1　微分形式の公式の表現

1.1　前提知識・表記上の注意

本節では

- 微分形式の定義
- 完全反対称 Levi-Civita テンソル
- wedge 積
- 外微分
- 内部積
- Hodge 作用素

の知識を前提とする.

基本的に添字を使う場合は Einstein の縮約記法に従って表す. また, 微分記号 ∂_i は括弧を使わない限り**常に直後の量のみを微分する**. すなわち, $\partial_i A^j B^k = \partial_i (A^j) B^k$.

n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し, $P \in \mathfrak{S}_n$ の符号を $\mathrm{sgn}(P)$ とする. k 階の完全反対称 Levi-Civita テンソルは以下で定義する.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} &\equiv \det \begin{pmatrix} \delta^1_{\mu_1} & \cdots & \delta^1_{\mu_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^k_{\mu_1} & \cdots & \delta^k_{\mu_k} \end{pmatrix} = \sum_{P \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(P) \delta^{P(1)}_{\mu_1} \cdots \delta^{P(k)}_{\mu_k}, \\
\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k} &\equiv \delta^{\mu_1 \nu_1} \cdots \delta^{\mu_k \nu_k} \epsilon_{\nu_1 \cdots \nu_k}, \\
\epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_k}_{\mu_1 \cdots \mu_k} &\equiv \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_k} \epsilon^{\nu_1 \cdots \nu_k}
\end{aligned}
$$

ただし 1.4 で扱う Riemann 多様体の場合は

$$
\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k} \equiv g^{\mu_1 \nu_1} \cdots g^{\mu_k \nu_k} \tag{1}
$$

とする.

1.2　微分形式及び各種演算

1.2.1　k-form

k-form の基底は座標基底の双対基底で

$$
\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k} = \sum_{P \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(P)\, \mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu_{P(k)}} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\mu'_1 \cdots \mu'_k}\, \mathrm{d}x^{\mu'_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu'_k}
$$

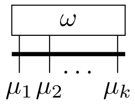
と表せ, 成分と合わせると

$$
\omega \equiv \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k}\, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k} = \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \cdots \mu_k} \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\mu'_1 \cdots \mu'_k}\, \mathrm{d}x^{\mu'_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu'_k}
$$

である.

Levi-Civita テンソルの表現をもとに k-form は以下のように表される.

$$\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k} = \frac{1}{k!}$$



太線は Levi-Civita テンソルを表し, ω とラベリングされている長方形は係数を表す.

グラフ記法では基底を表すのが難しいので, 原則として $\mathrm{d}x$ などの記号は書かない. 上に開いている脚は座標基底 ∂_μ に, 下に開いている脚は双対基底 $\mathrm{d}x^\mu$ に繋がっていると解釈する.

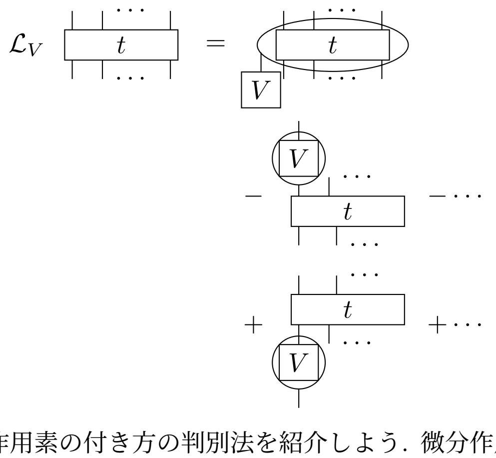
1.2.2 Lie 微分

テンソルに対する Lie 微分は一般に

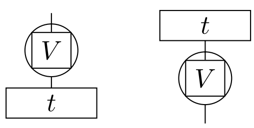
$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_V\left(t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\partial_{\mu_l}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_k}\right)\\
&= V^\lambda\partial_\lambda t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_l}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_k}\\
&\quad - t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}V^\lambda\partial_\lambda\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_l}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_k}\\
&\quad - \cdots\\
&\quad - t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_l}V^\lambda\partial_\lambda\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_k}\\
&\quad + t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_l}\otimes\partial_\lambda V^{\nu_1}\,\mathrm{d}x^\lambda\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_k}\\
&\quad + \cdots\\
&\quad + t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_l}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_\lambda V^{\nu_k}\,\mathrm{d}x^\lambda
\end{aligned} \tag{2}$$

で表される.

