Penrose のグラフ記法によるベクトル解析
およびテンソル解析の公式の表現

低音

2022 年 9 月 15 日

電磁気学以来、ベクトル解析の公式は決して暗記できるものではないと筆者が考えていたように、ベクトルの公式を覚えられない物理学徒は多いだろう。レビチビタ記号の縮約公式がわかれば暗記は不要であると世に言われるが、レビチビタ記号を一々使って計算していては非効率極まりない。効率が悪いだけでなく、本来自然なはずの計算が技巧的に見えてしまい、ベクトル解析を自在に操ることが難しくなってしまう。しかし、Penrose のグラフ記法 (Penrose graphical notation; tensor diagram notation) という強力なツールを使えば、以下に示す基本的なベクトル解析の公式を暗記することなく、暗算で求められるようになる。また本来 Penrose のグラフ記法はテンソル解析のために考案されたものである。ここでは物理学のテンソル解析に頻繁に現れる完全反対称 Levi-Civita テンソルの公式の表現も見ていくことにする。

誤植の報告や質問などは `https://note.com/teion_burns/n/n5f486f83dd81` のコメント機能もしくは `https://twitter.com/teion_burns` のダイレクトメッセージに気軽に寄せていただきたい。

目次

1 ベクトル解析の公式の表現

1.1 前提知識

本節では

- スカラーとベクトルの区別
- 内積と外積の定義
- grad, div, rot, $\triangle$
- Einstein の縮約記法
- Kronecker の δ
- Levi-Civita 記号とその縮約公式
- 外積の Levi-Civita 記号による表示

を前提とする。

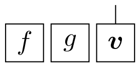
基本的に添字を使う場合は Einstein の縮約記法に従って表す。また、本節では共変・反変の区別をせず、Einstein の縮約記法の添字は全て下付きとする。

1.2　スカラーとベクトルおよび演算の定義

スカラーとベクトルは次のように表示することができる。枝の有無で判断が可能である。この枝は 2.2.1 に示すように Kronecker の δ を表す。

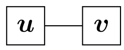
vector $\boldsymbol{v}$　　scalar f

文字式と同様、スカラーとベクトルを並べてスカラー倍を表せる。



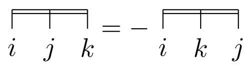
$fg\boldsymbol{v}$

ベクトルの枝を繋ぎ合わせると内積を表す。すなわち $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i \delta_{ij} v_j$ である。



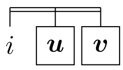
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$

これまでスカラーやベクトルは四角で囲って表してきたが、ベクトルの添字については四角で囲わず表すことにする。この約束のもと、3 成分の Levi-Civita 記号は次のように表す。二重線は反対称性を表し、枝の入れ替えで符号が変わる。



$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

これをもとにしてベクトルの外積 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ は次のように表せる。



$\epsilon_{ijk} u_j v_k$

一番左に枝が 1 本残っていることからベクトルであることが一瞥できる。

1.3　ベクトルの内積と外積にまつわる公式

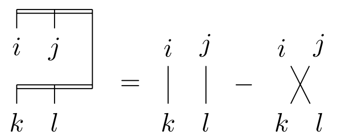
1.3.1　Levi-Civita 記号の縮約公式

Levi-Civita 記号の縮約公式は §2 で詳細を取り扱うが、ここでは公式的に用いることにする。

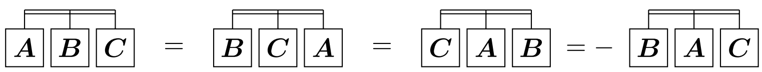
$$\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

1.3.2　スカラー三重積

外積の枝にベクトルの枝をつなげればスカラー三重積を表せる。奇置換で符号が変わり偶置換で値が変わらないことが一目瞭然である。



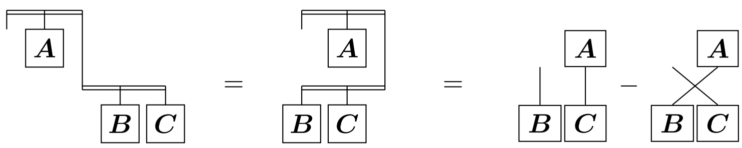
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$$



