**北京航空航天大学计算机学院**

**硕士学位论文开题报告**

**论文题目**： 基于符号计算的非线性方程的怪波研究

**专 业**： 计算机科学与技术

**研究方向**： 计算机软件与理论

**研 究 生**： 张舒涛

**学 号**： SY1606109

**指导教师**： 张玉平 教授

**北京航空航天大学计算机学院**

2017年12月10日

**基于符号计算的非线性方程的怪波研究**

# 论文选题的背景与意义

## 1.1选题背景

符号计算又称计算机代数，通俗地说就是用计算机推导数学公式，如对表达式进行因式分解、化简、微分、积分、解代数方程、求解常微分方程等。

20世纪中期以来，随着信息科学的迅猛发展，计算机技术在各行各业中越来越发挥着不可替代的作用[1-3]。无论是进行科学研究，还是从事工程领域，我们都离不开计算机技术的支持与辅助作用。这也使得计算机科学与其他自然科学产生了交叉融合，近年来，计算机科学已经完全渗透到了数学、物理、力学、光纤通信以及流体力学等若干领域的科学研究中[4,5]。

计算机代数系统就是在这样的背景之下产生的一门融合了数学与计算机科学的交叉学科。计算机代数也称作符号代数计算，简称符号计算。计算机符号计算主要是利用计算机来对数学算法进行研究，比如对代数多项式进行因式分解，对函数进行微分与积分运算，求解微分与积分方程等，它是数学机械化的一个重要分支，是人工智能领域的一个重要组成部分[6,7]。符号计算是一个正处于蓬勃发展的新兴学科，是当前数学学科的前沿和焦点。我们知道，数值计算和符号计算是构成科学计算的两种不同的计算方式，数值计算一般所求得的结果是数学问题的近似解，并考虑实际问题的误差、收敛性、逼近问题以及稳定性问题等等，这样，在一些要求高精确度结果的科学与工程领域中，数值计算难以满足实际的需要。与数值计算相比，符号计算具有大容量、高速度、高精确度的特点，是绝对的精确计算，不允许有任何的误差，所以它能更精确有效的解决科学与工程实践中的实际问题。

实际上，符号计算就是借助计算机来完成数学演算、数学推理和数学证明。数学理论是计算机代数的基础，特别是构造性数学的成果可直接转化为计算机代数算法。反之，符号计算的成果为数学和其它科学领域的理论研究和应用研究提供了很好的工具，提高了研究效率，在一定程度上改变了数学和其它学科传统的研究手段，尤其是近年来符号计算在非线性科学中的应用使非线性科学得到了长足的发展。

怪波最初是描述海洋上出现的一种奇怪的水波，它以其出现的突然性和异常陡峭的高水波得名。怪波发生之前没有任何预示, 海洋中突然出现具有很深的沟或出现一些连续的高波，其破坏力极大，造成很多航海灾难。怪波是一种新的非线性现象，与孤立子很类似，都是一种特殊解，不同的是它同调制不稳定性能够很好的结合起来。近些年许多学者对怪波进行了大量的研究：Akhmediev教授小组对（1+1）维的非线性薛定谔方程NLS的怪波进行了很全面的分析[5,6]，指出怪波是 “Ma 解”MS或“Akhmediev 呼吸子”Abs的极限情形，实际上是一种非奇异的有理解；Xu、He 以及Wang、Porsezian与He利用Darboux 变换得到许多（1+1）维高阶薛定谔型方程的怪波解[7,8]。但现有的文献对高维薛定谔方程的怪波解研究甚。直到最近，Yasuhiro Ohta 教授和杨建科教授利用Hirota 双线性方法得到（2+1）维DS Ⅰ和DS Ⅱ方程的Grammian 解，再利用sato 算子理论将其转化为非奇异的有理解，从而得到高维的薛定谔型方程也具有有理分式的怪波解[9,10]。这使得对高维的薛定谔型方程怪波解的寻求成为非常有意义的事。