これを Penrose のグラフ記法で表すと以下の通り.



(2) の表示でも使える直観的な作用素の付き方の判別法を紹介しよう. 微分作用素 $V = V^\mu\partial_\mu$ は Leibnitz rule に従って各々の要素を微分していく. 成分 $t^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_k}$ を微分する際は特に何も考えず丸で囲って脚を V に繋げれば良い. 座標基底 ∂_μ に作用する際は, 成分の四角と基底から伸びる脚の間に V^μ と ∂_ν が差し込まれる.



V^μ を反変で, ∂_ν を共変で差し込める形状は左図の形のみである. 同様にして双対基底 $\mathrm{d}x^\mu$ に作用する場合を考えると, 右の場合だけが許される.

1.2.3 wedge 積

外積 (wedge 積) は $\xi \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ に対して

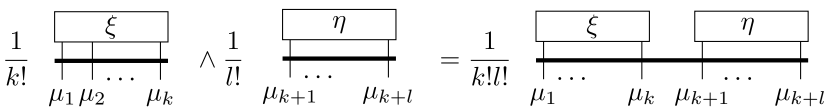
$$(\xi \wedge \eta)(V_1, \cdots, V_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{P \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(P) \xi(V_{P(1)}, \cdots V_{P(k)}) \eta(V_{P(k+1)}, \cdots V_{P(k+l)})$$

で定義されるが, 成分表示してベクトルを除くと

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{k!}\xi_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k}\right) \wedge \left(\frac{1}{l!}\eta_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+l}}\,\mathrm{d}x^{\mu_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{k+l}}\right) \\
&= \frac{1}{k!l!}\xi_{\mu_1\cdots\mu_k}\eta_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+l}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_{k+l}} \\
&= \frac{1}{k!l!}\xi_{\mu_1\cdots\mu_k}\eta_{\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+l}}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_k\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+l}}_{\mu'_1\cdots\mu'_k\mu'_{k+1}\cdots\mu_{k+l}}\,\mathrm{d}x^{\mu'_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu'_{k+l}}
\end{aligned}$$

となる.

グラフ記法では, 2 つの微分形式それぞれを貫く Levi-Civita 記号の太線をつなげることで wedge 積を表す.



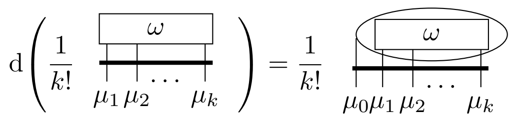
1.2.4 外微分

外微分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k}\right) &= \frac{1}{k!}\partial_{\mu_0}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_0} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k} \\
&= \frac{1}{k!}\partial_{\mu_0}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\epsilon^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_k}_{\mu'_0\mu'_1\cdots\mu'_k}\,\mathrm{d}x^{\mu'_0} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu'_k}
\end{aligned}$$

で表される.

グラフ記法では係数を表す四角を微分記号の丸で囲い, 出した脚を太線の先頭に差し込む.



1.2.5 内部積

内部積は

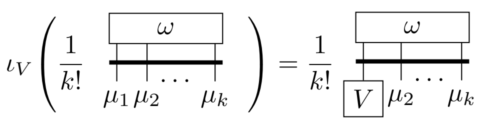
$$\iota_V \omega(V_1 \cdots V_{k-1}) = \omega(V, V_1 \cdots V_{k-1})$$

で定義されるが, これも成分表示によって

$$\iota_V\left(\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_k}\right) = \frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\mu'_1\cdots\mu'_k}V^{\mu'_1}\,\mathrm{d}x^{\mu'_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\mu'_k}$$

となる.

グラフ記法で表すと, 先頭の脚を V で潰す形になる.

