物理のための有限群とその表現論の定理集

齊藤 巧磨

2025 年 3 月 17 日

本稿は主に [1] をもとにしている。未完成であり、各所明記していない不足があるため注意。都度更新する。

変更履歴

2025/03/17　初稿

目次

1 群の定義と構成

1.1 群の定義

Def. 1: 群 (group)

集合 G とその中での演算 $\cdot : G \times G \to G$ が以下を満たすとき、$(G, \cdot)$ は群 (group) であるという。

結合則 (associativity) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G,\ (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
単位元 (identity) **の存在** $\exists e \in G \text{ s.t. } \forall g \in G,\ g \cdot e = e \cdot g = g$
逆元 (inverse) **の存在** $\forall g \in G,\ \exists g' \in G \text{ s.t. } g \cdot g' = g' \cdot g = e$

Rem.

以下、表記の簡略化のため、演算の記号 $\cdot$ を省略し、$g \cdot h = gh$ とする。群は G でのみ表す。

Cor. 1: 単位元の一意性

単位元は一意に定まる。

Prf.

群 G の単位元 e_1, e_2 をとると、

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2.$$

Rem.

Cor. 1 をもとに、以下群 G の単位元を $1, 1_G, e$ といった記号で表す。

Cor. 2: 逆元の一意性

任意の元 $g \in G$ の逆元は一意に定まる。

Prf.

g の逆元 g_1, g_2 について、結合則より

$$g_1 = g_1(gg_2) = (g_1 g)g_2 = g_2$$

が成り立つので、$g_1 = g_2$.

Rem.

Cor. 2 をもとに、以下群元 $g \in G$ の逆元を g^{-1} と表記する。

Def. 2: 位数・有限群・無限群

群 G の元の濃度 $|G|$ を群の位数 (order) と呼ぶ。
$|G| < \infty$ のとき、G は有限群 (finite group) であるといい、それ以外を無限群 (infinite group) という。

1.2　部分群と類別

1.2.1　部分群

Def. 3: 部分群

群 G の部分集合 $H \subset G$ もまた G の演算のもとで群であるとき、H は G の部分群 (subgroup) であるという。特に $H \subsetneq G$ が部分群である場合は真部分群 (proper subgroup) という。

Rem.

以下 H が G の部分群であることを $H \leq G$ と表す。真部分群は $H < G$ と表す。[a]

[a] $\leq, <$ いずれも比較的普及していないことに注意。使用する場合は remark が必要。

群 G の部分集合が部分群であることを判定するには、大概の場合は定義を確認すれば十分である。とはいえ以下の命題を使うと、部分群であることを判定する際に便利である。

Prop. 1: 部分群の判定

群 G の部分集合 $H \subseteq G$ に対して、

1. $H \leq G$
2. $\forall x, y \in H, x^{-1}y \in H$

は同値。

Prf.

1$\Longrightarrow$2 は自明。2 が成り立つとき、

- $x \in H$ によって $x^{-1}x = 1 \in H$ より単位元が存在
- $x \in H$ によって $x^{-1}1 = x^{-1} \in H$ より逆元が存在
- $x, y \in H$ によって $(x^{-1})^{-1}y = xy \in H$ より積が閉じる

が成り立つので H は群である。

■生成　群は得てしてより小さな部分集合の情報だけで完全に決定できることが多い。小さな部分集合から群全体を復元する操作が以下に定義する生成である。

Def. 4: 群の生成 (generate)

群 G の空でない部分集合 $S \subseteq G$ に対し、

$$\langle S \rangle := \{x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in S, p_i \in \mathbb{Z}\}$$

で与えられる群は S により生成される (generated by S) といい、$\langle S \rangle$ を S による生成群という。[a]また S を生成集合 (generating set) といい、S の元を生成元 (generator) という。

[a] $x_i = x_j$ も認めていることに注意。

Rem.

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ のときは生成群を単に $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ と書く。

Rem.

一般に「有限生成」は「生成元が有限個」という意味で使われる。生成群の位数が有限とはかぎらない。

e.g.

$(\mathbb{Z}, +)$ は $\{1\}$ により生成されるので有限生成だが、無限群である。

1.2.2 類別

部分群の類別手法は主に剰余類による分類と共役類による分類がある。いずれの分類でも以下で定義する正規部分群は中心的な役割を果たす。

Def. 5: 正規部分群 (normal subgroup)

群 G の部分群 H が任意の $g \in G, h \in H$ で $ghg^{-1} \in H$ を満たすとき、H を G の正規部分群 (不変部分群: invariant subgroup) といい、$H \trianglelefteq G$ と表す。

■剰余類

Def. 6: 剰余類 (coset)

G の部分群 $H \leq G$ をとる。$g, g' \in G$ について、

$$g \overset{\text{res}}{\sim} g' \overset{\text{def}}{\iff} g^{-1}g' \in H$$

とすると、$\overset{\text{res}}{\sim}$ は同値関係であり、これによる同値類 $gH := \{gh | h \in H\}$ を、g を代表元とする H の左剰余類 (left coset; residue class) と呼ぶ。同様に定義される $Hg := \{hg | h \in H\}$ を、g を代表元とする H の右剰余類 (right coset) という。

Prf. $\stackrel{\text{res}}{\sim}$ **が同値関係であること**

H が部分群なので単位元を含み、$g \stackrel{\text{res}}{\sim} g$. 逆元も含まれるので、$g_1 g_2^{-1} \in H \Longrightarrow g_2 g_1^{-1} \in H$ すなわち $g_1 \stackrel{\text{res}}{\sim} g_2 \Longrightarrow g_2 \stackrel{\text{res}}{\sim} g_1$. また $g_1 \stackrel{\text{res}}{\sim} g_2$, $g_2 \stackrel{\text{res}}{\sim} g_3$ ならば、

$$g_1 g_3^{-1} = (g_1 g_2^{-1})(g_2 g_3^{-1}) \in H$$

なので $g_1 \stackrel{\text{res}}{\sim} g_3$.

剰余類は雑に考えると「部分群の余り」と捉えられる。

Cor. 3: 正規部分群の左右剰余類は等しい

正規部分群 $H \trianglelefteq G$ の左側剰余類 gH と右側剰余類 Hg は一致する。

Prf.

$H \trianglelefteq G$ のときは $gH = g(g^{-1}Hg) = Hg$. ただし $g^{-1}Hg := \{g^{-1}hg | h \in H\}$.

Cor. 4: 正規部分群の剰余類の集合は群

$H \trianglelefteq G$ のとき

$$G/H := \{gH | g \in G\} \tag{1.1}$$

は群となり、群演算は代表元の演算と等価。

Prf.

H が正規部分群なので、

$$g_1 H \cdot g_2 H = g_1 (g_2 H g_2^{-1}) g_2 H = g_1 g_2 H$$

となり、代表元の演算に帰着する。

Rem.

正規部分群でない群の剰余類は一般に群とならない。

e.g.

対称群 (symmetric group) $\mathfrak{S}_n$ は $(1,2,\ldots,n)$ の置換全体の集合である。群元は $(a,b,c,\ldots,z)$ の形で表され、これは $a \mapsto b, b \mapsto c, \ldots, z \mapsto a$ のような置換を表す。たとえば $n=3$ のとき、$\mathfrak{S}_3 = \{(1),(1,2),(1,3),(2,3),(1,2,3),(1,3,2)\}$ であり、

$$\begin{aligned}(1,2) &: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3 \\ (1,2,3) &: 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1\end{aligned}$$

である。対称群は置換操作の合成で群をなす。操作は写像と同様右にあるものから順に作用させるとして、相異なる $a,b,c,d \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し

$$(a,b)(b,c,d) = (b,c,d,a)$$

のように振る舞う。

$H = \{(1),(1,2)\} \leq \mathfrak{S}_3$ は正規部分群でない。実際、

$$(1,3)(1,2)(1,3)^{-1} = (1,3)(1,3,2) = (2,3) \notin H$$

となる。同値類は

- $(1)H = \{(1),(1,2)\}$
- $(1,3)H = \{(1,3),(1,2,3)\}$
- $(2,3)H = \{(2,3),(1,3,2)\}$

で類別されるが、同じ同値類に属する二つの元が

$$(1,3)(2,3) = (1,3,2) \in (2,3)H, \quad (1,2,3)(2,3) = (1,2) \in (1)H$$

と別の同値類に移るため、同値類間の群演算は ill-defined である。

Def. 7: 剰余類群 (quotient group)

$H \trianglelefteq G$ のとき、(1.1) と代表元の演算で与えられる G/H を剰余類群 (商群; residue class group) という。

Cor. 5: 有限群の部分群の位数はもとの群の位数の約数

有限群 G と $H \leq G$ の位数は $|G|/|H| \in \mathbb{Z}$ を満たす。

Prf.

H による各剰余類 gH $(g \in G)$ の位数は $|gH| = |\{gh_1, gh_2, \ldots\}| = |H|$ を満たし、g に依存しない。よって $|G| = |G/H||H|$.

■共役類

Def. 8: 共役類 (conjugacy class)

群 G の元 g_1, g_2 に対して

$$g_1 \overset{\text{conj}}{\sim} g_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists g \in G, \quad g_1 = g^{-1} g_2 g$$

とすると、$\overset{\text{conj}}{\sim}$ は同値関係であり、これによる同値類を G の共役類という。

Prf. $\overset{\text{conj}}{\sim}$ が同値関係であること

$g = 1^{-1} g 1$ なので $g \overset{\text{conj}}{\sim} g$. $\exists g \in G$ s.t. $g_1 = g^{-1} g_2 g$ のとき、$g_2 = (g^{-1})^{-1} g_1 g^{-1}$ なので、$g_1 \overset{\text{conj}}{\sim} g_2 \Longrightarrow g_2 \overset{\text{conj}}{\sim} g_1$. $\exists h_1, h_2 \in G$ s.t. $g_1 = h_1^{-1} g_2 h_1$, $g_2 = h_2^{-1} g_3 h_2$ のとき、

$$g_1 = h_1^{-1}(h_2^{-1} g_3 h_2) h_1 = (h_2 h_1)^{-1} g_3 (h_2 h_1)$$

なので $g_1 \overset{\text{conj}}{\sim} g_3$.

Rem.

[1] に従って、共役類を

$$C_i = g_{i1} H = g_{i1} \oplus g_{i2} \oplus \cdots \tag{1.2}$$

のように直和で表す。同様に商集合を

$$G/H = \{C_1, C_2, \cdots\} = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots$$

のように表す。
この表記法は一般的でないが、Prop. 2 などで扱う類定数の演算を定義する際に便利である。

共役類は雑に考えると群元の独立性を測る指標になる。異なる共役類に属する群元は、相互に干渉しないと捉えてもいいだろう。

剰余群であれば代表元の演算によって剰余類の間の演算が定義できた。共役類でも同様に演算を定義できる。

Prop. 2: 類定数

(1.2) の記法に基づいて、共役類 $C_i = g_{i_1} \oplus g_{i_2} \oplus \ldots, C_j = g_{j_1} \oplus g_{j_2} \oplus \ldots$ の間の演算を

$$C_i C_j = g_{i_1} g_{j_1} \oplus g_{i_1} g_{j_2} \oplus \cdots \oplus g_{i_1} g_{j_n} \oplus g_{i_2} g_{j_1} \oplus \cdots \oplus g_{i_2} g_{j_n} \oplus \cdots$$

で定義する。G が有限群のとき右辺は一般に $\{c_{ij}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i,j,k=1,2,\ldots,|G/H|}$ を用いて

$$C_i C_j = \bigoplus_k c_{ij}^k C_k \tag{1.3}$$

の形でかける。

Prf.