1.3.3 ベクトル三重積

外積の枝を外積に繋げばベクトル三重積となる。先の Levi-Civita 記号の縮約公式に合わせて偶置換をするとより見やすい。

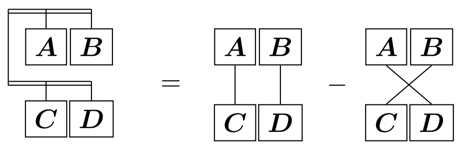
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$



1.3.4 ベクトル四重積

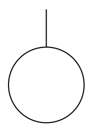
det を使って表すことが多いが、Levi-Civita 記号の縮約公式が det で表されることを考慮すると自明であろう。

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}) = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}\end{pmatrix}$$



1.4 スカラー・ベクトルの偏微分作用素

Penrose のグラフ記法で扱う微分演算子は ∇(ナブラ) である。微分対象を円で囲い、円から枝を伸ばすことで表現する。これもまた図形的に表すことが可能である。

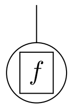


∇

1.4.1　勾配 grad

スカラーを円で囲って枝を伸ばす。

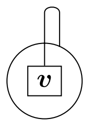
$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f$$



1.4.2　発散 div

ベクトルの枝と微分演算子の枝をつなげる。枝は Kronecker の δ を表すので $\partial_i \delta_{ij} v_j$ を意味する。

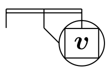
$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}$$



1.4.3　回転 rot

単純な外積と表示は同じである。ただし微分対象は演算子のすぐ右の枝に配置する。[*1]

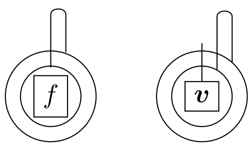
$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$$



1.4.4　ラプラシアン $\triangle$

2 つの微分演算子の枝をつなぎ合わせる。すなわち $\partial_i \delta_{ij} \partial_j A$ を表す。微分対象 A はスカラー・ベクトルを問わない。

$$\triangle A = (\nabla \cdot \nabla) A$$



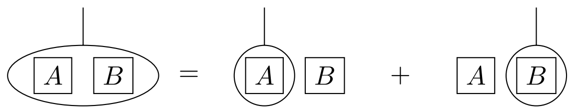
特に A がスカラーの場合、直ちに $\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f = \triangle f$ が得られる。

1.4.5　積の微分 (Leibnitz rule)

微分作用素は Leibnitz rule に従って展開可能である。

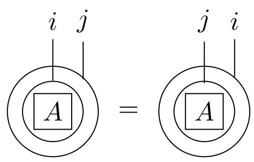
$$\nabla(AB) = \nabla(A)B + A\nabla(B)$$

[*1] この追加ルールについては 1.5.6 を参照。



1.4.6　微分順序交換

C^2 級関数 (2 階導関数が連続な関数) では微分順序の交換が可能である。Penrose のグラフ記法では円の内外を入れ替えることにほかならない。



以降、特に断りのない限り全ての量は C^2 級であるとする。

1.5　ベクトルの微分作用素にまつわる公式

本節の公式は以下に示す 5 つの変形**のみ**を用いて導出が可能である。

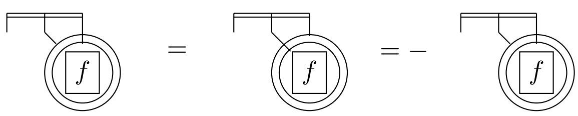
- Levi-Civita 記号の反対称性 (奇置換)
- Levi-Civita 記号での偶置換
- Levi-Civita 記号の縮約公式
- Leibnitz rule
- 微分順序交換

全ての導出は Einstein の縮約記法を用いた方法と全く同じ手順である。

1.5.1　rot grad $= 0$

微分順序の交換と反対称性を用いる。

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \nabla \times \nabla f = 0$$