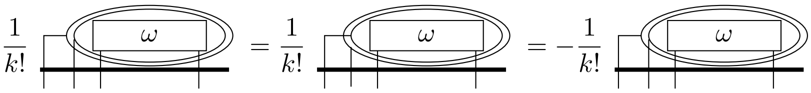


1.3 微分形式の公式

上記の表記を応用して微分形式の公式を直観的に導出する．なお以下の導出は Einstein の縮約記法を使っても，グラフ記法の流れをそのまま追うことで証明できる．

1.3.1 Poincaré の補題 $\mathrm{d}^2 = 0$

微分順序の交換と反対称性を用いる．



左辺と右辺は符号だけが違うので，0 のみが許される．

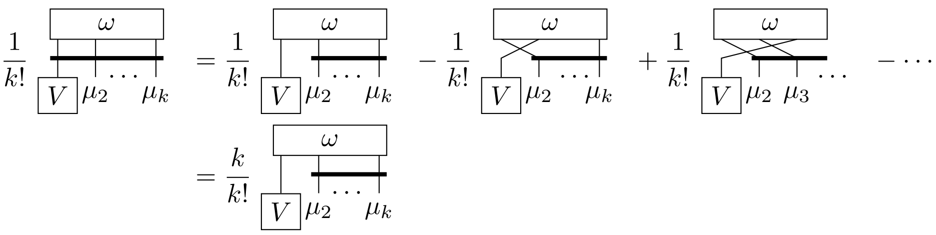
1.3.2 内部積の別表現

内部積 $\iota_V\omega$ を表す方法として，ベクトル V で潰した ω の先頭の脚を Levi-Civita テンソルから外す表し方がある．

$$\iota_V\omega = k\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\epsilon^{\mu_2\cdots\mu_k}_{\mu_2'\cdots\mu_k'}V^{\mu_1'}\,\mathrm{d}x^{\mu_2'}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\mu_k'}$$

Levi-Civita テンソルの添字が μ_2, μ_2' から始まることに注意.

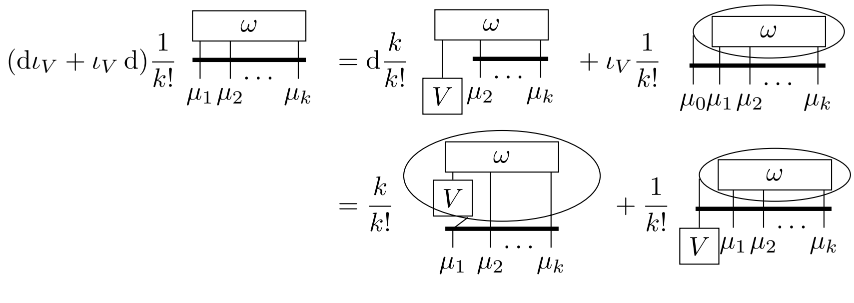
これを証明するにはまず V がつながった脚を反対称テンソルから外す.



$\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}$ が添字に対して反対称であることに注意すると，上図 1 段目右辺にて正号がつくものは偶置換で，負号がつくものは奇置換で第 1 項に戻るので，各項全て同じ値となる．全部で k 項あるので 2 段目を得る．

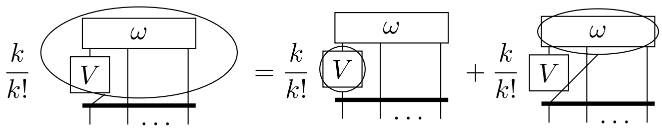
1.3.3 Cartan の公式 $(\mathrm{d}\iota_V + \iota_V\,\mathrm{d})\omega = \mathcal{L}_V\omega$

まずは左辺を書き出してみよう．第 1 項の内部積は 1.3.2 を使うのが良い．

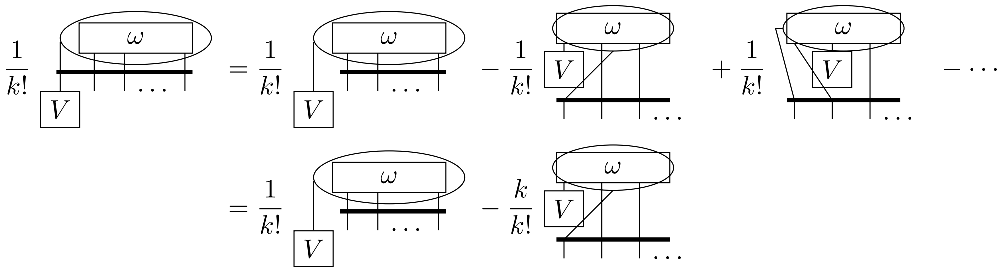


(3)

