Introduction – Démarche du cours

1) Question posée
2) Définir le cadre d’analyse pour spécifier le modèle qui permettra de répondre à la question posée
3) Construire une base de données cohérente avec le modèle que l’on veut estimer. Etre vigilent sur les unités
4) Choisir la méthode d’estimation appropriée en fonction des différents tests. Définir une stratégie d’estimation et de tests en lien avec la question posée.

Econométrie et modélisation économique

Le modèle de Feldstein - Horioka

Isabelle Cadoret

Démarche

Objectif : analyser la corrélation entre le taux d'épargne et le taux d'investissement
2 questions :
- Tester la mobilité des capitaux
- Tester si le comportement des pays de l'OCDE est le même que celui des autres pays de l'échantillon

Comment : estimer le modèle $I\_GDP_i = \beta_1 + \beta_2 S\_GDP_i + \varepsilon_i$

Stratégie de tests pour répondre aux questions
Estimation avec les MCO du modèle : $I\_GDP_i = \beta_1 + \beta_2 S\_GDP_i + \varepsilon_i$

1) Tester la mobilité des capitaux = test de student

$$H_0: \beta_2 = q$$
$$H_1: \beta_2 \neq q$$

On calcule la statistique : $\mathrm{T}value = \frac{\hat{\beta}_2 - q}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$,

Règle de décision si $|Tvalue| > \tau_{\frac{\alpha}{2}}(N-K)$ ou si le niveau significativité est inférieur à 5% $(Pr(> t) < 5\%)$ alors on refuse H_0. N est le nombre d'observations ici N = 82 et K le nombre de paramètres estimés ici K=2

2) Tester si le comportement des pays de l'OCDE est le même que celui des autres pays de l'échantillon
Test de plusieurs contraintes = Test de Fisher

Etapes du test :
- Créer une variable indicatrice OCDE = 1 si le pays est membre de l'OCDE , 0 sinon
- Estimer le modèle sans contrainte

$$I\_GDP_{\ i} = \gamma_1 + \gamma_2 S\_GDP_i + \gamma_3 OCDE + \gamma_4 S\_GDP_i \times OCDE + \varepsilon_i$$

Test de Fisher :

$$H_0 : \gamma_3 = \gamma_4 = 0$$
$$H_1 : \gamma_3 \neq \gamma_4 \neq 0$$

Sous H_0, le modèle avec contrainte : $I\_GDP_{\ i} = \gamma_1 + \gamma_2 S\_GDP_i + \varepsilon_i$
- Estimer avec les mco les 2 modèles, avec et sans contraintes pour obtenir la somme des carrés des résidus
- Calculer la statistique de Fisher

Soient $e'e$ la somme des carrés des résidus du modèle sans les 2 contraintes et $e^{*\prime}e^*$ la somme des carrés des résidus du modèle estimé avec les 2 contraintes

$$F = \frac{(e^{*\prime}e^* - e'e)/2}{e'e/(81-4)}$$

Règle de décision : si $F > F\big(2, (81-4)\big)$ ou si $PROB(> F\ ) < 5\%$ on refuse l'hypothèse H_0. Dans ce cas on teste Séparément avec un test de student :

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_3 = 0 \\ H_1 : \gamma_3 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \gamma_4 = 0 \\ H_1 : \gamma_4 \neq 0 \end{cases}$$

Stratégie de tests pour vérifier la spécification et choisir la méthode d'estimation quand la variable S_GDP_i est exogène

1) Test de spécification

Ramsey reset test , détecte de manière générale si il y a un problème de spécification, on utilise dans R la Commande **resettest** qui estime le modèle avec les MCO pour obtenir la série des valeurs prédites par le modèle (yp) , puis réestime avec les MCO le modèle augmenté des variables yp au carré et yp au cube et enfin teste l'égalité à 0 des coefficients de ces 2 variables avec un test de Fisher. Si on refuse H0 il faut revoir la spécification (variables omises,…)

2) Tests d'hétéroscédasticité - vérifie si la variance des aléas est constante (cas des données individuelles)

- Test général de détection = test de White basé (test du multiplicateur de Lagrange), on utilise la commande Commande **bptest** qui estime les résidus mco au carré en fonction des variables explicatives, de leur carré et des leurs produits croisés

Test du type multiplicateur de Lagrange, calcul la statistique $N \times R^2_{e^2}$ ($R^2_{e^2}$ étant le coefficient de détermination de la régression avec les résidus au carré en variable expliquée. Si on refuse H0 on conclut qu'il y a un problème d'hétéroscédasticité mais on n'en connaît pas sa forme.

- Test de Goldfeld-Quant = test si la variance est fonction d'une variable (Z) dont on a les données, cela peut être une des variables explicatives

Effectue un test d'égalité de variance sur 2 échantillons dont les données sont triées par ordre décroissant de la variable Z

On utilise la commande **gqtest**

Si on refuse H0 on conclut qu'il y a un problème d'hétéroscédasticité et que la variance est une fonction de Z.