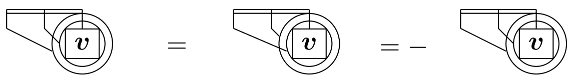
第 1 に微分順序交換、第 2 に反対称。左辺と右辺で $A = -A$ の形になっているので値は 0 である。

1.5.2　div rot $= 0$

1.5.1 と同様に示せる。

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$$

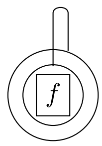
第 1 に微分順序交換、第 2 に反対称。やはり左辺と右辺で $A = -A$ の形になっているので値は 0 となる。



1.5.3 div grad $= \triangle$

1.4.4 で紹介したが、公式として再掲する。

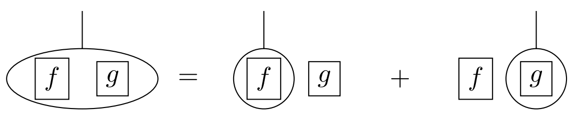
$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f = \nabla\cdot\nabla f = \triangle f$$



1.5.4 grad $(fg) = g\,\mathrm{grad}\,f + f\,\mathrm{grad}\,g$

Leibnitz rule で展開する。

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\,(fg) = (\mathrm{grad}\,f)g + f(\mathrm{grad}\,g)\\&\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)\end{aligned}$$

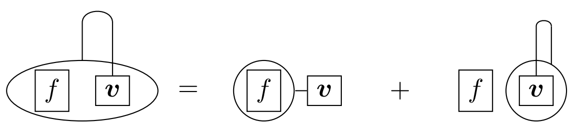


物理学においては、数式でも然りだが、誤解を生む形でなければベクトルのスカラー倍を表すのに必ずしもスカラー・ベクトルの順で配する必要はない。Penrose のグラフ記法でも同様である。

1.5.5 div $(f\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,f\cdot\boldsymbol{v} + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$

これもまた Leibnitz rule で展開する。

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\,(f\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,f\cdot\boldsymbol{v} + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\\&\nabla(f\boldsymbol{v}) = \nabla f\cdot\boldsymbol{v} + f\nabla\cdot\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

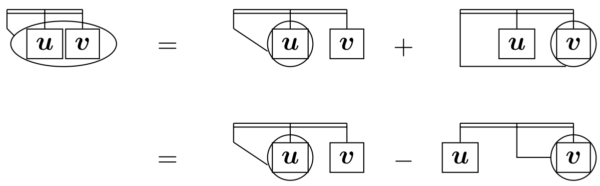


1.5.6 div $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$

Leibnitz rule に加えて反対称性を用いる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\\&\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\nabla\times\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

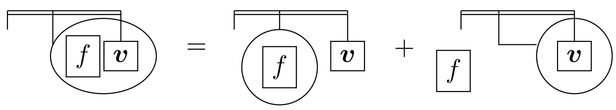
1.4.3 で示した「rot において微分対象は微分作用素のすぐ右の枝につなげる」ルールに従うようにする。



1.5.7 $\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,f \times \boldsymbol{v} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$

Leibnitz rule による展開。

$$\mathrm{rot}\,(f\boldsymbol{v}) = \mathrm{grad}\,f \times \boldsymbol{v} + f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$$
$$\nabla \times (f\boldsymbol{v}) = \nabla f \times \boldsymbol{v} + f\nabla \times \boldsymbol{v}$$

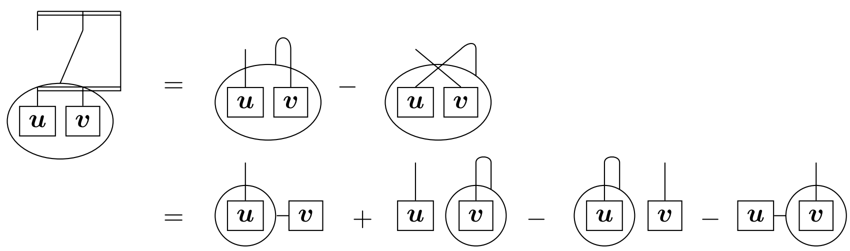


微分の内外を遵守する限り f の位置は問わない。

1.5.8 $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{v}$

Levi-Civita 記号の縮約公式と Leibnitz rule によって導出。

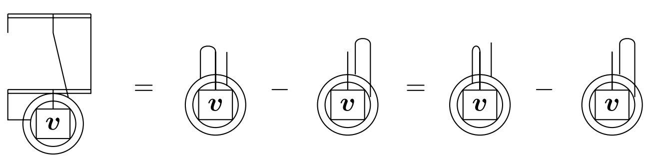
$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{v}$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$