$g_{i_k} \in C_i$, $g_{j_l} \in C_j$ $(1 \le k \le |C_i|, 1 \le l \le |C_j|)$ によって右辺に $g^{(ij)}_{kl} = g_{i_k} g_{j_l}$ が現れる。(1.3) 右辺に $g^{(ij)}_{kl}$ を与える (g_{i_m}, g_{j_n}) の組の中で、積が $C_i C_j$ に属するものの集合 $S(g^{(ij)}_{kl})$ は

$$S(g^{(ij)}_{kl}) = \{(g_{i_m}, g_{j_n}) \in C_i \times C_j | g_{i_m} g_{j_n} = g^{(ij)}_{kl}, 1 \le m \le |C_i|, 1 \le n \le |C_j|\}$$

と書ける。任意の $g \in G$ を固定して、

$$S(g^{(ij)}_{kl}) = \{(g g_{i_m} g^{-1}, g g_{j_n} g^{-1}) \in C_i \times C_j | (g g_{i_m} g^{-1})(g g_{j_n} g^{-1}) = g^{(ij)}_{kl}\}$$

$$\begin{aligned} S(g^{-1} g^{(ij)}_{kl} g) =& \{(g_{i_m}, g_{j_n}) \in C_i \times C_j | g_{i_m} g_{j_n} = g^{-1} g^{(ij)}_{kl} g\} \\ =& \{(g_{i_m}, g_{j_n}) \in C_i \times C_j | (g g_{i_m} g^{-1})(g g_{j_n} g^{-1}) = g^{(ij)}_{kl}\} \end{aligned}$$

が成り立つので、$|S(g g^{(ij)}_{kl} g^{-1})| = |S(g^{(ij)}_{kl})|$ である。すなわち (1.3) 左辺を計算して右辺に現れる $g^{(ij)}_{kl}$ の係数はその共役類で共通するので、(1.3) 右辺の形で well-defined に書ける。

Def. 9: 類定数 (class constant)

(1.3) で定義される c^k_{ij} を類定数という。

Rem.

類定数の表式 (1.3) からも分かるとおり、共役類は群ではない演算形式を持つ。この種の演算は物理では fusion rule として知られ、群よりもさらに広い概念が必要になる。

1.3 同型・準同型

Def. 10: 群の準同型 (homomorphism)・同型 (isomorphism)

二つの群 G, G' の間の写像 $f : G \to G'$ が

$$f(gg') = f(g)f(g') \qquad (\forall g, g' \in G)$$

を満たすとき、この f を群の準同型 (準同型写像) という。特に全単射の準同型で逆写像も準同型になるものを同型 (同型写像) といい、同型写像が存在する G, G' は同型である (isomorphic; $G \cong G'$) という。

Def. 11: 自己同型群 (automorophism)

恒等写像を単位元、合成を積、逆写像を逆元とした、G から G への同型写像からなる群を自己同型群と呼んで $\mathrm{Aut}(G)$ と表す。

特に、

$$\mathrm{Inn}(G) := \{f_g : G \to G | g \in G, f_g(g') = gg'g^{-1}\} \subset \mathrm{Aut}(G)$$

を内部自己同型、$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ を外部自己同型という。

Def. 12: Kernel, Image

G_1, G_2 を群とし、$f : G_1 \to G_2$ を準同型とする。

$$\mathrm{Ker}\, f := \{g_1 \in G_1 | f(g_1) = 1_{G_2}\}$$

を f の kernel,

$$\mathrm{Im}\, f := \{f(g_1) \in G_2 | g_1 \in G\}$$

を f の image という。

Cor. 6: kernel は正規部分群

G を定義域とする準同型 f について、

$$\mathrm{Ker}\, f \trianglelefteq G$$

Prf.

$f : G \to G'$, $\forall h \in \mathrm{Ker}\, f$, $\forall g \in G$ に対して、

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = f(1_G) = 1_{G'}$$

なので $ghg^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$.

Cor. 7: image は部分群

準同型 $f : G \to G'$ の $\mathrm{Im}\, f$ は G' の部分群。

Prf.

演算で閉じることは準同型性から従う。$f(1_G) = 1_{G'}$ なので $1_{G'} \in \mathrm{Im}\, f$. また $(f(g))^{-1} = f(g^{-1}) \in \mathrm{Im}\, f$.

Thm. 1: 準同型定理 (fundamental theorem on homomorphisms)

$f : G \to H$ を群準同型とする。$\pi : G \to G/\mathrm{Ker}\, f$ を自然な全射準同型 ($g \mapsto g\mathrm{Ker}\, f$) とすると、以下が可換図式になる H は $H = \mathrm{Im}\, f$ に限り、そのとき $\psi : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ は同型である。

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/\mathrm{Ker}\, f \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Prf.

ψ を $\psi(g\mathrm{Ker}\, f) = f(g)$ で与える。by construction で任意の $g \in G$ に対し $\psi \circ \pi(g) = f(g)$. $n \in \mathrm{Ker}\, f$ により $g' = gn$ と表せるとき、

$$\psi(g'\mathrm{Ker}\, f) = f(g') = f(gn) = f(g)f(n) = f(g) = \psi(g\mathrm{Ker}\, f)$$

なので ψ は同値類の代表元の取り方に依存せず well-defined. Cor. **??**を踏まえると、

$$\psi((g_1\mathrm{Ker}\, f)(g_2\mathrm{Ker}\, f)) = \psi(g_1g_2\mathrm{Ker}\, f) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \psi(g_1\mathrm{Ker}\, f)\psi(g_2\mathrm{Ker}\, f)$$

より ψ は準同型。$\psi(g\mathrm{Ker}\, f) = 1_H$ ならば $f(g) = 1_H$ なので $g \in \mathrm{Ker}\, f$ であり、ψ は単射。ψ が全射になるのは値域 H が $\mathrm{Im}\, f$ に一致するときに限り、そのような場合に ψ は by construction で一意に定まる。その場合、ψ は全単射であり、逆写像 $\psi^{-1} : \mathrm{Im}\, f \to G/\mathrm{Ker}\, f$ は $\psi^{-1}(f(g)) = g\mathrm{Ker}\, f$ で与えられる。

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(f(g_1)f(g_2)) = \psi^{-1}(f(g_1g_2)) = g_1g_2\mathrm{Ker}\, f = (g_1\mathrm{Ker}\, f)(g_2\mathrm{Ker}\, f) \\ = \psi^{-1}(f(g_1))\psi^{-1}(f(g_2))\end{aligned}$$

より ψ^{-1} は準同型なので ψ は同型。

Thm. 2: 第二同型定理

$N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ に対し、

- $HN(=\{hn | h \in H, n \in N\}) = NH(=\{hn | h \in H, n \in N\})$ は G の部分群
- $H \cap N \trianglelefteq H$ であり、$H/(H \cap N) \cong HN/N$.

Prf.

$HN = NH$ は $N \trianglelefteq G$ から従う。任意の $h_1, h_2 \in H$, $n_1, n_2 \in N$ に対し、

$$(h_1n_1)(h_2n_2)^{-1} = h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \in h_1Nh_2^{-1} = h_1h_2^{-1}N \subseteq HN$$

なので、Prop. **??** (部分群の判定) から HN は G の部分群。

任意の $h \in H$ は $hNh^{-1} = N$ なので、$H \cap N \trianglelefteq H$. 故に $H/(H \cap N)$ は群である。同様に $N \trianglelefteq HN$ なので、HN/N も群。HN/N の元は $hnN = hN$ の形を、$H/(H \cap N)$ の元は $h(H \cap N)$ の形をしているので、準同型 $F : H/(H \cap N) \to HN/N$ を $F(h(H \cap N)) = hN$ で定義する。$n \in N \cap H$ により

$$F(hn(H \cap N)) = hnN = hN$$

なので代表元の取り方に依存せず well-defined. $h \in H$ が $F(h(H \cap N)) = 1_{HN/N}$ を満たすならば $h \in N \cap H$ なので F は単射。任意の $hn \in HN$ は $hnN = hN = F(h(H \cap N))$ と表せるので F は全射。逆写像 F^{-1} は $F^{-1}(hN) = h(H \cap N)$ で与えられ、明かに準同型である。以上、F は同型。

Thm. 3: 第三同型定理

群 G の正規部分群 $N, N' \trianglelefteq G$ が $N \subseteq N'$ となるとき、以下が成り立つ。

- 準同型 $\phi : G/N \to G/N'$ で $\phi(gN) = gN'$ となるものが存在する
- $(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$

Prf.

$\phi : G/N \to G/N'; gN \mapsto gN'$ は明かに準同型であり、任意の $n \in N \subseteq N'$ に対して

$$\phi(gnN) = gnN' = gN' = \phi(gN)$$

なので代表元の取り方に依存せず well-defined.

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \{gN \in G/N | g \in N'\} = N'/N$$

であることに注意すると、Thm. 1 (準同型定理) から $(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$.

Prop. 3: 準同型の分解

準同型 $F : G \to H$, $N \trianglelefteq G$, 自然な準同型 $\pi : G \to G/N; g \mapsto gN$ を与える。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

が可換図式となる準同型 $\psi : G/N \to H$ が存在する必要十分条件は、$N \subseteq \mathrm{Ker}\, F$ である。特に ψ が同型になる必要十分条件は、$N = \mathrm{Ker}\, F$ である。

Prf.

(1.4) が可換図式となる準同型 ψ が存在するとき、明かに $\mathrm{Ker}\, \pi \subseteq \mathrm{Ker}\, F$. $N = \mathrm{Ker}\, \pi$ なので $N \subseteq \mathrm{Ker}\, F$. さらに ψ が同型ならば、$\mathrm{Ker}\, \psi = 1_{G/N} = N$ なので $N = \mathrm{Ker}\, F$.
逆に $N \subseteq \mathrm{Ker}\, F$ ならば、Thm. 3 (第三同型定理) から準同型 $\pi' : G/N \to G/\mathrm{Ker}\, F; gN \mapsto g\mathrm{Ker}\, F$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[r, "\pi'"] \arrow[ur, "\psi"] & G/\mathrm{Ker}\, F \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

$\psi' : G/\mathrm{Ker}\, F \to H;\ g\mathrm{Ker}\, F \mapsto F(g)$ とすると、$\psi = \psi' \circ \pi'$ は可換図式を満たす。[a]さらに $N = \mathrm{Ker}\, F$ ならば Thm. 1 (準同型定理) から ψ' は同型である。

[a] ψ' は Thm. 1 (準同型定理) の証明で構成した ψ と同じものである。

1.4 群の個別的性質

1.4.1 可換群・自由群

Def. 13: Abel 群 (abelian group)

群 G の任意の元 g_1, g_2 について

$$g_1 g_2 = g_2 g_1$$

が満たされるとき、G を Abel 群 (可換群) という。

Rem.

Abel 群の演算は $+$ で表されることが多い。Abel 群の元 $g \in G$ を n 回かけた g^n $(n \in \mathbb{Z})$ を ng と書くことが多い。

Def. 14: 巡回群 (cyclic group)

群 G がただ一つの元で生成されるとき、G を巡回群という。

すなわち巡回群 G の任意の群元はある $g \in G$ により g^n の形で書ける。$\mathbb{Z}$ も巡回群であることに注意。

Cor. 8: 巡回群は整数剰余群と同型

G を巡回群とする。このとき、

1. $G \cong \mathbb{Z}$

2. $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

のいずれかが成り立つ。[a]

Prf.

$G = \langle g \rangle$ とする。$f : \mathbb{Z} \to G$ を $f(n) = g^n$ で定義すると、これは全射準同型。$\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ のときは準同型定理 (Thm. 1) から $G \cong \mathbb{Z}$ で 1 に対応。$\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ のとき、f の準同型性からある正の整数 n が存在して $\mathrm{Ker}\, f = n\mathbb{Z}$ となる。再び準同型定理 (Thm. 1) から $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で 2 に対応。

[a] $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で $n = 0$ の場合と捉えることがある。また $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表すことが多い。

この Cor. 8 は後に記す有限生成 Abel 群の基本定理 (Thm. 4) の一例になっている。

Cor. 9: 素数位数なら巡回群

素数位数の群は巡回群。

Prf.

$|G|$ が素数のとき、Cor. 5 のため G の部分群の位数は $|G|$ または 1. 前者は G そのものであり、位数 1 の部分群は $\{1_G\}$ である。一方で $|G| \geq 2$ なので $g \neq 1_G$ なる元が存在する。g の生成群は G の部分群なので、$\langle g \rangle = G$ に限られる。

Def. 15: 一次独立 (linearly independent)

Abel 群 G の元 $g_1, \ldots, g_n$ が

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

を満たすとき、$g_1, \ldots, g_n$ は一次独立であるという。逆に (1.5) を満たさないとき、$g_1, \ldots, g_n$ は一次従属 (linearly dependent) であるという。

Def. 16: 基底 (basis)

Abel 群 G の元 $g_1, \ldots, g_n$ が一次独立かつ G を生成するとき、$\{g_1, \ldots, g_n\}$ を G の基底という。

Def. 17: 自由群 (free group)

$g_1, g_2, \ldots$ によって生成され、Def. 1 に掲げた逆元の演算と単位元の演算以外には何の関係式も課さずに生成される群を自由群という。

e.g.