3) Choix de la méthode d'estimation quand la variable S_GDP_i est exogène

Si les aléas sont homoscédastique, l'estimateur MCO est le meilleur estimateur. Si ils sont hétéroscadastiques il n'est pas le plus efficace, il reste non biaisé et convergent. Dans le modèle général : $Y = X\beta + \varepsilon,$ si $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2\Omega$ alors la matrice de variance covariance de l'estimateur MCO est données par :

$$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = E\left[\left(\hat{\beta}_{MCO} - E(\hat{\beta}_{MCO})\right)\left(\hat{\beta}_{MCO} - E(\hat{\beta}_{MCO})\right)'\right] = E\left[(\hat{\beta}_{MCO} - \beta)(\hat{\beta}_{MCO} - \beta)'\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = E\left[\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)'\right]$$

$$Var(\hat{\beta}_{MCO}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

Le meilleur estimateur est celui des Moindres Carrés Généralisés, il est non biaisé et convergent :

$$\min_{\beta} \varepsilon'\Omega^{-1}\varepsilon$$

$$\hat{\beta}_{MCG} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'Y) \text{ et } Var(\hat{\beta}_{MCG}) = \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

Dans le cas de l'hétéroscédasticité :

- l'estimateur MCG est un estimateur des MCO sur le modèle dont les données sont pondérées par leur écart-type à une constante près :

$$\text{MCO sur } \Omega^{-1/2}Y = \Omega^{-1/2}X\beta + \Omega^{-1/2}\varepsilon, \text{ si } Var(\Omega^{-1/2}\varepsilon) = \sigma^2$$

- si Ω est inconnue on préfère estimer le modèle avec les MCO et corriger la matrice de variance covariance.

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Modèle macro en économie ouverte

Y = Consommation + Investissement – Exportations + Importations

YD = Y – Taxes ; *YD va correspondre au revenu disponible*

Epargne privée = YD – Consommation

Epargne publique = Taxes – Dépenses Publique

Epargne = Epargne privée + Epargne Publique

Investissement = Epargne – (Exportations – Importations)

En économie fermée : Exportations = Importations = 0 et donc Investissement = Epargne

- Test de la mobilité des capitaux = **test de corrélation entre l'épargne nationale et l'investissement national**

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Aspects techniques abordés

- Régression simple / Régression multiple
- Tests usuels
- Tests de contraintes sur les paramètres
- Analyse des résidus – Problème d’hétéroscédasticité

Le modèle de Feldstein et Horioka

Application

Données : Source Banque Mondiale

81 pays – Période 1980-2013

Les séries dans le fichier :

S_GDP : Gross savings (% of GDP)

I_GDP : Gross capital formation (% of GDP)

GDP : GDP per capita, PPP (constant 2011 international $)

OECD : variable indicatrice prenant la valeur 1 si le pays est un pays de l'OCDE

La période totale est décomposée en 2 sous périodes 1980-1996, 1997-2013.

Les données sont des moyennes par période.

Le modèle de Feldstein et Horioka

Principe du test de mobilité des capitaux

$$I\_GDP_{\ i} = \beta_1 + \beta_2 S\_GDP_i + \varepsilon_i$$

Test de forte mobilité des capitaux

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Test de faible mobilité des capitaux