1.5.9 $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\; = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\; - \triangle$

Levi-Civita 記号の縮約公式と微分順序交換から。

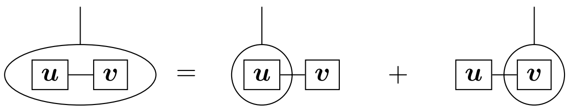
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} - \triangle\boldsymbol{v}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$$



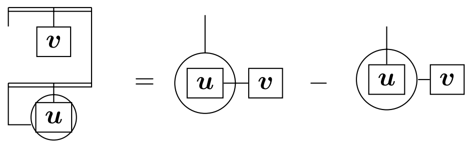
1.5.10 $\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{v}$

Leibnitz rule で展開した形に相当する演算がないので、各項 Levi-Civita 記号の縮約公式から得られたものとみて計算する。

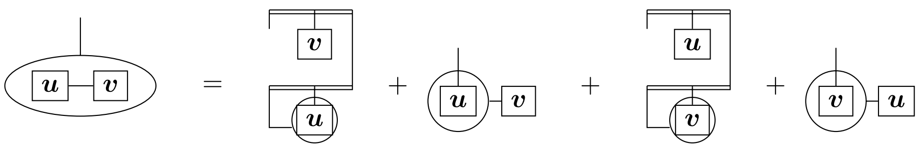
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,)\boldsymbol{v}\\
&\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$



この右辺第 1 項は次の Levi-Civita 記号の縮約公式から現れる。



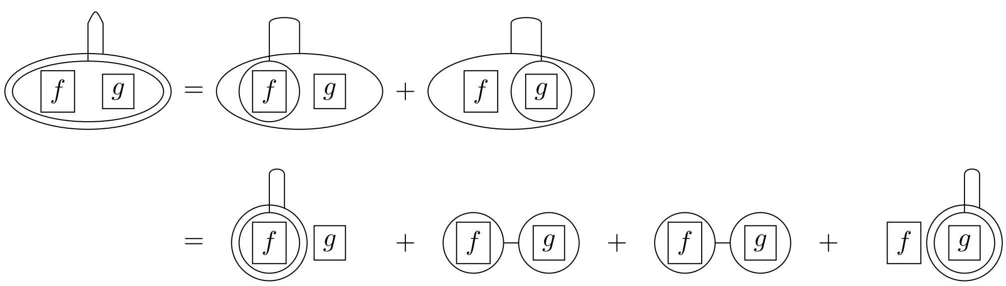
右辺第 2 項を移項したものが第 1 式第 1 項に一致する。第 1 式第 2 項は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を入れ替えたものに他ならない。結局以下の図式を得る。



1.5.11 $\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2\,\mathrm{grad}\,f\cdot\mathrm{grad}\,g + f(\triangle g)$

2 回にわたって Leibnitz rule を使う。

$$
\begin{aligned}
&\triangle(fg) = (\triangle f)g + 2\,\mathrm{grad}\,f\cdot\mathrm{grad}\,g + f(\triangle g)\\
&\nabla\cdot\nabla(fg) = (\nabla\cdot\nabla f)g + 2(\nabla f)\cdot(\nabla g) + f(\nabla\cdot\nabla g)
\end{aligned}
$$

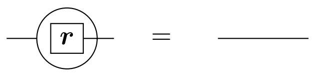


1.6 位置ベクトルの微分にまつわる公式

位置ベクトルを ∇ で微分する際は次の縮約が可能である。

$$\frac{\partial}{\partial r_i} r_j \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \boldsymbol{e}_j$$

