

# ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Иван И. Лозовский

- Группа из  $q$  взаимосвязанных линейных нестационарных объектов
- Математическая модель  $i$ -го объекта,  $i \in I = \{1, 2, \dots, q\}$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}$$

- ▶  $t \in T = [t_0, t_f]$
  - ▶  $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $t \in T$  – состояние  $i$ -й математической модели
  - ▶  $u_i = u_i(t) \in U_i = \{u \in \mathbb{R}^{r_i} : u_{i*} \leq u \leq u_i^*\}$ ,  $t \in T$  – управляющее воздействие  $i$ -й математической модели
- Дискретное управляющее воздействие

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h,$$

$$T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}, \quad h = \frac{t_f - t_0}{N}, \quad N \in \mathbb{N}$$

- Терминальное множество  $S$  (общее для всех объектов)

$$x(t_f) \in S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in I} H_i x_i = g \right\}$$

- ▶  $n = \sum_{i \in I_i} n_i$
- ▶  $H_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$
- ▶  $\text{rank}(H_i) = m \leq n_i, i \in I$
- ▶  $g \in \mathbb{R}^m$
- ▶ Минимизация **линейного терминального** критерия качества

$$\sum_{i \in I} c'_i x_i(t_f) \rightarrow \min_u$$

# Задача оптимального управления группой

$$\sum_{i \in I} c'_i x_i(t_f) \rightarrow \min_u$$

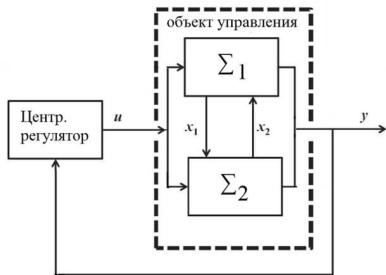
$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}, \quad i \in I$$

$$\sum_{i \in I} H_i x_i(t_f) = g$$

$$u_i(t) \in U_i, \quad t \in T, \quad i \in I$$

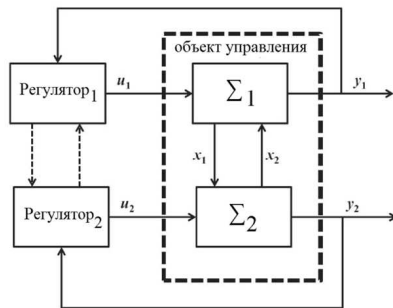
# Централизованное и децентрализованное управление

## Централизованное



центральный регулятор  
вычисляет значение управления  
для всех объектов группы

## Децентрализованное



локальный регулятор строит  
локальное управление

# Построение централизованной обратной связи в реальном времени

- Большая динамическая система для централизованной задачи

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0$$

- ▶  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{q,0} \end{pmatrix}$
- ▶  $A, B$  — соответствующие блочные матрицы

- Построение реализации обратной связи в реальном времени

$$x^*(\tau) = \begin{pmatrix} x_1^*(\tau) \\ \vdots \\ x_q^*(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in T_h, \quad u^*(t) = \begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ \vdots \\ u_q^*(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [\tau, \tau + h[$$

- Для построения реализации оптимальной обратной связи оптимальный регулятор решает задачу  $P(\tau)$ :

$$\begin{aligned} c'x(t_f) &\rightarrow \min_u, \\ \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \\ Hx(t_f) &= g, \quad u \in U, \quad t \in [\tau, t_f] \end{aligned}$$

- $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_q$
- Оптимальная программа задачи  $P(\tau)$

$$u^0(t|\tau, x^*(\tau)), t \in [\tau, t_f]$$

- 1 Положить  $\tau = t_0$ ,  $x^*(\tau) = x_0$ .
- 2 Найти оптимальную программу  $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in [\tau, t_f]$ , задачи  $P(\tau)$ .
- 3 Задать значение оптимальной обратной связи для позиции  $(\tau, x^*(\tau))$ :

$$u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau)),$$

и подать на объект управления управляющее воздействие

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) := u^0(\tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h].$$

- 4 В момент  $\tau + h$  измерить  $x^*(\tau + h)$ , положить  $\tau := \tau + h$ , при  $\tau < t_f$  вернуться к шагу 2.



- Формула Коши

$$x(t) = F(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \theta)B(\theta)u(\theta) d\theta$$

- При  $t = t_f$  получим  $x(t_f)$  и подставим в задачу  $P(t_0)$ :

$$\sum_{s \in T_h} c'_h(s)u(s) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{s \in T_h} D_h(s)u(s) = \tilde{g},$$

$$u_* \leq u(s) \leq u^*, \quad s \in T_h$$

- ▶  $c'_h(s) = \int_s^{s+h} c'F(t_f, \theta)B(\theta) d\theta,$

- ▶  $c_h(s) \in \mathbb{R}^r$

- ▶  $D_h(s) = \int_s^{s+h} HF(t_f, \theta)B(\theta) d\theta,$

- ▶  $D_h(s) \in \mathbb{R}^{m \times r},$

- ▶  $\tilde{g} = g - HF(t_f, t_0)x_0$

- Аналогично для  $P(\tau)$

$$\sum_{s \in T_h(\tau)} c'_h(s) u(s) \rightarrow \min,$$

$$\sum_{s \in T_h(\tau)} D_h(s) u(s) = \tilde{g}(\tau),$$

$$u_* \leq u(s) \leq u^*, \quad s \in T_h(\tau)$$

- $T_h(\tau) = [\tau, t_f] \cap T_h$
- $\tilde{g}(\tau) = g - HF(t_f, \tau)x^*(\tau)$

