

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

**ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

Курсовая работа

Лозовский Иван Иванович
студента 4 курса,
специальность «прикладная
математика»

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

С.

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУ-	
РЫ	3
1.1 Задачи оптимального управления	3
1.2 Программные и позиционные решения	5
1.3 Управление в реальном времени.	7
1.4 Численные методы решения задач оптимального управления и программные средства	8

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей главе формируются основные понятия, используемые в курсовой работе: приводится классификация задач оптимального управления, разбор их составляющих, определяется объект исследования; даются точные определения программного и позиционного решения; описывается алгоритм работы оптимального регулятора; рассматриваются прямые методы решения задачи оптимального управления, в частности последовательный и параллельный подходы.

1.1 Задачи оптимального управления

Задача оптимального управления формируется из пяти составляющих: временного интервала, математической модели, класса управлений и ограничений на них, ограничений на фазовую траекторию и критерия качества.

1) Временной интервал. По временному интервалу задачи оптимального управления разделяются на непрерывные, рассматриваемые на некотором промежутке времени $T = [t_0, t_f]$, и дискретные, где используются дискретные моменты времени $T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}$, $h = \frac{t_f - t_0}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, то есть, например, если $t \in [s, s + h[$, $s \in T_h$, то дискретное управление $u(t) = u(s)$. Выделяют задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания динамического процесса, а также задачи на бесконечном интервале.

2) Математическая модель. Динамический процесс обычно моделируется дифференциальными

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

или разностными уравнениями

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где n -вектор x называется состоянием системы, r -вектор u называется управ-

лением, функция $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ задана.

3) Класс управлений и ограничения на них. Для непрерывного процесса управления четко указывается класс функций, из которого выбираются управления. Кроме класса доступных управлений задается множество $U \subset \mathbb{R}^r$ — множество допустимых значений управления. Как правило U — компакт в \mathbb{R}^r .

Определение 1.1 Кусочно-непрерывная (дискретная, измеримая и т.д.) функция $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$ называется доступным управлением, если $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$.

4) Ограничения на фазовую траекторию. Ограничения на переменные состояния могут накладываться в начальный момент времени t_0 :

$$x(t_0) \in X_0;$$

в конечный момент времени t_f , такие ограничения называются терминальными:

$$x(t_f) \in X_f;$$

в изолированные моменты $t_i \in [t_0, t_f], i = 1, m$, из промежутка управления — промежуточные фазовые ограничения

$$X(t_i) \in X_i, i = 1 \dots m,$$

на всем промежутке управления — фазовые ограничения

$$x(t) \in X(t), t \in [t_0, t_f],$$

где $X_0, X_f, X_i, i = 1 \dots m, X(t), t \in [t_0, t_f]$, — заданные множества пространства состояний.

Определение 1.2 Доступное управление $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$ называется допустимым (или, программой), если оно порождает траекторию $x(\cdot)$, удовлетворяющую всем ограничениям задачи.

5) Критерий качества. Множество допустимых управлений, как правило, содержит более одного элемента, поэтому возникает необходимость сравнивать их между собой. Для этого вводится функционал $J(u)$, называемый критерием качества, и выбирается операция минимизации или

максимизации этого функционала, результат которой определяет наилучшее (оптимальное) управление. В теории оптимального управления различают четыре типа критериев качества: Майера, Больца, Лагранжа, задачи быстродействия. Все 4 критерия качества эквивалентны между собой.

Для примера выпишем критерий качества типа Майера (терминальный критерий):

$$J(u) = \varphi(x(t_f)).$$

Определение 1.3 Допустимое управление $u^0(\cdot)$ называется оптимальным, если на нем критерий качества достигает экстремального значения.

1.2 Программные и позиционные решения

Объектом исследований в настоящей работе будут непрерывные задачи оптимального управления линейными нестационарными системами с линейным терминальным ограничением и критерием качества:

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_f) \in X_f,$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_f],$$

где $A(t)$ — непрерывная $n \times n$ -матричная функция, и $B(t)$ — непрерывная $n \times r$ -матричная функция, $u : R \rightarrow R^r$, $x : R \rightarrow R^n$, $c \in R^n$.

