Лозгачёва Анна СКБ222

В работе за X одинаково обозначается случайная величина, имеющая соответствующее пункту распределение.

Логарифмическое распределение

$P_X(x) = -\ln(1-\theta)^{-1} \cdot \theta^x \cdot x^{-1} \quad , \quad x \in \mathbb{N},\ 0 < \theta < 1$

1. Описание основных характеристик распределения

Функция распределения

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{-1}{ln(1-\theta)} \frac{\theta^k}{k} = \frac{-1}{ln(1-\theta)} \sum_{k=1}^{x} \frac{\theta^k}{k}$$

Математическое ожидание

$$EX = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{-1}{ln(1-\theta)} \frac{\theta^x}{x} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{-1}{ln(1-\theta)} \theta^x = \frac{-\theta}{ln(1-\theta)} \sum_{x=1}^{\infty} \theta^{x-1} = \frac{-\theta}{(1-\theta)ln(1-\theta)}$$

Дисперсия

$$EX^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{-1}{ln(1-\theta)} \frac{\theta^x}{x} = \frac{-1}{ln(1-\theta)} \sum_{x=1}^{\infty} x\theta^x = \left\{ c = \frac{-1}{ln(1-\theta)} \right\} =$$
$$= c\sum_{x=1}^{\infty}(x+1)\theta^x - \theta^x = c\left(\sum_{x=1}^{\infty} \theta^{x+1}\right)' - c\sum_{x=1}^{\infty} \theta^x = c\left(\theta^2 \sum_{x=1}^{\infty} \theta^{x-1}\right)' - c\frac{\theta}{1-\theta} =$$
$$= c\left(\frac{\theta^2}{1-\theta}\right)' - c\frac{\theta}{1-\theta} = c\frac{2\theta(1-\theta)+\theta^2}{(1-\theta)^2} - c\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{2\theta c - 2\theta^2 c + \theta^2 c - c\theta + c\theta^2}{(1-\theta)^2} =$$
$$= \frac{\theta c}{(1-\theta)^2} = \frac{-\theta}{(1-\theta)^2 ln(1-\theta)}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{-\theta}{(1-\theta)^2 ln(1-\theta)} - \left(\frac{-\theta}{(1-\theta)ln(1-\theta)}\right)^2 =$$
$$= \frac{-\theta ln(1-\theta)}{(1-\theta)^2 ln^2(1-\theta)} - \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2 ln^2(1-\theta)} = \frac{-\theta \ln(1-\theta) - \theta^2}{(1-\theta)^2 ln^2(1-\theta)} = -\theta \frac{\ln(1-\theta)+\theta}{(1-\theta)^2 ln^2(1-\theta)}$$

Квантиль уровня γ

$F(x_\gamma) \geq \gamma$

$\gamma \leq \frac{-1}{ln(1-\theta)} \sum_{k=1}^{x_\gamma} \frac{\theta^k}{k}$

Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами

Известные соотношения между распределениями

Пусть $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, где $X_i \sim log(p)$. Пусть также $N \sim \Pi(\lambda)$. Производящая функция X_i равна $\frac{\ln(1-ps)}{\ln(1-p)}$.
Тогда производящая функция Y равна

$$\exp\left(\lambda\left(\frac{\ln(1-ps)}{\ln(1-p)} - 1\right)\right) = \left(\frac{1-p}{1-ps}\right)^{\frac{-\lambda}{ln(1-p)}}$$

что является производящей функция для $NB\left(\frac{-\lambda}{\ln(1-p)}, 1-p\right)$

Описание способа моделирования выбранных случайных величин

Методом обратного преобразования.

1. Сгенерируем $U \sim R(0,1)$
2. Найдем индекс k такой, что $\sum_{j=1}^{k-1} p_j \leq U < \sum_{j=1}^{k} p_j$ и возвращаем $X = x_k$

Нормальное распределение

$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

Описание основных характеристик распределения

Функция распределения

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du$$

Математическое ожидание

$$EX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx = \begin{vmatrix} t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ dx = \sigma dt \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + \mu) e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$
$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} = \mu$$

Дисперсия

$$EX^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2 t^2 + 2t\sigma\mu + \mu^2) e^{\frac{-t^2}{2}} dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}} dt}_{(1)} + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \right) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \begin{vmatrix} u = t \quad du = dt \\ dv = t e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\ v = -e^{\frac{-t^2}{2}} \end{vmatrix} = \underbrace{-te^{\frac{-t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$
$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Квантиль уровня γ

$$F_X(x_\gamma) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_\gamma} \exp\left(\frac{-u^2}{2}\right) du$$

Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами

Привести пример интерпретации распределения – описания события, исходы в котором подчиняются выбранному распределению

Допустим, что какая-то компания хочет сделать рекламную рассылку по n своим клиентам. Допустим также, что вероятность того, что клиент посмотрит письмо равна p, а вероятность того, что проигнорирует $q = 1 - p$.
Число просмотров рассылки будет подчиняться биномиальному распределению:
$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$
Тогда, если рассматривать эту же ситуацию при $n, x \to \infty$, то можем воспользоваться теоремой Муавра-Лапласа:
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Получили ничто иное, как плотность нормального распределения с параметрами $\mu = np$ и $\sigma^2 = np(1-p)$, которому и будет подчиняться ситуация, описанная в примере. Таким образом, нормальное распределение описывает количество просмотров рекламы из приведенного примера.

Известные соотношения между распределениями

В предыдущем пункте также показана связь с биномиальным распределением.

Описание способа моделирования выбранных случайных величин

Преобразование Бокса-Мюллера
Пусть r и φ - независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $(0, 1]$. Вычислим z_0 и z_1:
$z_0 = \cos(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r}$
$z_1 = \sin(2\pi\varphi)\sqrt{-2\ln r}$
Тогда z_0 и z_1 будут независимы и распределены нормально с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.