БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОУ: кафедра методов оптимального управления

# ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Иван И. Лозовский

# Группа объектов управления



- Группа из $q$ взаимосвязанных линейных нестационарных объектов управления
- Математическая модель $i$-го объекта, $i \in I = \{1,\ 2,\ ...,\ q\}$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}$$

  - $T = [t_0,\ t_f]$
  - $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i},\ t \in T$
  - $u_i = u_i(t) \in U_i = \{u \in \mathbb{R}^{r_i} : u_{i*} \leq u \leq u_i^*\},\ t \in T$
  - $A_i(t), t \in T,\ B_i(t), t \in T,$ –динамика и входное устройство $i$-й модели
- $T_h = \{t_0,\ t_0 - h, \ldots,\ t_f - h\},\ h = \dfrac{t_f - t_0}{N},\ N \in \mathbb{N}$
- Дискретное управляющее воздействие

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau,\ \tau + h[, \quad \tau \in T_h$$

- Терминальное множество $S$ (общее для всех объектов)

$$x(t_f) \in S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in I} H_i x_i = g \right\}$$

  - $n = \sum_{i \in I_i} n_i$
  - $H_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$
  - $\mathrm{rank}(H_i) = m \leq n_i, i \in I$
  - $g \in \mathbb{R}^m$

# Статические взаимосвязи



$$x(t_f) \in S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in I} H_i x_i = g \right\}$$

- Упрощенная запись

$$x(t_f) \in S = \{x : Hx = g\}$$

  - $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$
  - $H = (H_1, ..., H_q)$

# Цель управления



- Минимизация линейного терминального критерия качества

$$\sum_{i\in I} c_i' x_i(t_f) \to \min_u$$

- Упрощенная запись

$$c'x \to \min_u, \;\; c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$$

# Задача оптимального управления для группы



$$\sum_{i\in I} c_i' x_i(t_f) \to \min_u$$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j\in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j\in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}, \; i \in I$$

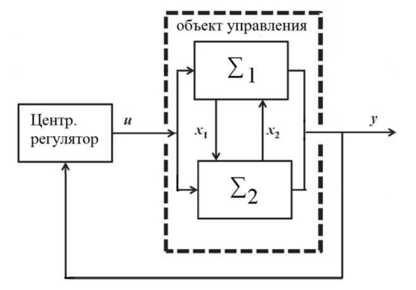
$$\sum_{i\in I} H_i x_i(t_f) = g$$

- $u_i(t) \in U_i, \quad t \in T, \quad i \in I$

# Централизованное и децентрализованное управление

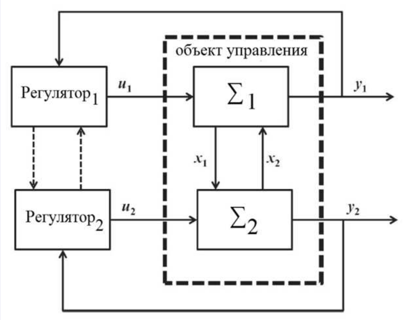


## Централизованное




центральный регулятор вычисляет значение управления для всех объектов группы

## Децентрализованное




локальный регулятор строит локальное управление

# Построение централизованной обратной связи в реальном времени



- Упрощенный вид решаемой задачи

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0$$

  - $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{q,0} \end{pmatrix}$
  - $A,\ B$ — соответствующие блочные матрицы

- Построение реализации обратной связи

$$x^*(\tau) = \begin{pmatrix} x_1^*(\tau) \\ \vdots \\ x_q^*(\tau) \end{pmatrix}, \ \tau \in T_h, \ u^*(t) = \begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ \vdots \\ u_q^*(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [\tau, \tau + h[,$$

# Задача $P(\tau)$



Для построения реализации обратной связи оптимальный регулятор решает задачу $P(\tau)$:

$$c'x(t_f) \to \min_u,$$
$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau),$$
$$Hx(t_f) = g, \quad u \in U, \quad t \in [\tau, t_f]$$

