

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАТИКИ**

**Кафедра методов оптимального управления**

**ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

Курсовая работа

Лозовский Иван Иванович  
студента 4 курса,  
специальность «прикладная  
математика»

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2020

# ОГЛАВЛЕНИЕ

С.

<b>ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1 Задачи оптимального управления . . . . .	3
1.2 Программные и позиционные решения . . . . .	5
1.3 Управление в реальном времени. . . . .	7
1.4 Численные методы решения задач оптимального управления . . .	8
 <b>ГЛАВА 2 ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. . . . .</b>	 <b>11</b>
2.1 Задача оптимального управления группой динамических систем. .	11
2.2 Построение централизованной обратной связи в реальном времени	13
 <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	 <b>14</b>

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В настоящей главе формируются основные понятия, используемые в курсовой работе: приводится классификация задач оптимального управления, разбор их составляющих, определяется объект исследования; даются точные определения программного и позиционного решения; описывается алгоритм работы оптимального регулятора; рассматриваются прямые методы решения задачи оптимального управления, в частности последовательный и параллельный подходы.

### 1.1 Задачи оптимального управления

Задача оптимального управления формируется из пяти составляющих: временного интервала, математической модели, класса управлений и ограничений на них, ограничений на фазовую траекторию и критерия качества.

**1) Временной интервал.** По временному интервалу задачи оптимального управления разделяются на непрерывные, рассматриваемые на некотором промежутке времени  $T = [t_0, t_f]$ , и дискретные, где используются дискретные моменты времени  $T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}$ ,  $h = \frac{t_f - t_0}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , то есть, например, если  $t \in [s, s + h[$ ,  $s \in T_h$ , то дискретное управление  $u(t) = u(s)$ . Выделяют задачи с фиксированным и нефиксированным временем окончания динамического процесса, а также задачи на бесконечном интервале.

**2) Математическая модель.** Динамический процесс обычно моделируется дифференциальными

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

или разностными уравнениями

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $n$ -вектор  $x$  называется состоянием системы,  $r$ -вектор  $u$  называется управ-

лением, функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  задана.

**3) Класс управлений и ограничения на них.** Для непрерывного процесса управления четко указывается класс функций, из которого выбираются управления. Кроме класса доступных управлений задается множество  $U \subset \mathbb{R}^r$  — множество допустимых значений управления. Как правило  $U$  — компакт в  $\mathbb{R}^r$ .

**Определение 1.1** Кусочно-непрерывная (дискретная, измеримая и т.д.) функция  $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$  называется доступным управлением, если  $u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]$ .

**4) Ограничения на фазовую траекторию.** Ограничения на переменные состояния могут накладываться в начальный момент времени  $t_0$ :

$$x(t_0) \in X_0;$$

в конечный момент времени  $t_f$ , такие ограничения называются терминальными:

$$x(t_f) \in X_f;$$

в изолированные моменты  $t_i \in [t_0, t_f], i = 1, m$ , из промежутка управления — промежуточные фазовые ограничения

$$X(t_i) \in X_i, i = 1 \dots m,$$

на всем промежутке управления — фазовые ограничения

$$x(t) \in X(t), t \in [t_0, t_f],$$

где  $X_0, X_f, X_i, i = 1 \dots m, X(t), t \in [t_0, t_f]$ , — заданные множества пространства состояний.

**Определение 1.2** Доступное управление  $u(\cdot) = (u(t), t \in [t_0, t_f])$  называется допустимым (или, программой), если оно порождает траекторию  $x(\cdot)$ , удовлетворяющую всем ограничениям задачи.

**5) Критерий качества.** Множество допустимых управлений, как правило, содержит более одного элемента, поэтому возникает необходимость сравнивать их между собой. Для этого вводится функционал  $J(u)$ , называемый критерием качества, и выбирается операция минимизации или

максимизации этого функционала, результат которой определяет наилучшее (оптимальное) управление. В теории оптимального управления различают четыре типа критериев качества: Майера, Больца, Лагранжа, задачи быстродействия. Все 4 критерия качества эквивалентны между собой.

