БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОУ: кафедра методов оптимального управления

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Иван И. Лозовский

Группа объектов управления

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Группа из q взаимосвязанных линейных нестационарных объектов
- Математическая модель i-го объекта, $i \in I = \{1,\ 2,\ \dots,\ q\}$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j\in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j\in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0}$$

  - $t \in T = [t_0,\ t_f]$
  - $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i},\ t \in T$ – состояние i-й математической модели
  - $u_i = u_i(t) \in U_i = \{u \in \mathbb{R}^{r_i} : u_{i*} \le u \le u_i^*\},\ t \in T$ – управляющее воздействие i-й математической модели
- Дискретное управляющее воздействие

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau,\ \tau + h[, \quad \tau \in T_h,$$

$$T_h = \{t_0,\ t_0 - h, \dots,\ t_f - h\},\ h = \frac{t_f - t_0}{N},\ N \in \mathbb{N}$$

Статические взаимосвязи. Цели управления

- Терминальное множество S (общее для всех объектов)

$$x(t_f) \in S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in I} H_i x_i = g \right\}$$

  - $n = \sum_{i \in I_i} n_i$
  - $H_i \in \mathbb{R}^{m \times n_i}$
  - $\operatorname{rank}(H_i) = m \leq n_i, i \in I$
  - $g \in \mathbb{R}^m$

- Минимизация линейного терминального критерия качества

$$\sum_{i \in I} c_i' x_i(t_f) \to \min_u$$

Задача оптимального управления группой

$$\sum_{i\in I} c_i' x_i(t_f) \to \min_u$$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j\in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + \sum_{j\in I_i} B_{ij}(t)u_j, \quad x_i(t_0) = x_{i,0},\ i\in I$$

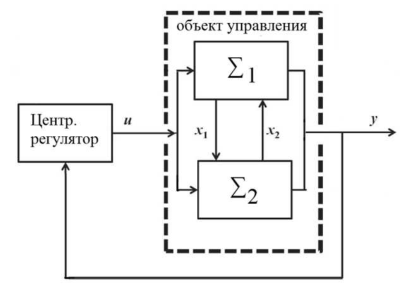
$$\sum_{i\in I} H_i x_i(t_f) = g$$

$$u_i(t) \in U_i, \quad t\in T, \quad i\in I$$

Централизованное и децентрализованное управление

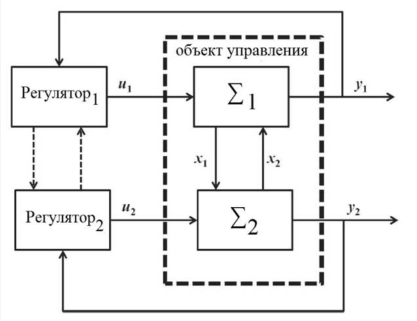
МОУ: кафедра методов оптимального управления

Централизованное



центральный регулятор вычисляет значение управления для всех объектов группы

Децентрализованное



локальный регулятор строит локальное управление

Задача $P_i(\tau)$

$$\sum_{k\in I} c_k' x_k(t_f) \to \min_{u_i},$$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \sum_{j\in I_i} A_{ij}(t)x_j + B_i(t)u_i + f_i^0(t|\tau),$$

$$x_i(\tau) = x_i^*(\tau),$$

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k + \sum_{j\in I_k} A_{kj}(t)x_j + B_{ki}(t)u_i + f_{ki}^0(t|\tau),$$

$$x_k(\tau) = x_k^0(\tau),\ k \in I_i,$$

$$\sum_{i\in I} H_i x_i(t_f) = g, \quad u_i(t) \in U_i, \quad t \in T(\tau), \quad i \in I$$

Алгоритм построения реализации децентрализованной обратной связи $u_i^*(\tau)$, $\tau \in T_h$