$$H_0 : \beta_2 = 1$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 1$$

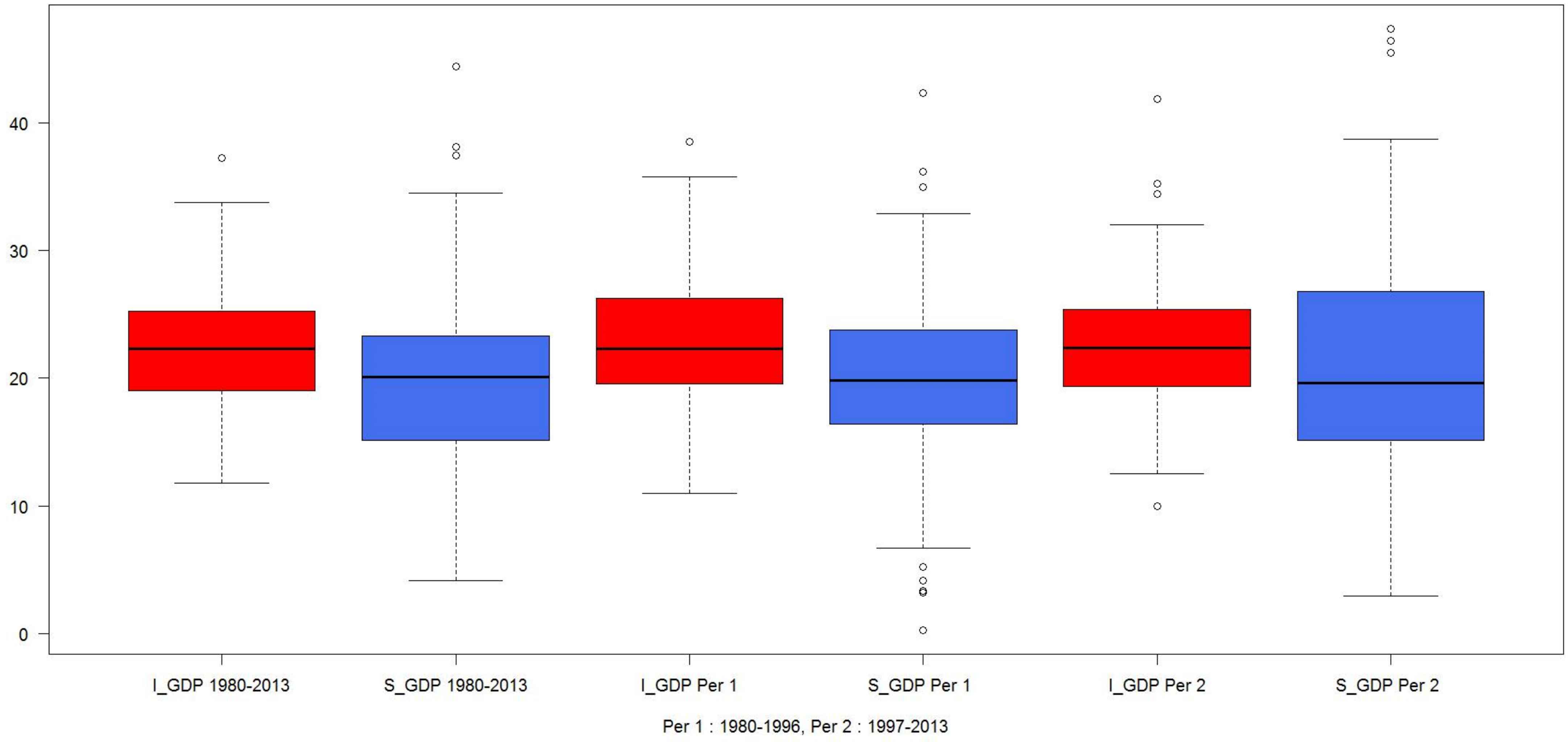
Le modèle de Feldstein et Horioka

1) Statistiques Descriptives

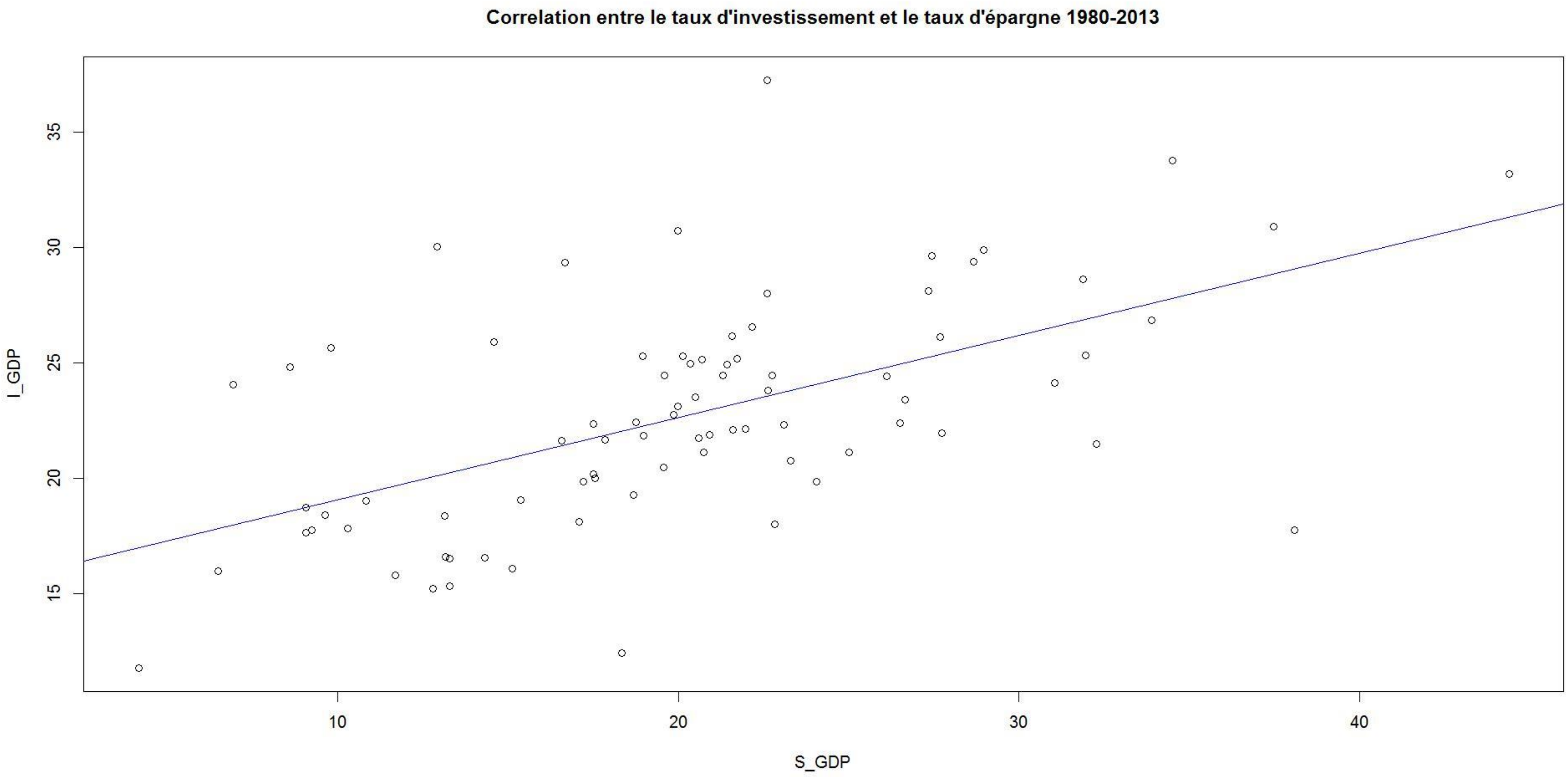
	S_GDP	I_GDP	S_GDP1	I_GDP1	S_GDP2	I_GDP2
Min.	4.143	11.76	0.265	11.00	2.938	9.982
1st Qu.	15.120	19.04	16.380	19.59	15.141	19.376
Median	20.122	22.32	19.832	22.32	19.644	22.359
Mean	**20.266**	**22.72**	**19.504**	**22.56**	**21.025**	**22.870**
3rd Qu.	23.308	25.27	23.787	26.29	26.825	25.387
Max.	44.387	37.23	42.315	38.55	47.366	41.893

	OECD	GDP
Min.	0.0000	801.4
1st Qu.	0.0000	4619.1
Median	0.0000	11004.4
Mean	**0.2593**	**17023.2**
3rd Qu.	1.0000	25424.6
Max.	1.0000	80431.3