怪波(也叫做异常波、巨波)是海洋表面突然出现的一种大振幅波。这种怪波通常有很深的低谷和高峰，并且波的低谷发生在最大波峰之前或之后。怪波通常会突然出现，不像由台风、地震引发的海啸可以提前几小时或几天被预测，所以会带来很大的灾难[11]。海洋学家从20世纪70年代就对怪波展开观测研究，近年来，越来越多的学者开始关注怪波这一现象，从理论上以及数值模拟中寻找怪波的解释。变系数耦合非线性薛定谔方程是非线性领域最重要的方程之一，它可以应用于非线性光学、生物物理、海洋学、经济学、玻色一爱因斯坦凝聚等多个领域[12]。方程具有很多变系数项，因此可以更好地描述生活中的一些现象。国内外许多学者对耦合非线性薛定谔方程的怪波解进行了深入的研究[6,13]。但是因为 VCNLS 形式的复杂性，它的求解更困难，所以对此类怪波解的研究没有那么广泛。

计算机符号计算己经成为孤立子理论中研究非线性模型的解析解和怪波解的有效辅助工具。符号计算系统以准确和高效的算法化方式在符号系统上进行推理运算，最终能够使研究问题机械化地解决。随着非线性理论研究的深入以及计算机科学技术和符号计算系统的迅速发展，基于计算机符号计算研究非线性模型的可积性、求解方法及其物理应用也随之成为非线性科学领域中的重要研究方向之一。

目前国际上最具有代表性的符号计算工具主要是mu-MATH，Maple， Mathematica，Matlab等。Mathematica是1988 年英国科学家Stephen Wolfram 开创的一款至今广泛应用的科学计算软件，其中以他的名字命名的Wolfram 语言是嵌入在Mathematica中的编程语言，支持函数式和过程是程序设计功能，并能够将用户代码以Package形式添加。到2014年10月为止，Mathematica 已经拥有了10.0.1 的稳定版本，并可支持英文、中文和日语三种语言。Mathematica 具有丰富的产品功能，不仅包含各种数学函数和特殊属性的库，而且拥有程序语言设计、图像处理、数据挖掘、文本处理等众多功能，是一款十分强大的符号演算工具[15,,16]。

## 1.2选题的意义

随着计算机科学技术的日益发展，符号演算系统成为越来越多被关注的热点，如何应用符号演算工具辅助更多的科学领域发展具有重要的意义。非线性偏微分方程作为数学、物理、计算机、地理科学等众多交叉学科共同涉及到的非线性问题，一直是学术界的研究的重点和难点，尤其是对近期热点的非线性发展方程的怪波研究更是具有重要意义。

非线性发展方程研究的最大困难之一在于怪波解的获得十分困难，大量经典书籍以及孤子文献都致力于获得更多新的解析解的方法介绍和学术研究。怪波研究将直接影响非线性发展分方程的理论和应用研究。

如何更好的利用符号演算系统Mathematica，对非线性发展方程的可积性以及解析解的研究是本文研究的重点。随着非线性发展方程研究的深入，所研究方程的复杂程度逐渐提高，因而必须借助于符号计算系统进行。利用Mathematica对非线性发展方程的解析性质进行研究，对怪波进行模拟，进而将部分解析性质的求解进行符号化，编写出Mathematica的软件包是本文的三大研究内容，其对非线性发展方程的研究都会起到不小的促进作用。

# 2国内外研究现状及发展动态

以非线性发展方程为研究对象的怪波理论，近年来得到快速发展，形成了有效的解析研究方法。怪波在海洋学、超流体、光学纤维和经济学等诸多领域内都存在，从而引起人们的极大关注。随着对怪波的深入研究，相继提出了寻找非线性方程怪波解的反散射方法、Darboux 变换法、代数几何解和 Hirota 方法等具体方法。随着各种求解方法的出现，不但过去难以求解的方程得到解决，而且许多新的，具有重要物理意义的解不断被发现和利用。