- $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_q$
- Оптимальную программу задачи $P(\tau)$ будем обозначать $u^0(t|\tau, x^*(\tau)), t \in [\tau, t_f]$

# Алгоритм построения реализации централизованной обратной связи $u^*(\tau, x^*(\tau))$, $\tau \in T_h$



1. Положить $\tau = t_0,\ x^*(\tau) = x_0$.
2. Найти оптимальную программу $u^0(t|\tau, x^*(\tau)), t \in [\tau, t_f]$, задачи $P(\tau)$.
3. Задать значение оптимальной обратной связи для позиции $(\tau, x^*(\tau))$:
$$u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau)),$$
и подать на объект управления управляющее воздействие
$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) := u^0(\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h[.$$
4. В момент $\tau + h$ измерить $x^*(\tau + h)$, положить $\tau := \tau + h$, при $\tau < t_f$ вернуться к шагу 2.

# Последовательный подход



- Формула Коши

$$x(t) = F(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(t,\theta)B(\theta)u(\theta)\,d\theta$$

- Подставим в формулу Коши $t = t_f$, а получившуюся величину $x(t_f)$ подставим в исходную задачу

$$\sum_{s\in T_h} c_h'(s)u(s) \to \min,$$

$$\sum_{s\in T_h} D_h(s)u(s) = \tilde{g},$$

$$u_* \le u(s) \le u^*,\;\; s\in T_h$$

- $c_h'(s) = \int\limits_{s}^{s+h} c'F(t_f,\theta)B(\theta)\,d\theta,$
- $c_h(s) \in \mathbb{R}^r$
- $D_h(s) = \int\limits_{s}^{s+h} HF(t_f,\theta)B(\theta)\,d\theta,$
- $D_h(s) \in \mathbb{R}^{m\times r},$
- $\tilde{g} = g - HF(t_f,t_0)x_0$

# Функциональная форма $P(\tau)$



$$\sum_{s\in T_h(\tau)} c_h'(s)u(s) \to \min,$$

$$\sum_{s\in T_h(\tau)} D_h(s)u(s) = \tilde{g}(\tau),$$

$$u_* \le u(s) \le u^*,\ \ s\in T_h(\tau)$$

- $T_h(\tau) = [\tau, t_f] \cap T_h$
- $\tilde{g} = g - HF(t_f,\tau)x^*(\tau)$

# Рассматриваемый пример



- Три взаимосвязанных системы

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_1 &= -2kz_1 + kz_2 + u_1 + w_1,\\
\ddot{z}_2 &= -2kz_2 + kz_1 + kz_3 + u_2 + w_2,\\
\ddot{z}_3 &= -2kz_3 + kz_2 + u_3 + w_3
\end{aligned}$$

  - $|u_i(t)| \le L,\ i \in I = \{1,\ 2,\ 3\}$
  - $t \in [t_0, t_f]$
- Ограничения, задающие терминальное множество

$$|z_i(t_f)| \le d_1,\ |\dot{z}_i(t_f)| \le d_2, i \in I$$

- Критерий качества

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)|\, dt \to \min .$$

# Параметры задачи и замена



- Параметры задачи

$$k = 10,\ L = 1,\ t_0 = 0,\ t_f = 4.5$$

$$d_i = 0.1,\ \dot{z}_i(0) = 1,\ z_i(0) = 1,\ i \in I$$

$$N = 100 => h = \frac{1}{N} = \frac{1}{100}$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} 0.7\,\sin 2t \\ 0.1\,\cos t \\ -0.05\,\cos 3t \end{pmatrix}$$

- Замена

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, & x_3 &= z_2, & x_5 &= z_3, \\ x_2 &= \dot{z}_1, & x_4 &= \dot{z}_2, & x_6 &= \dot{z}_3. \end{aligned}$$