Le modèle de Feldstein et Horioka



Le modèle de Feldstein et Horioka



Le modèle de Feldstein et Horioka

2) Test de mobilité des capitaux

Modèle de régression simple - Estimation MCO (hypothèses, résultats , R2 et corrélation, ….)

```
> Periode_G <- lm( I_GDP ~ S_GDP, data=corr_IS)
> summary(Periode_G)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = corr_IS)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.3044  -2.0165  -0.4147   2.0558  13.6752

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  15.5020     1.2709  12.198  < 2e-16 ***
S_GDP         0.3560     0.0586   6.074 4.13e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.07 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3183,	Adjusted R-squared:  0.3097
F-statistic: 36.89 on 1 and 79 DF,  p-value: 4.126e-08
```

```
> cor(corr_IS$I_GDP,corr_IS$S_GDP)
[1] 0.5642109
> cor(corr_IS$I_GDP,corr_IS$S_GDP)^2
[1] 0.318334
```

Le taux d'épargne et le taux d'investissement étant exprimés en %, une augmentation de 1 point de % du taux d'épargne induit une hausse de 0.35 point de % du taux d'investissement.

Test de Student : on refuse H0 coeff de S_GDP = 0 car Pr <5%, donc les capitaux, il n'y a pas une mobilité parfaite des capitaux selon ce test.

Le modèle de Feldstein et Horioka

Test de mobilité des capitaux, coeff = 1 ?

```
> linearHypothesis(Periode_G, "S_GDP = 1")
Linear hypothesis test

Hypothesis:
S_GDP = 1

Model 1: restricted model
Model 2: I_GDP ~ S_GDP

  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
1     80 3309.9
2     79 1308.9  1      2001 120.77 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Test si le coeff de S_GDP = 1 sous H0
Test d’une contrainte effectué avec le test de Fisher
on refuse H0 car Pr <5%, donc les capitaux, il y a mobilité des capitaux selon ce test.

Rmq :
Stat_Student = (0.356-1)/0.058=-10.98
F = (Stat_student)^2 = 120.77

Le modèle de Feldstein et Horioka

3) Y-a-t-il une spécificité des pays de l’OCDE ?

Ecriture du modèle sous forme matricielle (MRS / MRM)

Test de Chow : on estime le modèle avec les 81 pays, avec les pays OCDE et les pays non OCDE

```
> summary(EQ1_OECD)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = fichier1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.2957 -1.2781 -0.6134  1.1780  5.7467 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 13.95726    2.23952   6.232  5.5e-06 ***
S_GDP        0.40725    0.09462   4.304 0.000383 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.166 on 19 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4937,	Adjusted R-squared:  0.467 
F-statistic: 18.52 on 1 and 19 DF,  p-value: 0.0003828
```

```
> EQ1_NOECD = lm(I_GDP ~ S_GDP, data=fichier2)
> summary(EQ1_NOECD)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = fichier2)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-11.4401  -2.8637  -0.3014   2.7482  13.5480 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 15.61669    1.50328  10.388 7.42e-15 ***
S_GDP        0.35651    0.07176   4.968 6.31e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 4.577 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2985,	Adjusted R-squared:  0.2864 
F-statistic: 24.68 on 1 and 58 DF,  p-value: 6.31e-06
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

	All countries	OECD	NOECD
SCR	1308,908	89,11028	1214,783
Observations	81	21	60
Paramètres	2	2	2
ddl	79	19	58

On construit un test de Fisher de contrainte (les coeff sont les mêmes pour les pays OCDE et non OCDE :
Fchow = 0,148
P_value = 0.86

Test avec les variables indicatrices – équivalent au test de Chow

```
> Periode_GOECD <- lm( I_GDP ~ S_GDP+S_GDP_OECD+ OECD, data=corr_IS)
> summary(Periode_GOECD)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP + S_GDP_OECD + OECD, data = corr_IS)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.4401  -2.1420  -0.4645   2.0915  13.5480

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.61669    1.35170  11.553  < 2e-16 ***
S_GDP        0.35651    0.06453   5.525 4.31e-07 ***
S_GDP_OECD   0.05074    0.19102   0.266    0.791
OECD        -1.65943    4.46496  -0.372    0.711
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.115 on 77 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3209,	Adjusted R-squared:  0.2945
F-statistic: 12.13 on 3 and 77 DF,  p-value: 1.387e-06
```

On teste si les coeff ddes variables S_GDP_OECD et OECD sont égaux à 0 = test de Fisher de 2 contraintes

```
> anova(Periode_G,Periode_GOECD)
Analysis of Variance Table

Model 1: I_GDP ~ S_GDP
Model 2: I_GDP ~ S_GDP + S_GDP_OECD + OECD
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     79 1308.9
2     77 1303.9  2    5.0142 0.1481 0.8626
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

4) Analyse des résidus – Tests de spécification : Ramsey Reset Test

