Simulations sous R

Le but de ce TD est :
- d'introduire la modélisation et la simulation de l'évolution dans le temps d'un phénomène aléatoire (appelé aussi processus aléatoire ou stochastique). On se limitera à des processus à temps discret.
- présenter et appliquer des méthodes **Monte Carlo** (MC).
  Les techniques de type MC désignent un ensemble de méthodes algorithmiques qui utilisent des simulations aléatoires répétées pour calculer des valeurs numériques.
  Un premier exemple est l'estimation de l'espérance d'une variable aléatoire à partir de la moyenne empirique d'un *grand nombre* de réalisations indépendants de la v.a. (application directe de la loi forte des grand nombres).

1 Modélisation d'un jeu de hasard : la roulette

La roulette est un jeu de hasard dans lequel chaque joueur, assis autour d'une table de jeu, mise sur un ou plusieurs numéros, une couleur, la hauteur ou la parité du numéro qu'il espère être tiré. Le tirage du numéro s'effectue à l'aide d'une bille jetée dans un récipient circulaire tournant et muni d'encoches ayant des numéros de différentes couleurs (source Wikipédia). Ici on s'intéresse aux paris sur la couleur (rouge ou noir) du nombre tiré. Généralement, sur ce type de pari, le gain du joueur est égal à sa mise.

On suppose que notre joueur parie sur : *"Le nombre tiré va être rouge "*. On prend comme exemple deux types de roulette : la roulette américaine et la roulette anglaise.

1.1 Roulette américaine

Elle contient les numéros de 1 à 36 colorés équitablement en rouge et en noir, un zéro et un double zéro colorés en vert. Dans ce cas, la probabilité de gain est donc $p = 18/38$. Si le nombre tiré est noir ou vert, le joueur perd la totalité de sa mise.

Créer une fonction `Bet` qui simule une réalisation de ce type de jeu en prenant comme paramètre la probabilité de gain p et renvoyant :

$$\begin{cases} 1 & \text{si le joueur gagne;} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire correspondant à la fonction `Bet` ?

1.2 Roulette anglaise (Bonus)

Elle contient les numéros de 1 à 36 colorés équitablement en rouge et en noir, plus le 0 coloré en vert. La probabilité de gain est $p = 18/37$. Si le zéro est tiré le joueur perd la moitié de sa mise et si le nombre tiré est noir il en perd la totalité.

Créer une fonction `EngBet` qui simule une réalisation de ce type de jeu. La fonction prendra deux paramètres p_r et p_v et doit renvoyer

$$\begin{cases} -1/2 & \text{avec probabilité } p_v \\ 1 & \text{avec probabilité } p_r \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - p_r - p_v. \end{cases}$$

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire correspondant à la fonction `EngBet` ?

2 Simulation du gain cumulé

Dans la suite, on s'intéresse à l'évolution du gain cumulé $(S_n)_{n\geq 0}$ d'un joueur qui parie de manière répété. Si on dénote B_n le résultat du n-ème pari, alors $S_0 = 0$ et :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k, \text{ pour } n \geq 1.$$

Les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ modélisent l'évolution d'un phénomène aléatoire et sont des exemples simples de processus aléatoires à temps discret.

2.1 Le joueur persévérant

Le but du joueur est de miser une unité à chaque étape tant que le gain cumulé est différent de 1. On suppose qu'il s'impose un nombre maximal d'étapes $N_{\max}$.

1. En utilisant la fonction `Bet()`, créer une fonction qui simule cette stratégie pour une probabilité de gain p et un nombre maximal d'étapes $N_{\max}$. La fonction retournera l'évolution du gain cumulé.

2. Simuler 10 réalisations de cette stratégie, pour $N_{\max} = 1000$ et $p_1 = 18/38$ (roulette américaine) et pour $N_{\max} = 1000$ et $p_2 = 1/2$ (jeu équitable). Dans les deux cas donner :
   a) le maximum du nombre de paris effectués par le joueur.
   b) la valeur minimale prise par le gain cumulé sur chacune des 10 réalisations et la moyenne empirique de ces minimums.
   c) la moyenne empirique du gain cumulé à la fin de la stratégie.

3. Application des méthodes Monte Carlo :
   a) Représenter l'évolution de la moyenne empirique du gain cumulé à la fin de la stratégie pour 1000 réalisations (on peut utiliser `replicate()`) en fonction de la probabilité de gain $p \in [0, 1]$ (considérer à chaque fois $N_{\max}$=100).
   Dans le cas de la roulette américaine, cette stratégie est-elle avantageuse pour le joueur ? Argumenter.
   b) Estimer la probabilité d'atteindre un gain cumulé égal à 1 sans dépasser $N_{\max} = 5000$ étapes, pour $p \in [1/3, 1]$.

Bonus : Reprendre toutes les questions précédentes en les adaptant à la roulette anglaise. Comparer les résultats.

2.2 Stratégie de Martingale (Bonus)

Pour optimiser la probabilité de gagner, de nombreuses stratégies ont été développées. La stratégie de Martingale est probablement la plus connue. L'idée est la suivante : le joueur commence par miser une unité et il parie jusqu'au premier gain en doublant la somme à chaque étape.
Exemple :

— A l'étape $n = 1$ il parie 1 unité et il perd ;
— A l'étape $n = 2$ il parie 2 unités et il perd ;
— A l'étape $n = 3$ il parie 4 unités et il gagne donc il s'arrête.

Autrement dit, tant que le joueur n'a pas gagné, à chaque étape n, la somme misée est 2^{n-1} unités et donc le profit cumulé est :

$$S_n = -\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = -(2^n - 1)$$

Comme la probabilité de gagner est strictement positive, le joueur va finir par gagner et récupérer l'argent perdu plus une unité supplémentaire.

1. En utilisant `Bet()`, créer une fonction qui simule des réalisations de cette stratégie pour une probabilité de gain p. Représenter, avec des couleurs différentes, sur le même graphique 5 réalisations de l'évolution du profit cumulé pour $p = 18/38$.
2. Simuler 10 réalisation de cette stratégie pour la roulette américaine et pour une probabilité de gain équitable $p = 1/2$. Dans les deux cas, donner le minimum atteint par le gain cumulé. Commenter le résultats.
3.Estimer (à l'aide d'une méthode MC) l'espérance du nombre de paris perdus avant le premier gain pour $p = 1/2$ et $p = 18/38$. Calculer la valeur minimale du gain cumulé correspondant à cette estimation. En utilisant le même échantillon, calculer ensuite la moyenne empirique de la valeur minimale atteinte par le gain cumulé. Commenter les résultats.

D'un point de vue théorique, cette stratégie est infaillible. Par contre, en pratique, pour garantir le succès, le joueur doit disposer d'une somme d'argent (et de temps) illimité. De plus, pour décourager ce type de stratégie, les casinos imposent une mise maximale.

4. Modifier la fonction créée en 1. pour intégrer une mise maximale $M_{\max}$ imposée par le casino : le joueur s'arrête quand il ne peut plus continuer sa stratégie sans dépasser $M_{\max}$.
5. En utilisant une méthode Monte Carlo, estimer la probabilité de réussite de la stratégie quand $M_{\max} = 100$.
6. Dans ce cas, la stratégie est-elle favorable au joueur ? Argumenter.