Задача (1.1) будет исследоваться в классе дискретных управляющих воздействий

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\},$$

где $h = \frac{t_f - t_0}{N}$ — период квантования, $N \in \mathbb{N}$ — заданная мощность множества T_h .

Определение 1.4 Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется программным решением задачи (1.1) (оптимальной программой), если на соответствующей ей траектории $x^0(t)$, $t \in T$, выполняется равенство $c'x^0(t_f) = \min_u c'x(t_f)$.

Приведем задачу (1.1) к набору задач, зависящих от скаляра $\tau \in T_h =$

$\{t_0, t_0 - h, \dots, t_f\}$ и n -вектора z :

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = z,$$

$$x(t_f) \in X_f,$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t_f],$$

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (1.2) для позиции (τ, z) ; X_τ — множество состояний z , для которых в момент τ существуют программные решения.

Определение 1.5 Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T_h,$$

называется позиционным решением задачи (1.2) (оптимальной обратной связью).

Управление называется программным, если оно регулируется программно, строго, без динамического наблюдения за состоянием объекта и контроля воздействия на него, то есть базируясь только на априорных оценках. В случае позиционного управления управляющие воздействия представляют собой функции от позиции объекта, которые содержат всю доступную на текущий момент информацию. Они также не корректируются в процессе управления.

Программное управление редко применяется на практике, так как со временем, из-за изначальной неточности математической модели и построения обратных связей, а также из-за действия в процессе управления неизвестных возмущений, накапливается общая погрешность вычислений.

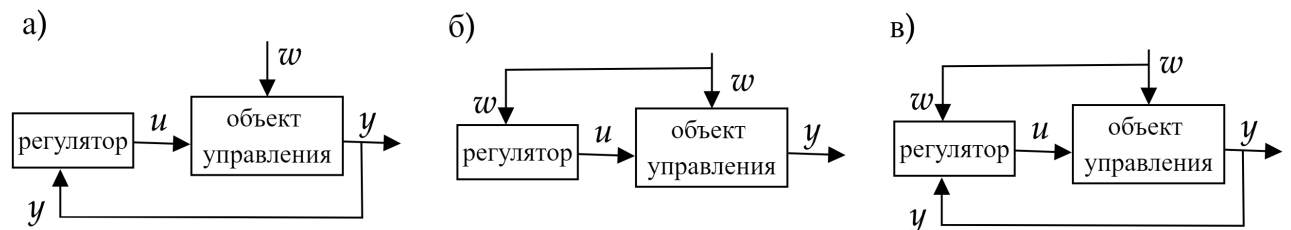


Рис. 1.1: а) обратная связь; б) прямая связь; в) комбинированная связь

Программное и позиционное управления следуют одному из трех принципов управления: по разомкнутому контуру, по замкнутому контуру, в ре-

альном времени. Программные управления исполняются на разомкнутом контуре, а позиционные — на замкнутом и в реальном времени. При создании систем управления по принципу замкнутого контура используются связи 3-х типов: прямые (по входу), обратные (по выходу) и комбинированные (Рис. 1.1). По сути связи — функции, преобразующие наблюдаемые входные и выходные сигналы в управляющие воздействия.

В системах реального времени связи не используются. Нужные для управления их текущие значения вычисляются по ходу каждого процесса управления вычислительными устройствами.

Замкнутые системы управления и системы управления в реальном времени называют автоматическими и автоматизированными, соответственно.

Проблему синтеза оптимальных систем в рамках принципа управления по замкнутому контуру не удастся решить из-за проклятия размерности ни с помощью принципа максимума, ни с помощью динамического программирования Беллмана — второго фундаментального метода теории оптимального управления. Исключение составляет линейно-квадратичная задача Летова-Калмана. В силу этого позиционное решение задачи получается в виде простейшей (линейной) обратной связи.

Одним из способов избежания проклятия размерности является переход к синтезу оптимальных систем, следуя современному принципу оптимального управления в реальном времени.

1.3 Управление в реальном времени

Пусть $x^*(\tau)$ — измеренное состояние объекта управления, которое отличается от $x(\tau)$ в силу не учтенных в описанной ранее модели возмущений.