1967 年，Gardrier等人发明了求解KdV方程的逆散射方法(也称为非线性)， 这一方法利用量子力学中的薛定谔方程特征值问题(正散射问题)及其反问题(反散射问题)之间的关系，经过求解Gel’fand-Levitan-Marck-enko线性积分方程而给出KdV方程初值问题的解[30]。它不仅对应用技术提供了崭新的方法和概念，而且对数学自身的发展也有深远影响。随后，Lax将该方法加以综合和推广，使之能够用于求解其他非线性偏微分方程的初值问题，从而逐步形成一种系统的求解方法。1972年，Zakharov和Shabat推广了这一方法，求出高阶KdV 方程，立方薛定谔方程等的精确解。Ablowitz, Kaup, Newell和 Segur 则更加一般化反散射方法。李诩神、田畴、屠规章教授等也为发展反散射方法做了很好的工作[31]。

高阶Hirota 方程在可积条件下的一种精确呼吸子解，并基于此呼吸子解得到了Hirota 方程的一种怪波解。在此怪波解的基础上研究了怪波的激发，发现对平面波进行周期性扰动可以激发怪波，对平面波进行高斯扰动可以更快地激发怪波，还可以直接在常数项上增加高斯扰动激发怪波。作为一个实例，采用分步傅里叶方法数值研究了在考虑自频移和拉曼增益时怪波的传输特性，自频移使怪波中心发生偏移，拉曼增益使得怪波分裂得更快，而且拉曼增益值越大怪波分裂得越快，但是拉曼增益对怪波的峰值强度没有明显影响。最后数值模拟了相邻怪波之间的相互作用特点，随着怪波之间距离的减小，怪波将合二为一，成为一束怪波，之后再分裂，并分析了拉曼增益和自频移对怪波相互作用的影响。

随着孤子理论快速发展，计算机符号计算与非线性发展的方程的联系也越来越紧密。一些基于符号软件系统(Mathematica、Maple、Reduce)的检测非线性模型的Painlevė可积性的软件包已经被开发，如关于常微分方程检测算法的Macsyma 程序包“ODEPAINLEVė”[23]和关于偏微分方程检测算法的Maple 程序包“SPIC”[24]。2006 年，Baldwin和Hereman开发了可适用于多项式形式的常微分方程和偏微分方程并且自变量和因变量的数目都不受限制的Mathematica 程序包“PainlevėTest.m”[25]，但是该软件包只能单纯判断是否可积，对于不可积情况则无法提供进一步的信息，如KdV-3N 方程，因此急需开发具有更广适用性的Painlevė 可积性测试软件包。关于其他可积性的判定如Bäcklund变换，Lax对等，目前还没有相应的程序包。因而，尝试将重要可积性的判定形式化，也是本项目可以尝试研究的方向。在微分方程解析求解方面，涉及到大量复杂的运算，这些运算的高效处理需要计算机来实现。1982 年，Sehwarz 首先在Reduce 上编写了求微分方程古典对称群的软件包；1989 年，Reid 等和Mausfield分别在Maple 系统上开发出计算微分方程对称群及简化微分方程组的软件包；1994 年，李志斌应用数学机械化方法得到了一批有明确物理背景的非线性方程(组)的精确孤立波解；2001 年李志斌与柳银萍等人在PDE 的自动求解方面开展了一系列工作，并开发了一系列软件包[26,27]。2008年，Liang 等人基于扩展的Tanh 方法开发了Maple 软件包TWS(Travelling Wave Solutions) [28] 。但以上软件包的开发大多集中于方程特殊解的特定解法，开发适用性更广的求解软件包有助于非线性模型的进一步分析与研究。

