Теорема(Рао - Блекуэлла - Колмогорова) Оптимальная оценка, если она и существует, является функцией от достаточной статистики \

Опр Достаточную статистику называют полной, если для функции $\phi(T)$ из того, что

$$E_\theta \phi(T) = 0$$

для любого θ следует $\phi(t) \equiv 0$ на всем множестве значений статистики T \

Теорема Если существует полная достаточная статистика, то всякая функция от нее является оптимальной оценкой своего математического ожидания

Критерий Рао-Крамера

$$T(X) - \tau(\theta) = \alpha(\theta) V(X, \theta)$$

, где $\alpha(\theta)$ -некоторая функция от θ

Нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \hat{\theta}^2)$

$f(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta^2}\right), x, \mu \in \mathbb{R}, \theta > 0$

Оценка максимального правдоподобия

$L = L(X, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}\right) = \frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta^2}\right)$

$\ln L = \ln \frac{1}{(\theta\sqrt{2\pi})^n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta^2} = -n \ln \theta - n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$

$\frac{-n}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta}^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$

$\frac{1}{\hat{\theta}^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = n$

$\hat{\theta}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

Оценка методом моментов

$a_1 = \mu$

$\hat{a}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu$

$a_2 = \theta^2 + \mu^2$

$\hat{a}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \theta^2 + \mu^2$

$\hat{\theta}^2 = \hat{a}_2 - \hat{a}_1^2 = S^2$

Оптимальная оценка

Нормальная модель регулярна $\Rightarrow$ можем найти эффективную оценка, которая также является оптимальной.

$L(X, \theta) = L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\theta^2}\right)$

$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} - \frac{(x-\mu)^2}{2\theta^2}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[-\ln \sqrt{2\pi}\theta - \frac{(x-\mu)^2}{2\theta^2}\right]$

$V(\theta) = V = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{-1}{\theta} + \frac{(x-\mu)^2}{\theta^3}\right] = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} (x - \mu)^2$

$-\theta^2 n + \sum_{i=1}^{n} (x - \mu)^2 = \theta^3 V$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - \mu)^2 - \theta^2 = \frac{\theta^3 V}{n}$

Получили, что $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x - \mu)^2$ - линейная функция вклада выборки, а следовательно является эффективной, а следовательно и оптимальной для $\tau(\theta^2)$.

Построим оценку для θ

Известна связь с χ^2

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\theta^2} \sim \chi_n^2 \implies \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\theta^2}} \sim \chi_n$$

$$\sqrt{n}Y \sim \chi_n$$

$E_\xi = \sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \xi \sim \chi_n$

$$\sqrt{T(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n^2}} = \theta \frac{Y}{\sqrt{n}}$$

$Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\theta^2}} \sim \chi_n$

$$E_{\sqrt{T(x)}} = E\theta \frac{Y}{\sqrt{n}} = \theta \frac{\sqrt{2}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}}{\sqrt{n}}$$

Тогда наша оптимальная, т.к. построена от полной достаточной, оценка есть

$$\theta = \sqrt{T(x)} \frac{\sqrt{n}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Логарифмическое распределение

$P(x) = \frac{-1}{\ln(1-\theta)} \frac{\theta^x}{x}$

Оценка максимального правдоподобия

$L = \prod_{i=1}^n \frac{-\theta^x}{\ln(1-\theta) x_i}$

$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln \frac{-\theta^{x_i}}{x_i \ln(1-\theta)} = \left[\sum_{i=1}^n \ln -\theta^{x_i} - \ln x_i - \ln\ln(1-\theta)\right]$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{-\theta^{x_i - 1} x_i}{-\theta^{x_i}} + \frac{1}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}\right]$

$\sum_{i=1}^n \frac{-\hat{\theta}^{x_i - 1} x_i}{-\hat{\theta}^{x_i}} + \frac{n}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})} = 0$

$\sum_{i=1}^n \frac{-\hat{\theta}^{x_i - 1} x_i}{-\hat{\theta}^{x_i}} = \frac{-n}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$

$\parallel$

$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\hat{\theta}} = \frac{1}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^n x_i$

$\frac{1}{\hat{\theta}} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{-n}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$

$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{-\hat{\theta}}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$

$\overline{x} = \frac{-\hat{\theta}}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$

Сделаем замену $y = \frac{\hat{\theta}}{1-\hat{\theta}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{y}{1+y}$, $1 - \hat{\theta} = \frac{1}{1+y}$.

$\overline{x} = \frac{-y}{(1+y)\left(\frac{1}{1+y}\right)\ln(\frac{1}{1+y})} = \frac{-y}{-\ln(1+y)} = \frac{y}{\ln(1+y)}$

$\overline{x} = \frac{1}{\ln(1+y)}$

$y = \overline{x}\ln(1+y)$

$\frac{y}{x} = \ln(1+y)$

$\exp\left(\frac{y}{\overline{x}}\right) = \exp(\ln(1+y))$

$\exp\left(\frac{y}{\overline{x}}\right) = 1 + y$

$\frac{1+y}{\exp(\frac{y}{\overline{x}})} = 1$

$(1+y)\exp\left(\frac{y}{-\overline{x}}\right) = 1$

$\frac{1+y}{-\overline{x}} \exp\left(\frac{y+1}{-\overline{x}}\right) = \frac{\exp\left(\frac{1}{-\overline{x}}\right)}{-\overline{x}}$

$\frac{1+y}{-\overline{x}} = W\left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}}\right),$

где W - функция Ламберта - обратная функция к $f(x) = xe^x$ для комплексных x.

$$y = -1 - \overline{x} W \left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}} \right)$$

$$\frac{\hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}} = -1 - \overline{x} W \left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}} \right)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\left(-1 - \overline{x} W \left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}} \right) \right)}{\left(-\overline{x} W \left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}} \right) \right)}$$

$$\hat{\theta} = \left(\overline{x} W \left(\frac{\exp\left(\frac{-1}{x}\right)}{-\overline{x}} \right) \right)^{-1} + 1$$

Оценка методом моментов

$$a_1 = \frac{-\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}$$

$$\hat{a}_1 = \overline{x}$$

$$\overline{x} = \frac{-\hat{\theta}}{(1-\hat{\theta})\ln(1-\hat{\theta})}$$

Аналогично с м.м.п. выражается $\hat{\theta}$ и получается такая же оценка.

Оптимальная оценка

Логарифмическая модель - регулярна, так что найдем эффективную оценку.

$$V = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{-\theta^{x_i - 1} x_i}{-\theta^{x_i}} + \frac{1}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} \right]$$

$$\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} = V$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} = \theta V$$

Получили, что $\overline{x}$ является оптимальной оценкой для $\frac{-\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)}$. Также, как и в предыдущих пунктах можно выразить θ с помощью функции Ламберта.

Значения оценок для сгенерированных выборок

Для каждой сгенерированной выборки необходимо привести значения полученных оценок. (решение в matstat.ipynb)