第 1 項は微分を Leibnitz rule によって分解する．

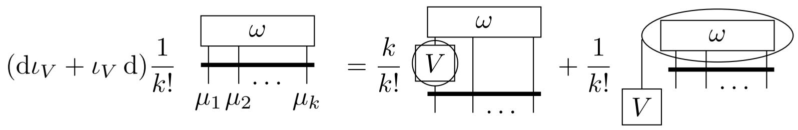


(3) 第 2 項は V を反対称テンソルから外す．



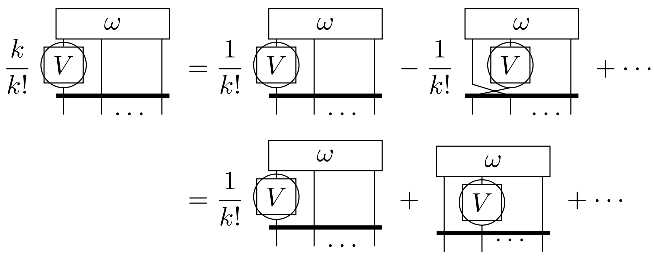
1 段目右辺第 2 項以降で，符号が正の項は偶置換で，負の項は奇置換で全て第 2 項になるので，V が微分に繋がっている初項を除き右辺は全て同じ項である．第 2 項以降は V が ω に繋がる位置を考慮すると全部で k 項あるので，2 段目を得る．

従って (3) は以下の形に等しい．



(4)

さらにこの右辺第 1 項は $\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}$ の添字に対する反対称性から以下のように展開できる．



(4) に戻すと，これは k-form の Lie 微分に等しい．よって Cartan の公式を得る．

$$(\mathrm{d}\iota_V + \iota_V\,\mathrm{d})\omega = \mathcal{L}_V\omega \tag{5}$$

1.4 Riemann 多様体上の微分形式

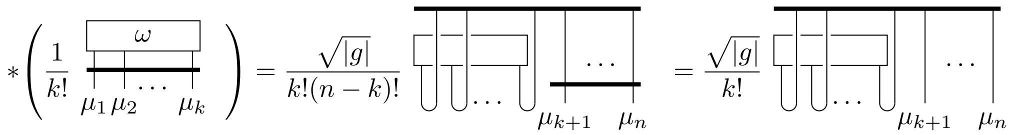
以下では計量 $g = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ が入った n 次元 Riemann 多様体または擬 Riemann 多様体を扱う．g を計量テンソルの絶対値を $g = \det(g_{\mu\nu})$ とする．擬 Riemann 多様体まで含めると，必ずしも正とは限らない．反変 Levi-Civita テンソルは (1) によって定義する．

1.4.1 Hodge star

微分形式を k-form から $(n-k)$-form へ移す Hodge star $*$ の作用は

$$
\begin{aligned}
&*\left(\frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_k}\right)\\
&\quad=\frac{\sqrt{|g|}}{k!(n-k)!}g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_k\nu_k}\omega_{\nu_1\cdots\nu_k}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_k\mu_{k+1}\cdots\mu_n}\,\mathrm{d}x^{\mu_{k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_n}\\
&\quad=\frac{\sqrt{|g|}}{k!(n-k)!}g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_k\nu_k}\omega_{\nu_1\cdots\nu_k}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_k\mu_{k+1}\cdots\mu_n}\epsilon^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}_{\rho_{k+1}\cdots\rho_n}\,\mathrm{d}x^{\rho_{k+1}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\rho_n}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