自由 Abel 群は

$$G = \{n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots | n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}\}$$

と書ける。
abelian を課さない自由群は一般に

$$\langle g_1 \rangle = \{g_1^n | n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \langle g_1, g_2 \rangle = \{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_1^{n_3} g_2^{n_4} \cdots | n_1, n_2, \dots \in \mathbb{Z}\}, \qquad \cdots$$

といった形で書ける。

Cor. 10: 自由 Abel 群の基底は一次独立

自由 Abel 群の基底は一次独立である。

Prf.

G の生成元を $\{g_1, g_2, \dots\}$ とする。ある nonzero な $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^{\times r}$ によって

$$0 = n_1 \boldsymbol{g}_1 + n_2 g_2 + \cdots$$

となるならば、G は群の定義 (Def. 1) の条件だけでなくこの条件式にも従って生成されなければならない。対偶を取ることで、Abel 群 G が自由ならば生成元 $\{g_1, \dots, g_r\}$ は一次独立である。

この Cor. を踏まえてランクが定義できる。

Def. 18: ランク (rank)

自由 Abel 群の基底の濃度をランクという。

Lem. 1: 有限生成 Abel 群の部分群は有限生成 Abel

有限生成 Abel 群 $G := \langle \boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_r \rangle$ の部分群 $H \leq G$ は有限生成の Abel 群で、H の生成元はたかだか r 個。

Prf.

r についての帰納法で示す。

■**$r=1$ のとき**　by definition で G は巡回群なので、Cor. 8 より ($n=0$ も含めて) $G\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の任意の部分群は再び巡回群であり、また Cor. 5 よりその位数は n の約数 ($n=0$ なら任意の整数) である。

■**$r>1$ のとき**　$r-1$ まで帰納法の仮定が成り立つとする。H の任意の元が $\{n_i\}_{i=1,\dots,r}$ により $n_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+n_r\boldsymbol{g}_r$ と書けることを踏まえ、

$$S:=\{n_1\in\mathbb{Z}|\exists n_2,\dots,n_r\in\mathbb{Z},\ n_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+n_r\boldsymbol{g}_r\in H\}$$

を定める。$0\in S$, $n\in S\Longrightarrow -n\in S$ 及び和で閉じることから $S\leq\mathbb{Z}$ なので、ある整数 a により $S=a\mathbb{Z}$.

$\boldsymbol{h}_1:=a\boldsymbol{g}_1+a_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{g}_r\in H$ を固定する。任意の $\boldsymbol{h}=h_1\boldsymbol{g}_1+\cdots+h_r\boldsymbol{g}_r\in H$ について整数 p により $h_1=ap$ と書けるので、

$$\boldsymbol{h}-p\boldsymbol{h}_1=(h_2-pa_2)\boldsymbol{g}_2+\cdots+(h_r-pa_r)\boldsymbol{g}_r$$

であり、これは部分群 $H\cap\langle\boldsymbol{g}_2,\dots,\boldsymbol{g}_r\rangle$ の元である。帰納法の仮定から部分群 $H\cap\langle\boldsymbol{g}_2,\dots,\boldsymbol{g}_r\rangle$ はたかだか $r-1$ 個の生成元で生成されるので、それを $\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_r$ とすると、任意の $\boldsymbol{h}\in H$ は $\langle\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\dots,\boldsymbol{h}_r\rangle$ で生成される。

Cor. 11: 有限生成自由 Abel 群は整数の直和

有限生成自由 Abel 群 G は

$$G\cong\mathbb{Z}^{\oplus n},\qquad (n\in\mathbb{N})$$

と書ける。

Thm. 4: 有限生成 Abel 群の基本定理

有限生成 Abel 群 G は

$$G\cong\mathbb{Z}^{\oplus n}\oplus\mathbb{Z}_{p_1}^{\oplus n_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_k}^{\oplus n_k},\qquad (n,n_1,\dots,n_k,p_1,\dots,p_k\in\mathbb{N})$$

を満たす。

1.4.2 単純性・可解性

Def. 19: 単純群 (simple group)

群 G の正規部分群が $1_G, G$ の二つしかないとき、G を単純群という。

Lem. 2: 有限単純 Abel と素数位数巡回の同値性

G が非自明な有限単純 Abel 群 $\iff$ G は素数位数の巡回群。

Prf.

■$\Rightarrow$ $G \neq \{1_G\}$ を有限単純 Abel 群とする。Abel 群の任意の部分群は不変部分群であるから、非自明な $g \in G$ について $\langle g \rangle \trianglelefteq G$. G の単純性から $\langle G \rangle = G$. ここで、$p, q \in \{2, 3, \ldots, |G|-1\}$ により $|G| = pq$ と書けるとき、すなわち $|G|$ の位数が素数でないときは $g^p \neq 1, g$ なので

$$|\langle g^p \rangle| = |\{1_G, g^p, \ldots, g^{p(q-1)}\}| = q$$

を得るが、G が単純群なので $\langle g^p \rangle = 1$ または $\langle g^p \rangle = G$ である。これは $q \neq 1, |G|$ に矛盾。

■$\Leftarrow$ Cor. 8 から自明。

Lem. 3: 最大の不変部分群で割ると単純

G を有限群とする。[a] $H \trianglelefteq G$ で G/H が単純でないとき、$H \leq \exists \bar{H} \trianglelefteq G$. 対偶を取ると、$H \trianglelefteq G$ が G でない最大の不変部分群なら G/H は単純。

Prf.

G が有限群の場合に証明する。G/H が単純でないとき、$G/H \triangleright \exists\, R \neq \{1_G\}$. $R = \{[R_1], \ldots, [R_m]\}$ により、

$$\begin{aligned} \forall\, j \exists\, j',\ [gR_jg^{-1}] &= [g][R_j][g^{-1}] \qquad (\because H \trianglelefteq G.\ \text{cf. Def. 7}) \\ &= [R_{j'}] \qquad (\because R \trianglelefteq G/H) \end{aligned}$$

と変形できて、

$$gR_jg^{-1}H \ni R_{j'} = gR_jg^{-1}\exists h = gR_j\exists h'g^{-1} = g\bar{R}_jg^{-1} \qquad (\exists\, \bar{R}_j \in [R_j] = R_jH)$$

i.e. $\{R_jh | [R_j] \in R, h \in H\} \trianglelefteq G$.

[a] 筆者が無限群での証明を知らないだけであり、無限群での命題を否定するものではない。

Def. 20: 可解群 (solvable group)

群 G に正規部分群の有限列

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = 1_G$$

であって、G_k/G_{k+1} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ が Abel 群になるものが存在するとき、G を可解群という。

Prop. 4: 有限可解群と不変部分群列

有限群 G に対し、G が可解 $\iff G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = \{1_G\}$ で $\forall k < n, g_k/g_{k+1}$ が素数位数巡回群。

Prf.

Cor. 9, Lem. 2, Lem. 3 から。

1.4.3 交換子

Def. 21: 交換子・交換子群 (commutator)

群 G の元 g, h に対し、

$$[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$$

を交換子という。また

$$[G, G] := \{g^{-1}h^{-1}gh | g, h \in G\}$$

と構成される群を交換子群という。

Cor. 12: 交換子の自明性と可換群の等価

$[G, G] = \{1_G\} \iff G$ is abelian.

Prf.

$\forall g, h \in G$ について

$$g^{-1}h^{-1}gh = 1_G \iff gh = hg$$

となるため。

Cor. 13: 交換子群は正規部分群

交換子群は正規部分群。

Prf.

$$z^{-1}(x^{-1}y^{-1}xy)z = (z^{-1}x^{-1}z)(z^{-1}y^{-1}z)(z^{-1}xz)(z^{-1}yz) \in [G, G]$$

Thm. 5: 商群の可換性と交換子群が部分群に含まれることの等価性

$H \trianglelefteq G$ にて、G/H is abelian $\iff H \supset [G,G]$.

Prf.

■$\Rightarrow$ G/H が可換群のとき、任意の $g_1, g_2 \in G$ について

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} H &= (g_1 H)(g_2 H)(g_1^{-1} H)(g_2^{-1} H) \qquad (\because \text{ Def. } 7) \\ &= (g_1 H)(g_1^{-1} H)(g_2 H)(g_2^{-1} H) = H \end{aligned}$$

なので、$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in H$.

■$\Leftarrow$ $[G,G] \subset H$ のとき、任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して

$$\begin{aligned} (g_1 H)(g_2 H) &= g_1 g_2 H \qquad (\because \text{ Def. } 7) \\ &= g_1 g_2 (g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1) H = g_2 g_1 H = (g_2 H)(g_1 H) \end{aligned}$$

なので G/H は可換。

Cor. 13, Thm. 5 を踏まえると、$H = [G,G]$ とすることで以下を得る。

Cor. 14: $G/[G,G]$ は可換

商群 $G/[G,G]$ は可換群。

これをもとに、任意の群を可換群にする構成法が得られる。

Def. 22: 群の可換化 (abelianization)

$$G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$$

を G の可換化という。

1.4.4 作用・安定化群

Def. 23: 作用 (action)

群 G と集合 X にたいし、以下を満たす写像 $\blacktriangleright\colon G \times X \to X$ を G の左作用 (left group action) という。

- $g, h \in G$, $x \in X$ にたいし $g \blacktriangleright (h \blacktriangleright x) = (gh) \blacktriangleright x$
- G の単位元 e により $e \blacktriangleright x = x$

また $\blacktriangleleft\colon X \times G \to X$ で

- $g, h \in G, x \in X$ にたいし $(x \blacktriangleleft g) \blacktriangleleft h = x \blacktriangleleft (gh)$
- G の単位元 e により $x \blacktriangleleft e = x$

を満たすものを右作用 (right group action) という。

Rem.

以下、作用を表す演算子 $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$ を省略する。また G が X に左作用することを $G \curvearrowright X$, 右作用することを $X \curvearrowleft G$ と表すことがある。

Def. 24: 安定化群 (stabilizer group)

$G \curvearrowright X$, $x \in X$ のとき、

$$L_x := \{g \in G | gx = x\}$$

を x の安定化群という。

Prf. 群であること

結合則は左作用の定義 (Def. 23) から従う。$1_G x = x$ より L_x は単位元をもち、直ちに $g \in L_x \implies g^{-1}x = g^{-1}(gx) = x$ より逆元も含む。

1.4.5 直積・半直積・中心拡大

Def. 25: 直積群 (direct product group)

群 A, B から構成される

$$A \times B := \{A_i B_j | a_i \in A, b_j \in B, a_i b_j = b_j a_i\}$$

を A と B の直積群という。

Prf. 直積群が群であること

$A \times B$ の単位元は $1_A 1_B$, $a \in A, b \in B$ に対して逆元は $(ab)^{-1} = (a^{-1})(b^{-1})$ とすれば良い。

■完全列　直積は二つの群が独立に計算されるが、集合として $A \times B$ であっても群演算は独立である必要はない。半直積は $A \times B$ に非自明な作用を与えたものである。一方で半直積はその演算によってのみならず、完全列と呼ばれる同型写像の組み合わせによっても記述されることが多いため、まずは完全列から導入する。

Def. 26: 完全列

群の列 $\ldots, G_{i-1}, G_i, G_{i+1}, \ldots$ の間に準同型の族 $\{f_i : G_i \to G_{i+1}\}_i$ が存在して、$\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \mathrm{Ker}\, f_i$ を全ての i で満たすとき、これを完全列 (完全系列: exact sequence) と呼び、

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

と書く。特に

$$1 \to N \to G \to H \to 1$$

を短完全列 (short exact sequence) と呼び、このとき G を H の N による拡大 (extension) という。[a]

[a] $1 \to N \to G \to H \to 1$ は最短の非自明な完全列である。実際、$1 \to G \to 1$ は準同型が $1 \mapsto 1$ と $g \mapsto 1$ であるし、$1 \to G \to H \to 1$ は両端の準同型は同じく $1 \mapsto 1$ と $g \mapsto 1$ で、真ん中の準同型は Prop. 5 で示すように全単射になるため $G \cong H$ の同型写像である。

Prop. 5

1. $1 \to N \xrightarrow{f} G$ が完全列 $\Longleftrightarrow$ f が単射
2. $G \xrightarrow{f} H \to 1$ が完全列 $\Longleftrightarrow$ f が全射
3. $1 \to N \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} H \to 1$ が短完全列 $\Longleftrightarrow$ f_2 が単射 f_1 により同型 $G/f_1(N) \xrightarrow{\cong} H$ を誘導する

Prf.

