体) の次元 d に等しいときは変換の係数が Jacobian になって

$$\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_d} = \sqrt{|g|} \varepsilon^{(0)}_{\mu_1 \cdots \mu_d}$$

を得る．