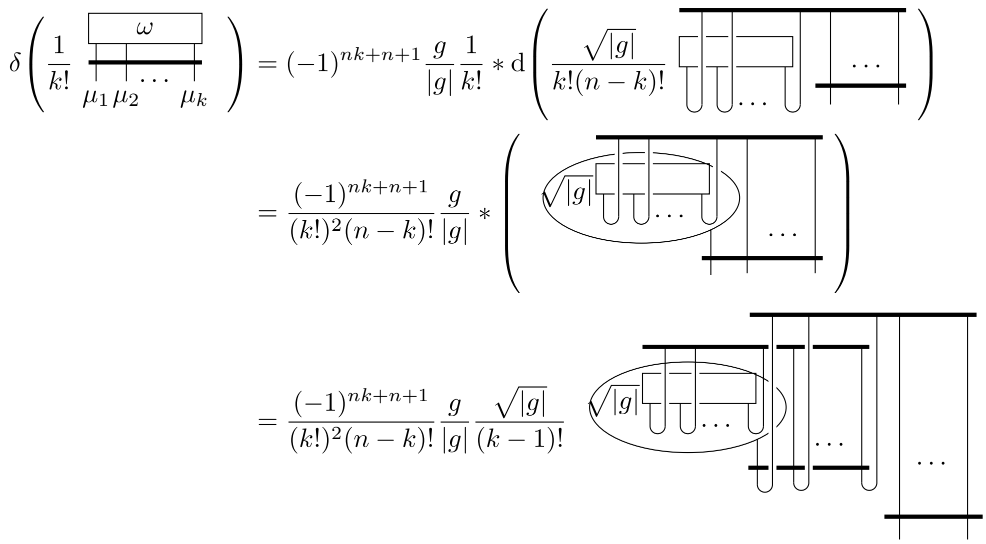
と表される．成分は以下のように描ける．



1.4.2 余微分

$$
\delta=(-1)^{nk+n+1}\frac{g}{|g|}*\mathrm{d}*
$$

の k-form ω に対する作用は, これまでの図式から以下のように計算できる．



微分が ω から直接つながる g^{ij} や係数 $\sqrt{|g|}$ にも作用していることに注意．

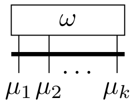
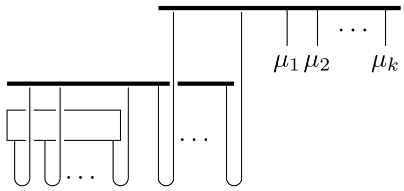
1.5 Riemann 多様体上の微分形式の公式

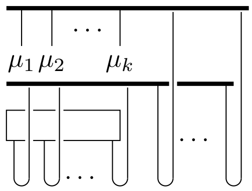
1.5.1 Hodge star の 2 回作用

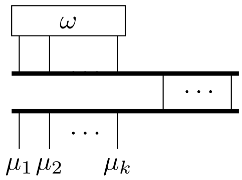
M 上の k-form ω について,

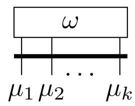
$$
**\omega=(-1)^{k(n-k)}\frac{g}{|g|}\omega
$$

であることは

$$**\left(\frac{1}{k!}$$  $$\right) = \frac{(\sqrt{|g|})^2}{k!(n-k)!}$$ 

$$= (-1)^{k(n-k)}\frac{|g|}{k!(n-k)!}$$ 

$$= (-1)^{k(n-k)}\frac{|g|}{k!(n-k)!}g^{-1}$$  $\because$ (??)

$$= (-1)^{k(n-k)}\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{|g|}{g}(n-k)!$$  $\because$ (??)

からわかる.

1.5.2　微分形式の外積

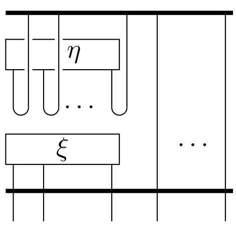
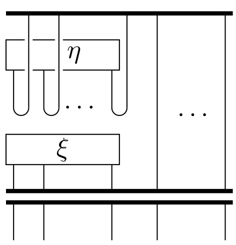
k-form

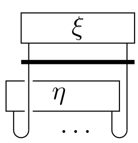
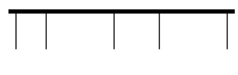
$$\xi = \frac{1}{k!}\xi_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_k}\,, \qquad \eta = \frac{1}{k!}\eta_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_k}$$

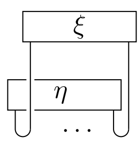
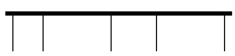
の外積が

$$\langle\xi,\eta\rangle = \xi\wedge *\eta = \frac{1}{k!}\xi_{\mu_1\cdots\mu_k}\eta^{\mu_1\cdots\mu_k}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n = \langle\eta,\xi\rangle$$

であることは,

$$\frac{1}{k!}\frac{\sqrt{|g|}}{k!(n-k)!}$$  $$= \frac{\sqrt{|g|}}{(k!)^2(n-k)!}$$ 

$$= \frac{1}{(k!)^2(n-k)!}(n-k)!$$  $$\sqrt{|g|}$$ 

$$= \frac{1}{k!}$$  $$\sqrt{|g|}$$ 

から得られる.