# Вид задачи после замены



$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)|\, dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t),$$

$$x(0) = x_0,\ \ t \in [t_0, t_f],\ \ Hx(t_f) \le g$$

$$H = \begin{pmatrix} E_6 \\ -E_6 \end{pmatrix},$$

$$g = 0.1 \cdot \mathbb{1}_{12},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & -2k & 0 \end{pmatrix},\ B = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Функциональная форма данного примера



- Замена
$$u(s) = z(s) - v(s), s \in T_h$$
- После применения последовательного подхода получим

$$\sum_{s \in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \to \min,$$

$$\sum_{s \in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \le \tilde{g}$$

- $D_h(s)$ и $\tilde{g}$ задаются аналогично тому, как задавались при сведении задачи к задаче ЛП

# Функциональная форма данного примера



$$\sum_{s\in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \to \min,$$

$$\sum_{s\in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \le \tilde{g},$$

$$c = \mathbb{1}_{2r}$$

Доплнительные переменные

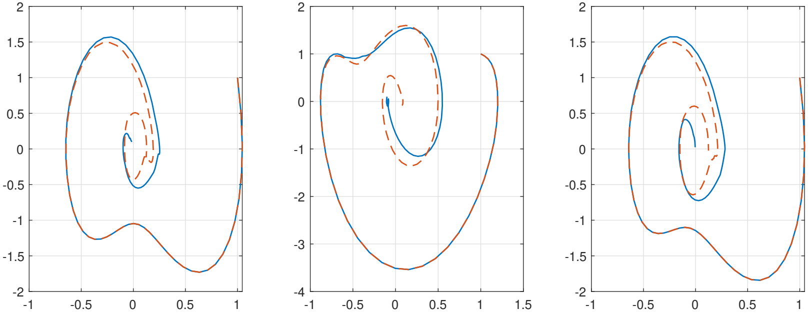
- $n = 6$ – число равенств замены
- $q = 3$ – число систем
- $r = q$ – число управлений
- $m = 2n$ – число ограничений на $x_i$, $i = 1 \dots n$

$$D_h(s) = \int\limits_s^{s+h} HF(t_f, \theta)B(\theta)\, d\theta, \;\; D_h(s) \in \mathbb{R}^{m\times r};$$

$$\tilde{g} = g - HF(t_f, t_0)x_0, \;\; \tilde{g} \in \mathbb{R}^m$$

# Результаты. Терминальные состояния



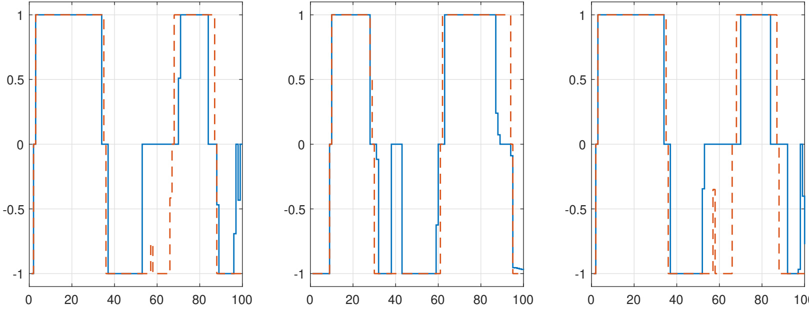



$$X_1 = \begin{pmatrix} -0.0155 \\ 0.0978 \\ -0.1000 \\ 0.0990 \\ -0.0038 \\ 0.0238 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0.1238 \\ -0.1174 \\ 0.0748 \\ -0.0818 \\ 0.1240 \\ -0.0233 \end{pmatrix}$$

# Сопутствующие результаты



- Значение критерия качества для программного решения: $285.0503$.
- Значение критерия качества для оптимальной обратной связи: $217.5017$
- Среднее время выполнения функции $P(\tau)$ : $0.029$ секунды
- Соответствующие фазовым графикам управления



*Спасибо за внимание!*