```
> resettest(Periode_G) ## test de misspecification

        RESET test

data:  Periode_G
RESET = 0.15192, df1 = 2, df2 = 77, p-value = 0.8593
```

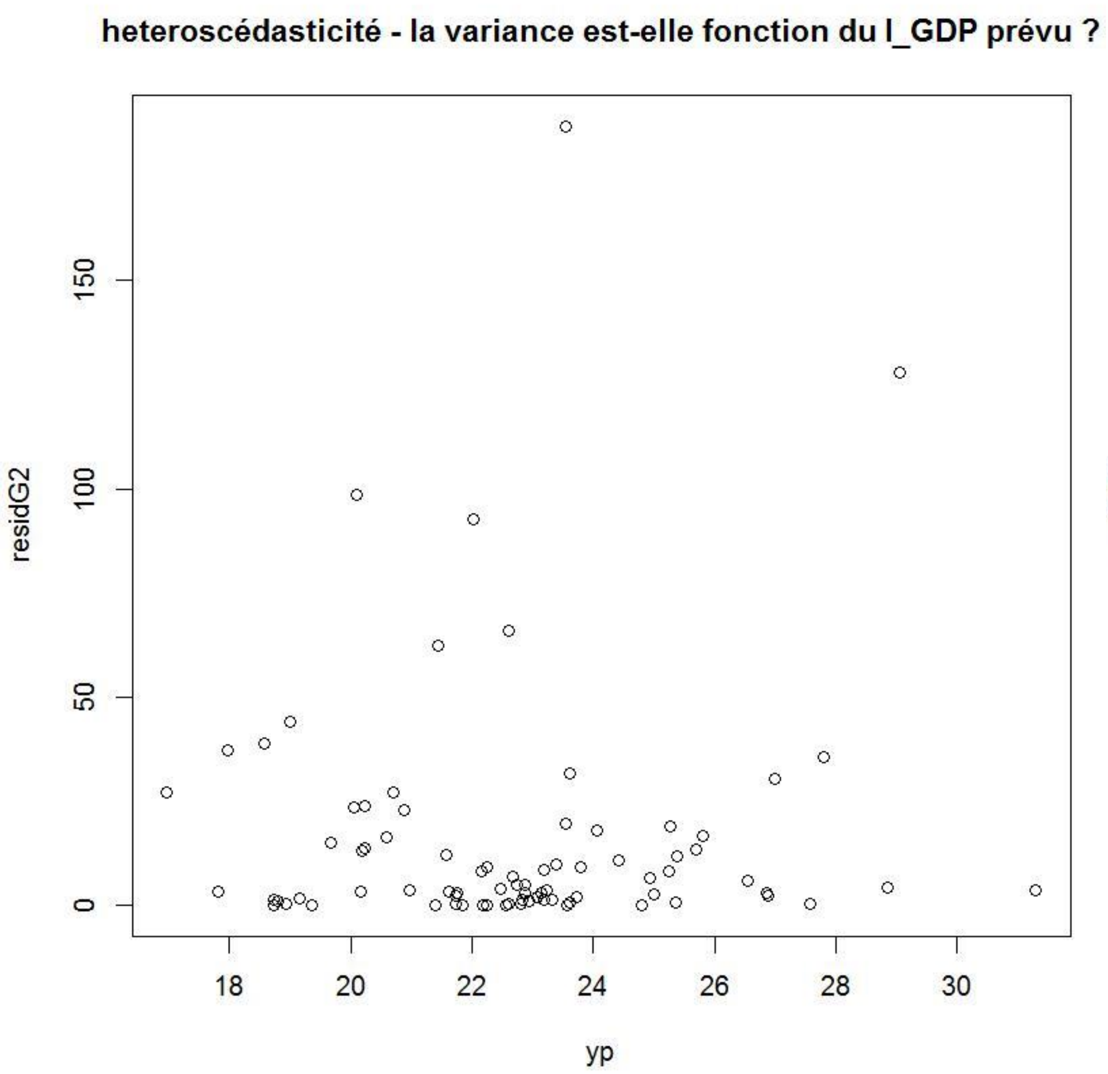
Commande resettest estime le modèle avec les MCO pour obtenir la série des valeurs prédites par le modèle (yp) , puis réestime avec les MCO le modèle augmenté des variables yp au carré et yp au cube et enfin teste l'égalité à 0 des coefficients de ces 2 variables

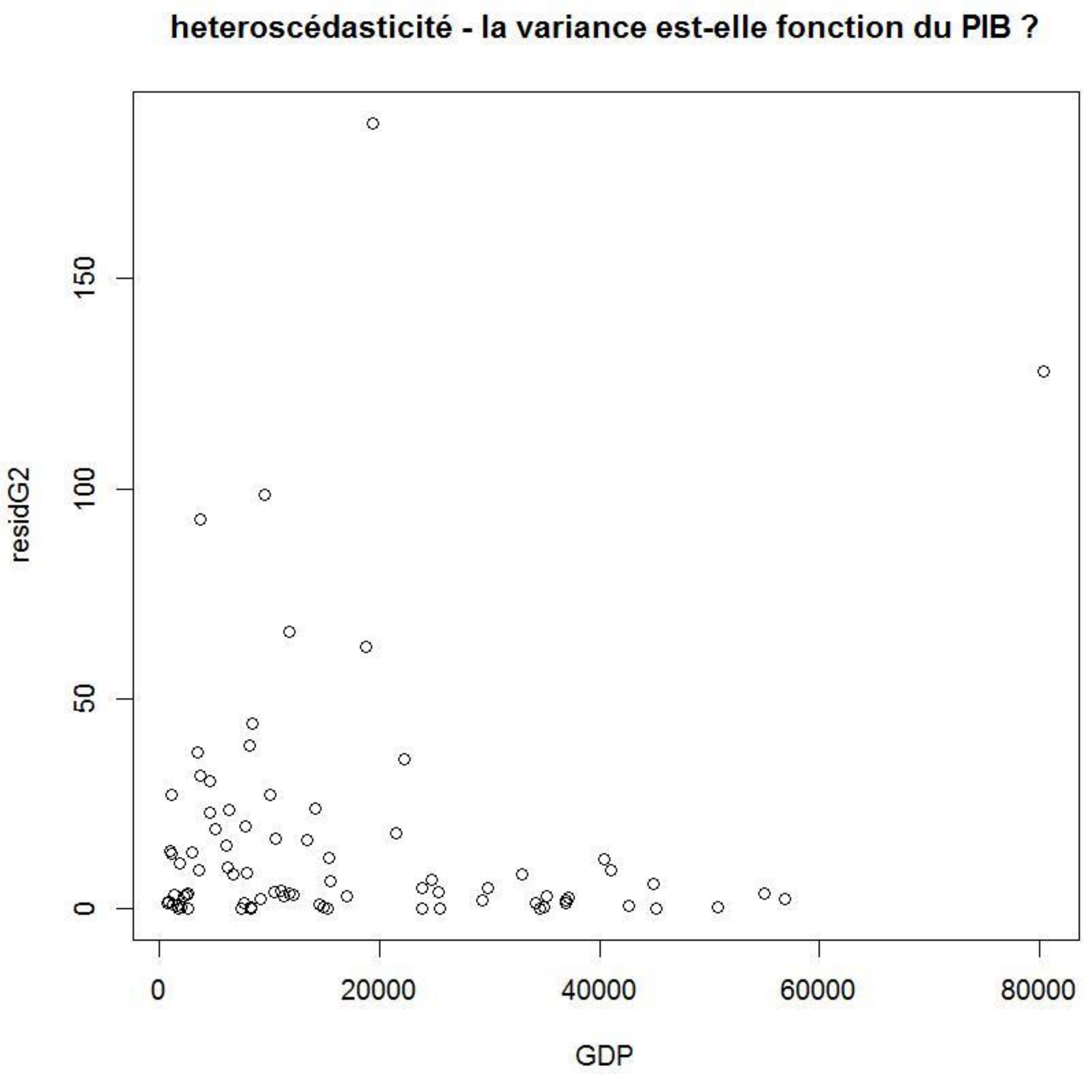
```
> Periode_GT <- lm( I_GDP ~ S_GDP + yp2 + yp3, data=corr_IS)
> summary(Periode_GT)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP + yp2 + yp3, data = corr_IS)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-10.7542  -2.1944  -0.4713   2.0632  13.5010

