MATHMODULE

La valeur absolue

Théorie III

By Modular and Modulus

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

Quelques propriétés

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Quelques propriétés

Définition

La valeur absolue du nombre réel x, notée $|x|$, est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Proposition (Propriétés de la valeur absolue)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

1) $|x| \geqslant 0$;
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3) $|x| = |-x|$;
4) $|x|^2 = x^2$;
5) $|xy| = |x||y|$;
6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.

Preuve :

Preuve des différentes propriétés

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, on obtient que $|x| = x$ par définition. Donc, $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ par définition. Comme $x \leqslant 0$, il est clair que $-x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$.

Preuve des différentes propriétés

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, on obtient que $|x| = x$ par définition. Donc, $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ par définition. Comme $x \leqslant 0$, il est clair que $-x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$.
2) Montrons que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, on obtient que $|x| = x$ par définition. Donc, $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ par définition. Comme $x \leqslant 0$, il est clair que $-x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$.
2) Montrons que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Si $|x| = 0$, alors vu la définition, on sait que $x = -x$. Par conséquent, $x = 0$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Si $x = 0$, alors $|x| = 0$ par définition.

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, on obtient que $|x| = x$ par définition. Donc, $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ par définition. Comme $x \leqslant 0$, il est clair que $-x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$.
2) Montrons que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Si $|x| = 0$, alors vu la définition, on sait que $x = -x$. Par conséquent, $x = 0$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Si $x = 0$, alors $|x| = 0$ par définition.
3) Par définition, on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad |-x| = \begin{cases} -x & \text{si } -x \geqslant 0, \\ -(-x) & \text{si } -x \leqslant 0. \end{cases}$$

Preuve :

1) Montrons que $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, on obtient que $|x| = x$ par définition. Donc, $|x| \geqslant 0$.
   - Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$ par définition. Comme $x \leqslant 0$, il est clair que $-x \geqslant 0$. Donc, $|x| \geqslant 0$.
2) Montrons que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   - $\boxed{\Rightarrow}$ Si $|x| = 0$, alors vu la définition, on sait que $x = -x$. Par conséquent, $x = 0$.
   - $\boxed{\Leftarrow}$ Si $x = 0$, alors $|x| = 0$ par définition.
3) Par définition, on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad |-x| = \begin{cases} -x & \text{si } -x \geqslant 0, \\ -(-x) & \text{si } -x \leqslant 0. \end{cases}$$

Cela revient à dire que

$$|-x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0, \\ x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Preuve des différentes propriétés (suite)

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.

Preuve des différentes propriétés (suite)

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \geqslant 0$, on sait que $|x| = x$. Par conséquent, on a bien que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \leqslant 0$, on sait que $|x| = -x$. Ainsi, on a $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \geqslant 0$, on sait que $|x| = x$. Par conséquent, on a bien que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \leqslant 0$, on sait que $|x| = -x$. Ainsi, on a $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.
5) Il nous faut distinguer trois cas :
   1) le cas où $xy > 0$;

Preuve des différentes propriétés (suite)

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \geqslant 0$, on sait que $|x| = x$. Par conséquent, on a bien que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \leqslant 0$, on sait que $|x| = -x$. Ainsi, on a $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

5) Il nous faut distinguer trois cas :
   1) le cas où $xy > 0$;
      - Supposons que $x > 0$ et $y > 0$. Alors, par définition, on a $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
      - Supposons que $x < 0$ et que $y < 0$. Alors, par la définition, on a $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$

Preuve des différentes propriétés (suite)

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \geqslant 0$, on sait que $|x| = x$. Par conséquent, on a bien que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \leqslant 0$, on sait que $|x| = -x$. Ainsi, on a $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.
5) Il nous faut distinguer trois cas :
   1) le cas où $xy > 0$;
      - Supposons que $x > 0$ et $y > 0$. Alors, par définition, on a $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
      - Supposons que $x < 0$ et que $y < 0$. Alors, par la définition, on a $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$
   2) le cas où $xy = 0$;

