

原码除法

$$[x]_{\text{原}} = x_f \cdot x_{n-1} \dots x_1 x_0, \quad [y]_{\text{原}} = y_f \cdot y_{n-1} \dots y_1 y_0$$

则商 $q = x / y$ 的原码为:

$$[q]_{\text{原}} = (x_f \oplus y_f) + (0.x_{n-1} \dots x_1 x_0 / 0.y_{n-1} \dots y_1 y_0)$$

例: 被除数 $x = 0.1001$, 除数 $y = 0.1011$ 。手工计算 x / y 的过程如下:

		0. 1 1 0 1	
0. 1 0 1 1)	0. 1 0 0 1	
		- 0. 1 0 1 1	$x < y$, 商0
		0. 1 0 0 1 0	得余数 r_0 (即 x)
		- 0. 0 1 0 1 1	除数右移一位, 余数减除数, 商1
		0. 0 0 1 1 1 0	得余数 r_1
		- 0. 0 0 1 0 1 1	除数右移一位, 余数减除数, 商1
		0. 0 0 0 0 1 1 0	得余数 r_2
		- 0. 0 0 0 1 0 1 1	除数右移一位, 余数不减除数, 商0
		0. 0 0 0 0 1 1 0 0	得余数 r_3
		- 0. 0 0 0 0 1 0 1 1	除数右移一位, 余数减除数, 商1
		0. 0 0 0 0 0 0 0 1	得余数 r_4

恢复余数法

被除数 $x=0.1001$ ，除数 $y=0.1011$ $[-y]_{补}=1.0101$

为保证余数左移时符号位不变，应采用双符号位

对于上除法修改如下

(1) 将心算比较余数和除数大小改为减法比较，并且减 y 改为加 $[-y]_{补}$ 。余数减除数大于等于0则商1，小于0则商0。

(2) 将除数右移改为余数左移。

如果余数减除数的差小于0，应将差加上除数，恢复原来的余数。这就是恢复余数法。

	0 0. 1 0 0 1	商
$[-y]_{补}$	1 1. 0 1 0 1	
	1 1. 1 1 1 0	0
	+ 0 0. 1 0 1 1	
	0 0. 1 0 0 1	
	← 0 1. 0 0 1 0	
$+[-y]_{补}$	1 1. 0 1 0 1	
	0 0. 0 1 1 1	0. 1
	← 0 0. 1 1 1 0	
$+[-y]_{补}$	1 1. 0 1 0 1	
	0 0. 0 0 1 1	0. 1 1
	← 0 0. 0 1 1 0	
$+[-y]_{补}$	1 1. 0 1 0 1	
	1 1. 1 0 1 1	0. 1 1 0
	+ 0 0. 1 0 1 1	
	0 0. 0 1 1 0	
	← 0 0. 1 1 0 0	
$+[-y]_{补}$	1 1. 0 1 0 1	
	0 0. 0 0 0 1	0. 1 1 0 1

说明

$x-y$

余数 $r_0 < 0$ ，商0
加 y 恢复余数

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_1 > 0$ ，商1

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_2 > 0$ ，商1

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_3 < 0$ ，商0

加 y 恢复余数

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_4 > 0$ ，商1

加减交替法

恢复余数法中，设某次余数为 r_i ，要继续进行下面的求商运算，需要将 r_i 左移一位，然后减去除数，进行比较：

$$2r_i - y$$

结果小于0时商上0，并加 y 恢复余数：

$$(2r_i - y) + y = 2r_i$$

继续下面的求商，又要将它左移一位，再减去除数

$$2(2r_i - y) - y = 4r_i - y$$

当 $(2r_i - y)$ 小于0时，商仍上0，但不进行加 y 恢复余数的操作，而是将 $(2r_i - y)$ 左移一位，然后加上除数

$$2(2r_i - y) + y = 4r_i - y$$

也得到同样的余数 $(4r_i - y)$ 。所以，当比较结果小于0时，仍将结果左移一位，然后加上除数 y 。这就是不恢复余数法，也称加减交替法。

加减交替法的运算规则是：

余数为正时，商上1，余数左移一位，再减去除数，得到新的余数；

余数为负时，商上0，余数左移一位，再加上除数，得到新的余数。

	0 0. 1 0 0 1	商	说明
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		$x-y$
	1 1. 1 1 1 0	0	余数 $r_0 < 0$, 商0
	1 1. 1 1 0 0		左移一位
$+y$	0 0. 1 0 1 1		余数为负, 加y
	0 0. 0 1 1 1	0.1	余数 $r_1 > 0$, 商1
	0 0. 1 1 1 0		左移一位
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		余数为正, 减y
	0 0. 0 0 1 1	0.11	余数 $r_2 > 0$, 商1
	0 0. 0 1 1 0		左移一位
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		余数为正, 减y
	1 1. 1 0 1 1	0.110	余数 $r_3 < 0$, 商0
	1 1. 0 1 1 0		左移一位
$+y$	0 0. 1 0 1 1		余数为负, 加y
	0 0. 0 0 0 1	0.1101	余数 $r_4 > 0$, 商1