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.058e+01  1.385e+02   0.221    0.826
S_GDP        1.227e+00  6.352e+00   0.193    0.847
yp2         -8.197e-02  7.574e-01  -0.108    0.914
yp3          8.328e-04  1.059e-02   0.079    0.938

Residual standard error: 4.115 on 77 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.321,	Adjusted R-squared:  0.2946
F-statistic: 12.13 on 3 and 77 DF,  p-value: 1.382e-06
```

```
> anova(Periode_G,Periode_GT)
Analysis of Variance Table

Model 1: I_GDP ~ S_GDP
Model 2: I_GDP ~ S_GDP + yp2 + yp3
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     79 1308.9
2     77 1303.8  2    5.1447 0.1519 0.8593
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

5) Analyse des résidus – problème d'hétéroscédasticité





Le modèle de Feldstein et Horioka

- Test de White

```
> bptest(Periode_G, ~ S_GDP + S_GDP_SQ, data=corr_IS) #test de white

	studentized Breusch-Pagan test

data:  Periode_G
BP = 1.0119, df = 2, p-value = 0.6029
```

Commande bptest estime les résidus mco au carré en fonction des variables explicatives, de leur carré et des leurs produits croisés Test du type multiplicateur de Lagrange, calcul la statistique $N \times R^2_{e^2}$ ($R^2_{e^2}$ étant le coefficient de détermination de la régression avec les résidus au carré en variable expliquée.

```
> Test_White<- lm( residG2 ~ S_GDP + S_GDP_SQ, data=corr_IS)
> summary(Test_White)

Call:
lm(formula = residG2 ~ S_GDP + S_GDP_SQ, data = corr_IS)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-31.364 -13.892 -10.158   1.068 172.870 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 29.36055   18.71799   1.569    0.121
S_GDP       -1.50036    1.73994  -0.862    0.391
S_GDP_SQ     0.03659    0.03819   0.958    0.341

Residual standard error: 30.08 on 78 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.01249,	Adjusted R-squared:  -0.01283 
F-statistic: 0.4934 on 2 and 78 DF,  p-value: 0.6124
```

BP = N*R2 = 81*0.01249
=1.011

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Test de Golfeld Quant

```
> gqtest(Periode_G, order.by = ~ GDP, fraction = 6, data=corr_IS) # GoldfeldQuant

	Goldfeld-Quandt test

data:  Periode_G
GQ = 1.0126, df1 = 36, df2 = 35, p-value = 0.4858
alternative hypothesis: variance increases from segment 1 to 2

>
```

Test si la variance des aléas est fonction d'une variable, ici le GDP = commande gqtest

Procédure :

1) Ordonner les observations par ordre décroissant de GDP
2) Séparer l'échantillon en 2 et enlever les observations centrales environ 1/6°
3) Estimer le modèle sur chaque sous échantillon
4) Faire un test d'égalité de variance sur les 2 échantillons : $F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$ avec

$\hat{\sigma}_1^2$ variance estimée avec l'échantillon 1 de taille $N1$ et une distribution : $\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \sim > \frac{\chi^2(N1-K)}{(N1-K)}$

$\hat{\sigma}_2^2$ variance estimée sur l'échantillon 2 de taille $N2$ et une distribution : $\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} \sim > \frac{\chi^2(N2-K)}{(N2-K)}$

Règle de décision : si $F > F(N1-K, N2-K)$ ou si $P - value < 5\%$ on refuse *H0,* il y a un problème d'hétéroscédasticité.