# 3论文的研究内容及拟采取的技术方案

## 3.1主要研究内容

论文主要研究内容分为三大部分，理论研究、模拟部分和Mathematica软件包开发。理论部分主要是对非线性薛定谔方程的解析解和怪波解的求解，软件包开发部分主要是对理论研究中所用得到的各种算法进行符号化，开发出适用性较强的Mathematica软件包，具体研究内容如下。

### 复杂非线性发展方程的解析研究

通过运用非线性发展方程的经典研究方法如反散射法(IST)、Bäcklund变换法、Darboux变换法、Hirota双线性法、 Painlevė有限展开法、AKNS系统、Bell多项式方法，延拓法及Lie等，并结合计算机符号计算软件Mathematica对非线性发展方程的解析性质如Painlevė可积性、Lax对以及怪波解的求解等进行研究。研究对象为复杂的非线性发展方程，如高维、高阶、变系数等。现阶段拟对KdV类方程、非线性Schrödinger方程以及sine-Gordon方程及其它们的扩展形式进行研究。

### 基于Mathematica非线性发展方程怪波解的模拟

通过运用Mathematica软件对以上理论部分所得到的怪波解进行模拟，展示怪波传播过程中的各种现象，进而分析怪波传播的特点以及方程中各项系数对怪波传播的影响。

### 非线性发展方程解析性质的Mathematica软件包改进与实现

通过以上的对非线性发展方程解析性质的研究，深入理解所使用的各种算法，结合Mathematica软件语言的特点，对部分算法进行符号化，编写Mathematica软件包。所开发的软件包主要实现以下几个功能，一是在原有Painlevė分析软件包的基础上进行改进，使其能对更为广泛的非线性发展方程适用，二是开发运用AKNS系统求解Lax对的软件包，使其可以适用于尽可能多的方程，三是开发运用Hirota双线性法和Bäcklund变换求解非线性发展方程的孤子解和怪波解。

## 3.2拟采用的技术方案

本研究拟分别从可积性、解析解和怪波解对非线性发展方程进行理论研究，对于可积性部分，主要有以下两方面内容，一是采用Painlevė有限展开法对方程的Painlevė可积性进行判定，求出方程的Painlevė可积条件，二是采用AKNS系统求解方程Lax对，二是采用贝尔多项式方法和Bäcklund变换求解方程的Lax对孤子解。

模拟部分拟采用Mathematica软件强大的画图功能对怪波传播特性进行模拟和分析。

软件部分拟采用Mathematica对上述所用到的算法进行进行改进和实现，最终开发出实用性较为广泛的软件包。

# 4关键技术

## 4.1非线性发展方程的解析研究方法

非线性发展方程的解析研究就目前的研究成果而言还没形成一个完备的理论体系，许多研究方法如反散射法(IST)、Bäcklund变换法、Darboux变换法、Hirota双线性法、 Painlevė有限展开法、AKNS系统、Bell多项式方法，延拓法及Lie等互相关联性不强，而且不同的方法各有其特点及适用性，因此需要对方法内部的理论进行深入研究。

## 4.2 基于Mathematica的怪波图像模拟

对于复杂的非线性发展方程而言，其解析解含有众多可变参数，各个参数对孤立波的传播影响各不相同，Mathematica软件具有强大的图像功能，如何利用其强大的功能实现对孤立波的模拟及参数分析是一项艰巨的任务。

## 4.3基于Mathematica的软件开发

Mathematica程序设计语言以“条目重写”为基础，并支持函数式和过程式程序设计（尽管一般来说函数式程序设计更为高效）。Mathematica的一项特色是，新的代码是以程序包（Package）的形式添加的，比如Mathematica语言中的文本文件。Mathematica的这些语言特点更适宜与软件包的开发，如何将具体算法符号化将是重点研究内容。

# 主要参考文献

[1] 刘桂喜，余志新，陈琼. 计算机技术导论，电子工业出版社，2004.

[2] 姚爱国. 计算机导论，武汉大学出版社， 2003.