Для примера выпишем критерий качества типа Майера (терминальный критерий):

$$J(u) = \varphi(x(t_f)).$$

**Определение 1.3** Допустимое управление  $u^0(\cdot)$  называется оптимальным, если на нем критерий качества достигает экстремального значения.

## 1.2 Программные и позиционные решения

Объектом исследований в настоящей работе будут непрерывные задачи оптимального управления линейными нестационарными системами с линейным терминальным ограничением и критерием качества:

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_f) \in X_f,$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_f],$$

где  $A(t)$  — непрерывная  $n \times n$ -матричная функция, и  $B(t)$  — непрерывная  $n \times r$ -матричная функция.

Задача (1.1) будет исследоваться в классе дискретных управляющих воздействий

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h = \{t_0, t_0 - h, \dots, t_f - h\},$$

где  $h = \frac{t_f - t_0}{N}$  — период квантования,  $N \in \mathbb{N}$  — заданная мощность множества  $T_h$ .

**Определение 1.4** Программа  $u^0(t)$ ,  $t \in T$ , называется программным решением задачи (1.1) (оптимальной программой), если на соответствующей ей траектории  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , выполняется равенство

$$c'x^0(t_f) = \min_u c'x(t_f).$$

Приведем задачу (1.1) к набору задач, зависящих от скаляра  $\tau \in T_h = \{t_0, t_0 - h, \dots, t_f\}$  и  $n$ -вектора  $z$ :

$$J(u) = c'x(t_f) \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(\tau) = z,$$

$$x(t_f) \in X_f,$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T(\tau) = [\tau, t_f],$$

Пусть  $u^0(t|\tau, z)$ ,  $t \in T(\tau)$ , — оптимальная программа задачи (1.2) для позиции  $(\tau, z)$ ;  $X_\tau$  — множество состояний  $z$ , для которых в момент  $\tau$  существуют программные решения.

### Определение 1.5 Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T_h,$$

называется позиционным решением задачи (1.2) (оптимальной обратной связью).

Управление называется программным, если оно регулируется программно, строго, без динамического наблюдения за состоянием объекта и контроля воздействия на него, то есть базируясь только на априорных оценках. В случае позиционного управления управляющие воздействия представляют собой функции от позиции объекта, которые содержат всю доступную на текущий момент информацию. Они также не корректируются в процессе управления.

Программное управление редко применяется на практике, так как со временем, из-за изначальной неточности математической модели и построения обратных связей, а также из-за действия в процессе управления неизвестных возмущений, накапливается общая погрешность вычислений.

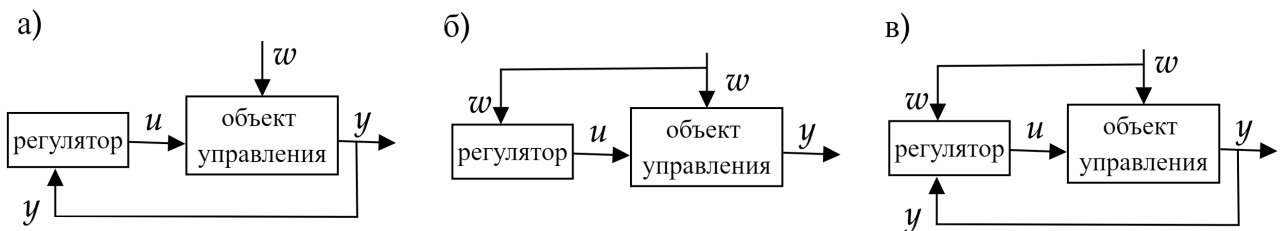


Рис. 1.1: а) обратная связь; б) прямая связь; в) комбинированная связь

Программное и позиционное управления следуют одному из трех принципов управления: по разомкнутому контуру, по замкнутому контуру, в реальном времени. Программные управления исполняются на разомкнутом контуре, а позиционные — на замкнутом и в реальном времени. При создании систем управления по принципу замкнутого контура используются связи 3-х типов: прямые (по входу), обратные (по выходу) и комбинированные (Рис. 1.1). По сути связи — функции, преобразующие наблюдаемые входные и выходные сигналы в управляющие воздействия.

