La valeur absolue

Théorie II

By Modular and Modulus

Définition choisie de la valeur absolue

Dans théorie I, nous avons expliqué que pour définir la valeur absolue d'un nombre réel, il convient de choisir la définition suivante :

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

Définition choisie de la valeur absolue

Dans théorie I, nous avons expliqué que pour définir la valeur absolue d'un nombre réel, il convient de choisir la définition suivante :

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Définition choisie de la valeur absolue

Dans théorie I, nous avons expliqué que pour définir la valeur absolue d'un nombre réel, il convient de choisir la définition suivante :

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Exemples.

Définition choisie de la valeur absolue

Dans théorie I, nous avons expliqué que pour définir la valeur absolue d'un nombre réel, il convient de choisir la définition suivante :

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Exemples.

1) Si a est un nombre réel négatif, alors $|a| = -a$.

Définition choisie de la valeur absolue

Dans théorie I, nous avons expliqué que pour définir la valeur absolue d'un nombre réel, il convient de choisir la définition suivante :

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Exemples.

1) Si a est un nombre réel négatif, alors $|a| = -a$.

2) Soient a et b deux nombres réels. Si $a > b$, alors

$$|b - a| = -(b - a) = -b + a = a - b.$$

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

- La notion de signe d'un nombre réel n'est pas définie.

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

- La notion de signe d'un nombre réel n'est pas définie.
- Elle n'est valable que dans des cas numériques.

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

- La notion de signe d'un nombre réel n'est pas définie.
- Elle n'est valable que dans des cas numériques.
- Elle n'est pas valable dans des cas où interviennent des expressions littérales.

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

- La notion de signe d'un nombre réel n'est pas définie.
- Elle n'est valable que dans des cas numériques.
- Elle n'est pas valable dans des cas où interviennent des expressions littérales. En effet, si a désigne un nombre réel, combien vaut $|a|$?

Une autre définition peu satisfaisante

On rencontre fréquemment la "définition" suivante :

Définition (Mauvaise définition)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre sans son signe.

Remarques

- La notion de signe d'un nombre réel n'est pas définie.
- Elle n'est valable que dans des cas numériques.
- Elle n'est pas valable dans des cas où interviennent des expressions littérales. En effet, si a désigne un nombre réel, combien vaut $|a|$?
- On ne sait pas si a est positif ou négatif, on ne peut donc pas déterminer son signe.

La fonction signe

On définit la fonction signe par

La fonction signe

On définit la fonction signe par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La "définition" précédente de la valeur absolue d'un réel pourrait alors se formuler correctement de la manière suivante :

La fonction signe

On définit la fonction signe par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La "définition" précédente de la valeur absolue d'un réel pourrait alors se formuler correctement de la manière suivante :

Définition (Une alternative correcte)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre réel **multiplié** par son signe.

On définit la fonction signe par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La "définition" précédente de la valeur absolue d'un réel pourrait alors se formuler correctement de la manière suivante :

Définition (Une alternative correcte)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre réel **multiplié** par son signe.

Cette définition est licite vu la proposition suivante :

La fonction signe

On définit la fonction signe par

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La "définition" précédente de la valeur absolue d'un réel pourrait alors se formuler correctement de la manière suivante :

Définition (Une alternative correcte)

La valeur absolue d'un nombre réel est le nombre réel **multiplié** par son signe.

Cette définition est licite vu la proposition suivante :

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve :

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

MATHMODULE

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

MATHMODULE

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a
$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$
- Si $x < 0$, alors on a
$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1)$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

<u>Preuve</u> : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1) = -x$$

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1) = -x$$

- Si $x = 0$, alors on a

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

<u>Preuve</u> : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1) = -x$$

- Si $x = 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

<u>Preuve</u> : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1) = -x$$

- Si $x = 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.0$$

La fonction signe, lien avec la valeur absolue

Proposition

Quel que soit le réel x, on a

$$|x| = x.sgn(x)$$

Preuve : Il nous suffit de distinguer les différents cas possibles.

- Si $x > 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.1 = x$$

- Si $x < 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.(-1) = -x$$

- Si $x = 0$, alors on a

$$|x| = x.sgn(x) = x.0 = 0$$

□