これを Penrose のグラフ記法で表すと、$\boldsymbol{r}$ とそれを囲う円が消えて両端がつながったように表される。

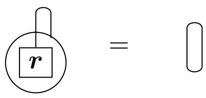


ここでは「公式」とするにふさわしいものを拾っていくことにする。

1.6.1 div $\boldsymbol{r} = 3$

右辺の 3 は次元の数で、4 次元なら 4, n 次元なら n となる。

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{r} = \nabla \cdot \boldsymbol{r} = \delta_{ii} = 3$$

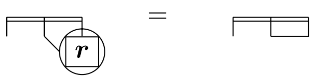


右辺の環は Kronecker の δ の両端がつながったものであり δ_{ii} となる。縮約のルールに則って 3 次元なら $i = 1, 2, 3$ で足し合わせる。

1.6.2 rot $\boldsymbol{r} = 0$

位置ベクトルの微分の縮約をとる。

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{r} = \nabla \times \boldsymbol{r} = 0$$



右辺は $\epsilon_{ijk}\delta jk = \epsilon_{ijj}$ を表すので 0 である。

2 完全反対称 Levi-Civita テンソルの公式の表現

2.1 前提知識

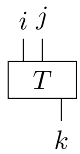
本節では、

- 添字の上下
- 完全反対称 Levi-Civita テンソル
- Einstein の縮約記法
- Kronecker の δ

についての知識を前提とする。

2.2 Penrose のグラフ記法におけるテンソルの表記

Penrose のグラフ記法にてテンソルは階数のぶんだけ枝が出ているものとして表現される。共変と反変の区別も可能で、添字の上下に合わせて枝の向きが対応する。上向きの枝が反変成分、下向きが共変を表す。



$T^{ij}{}_{k}$

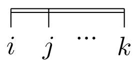
2.2.1 Kronecker の δ

Kronecker の δ は両端が開いた枝で表す。

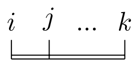
$\delta^{i}{}_{j}$

2.2.2 完全反対称 Levi-Civita テンソル

横向き二重線は反対称性を表し、これによって完全反対称 Levi-Civita テンソルを表現できる。

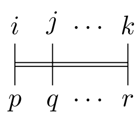


$\epsilon_{ij\ldots k}$



$\epsilon^{ij\ldots k}$

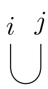
Penrose の論文 [1] に合わせて階数が等しい Levi-Civita テンソルの積は以下のように表すこともできる。[*2]



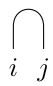
$\epsilon^{ij\ldots k}\epsilon_{pq\ldots r}$

2.2.3 計量テンソル

計量テンソルは添字の向きに Kronecker の δ を曲げたような格好になる。



g^{ij}



g_{ij}

[*2] Levi-Civita テンソルの積というよりも「反対称化」の方が言葉は適しているだろう。$A^iB^j - B^iA^j$ のような反対称テンソルを形成するときにはこの記法が有用である。

2.3 Levi-Civita テンソルの縮約公式

Levi-Civita テンソルの縮約は Kronecker の δ の行列式を使って表されることが多い。

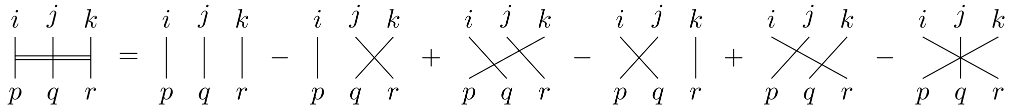
$$\epsilon^{ij\cdots k}\epsilon_{pq\cdots r} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \cdots & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \cdots & \delta^j_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \cdots & \delta^k_r \end{vmatrix}$$

一般次元での展開を Penrose のグラフ記法で表すことは難しいので、ここでは相対論で多用する 3 次元、4 次元での縮約公式を取り上げる。当然 3, 4 以外の次元でも同様である。