В системах реального времени связи не используются. Нужные для управления их текущие значения вычисляются по ходу каждого процесса управления вычислительными устройствами.

Замкнутые системы управления и системы управления в реальном времени называют автоматическими и автоматизированными, соответственно.

Проблему синтеза оптимальных систем в рамках принципа управления по замкнутому контуру не удастся решить из-за проклятия размерности ни с помощью принципа максимума, ни с помощью динамического программирования Беллмана — второго фундаментального метода теории оптимального управления. Исключение составляет линейно-квадратичная задача Летова-Калмана. В силу этого позиционное решение задачи получается в виде простейшей (линейной) обратной связи.

Одним из способов избежания проклятия размерности является переход к синтезу оптимальных систем, следуя современному принципу оптимального управления в реальном времени.

### 1.3 Управление в реальном времени

Пусть  $x^*(\tau)$  — измеренное в конкретном процессе управления состояние объекта управления. Оно отличается от состояния  $x(\tau)$  математической модели (1.1) в силу неучтенных в принятой модели возмущений, неточностей математического моделирования, невязки линеаризации нелинейной модели и других факторов.

Введем  $\Delta(\tau) \equiv \Delta(\tau, x^*(\tau))$  — время отыскания оптимальной обратной связи  $u^0(\tau, x^*(\tau))$ .

**Определение 1.6** Функцию  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ :

$$u^*(t) \equiv u^0(\tau, x^*(\tau)) = u^0(\tau | \tau, x^*(\tau)), \quad t \in [\tau + \Delta(\tau), \tau + h + \Delta(\tau + h)], \quad \tau \in T_h,$$

назовем реализацией оптимальной обратной связи  $u^0(\tau, x^*(\tau))$ ,  $z \in X_\tau$ ,  $\tau \in$

$T_h$ , в конкретном процессе управления.

Тогда можно сказать, что в момент  $\tau \in T_h$  определяется состояние объекта, а в момент  $\tau + \Delta(\tau)$  будет найдено оптимальное для момента  $\tau$  управление, которое подается на вход объекта управления.

**Определение 1.7** Если в каждый момент времени  $\tau \in T_h$  вычисление  $u^*(\tau)$  производится за время  $\Delta(\tau) < h$ , то описанная выше схема управления объектом называется управлением в реальном времени.

**Определение 1.8** Оптимальным регулятором, реализующим оптимальную обратную связь, называется устройство, способное вычислять  $u^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ , за время  $\Delta(\tau) < h$ .

Далее, в главе 2, будет приведен конкретный алгоритм работы оптимального регулятора.

## 1.4 Численные методы решения задач оптимального управления

Различают несколько подходов к решению непрерывных задач оптимального управления. Отметим динамическое программирование [2], непрямые методы, основанные на применении принципа максимума [1] и прямые методы решения. В настоящей работе будут применяться последние.

Прямые методы сводят непрерывную динамическую систему к системе с дискретным временем, после чего применяются численные методы нелинейной оптимизации (или линейного, квадратичного программирования).

Рассмотрим прямые методы на примере методов Single Shooting и Multiple Shooting, которые в свою очередь реализуют последовательный и параллельный подходы решения задач оптимального управления, соответственно.

Все Shooting методы содержат в себе модули для решения ОДУ, что позволяет исключить динамическую систему в непрерывном времени. Это осуществляется через замену функции управления  $u(t)$  полиномами, кусочно-постоянной функцией или сплайном.

Обозначим конечное множество параметров управления вектором  $q$ , а итоговую функцию управления как  $u(t; q)$ .

Наиболее распространенная форма управления — кусочно-постоянные управления, для которых выбирается фиксированная сетка  $0 = t_0 < t_1 <$



$\dots < t_N = t_f$  и  $N$  параметров  $q_i \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ . При этом полагается, что  $u(t; q) \equiv q_i$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Если сетка равномерная, то рассматриваемое управление — дискретное.