■1.　$1 \to N$ の準同型は包含写像 $\iota : 1 \mapsto 1_N$ に限られるため、完全列の定義から、$1 \to N \xrightarrow{f} G \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, \iota = 1_N \Longleftrightarrow f$ は単射。

■2.　$H \to 1$ の準同型は全射 $\pi : h \mapsto 1$ に限られるため、$\mathrm{Ker}\, \pi = H$. ゆえに完全列の定義から $G \xrightarrow{f} H \to 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f = H \Longleftrightarrow f$ が全射。

■3.　$1 \to N \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} H \to 1$ が短完全列 $\Rightarrow$ 単射 f_1 と全射 f_2 の間に $\mathrm{Im}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$ が成立する。準同型定理 Thm. **??**から、$G/\mathrm{Im}\, f_1 = G/\mathrm{Ker}\, f_2 \cong \mathrm{Im}\, f_2 = H$.
逆に準同型 $f_2 : G \to H$ が同型 $G/f_1(N) \xrightarrow{\cong} H$ を誘導するとは、

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/f_1(N) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換図式になることを意味する。Prop. **??**より $f_1(N) = \mathrm{Ker}\, f_2$. π も同型写像も全射なので、合成写像の f_2 も全射。

Def. 27: 短完全列の分裂

短完全列

$$1 \to N \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \to 1$$

が分裂するとは、$s : H \to G$ が存在して $g \circ s = \mathrm{id}_H$ を満たすことである。

以下で半直積と分裂する短完全列が 1:1 に対応することを見るため、ある半直積群と同型な群の集合 (同型類) は短完全列の同型類になる。そこで完全列の間の射や同型を定義しなければならない。

Def. 28: 完全列の間の射

完全列 $\cdots \to G_i \to G_{i+1} \to \cdots$ と $\cdots \to G'_i \to G'_{i+1} \to \cdots$ の間に写像の族 $\{f_i : G_i \to G'_i\}_i$ が存在して、

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \to & G_i & \to & G_{i+1} & \to & \cdots \\ & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & & \\ \cdots & \to & G'_i & \to & G'_{i+1} & \to & \cdots \end{array}$$

が可換図式となるとき、$\{f_i\}_i$ は完全列 $\cdots \to G_i \to G_{i+1} \to \cdots$ から完全列 $\cdots \to G'_i \to G'_{i+1} \to \cdots$ への射であるという。特に f_i が全て同型であるとき、$\{f_i\}_i$ は完全列 $\cdots \to G_i \to G_{i+1} \to \cdots$ から完全列 $\cdots \to G'_i \to G'_{i+1} \to \cdots$ への同型射であると言って、二つの完全列は同型であるという。

■内部半直積

Def. 29: 内部半直積 (inner semidirect product)

群 G が

1. $N \trianglelefteq G,\ H \leq G$
2. $N \cap H = \{1_G\}$
3. $G = NH$

を満たすとき、N の H による内部半直積といい、$G = N \rtimes H$ と表す。

Cor. 15: $G = N \rtimes H \iff G$ の群元が N, H で unique に書ける

$G = N \rtimes H$ の元 $g \in G$ は $g = nh$ の形で unique に書ける。逆に $N \trianglelefteq G,\ H \leq G$ の群元 n, h で群 G の群元が nh と unique に書けるとき、$G = N \rtimes H$.

Prf.

■内部半直積 $\Rightarrow$ $g = nh$ が unique　$G = NH$ より $g = nh$ と書ける。$g = n_1h_1 = n_2h_2$ とすると $n_2^{-1}n_1 = h_2h_1^{-1} \in N \cap H = \{1\}$ なので、$n_1 = n_2$ かつ $h_1 = h_2$.

■$g = nh$ が unique $\Rightarrow$ 内部半直積　仮定を、$\mu : N \times H \to G; (n, h) \mapsto nh$ が全単射であることと読み替える。全射性から $G = NH$. $g \in N \cap H$ なら $\mu(g, g) = g^2 = \mu(1, g^2)$ だが、μ の単射性から $g = 1$ に限られる。

Thm. 6: 分裂短完全列の同型類と内部半直積の同型類は 1:1 対応

分裂する短完全列

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$$

の同型類と $G = N \rtimes H$ の同型類は 1:1 対応する。

Prf.

■短完全列から内部半直積　$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$ が $s : H \to G$ により分裂する短完全列であるとする。$\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ より s は単射な準同型なので $H \cong s(H) \leq G$ である。また Prop. ??から ι も単射なので、$N \cong \iota(N) \leq G$ とできて、また同時に $\mathrm{Ker}\,\pi = \iota(N)$ なので Cor. 6 より $N \cong \iota(N) \trianglelefteq G$.

$\pi \circ s = \mathrm{id}_H$ なので $s \circ \pi \circ s = s$ であり、$s(H)$ を定義域に制限すると $s \circ \pi|_{s(H)} = \mathrm{id}_{s(H)}$ である。よって任意の $S \subset G$ について $S \cap s(H) = s \circ \pi(S)$. 特に $\pi(\iota(N)) = \pi(\mathrm{Ker}\,\pi) = 1$ なので、$\iota(N) \cap s(H) = s \circ \pi(\iota(N)) = s(1) = 1$.

続いて $NH = G$ を示す。G の演算のもとで $NH \cong \iota(N)s(H) \subset G$ は明らか。任意の $g \in G$ を固定して $h = \pi(g), n = gs(h^{-1})$ とすると、

$$\pi(n) = \pi(g)\pi \circ s(h^{-1}) = \pi(g)\pi(s(\pi(g^{-1}))) = \pi(g)\pi(g^{-1}) = 1.$$

すなわち $n \in \mathrm{Ker}\,\pi = \iota(N)$ である。定義より $g = ns(h) \in \iota(N)s(H) \cong NH$.

■内部半直積から短完全列　$G = N \rtimes H$ を仮定する。写像 $\iota : N \to G$ を包含写像とする。また Cor. 15 より、G の元は $g = nh$ の形で unique に表せるので、$\pi : G \to H$ を g から unique な対応によって与えられる h への写像とする。このとき ι は明らかに単射な準同型、π も明らかに全射。$N \trianglelefteq G$ より任意の $n \in N, h \in H$ に対して $hn = n'h$ なる $n' \in N$ が存在することに注意すると、任意の $n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H$ にたいし $\pi(n_1h_1 \cdot n_2h_2) = \pi(n_1n_2'h_1h_2) = h_1h_2$ の形にできるので群準同型。また $\pi \circ \iota(n) = \pi(n1_{s(H)}) = 1_H$ なので $\mathrm{Im}\,\iota = \mathrm{Ker}\,\pi$. ゆえに短完全列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} 1$$

を組み、包含写像 $H \to G$ により分裂する。

以上の操作は同型を除き互いの逆を与えている。

以上の話をまとめて、内部半直積と同値な命題を列挙しておく。

Prop. 6: 内部半直積と同値な命題

$N \trianglelefteq G, H \leq G$ に対して以下は同値。

1. $G = N \rtimes H$
2. 分裂する短完全列 $1 \to N \to G \to H \to 1$ が存在する
3. 任意の $g \in G$ に対し $g = nh$ を満たす $(n, h) \in N \times H$ は unique
4. projection $\pi : G \to G/N$ と inclusion $\iota : H \to G$ の合成 $\pi \circ \iota : H \to G/N$ が同型

Prf.

1.⇔2. は Thm. 6 にて証明済み。1.⇔3. は Cor. 15 にて証明済み。また Prop. 5 より 2.⇔4. が成り立つ。

■外部半直積　ここまで内部半直積の群演算について明示的に扱ってこなかった。$N \rtimes H$ は N と H を適切に結合させることで得られるが、その結合の仕方は一般に一意ではない。結合方法を決定するには、以下に示す自然な群作用が必要である。

Lem. 4: 内部半直積の自然な群作用

内部半直積 $G = N \rtimes H$ には N の自己同型群への自然な準同型

$$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N);\ \varphi(h)(n) \mapsto hnh^{-1} \qquad (\forall n \in N, h \in H)$$

が存在する。[a]

[a] 自己同型であること、すなわち $\varphi(N) = N$ であることは $N \trianglelefteq G$ から従う。

Rem.

一般に $h \notin N$ なので、自然な準同型 φ の値域は外部自己同型群 $\mathrm{Out}(N)$ を含む。

e.g.

$\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ を考察する。$\mathbb{Z}$ の内部自己同型は

$$\varphi_I(n) : m \mapsto n + m + (-n) = m$$

すなわち $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}) = \{1\}$. 一方で自己同型は $0 \mapsto 0, 1 \mapsto \pm 1$ の 2 種類存在するため、$\mathrm{Out}(\mathbb{Z}) = (n \mapsto -n)$. そこで

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}); h \mapsto (n \mapsto (-1)^h n)$$

とすれば、外部自己同型による自然な群作用

$$hnh^{-1} = (-1)^h n$$

を与えることになる。

自然な群作用に限定すれば、N と H の結合方法は群作用だけで定まることが次の命題で示される。

Prop. 7: $N \rtimes H$ が同型 $\Leftrightarrow$ $H \to \mathrm{Inn}(N)$ が一致

Lem. 4 で与えたそれぞれの自然な群作用 $\varphi, \varphi' : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を持つ内部半直積 $G = N \rtimes H$ と $G' = N \rtimes H$ が同型であるための必要十分条件は、$\varphi = \varphi'$.

Prf.

十分性は自明。

$\varphi = \varphi'$ を仮定する。Cor. ??より、G, G' の群元はいずれも nh の形で unique に書ける。

$$(n_1h_1)(n_2h_2) = n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2 = (n_1(h_1n_2h_1^{-1}))(h_1h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2))(h_1h_2)$$

であるから、$\varphi = \varphi'$ ならば $G \cong G'$.

この事実を踏まえ、群作用 φ を明示した外部半直積を定義する。

Def. 30: (外部) 半直積 ((outer) semidirect product)

2 つの群 N, H から $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を与える。集合 $N \times H$ の元の間に演算

$$(n_1, h_1) * (n_2, h_2) \mapsto (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)$$

を与えて得られる群を、N の H による (外部) 半直積と言って、$N \rtimes_\varphi H$ と表す。

Prf. 外部半直積が群であること

結合則は

$$\begin{aligned}(n_1, n_2) * ((n_2, h_2) * (n_3, h_3)) &= (n_1, h_1) * (n_2\varphi_{h_2}(n_3), h_2h_3) \\ &= (n_1\varphi_{h_1}(n_2\varphi_{h_2}(n_3)), h_1h_2h_3) \\ &= (n_1\varphi_{h_1}(n_2)\varphi_{h_1h_2}(n_3), h_1h_2h_3) \\ &= ((n_1, n_2) * (n_2, h_2)) * (n_3, h_3)\end{aligned}$$

から満たされる。

$$\varphi_{1_H} = \mathrm{id}_N, \qquad \varphi_h(1_N) = 1_N$$

より $(n, h) * (1_N, 1_H) = (1_N, 1_H) * (n, h) = (n, h)$. $(n, h) \in N \rtimes_\varphi H$ に対し

$$\begin{aligned}&(n, h) * (\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) = (n\varphi_h \circ \varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), 1_H) = (1_N, 1_H), \\ &(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) * (n, h) = (\varphi_{h^{-1}}(n^{-1})\varphi_{h^{-1}}(n), 1_H) = (\varphi_{h^{-1}}(1_N), 1_H) = (1_N, 1_H)\end{aligned}$$

が成り立つ。■

by construction で自明だが、以下の系を示しておく。

Cor. 16: 外部半直積は内部半直積

外部半直積 $G = N \rtimes_\varphi H$ は $\{(n, 1_H) | n \in N\} \cong N$ と $\{(1_N, h) | h \in H\} \cong H$ の内部半直積 $N \rtimes H$ である。

Prf.