Le modèle de Feldstein et Horioka

Si besoin de corriger l'hétéroscédasticité

- Solution 1 – on connaît la forme de l'hétéroscédasticité ,

si $var(\varepsilon_i) = \sigma^2 GDP_i$ alors la matrice Ω s'écrit :

$$\Omega = \begin{bmatrix} GDP_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & GDP_2 & & & \\ . & & GDP_3 & & \\ . & & . & . & \\ 0 & & & 0 & GDP_{81} \end{bmatrix}$$

Moindres Carrés Généralisés = Moindres carrée Pondérés pour l'hétéroscédasticité

```
> Periode_G_C <- lm( I_GDP ~ S_GDP, data=corr_IS, weights=(1/GDP))
> summary(Periode_G_C)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = corr_IS, weights = (1/GDP))

Weighted Residuals:
      Min        1Q    Median        3Q       Max 
-0.146313 -0.013714  0.003586  0.023869  0.133621 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 12.97573    0.84209  15.409  < 2e-16 ***
S_GDP        0.45325    0.05062   8.955 1.19e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.04713 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5037,	Adjusted R-squared:  0.4974 
F-statistic: 80.19 on 1 and 79 DF,  p-value: 1.192e-13
```

Moindres Carrés Ordinaires

```
> Periode_G <- lm( I_GDP ~ S_GDP, data=corr_IS)
> summary(Periode_G)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = corr_IS)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-11.3044  -2.0165  -0.4147   2.0558  13.6752 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  15.5020     1.2709  12.198  < 2e-16 ***
S_GDP         0.3560     0.0586   6.074 4.13e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.07 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3183,	Adjusted R-squared:  0.3097 
F-statistic: 36.89 on 1 and 79 DF,  p-value: 4.126e-08
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

Si besoin de corriger l'hétéroscédasticité

- Solution 2 – on ne connaît pas la forme de l'hétéroscédasticité

Correction de White, on estime le modèle avec les MCO et on corrige la matrice de variance covariance de $\hat{\beta}_{MCO}$

```
> coeftest(Periode_G, vcov = vcovHC)

t test of coefficients:

             Estimate Std. Error t value  Pr(>|t|)
(Intercept) 15.502043   1.471347 10.5360 < 2.2e-16 ***
S_GDP        0.355960   0.070499  5.0491 2.786e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
> vcovHC(Periode_G) ## matrice de variance-cov avec la correction de white
            (Intercept)        S_GDP
(Intercept)  2.16486223 -0.098549867
S_GDP       -0.09854987  0.004970175
```

1,47^2=2,16
0,07^2=0,0049

Moindres Carrés Ordinaires

```
> Periode_G <- lm( I_GDP ~ S_GDP, data=corr_IS)
> summary(Periode_G)

Call:
lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = corr_IS)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-11.3044  -2.0165  -0.4147   2.0558  13.6752 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  15.5020     1.2709  12.198  < 2e-16 ***
S_GDP         0.3560     0.0586   6.074 4.13e-08 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 4.07 on 79 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3183,	Adjusted R-squared:  0.3097 
F-statistic: 36.89 on 1 and 79 DF,  p-value: 4.126e-08
```

```
> vcov(Periode_G) ## matrice de variance-cov MCO
            (Intercept)        S_GDP
(Intercept)  1.61517252 -0.069604491
S_GDP       -0.06960449  0.003434499
```

1,27^2=1,61
0,058^2=0,0034

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Les outliers

```
> ## outlier
> influence.measures(Periode_G)
Influence measures of
         lm(formula = I_GDP ~ S_GDP, data = corr_IS) :

      dfb.1_  dfb.S_GD     dffit cov.r   cook.d    hat inf
1   0.176219 -0.103732  0.245738 0.943 2.91e-02 0.0150
2  -0.071505  0.039778 -0.104351 1.021 5.46e-03 0.0144
3   0.021064  0.000694  0.061018 1.031 1.88e-03 0.0123
4  -0.011178  0.019807  0.028580 1.050 4.13e-04 0.0238
5   0.020126 -0.056351 -0.107398 1.026 5.79e-03 0.0170
6  -0.165037  0.124335 -0.185191 1.010 1.70e-02 0.0225
7  -0.014424  0.011770 -0.015203 1.058 1.17e-04 0.0308
8  -0.130961  0.089201 -0.160771 1.007 1.29e-02 0.0178
9  -0.104206  0.134470  0.147373 1.100 1.10e-02 0.0737   *
10 -0.035790  0.019554 -0.052964 1.036 1.42e-03 0.0143
11  0.010392  0.007349  0.049055 1.034 1.22e-03 0.0126
12 -0.050806  0.033951 -0.063455 1.038 2.03e-03 0.0173
13 -0.009671 -0.001256 -0.030499 1.037 4.71e-04 0.0124
```

$$DFFIT_i = y_i - \hat{y}_{i,(i)}$$

$$DFBETA_i = \hat{\beta} - \hat{\beta}_{(i)}$$

$$COVRATIO_i = \frac{\det\left(\hat{\sigma}^2_{(i)}\ \left(X'_{(i)}X_{(i)}\right)^{-1}\right)}{\det\left(\hat{\sigma}^2\ \left(X'X\right)^{-1}\right)}$$

$$D_i^2 = \frac{(\hat{y} - \hat{y}_{(i)})'(\hat{y} - \hat{y}_{(i)})}{K\,\hat{\sigma}^2} = cook's\ distances$$

$$t_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}_i\sqrt{1 - h_{ii}}} = hat\ values$$

$$H = X(X'X)^{-1}X' = \text{"Hat Matrix"}$$

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Analyse par sous période

Estimation MCO pour chaque sous période

```
> System1 <- list( EQ2, EQ3)
> model_scontraint <- systemfit( System1, "OLS", data=corr_IS, maxit=100)
> summary(model_scontraint, residCov=FALSE, equations = FALSE)

systemfit results
method: OLS

         N  DF     SSR detRCov  OLS-R2 McElroy-R2
system 162 158 2956.67 185.954 0.39605   0.523598

     N DF     SSR     MSE    RMSE       R2   Adj R2
eq1 81 79 1128.81 14.2887 3.78004 0.600939 0.595887
eq2 81 79 1827.86 23.1374 4.81014 0.115646 0.104452