Таким образом размерность вектора  $q = (q_0, \dots, q_{N-1}) = N \times n_u$ .

В методе Single Shooting, являющемся последовательным подходом,  $x(t)$ ,  $[0, t_f]$ , находится с помощью численного метода решения ОДУ, в котором начальное условие задается через  $x_0$  и используются значения  $u(t; q)$ . Итоговую траекторию обозначим как  $x(t; q)$ ,  $t \in [0, t_f]$ .

Тогда исходная задача примет вид:

$$c'x(t_N; q) \rightarrow \min_q,$$

$$x(t_0, q) = x_0,$$

$$x(t_N; q) \in X_f,$$

$$q_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Полученная задача — задача математического программирования. Если  $X_f$ ,  $U$  — многогранники, то это задача линейного программирования.

В методе Multiple Shooting, являющемся параллельным подходом, аналогично Single Shooting методу управление дискретизируется на сетке:

$$u(t; q) \equiv q_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Однако в дальнейшем ОДУ решается отдельно для каждого интервала  $[t_i, t_{i+1}]$ , с заданными на них искусственными начальными значениями состояния  $s_i$ :

$$\dot{x}_i(t; s_i, q_i) = f(x_i(t; s_i, q_i), q_i),$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$s_0 = x_0,$$

$$s_{i+1} = x_i(t_{i+1}; s_i, q_i).$$

В итоге получим оптимизационную задачу вида:

$$c's_N \rightarrow \min_{q,s},$$

$$s_0 - x_0 = 0,$$

$$x_i(t_{i+1}; s_i, q_i) - s_{i+1} = 0,$$

$$q_i \in U, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Таким образом определен, объект исследования настоящей работы — это линейная задача терминального управления. На примере построенной задачи введены понятия позиционного и программного решения, описан принцип работы оптимального регулятора. На примере данной задачи показано, как реализуются последовательный и параллельный подходы решения непрерывных задач оптимального управления и описаны методы Single Shooting и Multiple Shooting.

# ГЛАВА 2

## ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

(Врезка) ...

### 2.1 Задача оптимального управления группой динамических систем

Определим  $T$  и  $T_h$  как в главе 1 :  $T = [t_0, t_f]$ ,  $T_h = \{t_0, t_0 - h, \dots, t_f - h\}$ ,  $h = \frac{t_f - t_0}{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $I = \{1, 2, \dots, q\}$ ,  $I_i = I \setminus i$ ;  $A_{ij}(t) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ ,  $B_{ij}(t) \in \mathbb{R}^{n_i \times r_j}$ ,  $t \in T$ ,  $i, j \in I$ , — кусочно-непрерывные матричные функции;  $A_i(t) = A_{ii}(t)$ ,  $B_i(t) = B_{ii}(t)$ ,  $t \in T$ ,  $i \in I$ ;  $u_{i*}, u_i^* \in \mathbb{R}^{r_i}$  — заданные векторы.

Составим задачу оптимального управления для группы  $q$  взаимосвязанных линейных нестационарных объектов управления.

Будем считать [4], что на промежутке  $T$  модель  $i$ -го ( $i \in I$ ) объекта имеет вид:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (2.1)$$

где  $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  — состояние  $i$ -ой математической модели;  $u_i = u_i(t) \in U_i = \{u \in \mathbb{R}^{r_i} : u_{i*} \leq u \leq u_i^*\}$  — дискретное управляющее воздействие  $i$ -ой математической модели с периодом квантования  $h$ . Будем также считать, что  $x = (x'_1, \dots, x'_q)'$ ,  $u = (u'_1, \dots, u'_q)'$ ,  $n = \sum_{i \in I_i} n_i$ ,  $r = \sum_{i \in I_i} r_i$ .

Функции  $A_{ij}(t), t \in T, i \in I_j$ , служат для описания влияния на  $i$ -ую модель остальных моделей, а функции  $B_{ij}(t), t \in T, i \in I_j$ , — для описания влияния на  $i$ -ую модель управляющих воздействий остальных моделей.