Определение 1.6 Функцию $u^*(t)$, $t \in T$:

$$u^*(t) \equiv u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau|\tau, x^*(\tau)), \quad \tau \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h,$$

назовем реализацией оптимальной обратной связи $u^0(\tau, x^*(\tau))$.

Положим $u^*(\tau)$ — реализация оптимальной обратной связи для позиции $(\tau, x^*(\tau))$. Введем $\Delta(\tau) \equiv \Delta(\tau, x^*(\tau))$ — время отыскания $u^*(\tau)$.

Таким образом, в момент $\tau \in T_h$ определяется состояние объекта, а в момент $\tau + \Delta(\tau)$ — оптимальное для момента τ управление, которое подается на вход объекта управления.

Определение 1.7 Если в каждый момент времени $\tau \in T_h$ вычисление $u^*(\tau)$ производится за время $\Delta(\tau) < h$, то описанная выше схема управления объектом называется управлением в реальном времени.

Определение 1.8 Регулятор, реализующий оптимальную обратную связь,— устройство, способное вычислять $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$ за время $\Delta(\tau) < h$.

1.4 Численные методы решения задач оптимального управления и программные средства

Различают несколько подходов к решению непрерывных задач оптимального управления. Отметим динамическое программирование [?], непрямые методы, основанные на применении принципа максимума [?] и прямые методы решения. В настоящей работе будут применяться последние.

Прямые методы сводят непрерывную динамическую систему к системе с дискретным временем, после чего применяются численные методы нелинейной оптимизации (или линейного, квадратичного программирования).

Рассмотрим прямые методы на примере методов Single Shooting и Multiple Shooting, которые в свою очередь реализуют последовательный и параллельный подходы решения задач оптимального управления, соответственно.

Все Shooting методы содержат в себе модули для решения ОДУ, что позволяет исключить динамическую систему в непрерывном времени. Это осуществляется через замену функции управления $u(t)$ полиномами, кусочно-постоянной функцией или сплайном.

Обозначим конечное множество параметров управления вектором q , а итоговую функцию управления как $u(t; q)$.

Наиболее распространенная форма управления — кусочно-постоянные управления, для которых выбирается фиксированная сетка $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ и N параметров $q_i \in \mathbb{R}^{n_u}$, $i = 0, \dots, N - 1$. При этом полагается, что $u(t; q) \equiv q_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Если сетка равномерная, то рассматриваемое управление — дискретное.

Таким образом размерность вектора $q = (q_0, \dots, q_{N-1}) = N \times n_u$.

В методе Single Shooting, являющемся последовательным подходом, $x(t)$, $[0, t_f]$, находится с помощью численного метода решения ОДУ, в котором начальное условие задается через x_0 и используются значения $u(t; q)$. Итоговую траекторию обозначим как $x(t; q)$, $t \in [0, t_f]$.

Тогда исходная задача примет вид:

$$c'x(t_N; q) \rightarrow \min_q,$$

$$x(t_0, q) = x_0,$$

$$x(t_N; q) \in X_f,$$

$$q_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Полученная задача — задача математического программирования. Если X_f , U — многогранники, то это задача линейного программирования.

В методе Multiple Shooting, являющемся параллельным подходом, аналогично Single Shooting методу управление дискретизируется на сетке:

$$u(t; q) \equiv q_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Однако в дальнейшем ОДУ решается отдельно для каждого интервала $[t_i, t_{i+1}]$, с заданными на них искусственными начальными значениями состояния s_i :

$$\dot{x}_i(t; s_i, q_i) = f(x_i(t; s_i, q_i), q_i),$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$s_0 = x_0,$$

$$s_{i+1} = x_i(t_{i+1}; s_i, q_i).$$

То есть имеем оптимизационную задачу вида:

$$c'x(t_N; q) \rightarrow \min_q,$$

$$s_0 = x_0 = x(t_0, q),$$

$$x(t; q) = s_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$q_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Таким образом определен, объект исследования настоящей работы — это линейная задача терминального управления. На примере построенной задачи введены понятия позиционного и программного решения, описан принцип работы оптимального регулятора. На примере данной задачи показано, как реализуются последовательный и параллельный подходы решения непрерывных задач оптимального управления и описаны методы Single Shooting и

Multiple Shooting.