明らかに $N, H \leq G$

$$\{(n, 1_H)|n \in N\} \cap \{(1_N, h)|h \in H\} = \{(1_N, 1_H)\}$$

である。任意の $n, n' \in N, h \in H$ に対して

$$\begin{aligned}(n,h)(n',1_H)(n,h)^{-1} &= (n\varphi_h(n'), h)(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1}) \\ &= (n\varphi_h(n')\varphi_h(\varphi_{h^{-1}}(n^{-1})), 1_H) \\ &= (n\varphi_h(n')n^{-1}, 1_H) \in N\end{aligned}$$

より $N \trianglelefteq G$. また $G = NH$ は自明。以上、$\{(n,h)|n \in N, h \in H, (n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)\}$ は内部半直積。

Cor. 17: 直積は半直積

直積は $\varphi : h \mapsto \mathrm{id}_N$ による半直積である。

■中心拡大　Thm. ??で内部半直積と分裂短完全列が 1:1 に対応することを見た。分裂しない短完全列 $1 \to N \to G \to H \to 1$ により構成される群 G についても考察する。

Def. 31: 群の拡大 (extension)

群 G, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$ にたいし、

$$1 \to N \to G \to H \to 1$$

が短完全列をなすとき、G を N による H の拡大という。

特によく扱われるのは N が abelian な場合、すなわち任意の G の元と可換な場合である。ここでは定義だけに留めておく。

Def. 32: 中心群 (center)

群 G の中心を、$Z(G) := \{g \in G|\forall h \in G, gh = hg\}$ で定義する。

Def. 33: 中心拡大 (central extension)

群 G が $N \trianglelefteq G$ による $H \leq G$ の拡大であって、N が G の中心 $Z(G)$ に含まれるとき、G を N による H の中心拡大という。

1.4.6 行列群

Def. 34: 行列群

体 $\mathbb{K}(=\mathbb{R},\mathbb{C})$ 上の n 次正方行列の集合を $M_n(\mathbb{K})$ と表す。行列積を演算とする群を以下で定義する。

- 一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) := \{g \in M_n(K) | \det g \neq 0\}$
- ユニタリ群 $\mathrm{U}(n) := \{u \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) | u^{-1} = u^{\dagger}\}$

Rem.

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のときは $\mathbb{K}$ を省略することが多い。また文脈から $\mathbb{K}$ が自明なときもたびたび省略される。本稿では省略は $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ のときに限る。

2 線形表現

2.1 定義

Def. 35: 線形表現・ユニタリ表現

群 G に対し、準同型写像 $D: G \to \mathrm{GL}(d)$ を G の d 次元線形表現 (linear representation) または単に表現という。特に D の値域が $\mathrm{U}(d)$ のとき D をユニタリ表現 (unitary representation) という。

Rem.

本稿では有限次元表現のみを扱う。

Def. 36: 線形表現の同値

有限群 G の二つの d 次元線形表現 D_1, D_2 が

$$\exists T \in \mathrm{GL}(d),\ \forall g \in G,\ D_1(g) = TD_2(g)T^{-1}$$

を満たすとき、二つの表現 D_1, D_2 は同値であると言って $D_1 \sim D_2$ で表す。また D_1 から D_2 を導く操作を同値変換という。

多くの場面で等価な表現を同一視するため、等価な表現に共通する量が欲しい。線形代数の知識から等価な表現では行列式や対角和がこれに該当することがわかる。表現論では対角和が特に有用で、指標と呼ばれる。

Def. 37: 指標 (character)

群 G の線形表現 D にたいし、$\chi: G \to \mathbb{C}; g \mapsto \mathrm{tr}\, D(g)$ を D の指標という。

Thm. 7: 表現のユニタリ化

有限群の任意の線形表現は同値変換でユニタリ表現にできる。

Prf.

群 G の任意の d 次元線形表現 $D: G \to \mathrm{GL}(d)$ に対し、

$$H := \sum_{g \in G} D(g)^\dagger D(g)$$

とすると、これは明らかにエルミート行列である。また $D(g)$ に対して逆元 $D(g)^{-1}$ が取れることから $\det D(g) \neq 0$ $(\forall g \in G)$ であり、H は正定値である。従ってユニタリ行列 $U \in \mathrm{U}(d)$ により

$$H = U \Lambda U^\dagger, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

と対角化できて、固有値 λ_i は全て正。
そこで D と等価な表現 D' を

$$D'(g) := V^{-1} D(g) V, \qquad V := U \Lambda^{-1/2}$$

により与えると、

$$\begin{aligned} D'(g)^\dagger D'(g) &= V^\dagger D(g)^\dagger (V^{-1})^\dagger V^{-1} D(g) V \\ &= \Lambda^{-1/2} U^\dagger D(g)^\dagger U \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} U^\dagger D(g) U \Lambda^{-1/2} \\ &= \Lambda^{-1/2} U^\dagger D(g) H D(g) U \Lambda^{-1/2} \end{aligned}$$

ここで

$$D(g)^\dagger H D(g) = \sum_g{}' D(g)^\dagger D(g')^\dagger D(g') D(g) = \sum_{g''(=g'g) \in G} D(g'g)^\dagger D(g'g) = H$$

なので、

$$D'(g)^\dagger D'(g) = \Lambda^{-1/2} U^\dagger H U \Lambda^{1/2} = 1.$$

となり、D' はユニタリ表現である。

Rem.

この定理を踏まえ、以下では線形表現をユニタリ表現として扱う。

群の表現を部分群へ自然に落とし込むことは容易い。少しテクニカルだが、逆に部分群の表現を**自然に**それを含む群へ拡張することもできる。

Def. 38: 表現の制限・誘導表現

群 G の表現 D の $H \leq G$ への制限を、

$$D \downarrow H := \{D(h) | h \in H\}$$

で定義する。また G が有限群であって、左剰余類で

$$G = g_1 H \otimes \cdots \otimes g_k H \qquad (g_1 = 1_G,\ k = |G/H|)$$

と分解できるとき、H の表現 Δ による G の誘導表現 $\Delta \uparrow G$ を

$$\begin{aligned} &[(\Delta \uparrow G)(g)]_{i\mu, j\nu} := \delta_{ij}(g)[\Delta(g_i^{-1} g g_j)]_{\mu\nu} \\ &\text{with } \delta_{ij}(g) = \begin{cases} 1 & (g_i^{-1} g g_j \in H) \\ 0 & (g_i^{-1} g g_j \notin H) \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu \in \{1, \dots, \dim \Delta\} \\ i, j \in \{1, \dots, k = |G/H|\} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.1}$$

と定義する。

Prf. (2.1) が表現であること

$g, g' \in G$ を与える。$g_i^{-1} g g' g_j \in H$ のとき、$g' g_j \in g_m H, g g_m \in g_n H$ とすると、

$$g_i H \ni g g' g_j = g g_m (g_m^{-1} g' g_j) \in g_n H$$

なので $n = i$. 従って

$$\exists!\, m \in \{1, \dots, |G/H|\} \text{ s.t. } \delta_{ij}(gg') = \delta_{im}(g)\delta_{mj}(g').$$

これにより

$$[(\Delta \uparrow G)(gg')]_{i\mu, j\nu} = \delta_{ij}(gg')\Delta(g_i^{-1} g g' g_j)_{\mu\nu} = \sum_{m=1}^{|G/H|} \delta_{im}(g)\delta_{mj}(g')[\Delta(g_i^{-1} g g_m)\Delta(g_m^{-1} g g_j)]_{\mu\nu}.$$

Cor. 18: 誘導表現の指標

部分群 $H \le G$ によって $G = g_1 H \oplus \cdots \oplus g_{|G/H|} H$ と剰余類分解できるとする。H の表現 Δ_H の指標 χ_H に対して $\Delta_H \uparrow G$ の指標は

$$\mathrm{tr}(\Delta_H \uparrow G)(g) = \sum_{i\mu} \sum_{j\nu} \delta_{ij}\delta_{\mu\nu}(\Delta_H \uparrow G)(g)_{i\mu, j\nu} = \sum_{j=1}^{|G/H|} \delta_{jj}(g)\chi_H(g_j^{-1} g g_j).$$

最後に群そのものではなく、群作用で変換される量を与える。量子力学では波動関数の対称性変換が良い例であろう。

Def. 39: 表現の基底 (basis)

線型空間 X に対し群が線型写像として左作用するものとする。このとき一次独立な d 個のベクトル $\{\psi_\nu \in \mathbb{K}^d\}_{\nu=1,\cdots,d}$ と G の d 次元表現 $D : G \to \mathrm{GL}(d; \mathbb{K})$ との間に

$$g\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{d} \psi_\mu D(g)_{\mu\nu} \qquad (\forall g \in G)$$

が成り立つとき、$\{\psi_\nu\}_{\nu=1,\dots,d}$ を表現 D の基底という。

2.2 種々の表現の構成

Def. 40: 直和表現

群 G の d_1, d_2 次元線形表現 $D^{(1)}, D^{(2)}$ の表現行列から

$$D(g) : G \to \mathrm{GL}(d_1 + d_2); g \mapsto D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & \\ & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

を与えると、これは明らかに線形表現である。この D を $D^{(1)}, D^{(2)}$ の直和表現 (direct sum of representation) と言って、$D := D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ と表す。

Rem.

直和表現を表すのに、$\oplus$ の代わりに $+$ を用いることがある。

Cor. 19: 直和表現の指標

表現 $D = D_1 \oplus D_2$ の指標は

$$\mathrm{tr}\, D = \mathrm{tr}\, D_1 + \mathrm{tr}\, D_2$$

を満たす。

Def. 41: 直積表現 (direct product representation)

d_α 次元線形表現 $D^{(\alpha)}$ と d_β 次元線形表現 $D^{(\beta)}$ の直積表現を

$$(D^{(\alpha)} \otimes D^{(\beta)})(g)_{ik,jl} := D^{(\alpha)}_{ij}(g) D^{(\beta)}_{kl}(g) \qquad (g \in G)$$

とする。
右辺を行列形式で書くと

$$\begin{pmatrix}
D^{(1)}_{11}D^{(2)}_{11} & \cdots & D^{(1)}_{11}D^{(2)}_{1d_\beta} & & D^{(1)}_{1d_\beta}D^{(2)}_{11} & \cdots & D^{(1)}_{1d_\beta}D^{(2)}_{1d_\beta} \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
D^{(1)}_{11}D^{(2)}_{d_\alpha 1} & \cdots & D^{(1)}_{11}D^{(2)}_{d_\alpha d_\beta} & & D^{(1)}_{1d_\alpha}D^{(2)}_{d_\alpha 1} & \cdots & D^{(1)}_{1d_\alpha}D^{(2)}_{d_\beta d_\beta} \\
& \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
D^{(1)}_{d_\alpha 1}D^{(2)}_{11} & \cdots & D^{(1)}_{d_\alpha 1}D^{(2)}_{1d_\beta} & & D^{(1)}_{d_\alpha d_\alpha}D^{(2)}_{11} & \cdots & D^{(1)}_{d_\alpha d_\alpha}D^{(2)}_{1d_\beta} \\
\vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
D^{(1)}_{d_\alpha 1}D^{(2)}_{d_\beta 1} & \cdots & D^{(1)}_{d_\alpha 1}D^{(2)}_{d_\beta d_\beta} & & D^{(1)}_{d_\alpha d_\alpha}D^{(2)}_{d_\beta 1} & \cdots & D^{(1)}_{d_\alpha d_\alpha}D^{(2)}_{d_\beta d_\beta}
\end{pmatrix}$$

の形で書ける。すなわち $D^{(\alpha)}$ の添え字で $d_\alpha \times d_\alpha$ ブロックが指定され、$D^{(\beta)}$ の添え字でブロック内 $d_\beta \times d_\beta$ 個の成分が指定される。

Rem.