2.3.1 3 次元での縮約

Kronecker の δ を使って縮約を愚直に書き出すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{pqr} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \end{vmatrix} \\ &= \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_r - \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_q + \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_p - \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_r + \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_q - \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_p \end{aligned}$$

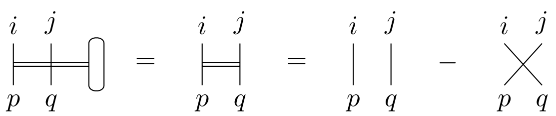


上 3 本と下 3 本の枝をつなぐ方法を全て列挙し、置換に応じた符号を与える。

Levi-Civita テンソルのグラフ記法が真価を発揮するのは一部の枝がつながっている場合であろう。

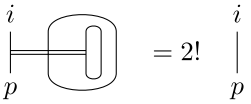
上下 1 組がつながっているときは 1.3.1 で紹介した通りである。縮約によって Levi-Civita テンソルの次数が減ると捉えられる。行列式では i, j, k 及び p, q, r がそれぞれ互いに全て異なることに注意しなければならないが、Penrose のグラフ記法では直観的に対応できる。

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{pqk} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^j_p & \delta^j_q \end{vmatrix} \\ &= \delta^i_p\delta^j_q - \delta^i_q\delta^j_p \end{aligned}$$



2 成分が縮約したときは、縮約した 2 成分の並び方を考慮して 2! をかけなければならない。

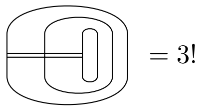
$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{pjk} = 2!\begin{vmatrix} \delta^i_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\delta^i_p$$



例えば i, j, k 及び p, q, r の 3 成分のうち j, q と k, r が縮約しているとする。上図でいうところの内側の縮約に j, q と k, r のどちらを当てるかで 2! の場合わけが必要となる。

同様にして 3 成分全てが縮約したときは 3! をかけなければならない。

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 3!\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$



2.3.2　4 次元での縮約

以下では Euclid 計量で記述する。Minkovski 計量では Euclid の 4 つの共変成分全てに計量テンソル

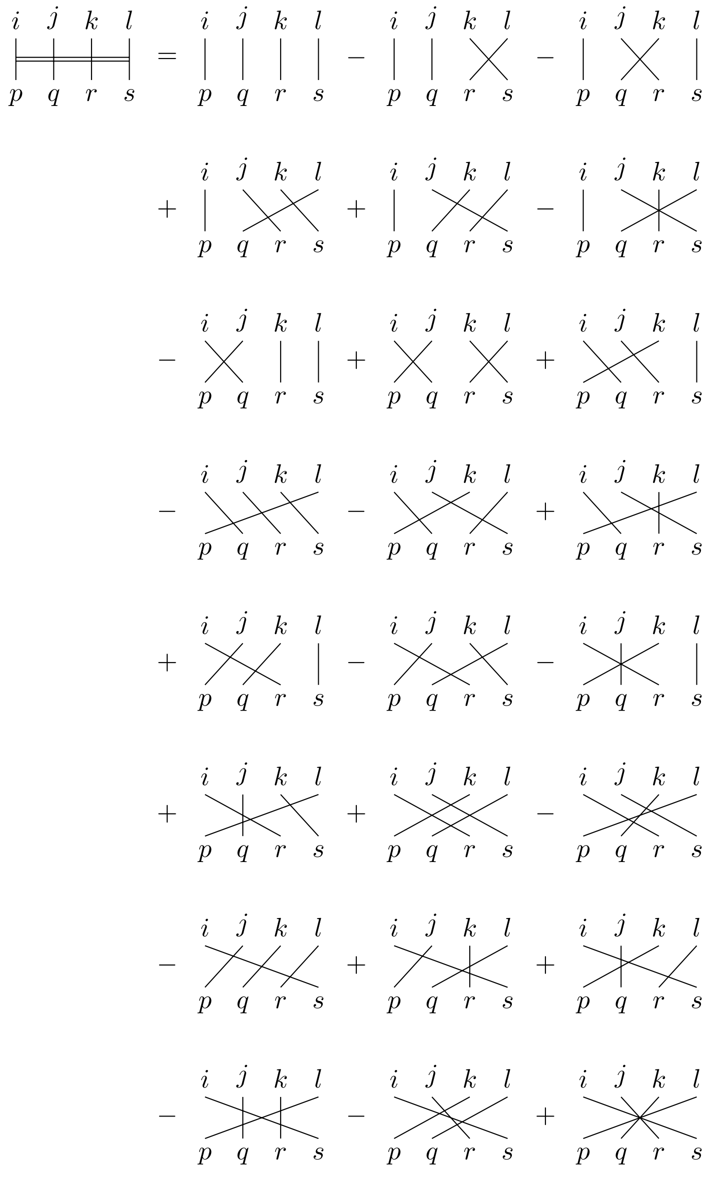
$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 0 \\ -1 & i = j \neq 0 \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