4) Montrons que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \geqslant 0$, on sait que $|x| = x$. Par conséquent, on a bien que $|x|^2 = x^2$.
   - Par définition, si $x \leqslant 0$, on sait que $|x| = -x$. Ainsi, on a $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.
5) Il nous faut distinguer trois cas :
   1) le cas où $xy > 0$;
      - Supposons que $x > 0$ et $y > 0$. Alors, par définition, on a $|xy| = xy = |x|\,|y|$.
      - Supposons que $x < 0$ et que $y < 0$. Alors, par la définition, on a $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x|\,|y|$
   2) le cas où $xy = 0$;
      Si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x = 0$. Par la propriété 2), on sait que $|0| = 0$. Par conséquent,

$$|xy| = |0| = 0 \quad \text{et} \quad |x|\,|y| = |0|\,|y| = 0.y = 0$$

5) (suite)

5) (suite)
   3) le cas où $xy < 0$.

5) (suite)

   3) le cas où $xy < 0$.

   Si $xy < 0$, alors ($x > 0$ et $y < 0$) ou ($x < 0$ et $y > 0$.) Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $y < 0$.

5) (suite)

3) le cas où $xy < 0$.

Si $xy < 0$, alors ($x > 0$ et $y < 0$) ou ($x < 0$ et $y > 0$.) Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $y < 0$. Par définition, on obtient alors que

$$|xy| = -xy$$

et

$$|x|\,|y| = x.(-y) = -xy$$

5) (suite)

3) le cas où $xy < 0$.

Si $xy < 0$, alors ($x > 0$ et $y < 0$) ou ($x < 0$ et $y > 0$.) Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $y < 0$. Par définition, on obtient alors que

$$|xy| = -xy$$

et

$$|x|\,|y| = x.(-y) = -xy$$

6) Nous devons montrer que $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.

5) (suite)

3) le cas où $xy < 0$.

Si $xy < 0$, alors ($x > 0$ et $y < 0$) ou ($x < 0$ et $y > 0$.) Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $y < 0$. Par définition, on obtient alors que

$$|xy| = -xy$$

et

$$|x|\,|y| = x.(-y) = -xy$$

6) Nous devons montrer que $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$. On sait que

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right|$$

5) (suite)

3) le cas où $xy < 0$.

Si $xy < 0$, alors ($x > 0$ et $y < 0$) ou ($x < 0$ et $y > 0$.) Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $y < 0$. Par définition, on obtient alors que

$$|xy| = -xy$$

et

$$|x|\,|y| = x.(-y) = -xy$$

6) Nous devons montrer que $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$. On sait que

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right|$$

Par la propriété précédente, on a

$$\left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x|.\left|\frac{1}{y}\right|$$

6) (suite)

6) (suite)

Or, par définition, on sait que $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$.

6) (suite)

Or, par définition, on sait que $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}\cdot$ En effet,

$$\left|\frac{1}{y}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } \dfrac{1}{y} \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } -\dfrac{1}{y} \leqslant 0. \end{cases}$$

6) (suite)

Or, par définition, on sait que $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}\cdot$ En effet,

$$\left|\frac{1}{y}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } \dfrac{1}{y} \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } -\dfrac{1}{y} \leqslant 0. \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{|y|} = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } y \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } y \leqslant 0. \end{cases}$$

6) (suite)

Or, par définition, on sait que $\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{|y|}$. En effet,

$$\left|\frac{1}{y}\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } \dfrac{1}{y} \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } -\dfrac{1}{y} \leqslant 0. \end{cases}$$

et

$$\frac{1}{|y|} = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } y \geqslant 0, \\ -\dfrac{1}{y} & \text{si } y \leqslant 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\left|x \cdot \dfrac{1}{y}\right| = |x|. \left|\dfrac{1}{y}\right| = |x| \cdot \dfrac{1}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

$\square$