$\otimes$ の代わりに $\times$ を用いることがある。

Def. 42: 正則表現 (regular representation)

群 G から G への左作用

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}\, G; g \mapsto (g' \mapsto gg')$$

によって与えられる線形表現を正則表現という。

Thm. 8: 有限群の正則表現の表示

有限群 G の元に順序 $G = \{g_1, \dots, g_{|G|}\}$ を与え、$|G| \times |G|$ 行列 $D^{(\mathrm{reg})}(g)$ を

$$[D^{(\mathrm{reg})}(g)]_{ij} := \delta(g_i^{-1} g g_j)$$

としたとき、$D^{(\mathrm{reg})} = \{D^{(\mathrm{reg})}(g) | g \in G\}$ は群 G の正則表現である。ただし

$$\delta(g) = \begin{cases} 1 & (g = 1_G) \\ 0 & (g \neq 1_G) \end{cases}$$

とする。

Prf. $D^{(\mathrm{reg})}$ **が自己同型であること**

群元 $g \in G$ を表現の基底と見たとき、この基底を $|g\rangle$ と表す。左作用 ρ に従って

$$D(g) |g'\rangle = |gg'\rangle$$

を満たさなければならない。特に $\{|g\rangle \, | g \in G\}$ が正規直交基底を張るとき、

$$\langle g_i | D(g) | g_j \rangle = \langle g_i | g g_j \rangle = \begin{cases} 1 & (g_i = g g_j) \\ 0 & (g_i \neq g g_j) \end{cases} = \delta(g_i^{-1} g g_j)$$

で $D^{(\mathrm{reg})}$ に対応する。

Prf. $D^{(\mathrm{reg})}$ **が表現であること**

$$\begin{aligned} [D^{(\mathrm{reg})}(g) D^{(\mathrm{reg})}(g')]_{ij} &= \sum_{k=1}^{|G|} \delta(g_i^{-1} g g_k) \delta(g_k^{-1} g' g_j) \\ &= \sum_{k=1}^{|G|} \delta((g^{-1} g_i)^{-1} g_k) \delta(g_k^{-1} (g' g_j)) \\ &= \delta((g^{-1} g_i)^{-1} (g' g_j)) = \delta(g_i^{-1} g g' g_j) = [D^{(\mathrm{reg})}(gg')]_{ij}. \end{aligned}$$

2.3　既約表現

2.3.1　定義・Schur の補題

■既約表現の定義

Def. 43: 可約・既約表現 (reducible/irreducible representation)

群 G の d 次元線形表現 D の (体 $\mathbb{K}$ 上) 不変部分空間が $\mathrm{GL}(d;\mathbb{K})$ と $\{0\}$ 以外に存在しないとき、i.e. 線型空間 V で $\forall v \in V, \forall g \in G, D(g)v \in V$ を満たすものが $\dim V = 0$ or d となるとき、D を既約表現という。既約表現でない表現を可約表現という。

Cor. 20: 可約表現 $\Longleftrightarrow$ 直和表現

線形表現 D が別の線形表現の直和で書ける (i.e. 表現行列 $D(g)$ が、同値変換によって全ての $g \in G$ で同時にブロック対角化可能である) ことと、D が可約表現であることは同値。すなわち、既約表現はより小さな表現にブロック対角化できない。

■Schur の補題

Lem. 5: Schur の補題 I

$D^{(1)}, D^{(2)}$ が群 G の既約表現で、次元がそれぞれ m, n のとき、

$$\forall g \in G, D^{(1)}(g)M = MD^{(2)}(g)$$

なる $m \times n$ 行列 M は

1. $M = 0$
2. M は正方行列で $\det M \neq 0$ かつ $D^{(1)} \sim D^{(2)}$

のいずれか。

Prf.

証明は [?] に従う。表現 $D^{(1)}$ の作用する線型空間を V_1、$D^{(2)}$ の作用する線型空間を V_2 とすると、M は V_2 から V_1 への線形変換と捉えられる。$\mathrm{Ker}\, M = \{x \in V_2 | Mx = 0\}$ の任意の元は $MD^{(2)}x = D^{(1)}Mx = 0$ を満たすので、$D^{(2)}x \in \mathrm{Ker}\, M$ すなわち $D_2\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M$。$D^{(2)}$ が正則かつ既約なので $\mathrm{Ker}\, M = V_2$ または $\mathrm{Ker}\, M = 0$ に限られる。
$\mathrm{Ker}\, M = V_2$ のとき $M = 0$。
$\mathrm{Ker}\, M = 0$ のとき、$M \neq 0$ は単射を成す。$\forall x \in V_2$, $D_1(g)Mx = MD_2(g)x$ すなわち $D^{(1)}MV_2 = MV_2$。$D^{(1)}$ が既約なので $MV_2 = V_1$ に限られ、$M : V_2 \to V_1$ は全射。ゆえに $\det M \neq 0$ であり、直ちに $D^{(2)}(g) = M^{-1}D^{(1)}(g)M$ を得る。

Lem. 6: Schur の補題 II

群 G の有限次元既約表現 D に対して、

$$D(g)M = MD(g) \qquad (\forall g \in G)$$

を満たす行列 M は単位行列の定数倍に限る。

Prf.

仮定により $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ にて

$$D(g)(M - \lambda 1) = (M - \lambda 1)D(g)$$

が成り立つ。D が既約表現なので Schur の補題 I により

1. $M - \lambda 1 = 0$
2. $\det(M - \lambda 1) \neq 0$

のいずれか。λ を M の固有値とすれば $\det(M - \lambda 1) = 0$ なので M は単位行列の定数倍に限られる。

■Schur の補題の系

Cor. 21: 有限 Abel 群の既約表現は 1 次元表現

有限 Abel 群の既約表現は 1 次元表現。

Prf.

有限 Abel 群の表現行列は

$$D(g)D(g') = D(g')D(g)$$

を満たすので、Lem. 6 により $D(g)$ は単位行列の定数倍。特に既約表現なら $D(g)$ は 1 次元になる。

Cor. 22: 有限群の 1 次元表現と可換化の表現の同一視

有限群 G の可換化 G^{ab} の元と G の 1 次元表現とが 1 対 1 で対応する。

Prf.

Cor. 23: 有限可換群とその表現は同型

有限可換群とその表現は同型。($\because$ Cor. 22)

ここまでは Abel 群に関する Schur の補題の系だったが、以下は有限群の性質に依存しない。

Prop. 8: 指標と類定数

群が $G = C_1 \oplus \cdots \oplus C_{n_c}$ と共役類に分解できるとき、指標 χ と類定数 c_{ij}^k は

$$|C_i|\chi(C_i)|C_j|\chi(C_j) = \dim D \sum_{k=1}^{n_c} c_{ij}^k |C_k|\chi(C_k)$$

を満たす。

Prf.

任意の共役類 C_k と $g \in G$ に対し、by definition で

$$gC_kg^{-1} = C_k$$

なので $gC_k = C_kg$。表現 $g \mapsto D(g)$ は準同型なので表現でも同様の関係を得る。すなわち

$$\hat{C}_k := \sum_{g \in C_k} D(g)$$

とすると

$$D(g)\hat{C}_k = \hat{C}_k D(g) \qquad (\forall g \in G).$$

D が既約表現であれば、Schur の補題 II(Lem. **??**) により複素数 λ を用いて

$$\hat{C}_k = \lambda 1_{\dim D} \tag{2.2}$$

と表せ、両辺のトレースをとって

$$|C_k|\chi(C_k) = \lambda \dim D$$

なので、λ の値を (2.2) に代入して

$$\hat{C}_k = \frac{|C_k|}{\dim D}\chi(C_k)1_{\dim D}.$$

また、類定数の定義 (**??**) に対応して表現にも

$$\hat{C}_i\hat{C}_j = \bigoplus_{k=1}^{n_c} c_{ij}^k \hat{C}_k$$

が成り立つので、

$$|C_i|\chi(C_i)|C_j|\chi(C_j) = \dim D \sum_{k=1}^{n_c} c_{ij}^k |C_k|\chi(C_k).$$

2.3.2 既約表現とその指標の直交性

Thm. 9: 既約表現行列の直交性

既約ユニタリ表現 $D^{(\alpha)}, D^{(\beta)}$ について

$$\sum_{g\in G} D_{ij}^{(\alpha)*}(g) D_{kl}^{(\beta)}(g) = \frac{|G|}{\dim D^{(\alpha)}} \delta_{ik}\delta_{jl}\delta^{\alpha\beta}$$

が成り立つ。ただし $\delta^{\alpha\beta}$ は $D^{(\alpha)}, D^{(\beta)}$ が同一の線形表現であるときに 1, 異値の場合に 0 をとる。

Prf.

$d_\alpha \times d_\beta$ 行列 B により同じ大きさの行列 M を

$$M := \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g^{-1})BD^{(\beta)}(g)$$

とする。$g' \in G$ にて

$$\begin{aligned} D^{(\alpha)}(g')M &= \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g'g^{-1})BD^{(\beta)}(g) \\ &= \sum_{g''(=gg'^{-1})\in G} D^{(\alpha)}(g'')BD^{(\beta)}(g''g') \\ &= MD^{(\beta)}(g'). \end{aligned}$$

Schur の補題 I によって $M=0$, または $M=\lambda 1 \quad (\lambda\in\mathbb{C})$ かつ $D^{(\alpha)} \sim D^{(\beta)}$ のいずれか。
$D^{(\alpha)} \nsim D^{(\beta)}$ のときは $M=0$ のみが許され、

$$\sum_{g\in G} [D^{(\alpha)}(g^{-1})]_{ij} B_{jk} [D^{(\beta)}(g)]_{kl} = 0$$

となる。今、$d_\alpha \times d_\beta$ 行列 B は任意に選んで良いので、特に jk 成分だけが 1 で他が 0 となるようなものとすると、

$$\sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g^{-1})_{ij} D^{(\beta)}(g)_{kl} = 0$$

を得る。
$D^{(\alpha)} = D^{(\beta)}$ の場合を考える。$B \in \mathrm{GL}(\dim D^{(\alpha)})$ は任意にとることができるので、jk 成分だけが 1 で他が 0 となるようなものとすると、

$$\lambda 1 = \sum_{g\in G} D^{(\alpha)}(g^{-1})_{ij} D^{(\alpha)}(g)_{kl}$$

である。両辺のトレースをとって

$$\begin{aligned} \lambda \dim D^{(\alpha)} &= \sum_{g\in G} \mathrm{tr}\Big[D^{(\alpha)}(g)_{ki} D^{(\alpha)}(g^{-1})_{ij}\Big] \\ &= \sum_{g\in G} \delta_{kj} \\ &= |G|\delta_{kj} \end{aligned}$$

となる。
ユニタリ表現では

$$\sum_j D(g)^*_{ij} D(g)_{ik} = \sum (D(g)^\dagger)_{ji} D(g)_{ik} = (1_{\dim D})_{jk} = \delta_{jk}$$

より $D^{(\alpha)}(g^{-1})_{ji} = [D^{(\alpha)}(g)]^*_{ij}$。

Rem.

同値だが $D^{(\alpha)} = T^{-1}D^{(\beta)}T$ にて $T = 1$ とできない場合はこの定理 Thm. 9 では何も言えない。

有限群の既約表現を分類するとき、既約表現の指標が直交することを基本の指針とする。

Thm. 10: 指標の第 1 種直交性

群 G の既約ユニタリ表現の指標 $\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)}$ は

$$\sum_{g\in G} \chi^{(\alpha)*}(g)\chi^{(\beta)}(g) = |G|\delta_{\alpha\beta}$$

を満たす。特に $G = C_1 + \cdots + C_{n_c}$ と共役類に分解できるとき、

$$\sum_{i=1}^{n_c} |C_i|\chi^{(\alpha)}(C_i)^*\chi^{(\beta)}(C_i) = |G|\delta^{\alpha\beta}.$$

Prf.

定理 9 の結果にて $i = j, k = l$ として和を取れば、

$$\sum_{g\in G} \chi^{(\alpha)}(g)^*\chi^{(\beta)}(g) = \frac{|G|}{\dim D^{(\alpha)}}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta^{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{kl} = |G|\delta^{\alpha\beta}$$

を得る。同じ共役類に属する元についての指標は

$$\chi(g^{-1}g'g) = \chi(g')$$

となって一致する。

Cor. 24: 有限群の指標の内積

有限群 G の指標 $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}$ に対し

$$(\chi^{(1)}, \chi^{(2)})_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi^{(1)}(g)^*\chi^{(2)}(g)$$

は内積である。また表現 D が既約表現 $\{D^{(\alpha)}\}_{\alpha=1,\ldots,n_r}$ によって

$$D = \bigoplus_{\alpha=1}^{n_r} n_\alpha D^{(\alpha)} \qquad (n_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と直和分解されるとき、$D, D^{(\alpha)}$ の指標 $\chi, \chi^{(\alpha)}$ によって

$$n_\alpha = (\chi^{(\alpha)}, \chi)_G. \tag{2.3}$$

特に $(\chi, \chi)_G = 1 \iff D$ は既約表現。

Prf.

内積であること (非退化、半正定値、双線型性) は自明。既約表現による直和分解に指標の第 1 種直交性 (Thm. 10) を用いると、

$$(\chi^{(\alpha)}, \chi)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^*\sum_{\beta=1}^{n_r} n_\beta \chi^{(\beta)}(g) = \sum_{\beta=1}^{n_r} n_\beta \delta_{\alpha\beta} = n_\alpha.$$

Rem.