余数：

注意：得到的余数是经过左移4次后的结果
故余数为 0.0001×2^{-4}

余数是经过左移后的结果，需进行还原，
即余数 $\times 2^{-n}$

不带符号原码除法

即：被除数、除数的绝对值（都转为正数）

余数符号

以十进制为例：

$$14 \div 3 = 4 \cdots 2$$

$$(-14) \div (-3) = 4 \cdots -2 \leftarrow \text{余数变号}$$

$$14 \div (-3) = -4 \cdots 2$$

$$(-14) \div 3 = -4 \cdots -2 \leftarrow \text{余数变号}$$

被除数=除数×商+余数

余数符号

以十进制为例：

$$14 \div 3 = 5 \cdots -1$$

$$(-14) \div (-3) = 5 \cdots 1 \quad \leftarrow \text{余数变号}$$

$$14 \div (-3) = -5 \cdots -1$$

$$(-14) \div 3 = -5 \cdots 1 \quad \leftarrow \text{余数变号}$$

被除数=除数×商+余数

- 当被除数为负时，余数要变号
- 如何变号？从 $[y]_{\text{补}}$ 变成 $[-y]_{\text{补}}$
- 原因：当为负数时，变成绝对值进行处理，已经变号
- 商的符号由被除数、除数符号决定。
- 余数的符号由被除数决定

运算过程中，当余数为负数时

- 恢复余数法，需要对进行恢复余数
- 加减交替法的余数需要“回溯”至上一个正数

恢复余数法

被除数 $x=0.1001$, 除数 $y=0.1011$ $[-y]_{\text{补}}=1.0101$

0 0. 1 0 0 1 商

$+[-y]_{\text{补}}$ 1 1. 0 1 0 1

1 1. 1 1 1 0 0

$+0$ 0. 1 0 1 1

0 0. 1 0 0 1

\leftarrow 0 1. 0 0 1 0

$+[-y]_{\text{补}}$ 1 1. 0 1 0 1

0 0. 0 1 1 1 0. 1

\leftarrow 0 0. 1 1 1 0

$+[-y]_{\text{补}}$ 1 1. 0 1 0 1

0 0. 0 0 1 1 0. 1 1

\leftarrow 0 0. 0 1 1 0

$+[-y]_{\text{补}}$ 1 1. 0 1 0 1

1 1. 1 0 1 1 0. 1 1 0

$+0$ 0. 1 0 1 1

0 0. 0 1 1 0

\leftarrow 0 0. 1 1 0 0

$+[-y]_{\text{补}}$ 1 1. 0 1 0 1

0 0. 0 0 0 1 0. 1 1 0 1

说明

$x-y$

余数 $r_0 < 0$, 商0

加 y 恢复余数

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_1 > 0$, 商1

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_2 > 0$, 商1

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_3 < 0$, 商0

加 y 恢复余数

余数左移一位

减 y 比较

余数 $r_4 > 0$, 商1

若商保留小数点后三位
余数为 00.0011×2^{-2}

若商保留小数点后三位
余数为 00.0110×2^{-3}

若商保留小数点后三位
余数为 00.0011×2^{-2}

	0 0. 1 0 0 1	商	
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		
	1 1. 1 1 1 0	0	
	← 1 1. 1 1 0 0		
$+y$	0 0. 1 0 1 1		
	0 0. 0 1 1 1	0.1	
	← 0 0. 1 1 1 0		
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		
	0 0. 0 0 1 1	0.11	↑
	← 0 0. 0 1 1 0		
$+[-y]_{\text{补}}$	1 1. 0 1 0 1		
	1 1. 1 0 1 1	0.110	
	← 1 1. 0 1 1 0		
$+y$	0 0. 1 0 1 1		
	0 0. 0 0 0 1	0.1101	

说明
 $x-y$
余数 $r_0 < 0$, 商0
左移一位
余数为负, 加 y
余数 $r_1 > 0$, 商1
左移一位
余数为正, 减 y
余数 $r_2 > 0$, 商1
左移一位
余数为正, 减 y
余数 $r_3 < 0$, 商0
左移一位
余数为负, 加 y
余数 $r_4 > 0$, 商1

被除数 $x=1001$ ，除数 $y=1011$

同乘以一个比例因子 2^{-4} ，变小（都变成小于1的数）

注意：

此时被除数已经缩小，余数需要还原（乘以 2^4 ）

总 结

- 当被除数为负时，余数要变号
- 余数是经过左移后的结果，需进行还原，即余数 $\times 2^{-n}$
- 若余数为负数，需回溯至上一个正数
- 若计算前，乘以比例因子，余数需还原