- Найти оптимальную программу $u^0(t),\ t \in T$, задачи (**??**).
- Измерить $x_i^*(\tau + h)$ и вычислить $x_k^0(\tau + h),\ k \in I_i$.
- Задать значение оптимальной обратной связи для позиции $(t_0, x^*(t_0))$:

$$u^0(t_0,\ x^*(t_0)) = u^0(t_0),$$

  и подать на объект управления управляющее воздействие

$$u_i^*(t) \equiv u_i^*(t_0) := u_i^0(t_0,\ x^*(t_0)), \quad t \in [t_0,\ t_0 + h).$$

- Положить $\tau = t_0 + h,\ x_k(\tau) = x_k^0(\tau),\ k \in I_i,\ x_i(\tau) = x_i^*(\tau)$.

Алгоритм построения реализации децентрализованной обратной связи $u_i^*(\tau)$, $\tau \in T_h$

- (ШАГ 5) Найти оптимальную программу $u_i^0(t|\tau,\ x_i^*(\tau),\ x^*(\tau-h)),\ t \in [\tau,\ t_f]$, задачи $P_i(\tau)$.
- Задать значение оптимальной обратной связи для позиции $(\tau, x(\tau))$:
$$u_i^0(\tau, x(\tau)) = u_i^0(\tau|\tau,\ x_i^*(\tau),\ x^*(\tau-h)),$$
и подать на объект управления управляющее воздействие
$$u_i^*(t) \equiv u_i^*(\tau) := u_i^0(\tau, x(\tau)), \quad t \in [\tau,\ \tau+h).$$
- В момент $\tau+h$ измерить $x_i^*(\tau+h)$ и вычислить $x_k^0(\tau+h),\ k \in I_i$, положить $\tau := \tau+h$, при $\tau < t_f$ вернуться к шагу 5.

Функциональная форма $P_i(\tau)$

$$\sum_{s\in T_h(\tau)} c'_{h\ i}(s)u_i(s) \to \min_{u_i(s)},$$

$$\sum_{s\in T_h(\tau)} D_i(s)u_i(s) = \tilde{g}(\tau) - \sum_{\substack{s\in T_h(\tau)\\ j\in I_i}} D_j(s)u_j^0(s),$$

$$u_{*\ i} \le u_i(s) \le u_i^*,\ \ s \in T_h(\tau)$$

- $T_h(\tau) = [\tau, t_f] \cap T_h,\ \ \tau \in T_h \backslash t_0$
- $\tilde{g} = g - HF(t_f,\tau)\ x_0(\tau|x_i^*(\tau),\ P_i(\tau - h),\ i \in I)$

Пример

- Три взаимосвязанных системы

$$\ddot{z}_1 = -2kz_1 + kz_2 + u_1 + w_1,$$
$$\ddot{z}_2 = -2kz_2 + kz_1 + kz_3 + u_2 + w_2,$$
$$\ddot{z}_3 = -2kz_3 + kz_2 + u_3 + w_3$$

  - $|u_i(t)| \leq L,\ i \in I = \{1,\ 2,\ 3\}$
  - $t \in [t_0, t_f]$
- Ограничения, задающие терминальное множество

$$|z_i(t_f)| \leq d_1,\ |\dot{z}_i(t_f)| \leq d_2, i \in I$$

- Критерий качества

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)|\, dt \to \min .$$

Параметры задачи и замена

- Параметры задачи

$$k = 10,\ L = 1,\ t_0 = 0,\ t_f = 4.5$$

$$d_i = 0.1,\ \dot{z}_i(0) = 1,\ z_i(0) = 1,\ i \in I$$

$$N = 100 => h = \frac{1}{N} = \frac{1}{100}$$

- Возмущения в конкретном процессе

$$w(t) = \begin{pmatrix} 0.7\,\sin 2t \\ 0.1\,\cos t \\ -0.05\,\cos 3t \end{pmatrix}$$

- Замена переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, & x_3 &= z_2, & x_5 &= z_3, \\ x_2 &= \dot{z}_1, & x_4 &= \dot{z}_2, & x_6 &= \dot{z}_3. \end{aligned}$$