がかかり、本節全ての結果に負号がつく。

Kronecker の δ を使って愚直に計算すると以下のようになる。

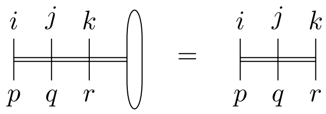
$$\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqrs} =& \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r & \delta^j_s \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_q & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix} \\
=& \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_r\delta^l_s - \delta^i_p\delta^j_q\delta^k_s\delta^l_r - \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_q\delta^l_s + \delta^i_p\delta^j_r\delta^k_s\delta^l_q + \delta^i_p\delta^j_s\delta^k_q\delta^l_r - \delta^i_p\delta^j_s\delta^k_r\delta^l_q \\
& - \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_r\delta^l_s + \delta^i_q\delta^j_p\delta^k_s\delta^l_r + \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_p\delta^l_s - \delta^i_q\delta^j_r\delta^k_s\delta^l_p - \delta^i_q\delta^j_s\delta^k_p\delta^l_r + \delta^i_q\delta^j_s\delta^k_r\delta^l_p \\
& + \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_q\delta^l_s - \delta^i_r\delta^j_p\delta^k_s\delta^l_q - \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_p\delta^l_s + \delta^i_r\delta^j_q\delta^k_s\delta^l_p + \delta^i_r\delta^j_s\delta^k_p\delta^l_q - \delta^i_r\delta^j_s\delta^k_q\delta^l_p \\
& - \delta^i_s\delta^j_p\delta^k_q\delta^l_r + \delta^i_s\delta^j_p\delta^k_r\delta^l_q + \delta^i_s\delta^j_q\delta^k_p\delta^l_r - \delta^i_s\delta^j_q\delta^k_r\delta^l_p - \delta^i_s\delta^j_r\delta^k_p\delta^l_q + \delta^i_s\delta^j_r\delta^k_q\delta^l_p
\end{aligned}$$

縮約を受けると次元が下がるのも同じである。

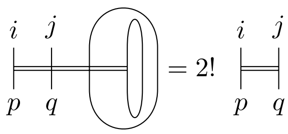


$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqrl} &= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r & 0 \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^j_p & \delta^j_q & \delta^j_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

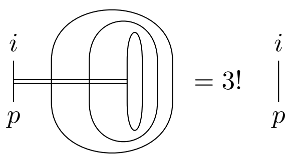
複数の成分が縮約されれば $2!, 3!, 4!$ をかける。



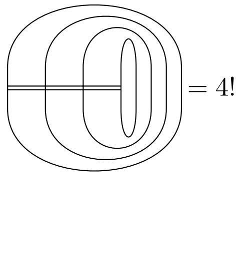
$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pqkl} &= 2!\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & 0 & 0 \\ \delta^j_p & \delta^j_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2!\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^j_p & \delta^j_q \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{pjkl} &= 3!\begin{vmatrix} \delta^i_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3!\delta^i_p
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijkl}\epsilon_{ijkl} &= 4!\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 4!
\end{aligned}
$$



参考文献

[1] Roger Penrose, *Applications of Negative Dimensional Tensors*, Academic Press, 1971.