Определим  $X_f = X_{f1} \times X_{f2} \times \dots \times X_{fq}$ , где  $X_{fi}$ ,  $i \in I$ , — терминальные множества объектов управления из группы:

$$x_i(t_f) \in X_{fi}, i \in I. \quad (2.2)$$

Целью управления является минимизация линейного терминального

критерия качества:

$$\sum_{i \in I} c'_i x_i(t_f) \rightarrow \min_u, \quad (2.3)$$

где  $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  — заданные векторы.

Таким образом задача оптимального управления для группы  $q$  взаимосвязанных линейных нестационарных объектов управления имеет вид:

$$\sum_{i \in I} c'_i x_i(t_f) \rightarrow \min_u, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i(t)x_i + \sum_{j \in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j \in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i0}, \\ x_i(t_f) &\in X_{fi}, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Группой динамических объектов (2.1) можно управлять централизованно и децентрализованно [3].

В централизованном случае имеется общий центр управления, которой на каждом промежутке времени  $[\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h$  по точной информации о состоянии  $x^*(\tau) = (x_i^*(\tau), i \in I)$  группы вырабатывает управляющие воздействия  $u^*(t) = (u_i^*(t), i \in I)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h$ , которое используется до тех пор, пока не будет измерено и обработано следующее состояние  $x^*(\tau + h)$ .

В децентрализованном случае для каждого  $i$ -го объекта по точному состоянию  $x_i^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$  и состояниям  $x_j^*(\tau - h)$ ,  $\tau \in T_h$ ,  $j \in I_i$ , строится локальное управляющее воздействие  $u_i^*(t)$ ,  $t \in [\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h$ , которое используется до тех пор, пока не будет измерено и обработано следующее состояние  $x_i^*(\tau + h)$ .

При централизованном управлении динамическая модель (2.1) рассматривается как одна большая система:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad (2.5)$$

где  $A$ ,  $B$  — соответствующие блочные матрицы.

Система (2.5) имеет единственный регулятор, который в режиме реального времени на основе измеренного точного текущего состояния  $x^*(\tau)$  вырабатывает управляющий сигнал  $u^*(\tau) \in \mathbb{R}^r$ . Для этого оптимальный регулятор для каждого момента  $\tau \in T_h$  решает ([3], с. 1713) задачу  $P(\tau)$ :

$$c'x(t_f) \rightarrow \min_u,$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

$$x(\tau) = x^*(\tau),$$

$$x(t_f) \in X_f, \quad u \in U, \quad t \in [\tau, t_f],$$

где  $c' = (c'_1, \dots, c'_q)'$ ;  $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_q$ .

Сведем задачу к задаче линейного программирования. Для этого запишем формулу Коши для системы в непрерывном времени:

$$x(t) = F(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \theta)b(\theta)u(\theta) d\theta.$$

Пусть  $t_0 = s, s \in T_h$ . Применим данную формулу для дискретного управления и подставим  $t = s + h$ :

$$x(s + h) = A_h(s)x(s) + b_h(s)u(s),$$

где  $A_h(s) = F(s + h, s)$ ,  $b_h(s) = \int_s^{s+h} F(t, s)b(s) ds$ .

В итоге задача (2.4) примет вид:

$$c'x(t_f) \rightarrow \min_v,$$

$$x(s + h) = A_h(s)x(s) + b_h(s)u(s), \quad s \in T_h$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_f) \in X_f,$$

где неизвестными являются  $x(s)$ ,  $s \in T_h \cup t_f$  и  $u(s)$ ,  $s \in T_h$ .

## 2.2 Построение централизованной обратной связи в реальном времени

.....

Не забываем делать выводы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

2 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Иностранная литература, 1960. – 400 с.

3 Асимптотически субоптимальное управление динамическими системами со слабыми взаимосвязями/Дмитрук Н.М., Калинин А.И. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016, том 56, № 10, с. 1711–1724.

4 Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов/Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2008, том 48, М 4, с. 593-609.