Coefficients:
                  Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
eq1_(Intercept) 10.6628877  1.1686691  9.12396 5.5733e-14 ***
eq1_S_GDP1       0.6098705  0.0559151 10.90709 < 2.22e-16 ***
eq2_(Intercept) 19.0406776  1.3058264 14.58132 < 2.22e-16 ***
eq2_S_GDP2       0.1821423  0.0566689  3.21415  0.0018952 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Test de contraintes – test de Fisher

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> R1 <- matrix( 0, nrow = 2, ncol = 4 )
> R1[ 1, 1 ] <- 1
> R1[ 1, 3 ] <- -1
> R1[ 2, 2 ] <- 1
> R1[ 2, 4 ] <- -1
> linearHypothesis( model_scontraint, R1, test = "F" )
Linear hypothesis test (F statistic of a Wald test)

Hypothesis:
eq1_((Intercept) - eq2_(Intercept) = 0
eq1_S_GDP1 - eq2_S_GDP2 = 0

Model 1: restricted model
Model 2: model_scontraint

  Res.Df Df      F    Pr(>F)
1    160
2    158  2 14.526 1.617e-06 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Analyse par sous période

Estimation avec la méthode de Zellner

```
> model_sure <- systemfit( System1, "SUR", data=corr_IS, maxit=100)
> summary(model_sure, residCov=FALSE, equations = FALSE)

systemfit results
method: iterated SUR

convergence achieved after 4 iterations

         N  DF     SSR detRCov   OLS-R2 McElroy-R2
system 162 158 2970.01 183.741 0.393324   0.528871

     N DF     SSR     MSE    RMSE       R2   Adj R2
eq1 81 79 1128.86 14.2894 3.78013 0.600920 0.595868
eq2 81 79 1841.15 23.3057 4.82759 0.109215 0.097939


Coefficients:
                    Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
eq1_(Intercept) 10.5963396  0.9945861 10.65402 < 2.22e-16 ***
eq1_S_GDP1       0.6132824  0.0462229 13.26795 < 2.22e-16 ***
eq2_(Intercept) 18.1376191  1.1246336 16.12758 < 2.22e-16 ***
eq2_S_GDP2       0.2250946  0.0470149  4.78773  7.736e-06 ***
```

Test de contraintes – test de Fisher

```
> linearHypothesis( model_sure, R1, test = "F" )
Linear hypothesis test (F statistic of a Wald test)

Hypothesis:
eq1_((Intercept) - eq2_(Intercept) = 0
eq1_S_GDP1 - eq2_S_GDP2 = 0

Model 1: restricted model
Model 2: model_sure

  Res.Df Df      F    Pr(>F)
1    160
2    158  2 31.221 3.748e-12 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Analyse par sous période

Estimation MCO avec contraintes

```
> model_contraint <- systemfit( System1, "OLS", data=corr_IS, restrict.matrix = R1)
> summary(model_contraint, residCov=FALSE, equations = FALSE)

systemfit results
method: OLS

         N  DF     SSR detRCov   OLS-R2 McElroy-R2
system 162 160 3470.16 345.308 0.291159   0.313899

      N DF     SSR     MSE    RMSE       R2   Adj R2
eq1  81 79 1445.49 18.2973 4.27754 0.488985 0.482517
eq2  81 79 2024.68 25.6288 5.06249 0.020420 0.008021


Coefficients:
                   Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
eq1_(Intercept) 15.6817407  0.9403681 16.67617 < 2.22e-16 ***
eq1_S_GDP1       0.3470280  0.0427478  8.11803 1.1924e-13 ***
eq2_(Intercept) 15.6817407  0.9403681 16.67617 < 2.22e-16 ***
eq2_S_GDP2       0.3470280  0.0427478  8.11803 1.1924e-13 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Test de contraintes – test LR

```
> lrTest1 <- lrtest( model_contraint, model_scontraint )
> print( lrTest1 )
Likelihood ratio test

Model 1: model_contraint
Model 2: model_scontraint
  #Df  LogLik Df  Chisq Pr(>Chisq)
1   3 -464.54
2   5 -439.48  2 50.134  1.299e-11 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

$$LR = T \cdot \left(log\left|\hat{\hat{\Sigma}}_r\right| - log\left|\hat{\hat{\Sigma}}_u\right| \right)$$

Le modèle de Feldstein et Horioka

- Analyse par sous période

Estimation avec la méthode de Zellner du modèle contraint

```
> model_sure_c <- systemfit( System1, "SUR", data=corr_IS, restrict.matrix = R1, maxit=100)
> summary(model_sure_c, residCov=FALSE, equations = FALSE)

systemfit results
method: iterated SUR

convergence achieved after 13 iterations

         N  DF     SSR detRCov   OLS-R2 McElroy-R2
system 162 160 3542.74  338.54 0.276333   0.357832

     N DF     SSR     MSE    RMSE        R2    Adj R2
eq1 81 79 1286.32 16.2826 4.03517  0.545254  0.539498
eq2 81 79 2256.42 28.5623 5.34437 -0.091702 -0.105521


Coefficients:
                  Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
eq1_(Intercept) 14.2035128  0.9949853 14.27510 < 2.22e-16 ***
eq1_S_GDP1       0.4244922  0.0451502  9.40178 < 2.22e-16 ***
eq2_(Intercept) 14.2035128  0.9949853 14.27510 < 2.22e-16 ***
eq2_S_GDP2       0.4244922  0.0451502  9.40178 < 2.22e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Test de contraintes – test LR

```
> lrTest2 <- lrtest( model_sure_c, model_sure )
> print( lrTest2 )
Likelihood ratio test

Model 1: model_sure_c
Model 2: model_sure
  #Df  LogLik Df Chisq Pr(>Chisq)
1   5 -463.74
2   7 -438.99  2  49.5  1.783e-11 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```