[3] 王玲，宋斌，王立平. 计算机科学导论，清华大学出版社，2008.

[4] 钟义信. 信息科学与技术导论，北京邮电大学出版社， 2010.

[5] 林福永. 计算机辅助管理，暨南大学出版社，1995.

[6] Barnett M P， Capitani J F， Von Zur Gat hen， et aL Symbolic calculation in chemistry; selected example. Int. J. Quantum Chem.， 100， 2004， 80-104.

[7] 张树功，刘停战，冯果忱.计算机代数基础，吉林大学出版社，1997

[8] Infeld E, Rowlands G. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[9] Scott A. Encyclopedia of Nonlinear Science. Routledge, 2005

[10] 李士勇.非线性科学及其应用，哈尔滨工业大学出版社，2011.

[11] 孙义燧.非线性科学若干前沿问题，中国科学技术大学出版社，2009

[12] 郭玉翠.非线性微分方程引论. 北京.清华大学出版社,2008.

[13] 李志斌.非线性数学物理方程的行波解.北京.科学出版社,2007

[14] 李翊神.孤子与可积系统.上海科技教育出版社,1999

[15] 吴剑，胡波.掌握和精通Mamematica 4.0,机械工业出版社，2001.

[16] 张宝善.Mamematica符号运算与数学实验，南京大学出版社，2007.

[17] P. E. Holloway, E. Pelinovsky, T. Talipova. A generalized Korteweg-de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone. Journal of Geophysical Research: Oceans, 1999, 104: 18333-18350.

[18] T. Huang, D. S. Li, Y. Y. Han. Qualitative analysis of travelling wave solution for (2+1)- dimension Gardner(2DG) equation. Journal of Jiangsu Normal University, 2012, 30: 18-23.

[19] A. M.Wazwaz. Solitons and singular solitons for the Gardner-KP equation. Appl. Math. Comput, 2008, 204:162-169.

[20] J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale. The Painlevé property for partial differential equations. J. Math. Phys, 1983, 24: 522-526.

[21] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation. Physical review letters, 1973, 31: 1386.

[22] J. R. Apel, L. A. Ostrovsky, Y. A. Stepanyants. Internal solitons in the ocean. Acoustical Society of America, 1995, 98.

[23] Rand D W, Winternitz P. ODE Paininlevé-A.macsyma Package for PainlevéAnalysis of Ordinary Differential Equations. Computer Physics Communications, 1986, 42:359-383.

[24] Xu G Q. Searehing for PainlevéIntegrable Conditions of Nonlinear PDEs with Constant Parameters Using Symbolic Computation. Computer Physics Communications, 2008, 178: 505-517.

[25] Baldwin D, Hereman W. Symbolic Software for the PainlevéTest of Nonlinear Ordinary and Partial Differential Equations. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2006, 13(1):90-110.

[26] Liu Y P, Li Z B. An Automated Algebraie Method for Finding a Series of Exact Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations. Chinese Physics Letters, 2003, 20:317.

[27] 柳银萍, 李志斌. 基于吴方法的孤波自动求解软件包及其应用[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1):118.

[28] Liang S, Jeffrey D J. Automatic Computation of the Travelling Wave Solutions to Nonlinear PDEs[J]. Computer Physics Communications, 2008, 178:700-712.

[29] Grimshaw R., Helfrich K. The Effect of Rotation on Internal Solitary Waves. IMA Journal of Applied Mathematics, 2012: hxs024.

[30] Segur H., Hammack J. Soliton Models of Long Internal Waves. Journal of Fluid Mechanics, 1982, 118: 285–304..

[31] Horn D. A., Imberger J., Ivey G. N., et al. A Weakly Nonlinear Model of Long Internal Waves in Closed Basins. Journal of Fluid Mechanics, 2002, 467: 269–287..

[32] Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A. Internal Solitons in Laboratory Experiments: Comparison with Theoretical Models. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2005, 15(3): 037111..