- Три взаимосвязанных системы

$$\ddot{z}_1 = -2kz_1 + kz_2 + u_1 + w_1,$$

$$\ddot{z}_2 = -2kz_2 + kz_1 + kz_3 + u_2 + w_2,$$

$$\ddot{z}_3 = -2kz_3 + kz_2 + u_3 + w_3$$

- ▶  $|u_i(t)| \leq L, i \in I = \{1, 2, 3\}$

- ▶  $t \in [t_0, t_f]$

- Ограничения, задающие терминальное множество

$$|z_i(t_f)| \leq d_1, |\dot{z}_i(t_f)| \leq d_2, i \in I$$

- Критерий качества

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)| dt \rightarrow \min.$$

- Параметры задачи

$$k = 10, \quad L = 1, \quad t_0 = 0, \quad t_f = 4.5$$

$$d_i = 0.1, \quad \dot{z}_i(0) = 1, \quad z_i(0) = 1, \quad i \in I$$

$$N = 100 \Rightarrow h = \frac{1}{N} = \frac{1}{100}$$

- Возмущения в конкретном процессе

$$w(t) = \begin{pmatrix} 0.7 \sin 2t \\ 0.1 \cos t \\ -0.05 \cos 3t \end{pmatrix}$$

- Замена переменных

$$x_1 = z_1, \quad x_3 = z_2, \quad x_5 = z_3,$$

$$x_2 = \dot{z}_1, \quad x_4 = \dot{z}_2, \quad x_6 = \dot{z}_3.$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)| dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f], \quad Hx(t_f) \leq g$$

$$H = \begin{pmatrix} E_6 \\ -E_6 \end{pmatrix},$$

$$g = 0.1 \cdot \mathbb{1}_{12},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & -2k & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Замена

$$u(s) = z(s) - v(s), s \in T_h$$

- Задача линейного программирования

$$\sum_{s \in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{s \in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \leq \tilde{g}$$

$$-L \cdot \mathbb{1}_r \leq u(t) \leq L \cdot \mathbb{1}_r, t \in [t_0, t_f]$$

$$\sum_{s \in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{s \in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \leq \tilde{g},$$

$$c = \mathbb{1}_{2r}$$

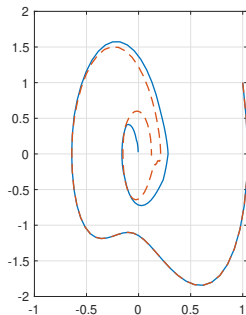
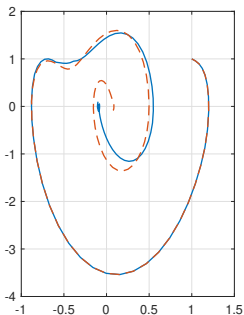
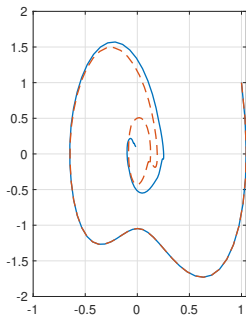
$$-L \cdot \mathbb{1}_r \leq u(t) \leq L \cdot \mathbb{1}_r, \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$D_h(s) = \int_s^{s+h} HF(t_f, \theta) B(\theta) d\theta, \quad D_h(s) \in \mathbb{R}^{m \times r};$$

$$\tilde{g} = g - HF(t_f, t_0)x_0, \quad \tilde{g} \in \mathbb{R}^m$$

Дополнительные переменные

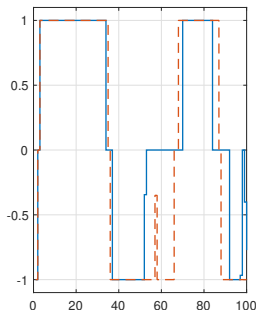
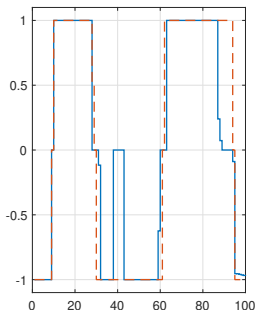
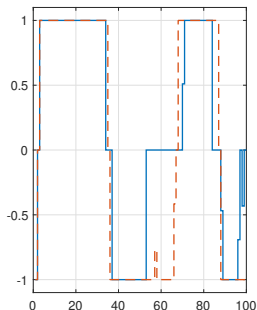
- $n = 6$  – число равенств замены
- $q = 3$  – число систем
- $r = q$  – число управлений
- $m = 2n$  – число ограничений на  $x_i, i = 1 \dots n$



$$x^*(t_f) = \begin{pmatrix} -0.0155 \\ 0.0978 \\ -0.1000 \\ 0.0990 \\ -0.0038 \\ 0.0238 \end{pmatrix}, \quad x^0(t_f) = \begin{pmatrix} 0.1238 \\ -0.1174 \\ 0.0748 \\ -0.0818 \\ 0.1240 \\ -0.0233 \end{pmatrix}$$



- Оптимальные управления



- Значение критерия качества для программного решения: 285.0503
- Значение критерия качества для оптимальной обратной связи: 217.5017
- Среднее время выполнения функции  $P(\tau)$  : 0.029 секунды

- Исследована задача централизованного управления группой взаимосвязанных систем в реальном времени
- Предложен алгоритм работы централизованного оптимального регулятора
- Построена функциональная форма задачи  $P(\tau)$
- Реализован алгоритм работы оптимального регулятора
- Проведен анализ программного решения и реализации обратной связи

*Спасибо за внимание!*