内積 $(\cdot,\cdot)_G$ をとる群 G が文脈上明らかなときは度々省略され、$(\cdot,\cdot)$ と書かれることが多い。

Cor. 25: 指標と次元の積和

群 G の既約表現 $\{D^{(\alpha)}\}_{\alpha=1,\dots,n_r}$ の指標 $\chi^{(\alpha)}$ は

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r}\dim D^{(\alpha)}\chi^{(\alpha)}(g) = |G|\delta(g) \qquad (\forall g\in G)$$

を満たす。特に、すべての同値でない既約表現の次元数の 2 乗和は $|G|$ に等しい。

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r}(\dim D^{(\alpha)})^2 = |G| \tag{2.4}$$

Prf.

正則表現が

$$D^{(\mathrm{reg})}=\bigoplus_{\alpha=1}^{n_r}q_\alpha D^{(\alpha)}$$

と簡約されたとする。この指標は Cor. 19 から

$$\chi^{(\mathrm{reg})}(g)=\sum_{\alpha=1}^{n_r}q_\alpha\chi^{(\alpha)}(g) \tag{2.5}$$

と計算される。一方正則表現の指標は

$$\chi^{(\mathrm{reg})}(g)=\sum_{g'\in G}\delta(g'^{-1}gg')=\begin{cases}|G| & (g=1_G)\\ 0 & (g\neq 1_G)\end{cases}=|G|\delta(g)$$

となるので、指標の第 1 種直交性 (Thm. **??**) を使って

$$q_\alpha=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^*\chi^{(\mathrm{reg})}(g)=\chi^{(\alpha)}(1_G)^*=\dim D^{(\alpha)}.$$

したがって (2.5) は

$$\sum_{\alpha=1}^{n_r}\dim D^{(\alpha)}\chi^{(\alpha)}(g)=|G|\delta(g)$$

と書き換えられる。$g=1_G$ にて (2.4) を得る。

Thm. 11: 指標の第 2 種直交性

群 $G=\bigoplus_{i=1}^{n_c}C_i$ に類別できるとき、既約ユニタリ表現の指標 $\chi^{(\alpha)},\chi^{(\beta)}$ は

$$\sum_{\alpha}\chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_j)^*=\frac{|G|}{|C_i|}\delta_{ij}$$

を満たす。

Prf.

Prop. ??を既約表現で書いて、すべての既約表現で足しあげると、

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{n_r}|C_i||C_j|\chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_j) &= \sum_{\alpha=1}^{n_c}\dim D^{(\alpha)}\sum_{k=1}^{n_c}c_{ij}^k|C_k|\chi^{(\alpha)}(C_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n_c}c_{ij}^k|C_k||G|\delta(C_k) \qquad (\because \text{Cor. ??}) \\ &= |G|c_{ij}^1 \qquad (\because C_1=\{1_G\})\end{aligned} \tag{2.6}$$

を得る。$g\in C_j$ に対して $g^{-1}\in C_{j'}$ とすれば、ユニタリ表現では

$$\chi^{(\alpha)}(C_{j'})=\mathrm{tr}\,D^{(\alpha)}(g^{-1})=\mathrm{tr}\,D^{(\alpha)}(g)^\dagger=\chi^{(\alpha)}(C_j)^*$$

と書き換えられる。また $|C_j|=|C_{j'}|$ であり、任意の $g\in C_j$ に対して $g^{-1}\in C_{j'}$ なので

$$C_jC_{j'}=|C_j|C_1\oplus\cdots$$

i.e. $c_{ij'}^1=|C_i|\delta_{ij}$. よって (2.6) にて $j\to j'$ とすれば、

$$|C_i|\sum_{\alpha=1}^{n_r}\chi^{(\alpha)}(C_i)\chi^{(\alpha)}(C_j)^*=|G|\delta_{ij}.$$

Cor. 26: 剰余類の数と既約表現の数

有限群が n_c 個の剰余類に類別され、また既約表現が同値なものを除いて n_r 個あるとき、$n_c=n_r$ が成り立つ。

Prf.

指標の第 1 種直交性 (Lem. ??) は $\alpha=1,\dots,n_r$ でラベルされる n_c 次元ベクトル $[\sqrt{|C_i|}\chi^{(\alpha)}(C_i)]_{i=1,\dots,n_c}$ の内積であるから、$n_r\le n_c$ を満たす。同様に指標の第 2 種直交性は $i=1,\dots,n_c$ でラベルされる n_r 次元ベクトル $[\chi^{(\alpha)}(C_i)]_{\alpha=1,\dots,n_r}$ の内積なので、$n_c\le n_r$ が必要。

Thm. 12: 直積群の既約表現

群 A,B とその既約表現 $D^{(\alpha)},D^{(\beta)}$ により

$$[D^{(\alpha\times\beta)}(ab)]_{ik,jl}:=D_{ij}^{(\alpha)}(a)D_{kl}^{(\beta)}(b)$$

を与えると、$\{D^{(\alpha\times\beta)}(ab)|ab\in A\times B\}$ は $A\times B$ の既約表現であり、またこの形に限る。

Prf.

与えられた表現の指標は直ちに

$$\chi^{(\alpha\times\beta)}(g) = \sum_{ijkl} \delta_{ij}\delta_{kl}[D^{(\alpha)}(a)\times D^{(\beta)}(b)]_{ik,jl} = \chi^{(\alpha)}(a)\chi^{(\beta)}(b)$$

と求まる。

$$\begin{aligned}
(\chi^{(\alpha\times\beta)}, \chi^{(\alpha'\times\beta')}) &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\chi^{(\alpha\times\beta)}(ab)^*\chi^{(\alpha'\times\beta')}(ab) \\
&= \sum_{a\in A}\chi^{(\alpha)}(a)^*\chi^{(\alpha')}(a)\sum_{b\in B}\chi^{(\beta)}(b)^*\chi^{(\beta')}(b) \\
&= (\chi^{(\alpha)}, \chi^{(\alpha')})(\chi^{(\beta)}, \chi^{(\beta')}) \\
&= \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}
\end{aligned}$$

である。$\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ の場合に Cor. **??** ($(\chi, \chi) = 1 \iff$ 既約表現) を適用することで、$D^{(\alpha\times\beta)}$ は既約表現。

Cor. **??**により、A, B の既約表現の個数はそれぞれの共役類の個数 n_A, n_B に等しい。この構成法で $A\times B$ の既約表現は合計 $n_A n_B$ 個できる。一方 $A\times B$ の共役類は

$$a_1b_1 \overset{\text{conj}}{\sim} a_2b_2 \iff \exists a\in A, b\in B \text{ s.t. } (ab)^{-1}a_1b_1(ab) = a_2b_2 \iff a_1\sim a_2 \text{ and } b_1 \sim b_2$$

から構成されるので、全部で $n_A n_B$ 個存在する。よって上記の方法で構成された形で既約表現が尽きている。

2.3.3 部分群と既約表現

Thm. 13: Frobenius の相互律

G の既約表現 $D_G^{(i)}$ と $H \le G$ の既約表現 $\Delta_H^{(\lambda)}$ にたいし、

$$\left(\operatorname{tr} D_g^{(i)}, \operatorname{tr}\left[\Delta_H^{(\lambda)}\uparrow G\right]\right)_G = \left(\operatorname{tr}\Delta_H^{(\lambda)}, \operatorname{tr}\left[D_G^{(i)}\downarrow H\right]\right)_H$$

が成り立つ。すなわち $\Delta_H^{(\lambda)}$ が $D_G^{(i)}\downarrow H$ に含まれる回数は $D_G^{(i)}$ が $\Delta_H^{(\lambda)}\uparrow G$ に含まれる回数に等しい。

Prf.

$$
\begin{aligned}
\left(\operatorname{tr} D_G^{(i)}, \operatorname{tr}\left[\Delta_H^{(\lambda)} \uparrow G\right]\right)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{tr} D_G^{(i)}(g)^* \sum_{j=1}^{|G/H|} \delta_{jj}(g)\operatorname{tr}\Delta_H^{(\lambda)}(g_j^{-1}gg_j) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h=g_j^{-1}gg_j\in H}\operatorname{tr} D_G^{(i)}(g_jhg_j^{-1})^* \sum_{j=1}^{|G/H|} \delta_{11}(h)\operatorname{tr}\Delta_H^{(\lambda)}(h) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{h=g_j^{-1}gg_j\in H}\operatorname{tr} D_G^{(i)}(h)^*|G/H|\operatorname{tr}\Delta_H^{(\lambda)}(h) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\operatorname{tr}\left[(D_G^{(i)}\downarrow H)(h)\right]^*\Delta_H^{(\lambda)}(h) \\
&= \left(\operatorname{tr}\left[D_G^{(i)}\downarrow H\right], \operatorname{tr}\Delta_H^{(\lambda)}\right)_H
\end{aligned}
$$

(2.3) を踏まえると最右辺は非負整数なので題意を満たす。

Prop. 9: 誘導の制限と既約性

$H \le G$ の既約ユニタリ表現 $D^{(\lambda)}$ が $(\Delta^{(\lambda)}\uparrow G)\downarrow H$ に一度しか含まれない $\Longleftrightarrow$ $\Delta^{(\lambda)}\uparrow G$ は既約表現

Prf.

$\Longleftarrow$ は Frobenius の相互律 (Thm. **??**) から自明。

$\Longrightarrow$ を示す。$\Delta^{(\lambda)}$ が $(\Delta^{(\lambda)}\uparrow G)\downarrow H$ に一度しか含まれないと仮定すると、(2.3) より

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_\nu \left(\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}, \operatorname{tr}\left(\Delta^{(\nu)}\uparrow G\right)\downarrow H\right)_H \delta_{\lambda\nu} \\
&= \sum_\nu \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}(h)^* \sum_i (\operatorname{tr}\Delta^{(\nu)}\uparrow G, \operatorname{tr}D^{(i)})_G \operatorname{tr}D^{(i)}(h)\delta_{\lambda\nu} \\
&= \sum_\nu \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}(h)^* \sum_i (\operatorname{tr}\Delta^{(\nu)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H \\
&\qquad\qquad \times \sum_\mu (\operatorname{tr}\Delta^{(\mu)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H \operatorname{tr}\Delta^{(\mu)}(h)\delta_{\lambda\nu} \qquad (\because \text{Thm. } \textbf{??}) \\
&= \sum_\nu\sum_i (\operatorname{tr}\Delta^{(\nu)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H \sum_\mu (\operatorname{tr}\Delta^{(\mu)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H \delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\nu} \qquad (\because \text{Thm. } \textbf{??}, \textbf{??}) \\
&= \sum_i [(\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H]^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。$(\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ なので、再び Frobenius の相互律 (Thm. **??**) を用いて

$$(\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}\uparrow G, \operatorname{tr}D^{(i_0)}) = (\operatorname{tr}\Delta^{(\lambda)}, \operatorname{tr}D^{(i)}\downarrow H)_H = \begin{cases} 1 & (i = i_0) \\ 0 & (i \neq i_0) \end{cases} \qquad (\text{for } \exists!\, i_0)$$

従って

$$\Delta^{(\lambda)}\uparrow G = D^{(i_0)}.$$

3　射影表現

3.1　定義

Def. 44: 射影表現

群 G に対して $D : G \to \mathrm{GL}(n)$ と $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}$ が

$$D(g_1)D(g_2) = \alpha(g_1, g_2)D(g_1 g_2)$$

を満たすとき、D は α を乗数系とする射影表現 (射線表現) という。

Thm. 14: cocycle condition

群 G の射影表現の乗数系 α は任意の $g_1, g_2, g_3 \in G$ について

$$\alpha(g_1, g_2)\alpha(g_1 g_2, g_3) = \alpha(g_1, g_2 g_3)\alpha(g_2, g_3)$$

を満たす。

Prf.

$$D(g_1)(D(g_2)D(g_3)) = D(g_1)\alpha(g_2, g_3)D(g_2 g_3) = \alpha(g_1, g_2 g_3)\alpha(g_2, g_3)D(g_1 g_2 g_3)$$

一方で

$$(D(g_1)D(g_2))D(g_3) = \alpha(g_1, g_2)D(g_1 g_2)D(g_3) = \alpha(g_1, g_2)\alpha(g_1 g_2, g_3)D(g_1 g_2 g_3).$$

3.2　定義・乗数系の性質

Def. 45: 乗数系の同値

群 G の射影表現の乗数系 $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ の間に

$$\exists\{\omega_g \in \mathrm{U}(1)\}_{g \in G},\ \forall g, g' \in G,\ \alpha^{(2)}(g, g') = \frac{\omega_g \omega_{g'}}{\omega_{gg'}}\alpha^{(1)}(g, g') \tag{3.1}$$

が成り立つとき、二つの乗数系は同値 (等価) であるといい、$\alpha^{(1)} \sim \alpha^{(2)}$ で表す。

Rem.