Вид задачи после замены

МОУ: кафедра методов оптимального управления

$$\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i \in I} |u_i(t)|\, dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(0) = x_0,\ t \in [t_0, t_f],\ Hx(t_f) \leq g$$

$$H = \begin{pmatrix} E_6 \\ -E_6 \end{pmatrix},$$

$$g = 0.1 \cdot \mathbb{1}_{12},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & -2k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 & -2k & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Функциональная форма в примере

- Замена

$$u(s) = z(s) - v(s), s \in T_h$$

- Задача линейного программирования

$$\sum_{s \in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \to \min,$$

$$\sum_{s \in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \leq \tilde{g}$$

$$-L \cdot \mathbb{1}_r \leq u(t) \leq L \cdot \mathbb{1}_r, \ \ t \in [t_0, t_f]$$

Функциональная форма в примере

$$\sum_{s\in T_h} c' \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \to \min,$$

$$\sum_{s\in T_h} (D_h(s), -D_h(s)) \begin{pmatrix} z(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \le \tilde{g},$$

$$c = \mathbb{1}_{2r}$$

$$-L \cdot \mathbb{1}_r \le u(t) \le L \cdot \mathbb{1}_r,\ \ t \in [t_0, t_f]$$

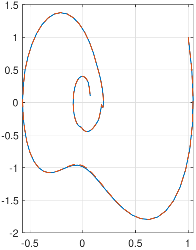
Дополнительные переменные

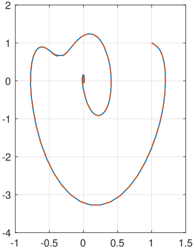
- $n = 6$ – число равенств замены
- $q = 3$ – число систем
- $r = q$ – число управлений
- $m = 2n$ – число ограничений на $x_i,\ \ i = 1 \ldots n$

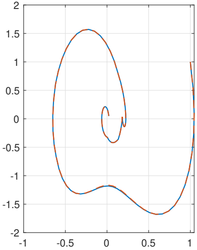
$$D_h(s) = \int_s^{s+h} HF(t_f, \theta)B(\theta)\, d\theta,\ \ D_h(s) \in \mathbb{R}^{m\times r};$$

$$\tilde{g} = g - HF(t_f, t_0)x_0,\ \ \tilde{g} \in \mathbb{R}^m$$

Результаты. Терминальные состояния





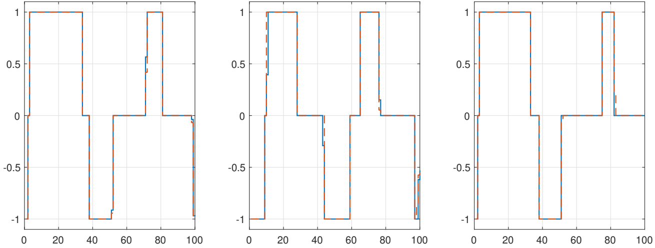


$$x^*(t_f) = \begin{pmatrix} 0.0706 \\ 0.0990 \\ -0.0022 \\ 0.1201 \\ 0.0221 \\ 0.0498 \end{pmatrix}, \quad x_d^*(t_f) = \begin{pmatrix} 0.0709 \\ 0.0990 \\ -0.0035 \\ 0.1202 \\ 0.0209 \\ 0.0499 \end{pmatrix}$$

Сопутствующие результаты

МОУ: кафедра методов оптимального управления

- Оптимальные управления



- Значение критерия качества для централизованного решения: 163.4420

- Значение критерия качества для децентрализованного решения: 163.6147

Заключение

- Исследована задача децентрализованного управления группой взаимосвязанных систем в реальном времени
- Предложен алгоритм работы децентрализованного оптимального регулятора
- Построена функциональная форма задачи $P_i(\tau)$
- Реализован алгоритм работы регуляторов децентрализованной задачи на основе алгоритма работы регулятора централизованного случая
- Проведен анализ децентрализованного решения

Спасибо за внимание!