定義の段階では $\omega_g \in \mathbb{C}$ でも十分だが、それでもなお Prop. 10 から U(1) で十分とわかる。Prop. 10 も、またこれを導出するのに必要な Cor. 28, Prop. 7 も、乗数系を $\mathbb{C}$ への写像としても証明は成立する。

Rem.

$\alpha^{(1)}$ を乗数系とする射影表現 D をとり、(3.1) の ω を用いて新たに射影表現

$$\omega D := \{g \mapsto \omega_g D(g)\}$$

を定めると、ωD は (3.1) で与えられる $\alpha^{(2)}$ を乗数系とする射影表現である。

Prf.

$$\begin{aligned}\omega(g_1)D(g_1)\omega(g_2)D(g_2) &= \omega(g_1)\omega(g_2)\alpha^{(1)}(g_1,g_2)D(g_1g_2)\\ &= \alpha^{(2)}(g_1,g_2)\omega(g_1g_2)D(g_1g_2).\end{aligned}$$

Cor. 27: 1 次元表現の乗数系は自明

1 次元射影表現の乗数系は自明。対偶を取ることで、非自明な乗数系を持つ射影表現は 2 次元以上である。

Prf.

1 次元射影表現 $D : G \to \mathbb{C}$ が乗数系 α を持つとする。定義より

$$\alpha(g,g') = \frac{D(gg')}{D(g)D(g')} \sim 1$$

なので、自明な乗数系と等価。

Cor. 28: 乗数系の積は乗数系

α, α' が群 G の乗数系のとき、

$$(\alpha\alpha')(g,g') := \alpha(g,g')\alpha'(g,g')$$

で定義される $\alpha\alpha'$ もまた明かに cocycle condition (Thm. 14) を満たす。すなわち $\alpha\alpha'$ も乗数系。

Lem. 7: 正則射影表現

G-代数

$$\mathbb{C}[G] := \mathrm{span}\{g | g \in G\} = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}g$$

を、$g \in G$ を基底とする $\mathbb{C}$-線型空間で、基底の間に G の積が入った代数とする。G-代数の間の線形写像 $D_1, D_2 : \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}g \to \bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}g$ が

$$\begin{aligned}[D_1(g)]_{g_1,g_2} &:= \alpha(g,g_2)\delta(g_1^{-1}gg_2) \qquad (3.2)\\ [D_2(g)]_{g_1,g_2} &:= \alpha(g_1,g)\delta(g_1gg_2^{-1})\end{aligned}$$

で与えられるとき、これはともに α を乗数系とする G の正則射影表現である。

Prf.

$$
\begin{aligned}
[D_1(g)D_1(g')]_{g_1,g_2} &= \sum_{g_3\in G}\alpha(g,g_3)\delta(g_1^{-1}gg_3)\alpha(g',g_2)\delta(g_3^{-1}g'g_2)\\
&= \alpha(g,g'g_2)\alpha(g',g_2)\delta(g_1^{-1}gg'g_2)\\
&= \alpha(g,g')\alpha(gg',g_2)\delta(g_1^{-1}gg'g_2) \qquad (\because \text{cocycle condition Thm. 14})\\
&= [D_1(gg')]_{g_1,g_2}\\
[D_2(g)D_2(g')]_{g_1,g_2} &= \sum_{g_3\in G}\alpha(g_1,g)\delta(g_1gg_3^{-1})\alpha(g_3,g')\delta(g_3g'g_2^{-1})\\
&= \alpha(g_1,g)\alpha(g_1g,g')\delta(g_1gg'g_2^{-1})\\
&= \alpha(g_1,gg')\alpha(g,g')\delta(g_1gg'g_2^{-1})\\
&= [D_2(gg')]_{g_1,g_2}
\end{aligned}
$$

Prop. 10: 乗数系の累乗は本質的に巡回

群 G の射影表現の乗数系 $\{\alpha\}$ は

$$\forall g,g'\in G,\ [\alpha(g,g')]^{|G|}\sim 1$$

を満たす。すなわち本質的に $|\alpha(g,g')|=1$.

Prf.

Cor. 28 により、任意の乗数系 α から始めて $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots$ は乗数系。(3.2) の D_1 は α を乗数系とするので

$$D_1(g)D_1(g')=\alpha(g,g')D_1(gg')$$

を満たし、D_1 が $|G|$ 次元表現であることに注意して両辺の行列式を取ると、

$$\frac{\det D_1(g)\det D_1(g')}{\det D_1(gg')}=[\alpha(g,g')]^{|G|}$$

である。左辺は (3.1) にて $\omega=\det D_1$ とした形になっているので、$\alpha^{|G|}$ は 1 と等価である。

Cor. 29: 自明な元の乗数系

群 G の乗数系を α とする射影表現 D は、等価な乗数系を全て $=$ で繋ぐと、

- $\alpha(g,1)=\alpha(1,g)=1 \qquad (\forall g\in G)$
- $D(1)=1_{\dim D}$
- $\alpha(g,g^{-1})=\alpha(g^{-1},g) \qquad (\forall g\in G)$

とできる。

Prf.

はじめに $\alpha(1,1) \neq 1$ の場合は (3.1) にて $\omega_1 = \alpha(1,1)^{-1}$ とすることで、

$$\tilde{\alpha}(1,1) := \frac{\omega_1\omega_1}{\omega_1}\alpha(1,1) = 1$$

と、自明な乗数系できる。これにより

$$D(1)D(1) = D(1) \qquad \text{i.e} \quad D(1) = 1_{\dim D}$$

である。任意の $g \in G$ に対し、

$$D(g) = D(g)D(1) = \alpha(g,1)D(g) \qquad \therefore \quad \alpha(g,1) = 1$$

である。$\alpha(1,g)$ についても同様。これを使って、cocycle 条件 (Thm. 14) から

$$\alpha(g,g^{-1}) = \alpha(g,g^{-1})\alpha(gg^{-1},g) = \alpha(g,g^{-1}g)\alpha(g^{-1},g) = \alpha(g^{-1},g).$$

3.2.1 乗数系の不変量

本質的に異なる乗数系を分類するため、同値な乗数系で不変な量が欲しい。

Cor. 30: 乗数系の不変量

群 G の任意の元 g,h を固定する。乗数系 α にて

$$\epsilon(g,h) := \frac{\alpha(g,h)}{\alpha(h,g)} \tag{3.3}$$

と定義される量は、α の (3.1) による変換で不変。

Prf.

同値変換

$$\alpha'(g,h) = \frac{\omega_g\omega_h}{\omega_{gh}}\alpha(g,h)$$

によって、

$$\frac{\alpha'(g,h)}{\alpha'(h,g)} = \frac{\omega_g\omega_h}{\omega_{gh}}\alpha(g,h)\frac{\omega_{gh}}{\omega_g\omega_h}\alpha(h,g)^{-1} = \epsilon(g,h)$$

この乗数系について諸々の性質を示すため、以下の補題を用意する。

Lem. 8

$gh = hg$ なる $g,h \in G$ にに対し、

$$\epsilon(g,g^n h) = \epsilon(g,h) \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ g,h \in G) \tag{3.4}$$

が成り立つ。

Prf.

$n=0$ は自明。$n=k$ まで (3.4) が成り立つとき、$gh=hg$ を踏まえて

$$\begin{aligned}\epsilon(g,g^{k+1}h) &= \frac{\alpha(g,g^k hg)}{\alpha(g^{k+1}h,g)} \\ &= \frac{\alpha(g,g^k h)\alpha(g^{k+1}h,g)}{\alpha(hg^k,g)}\frac{1}{\alpha(g^{k+1}h,g)} \qquad (\because \text{cocycle condition Thm. 14}) \\ &= \epsilon(g,g^k h).\end{aligned}$$

Cor. 31: 乗数系の不変量の性質

(3.3) で定義される ϵ は、

- $\epsilon(1,g)=\epsilon(g,1)=\epsilon(g,g)=1 \qquad (\forall g\in G)$
- $\epsilon(g,h)=\epsilon(h,g)^{-1} \qquad (\forall g,h\in G)$
- $gh=hg \Longrightarrow \epsilon(g^m,h^n)=(\epsilon(g,h))^{mn} \qquad (m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$

を満たす。

Prf.

定義と Cor. 29 から $\epsilon(1,g)=\epsilon(g,1)=\epsilon(g,g)=1 \quad (\forall g\in G)$ は自明。また定義から $\epsilon(g,h)=\epsilon(h,g)^{-1} \quad (\forall g,h\in G)$ も自明。
Lem. 8 をもとに (m,n) についての帰納法で

$$gh=hg \Longrightarrow \epsilon(g^m,h^n)=(\epsilon(g,h))^{mn} \quad (m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

を示す。$(m,n)=(0,0),(0,1),(1,0)$ は自明。

$$\begin{aligned}\epsilon(g^{m+1},h) &= \frac{\alpha(gg^m,h)}{\alpha(h,g^m g)} \\ &= \frac{\alpha(g,g^m h)\alpha(g^m,h)}{\alpha(g,g^m)}\frac{\alpha(g^m,g)}{\alpha(hg^m,g)\alpha(h,g^m)} \\ &= \epsilon(g,g^m h)\epsilon(g^m,h)\epsilon(g,g^m)\end{aligned}$$

右辺にて、(3.4) より $\epsilon(g,g^m h)=\epsilon(g,h),\epsilon(g,g^m)=\epsilon(g,g)=1$ なので、m について示された。

$$\epsilon(g,h^n)=[\epsilon(h^n,g)]^{-1}=[\epsilon(h,g)]^{-n}=[\epsilon(g,h)]^n$$

より、n についても成立。以上題意を全て満たす。

Cor. 32: 非自明な乗数系と乗数系が合わない交換元

群 G の射影表現の乗数系 α について、

- 乗数系 α が非自明
- $\exists g, g' \in G$ s.t. $gg' = g'g, \alpha(g, g') \neq \alpha(g', g)$

は同値。

Prf.

必要性は (3.1) にて

$$gg' = g'g,\ \alpha(g, g') \neq \alpha(g', g) \Longrightarrow \forall\omega,\ \frac{\omega_g \omega_{g'}}{\omega_{gg'}}\alpha(g, g') \neq \frac{\omega_{g'}\omega_g}{\omega_{gg'}}\alpha(g', g) = \frac{\omega_{g'}\omega_g}{\omega_{g'g}}\alpha(g', g)$$

が成り立つことから得る。
十分性は

3.2.2 群コホモロジーと乗数系の分類

■群コホモロジー 本質的に非自明な乗数系は群コホモロジーで分類される。はじめに群コホモロジーを定義する。コホモロジーは完全列により定義されるため、適切な準同型が必要である。いささか天下りだが、以下を定義する。

Def. 46: コチェイン (cochain)、コチェイン写像、コチェイン複体

G を群、M を G-加群とする。すなわち M は G が作用する線型空間。$n \in \{0, 1, \ldots\}$ に対し

$$C^n(G; M) := \mathrm{Hom}(G^n, M) = \{\varphi : G^n \to M\}$$

とし、その間に $\mathrm{d}^{n+1} : C^n(G; M) \to C^{n+1}(G; M)$ として

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}^{n+1}\varphi)(g_1, \ldots, g_{n+1}) := g_1\varphi(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ + (-1)^{n+1}\varphi(g_1, \ldots, g_n)\end{aligned}$$

を与える。[a]このとき系列

$$0 \longrightarrow C^0(G; M) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^1(G; M) \xrightarrow{\mathrm{d}} C^2(G; M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$$

は完全列であり、これをコチェイン複体 (cochain complex) という。$C^n(G; M)$ の元をコチェイン、d のことをコチェイン写像 (cochain map) という。

[a] 本来 d^n はレベル n ごとに異なるが、n を略して d と書くことが多い。

コチェイン複体が完全系列を組むことは Sec. **??**で示す。

Def. 47: コバウンダリー (coboundary)、コホモロジー

コチェイン複体 $C^\bullet(G;M)$ において、

$$B^n(G;M) := \operatorname{Im} \mathrm{d}^{n-1}$$

をコバウンダリーといい、

参考文献

[1] 犬井鉄郎・田辺行人・小野寺嘉孝「応用群論 (増補版)」裳華房 (1980)

[2] 雪江明彦「代数学 1 群論入門」日本評論社 (2010)